Comportamento Metaestável de
 n Modelos de Ising Estocásticos
 D -Dimensionais
Dinamicamente Acoplados
em Temperaturas Muito Baixas

ELIANA CREPALDI YAZAWA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: Probabilidade
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Jordão Neves

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do CNPq.

-São Paulo, dezembro de 1996-

Comportamento Metaestável de
 n Modelos de Ising Estocásticos
 D -Dimensionais
Dinamicamente Acoplados
em Temperaturas Muito Baixas

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Eliana Crepaldi Yazawa
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 05 de dezembro de 1996.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Jordão Neves (orientador) - DE-IME-SP
Prof. Dr. Jefferson Antonio Galves - DE-IME-SP
Prof. Dr. João Carlos Alves Barata - IF-SP

Abstract

We study the evolution of n D -dimensional Stochastic Ising Models with coupled dynamics considering both volume and positive magnetic fields fixed in each model and the temperature going to zero, since the configuration on which the spins in all n models are -1 until the spins change to $+1$. We consider the evolution of the process according to a stochastic dynamics in which many spins that are in the same site can move simultaneously with a Metropolis dynamics. This problem presents some interesting differences in relation to the case $n = 1$, that is, the usual Stochastic Ising Model. We consider the case on which the fields are not too small (larger than $2(D - 1)$), studying characteristics of the trajectories of the process and the time of transition appropriately scaled.

Resumo

Estudamos a evolução de n Modelos de Ising Estocásticos D -dimensionais dinamicamente acoplados considerando-se o volume e os campos magnéticos positivos em cada modelo fixos e a temperatura tendendo a zero, desde a configuração em que os spins em todos os n modelos são -1 até todos passarem para $+1$. Consideramos o desenvolvimento do processo segundo uma dinâmica estocástica na qual vários spins, correspondendo ao mesmo sítio, podem mudar simultaneamente conforme uma dinâmica de Metrópolis. Este problema apresenta algumas diferenças interessantes em relação ao caso $n = 1$, ou seja, em relação ao Modelo de Ising Estocástico usual. Consideramos o caso de campos não muito pequenos (maiores que $2(D - 1)$), estudando tanto as características das trajetórias do processo quanto o tempo de transição devidamente escalado.

*“Lembre que na praia,
cada onda que cresce e se desenvolve,
deve a sua beleza ao desmanchar da onda que a precedeu.”*

*Dedico
este trabalho
aos meus pais
Elizena e Yoschio
e à minha irmã
Luciana,
pelo amor sem medida e
pelo nosso convívio pleno.*

AGRADECIMENTOS

*Ao meu orientador **Eduardo Jordão Neves** que contribuiu diretamente no aprendizado de toda a teoria necessária para a elaboração do trabalho e compreensão da área à qual este está inserido, pela dedicação e caráter profissional, pela paciência e pelo brilhante empenho na orientação em cada fase do Mestrado.*

*À minha família, em especial aos meus pais **Elizena e Yoschio**, à **Luciana**, ao **Paulo** e à **Sam**, que me apoiaram, incentivaram e viveram plenamente comigo não somente esses últimos anos, mas cada fase da minha vida, cada instante que me permitiu chegar até aqui.*

*Aos meus avós **João e Eliza**, que mesmo estando com **Ele**, continuam mostrando amor e sabedoria no que ensinaram.*

*Ao **Aldy** que passou a ser parte da minha vida de uma forma maravilhosa. Obrigada pela força e apoio, pelas nossas longas conversas, pela paciência e pelo seu carinho.*

*Aos meus amigos, cujos nomes não estão aqui, mas no meu coração; a todos aqueles que mesmo que o nosso convívio direto tenha sido passageiro ou permanece até hoje, qualifica nosso relacionamento como amizade verdadeira. Obrigada pelos desabafos, aquela força, a atenção especial e as ajudas no **LaTeX**.*

Aos meus colegas que são muitos e que passam pela vida deixando breves, mas belas recordações.

*Aos funcionários e professores daqui do **IME** com os quais tive a chance de conviver, em especial àqueles que testemunharam o que era ensinar e aprender.*

*Aos professores e amigos do Departamento de Matemática da **UNESP-Campus de Rio Claro**, onde vivi e aprendi durante meus quatro anos de Graduação; em especial à **Nativi**, ao **João Ivo** e à **Rosa**. Agradeço à **Nativi** a orientação em Iniciação Científica, a amizade e o apoio para continuar meus estudos.*

Ao Instituto de Matemática e Estatística como um todo, onde consegui ter meu pequeno espaço e mostrar meu trabalho.

*E a **Deus**, que sem **Ele** nada disso teria **VIDA**.*

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Descrição dos resultados.	8
2	Definições e descrição dos resultados auxiliares	22
3	Principais aspectos do processo	40
3.1	Ausência de atratividade.	40
3.2	Ausência de metaestabilidade para $h > 2D$	45
3.3	Tempo para sair da situação metaestável quando $h \in (2(D - 1), 2D)$	53
4	Possíveis trajetórias para campos iguais em $(2(D - 1), 2D)$	77
5	Possíveis trajetórias para valores distintos de campo em $(2(D - 1), 2D)$	83
	Referências Bibliográficas	92

Capítulo 1

Introdução

Apresentaremos neste trabalho o estudo da evolução de um processo estocástico descrito por n Modelos de Ising Estocásticos D -dimensionais dinamicamente acoplados, analisando alguns aspectos do comportamento metaestável que o processo pode apresentar. Mesmo no caso de campos magnéticos fortes que estudaremos aqui, esse comportamento metaestável já mostra diferenças bastante interessantes em relação ao caso $n = 1$ do Modelo de Ising Estocástico usual presente em [NS1], [NS2], [N1], [N2], [S2]. Em particular, como veremos, o processo não é mais *monótono* (ou *atrativo* na notação mais usual de Sistemas de Partículas como em [Lig]-pág.72). Surgem aspectos novos na evolução típica a baixas temperaturas do processo e mesmo a situação não metaestável (quando os campos magnéticos são muito fortes) passa a exibir uma caricatura de “*transição de fase dinâmica*”.

Consideramos cada Modelo de Ising Estocástico D -dimensional definido no toro $\Lambda_N = \{1, \dots, N\}^D$ com condições periódicas de fronteira, sendo N um inteiro positivo fixado e $D \geq 1$. Nesta evolução do processo, somente um sítio de Λ_N muda por vez, sendo que um sítio i de Λ_N denota as posições $(i; 1), (i; 2), \dots, (i; n)$ nos modelos e em cada posição, o

spin pode assumir os valores -1 ou $+1$.

Podemos informalmente dizer que um processo estocástico apresenta comportamento metaestável se possui uma única medida de probabilidade estacionária mas, sob condições iniciais adequadas, se comporta como se estivesse em equilíbrio e descrito por outra medida estacionária, até que, após um tempo longo, ocorre a transição de forma brusca e imprevisível para o verdadeiro equilíbrio.

Ao estudar este comportamento metaestável é importante entender o caminho pelo qual o sistema percorre, até estar próximo de uma transição de fase, passando de um estado metaestável rumo a um estado estável.

Um exemplo pode ser dado com relação a esse comportamento: consideremos vapor dentro de um recipiente que é submetido a aumento de pressão a temperatura fixa. Este procedimento pode ser feito de tal maneira que o conteúdo do recipiente apresente esta forma gasosa por um longo tempo, pois mesmo que algumas pequenas gotas apareçam, elas diminuem e voltam ao estado inicial. Neste caso, o processo está numa situação de aparente equilíbrio, num estado metaestável, e mostrando propriedades de um gás. Porém, repentinamente, após a formação de uma gota de líquido dentro do recipiente, com tamanho e forma adequados e que sejam resultantes de uma flutuação no vapor metaestável, este pode rapidamente passar para o estado líquido de equilíbrio.

Assim, um sistema tem comportamento metaestável se ocorrem dois fatos: o primeiro é permanecer fora da situação de equilíbrio durante um tempo aleatório e sem memória, ou seja, um tempo com distribuição Exponencial; o outro fato é que durante este tempo no qual o sistema está fora da situação de equilíbrio ele estabiliza no sentido que um

observador medindo as médias temporais de alguma quantidade observável obterá valores próximos da esperança desse observável em alguma distribuição de probabilidade fixada sobre as configurações do sistema. Esta propriedade é chamada de termalização. Na evolução do sistema, podemos ter situações nas quais o processo se afasta da configuração inicial mas, rapidamente, volta para a mesma. Com isso, se o sistema apresenta comportamento metaestável então num intervalo de tempo fixo, é difícil e raro que o processo fique longe da sua configuração inicial. Estas tentativas podem ocorrer várias vezes, todas sem sucesso, até que, num instante imprevisível, o processo consegue sair dessa situação, através de alguma grande flutuação espontânea que nucleará o sistema para uma nova fase.

Em [NS1] é feito o estudo do comportamento metaestável do Modelo de Ising Ferromagnético de Vizinhos Próximos Bidimensional em um volume finito e temperaturas muito baixas. Nesta referência, houve verificação de que as gotas pequenas tendiam a diminuir e desaparecer, enquanto que as grandes tendiam a crescer, e que para que o sistema deixasse a situação metaestável, deveria haver a formação do que podemos chamar de gota crítica, a partir da qual, com grande probabilidade a baixas temperaturas, o sistema alcança a situação estável. Viu-se que a energia desta gota era justamente a barreira de energia que o sistema tinha que superar para que ocorresse a nucleação: com a gota crítica, transições ocorrem no sistema conduzindo-o à configuração com todos os sítios tendo seus spins $+1$, sem antes voltar à configuração com todos os sítios tendo seus spins -1 .

Uma motivação para o surgimento da área de Sistemas de Partículas foram problemas presentes na Mecânica Estatística fora do equilíbrio (e este com relação ao vapor num recipiente é um exemplo), cuja meta é justamente descrever e analisar modelos estocásticos para a evolução temporal de sistemas que se desenvolvem em direção a um estado que seja

o de equilíbrio. Existem situações adequadas nas quais as medidas invariantes da evolução temporal dos sistemas descrevem o sistema em equilíbrio e coincidem com a Medida de Gibbs, o principal objeto de estudo da Mecânica Estatística do equilíbrio. Um estudo sobre Medidas de Gibbs pode ser encontrado em [G], [P] e [EFS].

Nesta área, além do Modelo de Ising existem outros modelos que também são bastante estudados, como por exemplo, o Modelo do Votante, o Processo de Contato e o Processo de Exclusão ([D], [E] e [Lig]).

Com o objetivo de definirmos alguns aspectos dos modelos citados, vamos começar supondo que $\{\varphi_t(i), i \in S \text{ e } t \geq 0\}$ seja uma coleção de cadeias de Markov a tempo contínuo com espaço de estados ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, +1\}$; aqui S é um conjunto finito ou enumerável de sítios.

A título de comentário, observemos somente que quando as partículas não apresentam interação, elas se comportam como cadeias de Markov com estados independentes. Temos os casos mais interessantes quando existe interação entre as partículas; estes casos estão presentes na justificativa das propriedades macroscópicas de sistemas termodinâmicos em equilíbrio a partir dos constituintes microscópicos que se interagem.

O *Modelo de Ising* é um Processo de Markov com espaço de estado $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Os sítios representam átomos de ferro, enquanto que os valores $+1$ ou -1 representam o spin do átomo no sítio. Sejam φ uma configuração de $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e i um sítio de $\mathbb{Z}^d$. O spin φ_i troca para $-\varphi_i$ com taxa

$$e^{-\beta \sum_{j \in \mathbb{Z}^d: \langle i, j \rangle} \varphi_i \varphi_j},$$

onde β é o inverso da temperatura e a notação $\langle i, j \rangle$ significa que os sítios i, j são vizinhos próximos (definiremos isto no Capítulo posterior).

O *Modelo do Votante* é um Processo de Markov com espaço de estado $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Sejam φ uma configuração de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e i um sítio de $\mathbb{Z}^d$; φ_i troca para $1 - \varphi_i$ com taxa

$$\frac{1}{2d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d: \langle i, j \rangle} \mathbf{1}_{\{\varphi_i \neq \varphi_j\}}.$$

O *Processo de Contato* é um Processo de Markov com espaço de estado $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. O valor 0 pode representar, por exemplo, um indivíduo doente e o valor 1 pode representar um indivíduo sadio. Sejam φ uma configuração de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e i um sítio de $\mathbb{Z}^d$. Se $\varphi_i = 0$ então φ_i muda para 1 com taxa 1 e se $\varphi_i = 1$ então φ_i muda para 0 com taxa $\lambda \sum_{j \in \mathbb{Z}^d: \langle i, j \rangle} \varphi_j$, onde λ é um parâmetro positivo interpretado como a taxa de infecção. Um estudo sobre metaestabilidade neste processo pode ser encontrado em [S1].

O *Processo de Exclusão* é um Processo de Markov com espaço de estado $\{0, 1\}^S$, onde S é um conjunto enumerável. As partículas movem sobre S de modo que exista no máximo uma partícula por sítio de S .

Até agora falamos bastante sobre Processos de Markov a tempo contínuo que descrevem modelos existentes em Sistemas de Partículas. Vejamos de maneira breve como estes processos podem ser formalmente construídos ([E] e [Lig]).

Sendo X o espaço das configurações (um espaço métrico com métrica gerada pelos conjuntos de Borel) e $D[0, \infty)$ o conjunto das trajetórias, ou seja, das funções φ_t em $[0, \infty)$ assumindo valores em X podemos considerar que o valor esperado de uma função contínua em X aplicada em φ_t , que é o valor esperado de f com respeito à medida de probabilidade P^φ no instante t é igual a $S(t)f(\varphi)$, sendo que P^φ , com $\varphi \in X$ é um Processo de Markov e $\{S(t), t \geq 0\}$ são operadores lineares; consideremos então $S(t)f(\varphi) = E^\varphi f(\varphi_t)$. Desde que essa coleção de operadores lineares $\{S(t), t \geq 0\}$ satisfaçam a condição de ser um

semigrupo de Markov, com o Teorema de Hille-Yosida concluímos que estes são geradores de Markov.

No caso de um Sistema de Spins (como em [Lig]) com espaço das configurações X , o operador linear L sobre f , que é uma função contínua, determina o gerador do processo por

$$(Lf)(\varphi) = \sum_{i \in S} c(i, \varphi)[f(\varphi^i) - f(\varphi)],$$

onde f também é tal que

$$\sum_{i \in S} \sup\{|f(\varphi) - f(\xi)| : \varphi_j = \xi_j, \forall j \neq i, j \in S\} < \infty,$$

$c(i, \varphi)$ é a taxa de troca da configuração φ apenas no sítio i , φ^i é a configuração φ com apenas o spin do sítio i trocado e φ_i é a configuração presente em i , quando a configuração em S é φ .

Finalmente, para se estudar metaestabilidade, adotaremos o enfoque “trajetória por trajetória” presente em [CGOV].

Neste enfoque, a metaestabilidade é verificada através do comportamento de trajetórias típicas do processo em estudo.

Observando somente para o tempo de evolução de distribuições de probabilidade que estão associadas ao processo, podemos não perceber a mudança para o estado de equilíbrio verdadeiro, pois a evolução é suave e lenta até que se alcance a situação estável. Sob uma reescala adequada, estas trajetórias convergem para um processo Markoviano de Salto quando a temperatura é muito baixa. Esta outra escala de tempo permite a termalização do sistema, ou seja, permite que as médias temporais tomadas ao longo das trajetórias nesta escala se estabilizem, como se o sistema estivesse em equilíbrio. A propriedade de Markov é uma característica importante: o tempo é exponencial até o salto e a transição é imprevisível.

1.1 Descrição dos resultados.

Existem várias maneiras de definir um processo estocástico descrevendo n Modelos de Ising Estocásticos D -dimensionais dinamicamente acoplados. Porém, como já falamos, em todas as que serão consideradas, somente um sítio i de Λ_N , o qual determina as posições $(i; 1), \dots, (i; n)$, é que muda por vez.

Consideramos a dinâmica que caracteriza o que em [Lig] é denominado um Sistema de Spins, onde apenas um sítio de Λ_N muda em cada transição; observemos que nesta referência, cada spin pode assumir 2 valores, enquanto que no nosso caso, cada spin pode assumir 2^n possíveis valores. Chamamos a dinâmica como sendo de Glauber.

Para descrever esta dinâmica, escolhemos as taxas com que ocorrem as transições no processo, dadas pela dinâmica de Metrópolis.

Mesmo com estas considerações, podemos definir a evolução do processo de maneiras diferentes.

Podemos supor que a probabilidade de pelo menos dois spins em posições diferentes, mas referentes a um mesmo sítio de Λ_N mudarem juntos quando o spin de Λ_N muda, é zero. Dessa forma, se para uma dada configuração φ no espaço das configurações desses n modelos que será denotado por Ω e para algum sítio $i \in \Lambda_N$, a mudança permitida é a alteração em somente um $(i; k_0)$, para algum $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ então a diferença de energia entre as configurações antes e após esta mudança no sítio i , que podemos definir como a soma de todas as diferenças de energia referentes a cada camada, antes e após esta transição, será $\sum_{k=1}^n \Delta_i H^k(\varphi) = \Delta_i H^{k_0}(\varphi)$ pois as demais camadas nesta mudança ficarão inalteradas. Neste caso, ao observarmos os n modelos, a dinâmica é a de um Sistema de Spins, devido ao fato de que apenas um modelo muda sua configuração de cada vez em apenas um sítio, ou seja, num determinado passo, enquanto a mudança acontece em $(i; k_0)$,

onde o spin possui valores $+1$ ou -1 , os demais modelos permanecem como estão. Assim, se estivéssemos na condição citada então haveria independência entre os modelos, uma vez que a evolução em cada um é a de um Modelo de Ising Estocástico D -dimensional, com resultados já conhecidos em [NS1], [NS2], [N1], [N2], [S2].

Uma segunda maneira de definir a evolução do processo é determinando-se que os n modelos evoluam juntos “rigidamente”, isto é, a partir da configuração inicial, a transição em qualquer sítio i de Λ_N deve envolver todas as n posições dadas por $(i; 1), (i; 2), \dots, (i; n)$. Nesta situação, os n modelos não são independentes mas, desde que na configuração inicial, em todos os sítios dos n modelos os spins sejam -1 , eles evoluem como se fosse somente um Modelo de Ising Estocástico D -dimensional, onde antes e após cada transição, a diferença de energia neste único modelo possui o fator n na sua expressão.

Neste trabalho, consideramos o caso mais interessante que é, na verdade, intermediário entre os dois casos mencionados. Estando numa configuração φ de Ω , a transição de $\varphi_i = (\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^n) = (\varphi(i; 1), \dots, \varphi(i; n))$, onde $i \in \Lambda_N$, pode ser para qualquer n -upla apresentando qualquer combinação de valores $+1$ ou -1 , com exceção da que já se apresenta e o comportamento em um certo sítio i na k -ésima camada, ou seja, em $(i; k)$, com $i \in \Lambda_N$ e $k \in \{1, \dots, n\}$, pode não ser o mesmo se estivermos observando somente para a camada contendo esse spin $\varphi_i^k = \varphi(i; k)$ e não houvesse outras camadas se desenvolvendo junto com φ^k . Observemos que quando a configuração em Λ_N é φ falaremos de um spin referente a um certo sítio i de Λ_N localizado na k -ésima camada, para $k \in \{1, \dots, n\}$, como $\varphi_i^k = \varphi(i; k)$ (usaremos mais a primeira notação e somente a segunda quando for necessária). A evolução não apresenta independência entre os modelos e a dinâmica nesses n modelos, cujos spins assumem os valores $+1$ ou -1 , pode não ser necessariamente a de um Sistema de Spins; podemos ter spins distintos, que estão em posições diferentes,

mas referentes a um mesmo sítio i de Λ_N , variando simultaneamente. E se observarmos a evolução de somente um modelo sem verificar os demais, ele não é mais Markoviano.

Faz parte do nosso estudo estimar o tempo que o processo leva para sair da configuração onde todos os sítios em todos os n modelos possuem seus spins -1 até todos passarem para $+1$.

Por definição, vamos tomar a configuração φ_0 como sendo aquela em que todos os spins nos n modelos são -1 , enquanto que a configuração Ψ é aquela em que todos os spins nos n modelos são $+1$.

Vamos definir também, que um modelo que esteja na posição k , com $k \in \{1, \dots, n\}$, tem configuração $\underline{-1}$ se $\forall i \in \Lambda_N$, o spin em $(i; k)$ é -1 e tem configuração $\underline{+1}$ se $\forall i \in \Lambda_N$, o spin em $(i; k)$ é $+1$.

Queremos então, de fato, estimar o tempo que o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ leva da configuração φ_0 até Ψ , onde $X_t^{\varphi_0}$ nos informa em qual configuração os n modelos se encontram no instante t , quando o processo iniciou em φ_0 . Consequentemente, isso nos conduz a analisar como o processo faz essa mudança, ou seja, quais são as possíveis trajetórias de φ_0 até Ψ e também, se o processo apresenta alguma tendência nas trajetórias de acordo com o campo magnético que considerarmos para cada modelo.

Formalmente, como já mencionamos na primeira parte dessa Introdução, podemos dizer que o sistema que estamos estudando é um Processo de Markov a tempo contínuo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ cujo espaço das configurações é Ω e possui o gerador L dado por

$$(Lf)(\sigma) = \sum_{i \in \Lambda_N} \sum_{a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}} c(i, a, \varphi) [f(a_i \varphi) - f(\varphi)],$$

onde $\varphi \in \Omega$, $c(i, a, \varphi)$ é a taxa com que na configuração φ o spin φ_i troca para $a \neq \varphi_i$, Ω_0 é o conjunto das possíveis configurações num sítio i de Λ_N e a função f (um observável)

para a qual L se aplica é tal que

$$f : \Omega = \Omega_0^{\Lambda_N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Veremos que no limite para baixas temperaturas, fixando em cada um dos n modelos o volume e o campo magnético positivo, o processo apresenta o comportamento chamado metaestável, mas somente para determinados valores dos campos que, a princípio, vamos tomá-los iguais em todos os n modelos. Como β é o inverso da temperatura então tomar o limite para baixas temperaturas será o mesmo que considerar β tendendo a infinito.

Em [NS1], o processo tem por característica o fato de que, na sua evolução, a ordem parcial natural é preservada; o processo é então atrativo.

Dadas duas configurações $\varphi, \sigma \in \Omega$, dizemos que elas satisfazem a ordem parcial natural $\varphi \leq \sigma$ se, e somente se, $\varphi_i^k \leq \sigma_i^k, \forall i \in \Lambda_N$ e $\forall k \in \{1, \dots, n\}$.

Uma observação interessante é que essa ordem parcial natural pode não ser preservada no decorrer do processo que estamos considerando, nos indicando, portanto, que ele não é atrativo.

Sendo $\mathcal{M}$ o conjunto das funções contínuas que são monótonas, por definição, um processo é *atrativo* (ver [E] ou [Lig]) se supondo $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ um Processo de Feller sobre Ω com semigrupo $S(t)$ então são equivalentes:

- a) Se $f \in \mathcal{M}$ então $S(t)f \in \mathcal{M}, \forall t \geq 0$.
- b) Se $\mu_1 \leq \mu_2$ então $\mu_1 S(t) \leq \mu_2 S(t), \forall t \geq 0$.

As medidas μ_1 e μ_2 são medidas de probabilidade do espaço das configurações, com a

topologia da convergência fraca.

Temos o resultado:

Teorema 1.1 . Sejam os processos $(X_t^\eta)_{t \geq 0}$ e $(X_t^\xi)_{t \geq 0}$, onde $\eta \leq \xi$. Suponha que μ_1 e μ_2 sejam medidas de probabilidade sobre Ω tais que

$$\mu_1(\eta) = \nu\{(X_0^\eta, X_0^\xi) : X_0^\eta = \eta\} \text{ e } \mu_2(\xi) = \nu\{(X_0^\eta, X_0^\xi) : X_0^\xi = \xi\}.$$

Existem configurações $\eta, \xi \in \Omega$ tais que qualquer que seja o processo acoplado $(X_t^\eta, X_t^\xi)_{t \geq 0}$ temos

$$\nu\{(X_t^\eta, X_t^\xi) : X_t^\eta \leq X_t^\xi, \forall t \geq 0\} < 1.$$

Na mesma referência [NS1], para o caso do campo magnético $h > 4$ o processo não apresenta metaestabilidade para ir de $\underline{-1}$ até $\underline{+1}$. Não há problema em estender para o caso $h > 2D$ (devido ao estudo em [NS1] e [N1], cujos resultados podem ser aplicados para o caso geral, estando num volume finito). Cada troca na qual um spin -1 passa para $+1$ acontece com taxa 1, e é com probabilidade indo a zero em baixas temperaturas, ou seja, para β grande, que algum spin $+1$ volta para -1 . É definido um processo $(Y_t^\zeta)_{t \geq 0}$, onde ζ é a configuração inicial $\underline{-1}$, na qual spins -1 passam para $+1$ com taxa 1 e spins $+1$ passam para -1 com taxa 0; existe um acoplamento entre este processo $(Y_t^\zeta)_{t \geq 0}$ e o processo original que descreve o Modelo de Ising, de modo que com grande probabilidade quando β cresce, ambos se desenvolvem juntos até um tempo finito. Para que algum spin que seja $+1$ passe para -1 , a diferença de energia é de no mínimo, $h - 2D > 0$ e, portanto, pela definição do processo $(Y_t^\zeta)_{t \geq 0}$, a taxa dessa transição é zero. Neste caso, o número de spins $+1$ apenas aumenta até que a configuração $\underline{+1}$ é alcançada.

