**COMPARAÇÃO
DE
INSTRUMENTOS DE MEDIÇÃO
USANDO
CALIBRAÇÃO COMPARATIVA**

Claudia Nice Francisconi

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Estatística**
Orientador: **Prof. Dr. Heleno Bolfarine**

RESUMO

Este trabalho apresenta o problema da comparação de vários instrumentos ou métodos de medição, onde cada instrumento, ou método, foi planejado para medir uma certa característica em uma amostra aleatória de unidades amostrais.

Consideramos inicialmente o modelo estrutural proposto por Barnett (1969). Obtemos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo e verificamos a consistência dos mesmos. Calculamos suas esperanças e variâncias assintóticas. Os mesmos passos foram seguidos para o modelo estrutural estudado por Theobald e Mallison (1978). Para ambos os modelos, reanalisamos o conjunto de dados apresentado por Barnett (1969). Estudamos também o modelo de regressão funcional tratado por Kimura (1992). Derivamos os estimadores de máxima verossimilhança dos coeficientes de regressão do modelo e consideramos uma aproximação para a matriz de covariância destes estimadores. Verificamos computacionalmente a validade de alguns resultados empíricos apresentados por Kimura (1992). Uma extensão dos resultados acima foi obtida impondo uma distribuição t de Student aos erros do modelo funcional estudado.

ABSTRACT

The main object of this dissertation is to consider approaches for comparing measuring devices when measuring the same characteristic in a common group of individuals.

The structural model studied by Barnett (1969) is considered first maximum likelihood estimators of the parameters in the model are obtained. Moreover, asymptotic bias, variances and covariances of the estimators are obtained. The factor analysis version of the model considered by Theobald and Mallison (1978) is considered and a similar analysis performed.

The functional model considered by Kimura (1992) is also studied. A computational study is conducted to verify the validity of certain statements made by Kimura. An extension of the functional model is obtained by considering that the errors in the model follow an independent Student-t distribution.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores e funcionários do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este trabalho chegasse ao fim.

Agradeço ao Giovani pela ajuda e apoio em todos os momentos.

Agradeço especialmente ao Prof. Dr. Heleno Bolfarine pela orientação e paciência.

CONTEÚDO

Capítulo 1	Idéias Básicas.....	1
1.1	Introdução.....	1
1.2	Modelos estruturais e funcionais.....	2
1.2.1	Modelos estruturais.....	3
1.2.2	O modelo de regressão funcional.....	10
Capítulo 2	O modelo estrutural de regressão.....	14
2.1	Introdução.....	14
2.2	Estimadores de máxima verossimilhança.....	14
2.3	Consistência dos estimadores de máxima verossimilhança.....	20
2.4	Aproximações para as esperanças dos estimadores de máxima verossimilhança.....	24
2.5	Aproximações para as variâncias dos estimadores de máxima verossimilhança.....	32
2.6	Uma reanálise dos dados de Barnett (1969).....	39
Capítulo 3	O modelo de análise de fatores.....	45
3.1	Introdução.....	45
3.2	Estimadores de máxima verossimilhança.....	45
3.3	Consistência dos estimadores de máxima verossimilhança.....	50
3.4	Aproximações para as esperanças dos estimadores de máxima verossimilhança.....	53
3.5	Aproximações para as variâncias dos estimadores de máxima verossimilhança.....	59
3.6	Uma reanálise dos dados de Barnett (1969).....	65
Capítulo 4	O modelo de regressão funcional.....	67
4.1	Introdução.....	67
4.2	Estimadores de máxima verossimilhança.....	67
4.3	Estimação da matriz de covariância dos estimadores de máxima verossimilhança.....	69
4.4	O algoritmo EM.....	71
4.5	Verificação de algumas conjecturas formuladas em Kimura (1992).....	73

4.6	O modelo de regressão funcional com erros distribuídos segundo uma distribuição t de Student.....	76
4.6.1	Etapa M do algoritmo.....	79
4.6.2	Etapa E do algoritmo.....	80
4.6.3	Estimação da matriz de covariância dos EMV.....	82
Apêndice A.....		87
Apêndice B.....		93
Apêndice C.....		98

Capítulo 1

Idéias Básicas

1.1 Introdução

Este trabalho trata do problema da comparação de p instrumentos ou métodos de medição, onde cada instrumento, ou método, foi planejado para medir a mesma quantidade desconhecida x em um grupo comum de unidades amostrais. Este problema é comumente conhecido como calibração comparativa. Vale observar que o termo “método de medição” ou “instrumento de medição” refere-se às diferentes formas de medição de uma dada característica. Estas diferentes formas de medição podem ser, por exemplo, diferentes aparelhos ou diferentes operadores de um aparelho. Este problema foi originalmente considerado por Barnett (1969), que apresenta um modelo estrutural, calculando, para três instrumentos de medição, os estimadores dos parâmetros do modelo pelo método dos momentos. Barnett (1969) também calcula as esperanças e a matriz de covariância assintótica destes estimadores. Entretanto, as estimativas das variâncias do modelo, derivadas por Barnett (1969), podem tomar valores negativos. Carter (1981) contorna este problema usando estimação de máxima verossimilhança restrita. Para o caso de mais de três instrumentos de medição, Barnett (1969) propõe estimadores de momentos, já que não há uma expressão explícita para os estimadores de máxima verossimilhança. Theobald e Mallison (1978) discutem o modelo estrutural proposto por Barnett (1969) em termos de análise de fatores. Recomendam a utilização de um procedimento de maximização iterativo para obter estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros desconhecidos do modelo, não conseguindo expressões explícitas para os mesmos. Testes de hipóteses são tratados através da razão de verossimilhança. Também usam um procedimento iterativo de estimação para obter a estimativa da matriz de covariância assintótica destes estimadores. Kimura (1992) apresenta um modelo de regressão funcional para o problema da comparação de p instrumentos de medição e calcula as estimativas de máxima verossimilhança através de um algoritmo do tipo EM. Kimura (1992) propõe uma aproximação para as variâncias das estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de regressão do modelo e também testes de hipóteses para verificar a igualdade dos p instrumentos de medição. Bolfarine e Rojas (1994a) consideram a mesma versão do modelo de análise de fatores discutido por Theobald e Mallison (1978) e estimam os parâmetros do modelo através do algoritmo EM. Derivam as

expressões explícitas para a matriz de covariância assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança e estudam o caso em que uma das variâncias do modelo é nula.

Neste capítulo apresentamos os modelos mais comumente utilizados em calibração comparativa e suas respectivas funções de verossimilhança. Para o modelo de regressão funcional, estudamos o caso geral de p instrumentos, enquanto que para os modelos estruturais nos restringimos ao caso de três instrumentos de medição. Para os modelos de Barnett (1969) e Theobald-Mallison (1978), determinamos, respectivamente nos capítulos 2 e 3, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos, suas esperanças e variâncias assintóticas. Verificamos a consistência destes estimadores e reanalisamos o conjunto de dados apresentado por Barnett (1969). No capítulo 4 estudamos o modelo de regressão funcional tratado por Kimura (1992), derivando, para o caso de p instrumentos, os estimadores de máxima verossimilhança dos coeficientes de regressão do modelo. Também consideramos uma aproximação para a matriz de covariância dos mesmos, utilizando a matriz de informação observada destes estimadores. Verificamos computacionalmente a validade de alguns resultados apresentados em Kimura (1992). Uma extensão dos resultados acima é obtida quando impomos uma distribuição t de Student aos erros do modelo funcional estudado. Para este modelo consideramos também aproximações para a variância dos estimadores através da matriz das derivadas segundas da verossimilhança.

1.2 Modelos estruturais e funcionais

Em várias áreas do conhecimento há o interesse de se medir o valor de uma certa característica de uma unidade amostral, por exemplo, a capacidade pulmonar de um indivíduo. Neste texto vamos nos restringir ao caso em que esta medida só possa ser fornecida por algum instrumento, que chamaremos “instrumento de medição”, e que a unidade amostral seja um indivíduo. Apesar dos constantes avanços tecnológicos terem tornado cada vez mais precisos os procedimentos de mensuração, não é realista supor que tais medidas são obtidas sem erro e em geral, não temos acesso aos seus verdadeiros valores. Suponha que dispomos de p instrumentos de medição, todos construídos para medir a mesma característica, que chamaremos “característica X ”, de um certo indivíduo, que denotaremos por “indivíduo 1”. Seja y_i a medida da característica X associada ao indivíduo 1 fornecida pelo instrumento i , $i = 1, 2, \dots, p$. Seja x a verdadeira medida da característica X associada ao indivíduo 1. Definimos o modelo estrutural por

$$y_i = \alpha_i + \beta_i x + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (1.2.1)$$

com as suposições de que ε_i , $i = 1, 2, \dots, p$, são variáveis aleatórias normais, independentes entre si, com média zero e variância σ_i^2 e com o valor não observado x como uma variável aleatória com distribuição normal, com média μ e variância σ^2 . Observe que a medida x é conhecida somente através da observação y_i . O modelo definido em (1.2.1), porém com x sendo agora uma constante desconhecida, é denominado modelo funcional. Ressaltamos que, tanto neste modelo como no definido em (1.2.1), não é necessário que a distribuição seja normal para que a nomenclatura funcional e estrutural seja usada.