Já no nosso caso, para o mesmo valor de campo dado por $h > 2D$, o processo não apresenta metaestabilidade desde a configuração inicial φ_0 (onde todos os modelos apresentam configuração -1) até alcançar Ψ (onde todos os modelos apresentam configuração $+1$). Uma mudança importante no comportamento do processo é que não é para todo valor do campo superior a $2D$ que existe monotonicidade quanto ao número de spins $+1$ que aparecem nos n modelos.

Até o instante em que os n modelos alcançam cada um a configuração $+1$ existem dois possíveis casos, ambos na situação em que não há metaestabilidade: se $h \in (2D, 2Dn)$ então o número de spins $+1$ nos n modelos não somente cresce, já que existem transições que ocorrem com probabilidade positiva para β grande, nas quais o número de spins $+1$ podem diminuir sem que todos os spins $+1$ desapareçam; já no outro caso, se $h > 2Dn$ então o processo apresenta esta monotonicidade.

Para sermos mais precisos, sejam as seguintes definições:

$$|X_t^{\varphi_0}| = |\{(i; k) \in \Lambda_N \times \{1, \dots, n\} : X_t^{\varphi_0}(i; k) = +1\}|,$$

$$T = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} = \Psi\}.$$

Temos os resultados:

Teorema 1.2 . Se $h > 2D$ então $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T \leq e^{\beta\varepsilon}) = 1.$$

Teorema 1.3 . Consideremos o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$.

a) Se $h \in (2D, 2Dn)$ então para $0 \leq t_1 < t_2$ temos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_{t_1}^{\varphi_0}| \leq |X_{t_2}^{\varphi_0}|) < 1.$$

b) Se $h > 2Dn$ então para $0 \leq t_1 < t_2$ temos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_{t_1}^{\varphi_0}| \leq |X_{t_2}^{\varphi_0}|) = 1.$$

Veremos resultados que são válidos para qualquer valor do campo magnético $h > 0$ (por exemplo, os Lemas 3.5 e 3.9 presentes na Seção 3 do Capítulo 3), mas vamos considerar o campo magnético h em todos os n modelos ainda iguais e pertencentes ao intervalo $(2(D-1), 2D)$. A razão de tomarmos este intervalo é pelo fato que este caso é o mais simples no qual o processo apresenta o comportamento metaestável, ou seja, em baixas temperaturas, o processo se comporta como se seu estado de equilíbrio fosse a configuração φ_0 , ficando aí um tempo muito grande até que com o aparecimento de alguma formação com spins $+1$, o processo passa para o verdadeiro estado de equilíbrio num tempo rápido com relação ao que falamos antes, atingindo a configuração Ψ . Diante disso, temos o interesse de estimar o quanto o processo demora para sair da configuração φ_0 até alcançar Ψ , ou seja, estimar T , quando β é grande.

No caso da primeira dinâmica que é aquela onde spins em posições diferentes mas referentes a um mesmo sítio de Λ_N têm probabilidade zero de mudarem juntos, temos que quando uma primeira entre as n camadas atinge a configuração ± 1 , as demais estão em -1 . Quando em alguma camada tem-se a formação de dois spins $+1$ que estejam em sítios vizinhos próximos então com grande probabilidade para β tendendo a infinito, essa camada chega na configuração ± 1 . Isto é, antes que haja alguma mudança em qualquer

uma das $n - 1$ camadas restantes, esta camada mencionada acima chega em ± 1 . Se a configuração ± 1 é atingida, ela não volta mais a ser ± 1 até que todas as n camadas passem para ± 1 . Isso significa que o tempo que o processo leva para que algum spin que seja $+1$ e esteja na configuração ± 1 passe para -1 , que é da ordem de $e^{\beta(2D+h)}$ para β grande, é suficiente para que as n camadas atinjam ± 1 , uma por vez. E para a formação de dois spins $+1$ em sítios vizinhos próximos, em meio aos demais que sejam -1 , o tempo necessário é o tempo para que um spin vire para $+1$, pois pelo valor do campo magnético, um sítio vizinho próximo desse sítio com spin $+1$, que tenha seu spin -1 , vira para $+1$ com taxa 1. Com isso, se T_1 é o tempo para que uma das n camadas seja ± 1 então T_1 dividido pelo seu valor esperado (ou seja, por $E(T_1)$) converge em distribuição, quando β tende a infinito, para uma variável aleatória com distribuição Exponencial e parâmetro $|\Lambda_N|n$ (a taxa de saída do processo a partir das n camadas ± 1 é $|\Lambda_N|ne^{-\beta(2D-h)}$). Esse tempo, como falamos, é o necessário para que algum spin seja $+1$ em meio a todos que são -1 , a partir da configuração φ_0 ; mesmo que o processo volte para φ_0 , ele recomeça. A partir desse tempo T_1 , será uma das $n - 1$ camadas restantes que atingirá a configuração ± 1 e se T_2 é o tempo para que mais uma camada seja ± 1 , além da que já se encontra nesta configuração então T_2 dividido por $E(T_2)$ converge em distribuição, quando β tende a infinito, para uma variável aleatória com distribuição Exponencial e parâmetro $|\Lambda_N|(n - 1)$ (a taxa de saída do processo a partir das $n - 1$ camadas ± 1 é $|\Lambda_N|(n - 1)e^{-\beta(2D-h)}$). E assim, sucessivamente, se T_n é o tempo para que a última das n camadas seja ± 1 então T_n dividido por $E(T_n)$ converge em distribuição, quando β tende a infinito, para uma variável aleatória com distribuição Exponencial e parâmetro $|\Lambda_N|$ (a taxa de saída do processo a partir de apenas uma camada ± 1 é $|\Lambda_N|e^{-\beta(2D-h)}$).

Dessa forma, esse tempo T pode ser escrito como $\sum_{k=1}^n T_k$ e temos o resultado:

Teorema 1.4 Se $h \in (2(D-1), 2D)$ e os n modelos se desenvolvem independentemente então $T = \sum_{k=1}^n T_k$ e a soma dos tempos reescalados $\sum_{k=1}^n \frac{T_k}{E(T_k)}$ converge em distribuição, para β grande, para $\sum_{\lambda=1}^n \text{Exp}(|\Lambda_N| \lambda)$.

Já no caso da segunda dinâmica que falamos que é aquela em que todos os modelos mudam juntos nas transições de cada sítio de Λ_N , o tempo para o processo ir de φ_0 até Ψ é basicamente o necessário para que em algum sítio $i \in \Lambda_N$, as n posições $(i; 1), \dots, (i; n)$ passem para $+1$ ao mesmo tempo. Mesmo que o processo volte à configuração inicial, ele recomeça e como estamos considerando $h \in (2(D-1), 2D)$, uma vez atingida a configuração onde em algum sítio $i \in \Lambda_N$ as n posições $(i; 1), \dots, (i; n)$ são $+1$, enquanto que todos os demais sítios têm seus spins em -1 , nos sítios vizinhos próximos a este sítio i os spins podem virar para esse mesmo valor $+1$ com taxa 1.

A diferença do Hamiltoniano do processo com esta dinâmica com relação ao processo descrito pela dinâmica citada anteriormente, é que agora, tanto a constante de acoplamento como o campo magnético na função energia, têm um fator n multiplicado pelo seu valor. Temos então que T dividido por $E(T)$ converge em distribuição, quando β tende a infinito, para uma variável aleatória com distribuição Exponencial e parâmetro $|\Lambda_N|$ (a taxa de saída do processo a partir das n camadas em $\underline{-1}$ é $|\Lambda_N|e^{-\beta(2D-h)n}$).

No caso que estamos considerando, no qual vários spins que estejam no mesmo sítio de Λ_N podem virar ao mesmo tempo, veremos que T está com grande probabilidade quando β cresce, entre $e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}$ e $e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}$, para $\varepsilon > 0$.

Teorema 1.5 . Se $h \in (2(D-1), 2D)$ então $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log T = 2D - h$ em probabilidade.

Para a verificação deste Teorema, precisaremos de alguns resultados que caracterizarão a evolução do processo.

Começaremos provando que para $\varepsilon > 0$, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T < e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}) = 0$ e, em seguida, que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T > e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}) = 0$.

O primeiro limite possui uma prova simples, como veremos na Seção 3 do Capítulo 3, enquanto que o segundo é o que precisará de resultados auxiliares.

Com grande probabilidade, para β grande, o processo sai da configuração φ_0 e atinge a configuração onde em apenas um único sítio $(i; k)$, onde $i \in \Lambda_N$ e $k \in \{1, \dots, n\}$, a configuração desse spin é $+1$. A partir daí, o processo tem probabilidade positiva para β grande de voltar direto para φ_0 ou de atingir outras configurações distintas de φ_0 e pertencentes ao conjunto

$$\mathbf{A} = \{\eta \in \Omega : \eta \neq \varphi_0 \text{ e } \eta_i = \eta_j, \forall i, j \in \Lambda_N, i \neq j\},$$

onde η_i é a n -upla de valores $+1$ ou -1 presentes no sítio i de Λ_N . Se ocorrer o primeiro caso então o processo começa novamente; se este não for o caso então veremos que o processo pode atingir qualquer configuração de $\mathbf{A}$, sendo inclusive a própria configuração Ψ . A idéia será mostrar que um tempo exponencialmente menor que $e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}$, para $\varepsilon > 0$, o qual tomaremos como sendo $e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}$, para β grande, é suficiente para o processo chegar em $\mathbf{A}$. Veremos que se esse elemento de $\mathbf{A}$ for Ψ então temos a conclusão; caso contrário, veremos que com mais um tempo $e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}$, é o bastante para se atingir outra configuração de $\mathbf{A}$ que seja ou não distinta de Ψ , de modo que as configurações de $\mathbf{A}$ que vão sendo atingidas, apresentam um número crescente de camadas com configuração $\underline{+1}$, entre as n existentes e, particularmente, apresentam uma ordem parcial natural que é no sentido de que camadas que chegam em $\underline{+1}$ não são modificadas até que todas sejam $\underline{+1}$. Devido a esse crescimento monótono do número de camadas que vão atingindo cada

uma a configuração ± 1 , o processo atinge $\mathbf{A}$ no máximo em n passos, sendo que a última vez é através da configuração Ψ . E isto não ocorre num tempo superior a $e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}$, quando β cresce.

Falaremos a seguir sobre as trajetórias do processo a partir de φ_0 até Ψ , tanto no caso dos campos iguais (como estamos considerando), como no caso dos campos distintos, mas ambos com os valores dos campos pertencentes ao intervalo $(2(D-1), 2D)$.

Dizemos que uma configuração η de $\mathbf{A}$ tem ordem $O(\eta)$ dada pelo número de modelos que são ± 1 , ou seja,

$$O(\eta) = |\{k \in \{1, \dots, n\} : \eta_i^k = +1, \forall i \in \Lambda_N\}|.$$

Observemos que $\forall \eta \in \mathbf{A}$, $O(\eta) \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definimos anteriormente que T é o primeiro tempo no qual o processo atinge Ψ , sabendo-se que o processo iniciou em φ_0 . Porém, podemos definir os tempos que nos indicam que o processo atingiu outras configurações de $\mathbf{A}$ que não sejam necessariamente Ψ . Estes tempos de parada em $\mathbf{A}$ são

$$T_m = \inf\{t > T_{m-1} : X_t^{\varphi_0} \in \mathbf{A} \setminus \{X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}\}\},$$

onde $m \in \{1, \dots, n\}$. Consideremos $T_0 = 0$. Temos mais o seguinte resultado:

Teorema 1.6 . Consideremos $h \in (2(D-1), 2D)$ e os tempos de parada $T_0, T_1, \dots, T_m$, onde $m \in \{1, \dots, n\}$. Então $\exists m_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $T = T_{m_0}$ e para $m \leq m_0$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(O(X_{T_m}^{\varphi_0}) > O(X_{T_{m-1}}^{\varphi_0})) = 1$$

e para $\xi = X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}$ e $\eta = X_{T_m}^{\varphi_0}$ temos que se $\xi^k = \pm 1$ então $\eta^k = \pm 1$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$.

O que faremos em seguida, é analisar, como já dissemos, quais são as possíveis trajetórias que o processo pode fazer de φ_0 até Ψ . Mostraremos que a partir de φ_0 , o processo não somente tem probabilidade positiva quando β cresce, de chegar em qualquer configuração de $\mathbf{A}$, como a probabilidade, no limite, é dada por um valor entre 0 e 1, que depende da configuração de $\mathbf{A}$ à qual o processo chega.

Mostraremos que existem valores $p(.,.) \in [0, 1]$ de modo que se estivermos numa configuração que não seja ainda Ψ , digamos ρ , a probabilidade do processo sair dessa configuração e atingir uma configuração em $\mathbf{A}$, digamos ξ , tem limite para β grande dado por $p(\rho, \xi) \in [0, 1]$, onde estas configurações satisfazem o Teorema 1.6, isto é,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(O(\rho) < O(\xi)) = 1$$

e se $\rho^k = \pm 1$ então $\xi^k = \pm 1$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$. E esta probabilidade $p(\rho, \xi)$ será 0 somente quando o Teorema 1.6 for violado, isto é, se existirem $i \in \Lambda_N$ e $k \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\xi_i^k < \rho_i^k$. Daí o resultado:

Teorema 1.7 . Consideremos o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ e $h \in (2(D-1), 2D)$. Então para $\rho \in \{\varphi_0\} \cup \mathbf{A}$, $\xi \in \mathbf{A}$, $\rho \neq \xi$ e $\xi \leq \Psi$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(X_{T_m}^{\varphi_0} = \xi | X_{T_{m-1}}^{\varphi_0} = \rho) = p(\rho, \xi) \in [0, 1],$$

onde m é algum valor em $\{1, \dots, n\}$ e $p(\rho, \xi) = 0$ se, e somente se, existem $i \in \Lambda_N$ e $k \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\xi_i^k < \rho_i^k$.

Mesmo com o processo podendo fazer diversas trajetórias e atingir várias configurações em $\mathbf{A}$, desde φ_0 até Ψ temos que a magnitude do tempo T não é alterada, ou seja, os tempos $\frac{T_k}{E(T_k)}$, para $k \leq m_0$ e $m_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $T = T_{m_0}$, convergem em distribuição

para β grande para uma variável aleatória Exponencial de parâmetro $|\Lambda_N|\lambda$, onde λ é um valor aleatório em $\{1, \dots, n\}$ que depende das configurações em $\mathbf{A}$ que vão sendo atingidas; porém, este tempo T não converge para uma variável aleatória Exponencial quando β cresce. Veremos que apenas o tempo para o processo ir de φ_0 até uma primeira configuração em $\mathbf{A}$ ou de uma configuração de $\mathbf{A}$ até outra é que converge em distribuição para β grande, para uma variável aleatória Exponencial, sendo que as duas configurações satisfazem o Teorema 1.6 e o parâmetro depende da $O(X_{T_{m-1}}^{\varphi_0})$, onde $m \in \{1, \dots, n\}$ (como é apresentada neste Teorema). O tempo T converge, para β grande, para uma soma aleatória de variáveis aleatórias Exponenciais, sendo que esta soma possui no máximo n parcelas, que é no caso das camadas irem alcançando a configuração ± 1 uma por vez.

Vamos considerar o caso dos campos $h_1, h_2, \dots, h_n$ distintos, mas com $(h_1, \dots, h_n) \in (2(D-1), 2D)^n$. Sem perda de generalidade, vamos ordenar os modelos de modo que tenhamos $h_1 > \dots > h_n > 0$ e veremos que o tempo T vai depender fortemente se o processo sai de φ_0 e atinge $\mathbf{A}$ através de Ψ ou de qual configuração de $\mathbf{A}$ o processo se encontra no momento imediatamente anterior de se atingir $\mathbf{A}$ novamente, mas agora através da configuração Ψ . Ou seja:

Teorema 1.8 . Se $(h_1, \dots, h_n) \in (2(D-1), 2D)^n$ e são distintos então existe $p_k \in [0, 1]$ tal que $\forall 0 < \varepsilon < \min\{h_{k-1} - h_k, h_k - h_{k+1}\}$ com $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{\beta} \log T \in (2D - h_k - \varepsilon, 2D - h_k + \varepsilon) \right) = p_k.$$

Com grande probabilidade quando β cresce, o processo deixa φ_0 e atinge a configuração onde em apenas um sítio nas n camadas, a configuração é $+1$, sendo que este sítio está na camada de campo h_1 . Suponhamos que a partir daí o processo passa por transições que o

levam a Ψ , cujas taxas sejam somente 1; o tempo necessário para isso tem valor esperado dado por $\frac{e^{\beta(2D-h_1)}}{|\Lambda_N|}$, para β grande (a taxa de saída do processo em φ_0 é $|\Lambda_N|e^{-\beta(2D-h_1)}$). Suponhamos agora que não foi Ψ a configuração em $\mathbf{A}$ que foi atingida, a configuração apresenta camadas em $\underline{-1}$ e o maior valor do campo referente a estas é h_k , para algum $k \in \{2, \dots, n\}$. Se agora, saindo desta configuração, as transições no processo o levam para Ψ , cujas taxas sejam somente 1, então o tempo esperado para ir até Ψ é dado por $\frac{e^{\beta(2D-h_k)}}{|\Lambda_N|}$, para β grande. Este tempo é bem maior que $\frac{e^{\beta(2D-h_1)}}{|\Lambda_N|}$ de modo que o tempo T seja determinado por $e^{\beta(2D-h_k)}$, quando β cresce.

Este foi apenas um pequeno exemplo do quanto é importante a informação de qual configuração o processo se encontra num tempo de parada imediatamente anterior àquele no qual o processo chega em $\mathbf{A}$ mas através de Ψ . Por isso, o tempo T converge para uma variável aleatória não-trivial quando β é grande.

Para finalizar essa apresentação, vamos observar uma maneira diferente de vermos este processo dado por n Modelos de Ising Estocásticos D -dimensionais e dinamicamente acoplados. O comportamento que estes modelos apresentam é o mesmo de um modelo definido no toro D -dimensional $\Lambda_N = \{1, \dots, N\}^D$, também com condições periódicas de fronteira, onde em cada sítio, o spin pode apontar para um dos 2^n vetores que definem os vértices do hipercubo inscrito na esfera S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$. Basta tomarmos uma base ortogonal em $\mathbb{R}^n$, de modo que esses 2^n vetores sejam escritos como combinação linear dos vetores da base, mas com coeficientes $+1$ ou -1 e norma usual igual a 1.

Capítulo 2

Definições e descrição dos resultados auxiliares

Para $k \in \{1, \dots, n\}$, denotamos por Ω_k o conjunto das funções

$$\begin{aligned}\varphi^k : \Lambda_N &\rightarrow \{-1, +1\} \\ i &\rightarrow \varphi_i^k\end{aligned}$$

ou seja, $\Omega_k = \{-1, +1\}^{\Lambda_N}$; assim, chamamos um elemento φ^k de Ω_k de uma configuração do k -ésimo modelo ou configuração na k -ésima camada, e esse sítio i será denotado por $(i; k)$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$ e nos indica qual modelo ou camada estamos nos referindo.

Denotamos por $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ o conjunto das funções

$$\begin{aligned}\varphi : \Lambda_N &\rightarrow \{-1, +1\}^n, \\ i &\rightarrow \varphi_i\end{aligned}$$

onde $\varphi_i = (\varphi_i^1, \varphi_i^2, \dots, \varphi_i^n)$. Denominamos um elemento

$$\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n) \text{ de } \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n,$$

de uma configuração total (a nomenclatura “total” será usada quando necessária, ficando subentendido que configuração o texto se refere).

Nas n posições

$$(i; 1), (i; 2), \dots, (i; n)$$

referentes ao sítio $i \in \Lambda_N$, temos, respectivamente, os n spins

$$\varphi_i^1, \varphi_i^2, \dots, \varphi_i^n.$$

Denotamos $\{-1, +1\}^n$ por Ω_0 , como sendo o conjunto de todas as 2^n configurações possíveis num sítio $i \in \Lambda_N$; logo, o espaço das configurações é $\Omega = \Omega_0^{\Lambda_N}$.

Dada uma configuração total $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ em $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, definimos o Hamiltoniano referente à configuração φ^k , onde $k \in \{1, \dots, n\}$ por

$$H^k(\varphi) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \Lambda_N: \langle i,j \rangle} \varphi_i^k \varphi_j^k - \frac{h_k}{2} \sum_{i \in \Lambda_N} \varphi_i^k, \quad (2.1)$$

onde a notação $\langle i, j \rangle$ significa que os sítios i e j são vizinhos próximos, ou seja, no k -ésimo modelo temos $|i - j| = 1$, cada um desses pares de sítios é contado somente uma vez e h_k é o campo magnético que vamos tomar não negativo (adotamos que a distância entre dois sítios i, j de Λ_N , que estão no k -ésimo modelo, com $i = (i_1, \dots, i_D)$ e $j = (j_1, \dots, j_D)$ é dada por $d(i, j) = |i - j| = \sum_{m=1}^D |i_m - j_m|$).

Dada uma configuração total qualquer φ em Ω , definimos o Hamiltoniano global como sendo a soma de todos os n Hamiltonianos referentes à configuração φ em cada camada, ou seja,

$$H(\varphi) = \sum_{k=1}^n H^k(\varphi). \quad (2.2)$$

(também vamos omitir a nomenclatura “global”, utilizando-a somente quando necessária).

Consideramos o processo estocástico descrito pela família das variáveis aleatórias $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, onde $X_t^{\varphi_0}$ nos informa, como já falamos na Introdução, em qual configuração os n modelos se encontram no instante t , quando o processo iniciou em φ_0 , que representa a configuração na qual todos os n modelos são -1. Consideramos este processo reversível com relação à medida de Gibbs dada por

$$\mu(\varphi) = \frac{e^{-\beta H(\varphi)}}{\sum_{\xi \in \Omega} e^{-\beta H(\xi)}}, \quad (2.3)$$

onde $\beta \geq 0$ é o inverso da temperatura.

Escolhemos a taxa com a qual o spin no sítio i em Λ_N troca para $a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$, quando φ é a configuração total presente, dada por

$$c(i, a, \varphi) = e^{-\beta[\Delta_i H(\varphi, a)]_+} = e^{-\beta \left[\sum_{k=1}^n \Delta_i H_a^k(\varphi) \right]_+}, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$, se $x \in \mathbb{R}$ então $[x]_+ = \max\{0, x\}$,

$$\Delta_i H_{\mathbf{a}}^k(\varphi) = H^k(a_i \varphi) - H^k(\varphi) = \varphi_i^k \sum_{j \in \Lambda_N: \langle i, j \rangle} \varphi_j^k + h_k \varphi_i^k \quad (2.5)$$

e para $j \in \Lambda_N$, a configuração $a_i \varphi$ na k -ésima camada, que podemos denotar por $(a_i \varphi)^k$ é tal que

$$(a_i \varphi)_j^k = \begin{cases} \varphi_j^k & \text{se } i \neq j \\ a^k & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Todas as outras possíveis trocas, que envolvem pelo menos dois sítios, simultaneamente, da configuração total presente em Λ_N têm taxa 0.