Nas seções seguintes analisaremos uma situação similar à acima, porém agora desejaremos medir a característica X , não em um, mas em n indivíduos de uma amostra aleatória, onde cada indivíduo será denotado por “indivíduo j ”, $j = 1, 2, \dots, n$.

Do ponto de vista de aplicação, o modelo funcional é adequado quando temos interesse apenas nos indivíduos participantes do estudo, enquanto que o estrutural é adequado quando o interesse é generalizar os resultados do estudo para a população de onde vem os indivíduos envolvidos no estudo.

1.2.1 Modelos estruturais

Para o caso de três instrumentos de medição, $p = 3$, estudamos dois modelos. O primeiro modelo estudado foi o modelo estrutural proposto por Barnett (1969), apresentado a seguir.

Seja y_{ij} a medida fornecida pelo instrumento i , $i = 1, 2, 3$, da característica X associada ao indivíduo j , $j = 1, 2, \dots, n$. Assumimos independência entre as medidas y_{ij} obtidas em indivíduos diferentes. Seja x_j o verdadeiro valor da característica X associada ao j -ésimo indivíduo. O valor de x_j é conhecido somente através da observação y_{ij} , que contém erros de medição ε_{ij} , da seguinte forma

$$y_{ij} = \alpha_i + \beta_i x_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.1)$$

com $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$, onde supomos que

$$x_j \sim N(\mu, \sigma^2), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \text{ são independentes entre si com distribuição } N(0, \sigma_i^2)$$

e

$$\varepsilon_{ij} \text{ e } x_j \text{ são independentes, } i = 1, 2, 3, \text{ e } j = 1, 2, \dots, n.$$

Conforme recomendado por Barnett (1969), tomamos $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$ para que o modelo acima torne-se identificável. Este fato é considerado em Galea-Rojas (1995). Deste modo, o instrumento 1 passa a ser considerado como não tendo vícios, isto é, $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$, ou seja, instrumento 1 passa a

ser considerado como instrumento de referência. O instrumento de referência quase sempre é um instrumento caro ou de operação difícil e, em geral, bastante preciso. Os outros são instrumentos menos precisos, contudo de fácil operação. Definimos α_i como sendo o vício aditivo do instrumento i e β_i como sendo o vício multiplicativo do instrumento i . A escolha do instrumento de referência é óbvia quando temos um único instrumento controle e vários instrumentos experimentais. Quando não há razão para distinção dos instrumentos, a escolha do instrumento de referência é arbitrária. Para $p = 2$, temos a situação usual dos modelos com erros nas variáveis, ver Bolfarine, Rodrigues e Cordani (1992).

Considerações sobre o modelo definido em (1.2.1.1)

Para o modelo definido em (1.2.1.1), é assumido independência entre as medidas y_{ij} obtidas a partir de indivíduos diferentes, de onde segue que

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{ij'}) = 0 \text{ com } j, j' = 1, 2, \dots, n, j \neq j', i = 1, 2, 3,$$

e

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = 0 \text{ com } j, j' = 1, 2, \dots, n, j \neq j', i \neq i', i, i' = 1, 2, 3.$$

Por outro lado, a partir das suposições apresentadas no modelo (1.2.1.1), podemos escrever que

$$\text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kj}) = 0, i \neq k, i, k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.2)$$

$$\text{Cov}(x_j, \varepsilon_{ij}) = 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.3)$$

$$\text{Var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma_i^2, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.4)$$

$$E(x_j) = \mu \text{ e } E(\varepsilon_{ij}) = 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.5)$$

e que

$$\text{Var}(x_j) = \sigma^2, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2.1.6)$$

Para $i \neq k, i, k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$, temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_{ij}, y_{kj}) &= \text{Cov}(\alpha_i + \beta_i x_j + \varepsilon_{ij}, \alpha_k + \beta_k x_j + \varepsilon_{kj}) \\ &= \text{Cov}(\beta_i x_j, \beta_k x_j) + \text{Cov}(\beta_i x_j, \varepsilon_{kj}) + \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \beta_k x_j) + \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kj}) \\ &= \beta_i \beta_k \text{Cov}(x_j, x_j) + \beta_i \text{Cov}(x_j, \varepsilon_{kj}) + \beta_k \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, x_j) + \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kj}) \\ &= \beta_i \beta_k \text{Var}(x_j) + \beta_i \text{Cov}(x_j, \varepsilon_{kj}) + \beta_k \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, x_j) + \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kj}). \end{aligned}$$