A condição de reversibilidade com relação à medida de Gibbs, chamada de balanceamento detalhado, significa que para $\varphi \in \Omega$, $i \in \Lambda_N$ e $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$,

$$\mu(\varphi)c(i, \mathbf{a}, \varphi) = \mu(\mathbf{a}_i\varphi)c(i, \varphi_i, \mathbf{a}_i\varphi).$$

De fato,

$$\frac{c(i, \mathbf{a}, \varphi)}{c(i, \varphi_i, \mathbf{a}_i\varphi)} = \frac{e^{-\beta[\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a})]_+}}{e^{-\beta[\Delta_i H(\mathbf{a}_i\varphi, \varphi_i)]_+}} = \frac{e^{-\beta[H(\mathbf{a}_i\varphi) - H(\varphi)]_+}}{e^{-\beta[H(\varphi) - H(\mathbf{a}_i\varphi)]_+}}.$$

Na segunda igualdade utilizamos que se a configuração presente é $\mathbf{a}_i\varphi$ e neste sítio i a mudança proposta é que $\mathbf{a}$ passe para φ_i , onde φ_i é a configuração que esse mesmo sítio apresentava quando a configuração era φ então $\Delta_i H(\mathbf{a}_i\varphi, \varphi_i)$ é o custo de energia para que $\mathbf{a}_i\varphi$ passe para a configuração φ . Porém, se $H(\mathbf{a}_i\varphi) - H(\varphi) \leq 0$ então

$$\begin{aligned} \frac{c(i, \mathbf{a}, \varphi)}{c(i, \varphi_i, \mathbf{a}_i\varphi)} &= \frac{1}{e^{-\beta[H(\varphi) - H(\mathbf{a}_i\varphi)]}} = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{a}_i\varphi)}}{e^{-\beta H(\varphi)}} = \frac{\frac{e^{-\beta H(\mathbf{a}_i\varphi)}}{\sum_{\xi \in \Omega} e^{-\beta H(\xi)}}}{\frac{e^{-\beta H(\varphi)}}{\sum_{\xi \in \Omega} e^{-\beta H(\xi)}}} = \frac{\mu(\mathbf{a}_i\varphi)}{\mu(\varphi)} \\ &\Rightarrow \mu(\varphi)c(i, \mathbf{a}, \varphi) = \mu(\mathbf{a}_i\varphi)c(i, \varphi_i, \mathbf{a}_i\varphi). \end{aligned}$$

Agora, se $H(\mathbf{a}_i\varphi) - H(\varphi) > 0$ então

$$\begin{aligned} \frac{c(i, \mathbf{a}, \varphi)}{c(i, \varphi_i, \mathbf{a}_i\varphi)} &= \frac{e^{-\beta[H(\mathbf{a}_i\varphi) - H(\varphi)]}}{1} = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{a}_i\varphi)}}{e^{-\beta H(\varphi)}} = \frac{\mu(\mathbf{a}_i\varphi)}{\mu(\varphi)} \\ &\Rightarrow \mu(\varphi)c(i, \mathbf{a}, \varphi) = \mu(\mathbf{a}_i\varphi)c(i, \varphi_i, \mathbf{a}_i\varphi). \end{aligned}$$

Para cada configuração inicial $\varphi_0 \in \Omega$, as taxas definem um Processo de Markov a tempo contínuo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, tal que

$$IP(X_0^{\varphi_0} = \varphi_0) = 1$$

e para $\xi, \varphi \in \Omega$, com $\xi \neq \varphi$,

$$IP(X_{t+\varepsilon}^{\varphi_0} = \xi | X_t^{\varphi_0} = \varphi) = \begin{cases} c(i, \mathbf{a}, \varphi)\varepsilon + o(\varepsilon) & \text{se } \xi = \mathbf{a}_i\varphi \text{ para algum } \mathbf{a} \in \Omega_0 \text{ e } i \in \Lambda_N, \\ o(\varepsilon) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observamos que o processo descrito por esses n Modelos de Ising dinamicamente acoplados que falamos inicialmente, pode ser visto de uma outra maneira. Ele apresenta o mesmo comportamento de um modelo definido no toro D -dimensional

$$\Lambda_N = \{1, \dots, N\}^D,$$

também com condições periódicas de fronteira, sendo que em cada sítio, o spin pode apontar para um dos 2^n vetores que definem os vértices do hipercubo inscrito na esfera S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$. O conjunto das possíveis configurações de Λ_N , nas quais os spins podem apontar para esses 2^n possíveis vetores citados acima é Ω , que já denominamos como sendo o espaço das configurações.

Em $\mathbb{R}^n$, dada uma base ortogonal $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n\}$, temos que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} = \tau_1 \vec{\tau}_1 + \dots + \tau_n \vec{\tau}_n,$$

onde $\tau_k \in \mathbb{R}$, para $k \in \{1, \dots, n\}$. Diante disso, podemos tomar uma base específica, de modo que dada uma configuração φ de Ω , para

$$\vec{\varphi}_i = \varphi_i^1 \vec{\tau}_1 + \dots + \varphi_i^n \vec{\tau}_n, \text{ onde } i \in \Lambda_N,$$

tenhamos $\varphi_i^k = +1$ ou -1 , sendo que $k \in \{1, \dots, n\}$ e $\|\vec{\varphi}_i\| = 1$. Com isso, definimos φ_i através dos coeficientes da combinação linear que são as coordenadas do vetor $\vec{\varphi}_i$ em relação à base $\{\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_n\}$, ou seja, $\varphi_i = (\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^n)$.

Podemos associar agora o conjunto que já falamos e denotamos por Ω_0 , como o conjunto dos 2^n vetores que definem os vértices do hipercubo inscrito em S^{n-1} , já que os vetores são definidos como combinação linear dos vetores da base com coeficientes $+1$ ou -1 .

Tomando-se uma base específica dada por

$$\vec{\tau}_1 = (1/\sqrt{n}, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_2 &= (0, 1/\sqrt{n}, 0, \dots, 0, 0), \\
&\vdots \\
\vec{\tau}_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1/\sqrt{n}),
\end{aligned}$$

com a qual

$$(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_1) = \|\vec{\tau}_1\|^2 = \frac{1}{n} = (\vec{\tau}_2, \vec{\tau}_2) = \dots = (\vec{\tau}_n, \vec{\tau}_n)$$

e definindo o Hamiltoniano do modelo D -dimensional com configuração dada pelos ângulos como

$$H(\varphi) = -\frac{n}{2} \sum_{i,j \in \Lambda_N: \langle i,j \rangle} (\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) - \frac{n}{2} \sum_{i \in \Lambda_N} (\vec{\varphi}_i, \vec{h}), \quad (2.6)$$

onde

$$\vec{h} = h_1 \vec{\tau}_1 + \dots + h_n \vec{\tau}_n \quad (2.7)$$

nos dá o sentido do campo magnético e $h_k > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, podemos destacar uma característica bastante útil entre este Hamiltoniano e os Hamiltonianos de cada um dos k modelos que definimos em (2.1):

$$\begin{aligned}
H(\varphi) &= -\frac{n}{2} \sum_{i,j \in \Lambda_N: \langle i,j \rangle} (\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) - \frac{n}{2} \sum_{i \in \Lambda_N} (\vec{\varphi}_i, \vec{h}) \\
&= -\frac{n}{2} \sum_{i,j \in \Lambda_N: \langle i,j \rangle} (\varphi_i^1 \vec{\tau}_1 + \dots + \varphi_i^n \vec{\tau}_n, \varphi_j^1 \vec{\tau}_1 + \dots + \varphi_j^n \vec{\tau}_n) - \\
&\quad -\frac{n}{2} \sum_{i \in \Lambda_N} (\varphi_i^1 \vec{\tau}_1 + \dots + \varphi_i^n \vec{\tau}_n, h_1 \vec{\tau}_1 + \dots + h_n \vec{\tau}_n) \\
&= \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \Lambda_N: \langle i,j \rangle} \varphi_i^1 \varphi_j^1 - \frac{h_1}{2} \sum_{i \in \Lambda_N} \varphi_i^1 \right) + \dots + \\
&\quad + \dots + \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \Lambda_N: \langle i,j \rangle} \varphi_i^n \varphi_j^n - \frac{h_n}{2} \sum_{i \in \Lambda_N} \varphi_i^n \right) \\
&= H^1(\varphi) + \dots + H^n(\varphi).
\end{aligned}$$

Vemos que (2.6), ou seja, o Hamiltoniano de uma configuração φ em Ω dada pelos ângulos pode ser interpretado como o Hamiltoniano global de uma configuração φ presente nas n camadas, onde este é escrito como a soma dos n Hamiltonianos em cada camada; logo, (2.2) está satisfeita.

Por (2.2), como também pela característica do Hamiltoniano que falamos agora, a medida de Gibbs que definimos em (2.3) pode ser fatorada; obtemos assim,

$$\mu(\varphi) = \prod_{k=1}^n \mu^k(\varphi),$$

onde

$$\mu^k(\varphi) = \frac{e^{-\beta H^k(\varphi)}}{\sum_{\xi^k \in \Omega_k} e^{-\beta H^k(\xi)}},$$

para $k \in \{1, \dots, n\}$ e, no entanto, como já vimos, os modelos não são independentes. Notemos que neste modelo D -dimensional definido pelos ângulos, a dinâmica é a de Glauber e é reversível com relação à medida de Gibbs.

Dada uma configuração φ em Ω , a taxa com que o spin no sítio i em Λ_N passa para o vetor $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$, é a mesma escolhida em (2.4), ao falarmos dos n modelos, ou seja, tomamos

$$c(i, \mathbf{a}, \varphi) = e^{-\beta[\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a})]_+},$$

onde

$$\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) = H(\mathbf{a}_i \varphi) - H(\varphi) = \sum_{k=1}^n \Delta_i H_{\mathbf{a}}^k(\varphi) = \sum_{k=1}^n (H^k(\mathbf{a}_i \varphi) - H^k(\varphi)), \quad (2.8)$$

como em (2.5).

Daremos a seguir, uma construção mais explícita do processo a partir destas taxas definidas agora:

- 1) Em cada evento de um Processo Pontual de Poisson de parâmetro $|\Lambda_N|(2^n - 1)$, escolhemos um sítio $i \in \Lambda_N$, uniformemente, com probabilidade $\frac{1}{|\Lambda_N|}$,
- 2) Escolhemos um vetor $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\rho_i\}$, uniformemente, com probabilidade $\frac{1}{2^n - 1}$ e propomos que o spin no sítio i gire para $\mathbf{a}$, onde ρ é a configuração na qual o processo se encontra.
- 3) Aceitamos girar seu spin com probabilidade $c(i, \mathbf{a}, \rho)$.

(2.9)

Diante das duas estruturas de modelos que falamos e que, na verdade, expressam os mesmos fatos, vamos enunciar e discutir os resultados que são válidos para ambas.

Definimos que duas configurações η e ξ são vizinhas próximas se, e só se, existe $i \in \Lambda_N$ tal que η e ξ diferem apenas no sítio i . A notação para esta relação será a mesma de quando falamos de sítios vizinhos próximos, ou seja, consideramos dada por $\langle \eta, \xi \rangle$.

Ao conjunto das configurações de Ω que são distintas de φ_0 , nas quais em cada modelo a configuração é $\underline{-1}$ ou $\underline{+1}$, já definimos na parte introdutória do trabalho e chamamos de **A**. Mas para referência posterior, vamos retomá-lo e numerá-lo:

$$\mathbf{A} = \{\eta \in \Omega : \eta \neq \varphi_0 \text{ e } \eta_i = \eta_j, \forall i, j \in \Lambda_N, i \neq j\}. \quad (2.10)$$

Nesta parte inicial definimos que o tempo para o processo ir de φ_0 até atingir Ψ pela primeira vez é $T = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} = \Psi\}$.

Assim, de uma maneira geral temos que se $S \subset \Omega$ então

$$T^\eta(S) = \inf\{t \geq 0 : X_t^\eta \in S\}, \quad (2.11)$$

com o processo iniciando em $\eta \in \Omega$. Assim, no decorrer do texto, se $S = \{\zeta\}$, com $\zeta \in \Omega$, então escreveremos somente $T^\eta(\zeta)$; e mais, η é omitida se esta configuração de Ω for φ_0 e ζ é omitida se esta for Ψ . Observemos que iremos nos referir a configurações de Ω através das letras $\eta, \xi, \zeta, \rho, \varphi, \sigma$; no entanto, φ_0 e Ψ serão somente para denotar as configurações inicial e final, respectivamente, do processo.

Após todas estas considerações iniciais, o nosso objetivo, como já mencionamos, é o estudo do comportamento do processo a partir da configuração inicial

$$\varphi_0 = \{\varphi_{0,i} : \varphi_{0,i} = (\varphi_{0,i}^1, \dots, \varphi_{0,i}^n) = (-1, \dots, -1), \forall i \in \Lambda_N\}$$

até o alcance da configuração

$$\Psi = \{\Psi_i : \Psi_i = (\Psi_i^1, \dots, \Psi_i^n) = (+1, \dots, +1), \forall i \in \Lambda_N\},$$

fazendo β tender a infinito e fixando $N, h_1, h_2, \dots, h_n$.

A partir de Ω , que é o espaço das configurações, consideramos o subconjunto $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \Omega$ de todas as configurações de Ω cuja probabilidade de voltar para φ_0 antes de chegar em alguma configuração distinta de φ_0 e que apresenta cada um dos n modelos ou $\underline{-1}$ ou $\underline{+1}$, tem limite 1 para β tendendo a infinito. Este conjunto é:

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in \Omega : \lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\varphi(\varphi_0) < T^\varphi(\eta)) = 1, \forall \eta \in \mathbf{A}\}, \quad (2.12)$$

onde

$$\mathbf{A} = \{\eta \in \Omega : \eta \neq \varphi_0 \text{ e } \eta_i = \eta_j, \forall i, j \in \Lambda_N, i \neq j\},$$

como lembramos em (2.10).

Posteriormente, vamos definir um conjunto de configurações, que são aquelas que qualquer transição em qualquer sítio, requer aumento de energia, ou seja, configurações que

são “mínimos locais de energia”. E questões podem surgir quando a diferença de energia for justamente igual a 0, se houve modificação na configuração de modo a manter a energia ou se não houve modificação.

Por essa razão, é conveniente restringir os possíveis valores de $h = (h_1, \dots, h_n)$ de modo que dada uma configuração φ em Ω , se para algum sítio i em Λ_N e $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$, tivermos $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) = 0$, isto significa que $\forall k_1 \in \{1, \dots, n\}$ com $\Delta_i H_{\mathbf{a}}^{k_1}(\varphi) \neq 0$, $\exists k_2 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1\}$ com $\Delta_i H_{\mathbf{a}}^{k_2}(\varphi) = -\Delta_i H_{\mathbf{a}}^{k_1}(\varphi)$ e, também, que as parcelas que se cancelam como é o caso citado, sejam aos pares. Com isso, devido a dinâmica que adotamos, para todo $k_1, k_2 \in \{1, \dots, n\}$ satisfazendo a relação que falamos agora, a configuração $(\mathbf{a}_i \varphi)^{k_1}$ é igual a φ^{k_2} , e a configuração φ^{k_1} é igual a $(\mathbf{a}_i \varphi)^{k_2}$. Logo, o número de sítios $(i; k)$ que são $+1$, onde $i \in \Lambda_N$ e $k \in \{1, \dots, n\}$ é o mesmo antes e após a transição que apresenta $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) = 0$. Na verdade, estas condições consistem em retirarmos do conjunto dos possíveis valores que $h_1, \dots, h_n$ podem assumir, um conjunto enumerável de valores, de fato finito, de modo que $\Delta_i H_{\mathbf{a}}^k(\varphi) = \varphi_i^k \sum_{j \in \Lambda_N: \langle i, j \rangle} \varphi_j^k + h_k \varphi_i^k$, o qual foi definido em (2.5), seja 0 somente quando não tenha havido alteração em $(i; k)$.

Como a restrição

$$\sum_{k=1}^n h_k \varphi_i^k \neq - \sum_{k=1}^n \varphi_i^k \sum_{j \in \Lambda_N: \langle i, j \rangle} \varphi_j^k$$

se fez necessária, condicionamos que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$,

$$h_k \neq 2m \text{ ou } -2m, \text{ onde } m \in \{1, \dots, D\}. \quad (2.13)$$

Como mencionamos no Capítulo 1, vamos considerar

$$h_1 = \dots = h_n = h > 0.$$

No caso do modelo D -dimensional definido pelos ângulos, isto significa que o campo magnético tem a mesma direção e sentido do vetor que aponta para um dos vértices

do hipercubo inscrito em S^{n-1} dado por $\vec{\tau}_1 + \dots + \vec{\tau}_n$, uma vez que em (2.7), definimos $\vec{h} = h_1 \vec{\tau}_1 + \dots + h_n \vec{\tau}_n$. Observemos que todos os vetores dos spins da configuração inicial apontam para a mesma direção, mas num sentido oposto ao campo que agora consideramos.

Depois, vamos considerar os campos $h_1, h_2, \dots, h_n$ distintos, mas com $(h_1, \dots, h_n) \in (2(D-1), 2D)^n$; sem perda de generalidade, vamos ordenar os modelos de modo que tenhamos $h_1 > h_2 > \dots > h_n > 0$. No caso do modelo D -dimensional definido pelos ângulos, isto significa que o campo magnético não aponta na direção de qualquer vetor entre os 2^n que definem os vértices do hipercubo inscrito em S^{n-1} .

Quando os valores dos campos são iguais temos que, em geral, para todo $i \in \Lambda_N$, $\rho \in \Omega$ e $\mathbf{a} \in \Omega_0$,

$$\Delta_i H(\rho, \mathbf{a}) = H(\mathbf{a}_i \rho) - H(\rho) = c + l h \quad (2.14)$$

para algum $(c, l) \in \{[-2Dn, 2Dn] \cap 2\mathbb{Z}\} \times \{[-n, n] \cap \mathbb{Z}\}$. De fato, da definição do modelo, temos (2.8), ou seja,

$$\Delta_i H(\rho, \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n \Delta_i H_{\mathbf{a}}^k(\rho),$$

onde

$$\Delta_i H_{\mathbf{a}}^k(\rho) = \rho_i^k \sum_{j \in \Lambda_N: \langle i, j \rangle} \rho_j^k + h \rho_i^k = \begin{cases} c_k + l_k h & \text{se } \rho_i^k \neq \mathbf{a}^k \\ 0 & \text{se } \rho_i^k = \mathbf{a}^k, \end{cases}$$

com $(c_k, l_k) \in \{[-2D, 2D] \cap 2\mathbb{Z}\} \times \{-1, +1\} \setminus \{(0, 0)\}$. Observemos que no caso $\rho_i^k \neq \mathbf{a}^k$ temos $c_k + l_k h \neq 0$, pois pela condição inicial sobre h_k dada em (2.13) e, consequentemente sobre h , pois estamos considerando os campos magnéticos com o mesmo valor, temos que $h \neq -c_k/l_k$ (já que c_k é sempre um número par e l_k é $+1$ ou -1); no caso $\rho_i^k = \mathbf{a}^k$ temos $c_k + l_k h = 0$, pois $c_k = l_k = 0$. Temos então que essa diferença de energia dada por $\Delta_i H(\rho, \mathbf{a})$ é tal que $\Delta_i H(\rho, \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n (c_k + l_k h) = \sum_{k=1}^n c_k + \left(\sum_{k=1}^n l_k \right) h$ e, portanto, $c = \sum_{k=1}^n c_k \in \{[-2Dn, 2Dn] \cap 2\mathbb{Z}\}$ e $l = \sum_{k=1}^n l_k \in \{[-n, n] \cap \mathbb{Z}\}$.

Observação 2.1 : c é a variação do número de sítios que são vizinhos próximos de $i \in \Lambda_N$, cujos spins diferem do spin em i , antes e após a transição, em todos os n modelos.

Observação 2.2 : Para $i \in \Lambda_N$, l é a diferença do número de spins em $(i; k)$ que passaram para -1 , com $k \in \{1, \dots, n\}$, com o dos que passaram para $+1$ em todos os n modelos, ou seja, se l_+ é o número de spins $+1$ que passaram para -1 e l_- é o número de spins -1 que passaram para $+1$ então $l = l_+ - l_-$.

A fim de verificarmos o Teorema 1.2 enunciado no Capítulo 1, que nos diz sobre a ausência do comportamento metaestável quando estamos no caso do campo magnético $h > 2D$, consideramos um processo $(\bar{X}_t^\zeta)_{t \geq 0}$ definido sobre o mesmo espaço de probabilidade de $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, sendo que a configuração inicial é $\zeta \in \Omega$, onde para $i \in \Lambda_N$, $\varphi \in \Omega$ e $a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$, a taxa escolhida é dada por

$$\bar{c}(i, a, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Delta_i H(\varphi, a) \leq 0 \\ 0 & \text{se } \Delta_i H(\varphi, a) > 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

A princípio, considerando-se $\zeta = \varphi_0$, acoplamos este processo $(\bar{X}_t^\zeta)_{t \geq 0}$ com o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ e verificamos o seguinte resultado:

Proposição 2.1 . Se $h > 2D$ então para $0 < \varepsilon < 2D + h$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(X_t^{\varphi_0} \neq \bar{X}_t^{\varphi_0} \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta\varepsilon}]) = 0.$$

Em seguida verificamos que:

Proposição 2.2 . Se $h > 2D$ então $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall \zeta \in \Omega$.

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\overline{X}_t^\zeta = \Psi \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta\varepsilon}]) = 1.$$

Estas Proposições serão provadas na Seção 2 do Capítulo 3, uma vez que a primeira Seção será destinada ao estudo sobre a ausência de atratividade no processo.

A Proposição 2.1 nos diz que para $0 < \varepsilon < 2D + h$, até o tempo $e^{\beta\varepsilon}$, para β tendendo a infinito, os dois processos $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ e $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ se desenvolvem juntos e a Proposição 2.2 nos diz que esse tempo é suficiente para que $(\overline{X}_t^\zeta)_{t \geq 0}$ chegue em Ψ , onde $\zeta \in \Omega$; sendo assim, considerando $\zeta = \varphi_0$, o tempo até $e^{\beta\varepsilon}$ é suficiente para que $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ chegue em Ψ . Na evolução deste processo $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ ocorrem apenas as transições que diminuem energia, já que ele não faz transições cuja energia aumenta. No entanto, isso não significa que à medida que ocorre o processo $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, o número de spins $+1$ nos n modelos apenas cresce ou se mantém, pois este número pode até diminuir. Mas uma vez que o processo tenha deixado a configuração inicial φ_0 , ele não volta mais já que a última transição antes de chegar em φ_0 é de uma configuração $a_i \varphi_0$ para φ_0 , onde $i \in \Lambda_N$ e $a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_{0,i}\}$ e a diferença de energia nesta transição é de $\Delta_i H(a_i \varphi_0, \varphi_{0,i}) \geq -2D + h > 0$; no entanto, pela definição do processo $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, a taxa dessa transição é 0. Concluimos então, pela Proposição 2.1, que até $e^{\beta\varepsilon}$ para $0 < \varepsilon < 2D + h$, o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ chega em Ψ . Dessa forma, temos que o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ chega em Ψ num tempo de ordem 1, com grande probabilidade quando β tende a infinito, e não há no processo um aparente equilíbrio num estado metaestável, ou seja, o processo não fica durante um tempo muito longo, quando β é grande, longe de atingir a configuração Ψ .

Nas configurações dos n modelos, como acabamos de comentar, o número de spins que estão em $(i; k)$, com $i \in \Lambda_N$ e $k \in \{1, \dots, n\}$ e são $+1$, não necessariamente cresce

monotonamente à medida que ocorre o processo $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$. Para que essa monotonicidade seja garantida, o campo h deve ser grande o suficiente de modo que, qualquer que seja a mudança em algum sítio i de Λ_N , a qual resulte em diminuição do número de sítios com spin $+1$, a diferença de energia $\Delta_i H(\rho, a)$ seja positiva, onde $\rho \in \Omega$ e $a \in \Omega_0 \setminus \{\rho_i\}$. Vimos em (2.14) que $\Delta_i H(\rho, a) = c + lh$, com $(c, l) \in \{[-2Dn, 2Dn] \cap 2\mathbb{Z}\} \times \{[-n, n] \cap \mathbb{Z}\}$. O valor de $\Delta_i H(\rho, a)$ no qual c assume menor valor e ocorre aumento de pelo menos um spin $+1$, é quando temos $\Delta_i H(\rho, a) = -2Dn + lh$, com $1 \leq l \leq n$. Basta então tomarmos $h > 2Dn$ (e podemos, pois $h > 2D$) e teremos $\Delta_i H(\rho, a) > 0$. Isso acontece tanto quando temos o modelo como o citado agora, ou mesmo quando temos os n modelos, mas com a dinâmica que denomina todo o sistema como Sistema de Spins, nomenclatura que já discutimos anteriormente. O Teorema 1.3 também será mostrado na Seção 2 do Capítulo 3, baseado num Lema auxiliar (que será o Lema 3.3) que nos diz o mesmo que o Teorema 1.3, mas para o processo $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, cujas taxas foram definidas em (2.15).

Consideremos agora o caso do campo magnético h em $(2(D-1), 2D)$, que como falamos no Capítulo 1, é o caso mais simples do campo no qual o processo apresenta o comportamento metaestável; observamos neste mesmo Capítulo que quando o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ alcança alguma configuração do conjunto $\mathbf{A} = \{\eta \in \Omega : \eta \neq \varphi_0 \text{ e } \eta_i = \eta_j, \forall i, j \in \Lambda_N, i \neq j\}$, podemos definir os seguintes tempos de parada neste conjunto:

$$T_m = \inf\{t > T_{m-1} : X_t^{\varphi_0} \in \mathbf{A} \setminus \{X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}\}\}, \text{ onde } m \in \{1, \dots, n\} \quad (2.16)$$

Consideremos $T_0 = 0$.

O tempo T , que também é um tempo de parada em $\mathbf{A}$, sendo o primeiro instante em que o processo atinge este conjunto através da configuração Ψ , pode ser considerado como o tempo que o processo demora para atingir alguma configuração $a_i \varphi_0$, onde o sítio $i \in \Lambda_N$ e $a \in \Omega_0$ com apenas uma coordenada $+1$. Provaremos no Lema 3.10 que com

grande probabilidade para β grande, é uma configuração com estas características que o processo atinge quando deixa a configuração inicial φ_0 . A partir desta configuração, o processo tem probabilidade positiva para β grande, tanto de voltar direto para φ_0 , como de atingir qualquer configuração de $\mathbf{A}$, isto é, qualquer configuração que seja distinta de φ_0 e possua as n camadas umas $\underline{+1}$ e outras $\underline{-1}$, antes de voltar para φ_0 , como veremos no Lema 3.11. Ambos os casos que são ou voltar para φ_0 ou atingir $\mathbf{A}$ antes de φ_0 ocorrem “rapidamente”, no limite para β grande, como veremos no Lema 3.9. Agora, se as n camadas chegaram em $\underline{+1}$, isto é, a configuração total está em Ψ então já temos o que queríamos; caso contrário, apenas um número de camadas estritamente menor que n e diferente de 0, é que possuem configuração $\underline{+1}$. A partir deste segundo caso, o tempo para que algum spin que esteja numa configuração $\underline{+1}$ passe de $+1$ para -1 é exponencialmente maior que o necessário para que algum spin que esteja na configuração $\underline{-1}$ passe de -1 para $+1$, onde este último é da ordem de $e^{\beta(2D-h)}$ para β grande (já que em apenas uma das camadas que estão com configuração $\underline{-1}$ é que aparecerá somente um spin $+1$, com grande probabilidade para β tendendo a infinito). Diante desta configuração, o processo pode voltar direto para a configuração de $\mathbf{A}$ alcançada anteriormente ou atingir outras configurações de $\mathbf{A}$; e se for este segundo caso, então o número de camadas com configuração $\underline{+1}$ será estritamente maior do que na configuração de $\mathbf{A}$ que se encontrava, com grande probabilidade quando β cresce, como provaremos no Teorema 1.6, baseado nos Lemas 3.14 e 3.15; ambas as situações têm probabilidade positiva, para β grande, de ocorrerem. Observemos somente que estes Lemas 3.14 e 3.15 consistem em verificarmos que o comportamento de um processo definido sobre o mesmo espaço de probabilidade do processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ que apresenta as camadas que estão em $\underline{+1}$ congeladas, evoluindo somente as camadas em $\underline{-1}$, é análogo às conclusões presentes nos Lemas 3.10 e 3.11 que foram comentados a respeito, anteriormente. Pode ser que, com estas transições, Ψ seja atingida ou não; se for o caso então já temos o que queríamos e caso contrário, podemos

repetir os mesmos argumentos. Como o número de configurações em Ω é finito então em apenas um número finito de vezes chegaremos em configurações que são elementos de $\mathbf{A}$. Veremos no Lema 3.13 que partindo de qualquer configuração de Ω , o processo não demora mais que um tempo $e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}$, para $\varepsilon > 0$, para chegar em $\mathbf{A}$ quando β cresce e, para isso, usaremos uma limitação inferior para o processo sair de uma configuração ζ qualquer e chegar em $\mathbf{A}$ antes de um tempo bem mais curto, que seja dado por $e^{\beta\varepsilon/4}$, como será concluído no Lema 3.12. Daí, temos a conclusão do Teorema 1.5 já que, no limite para β grande, esse tempo T não excede $e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}$ ou é menor que $e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}$, para $\varepsilon > 0$. Além de alguns resultados auxiliares que citamos ao longo desta discussão, provaremos também que o conjunto das configurações que são “mínimos locais de energia” será denotado por $\mathbf{M}$ e que, através do Lema 3.8, veremos que é constituído de $\mathbf{A} \cup \{\varphi_0\}$, onde, pelo Lema 3.4 veremos que φ_0 é o único elemento do conjunto

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in \Omega : \lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\varphi(\varphi_0) < T^\varphi(\eta)) = 1, \forall \eta \in \mathbf{A}\}$$

que definimos em (2.12). Para concluirmos esse Lema 3.4 veremos o Lema 3.5 que nos mostrará que esse conjunto $\mathcal{A}$ tem a propriedade de ser conexo e o Lema 3.6, no qual veremos que $\mathcal{A}$ tem intersecção vazia com o conjunto das configurações que o processo atinge quando deixa φ_0 . Já no Lema 3.7 veremos que em $\mathbf{M}$ não existem configurações que sejam vizinhas próximas e que possuam mesma energia.

Feitas algumas definições necessárias para provarmos o Teorema 1.1, que nos fala sobre a ausência de atratividade no processo, veremos a prova do mesmo na Seção 1 do Capítulo 3, na qual definiremos especificamente duas configurações de Ω que chamaremos de η e ξ . O Lema 3.1 nos mostrará que pela maneira que definiremos a configuração η , ela chegará em $\mathbf{M}$ através de $\mathbf{A}$, com grande probabilidade quando β cresce. Enquanto que pelo Lema 3.2, ξ chegará em $\mathbf{M}$ através de $\mathbf{A}$, com probabilidade estritamente menor que 1 quando β cresce. Diante desses dois Lemas, a suposta existência de um acoplamento entre dois

processos se desenvolvendo a partir de configurações iniciais η e ξ , que preserve a ordem parcial natural, iria contradizer o fato da probabilidade no Lema 3.2 ser estritamente menor que 1 quando tomamos β indo para infinito.

Ao falarmos das possíveis trajetórias que o processo pode fazer de φ_0 até Ψ no Capítulo 4, vamos enunciar um resultado auxiliar ao Teorema 1.7, porém, importante:

Proposição 2.3 . Se $h \in (2(D-1), 2D)$ então $\forall \eta \in \mathbf{A}$, $\exists p(\eta) \in (0, 1)$ tal que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{T_1}^{\varphi_0} = \eta) = p(\eta).$$

Veremos que a probabilidade do processo sair de φ_0 e atingir $\mathbf{A}$ pela primeira vez (pela definição de T_1 dada em (2.16)) quando β cresce, através de uma configuração qualquer deste conjunto, depende desta configuração de $\mathbf{A}$ à qual o processo chega.

Continuando no Capítulo 5 a análise das possíveis trajetórias no processo, consideremos o caso dos campos $h_1, h_2, \dots, h_n$ distintos, mas com $(h_1, \dots, h_n) \in (2(D-1), 2D)^n$. Como já mencionamos, vamos ordenar os modelos de modo que tenhamos $h_1 > h_2 > \dots > h_n > 0$.

Uma importante definição, semelhante à dada no Capítulo 1, na qual para o caso de campos iguais e pertencentes a $(2(D-1), 2D)$ e $\eta \in \mathbf{A}$ tínhamos

$$O(\eta) = |\{k \in \{1, \dots, n\} : \eta_i^k = +1, \forall i \in \Lambda_N\}|, \quad (2.17)$$

para o caso de campos distintos é a seguinte: se $\eta \in \mathbf{A}$ sendo que $\forall i \in \Lambda_N$ temos $\eta_i = (\eta_i^1, \dots, \eta_i^n)$, $\eta_i^m = -1$ e $\eta_i^k = +1$ para $1 \leq k < m$ então a ordem de η é igual a m ,

isto é,

$$\overline{O}(\eta) = \min\{k \in \{1, \dots, n\} : \eta_i^k = -1 \text{ e } \eta_i^l = +1, \forall 1 \leq l < k \text{ e } \forall i \in \Lambda_N\}. \quad (2.18)$$

Observemos que $\forall \eta \in \mathbf{A}$, $\overline{O}(\eta) \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$, onde Ψ é a única configuração de $\mathbf{A}$ tal que $\overline{O}(\Psi) = n+1$, pois todos os n modelos são ± 1 .

Veremos no Lema 5.1 que o processo ao deixar a configuração inicial φ_0 atingirá, com grande probabilidade para β tendendo a infinito, alguma configuração onde em apenas um sítio, o spin possui somente a primeira coordenada igual a $+1$ e as demais -1 , sendo que nos demais sítios, todos os spins têm coordenadas -1 .

Também veremos no Lema 5.2 que $\forall m \in \{1, \dots, n\}$, o processo respeitará a ordem que à medida que configurações de $\mathbf{A}$ são atingidas temos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\overline{O}(X_{T_m}^{\varphi_0}) > \overline{O}(X_{T_{m-1}}^{\varphi_0})) = 1,$$

de modo que os modelos que apresentam configuração ± 1 em $X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}$ permanecem assim em $X_{T_m}^{\varphi_0}$; essa característica será fundamental na conclusão da prova do Teorema 1.8, ou seja, será importante para concluir que para β grande e algum $\varepsilon > 0$, a probabilidade de T não ser menor que $e^{\beta(2D-h_k-\varepsilon)}$ e nem maior que $e^{\beta(2D-h_k+\varepsilon)}$ é dada por $p_k \in [0, 1]$, onde k é um valor em $\{1, \dots, n\}$. Um resultado também muito importante que contribuirá na demonstração deste Teorema, será a conclusão de que a probabilidade, para β grande, do processo atingir Ψ num tempo T_l , onde $1 \leq l \leq k$, sendo que $\overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0})$ era k , depende deste valor k que pertence a $\{1, \dots, n\}$, ou seja, é dada por $p_k \in [0, 1]$, que é o resultado do Lema 5.3.

Capítulo 3

Principais aspectos do processo

3.1 Ausência de atratividade.

Nesta Seção, vamos mostrar o Teorema 1.1 que nos diz que a ordem parcial natural pode ser violada no decorrer do processo. A idéia consiste em verificar que isto pode ocorrer, qualquer que seja o acoplamento utilizado entre os dois processos $(X_t^\eta)_{t \geq 0}$ e $(X_t^\xi)_{t \geq 0}$, onde $\eta, \xi \in \Omega$ são duas configurações tais que $\eta \leq \xi$, ou seja, que esta ordem pode não ser mais válida para $t \geq 0$, na evolução deste processo acoplado.

Tomaremos duas configurações η e ξ , ambas em Ω e de modo que $\eta \leq \xi$. Veremos que enquanto η vai chegar em $\mathbf{A} = \{\eta \in \Omega : \eta \neq \varphi_0 \text{ e } \eta_i = \eta_j, \forall i, j \in \Lambda_N, i \neq j\}$ (definido em (2.10)) antes de chegar em φ_0 com grande probabilidade quando β cresce, a configuração ξ pode chegar neste mesmo conjunto $\mathbf{A}$ antes de φ_0 com probabilidade positiva quando β é grande, mas que é estritamente menor que 1. Se existisse um acoplamento entre os dois processos de modo que a ordem parcial natural se preservasse, o fato de η chegar em $\mathbf{A}$ com grande probabilidade para β grande deveria valer também para ξ ; e isto não é válido.

Primeiramente, seja $a_{i,j}\varphi_0$ uma configuração de Ω dada por

$$(a_{i,j}\varphi_0)_z = \begin{cases} a & \text{se } z = i \text{ ou } z = j \\ \varphi_{0,z} = (-1, \dots, -1) & \text{se } z \neq i \text{ e } z \neq j, \end{cases}$$

onde $a \in \Omega_0$ possui apenas uma coordenada $+1$, os sítios $i, j \in \Lambda_N$ e $\langle i, j \rangle$. Denotemos $a_{i,j}\varphi_0$ por η .

Consideremos $Q_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t^\eta \in \mathbf{A} \cup \{\varphi_0\}\}$, onde $(X_t^\eta)_{t \geq 0}$ é o processo com configuração inicial dada por η que definimos acima.

Sendo $\mu_1(\eta) = \nu\{(X_0^\eta, X_0^\xi) : X_0^\eta = \eta\}$, temos o resultado:

Lema 3.1 . Para $\eta = a_{i,j}\varphi_0 \in \Omega$ definida acima e $h \in (2(D-1), 2D)$ temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P^{\mu_1}(X_{Q_1}^\eta \in \mathbf{A}) = 1.$$

Demonstração:

Como $\eta = a_{i,j}\varphi_0$ então $H(\eta) - H(\varphi_0) = 4D - 2 - 2h$.

Antes do processo chegar em φ_0 , bastando apenas uma transição, a configuração em que o processo se encontra é dada por $b_i\varphi_0$, onde i é algum sítio de Λ_N e $b \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_{0,i}\}$ (não necessariamente é igual a a). A energia necessária para essa configuração $b_i\varphi_0$ ser alcançada a partir de φ_0 é de no mínimo $2D - h$, ou seja, $H(b_i\varphi_0) - H(\varphi_0) \geq 2D - h$. Temos então que

$$H(b_i\varphi_0) \geq 2D - h + H(\varphi_0) \text{ e } H(\eta) = 4D - 2 - 2h + H(\varphi_0).$$

Como $2D - h + H(\varphi_0) > 4D - 2 - 2h + H(\varphi_0) \Leftrightarrow h > 2D - 2 = 2(D-1)$ e isto é verdade pois estamos considerando o caso $h \in (2(D-1), 2D)$ então temos $H(b_i\varphi_0) > H(\eta)$.

Seja $E(\eta)$ o conjunto das seqüências de configurações que saem de η até $b_i\varphi_0$, ou seja,

$$E(\eta) = \{ \{ \xi_s \}_{s=1}^m : m \in \mathbb{N}, \xi_1 = \eta, \xi_m = b_i\varphi_0, \langle \xi_s, \xi_{s+1} \rangle \text{ e } \xi_s \neq b_i\varphi_0, \forall s \in \{1, \dots, m-1\} \}.$$

Tomemos $\{ \xi_s \}_{s=1}^m$ uma seqüência qualquer de $E(\eta)$. Como $H(b_i\varphi_0) > H(\eta)$ então existem $s_1, s_2 \in \{1, \dots, m\}$ tais que $s_1 < s_2$ e $H(\xi_{s_2}) > H(\xi_{s_1})$.

Se considerarmos $\mathbf{E}$ o evento “o processo evolue através dessa seqüência fixada $\{ \xi_s \}_{s=1}^m$ de η até $b_i\varphi_0$ ” então $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{E}) = 0$ pois para a transição de ξ_{s_1} para ξ_{s_2} , a probabilidade desta ocorrência vai a zero quando β cresce.

Como Ω é um conjunto finito então existe um número finito de seqüências que são elementos de $E(\eta)$. Podemos enumerá-las de modo que cada $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p$ denota um elemento de $E(\eta)$, sendo p um número finito.

Se considerarmos $\mathbf{F}_q$ o evento “o processo evolue através da seqüência representada por ζ_q de η até $b_i\varphi_0$ ” então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P^{\mu_1}(X_{Q_1}^\eta = \varphi_0) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{q=1}^p \mathbf{F}_q\right) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^p P(\mathbf{F}_q)$$

pois se $q_1 \neq q_2$ então $\mathbf{F}_{q_1} \cap \mathbf{F}_{q_2} = \emptyset$. Como temos uma soma finita então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P^{\mu_1}(X_{Q_1}^\eta = \varphi_0) = \sum_{q=1}^p \lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{F}_q) = 0$$

pois fixamos a seqüência que ζ_q determina e utilizamos que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{E}) = 0$.

Portanto, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P^{\mu_1}(X_{Q_1}^\eta \in \mathbf{A}) = 1. \square$

Agora, seja $a_i b_j \varphi_0$ uma configuração de Ω dada por

$$(a_i b_j \varphi_0)_z = \begin{cases} a & \text{se } z = i \\ b & \text{se } z = j \\ \varphi_{0,z} = (-1, \dots, -1) & \text{se } z \neq i \text{ e } z \neq j, \end{cases}$$

onde $a, b \in \Omega_0$, a possui apenas uma coordenada $+1$ (não necessariamente na mesma posição que se encontra na configuração η citada anteriormente), b possui duas coordenadas $+1$, sendo que uma delas está na mesma posição de a , os sítios $i, j \in \Lambda_N$ e $\langle i, j \rangle$. Denotemos $a_i b_j \varphi_0$ por ξ .

Consideremos $Q_2 = \inf\{t \geq 0 : X_t^\xi \in \mathbf{A} \cup \{\varphi_0\}\}$, onde $(X_t^\xi)_{t \geq 0}$ é o processo com configuração inicial dada por ξ que definimos acima.

Sendo $\mu_2(\xi) = \nu\{(X_0^\eta, X_0^\xi) : X_0^\xi = \xi\}$, temos o resultado:

Lema 3.2 . Para $\xi = a_i b_j \varphi_0 \in \Omega$ definida acima e $h \in (2(D-1), 2D)$ temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P^{\mu_2}(X_{Q_2}^\xi \in \mathbf{A}) < 1.$$

Demonstração:

Consideremos o conjunto das seqüências de configurações que saem de ξ até φ_0 , ou seja,

$$B(\varphi_0) = \{\{\xi_s\}_{s=1}^m : m \in \mathbb{N}, \xi_1 = \xi, \xi_m = \varphi_0, \xi_s \neq \varphi_0 \text{ e } \langle \xi_s, \xi_{s+1} \rangle, \forall s \in \{1, \dots, m-1\}\}.$$

Seja $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ uma seqüência de $B(\varphi_0)$, onde $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = a_i \varphi_0$ e $\xi_3 = \varphi_0$, e consideremos $\mathbf{E}$ o evento: “a partir de ξ o processo evolue seguindo a seqüência $\{\xi_s\}_{s=1}^3$ descrita acima”.

Dessa forma, $P^{\mu_2}(X_{Q_2}^\xi = \varphi_0) \geq P(\mathbf{E}) = \frac{1}{|\Lambda_N|(2^n-1)} \frac{1}{|\Lambda_N|(2^n-1)}$, bastando que o valor do campo $h \in (2(D-1), 2D-1)$.

Logo, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P^{\mu_2}(X_{Q_2}^\xi = \varphi_0) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|\Lambda_N|(2^n-1)} \right)^2 > 0$ e, portanto,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P^{\mu_2}(X_{Q_2}^\xi \in \mathbf{A}) < 1. \square$$

Façamos agora a

Demonstração do Teorema 1.1:

Sejam os processos $(X_t^\eta)_{t \geq 0}$ e $(X_t^\xi)_{t \geq 0}$, onde $\eta \leq \xi$.

Suponhamos que exista algum acoplamento entre os dois processos, de modo que a ordem parcial natural possa ser preservada, no sentido que para ν uma medida de probabilidade no espaço produto tenhamos

$$\nu\{(X_t^\eta, X_t^\xi) : X_t^\eta \leq X_t^\xi, \forall t \geq 0\} = 1.$$

Por esta hipótese temos que se $X_{Q_1}^\eta \in \mathbf{A}$ então $X_{Q_2}^\xi \in \mathbf{A}$ também, ou seja,

$$IP^{\mu_2}(X_{Q_2}^\xi \in \mathbf{A}) \geq IP^{\mu_1}(X_{Q_1}^\eta \in \mathbf{A}).$$

Como o Lema 3.1 nos diz que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP^{\mu_1}(X_{Q_1}^\eta \in \mathbf{A}) = 1$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP^{\mu_2}(X_{Q_2}^\xi \in \mathbf{A}) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} IP^{\mu_1}(X_{Q_1}^\eta \in \mathbf{A}) = 1 \Rightarrow \lim_{\beta \rightarrow \infty} IP^{\mu_2}(X_{Q_2}^\xi \in \mathbf{A}) = 1.$$

Disso, temos que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP^{\mu_2}(X_{Q_2}^\xi = \varphi_0) = 0$, o que contradiz o Lema 3.2.

Portanto, a medida de probabilidade ν dada no espaço produto é tal que

$$\nu\{(X_t^\eta, X_t^\xi) : X_t^\eta \leq X_t^\xi, \forall t \geq 0\} < 1. \square$$

3.2 Ausência de metaestabilidade para $h > 2D$.

Nesta Seção, faremos as demonstrações das Proposições 2.1 e 2.2 enunciadas no Capítulo anterior, para que possamos concluir o Teorema 1.2 e faremos também a demonstração do Teorema 1.3.

Como já falamos anteriormente, esta Proposição 2.1 nos diz que até o tempo $e^{\beta\varepsilon}$ para $0 < \varepsilon < 2D + h$, os processos $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ e $(\bar{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ se desenvolvem juntos.

Demonstração da Proposição 2.1:

Vamos considerar o acoplamento entre os processos

$$(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0} \text{ e } (\bar{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0},$$

através do processo

$$(\mathcal{X}_t)_{t \geq 0} \equiv (X_t^{\varphi_0}, \bar{X}_t^{\varphi_0})$$

em $\Omega \times \Omega$, que é o espaço das configurações, construído da seguinte forma: partindo de configurações iguais,

1) Em cada evento de um Processo Pontual de Poisson de parâmetro $|\Lambda_N|(2^n - 1)$, escolhemos um sítio i em Λ_N , uniformemente, com probabilidade $\frac{1}{|\Lambda_N|}$.

2) Escolhemos um vetor $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$, uniformemente, com probabilidade $\frac{1}{2^n - 1}$ e propomos que o spin em i gire para $\mathbf{a}$, onde φ é a configuração onde os processos se encontram.

3) Se pelas escolhas tivermos $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) > 0$ então $\mathcal{X}_t = (\varphi, \varphi)$ aceita a troca para $(\mathbf{a}_i \varphi, \varphi)$ com probabilidade dada pela taxa $e^{-\beta \Delta_i H(\varphi, \mathbf{a})}$, e não aceita a troca para $(\varphi, \mathbf{a}_i \varphi)$ ou $(\mathbf{a}_i \varphi, \mathbf{a}_i \varphi)$. Agora se tivermos $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) \leq 0$ então $\mathcal{X}_t = (\varphi, \varphi)$ aceita a troca para $(\mathbf{a}_i \varphi, \mathbf{a}_i \varphi)$ com probabilidade 1 e, portanto, não aceita a troca para $(\mathbf{a}_i \varphi, \varphi)$ ou $(\varphi, \mathbf{a}_i \varphi)$. Quando os dois processos se separam, estes se desenvolvem independentemente, regidos por suas próprias taxas.

O item 3) se comporta como se a decisão dependesse de uma escolha uniforme em $[0, 1]$, isto é, se estamos na m -ésima ocorrência do Processo Pontual de Poisson (no tempo T_m), a escolha ocorre de acordo com uma variável aleatória U^m com distribuição $U^m[0, 1]$, na qual: no caso $\Delta_i H(\varphi, a) > 0$, se na escolha uniforme de um valor no intervalo considerado estivermos em $[0, e^{-\beta \Delta_i H(\varphi, a)}]$ então os processos se separam com probabilidade $e^{-\beta \Delta_i H(\varphi, a)}$ (no sentido da troca ocorrer em $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ e não em $(\bar{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$) e permanecem juntos caso contrário; no caso $\Delta_i H(\varphi, a) \leq 0$, os processos trocam juntos para $(a_i \varphi, a_i \varphi)$ com probabilidade 1.

Notemos que quando observamos os processos marginais, cada um exibe seu próprio comportamento e troca com a taxa correta, de modo que estas não foram alteradas ao fazermos o acoplamento.

Consideremos $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} \neq \bar{X}_t^{\varphi_0}\}$. Assim, mostrar que para $0 < \varepsilon < 2D + h$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(X_t^{\varphi_0} \neq \bar{X}_t^{\varphi_0} \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta \varepsilon}]) = 0,$$

é o mesmo que provar que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\tau \leq e^{\beta \varepsilon}) = 0.$$

Porém, não sabemos a distribuição dessa variável aleatória τ , devido à aleatoriedade da trajetória que o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ pode fazer até se separar de $(\bar{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$. Por essa razão, vamos definir a seguir uma outra variável aleatória τ' , de modo que seja possível definirmos sua distribuição e, também, que $P(\tau' < \tau) = 1$.

Pela construção do processo $(\mathcal{X}_t)_{t \geq 0}$ que citamos, em cada evento de um Processo Pontual de Poisson que acontecem em instantes $T_1, T_2, T_3, \dots$, no qual um sítio é escolhido uniformemente em Λ_N e um vetor a distinto do spin em que o sítio se encontra também é escolhido uniformemente em Ω_0 , é obtido o valor de $\Delta_i H(\varphi, a)$, sendo que φ é a configuração presente. Diante desse valor, temos (pelo item 3 da construção do processo) qual é a probabilidade dos processos $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ e $(\bar{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ se separarem em cada evento

desse Processo Pontual de Poisson. Consideremos τ' o primeiro tempo em que esse valor $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a})$ é no mínimo $h - 2D > 0$ e a transição é aceita, ou seja,

$$\tau' = \inf\{T_p : p \in N, p = \min\{q : \mathbb{P}(\mathbf{U}^q(x) < e^{-\beta(h-2D)}) = e^{-\beta(h-2D)} \\ \text{se } x \in [0, e^{-\beta(h-2D)})\}\}.$$

Para essa variável aleatória τ' , podemos dizer que a distribuição é Exponencial com parâmetro $\lambda \leq |\Lambda_N|(2^n - 1)e^{-\beta(h-2D)}$ (a desigualdade vem da majoração do parâmetro pela escolha de um sítio qualquer de Λ_N e de um elemento qualquer de Ω_0 , com exceção da configuração com que o spin do sítio escolhido se encontra).