Substituindo (1.2.1.2), (1.2.1.3) e (1.2.1.6) na expressão acima, obtemos

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{kj}) = \beta_i \beta_k \sigma^2, i \neq k, i, k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \text{ com } \beta_1 = 1.$$

Note que y_{ij} , definido em (1.2.1.1), é uma combinação linear de duas variáveis normais independentes, ε_{ij} e x_j . Logo y_{ij} terá distribuição normal de média $\alpha_i + \beta_i \mu$, $i = 1, 2, 3$, com $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$, e variância igual a $\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2$, $i = 1, 2, 3$, com $\beta_1 = 1$, desde que

$E(y_{ij}) = E(\alpha_i + \beta_i x_j + \varepsilon_{ij}) = \alpha_i + \beta_i E(x_j) + E(\varepsilon_{ij})$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n$, com $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$, onde de (1.2.1.5) segue que $E(y_{ij}) = \alpha_i + \beta_i \mu$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n$, com $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$; e que

$\text{Var}(y_{ij}) = \text{Var}(\alpha_i + \beta_i x_j + \varepsilon_{ij}) = \beta_i^2 \text{Var}(x_j) + \text{Var}(\varepsilon_{ij}) + 2 \beta_i \text{Cov}(x_j, \varepsilon_{ij})$,
 $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n$, com $\beta_1 = 1$.

Substituindo (1.2.1.3), (1.2.1.4) e (1.2.1.6) na expressão acima, vem que

$$\text{Var}(y_{ij}) = \beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \text{com } \beta_1 = 1.$$

Seja $\mathbf{Y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, y_{3j})'$, $j = 1, 2, \dots, n$. Desta forma, o vetor $\mathbf{Y}_j$ terá distribuição normal trivariada, com vetor de médias $\mu = (\mu, \alpha_2 + \beta_2 \mu, \alpha_3 + \beta_3 \mu)'$ e matriz de covariância Σ , dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma_1^2 & \beta_2 \sigma^2 & \beta_3 \sigma^2 \\ \beta_2 \sigma^2 & \beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 & \beta_2 \beta_3 \sigma^2 \\ \beta_3 \sigma^2 & \beta_2 \beta_3 \sigma^2 & \beta_3^2 \sigma^2 + \sigma_3^2 \end{bmatrix}.$$

Os parâmetros do modelo acima são $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \mu, \sigma^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ e σ_3^2 com $\alpha_2 \in \mathfrak{R}$, $\alpha_3 \in \mathfrak{R}$, $\beta_2 \in \mathfrak{R}$, $\beta_3 \in \mathfrak{R}$, $\sigma_i^2 > 0$, $i = 1, 2, 3$, $\mu \in \mathfrak{R}$ e $\sigma^2 > 0$. Seja $\Theta = \{\theta : \alpha_2 \in \mathfrak{R}, \alpha_3 \in \mathfrak{R}, \beta_2 \in \mathfrak{R}, \beta_3 \in \mathfrak{R}, \sigma_i^2 > 0, i = 1, 2, 3, \mu \in \mathfrak{R} \text{ e } \sigma^2 > 0\}$ o espaço paramétrico de $\theta = (\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3, \mu, \sigma^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)'$.

Lembrando que há independência entre as medidas y_{ij} obtidas a partir de indivíduos diferentes, concluímos que $\mathbf{Y}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, são independentes e identicamente distribuídos com distribuição normal trivariada, com vetor de médias μ e matriz de covariância Σ . A densidade conjunta dos vetores $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$, ou função de verossimilhança do modelo, é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) &= \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-1/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \log(|\Sigma|) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) \right\}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2, \\ (\mathbf{Y}_j - \mu) &= (y_{1j} - \mu, y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu, y_{3j} - \alpha_3 - \beta_3 \mu)' \end{aligned}$$

e

$$\Sigma^{-1} = |\Sigma|^{-1} \begin{bmatrix} \beta_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2 & -\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2 & -\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2 \\ -\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2 & \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 & -\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2 \\ -\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2 & -\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2 & \sigma_2^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} (Y_j - \mu)' \Sigma^{-1} (Y_j - \mu) = |\Sigma|^{-1} \{ & (y_{1j} - \mu)^2 (\beta_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) + \\ & (y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu)^2 (\sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) + \\ & (y_{3j} - \alpha_3 - \beta_3 \mu)^2 (\sigma_2^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) + \\ & 2 (y_{1j} - \mu) (y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu) (-\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2) + \\ & 2 (y_{1j} - \mu) (y_{3j} - \alpha_3 - \beta_3 \mu) (-\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2) + \\ & 2 (y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu) (y_{3j} - \alpha_3 - \beta_3 \mu) (-\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2) \}, \end{aligned}$$