Assim, como $\mathbb{P}(\tau' < \tau) = 1$ pois se τ ocorre então τ' também ocorre mas não necessariamente o contrário, devido à maneira como definimos τ' , temos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_t^{\varphi_0} \neq \overline{X}_t^{\varphi_0} \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta\epsilon}]) = \mathbb{P}(\tau \leq e^{\beta\epsilon}) \leq \mathbb{P}(\tau' \leq e^{\beta\epsilon}) \\ & = 1 - e^{-\lambda e^{\beta\epsilon}} \leq 1 - e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)e^{-\beta(h-2D)}e^{\beta\epsilon}} = 1 - e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)e^{-\beta(h-2D-\epsilon)}} \\ & \Rightarrow \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t^{\varphi_0} \neq \overline{X}_t^{\varphi_0} \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta\epsilon}]) \\ & \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} (1 - e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)e^{-\beta(h-2D-\epsilon)}}) = 0. \square \end{aligned}$$

Vamos mostrar a Proposição que nos diz que o tempo $e^{\beta\epsilon}$, para $\epsilon > 0$, é suficiente para que o processo $(\overline{X}_t^\zeta)_{t \geq 0}$ chegue em Ψ , onde $\zeta \in \Omega$.

Demonstração da Proposição 2.2:

Neste processo $(\overline{X}_t^\zeta)_{t \geq 0}$, como já mencionamos, não necessariamente o número de spins +1 nos n modelos cresce monotonamente. Mas seja qual for a trajetória que o processo $(\overline{X}_t^\zeta)_{t \geq 0}$ faça, ele não volta para φ_0 , uma vez que para esta configuração ser atingida em uma transição, a configuração em que o processo está deve ser $\mathbf{a}_i \varphi_0$, para algum $i \in \Lambda_N$ e $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_{0,i}\}$ e, no entanto, a probabilidade com que esta transição é

aceita é dada pela taxa que definimos em (2.15), isto é, é dada por $\bar{c}(i, \varphi_{0,i}, \mathbf{a}_i \varphi_0) = 0$, pois $\Delta_i H(\mathbf{a}_i \varphi_0, \varphi_{0,i}) \geq h - 2D > 0$. No entanto, a partir de $\mathbf{a}_i \varphi_0$, para algum $i \in \Lambda_N$ e $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_{0,i}\}$ é possível o processo alcançar outras configurações através de transições que possuem taxa 1, inclusive a própria configuração Ψ (como veremos no Lema 3.11).

A partir do toro Λ_N , façamos uma enumeração dos seus sítios, de modo que $\langle i_m, i_{m+1} \rangle$ para $m = 1, \dots, |\Lambda_N| - 1$. Considerando a definição do processo $(\bar{X}_t^\zeta)_{t \geq 0}$ que vamos utilizar aqui, temos que em cada evento do Processo Pontual de Poisson de parâmetro $|\Lambda_N|(2^n - 1)$, a escolha do sítio i determinada pela enumeração dos sítios de Λ_N ocorre com probabilidade $\frac{1}{|\Lambda_N|}$; a escolha do vetor $\mathbf{a} = (+1, \dots, +1) \in \Omega_0$ para virar o spin em i ocorre com probabilidade $\frac{1}{2^n - 1}$ e aceitar essa transição ocorre com probabilidade dada por $\bar{c}(i, \mathbf{a}, \varphi)$, onde φ é a configuração presente. Essa probabilidade $\bar{c}(i, \mathbf{a}, \varphi)$ será sempre 1, pois $\forall \varphi \in \Omega$, teremos $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) \leq (2D - h)n < 0$.

Para este processo $(\bar{X}_t^\zeta)_{t \geq 0}$ com configuração inicial $\zeta \in \Omega$, consideremos $E(\zeta)$ como sendo o conjunto das seqüências de configurações que saem de ζ e chegam na configuração Ψ , ou seja,

$$E(\zeta) = \{ \{ \xi_s \}_{s=1}^m : m \in \mathbb{N}, \xi_1 = \zeta, \xi_m = \Psi, \langle \xi_s, \xi_{s+1} \rangle, \forall s \in \{1, \dots, m-1\} \}$$

$$\text{e } \xi_s \notin \{\varphi_0, \Psi\}, \forall 2 \leq s \leq m-1\}.$$

Consideremos uma particular seqüência de configurações deste conjunto $E(\zeta)$, dada por $\{ \xi_m \}_{m=1}^{|\Lambda_N|}$, de modo que para cada $m = 1, \dots, |\Lambda_N|$, a m -ésima transição consiste na mudança do m -ésimo sítio da enumeração, de ζ_{i_m} para $\mathbf{a} = (+1, \dots, +1)$ e no caso $\zeta_{i_m} = (+1, \dots, +1)$, a configuração permanece como está. Seja então $\mathbf{E}^\beta$ o evento: “o processo $\bar{X}_t^\zeta$ se desenvolve através da seqüência $\{ \xi_m \}_{m=1}^{|\Lambda_N|}$ atingindo Ψ antes do tempo $e^{\beta \varepsilon/2}$ ”. Com isso,

$$P(\bar{X}_t^\zeta = \Psi \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta \varepsilon/2}]) \geq P(\mathbf{E}^\beta).$$

Vamos calcular agora $\mathbb{P}(\mathbf{E}^\beta)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbf{E}^\beta) &\geq \left(\frac{1}{|\Lambda_N|(2^n - 1)} \right)^{|\Lambda_N|} \mathbb{P}(N(\epsilon^{\beta\epsilon/2}) \geq |\Lambda_N|) \\ &= \left(\frac{1}{|\Lambda_N|(2^n - 1)} \right)^{|\Lambda_N|} \sum_{k=|\Lambda_N|}^{\infty} \frac{e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)\epsilon^{\beta\epsilon/2}} (|\Lambda_N|(2^n - 1)\epsilon^{\beta\epsilon/2})^k}{k!},\end{aligned}$$

onde $N(t)$ é o Processo Pontual de Poisson utilizado na construção do processo citada em (2.9). Aplicando o limite para β grande temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{E}^\beta) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{|\Lambda_N|(2^n - 1)} \right)^{|\Lambda_N|} \sum_{k=|\Lambda_N|}^{\infty} \frac{e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)\epsilon^{\beta\epsilon/2}} (|\Lambda_N|(2^n - 1)\epsilon^{\beta\epsilon/2})^k}{k!} \right];$$

o primeiro fator independe de β , enquanto que o segundo tem limite 1 quando β tende a infinito. Assim, $\exists \beta_0 < \infty$ tal que $\forall \beta \geq \beta_0$,

$$\sum_{k=|\Lambda_N|}^{\infty} \frac{e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)\epsilon^{\beta\epsilon/2}} (|\Lambda_N|(2^n - 1)\epsilon^{\beta\epsilon/2})^k}{k!} \geq \delta'$$

e

$$\mathbb{P}(\mathbf{E}^\beta) \geq \delta > 0.$$

(δ é o produto resultante de δ' e $\left(\frac{1}{|\Lambda_N|(2^n-1)} \right)^{|\Lambda_N|}$).

Observemos que:

$$\mathbb{P}(\overline{X}_t^\zeta = \Psi \text{ para algum } t \in [0, \epsilon^{\beta\epsilon}]) = 1 - \mathbb{P}(\overline{X}_t^\zeta \neq \Psi, \forall t \in [0, \epsilon^{\beta\epsilon}]).$$

Vamos calcular esta probabilidade $\mathbb{P}(\overline{X}_t^\zeta \neq \Psi, \forall t \in [0, \epsilon^{\beta\epsilon}])$.

Seja o evento

$$\mathbf{F}_m : \overline{X}_t^\zeta \neq \Psi, \forall t \in [(m-1)\epsilon^{\beta\epsilon/2}, m\epsilon^{\beta\epsilon/2}], m = 1, \dots, \lfloor \epsilon^{\beta\epsilon/2} \rfloor.$$

Com isso,

$$\mathbb{P}(\overline{X}_t^\zeta \neq \Psi, \forall t \in [0, \epsilon^{\beta\epsilon}]) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\lfloor \epsilon^{\beta\epsilon/2} \rfloor} \mathbf{F}_m\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P} \left(\mathbf{F}_{\lfloor e^{\beta\varepsilon/2} \rfloor} \mid \bigcap_{m=1}^{\lfloor e^{\beta\varepsilon/2} \rfloor - 1} \mathbf{F}_m \right) \cdot \mathbb{P} \left(\mathbf{F}_{\lfloor e^{\beta\varepsilon/2} \rfloor - 1} \mid \bigcap_{m=1}^{\lfloor e^{\beta\varepsilon/2} \rfloor - 2} \mathbf{F}_m \right) \dots \mathbb{P}(\mathbf{F}_2 \mid \mathbf{F}_1) \mathbb{P}(\mathbf{F}_1) \\
&\leq \left[\sup_{\xi \in \Omega} \mathbb{P} \left(\overline{X}_t^\xi \neq \Psi, \forall t \in [0, e^{\beta\varepsilon/2}] \right) \right]^{\lfloor e^{\beta\varepsilon/2} \rfloor}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left(\overline{X}_t^\zeta = \Psi \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta\varepsilon}] \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\overline{X}_t^\zeta \neq \Psi, \forall t \in [0, e^{\beta\varepsilon}] \right) \\
&\geq 1 - \left[\sup_{\xi \in \Omega} \mathbb{P} \left(\overline{X}_t^\xi \neq \Psi, \forall t \in [0, e^{\beta\varepsilon/2}] \right) \right]^{\lfloor e^{\beta\varepsilon/2} \rfloor} \geq 1 - (1 - \delta)^{\lfloor e^{\beta\varepsilon/2} \rfloor} \\
&\Rightarrow \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\overline{X}_t^\zeta = \Psi \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta\varepsilon}] \right) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[1 - (1 - \delta)^{\lfloor e^{\beta\varepsilon/2} \rfloor} \right] = 1. \square
\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 1.2:

Pela Proposição 2.2, tomando-se $\zeta = \varphi_0$ temos que o tempo $e^{\beta\varepsilon}$, com β grande e $\varepsilon > 0$ qualquer, é suficiente para que $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ chegue em Ψ e pela Proposição 2.1, bastando tomar $0 < \varepsilon < 2D + h$, podemos concluir que esse tempo é suficiente para que $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ chegue em Ψ , já que os dois processos estão se desenvolvendo juntos. Com estes dois resultados, podemos então concluir que no caso $h > 2D$, no processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ não há metaestabilidade, pois além do processo não apresentar um aparente equilíbrio num estado metaestável, num tempo de ordem 1 para β grande, o processo chega em Ψ .

Portanto, com grande probabilidade para β grande, o tempo para o processo sair de φ_0 e atingir Ψ pela primeira vez, não é maior que $e^{\beta\varepsilon}$, ou seja,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T \leq e^{\beta\varepsilon}) = 1. \square$$

Antes de verificarmos o Teorema 1.3, que caracteriza o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ quanto ao número de spins $+1$ na sua evolução para os casos em que não há metaestabilidade, veremos um Lema auxiliar que nos mostra essas mesmas características no processo $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, cujas

taxas foram definidas em (2.15). Estas taxas definem este processo $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ como sendo aquele que faz transições com taxa 1 somente se a energia diminui e não faz transições se a energia aumenta.

Vamos definir:

$$|\overline{X}_t^{\varphi_0}| = |\{(i; k) \in \Lambda_N \times \{1, \dots, n\} : \overline{X}_t^{\varphi_0}(i; k) = +1\}|.$$

Lema 3.3 . Consideremos o processo $(\overline{X}_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$.

a) Se $h \in (2D, 2Dn)$ então para $0 \leq t_1 < t_2$ temos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_{t_1}^{\varphi_0}| \leq |\overline{X}_{t_2}^{\varphi_0}|) < 1.$$

b) Se $h > 2Dn$ então para $0 \leq t_1 < t_2$ temos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_{t_1}^{\varphi_0}| \leq |\overline{X}_{t_2}^{\varphi_0}|) = 1.$$

Demonstração:

Seja $\overline{X}_{t_1}^{\varphi_0} = \varphi$ alguma configuração de Ω que apresenta em algum sítio i de Λ_N o spin φ_i com pelo menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ spins $+1$ (aqui $\lceil x \rceil$ é o menor número inteiro maior ou igual ao número real x).

Consideremos $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$ de modo que $\mathbf{a}^k \neq \varphi_i^k, \forall k \in \{1, \dots, n\}$. Assim, $c(i, \mathbf{a}, \varphi) = e^{-\beta[\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a})]_+}$, onde $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) \geq -2Dn + h$.

a) Para $h \in (2D, 2Dn)$ temos que $-2Dn + h < 0$. Logo, podemos tomar $\bar{\mathbf{a}} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$ de modo que $\Delta_i H(\varphi, \bar{\mathbf{a}})$ seja um número negativo.

Assim, denotando $\overline{X}_{t_2}^{\varphi_0} = \bar{\mathbf{a}}_i \varphi$, podemos considerar o seguinte evento $\mathbf{E}$: “o processo evolue de $\overline{X}_{t_1}^{\varphi_0} = \varphi$ para $\overline{X}_{t_2}^{\varphi_0} = \bar{\mathbf{a}}_i \varphi$ ”. Com isso,

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_{t_1}^{\varphi_0}| > |\overline{X}_{t_2}^{\varphi_0}|) \geq \mathbb{P}(\mathbf{E}) \geq \frac{1}{1 + d_\beta},$$

onde d_β majora as taxas cujas transições a partir de φ ou diminuem ou aumentam energia, com exceção da taxa referente à transição de $\overline{X_{t_1}}^{\varphi_0}$ para $\overline{X_{t_2}}^{\varphi_0}$, que é o “1” que aparece na expressão.

Logo,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\overline{X_{t_1}}^{\varphi_0}| > |\overline{X_{t_2}}^{\varphi_0}|) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + d_\beta} > 0.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\overline{X_{t_1}}^{\varphi_0}| \leq |\overline{X_{t_2}}^{\varphi_0}|) < 1.$$

b) Para $h > 2Dn$ temos que $-2Dn + h > 0$.

Neste caso, pela definição do processo $(\overline{X_t}^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, a taxa com que φ passa para $a_i \varphi$ é 0 e, neste caso, o processo não faz essa transição.

Logo,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\overline{X_{t_1}}^{\varphi_0}| > |\overline{X_{t_2}}^{\varphi_0}|) = 0.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\overline{X_{t_1}}^{\varphi_0}| \leq |\overline{X_{t_2}}^{\varphi_0}|) = 1. \square$$

Demonstração do Teorema 1.3:

A Proposição 2.1 nos diz que até o tempo $e^{\beta\varepsilon}$, $\forall 0 < \varepsilon < 2D + h$ os dois processos $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ e $(\overline{X_t}^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ se desenvolvem juntos.

Portanto, podemos concluir este Teorema, através dos argumentos presentes na demonstração do Lema 3.3 que acabamos de mostrar, uma vez que este Lema está provado para o caso do processo $(\overline{X_t}^{\varphi_0})_{t \geq 0}$. $\square$

3.3 Tempo para sair da situação metaestável quando

$$h \in (2(D-1), 2D).$$

Nesta Seção, vamos demonstrar os Teoremas 1.5 e 1.6.

No caso do primeiro, queremos mostrar que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{\beta} \log T - (2D - h) \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

Porém,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{\beta} \log T - (2D - h) \right| > \varepsilon \right) = \mathbb{P}(T < e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}) + \mathbb{P}(T > e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}).$$

Diante disso, vamos dividir a demonstração em duas partes e mostrar que, $\forall \varepsilon > 0$:

$$(a) \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T < e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}) = 0 \text{ e}$$

$$(b) \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T > e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}) = 0.$$

Consideremos

$$\mathcal{F} = \{\xi \in \Omega : \xi = a_i \varphi_0 \text{ para algum } i \in \Lambda_N \text{ e } a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_{0,i}\}\}. \quad (3.1)$$

Vamos definir o seguinte tempo

$$\bar{T} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} \neq \varphi_0\} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} \in \mathcal{F}\}. \quad (3.2)$$

Parte (a) da demonstração do Teorema 1.5:

Temos que $\bar{T}$ é uma variável aleatória exponencial com taxa

$$\lambda = |\Lambda_N| \sum_{a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_{0,i}\}} c(i, a, \varphi_0),$$

ou seja,

$$\bar{T} \sim \text{Exp} \left(|\Lambda_N| \sum_{\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_0, i\}} c(i, \mathbf{a}, \varphi_0) \right).$$

Da construção do processo, temos que:

$$\begin{aligned} |\Lambda_N| \sum_{\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_0, i\}} c(i, \mathbf{a}, \varphi_0) &\leq |\Lambda_N| \sum_{\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_0, i\}} \max_{\mathbf{a}; \varphi_0 \in \Omega} c(i, \mathbf{a}, \varphi_0) \\ &= |\Lambda_N| \sum_{\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_0, i\}} e^{-\beta(2D-h)} = |\Lambda_N|(2^n - 1)e^{-\beta(2D-h)}. \end{aligned}$$

Assim, como $\mathbb{P}(\bar{T} < T) = 1$, já que $\bar{T}$ é o primeiro instante em que ocorre alguma mudança em φ_0 e $|\Lambda_N| > 1$, então

$$(T < e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}) \subset (\bar{T} < e^{\beta(2D-h-\varepsilon)})$$

e, com isso:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}) &\leq \mathbb{P}(\bar{T} < e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}) = 1 - e^{-\lambda e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}} \\ &\leq 1 - e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)e^{-\beta(2D-h)} e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}} = 1 - e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)e^{-\beta\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T < e^{\beta(2D-h-\varepsilon)}) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} (1 - e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)e^{-\beta\varepsilon}}) = 0. \square$$

Antes de provarmos a parte (b) da demonstração do Teorema 1.5, vamos precisar de alguns resultados auxiliares, enunciados e mostrados a seguir.

Vamos iniciar mostrando que a configuração φ_0 é o único elemento do conjunto

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in \Omega : \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^\varphi(\varphi_0) < T^\varphi(\eta)) = 1, \forall \eta \in \mathbf{A}\},$$

definido em (2.12), onde em (2.10) vimos que

$$\mathbf{A} = \{\eta \in \Omega : \eta \neq \varphi_0 \text{ e } \eta_i = \eta_j, \forall i, j \in \Lambda_N, i \neq j\}.$$

Lema 3.4 . Se $h \in (2(D-1), 2D)$ então $\mathcal{A} = \{\varphi_0\}$.

Por definição, um conjunto $\mathcal{K}$ tem a propriedade de ser *conexo* se para qualquer par de configurações $\eta, \xi \in \mathcal{K}$ é possível ir de η até ξ por uma seqüência de configurações de $\mathcal{K}$, onde apenas um spin é trocado por vez em cada passo, ou seja, existe a seqüência $\{\eta_s\}_{s=1}^m$, com $m \in \mathbb{N}$, onde $\forall s \in \{1, \dots, m\}$, temos $\eta_s \in \mathcal{K}$, $\eta_1 = \eta$, $\eta_m = \xi$ e $\langle \eta_s, \eta_{s+1} \rangle$ para $s \in \{1, \dots, m-1\}$. Porém, um conjunto $\mathcal{K}$ é desconexo, se existe um par de configurações $\eta, \xi \in \mathcal{K}$, de modo que qualquer que seja a seqüência $\{\eta_s\}_{s=1}^m$, com $m \in \mathbb{N}$, onde $\eta_1 = \eta$, $\eta_m = \xi$ e $\langle \eta_s, \eta_{s+1} \rangle$ para $s \in \{1, \dots, m-1\}$, existe pelo menos um $s_0 \in \{2, \dots, m-1\}$ com $\eta_{s_0} \notin \mathcal{K}$. Veremos a seguir que o conjunto $\mathcal{A}$ tem essa propriedade de ser conexo, qualquer que seja o campo magnético positivo que considerarmos.

Lema 3.5 . Para todo campo magnético $h > 0$, o conjunto $\mathcal{A}$ é conexo.

Demonstração:

Suponhamos que o conjunto $\mathcal{A}$ seja desconexo.

Como a configuração inicial é dada por φ_0 , é imediato que $\varphi_0 \in \mathcal{A}$. Consideremos $\varphi_0 \in \mathcal{A}_1$, onde $\mathcal{A}_1$ é o maior subconjunto conexo de $\mathcal{A}$ contendo φ_0 , ou seja, $\mathcal{A}_1$ é a componente conexa de φ_0 . Pelo fato de $\mathcal{A}$ ser um conjunto desconexo, existe $\emptyset \neq \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$, com $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}_1$, desconexo de $\mathcal{A}_1$ e de modo que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$; tomemos uma configuração $\zeta \in \mathcal{A}_2$. Pelo fato de $\mathcal{A}_2$ ser desconexo de $\mathcal{A}_1$ então existem duas configurações, uma em

$\mathcal{A}_1$ e outra em $\mathcal{A}_2$, (e, portanto, ambas em $\mathcal{A}$), onde qualquer que seja a seqüência de configurações de uma até outra, existe pelo menos uma configuração nesta seqüência que não pertence a $\mathcal{A}$ (esta outra configuração em $\mathcal{A}_2$, podemos considerar como sendo a ζ que nos referimos agora).

Como $\zeta \in \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\zeta(\varphi_0) < T^\zeta(\eta)) = 1, \forall \eta \in \mathbf{A}.$$

Assim, se definirmos o conjunto das seqüências de configurações iniciando em ζ e terminando em φ_0 , como sendo

$$B(\zeta) = \{ \{ \xi_s \}_{s=1}^m : m \in \mathbb{N}, \xi_1 = \zeta, \xi_m = \varphi_0, \langle \xi_s, \xi_{s+1} \rangle \text{ e } \xi_s \notin \mathbf{A} \cup \{ \varphi_0 \}, \forall s \in \{1, \dots, m-1\} \},$$

isso significa que para o evento

$\mathbf{E} = \text{"ocorre no processo a trajetória correspondente a alguma seqüência de } B(\zeta)\text{"}$

temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{E}) = 1.$$

Pela hipótese de $\mathcal{A}$ ser desconexo e de termos tomado $\zeta \in \mathcal{A}_2$ desconexo de $\mathcal{A}_1$ então em toda seqüência de configurações de $B(\zeta)$, existe alguma configuração que não pertence a $\mathcal{A}_2$ e que pelo fato de $\mathcal{A}$ ser $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, esta configuração não pertence a $\mathcal{A}$. Vamos então definir uma função f que associa toda seqüência de $B(\zeta)$ a uma configuração desta mesma seqüência e que não pertence a $\mathcal{A}$, ou seja,

$$f : B(\zeta) \rightarrow \Omega \setminus \mathcal{A}$$

e assim, podemos denotar o conjunto imagem da função f como sendo o conjunto $C(\zeta)$, com $C(\zeta) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Tomando-se ρ em $C(\zeta)$, vamos definir $B_\rho(\zeta)$ como sendo o conjunto das seqüências de $B(\zeta)$ que saem pela primeira vez de $\mathcal{A}$, através da configuração ρ . Dessa forma,

$B_\rho(\zeta) = f^{-1}(\rho) \subset B(\zeta)$ (f^{-1} é a imagem inversa de f). Diante disso, vemos que $B(\zeta) = \bigcup_{\rho \in C(\zeta)} B_\rho(\zeta)$. De fato, a inclusão $\bigcup_{\rho \in C(\zeta)} B_\rho(\zeta) \subset B(\zeta)$ é imediata enquanto que se tomarmos uma seqüência qualquer de $B(\zeta)$, por exemplo $\{\xi_s\}_{s=1}^m$, existe somente uma configuração da seqüência que consiste na primeira que não é elemento de $\mathcal{A}$, e que pertence a $C(\zeta)$. Notemos que essa união sobre as configurações de $C(\zeta)$ é de conjuntos disjuntos (isto é, $B_\rho(\zeta) \cap B_\xi(\zeta) = \emptyset$ se $\rho \neq \xi$).

Assim, se para ρ em $C(\zeta)$ definirmos o evento

$\mathbf{F}_\rho = \text{"ocorre no processo a trajetória correspondente a alguma seqüência } \{\xi_s\}_{s=1}^m \text{ de } B_\rho(\zeta)"$

então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{\rho \in C(\zeta)} \mathbf{F}_\rho \right) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{\rho \in C(\zeta)} \mathbb{P}(\mathbf{F}_\rho) = 1,$$

por aditividade de conjuntos disjuntos, já que no nosso caso, como já observamos, temos

$\bigcup_{\rho \in C(\zeta)} B_\rho(\zeta)$ disjunta. Assim, como $|\Lambda_N| < \infty$ e o conjunto das configurações Ω é finito, podemos dizer que $\exists \rho_0 \in C(\zeta)$ tal que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{F}_{\rho_0}) > 0. \quad (3.3)$$

Com isso, a trajetória que o processo segue está em $B_{\rho_0}(\zeta)$ com probabilidade positiva para β grande, sendo que $\rho_0 \notin \mathcal{A}$; logo, a trajetória até ρ_0 também ocorre com probabilidade positiva para β grande.

Fixemos o elemento ρ_0 de $C(\zeta)$ e consideremos $E(\rho_0)$ o conjunto das trajetórias que saem de ρ_0 e chegam em $\mathbf{A}$, sem passar por φ_0 , ou seja,

$$E(\rho_0) = \{ \{\xi_s\}_{s=1}^m : m \in \mathbb{N}, \xi_1 = \rho_0, \xi_m \in \mathbf{A}, \langle \xi_s, \xi_{s+1} \rangle \text{ e}$$

$$\xi_s \notin \mathbf{A} \cup \{\varphi_0\}, \forall s \in \{1, \dots, m-1\} \}.$$

Como $\rho_0 \notin \mathcal{A}$ então $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^{\rho_0}(\eta) < T^{\rho_0}(\varphi_0)) > 0$, para algum $\eta \in \mathbf{A}$; logo, o evento

G_{ρ_0} = "começando de ρ_0 , o processo evolue segundo uma trajetória correspondente a alguma seqüência de $E(\rho_0)$ "

é tal que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(G_{\rho_0}) > 0. \quad (3.4)$$

Desse fato e de (3.3), temos que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\zeta(\eta) < T^\zeta(\varphi_0)) > 0$, para algum $\eta \in \mathbf{A}$. De fato,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\zeta(\eta) < T^\zeta(\varphi_0)) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\zeta(\rho_0) < T^\zeta(\varphi_0), T^{\rho_0}(\eta) < T^{\rho_0}(\varphi_0)),$$

para $\rho_0 \in C(\zeta)$; assim, pelo processo ser Markoviano,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\zeta(\eta) < T^\zeta(\varphi_0)) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} [P(T^\zeta(\rho_0) < T^\zeta(\varphi_0)) P(T^{\rho_0}(\eta) < T^{\rho_0}(\varphi_0))] > 0,$$

por (3.3) e (3.4). Portanto, isso contradiz a definição de $\mathcal{A}$.

Logo, $\mathcal{A}_2 = \emptyset$ e $\mathcal{A}$ é conexo. $\square$

No início desta Seção, definimos que

$$\overline{T} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} \neq \varphi_0\} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} \in \mathcal{F}\},$$

onde

$$\mathcal{F} = \{\xi \in \Omega : \xi = a_i \varphi_0 \text{ para algum } i \in \Lambda_N \text{ e } a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_0, i\}\},$$

dadas em (3.2) e (3.1), respectivamente.

Vamos provar a seguir que se $h \in (2(D-1), 2D)$ então a configuração que o processo atinge em $\overline{T}$, não é elemento de $\mathcal{A}$.

Lema 3.6 . Se $h \in (2(D-1), 2D)$ então $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Demonstração:

Seja $\sigma \in \mathcal{F}$. Queremos mostrar que $\sigma \notin \mathcal{A}$. ou seja, que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\sigma(\eta) < T^\sigma(\varphi_0)) > 0, \text{ para algum } \eta \in \mathbf{A}.$$

Pela definição de $\mathcal{F}$, temos que $\sigma = a_i \varphi_0$ para algum $i \in \Lambda_N$ e $a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_{0,i}\}$. Diante disso, a partir do toro Λ_N , fazamos uma enumeração dos seus sítios, com exceção do sítio i que já aponta para a , de modo que $\langle j_m, j_{m+1} \rangle$ para $m = 1, \dots, |\Lambda_N| - 2$ e $\langle i, j_1 \rangle$. Sendo assim, considerando a construção do processo citada em (2.9), para $m = 1, \dots, |\Lambda_N| - 1$, seja o evento **E**: “o processo $(X_t^\sigma)_{t \geq 0}$ se desenvolve de acordo com $|\Lambda_N| - 1$ transições, onde a m -ésima transição consiste na mudança do m -ésimo sítio da enumeração de Λ_N , de φ_{0,i_m} para a ”. Como por hipótese, $h \in (2(D-1), 2D)$ então $c(j, a, \varphi)$ será sempre 1, para $m = 1, \dots, |\Lambda_N| - 1$, onde φ é a configuração presente.

Assim,

$$P(T^\sigma(\eta) < T^\sigma(\varphi_0)) \geq P(\mathbf{E}) = \left(\frac{1}{|\Lambda_N|(2^n - 1)} \right)^{|\Lambda_N|-1}.$$

Dessa forma,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\sigma(\eta) < T^\sigma(\varphi_0)) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|\Lambda_N|(2^n - 1)} \right)^{|\Lambda_N|-1} > 0.$$

Portanto, σ não satisfaz a definição de $\mathcal{A}$ e, assim, $\sigma \notin \mathcal{A}$.

Logo, $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} = \emptyset$. $\square$

Com os Lemas 3.5 e 3.6 podemos provar o Lema 3.4 que segue como consequência de ambos:

Demonstração do Lema 3.4:

Temos a inclusão $\{\varphi_0\} \subset \mathcal{A}$ pois φ_0 é a configuração inicial do processo.

Pelo Lema 3.6, temos que $\mathcal{F} \cap \mathcal{A} = \emptyset$, ou seja, à medida que o processo atinge $\mathcal{F}$ pela primeira vez, o que significa que saiu da configuração inicial φ_0 , a nova configuração não está em $\mathcal{A}$, que por sua vez, o Lema 3.5 nos diz que é conexo. Com isso, temos que $\mathcal{A} \subset \{\varphi_0\}$.

Portanto, $\mathcal{A} = \{\varphi_0\}$. $\square$

Vamos definir o conjunto das configurações que são mínimos locais de energia por M , ou seja,

$$M = \{\varphi \in \Omega : \Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) \geq 0, \forall i \in \Lambda_N \text{ e } \forall \mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}\}.$$

Observação 3.1 : Poderíamos ter definido M substituindo ' $\geq$ ' por ' $>$ ', pois se tivéssemos $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) = 0$, $\forall i \in \Lambda_N$ e $\forall \mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$ então pela restrição do campo magnético dada em (2.13), isso significa que não houve alteração na configuração.

Antes de verificarmos quais configurações são mínimos locais, observemos o seguinte Lema que nos diz que os mínimos locais são “isolados”, no sentido que não existem duas configurações que estejam em M , sejam vizinhas próximas e tenham o mesmo valor de energia. Veremos então que configurações η de Ω , para as quais é possível que em algum sítio haja alteração do seu spin, e ao mesmo tempo, o valor da energia se mantenha, são aquelas que não estão em M , ou seja, não são mínimos locais de energia.

Lema 3.7 . Se $\eta, \xi \in \Omega$ são tais que $\langle \eta, \xi \rangle$ e $H(\eta) = H(\xi)$ então existe uma configuração $\zeta \in \Omega$ tal que $\langle \eta, \zeta \rangle$ e $H(\zeta) < H(\eta)$.

Demonstração:

Pela hipótese, temos que $\exists i \in \Lambda_N$ tal que $\xi = a_i \eta$, onde $a \in \Omega_0 \setminus \{\eta_i\}$. Assim, $\Delta_i H(\eta, a) = H(a_i \eta) - H(\eta) = H(\xi) - H(\eta) = 0$, pois é suposto que $H(\eta) = H(\xi)$. Dessa forma, de (2.14), temos que $\Delta_i H(\eta, a) = \sum_{k=1}^n (c_k + l_k h)$ e, tomando-se $c_k + l_k h \equiv m_k$, temos $\Delta_i H(\eta, a) = \sum_{k=1}^n m_k = 0$. No entanto, como $m_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ e existe pelo menos um $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ com $m_{k_0} \neq 0$, pois temos $\langle \eta, \xi \rangle$ e a restrição para h dada em (2.13) então $\exists k' \in \{1, \dots, n\}$ tal que $m_{k'} < 0$: de fato, se $m_{k'} \geq 0$, $\forall k' \in \{1, \dots, n\}$ então $\sum_{k=1}^n m_k > 0$, já que não temos $m_k = 0, \forall k$; dessa forma, $\Delta_i H_a^{k'}(\eta) = c_{k'} + l_{k'} h < 0$. Basta considerarmos então $b \in \Omega_0$ onde $b \neq \eta_i$ apenas na k' -ésima coordenada, pois assim teremos $\zeta = b_i \eta \in \Omega$ tal que $\langle \eta, \zeta \rangle$ e $\Delta_i H(\eta, b) = \Delta_i H_b^{k'}(\eta) < 0 \Rightarrow H(\zeta) < H(\eta)$. $\square$

Diante desse Lema 3.7 e pelo fato de que $h \in (2(D-1), 2D)$, temos o seguinte resultado:

Lema 3.8 . Se $h \in (2(D-1), 2D)$ então $M = A \cup \{\varphi_0\}$.

Demonstração:

Seja $\varphi \in A \cup \{\varphi_0\}$.

Consideremos $\varphi \in \{\varphi_0\}$, ou seja, $\varphi = \varphi_0$. Quando o processo deixa essa configuração, ele atinge o conjunto

$$\mathcal{F} = \{\xi \in \Omega : \xi = a_i \varphi_0 \text{ para algum } i \in \Lambda_N \text{ e } a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_{0,i}\}\}$$

definido em (3.1). Porém,

$$\Delta_i H(\varphi_0, a) = H(a_i \varphi_0) - H(\varphi_0) = k(2D - h) > 0,$$

onde $k \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, $\varphi = \varphi_0 \in M$.

Consideremos $\varphi \in A$. Por essa razão,

$$\varphi \neq \varphi_0 \text{ e } \varphi = \{\varphi_i : \varphi_i = \varphi_j, \forall i, j \in \Lambda_N, i \neq j\}.$$

Assim, $\forall i \in \Lambda_N$, $\varphi_i = (\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^n)$ possui k coordenadas $+1$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$. Seja então $\mathbf{b} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$; com isso, para $i \in \Lambda_N$, $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{b}) = H(\mathbf{b}_i \varphi) - H(\varphi) = \sum_{p=1}^n \Delta_i H_{\mathbf{b}}^p(\varphi)$, onde

$$\Delta_i H_{\mathbf{b}}^p(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi_i^p = \mathbf{b}^p \\ 2D + h & \text{se } \varphi_i^p = +1 \text{ e } \mathbf{b}^p = -1. \\ 2D - h & \text{se } \varphi_i^p = -1 \text{ e } \mathbf{b}^p = +1 \end{cases}$$

Observemos que sempre teremos $\Delta_i H_{\mathbf{b}}^p(\varphi) \geq 0$, $\forall p \in \{1, \dots, n\}$. Como $\mathbf{b} \neq \varphi_i$, $\forall i \in \Lambda_N$ então existe pelo menos um $p_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\Delta_i H_{\mathbf{b}}^{p_0}(\varphi) > 0$ e, portanto, $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{b}) > 0$. Logo, $\varphi \in \mathbf{M}$.

Seja $\varphi \notin \mathbf{A} \cup \{\varphi_0\}$. Assim, $\varphi \notin \mathbf{A}$ e $\varphi \notin \{\varphi_0\}$, ou seja, existem $i, j \in \Lambda_N$, $\langle i, j \rangle$ com $\varphi_i \neq \varphi_j$. Por essa razão, existe pelo menos um $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\varphi_i^k \neq \varphi_j^k$ e, assim, $\varphi_i^k = +1$ e $\varphi_j^k = -1$ ou $\varphi_i^k = -1$ e $\varphi_j^k = +1$. Suponhamos o primeiro caso: seja $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_j\}$, onde $\mathbf{a}$ e $\{\varphi_j\}$ diferem apenas na k -ésima coordenada; com isso, para o sítio $j \in \Lambda_N$, $\Delta_j H(\varphi, \mathbf{a}) \leq 2(D-1) - h < 0$ e, portanto, $\varphi \notin \mathbf{M}$. Conclusões análogas são obtidas ao considerarmos o segundo caso. $\square$

Dada uma configuração $\xi \in \mathbf{M}$, vamos definir $\mathcal{B}_\xi$ como sendo o conjunto de todas as configurações de Ω que podem alcançar ξ através de uma seqüência de transições, nas quais apenas um spin troca por vez e ocorre decréscimo de energia, ou seja,

$$\mathcal{B}_\xi = \{\varphi \in \Omega : \exists \{\xi_s\}_{s=0}^m \text{ tal que } \xi_0 = \varphi, \xi_1, \dots, \xi_m = \xi, \text{ para algum } m \in \mathbb{N},$$

$$\text{com } \langle \xi_s, \xi_{s+1} \rangle \text{ e } H(\xi_s) > H(\xi_{s+1}), s \in \{0, 1, \dots, m-1\}\}.$$

Diante disso, temos que $\Omega = \bigcup_{\xi \in \mathbf{M}} \mathcal{B}_\xi$. De fato, se $\varphi \in \bigcup_{\xi \in \mathbf{M}} \mathcal{B}_\xi$ então é imediato que $\varphi \in \Omega$, pela própria definição de $\mathcal{B}_\xi$; se $\varphi \in \Omega$ então ou $\varphi \in \mathbf{M}$ ou $\varphi \in \Omega \setminus \mathbf{M}$. Se for o primeiro caso então

$$\varphi \in \mathbf{M} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{B}_\varphi \subset \bigcup_{\xi \in \mathbf{M}} \mathcal{B}_\xi.$$

Se for o segundo caso então para algum $i \in \Lambda_N$ e $a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$ temos $\Delta_i H(\varphi, a) \leq 0$; vamos denominar $a_i \varphi$ por η , que pode pertencer a M ou não. Novamente, se $\eta \in M$ então $\varphi \in \mathcal{B}_\eta \subset \bigcup_{\xi \in M} \mathcal{B}_\xi$; caso contrário, repetimos os mesmos argumentos, de modo que seja gerada uma seqüência finita (pois Ω é um conjunto finito) de configurações de φ até algum mínimo de Ω , dada por $\eta = \eta_1, \dots, \eta_{n_0}$, com $\eta_{n_0} \in M$ e $\langle \eta_s, \eta_{s+1} \rangle$, para $s \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$. Sendo assim, $\varphi \in \mathcal{B}_{\eta_{n_0}} \subset \bigcup_{\xi \in M} \mathcal{B}_\xi$.

Diante do conjunto M , podemos mostrar o seguinte:

Lema 3.9 . Para todo campo magnético $h > 0$, $\varphi \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^\varphi(M) < e^{\beta\varepsilon}) = 1.$$

Demonstração:

Se $\varphi \in M$ então o resultado é imediato.

Consideremos o caso em que $\varphi \notin M$, ou seja, $\varphi \notin A \cup \{\varphi_0\}$. Se $\varphi \notin M$ então $\exists i \in \Lambda_N$ e $\exists a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$ tais que $\Delta_i H(\varphi, a) < 0$, ou seja, $\Delta_i H(\varphi, a) = H(a_i \varphi) - H(\varphi) < 0$ e $c(i, a, \varphi) = 1$. A probabilidade do processo fazer transições para configurações com energia maior que a da configuração em que o processo se encontra e que seja vizinha próxima vai à zero quando β tende a infinito. E também, mesmo que o processo faça transições para configurações de mesma energia, isso não ocorre um número muito grande de vezes à medida que β cresce pois, como vimos no Lema 3.7, sempre existe uma configuração de energia menor e que seja vizinha próxima da que se encontra para a qual o processo pode ir.

Pelo fato de $\varphi \notin M$ e de existir uma transição com taxa 1 para uma configuração de energia menor então a probabilidade para β grande dessa possível transição ocorrer é

positiva e a probabilidade de ocorrer antes de um tempo exponencialmente grande quando β cresce, tende a 1. Se

$$\mathcal{E}_1 = \{\sigma \in \Omega : H(\sigma) < H(\varphi) \text{ e } \langle \sigma, \varphi \rangle\}$$

então para $\varepsilon > 0$, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\varphi(\mathcal{E}_1) < e^{\beta\varepsilon/2}) = 1$. No caso da configuração deste conjunto $\mathcal{E}_1$ estar em M então já temos o resultado; caso contrário, podemos repetir os argumentos e para

$$\mathcal{E}_2 = \{\sigma \in \Omega : H(\sigma) < H(\zeta) \text{ e } \langle \sigma, \zeta \rangle, \forall \zeta \in \mathcal{E}_1\}$$

temos $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^{\mathcal{E}_1}(\mathcal{E}_2) < e^{\beta\varepsilon/2}) = 1$. Se agora a configuração deste conjunto $\mathcal{E}_2$ está em M então temos o resultado; caso contrário, repetimos os mesmos argumentos. Existe pelo menos uma seqüência finita de configurações, dada por $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ pertencentes a $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$ respectivamente, onde $m \in \mathbb{N}$ é um número finito pois Ω é um conjunto finito e $\eta_m \in M$. Notemos que

$$\mathcal{E}_p = \{\sigma \in \Omega : H(\sigma) < H(\zeta) \text{ e } \langle \sigma, \zeta \rangle, \forall \zeta \in \mathcal{E}_{p-1}\}$$

onde $p \in \{2, \dots, m\}$. Observemos que o número de elementos dessa seqüência não depende de β , mas é limitado e em cada transição temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P\left(T^{\mathcal{E}_l}(\mathcal{E}_{l+1}) < e^{\beta\varepsilon/2}\right) = 1,$$

com $l = 0, 1, \dots, m-1$, $\mathcal{E}_0$ definido por $\{\varphi\}$ e $\varepsilon > 0$, já que cada configuração que é atingida na seqüência possui energia menor que a energia da configuração anterior, sendo essas configurações vizinhas próximas. Analogamente ao tempo que definimos em (2.11), temos que

$$T^{\mathcal{E}_l}(\mathcal{E}_{l+1}) = \inf\{t \geq 0 : \text{para alguma } \sigma \in \mathcal{E}_l \text{ temos } X_t^\sigma \in \mathcal{E}_{l+1}\}.$$

Dessa forma,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(T^\varphi(M) < e^{\beta\varepsilon}) \geq \left[\lim_{\beta \rightarrow \infty} P\left(T^{\mathcal{E}_l}(\mathcal{E}_{l+1}) < \frac{e^{\beta\varepsilon}}{|\Lambda_N|}\right) \right]^{|\Lambda_N|}$$

$$\geq \left[\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(T^{\mathcal{E}_l}(\mathcal{E}_{l+1}) < e^{\beta \varepsilon / 2} \right) \right]^{|\Lambda_N|} = 1, \forall \varepsilon > 0. \square$$

Queremos mostrar agora, que antes de um tempo $e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}$, quando β cresce, o processo partindo de φ_0 já atingiu $\mathbf{A}$; em particular, para o tempo $e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}$, onde $\varepsilon > 0$.

Veremos um resultado que caracteriza a configuração de $\mathcal{F}$ que o processo atinge ao deixar φ_0 . O resultado nos diz que com grande probabilidade quando β cresce, o vetor $\mathbf{a} \in \Omega_0$ possui apenas uma coordenada $+1$.

Vamos definir o subconjunto de $\mathcal{F}$ dado por

$$\overline{\mathcal{F}} = \{ \xi \in \Omega : \xi = \mathbf{a}_i \varphi_0 \text{ para algum } i \in \Lambda_N \text{ e } \mathbf{a} \in \Omega_0 \text{ com apenas uma coordenada } +1 \} \quad (3.5)$$

e mostrar que para todo campo $h < 2D$, com grande probabilidade para β grande, a configuração que o processo atinge ao sair de φ_0 está em $\overline{\mathcal{F}}$, ou seja,

Lema 3.10 . Se $h < 2D$ então $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_T^{\varphi_0} \in \overline{\mathcal{F}}) = 1$.

Demonstração:

Para mostrarmos este limite, consideremos a construção do processo que citamos em (2.9).

Observemos que a taxa com que, saindo de φ_0 , tentamos fazer a troca para um elemento de Ω_0 que possua k coordenadas $+1$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$, é dada por

$$|\Lambda_N| \binom{n}{k} e^{-\beta k(2D-h)}.$$

Assim,

$$\mathbb{P}(X_T^{\varphi_0} \in \overline{\mathcal{F}}) = \frac{|\Lambda_N| \binom{n}{1} e^{-\beta(2D-h)}}{\sum_{k=1}^n |\Lambda_N| \binom{n}{k} e^{-\beta k(2D-h)}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=2}^n \frac{\binom{n}{k}}{n} e^{-\beta(k-1)(2D-h)}}.$$

Portanto, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_T^{\varphi_0} \in \overline{\mathcal{F}}) = 1. \square$

Veremos a seguir que quando estamos no caso $h \in (2(D-1), 2D)$, uma configuração qualquer de $\overline{\mathcal{F}}$ tem por característica o fato de ter probabilidade positiva, para β tendendo a infinito, tanto de voltar direto para φ_0 , como para chegar em qualquer configuração de $\mathbf{A}$, antes de voltar para φ_0 .

Para uma configuração qualquer σ de $\overline{\mathcal{F}}$ sejam os eventos:

$$\mathbf{E}_\beta = "T^\sigma(\varphi_0) < T^\sigma(\eta)", \forall \eta \in \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{F}_\beta = "T^\sigma(\eta) < T^\sigma(\varphi_0)", \forall \eta \in \mathbf{A}.$$

Veremos a seguir o seguinte resultado:

Lema 3.11 . Sejam $h \in (2(D-1), 2D)$ e $\sigma \in \overline{\mathcal{F}}$. Para os eventos definidos acima,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{E}_\beta) > 0 \text{ e } \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{F}_\beta) > 0.$$

Demonstração:

A partir de $\sigma \in \overline{\mathcal{F}}$, a transição para a configuração inicial φ_0 tem taxa 1 de ocorrência, pois $h \in (2(D-1), 2D)$. Por isso, quaisquer que sejam as outras possíveis transições,

a probabilidade de ocorrer esta transição de σ para φ_0 é positiva para β grande. Logo,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{E}_\beta) > 0.$$

Pelo fato de $h \in (2(D-1), 2D)$, nessa configuração $\sigma \in \overline{\mathcal{F}}$, sítios que tenham seus spins -1 e sejam vizinhos próximos do sítio com spin $+1$ viram para $+1$ com taxa 1. Mas também podem aparecer sítios com spins $+1$ através de transições com taxa 1 em mais de um modelo ou porque a configuração num modelo permitiu o aparecimento de um spin $+1$ num outro modelo distinto a ele, ou porque o valor do campo neste intervalo é de tal modo que permite que dois ou mais spins referentes a um mesmo sítio virem para $+1$ ao mesmo tempo. Podemos ter pelo menos um sítio com spins $+1$ num número arbitrário de camadas; como já falamos, spins -1 em sítios vizinhos próximos a spins $+1$ mudam de -1 para $+1$ com taxa 1 e daí temos a possibilidade de chegar em qualquer configuração de $\mathbf{A}$. Existe, portanto, uma seqüência finita de transições, pois Ω é finito, cujas ocorrências têm probabilidade positiva para β grande. Digamos que $\xi_0 = \sigma, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, com $m \in \mathbb{N}$, seja esta seqüência. Logo,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{F}_\beta) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{Z}_\beta),$$

onde $\mathbf{Z}_\beta$ é o evento “o processo evolue através da seqüência $\xi_0 = \sigma, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ” e $m \in \mathbb{N}$. Se $\mathbf{S}_\beta^p$ é o evento “o processo evolue de ξ_{p-1} para ξ_p ” para $p \in \{1, \dots, m\}$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{S}_\beta^p) > 0 \text{ e}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{Z}_\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} [P(\mathbf{S}_\beta^1)P(\mathbf{S}_\beta^2) \dots P(\mathbf{S}_\beta^m)] > 0.$$

Portanto, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\mathbf{F}_\beta) > 0$. $\square$

Vamos estimar agora qual a probabilidade de que o processo, saindo de uma configuração qualquer de Ω , chegue em

$$\mathbf{A} = \{\eta \in \Omega : \eta \neq \varphi_0 \text{ e } \eta_i = \eta_j, \forall i, j \in \Lambda_N, i \neq j\}$$

definido em (2.10), antes de um tempo $e^{\beta\varepsilon/4}$, onde $\varepsilon > 0$, encontrando uma limitação inferior, distinta de 0, para essa probabilidade.

Lema 3.12 . Se $h \in (2(D-1), 2D)$ e $\zeta \in \Omega$ então $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta_0 < \infty$ tal que para $\beta \geq \beta_0$,

$$\mathbb{P}(T^\zeta(\mathbf{A}) \leq e^{\beta\varepsilon/4}) \geq ce^{-\beta(2D-h)},$$

onde c é uma constante positiva.

Demonstração:

Se $\zeta \in \mathbf{A}$ então o resultado é imediato.

Se $\zeta \in \mathcal{B}_\xi$ para algum $\xi \in \mathbf{A}$ então pela definição de $\mathcal{B}_\xi$, existe uma seqüência de configurações de ζ até ξ dada por $\sigma_0 = \zeta, \sigma_1, \dots, \sigma_m = \xi$ para $m \in \mathbb{N}$, $\langle \sigma_s, \sigma_{s+1} \rangle$ e $H(\sigma_s) > H(\sigma_{s+1})$ para $s \in \{1, \dots, m-1\}$, de modo que podemos concluir que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^\zeta(\mathbf{A}) \leq e^{\beta\varepsilon/4}) > 0, \forall \varepsilon > 0$. Dessa forma, $\exists \beta_0 < \infty$ tal que $\forall \beta \geq \beta_0$, temos que $\mathbb{P}(T^\zeta(\mathbf{A}) \leq e^{\beta\varepsilon/4}) \geq \alpha$, onde α é uma constante positiva maior que $ce^{-\beta(2D-h)}$.

Consideremos que $\zeta \notin \mathcal{B}_\xi, \forall \xi \in \mathbf{A}$. Qualquer configuração que não seja φ_0 pode atingir qualquer elemento de $\mathbf{A}$ com probabilidade positiva para β grande, e um exemplo é uma configuração qualquer de $\overline{\mathcal{F}}$ como vimos no Lema 3.11. Agora, se uma configuração qualquer não está em $\overline{\mathcal{F}}$ e nem é φ_0 , sempre existem transições que ocorrem com taxa 1 pois $h \in (2(D-1), 2D)$. Logo, a probabilidade para β grande é positiva de ocorrerem transições até $\mathbf{A}$ ser atingido. Então ζ necessariamente deve ser φ_0 e o que faremos a seguir é encontrar uma limitação inferior não nula para a seguinte probabilidade $\mathbb{P}(T(\mathbf{A}) \leq e^{\beta\varepsilon/4})$, $\forall \varepsilon > 0$ e para $\beta \geq \beta_0$, onde temos $\beta_0 < \infty$.

Considerando a construção do processo descrita em (2.9) que vamos utilizar aqui, seja E o conjunto das seqüências de configurações que saem de φ_0 até alguma configuração η de $\mathbf{A}$, ou seja,

$$E = \{ \{ \xi_s \}_{s=1}^m : m \in \mathbb{N}, \xi_1 = \varphi_0, \xi_m \in \mathbf{A}, \xi_s \notin \mathbf{M}, \forall 2 \leq s \leq m-1, \}$$

$$\langle \xi_s, \xi_{s+1} \rangle, \forall s \in \{1, \dots, m-1\}.$$

Como já fizemos em outras demonstrações, tomemos o toro Λ_N e façamos uma enumeração dos seus sítios, de modo que $\langle i_m, i_{m+1} \rangle$ para $m = 1, \dots, |\Lambda_N| - 1$; seja $\mathbf{z} \in \Omega_0$ contendo somente uma coordenada $+1$. Consideremos uma particular seqüência de configurações desse conjunto E , dada por $\{\xi_s\}_{s=1}^{|\Lambda_N|}$, de modo que para cada $m = 1, \dots, |\Lambda_N|$, a m -ésima transição consiste na mudança do m -ésimo sítio da enumeração, de φ_{0, i_m} para $\mathbf{a}$. Seja $\mathbf{E}$ o evento: “a evolução do processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ segue a seqüência $\{\xi_s\}_{s=1}^{|\Lambda_N|}$ descrita acima, atingindo $\mathbf{A}$ antes do tempo $e^{\beta\epsilon/8}$ ”. Com isso,

$$\begin{aligned} IP(T(\mathbf{A}) < e^{\beta\epsilon/8}) &\geq IP(\mathbf{E}) \geq \frac{e^{-\beta(2D-h)}}{|\Lambda_N|(2^n-1)} \left(\frac{1}{|\Lambda_N|(2^n-1)} \right)^{|\Lambda_N|-1} IP(N(e^{\beta\epsilon/8}) \geq |\Lambda_N|) \\ &= \frac{e^{-\beta(2D-h)}}{(|\Lambda_N|(2^n-1))^{| \Lambda_N |}} \sum_{k=|\Lambda_N|}^{\infty} \frac{e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)e^{\beta\epsilon/8}} (|\Lambda_N|(2^n-1)e^{\beta\epsilon/8})^k}{k!}. \end{aligned}$$

A primeira transição ocorre com taxa $e^{-\beta(2D-h)}$ e nas demais, as configurações são atingidas com taxa 1, já que sempre vamos ter $\Delta_i H(\varphi, \mathbf{a}) \leq 2(D-1) - h < 0$ até alcançarmos alguma configuração em $\mathbf{A}$. Temos também que $N(t)$ é o Processo Pontual de Poisson da construção do processo em (2.9) e que $\exists \beta_0 < \infty$ tal que $\forall \beta \geq \beta_0$,

$$\sum_{k=|\Lambda_N|}^{\infty} \frac{e^{-|\Lambda_N|(2^n-1)e^{\beta\epsilon/8}} (|\Lambda_N|(2^n-1)e^{\beta\epsilon/8})^k}{k!} \geq c'.$$

(Aqui o valor β_0 não necessariamente é igual ao que falamos no início da demonstração). Logo,

$$IP(T(\mathbf{A}) \leq e^{\beta\epsilon/4}) \geq IP(T(\mathbf{A}) < e^{\beta\epsilon/8}) \geq ce^{-\beta(2D-h)},$$

onde c é a constante resultante do produto entre $\frac{1}{(|\Lambda_N|(2^n-1))^{| \Lambda_N |}}$ e c' . $\square$

O resultado que acabamos de provar nos dá uma limitação inferior não nula para a probabilidade do processo sair de $\zeta \in \Omega$ até atingir $\mathbf{A}$ antes de um tempo $e^{\beta\epsilon/4}$, onde $\epsilon > 0$,

a partir de $\beta_0 < \infty$. Vimos que essa probabilidade é maior ou igual que uma quantidade bem pequena mas que não é zero. No entanto, num intervalo de tempo como $e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}$, onde $\varepsilon > 0$, cada vez que o processo não consegue sair de $\zeta \in \Omega$ e chegar em $\mathbf{A}$ antes de um tempo $e^{\beta\varepsilon/4}$, ele recomeça; ele pode tentar fazer isso um número muito grande de vezes e, com grande probabilidade quando β cresce, no tempo $e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}$ o processo chega em $\mathbf{A}$, isto é, este tempo é suficiente para o processo sair de $\zeta \in \Omega$ e chegar em $\mathbf{A}$. E é isso que veremos a seguir:

Lema 3.13 . Se $h \in (2(D-1), 2D)$ então $\forall \zeta \in \Omega$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\zeta(\mathbf{A}) > e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}) = 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Demonstração:

Temos que

$$IP(T^\zeta(\mathbf{A}) > e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}) \leq IP(T^\zeta(\mathbf{A}) > e^{\beta\varepsilon/4} \lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor).$$

Seja o evento

$\mathbf{E}_m$: “ $X_t^\zeta \notin \mathbf{A}, \forall t \in ((m-1)e^{\beta\varepsilon/4}, me^{\beta\varepsilon/4}]$ ”, $m = 1, \dots, \lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor$.

Assim,

$$\begin{aligned} IP(T^\zeta(\mathbf{A}) > e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}) &\leq IP(T^\zeta(\mathbf{A}) > e^{\beta\varepsilon/4} \lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor) \\ &= IP\left(\bigcap_{m=1}^{\lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor} \mathbf{E}_m\right) \\ &= IP\left(\mathbf{E}_{\lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor} \mid \bigcap_{m=1}^{\lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor - 1} \mathbf{E}_m\right) \cdot \\ &\quad \cdot IP\left(\mathbf{E}_{\lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor - 1} \mid \bigcap_{m=1}^{\lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor - 2} \mathbf{E}_m\right) \dots IP(\mathbf{E}_2 \mid \mathbf{E}_1) IP(\mathbf{E}_1) \\ &\leq \left[\sup_{\xi \in \Omega} IP(T^\xi(\mathbf{A}) > e^{\beta\varepsilon/4}) \right]^{\lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor} \leq [1 - ce^{-\beta(2D-h)}]^{\lfloor e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)} \rfloor}. \end{aligned}$$

Na última desigualdade, utilizamos o Lema 3.12.

Logo,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^\zeta(\mathbf{A}) > e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} [1 - ce^{-\beta(2D-h)}]^{[e^{\beta(2D-h+\varepsilon/4)}]} = 0. \square$$

Acabamos de mostrar que se a configuração que o processo atinge em $\mathbf{A}$ não é Ψ então o processo evolue somente com os modelos que apresentam configuração $\underline{-1}$; isso porque até a próxima vez que atingir outra configuração de $\mathbf{A}$, os modelos que são $\underline{+1}$ permanecerão e pelo menos um dos que eram $\underline{-1}$ passará a ser $\underline{+1}$. Isto é o que provaremos a seguir, através dos Lemas 3.14 e 3.15 e do Teorema 1.6.

Seja $(Y_t)_{t \geq 0}$ um processo definido sobre o mesmo espaço de probabilidade de $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$. A configuração inicial deste processo é um elemento de $\mathbf{A}$, que possui um número $p < n$ de camadas apresentando configuração $\underline{-1}$, de modo que as $n - p$ camadas que são $\underline{+1}$ estão congeladas. Vamos denotar essa configuração inicial por $\sigma_0 \in \Omega$.

O próximo Lema nos diz que quando o processo $(Y_t)_{t \geq 0}$ deixa a configuração σ_0 , aparece em alguma das p camadas que são $\underline{-1}$ algum spin $+1$, com grande probabilidade quando β tende a infinito.

Consideremos

$$\mathcal{G} = \{\sigma \in \Omega : \sigma = a_i \sigma_0 \text{ para algum } i \in \Lambda_N \text{ e } a \in \Omega_0, \text{ com } a \neq \sigma_{0,i} \text{ apenas numa das}$$

$$p \text{ coordenadas } -1\}$$

e

$$L_1 = \inf\{t \geq 0 : Y_t \neq \sigma_0\}.$$

Temos o resultado:

Lema 3.14 . Para o processo $(Y_t)_{t \geq 0}$ definido acima e $h < 2D$ temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_{L_1} \in \mathcal{G}) = 1.$$

Demonstração:

Consideremos a construção do processo que citamos em (2.9).

Observemos que pela definição de $(Y_t)_{t \geq 0}$, a taxa com que, saindo de σ_0 , tentamos fazer a troca do spin de algum sítio i de Λ_N para algum elemento de Ω_0 , por exemplo a , onde $a^k \geq \sigma_{0,i}^k, \forall k \in \{1, \dots, n\}$, é dada por

$$|\Lambda_N| \binom{p}{q} e^{-\beta q(2D-h)}.$$

onde $q \in \{1, \dots, p\}$ e é o número a mais de coordenadas $+1$ que a possui, além das $n-p$ já existentes que estão congeladas.

Assim:

$$\mathbb{P}(Y_{L_1} \in \mathcal{G}) = \frac{|\Lambda_N| \binom{p}{1} e^{-\beta(2D-h)}}{\sum_{q=1}^p |\Lambda_N| \binom{p}{q} e^{-\beta q(2D-h)}} = \frac{1}{1 + \sum_{q=2}^p \frac{\binom{p}{q}}{p} e^{-\beta(q-1)(2D-h)}}.$$

Portanto,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_{L_1} \in \mathcal{G}) = 1. \square$$

Consideremos

$$\mathcal{H} = \{\sigma \in \Omega : \sigma \neq \sigma_0, \sigma_i = \sigma_j, \forall i, j \in \Lambda_N, i \neq j \text{ e } \sigma_{0,i}^k \leq \sigma_i^k, \forall i \in \Lambda_N \text{ e } \forall k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Se para $\rho \in \mathcal{G}$ definirmos os eventos

$$\mathbf{R}_\beta = "L^\rho(\sigma_0) < L^\rho(\eta)"', \forall \eta \in \mathcal{H},$$

$$\mathbf{S}_\beta = "L^\rho(\eta) < L^\rho(\sigma_0)"', \forall \eta \in \mathcal{H}$$

então temos

Lema 3.15 . Para o processo $(Y_t)_{t \geq 0}$ definido anteriormente, $h \in (2(D-1), 2D)$ e os eventos $\mathbf{R}_\beta$ e $\mathbf{S}_\beta$ definidos acima,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{R}_\beta) > 0 \text{ e } \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{S}_\beta) > 0.$$

Demonstração:

A prova segue utilizando os argumentos da demonstração do Lema 3.11, onde no lugar de φ_0 temos σ_0 , em $\overline{\mathcal{F}}$ temos $\mathcal{G}$, em σ temos ρ e em $\mathbf{A}$ temos $\mathcal{H}$. E mais, os argumentos da demonstração para a qual nos referimos diz respeito apenas às camadas que apresentam configuração $\underline{-1}$ que no nosso caso, são as p camadas a partir de σ_0 . $\square$

Antes de concluirmos a demonstração da parte (b) do Teorema 1.5 vamos provar o Teorema 1.6 que, como já comentamos nos primeiros Capítulos, ele nos diz que as configurações em $\mathbf{A}$ que vão sendo atingidas até Ψ , apresentam um número crescente de camadas que são $\underline{+1}$, além de permanecerem nesta configuração as que já são.

Demonstração do Teorema 1.6:

Temos que $\xi = X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}$ e $\eta = X_{T_m}^{\varphi_0}$, ambas sendo configurações de $\mathbf{A}$.

Consideremos que $O(X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}) = O(\xi) = a$.

Seja $(Y_t)_{t \geq 0}$ um processo com configuração inicial dada por $n - a$ camadas com configuração $\underline{-1}$ e a camadas com configuração $\underline{+1}$ (entendemos agora a configuração σ_0 que falamos ao definirmos este processo $(Y_t)_{t \geq 0}$, como sendo a configuração ξ).

Vamos acoplar este processo $(Y_t)_{t \geq 0}$ com o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ a partir desta configuração ξ , de modo a se desenvolverem juntos. Eles se desenvolveriam de modo independente se o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ sofresse alguma alteração em algum spin $+1$ presente na camada que está em ± 1 ; o tempo necessário para isso é $e^{\beta(2D+h)}$, para β grande. Como esse tempo é bastante longo quando β cresce, temos os processos $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ e $(Y_t)_{t \geq 0}$ se desenvolvendo juntos e, com isso, pelo Lema 3.14, uma das $n - a$ camadas no processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ é que sofre mudança em apenas um sítio, com grande probabilidade quando β cresce; e isto requer um tempo bem menor que $e^{\beta(2D+h)}$. Se o processo volta para ξ então ele recomeça. Aplicando o Lema 3.15, o processo $(Y_t)_{t \geq 0}$ tem probabilidade positiva para β grande de atingir alguma configuração em $\mathcal{H}$ (onde σ_0 agora é a configuração ξ) e no instante que atingir $\mathcal{H}$, o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ estará numa configuração η tal que $\eta \geq \xi$; notemos que $\eta = X_{T_m}^{\varphi_0}$.

Portanto, se para $k \in \{1, \dots, n\}$ temos $\xi^k = \pm 1$ então também temos $\eta^k = \pm 1$ e o número de camadas com configuração ± 1 em η será estritamente maior que a ; assim,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(O(X_{T_m}^{\varphi_0}) > O(X_{T_{m-1}}^{\varphi_0})) = 1. \square$$

Faremos a seguir, a parte (b) da demonstração do Teorema 1.5, que consiste em provar que $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T > e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}) = 0.$$

Parte (b) da demonstração do Teorema 1.5:

Pelo Lema 3.13, temos que $\forall \zeta \in \Omega$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^\zeta(\mathbf{A}) > e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}) = 0,$$

$\forall \varepsilon > 0$. Tomando-se $\zeta = \varphi_0$, temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T(\mathbf{A}) > e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}) = 0,$$

$\forall \varepsilon > 0$. Porém, da definição que fizemos sobre os tempos de parada dados em (2.16), temos que $T(\mathbf{A})$ é o mesmo que o tempo T_1 . Dessa forma,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_1 > e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}) = 0,$$

$\forall \varepsilon > 0$. Se essa configuração que o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ atinge em $\mathbf{A}$ for Ψ então já temos o resultado. Caso contrário, $O(X_{T_1}^{\varphi_0}) = a < n$ e vamos acoplar com $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, um processo com configuração inicial dada por $n - a$ camadas com configuração $\underline{-1}$ e a camadas com configuração $\underline{+1}$ congeladas.

Esse processo que acoplamos com $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ tem resultados importantes como os que concluímos nos Lemas 3.14 e 3.15 e o tempo para se separarem é muito grande.

Agora para este novo processo $(Y_t)_{t \geq 0}$, o resultado do Lema 3.12 pode ser aplicado, de modo que se σ_0 é a configuração inicial descrita agora então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(L^{\sigma_0}(\mathcal{H}) > e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}) = 0,$$

$\forall \varepsilon > 0$, onde

$$L^{\sigma_0}(\mathcal{H}) = \inf\{t \geq 0 : Y_t \in \mathcal{H}\}.$$

Com isso, o tempo $L^{\sigma_0}(\mathcal{H})$ é o mesmo que o tempo T_2 definido para o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ (aqui está implícito o que provamos no Teorema 1.6). Logo

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_2 > e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}) = 0,$$

$\forall \varepsilon > 0$.

Dessa forma, cada vez que o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ chega em alguma configuração de $\mathbf{A}$ que não seja Ψ podemos acoplá-lo com um novo processo que satisfaça os Lemas 3.14 e 3.15 e repetirmos estes mesmos argumentos que falamos acima.

O tempo T será dado por uma soma de T'_k 's de no máximo n parcelas, isto é, $T =$

$\sum_{m=0}^{\bar{n}} T_m$, onde $\bar{n} \leq n$. Assim,

$$\begin{aligned}
 IP(T > e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}) &= IP\left(\sum_{m=0}^{\bar{n}} T_m > e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}\right) = IP\left(\sum_{m=1}^{\bar{n}} T_m > e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}\right) \\
 &= 1 - IP\left(\sum_{m=1}^{\bar{n}} T_m \leq e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}\right) \leq 1 - \left[IP\left(T_m \leq \frac{e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}}{\bar{n}}\right)\right]^{\bar{n}} \\
 &\leq 1 - \left[IP\left(T_m < e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}\right)\right]^{\bar{n}} \\
 \Rightarrow \lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T > e^{\beta(2D-h+\varepsilon)}) &\leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{1 - \left[IP\left(T_m < e^{\beta(2D-h+\varepsilon/2)}\right)\right]^{\bar{n}}\right\} = 0. \square
 \end{aligned}$$

Capítulo 4

Possíveis trajetórias para campos iguais em $(2(D - 1), 2D)$

Neste Capítulo vamos demonstrar os Teoremas 1.7 e 1.4.

Vamos estudar as trajetórias que o processo pode fazer, desde a configuração φ_0 até Ψ , quando estamos no caso $h \in (2(D - 1), 2D)$.

Veremos que seja qual for a trajetória que o processo faça de φ_0 até Ψ , quando estamos no caso $h \in (2(D - 1), 2D)$, a magnitude do tempo necessário para isso não se altera, ou seja, como já comentamos no Capítulo 1, os tempos $\frac{T_k}{E(T_k)}$ para $k \leq m_0$ e $m_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $T = T_{m_0}$, convergem em distribuição para β grande para uma variável aleatória Exponencial de parâmetro $|\Lambda_N|\lambda$, onde λ é um valor em $\{1, \dots, n\}$. No entanto, como já mencionamos, a distribuição de T não converge para uma variável aleatória Exponencial quando β cresce.

Provaremos a seguir a Proposição 2.3 que nos diz que para $h \in (2(D - 1), 2D)$, a

partir da configuração $X_{\bar{T}}^{\varphi_0}$, onde $\bar{T} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} \neq \varphi_0\}$ como definimos em (3.2), o processo pode chegar em qualquer configuração η de $\mathbf{A}$, com probabilidade que depende desta configuração η , dada por $p(\eta) \in (0, 1)$, quando β tende a infinito.

Demonstração da Proposição 2.3:

Pelo Lema 3.10, com grande probabilidade quando β tende a infinito, a configuração que o processo atinge ao sair de φ_0 é elemento de

$$\bar{\mathcal{F}} = \{\xi \in \Omega : \xi = a_i \varphi_0 \text{ para algum } i \in \Lambda_N \text{ e } a \in \Omega_0 \text{ com apenas uma coordenada } +1\},$$

como definimos em (3.5). Sendo assim, como verificamos,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(X_{\bar{T}}^{\varphi_0} \in \bar{\mathcal{F}}) = 1.$$

Vamos considerar um processo $(Z_t)_{t \geq 0}$ acoplado a $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ desde a configuração inicial φ_0 , de modo que ambos se desenvolvem juntos sempre que no desenvolvimento do processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, a partir de uma configuração qualquer $\varphi \in \Omega$, a transição em algum sítio $i \in \Lambda_N$ para $a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$ possui probabilidade positiva de ocorrer quando β tende a infinito.

Eles passam a se desenvolver independentemente se ocorrer uma das duas situações: a partir de φ_0 , escolhe-se um sítio $i \in \Lambda_N$, propõe-se que ele mude para $a \in \Omega_0$ possuindo pelo menos duas coordenadas $+1$ e esta proposta é aceita ou se a partir de uma configuração qualquer $\varphi \in \Omega \setminus \{\varphi_0\}$, escolhe-se um sítio $i \in \Lambda_N$, propõe-se que ele mude para um elemento de Ω_0 cuja transição é aceita, ambas as situações com taxa que vai a zero quando β tende a infinito.

Se os processos estão em φ_0 e o elemento de $a \in \Omega_0$ escolhido possui pelo menos duas coordenadas $+1$ então a probabilidade de que em algum sítio i de Λ_N apareça esse elemento a citado vai a zero quando β cresce, pois a probabilidade é dada por um valor menor ou igual a $\frac{|\Lambda_N|(2^n-1)e^{-\beta 2(2D-h)}}{|\Lambda_N|(2^n-1)e^{-\beta 2(2D-h)} + f(\beta)}$, onde $f(\beta)$ são todas as outras possíveis taxas,

inclusive a taxa $e^{-\beta(2D-h)} > e^{-\beta 2(2D-h)}$; aplicando o limite neste quociente para β grande, este vai a zero.

Se ambos estão em alguma configuração $\varphi \in \Omega \setminus \{\varphi_0\}$, pelo fato de $h \in (2(D-1), 2D)$, sempre existe uma transição que ocorre com taxa 1 e que, portanto, tem probabilidade positiva para β grande de ocorrer. Assim, se é proposta uma transição cuja taxa vai a zero quando β cresce então a probabilidade disso ocorrer vai a zero também para β grande.

Pela maneira como o processo $(Z_t)_{t \geq 0}$ é definido (que é fazer transições que possuem probabilidade positiva para β grande de ocorrer) temos que saindo de φ_0 ele pode chegar em qualquer configuração η de $\mathbf{A}$ com probabilidade $p(\eta) \in (0, 1)$ no limite para β grande. E até esta ocorrência ele estará se desenvolvendo junto com $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, já que eles se separariam, como já falamos, se $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ fizesse transições cujas ocorrências possuem probabilidade indo a zero quando β cresce; e estas últimas transições requerem um tempo grande que é suficiente para que o processo chegue junto com o processo $(Z_t)_{t \geq 0}$ em uma configuração qualquer de $\mathbf{A}$. Daí temos o resultado, ou seja,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{T_1}^{\varphi_0} = \eta) = p(\eta). \square$$

Vamos provar agora o Teorema 1.7 que diz que a probabilidade para β grande do processo sair de uma configuração de $\mathbf{A}$, digamos ρ e atingir $\mathbf{A}$ novamente, mas através de ξ com $\xi \geq \rho$ é dada por $p(\rho, \xi)$, onde este valor é zero se existem $i \in \Lambda_N$ e $k \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\xi_i^k < \rho_i^k$. Na verdade, este Teorema é uma consequência da Proposição 2.3 que acabamos de demonstrar.

Façamos a seguir, uma definição de notação mais simplificada, mas análoga à da ordem de uma configuração de $\mathbf{A}$.

Para $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, seja α_m o número de camadas na configuração $X_{T_m}^{\varphi_0}$ que têm

todos os spins $+1$, isto é,

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0 \\ \alpha_m &= |\{k \in \{1, \dots, n\} : X_{T_m}^{\varphi_0}(i; k) = +1, \forall (i; k) \text{ com } i \in \Lambda_N\}|.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Lembremos das definições que fizemos em (2.16):

$$\begin{aligned}T_c &= 0 \\ T_m &= \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} \in \mathbf{A} \setminus \{X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}\}\},\end{aligned}$$

onde $m \in \{1, \dots, n\}$.

Vejam agora a

Demonstração do Teorema 1.7:

Na configuração $X_{T_{m-1}}^{\varphi_0} = \rho$ temos que um número α_{m-1} dos n modelos apresentam configuração $+1$. Porém, pelo Teorema 1.6 temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(O(X_{T_m}^{\varphi_0}) = O(\xi) > O(\rho) = O(X_{T_{m-1}}^{\varphi_0})) = 1$$

pois, a partir de ρ , o processo se comporta como se houvesse $n - \alpha_{m-1}$ camadas com configuração -1 a serem desenvolvidos já que não há tempo para as α_{m-1} camadas com configuração $+1$ se desenvolverem antes de alguma das $n - \alpha_{m-1}$ e mais, não somente até T_m , se $\rho^k = \underline{+1}$ então $\xi^k = \underline{+1}$.

A Proposição 2.3 nos diz que a probabilidade do processo chegar em $\mathbf{A}$ através de uma configuração η qualquer é, no limite para β grande, dada por $p(\eta) \in (0, 1)$. Aqui neste Teorema 1.7 o caso é semelhante pois, como falamos, temos $n - \alpha_{m-1}$ camadas com configuração -1 que se desenvolvem e portanto, a probabilidade para β grande, de pelo

menos uma dessas camadas passarem para a configuração ± 1 depende de quantas e quais são as camadas nas quais isso ocorrerá. E como o processo está partindo da configuração $\rho \in \mathbf{A}$ temos que, de fato, esta probabilidade também depende de ρ , de onde podemos concluir o Teorema. $\square$

Sendo $T_1, T_2, \dots, T_k$, onde $k \in \{1, \dots, n\}$, os tempos nos quais o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ atinge $\mathbf{A}$ até que $X_{T_k}^{\varphi_0}$ seja Ψ , podemos fazer alguns comentários.

Se o processo chega em Ψ no tempo T_1 então o tempo T reescalado pelo seu valor esperado converge, quando β cresce, para uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro $|\Lambda_N|n$.

Agora, se o processo chega em Ψ no tempo T_2 , isto significa que no tempo T_1 ele estava em alguma configuração de $\mathbf{A}$, distinta de Ψ , com α_1 camadas apresentando configuração ± 1 . Esta quantidade α_1 é aleatória pois depende de qual trajetória o processo seguiu até T_1 . Assim, o tempo T_1 reescalado pelo seu valor esperado converge quando β cresce, para uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro $|\Lambda_N|n$; enquanto que o tempo T_2 reescalado pelo seu valor esperado converge, quando β cresce, para uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro que depende do valor α_1 que citamos, que por sua vez, é determinado aleatoriamente.

Podemos repetir esses mesmos argumentos até o caso em que o processo vai de φ_0 até Ψ , atingindo $\mathbf{A}$ n vezes, situação em que ocorre o aumento do número de camadas que possuem configuração ± 1 uma por vez.

Diante de todos estes possíveis casos, vemos que a distribuição da variável T converge, quando β é grande, para uma soma de variáveis aleatórias Exponenciais que possuem parâmetros aleatórios e dependentes. No entanto, não há alteração na magnitude do tempo, já que cada vez que o processo atinge alguma configuração de $\mathbf{A}$, o tempo necessário

para atingir uma outra deste mesmo conjunto, satisfazendo a condição já discutida, que consiste nos modelos em ± 1 aumentarem em pelo menos uma unidade, sendo que os que já eram, permanecerem, é da ordem de $e^{\beta(2D-h)}$, para β grande.

Para encerrarmos este Capítulo, voltando ao caso da dinâmica na qual é permitida apenas um spin referente a um sítio de Λ_N virar por vez, veremos o Teorema 1.4, que nos diz que para o caso de h em $(2(D-1), 2D)$, $T = \sum_{k=1}^n T_k$ e a soma dos tempos reescalados, dada por $\sum_{k=1}^n \frac{T_k}{E(T_k)}$ converge em distribuição, para β grande, para uma soma de variáveis aleatórias Exponenciais dada por $\sum_{\lambda=1}^n \text{Exp}(|\Lambda_N|\lambda)$. Vamos utilizar as idéias já comentadas na Introdução.

“Demonstração” do Teorema 1.4:

Para $k = 1, \dots, n$, a taxa de saída do processo a partir das k camadas em $\underline{-1}$ é dada por $|\Lambda_N|ke^{-\beta(2D-h)}$. Assim, o tempo T_k dividido por $E(T_k)$ converge em distribuição para β grande, para uma variável aleatória Exponencial de parâmetro $|\Lambda_N|k$, de onde segue o resultado. $\square$

Capítulo 5

Possíveis trajetórias para valores distintos de campo em $(2(D-1), 2D)$

Neste Capítulo, vamos provar o Teorema 1.8.

Como já falamos, estamos no caso no qual os campos $h_1, \dots, h_n$ são distintos, mas satisfazem $(h_1, \dots, h_n) \in (2(D-1), 2D)^n$. Sem perda de generalidade, vamos ordenar os modelos de modo que tenhamos

$$h_1 > h_2 > \dots > h_n > 0. \quad (5.1)$$

Lembremos que no caso do modelo D -dimensional definido pelos ângulos, isto significa que o campo magnético não aponta na direção de qualquer um dos 2^n vetores que definem os vértices do hipercubo inscrito em S^{n-1} .

O nosso objetivo é analisar qual é a probabilidade de que o tempo para que o processo saia de φ_0 e chegue em Ψ , que é denotado por T , não seja menor que $\epsilon^{\beta(2D-h_k-\epsilon)}$ e nem

maior que $e^{\beta(2D-h_k+\varepsilon)}$, para $\varepsilon < \min\{h_{k-1}-h_k, h_k-h_{k+1}\}$ e para algum $k \in \{1, \dots, n\}$ que podemos previamente fixar. Na verdade, queremos concluir que para β tendendo a infinito, esta probabilidade é positiva e depende de qual valor k fixado estamos nos referindo.

Definimos em (3.2) que o instante em que o processo deixa a configuração inicial φ_0 é dado por

$$\bar{T} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} \neq \varphi_0\}.$$

Vimos que neste instante, a configuração presente no processo é elemento do conjunto que definimos em (3.1) como

$$\mathcal{F} = \{\xi \in \Omega : \xi = a_i \varphi_0 \text{ para algum } i \in \Lambda_N \text{ e } a \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_{0,i}\}\}.$$

No entanto, vimos que é com grande probabilidade quando β tende a infinito que $X_{\bar{T}}^{\varphi_0}$ é elemento do seguinte conjunto denotado por $\bar{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$, dado em (3.5) por

$$\bar{\mathcal{F}} = \{\xi \in \Omega : \xi = a_i \varphi_0 \text{ para algum } i \in \Lambda_N \text{ e } a \in \Omega_0 \text{ com apenas uma coordenada } +1\}.$$

A partir da restrição (5.1), vamos mostrar que neste caso, com grande probabilidade quando β tende a infinito, $X_{\bar{T}}^{\varphi_0}$ é elemento de um conjunto que é subconjunto de $\bar{\mathcal{F}}$ e, consequentemente, de $\mathcal{F}$. Vamos denotar tal conjunto por $\mathcal{F}'$, que é dado por

$$\mathcal{F}' = \{\xi \in \Omega : \xi = a_i \varphi_0 \text{ para algum } i \in \Lambda_N \text{ e } a \in \Omega_0 \text{ com } a^1 = +1$$

$$\text{e } a^k = 0, \forall k \in \{2, \dots, n\}\}.$$

Mostremos então inicialmente que:

Lema 5.1 . Se $(h_1, \dots, h_n) \in (2(D-1), 2D)^n$ e $h_1 > \dots > h_n > 0$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{\bar{T}}^{\varphi_0} \in \mathcal{F}') = 1.$$

Demonstração:

Para mostrarmos este limite, consideremos a construção do processo que já citamos em (2.9).

Observemos aqui que a taxa com que, saindo de φ_0 , tentamos fazer a troca para uma configuração de $\mathcal{F}'$ é dada por $|\Lambda_N|e^{-\beta(2D-h_1)}$.

Assim,

$$\mathbb{P}(X_{\overline{T}}^{\varphi_0} \in \mathcal{F}') = \frac{|\Lambda_N|e^{-\beta(2D-h_1)}}{|\Lambda_N|R} = \frac{1}{1+Q},$$

onde

$$R = \left(\sum_{i_1=1}^n e^{-\beta(2D-h_{i_1})} + \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n e^{-\beta(4D-h_{i_1}-h_{i_2})} + \dots + e^{-\beta\left(2Dn - \sum_{i_n=1}^n h_{i_n}\right)} \right)$$

e

$$Q = \sum_{i_1=2}^n e^{-\beta(h_1-h_{i_1})} + \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n e^{-\beta(2D+h_1-h_{i_1}-h_{i_2})} + \dots + e^{-\beta\left(2Dn-2D - \sum_{i_n=2}^n h_{i_n}\right)}.$$

Portanto,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{\overline{T}}^{\varphi_0} \in \mathcal{F}') = 1. \square$$

Cada vez que o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ alcança o conjunto $\mathbf{A}$, o mesmo reinicia no sentido que são as camadas que se encontram nas configurações $\underline{-1}$ é que se desenvolvem, visando chegar em configurações $\underline{+1}$, pois para que um spin de algum sítio passe de $+1$ para -1 , sendo que este spin encontra-se presente na configuração $\underline{+1}$, é de ordem de pelo menos $e^{\beta(2D+h_n)}$, para β grande, que é muito maior do que o necessário para que em alguma camada que esteja com configuração $\underline{-1}$, algum spin vire de -1 para $+1$. Na verdade, para β grande, $e^{\beta(2D+h_n)}$ é maior que $e^{\beta(2D-h_n+\varepsilon)}$, bastando que ε seja tal que $0 < \varepsilon < 2h_n$.

No final do Capítulo 1 comentamos através de um simples exemplo, o porquê da dependência do tempo para o processo ir de φ_0 até Ψ , com a última configuração de $\mathbf{A}$ em

que se encontra antes de atingir novamente este conjunto através de Ψ (isso se o processo chega em Ψ num tempo T_k , para $k \geq 2$, pois se $k = 1$ então o tempo depende de h_1).

Até que Ψ seja atingida, as configurações de $\mathbf{A}$ nas quais o processo chega têm um número crescente de camadas que sejam ± 1 , ou seja, pelas definições em (4.1), temos $\alpha_{m-1} < \alpha_m$ para $m \in \{1, \dots, p\}$, onde $p \leq n$ e $T_p = T$. E isso será provado no próximo Lema.

Lembremos que em (2.18) definimos que se $\eta \in \mathbf{A}$ então

$$\bar{O}(\eta) = \min\{k \in \{1, \dots, n\} : \eta_i^k = -1 \text{ e } \eta_i^l = +1, \forall 1 \leq l < k \text{ e } \forall i \in \Lambda_N\}$$

e também em (2.16) definimos os tempos de parada do processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_m &= \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varphi_0} \in \mathbf{A} \setminus \{X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}\}\}, \end{aligned}$$

para $m \in \{1, \dots, n\}$.

Seja um processo $(W_t)_{t \geq 0}$ acoplado a $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ desde a configuração inicial φ_0 , de modo que ambos se desenvolvem juntos sempre que no desenvolvimento de $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, a partir de $\varphi \in \Omega$, a transição em algum sítio $i \in \Lambda_N$ para $\mathbf{a} \in \Omega_0 \setminus \{\varphi_i\}$ possui probabilidade positiva de ocorrer quando β tende a infinito (é semelhante ao que utilizamos na demonstração da Proposição 2.3, só que agora estamos no caso de campos distintos).

Para eles se separarem, uma primeira situação é a partir de φ_0 o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ escolher e aceitar mudar algum sítio numa camada que não seja a de campo h_1 , ou mesmo esta camada e mais alguma outra de campo menor; uma outra situação é escolher e aceitar outras mudanças que possuam taxa indo a zero quando β cresce, enquanto existem possibilidades de transições com taxa 1. Ambas as situações requerem tempos muito

maiores do que o necessário para fazer transições que apresentam probabilidade positiva para β grande de ocorrência.

Com probabilidade positiva para β grande, este processo $(W_t)_{t \geq 0}$ atinge configurações de $\mathbf{A}$ e pelo fato do processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ poder se separar de $(W_t)_{t \geq 0}$ após um tempo grande, este é suficiente para que $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$ chegue também em $\mathbf{A}$ juntamente com $(W_t)_{t \geq 0}$.

Vejamos agora o Lema seguinte que caracteriza a relação quanto a ordem entre as configurações alcançadas, à medida que o processo chega em $\mathbf{A}$, resultado análogo ao Teorema 1.6.

Lema 5.2 . Para todo $m \in \{1, \dots, n\}$ temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} P(\overline{O}(X_{T_m}^{\varphi_0}) > \overline{O}(X_{T_{m-1}}^{\varphi_0})) = 1.$$

Demonstração:

Tomemos um m qualquer em $\{1, \dots, n\}$ e suponhamos que $\overline{O}(X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}) = a$. O tempo para que algum spin $+1$ presente na configuração ± 1 passe para -1 é de pelo menos $e^{\beta(2D+h_{a-1})}$, para β grande.

Se $\xi = X_{T_{m-1}}^{\varphi_0}$ então $\forall i \in \Lambda_N$, $\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^n)$, onde $\xi_i^a = -1$ e $\xi_i^k = +1$ para $1 \leq k < a$. Assim, com grande probabilidade para β grande, o processo deixa ξ e atinge $a_i \xi$, para algum $i \in \Lambda_N$, com $a \in \Omega_0$ e diferindo de ξ_i apenas na a -ésima coordenada (a idéia aqui é a mesma utilizada no Lema 5.1, já que a mudança ocorrerá com grande probabilidade quando β cresce, na camada que possui maior valor de campo entre todas as que estão em ± 1 e podemos acoplar o processo com um processo como $(W_t)_{t \geq 0}$ que citamos anteriormente). Temos então que com probabilidade positiva para β grande, ou o processo volta para ξ e recomeça ou atinge outra configuração de $\mathbf{A}$. A menos das características da configuração que o processo atinge quando sai ou de φ_0 ou de alguma

configuração de $\mathbf{A}$ quando os campos são distintos, nessa conclusão temos as mesmas idéias presentes no Lema 3.11. E no caso de atingir $\mathbf{A}$, o tempo necessário é da ordem de $e^{\beta(2D-h_a)}$ para β grande, que é menor que $e^{\beta(2D+h_{a-1})}$ para β grande. Na próxima vez que o processo chega em $\mathbf{A}$, temos $X_{T_m}^{\varphi_0} = \sigma$, na qual $\forall i \in \Lambda_N$, $\sigma_i = (\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^n)$ e podemos dizer que, com grande probabilidade quando β cresce, até $1 \leq k \leq a$, temos $\sigma_i^k = +1$.

Com isso,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{O}(X_{T_m}^{\varphi_0}) = \overline{O}(\sigma) > a = \overline{O}(X_{T_{m-1}}^{\varphi_0})) = 1. \square$$

Dado $k \in \{1, \dots, n\}$, vamos mostrar que a probabilidade de que a partir do instante T_{l-1} , no qual $\overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}) = k$ para algum $l \in \{1, \dots, n\}$ e $l \leq k$, tenhamos $X_{T_l}^{\varphi_0} = \Psi$, é positiva para β grande. Sendo assim, se definirmos para $1 \leq l \leq k$ o evento

$$\mathbf{B}_k = " \overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}) = k \text{ e } X_{T_l}^{\varphi_0} = \Psi "$$

então podemos concluir que:

Lema 5.3 . Se $(h_1, \dots, h_n) \in (2(D-1), 2D)^n$ e $h_1 > \dots > h_n > 0$ então para $k \in \{1, \dots, n\}$ temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{B}_k) = p_k \in [0, 1].$$

Demonstração:

A partir da configuração $X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}$, na qual $\overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}) = k$, temos que com grande probabilidade para β grande, como consequência do Lema 5.1, chamando $X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}$ de σ , o processo atinge a configuração $\mathbf{a}_i \sigma$, onde $i \in \Lambda_N$ e $\mathbf{a}$ possui as k primeiras coordenadas iguais a $+1$, sendo que $k \in \{1, \dots, n\}$.

Podemos acoplar com o processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, o processo $(W_t)_{t \geq 0}$ que comentamos anteriormente. Como ele somente faz transições que possuem probabilidade positiva de ocorrer

quando β é grande então a probabilidade para que no processo $(W_t)_{t \geq 0}$ a configuração Ψ seja atingida é $p(\Psi) \in (0, 1)$ e como temos com relação ao processo $(X_t^{\varphi_0})_{t \geq 0}$, $n - k + 1$ camadas em -1 se desenvolvendo, pois não há tempo suficiente para as camadas em ± 1 sofrerem transições, então como consequência do Teorema 1.7, a probabilidade para β grande de $\mathbf{B}_k$ ocorrer é dada por $p_k(\sigma, \Psi) \in [0, 1]$, já que o fato dela depender de qual configuração de $\mathbf{A}$ o processo sai e qual ele atinge ao chegar em $\mathbf{A}$ novamente, está vinculado à ordem da configuração de saída, ou seja, que $\overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}) = k$.

Portanto, apenas denotando $p_k(\sigma, \Psi)$ por p_k , temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{B}_k) = p_k \in [0, 1]. \square$$

Demonstração do Teorema 1.8:

Queremos provar que dado $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{\beta} \log T \in (2D - h_k - \varepsilon, 2D - h_k + \varepsilon) \right) > 0,$$

$\forall 0 < \varepsilon < \min\{h_{k-1} - h_k, h_k - h_{k+1}\}$.

Vamos chamar esse evento $\left(\frac{1}{\beta} \log T \in (2D - h_k - \varepsilon, 2D - h_k + \varepsilon)\right)$ por $\mathbf{A}_{k,\varepsilon}$.

No entanto,

$$\mathbb{P}(\mathbf{B}_k) = \mathbb{P}(\mathbf{B}_k \cap \mathbf{A}_{k,\varepsilon}) + \mathbb{P}(\mathbf{B}_k \cap (\mathbf{A}_{k,\varepsilon})^c) \leq \mathbb{P}(\mathbf{A}_{k,\varepsilon}) + \mathbb{P}(\mathbf{B}_k \cap (\mathbf{A}_{k,\varepsilon})^c). \quad (5.2)$$

Porém, para que tenhamos o $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{B}_k \cap (\mathbf{A}_{k,\varepsilon})^c)$, vamos analisar para $1 \leq l \leq k$:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}) = k, X_{T_l}^{\varphi_0} = \Psi, T < e^{\beta(2D - h_k - \varepsilon)})$$

e

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}) = k, X_{T_l}^{\varphi_0} = \Psi, T > e^{\beta(2D - h_k + \varepsilon)}).$$

Temos:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}) = k, X_{T_l}^{\varphi_0} = \Psi, T < e^{\beta(2D - h_k - \varepsilon)})$$

$$\leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T < \epsilon^{\beta(2D-h_k-\epsilon)}) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^* < \epsilon^{\beta(2D-h_k-\epsilon)}),$$

onde, denotando-se $X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}$ por ξ ,

$$T^* = \inf\{t \geq 0 : X_t^\xi \neq \xi\} \text{ e } \mathbb{P}(T^* < T) = 1.$$

Assim, $T^* \sim \text{Exp}(\lambda)$, onde $\lambda \leq |\Lambda_N|e^{-\beta(2D-h_k)}$. Com isso,

$$\mathbb{P}(T^* < \epsilon^{\beta(2D-h_k-\epsilon)}) = 1 - e^{-\lambda \epsilon^{\beta(2D-h_k-\epsilon)}} \leq 1 - e^{-|\Lambda_N|e^{-\beta(2D-h_k)}\epsilon^{\beta(2D-h_k-\epsilon)}} = 1 - e^{-|\Lambda_N|e^{-\beta\epsilon}}$$

e

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^* < \epsilon^{\beta(2D-h_k-\epsilon)}) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} (1 - e^{-|\Lambda_N|e^{-\beta\epsilon}}) = 0.$$

Também,

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}) = k, X_{T_l}^{\varphi_0} = \Psi, T > \epsilon^{\beta(2D-h_k+\epsilon)}) \\ & \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^\xi > \epsilon^{\beta(2D-h_k+\epsilon)}) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^\xi > \epsilon^{\beta(2D-h_k+\epsilon/2)}) \\ & \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^\xi > e^{\beta\epsilon/4} \lfloor e^{\beta(2D-h_k+\epsilon/4)} \rfloor). \end{aligned}$$

Se definirmos o evento no qual para

$$t \in [(m-1)e^{\beta\epsilon/4}, me^{\beta\epsilon/4}],$$

onde $m \in \{1, \dots, \lfloor e^{\beta(2D-h_k+\epsilon/4)} \rfloor\}$,

$$\mathbf{E}_m = "X_t^\xi \neq \Psi"$$

então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^\xi > e^{\beta\epsilon/4} \lfloor e^{\beta(2D-h_k+\epsilon/4)} \rfloor) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\lfloor e^{\beta(2D-h_k+\epsilon/4)} \rfloor} \mathbf{E}_m\right)$$

e análogo ao que fizemos na demonstração do Lema 3.12. temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\lfloor e^{\beta(2D-h_k+\epsilon/4)} \rfloor} \mathbf{E}_m\right) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(T^\xi > e^{\beta\epsilon/4})]^{\lfloor e^{\beta(2D-h_k+\epsilon/4)} \rfloor}$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[1 - \mathbb{P}(T^\xi \leq e^{\beta \varepsilon/4}) \right]^{\lfloor e^{\beta(2D-h_k+\varepsilon/4)} \rfloor}.$$

Porém, análogo ao Lema 3.11, temos que

$$\mathbb{P}(T^\xi \leq e^{\beta \varepsilon/4}) \geq c e^{-\beta(2D-h_k)},$$

onde c é uma constante positiva. Com isso,

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\overline{O}(X_{T_{l-1}}^{\varphi_0}) = k, X_{T_l}^{\varphi_0} = \Psi, T > e^{\beta(2D-h_k+\varepsilon)}) \\ & \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[1 - \mathbb{P}(T^\xi \leq e^{\beta \varepsilon/4}) \right]^{\lfloor e^{\beta(2D-h_k+\varepsilon/4)} \rfloor} \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[1 - c e^{-\beta(2D-h_k)} \right]^{\lfloor e^{\beta(2D-h_k+\varepsilon/4)} \rfloor} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, de (5.2),

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{A}_{\mathbf{k}, \varepsilon}) \geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{B}_{\mathbf{k}}) - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathbf{B}_{\mathbf{k}} \cap (\mathbf{A}_{\mathbf{k}, \varepsilon})^c) = p_k \in [0, 1],$$

como consequência do Lema 5.3 e pelos dois limites que acabamos de provar. $\square$

Com isso, vemos que T é dada por uma soma aleatória mas finita de tempos, onde cada um reescalado pela sua média, converge em distribuição, quando β é grande, para uma variável aleatória não-trivial já que, devido à aleatoriedade das trajetórias do processo, há forte influência disso na magnitude do tempo T .

Referências Bibliográficas

- [CGOV] M. Cassandro, A. Galves, E. Olivieri, and M. E. Vares: *Metastable Behavior of Stochastic Dynamics: A Pathwise Approach*. Journal of Statistical Physics, Volume **35** (1984), 603-634.
- [D] R. Durrett: *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*. Wadsworth & Brooks (1988).
- [E] A. C. D. van Enter: *Interacting Particle Systems and Gibbs Measures*. Lecture Notes.
- [EFS] A. C. D. van Enter, R. Fernández and A. D. Sokal: *Regularity Properties and Pathologies of Position-Space Renormalization-Group Transformations: Scope and Limitations of Gibbsian Theory*. Journal of Statistical Physics, Volume **72** (1993), 879-1167.
- [G] H. O. Georgii: *Gibbs Measures and Phase Transitions*. Walter de Gruyter (1988).
- [GVN] A. Galves, A. C. R. Nogueira e M. E. Vares: *Introdução aos Sistemas Markovianos de Partículas*. 5^o Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- [KO] R. Kotecky and E. Olivieri: *Droplet Dynamics for Asymmetric Ising Model*. Journal of Statistical Physics, Volume **70** (1993), 1121-1148.
- [Lig] T. M. Liggett: *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag (1985).

- [N1] E. J. Neves: *Stability of Droplets for the Three Dimensional Stochastic Ising Model*. Resenhas IME-USP, Volume **1** (1994), 459-476.
- [N2] E. J. Neves: *A Discrete Variational Problem Related to Ising Droplets at Low Temperatures*. Journal of Statistical Physics, Volume **80** (1995), 103-123.
- [NS1] E. J. Neves and R. H. Schonmann: *Critical Droplets and Metastability for a Glauber Dynamics at Very Low Temperatures*. Communication in Mathematical Physics, Volume **137** (1991), 209-230.
- [NS2] E. J. Neves and R. H. Schonmann: *Behavior of Droplets for a Class of Glauber Dynamics at Very Low Temperatures*. Probab. Theory Relat. Fields, Volume **91** (1992), 331-354.
- [P] B. Prum: *Processus sur un réseau et mesures de Gibbs*. Masson (1986).
- [S1] R. H. Schonmann: *Metastability for the Contact Process*. Journal of Statistical Physics, Volume **80** (1995), 103-123.
- [S2] R. H. Schonmann: *An Approach to Characterize Metastability and Critical Droplets in Stochastic Ising Models*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Volume **41** (1985), 445-464.
- [V] M. E. Vares: *Grandes Desvios em Processos Markovianos*. 15^o Colóquio Brasileiro de Matemática.