de onde segue que $f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) =$

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \log(\sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2) - \right. \\ & \frac{1}{2} |\Sigma|^{-1} (\beta_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) \sum_{j=1}^n y_{1j}^2 + \\ & n \mu \bar{Y}_1 |\Sigma|^{-1} (\beta_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) - \\ & \frac{1}{2} n \mu^2 |\Sigma|^{-1} (\beta_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) - \\ & \frac{1}{2} |\Sigma|^{-1} (\sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) \sum_{j=1}^n y_{2j}^2 + \\ & n \bar{Y}_2 |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (\sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) - \\ & \frac{1}{2} n |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu)^2 (\sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) - \\ & \frac{1}{2} |\Sigma|^{-1} (\sigma_2^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \sum_{j=1}^n y_{3j}^2 + \\ & n \bar{Y}_3 |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (\sigma_2^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) - \\ & \frac{1}{2} n |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu)^2 (\sigma_2^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) - \\ & |\Sigma|^{-1} (-\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2) \sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j} + n \bar{Y}_1 |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (-\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2) + \\ & n \mu \bar{Y}_2 |\Sigma|^{-1} (-\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2) - n \mu |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (-\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2) - \\ & |\Sigma|^{-1} (-\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2) \sum_{j=1}^n y_{1j} y_{3j} + n \bar{Y}_1 |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (-\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n \mu \bar{Y}_3 |\Sigma|^{-1} (-\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2) - n \mu |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (-\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2) - \\
& \left(\sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j} |\Sigma|^{-1} (-\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2) \sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j} + n \bar{Y}_2 |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (-\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2) + \right. \\
& n \bar{Y}_3 |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (-\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2) - \\
& \left. n |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (-\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2) \right\}. \quad (1.2.1.7)
\end{aligned}$$

O segundo modelo estrutural estudado foi o modelo de análise de fatores proposto por Theobald e Mallison (1978), definido a seguir.

Seja y_{ij} a medida fornecida pelo instrumento i , $i = 1, 2, 3$, da característica X do indivíduo j , $j = 1, 2, \dots, n$. Assumimos independência entre as medidas y_{ij} obtidas a partir de indivíduos diferentes. Seja x_{ij} o verdadeiro valor da característica X associada ao j -ésimo indivíduo, obtido pelo i -ésimo instrumento. O valor de x_{ij} é conhecido somente através da observação y_{ij} , que contém erros de medição ε_{ij} , da seguinte forma

$$y_{ij} = x_{ij} + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.8)$$

com

$$x_{ij} = \mu_i + \lambda_i F_j, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.9)$$

onde supomos que

ε_{ij} , $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$, são independentes entre si com distribuição $N(0, \sigma_i^2)$,

$F_j \sim N(0, 1), j = 1, 2, \dots, n$,

e

ε_{ij} e F_j são independentes, $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$.

Note que para cada indivíduo j , $j = 1, 2, \dots, n$, μ_i e λ_i caracterizam a relação linear entre o instrumento i , $i = 1, 2, 3$, e a medida F fornecida por um instrumento hipotético. Neste caso, nenhum dos três instrumentos foi tomado como instrumento de referência, ou seja, os instrumentos são tratados de modo simétrico.

Substituindo (1.2.1.9) em (1.2.1.8), o modelo apresentado acima torna-se

$$y_{ij} = \mu_i + \lambda_i F_j + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.10)$$

onde

$F_j \sim N(0, 1), j = 1, 2, \dots, n$,

ε_{ij} , $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$, são independentes entre si com distribuição $N(0, \sigma_i^2)$

e

ε_{ij} e F_j são independentes, $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$.

Chamamos a atenção para o fato de que as variâncias σ_i^2 deste modelo têm os mesmos significados daquelas consideradas no modelo definido em (1.2.1.1), ver Bolfarine e Rojas (1994a).

Considerações sobre o modelo definido em (1.2.1.10)

Para o modelo definido em (1.2.1.10) é assumido independência entre as medidas y_{ij} obtidas a partir de indivíduos diferentes, de onde segue que

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{ij'}) = 0 \text{ com } j, j' = 1, 2, \dots, n, j \neq j', i = 1, 2, 3,$$

e

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{i'j}) = 0 \text{ com } j, j' = 1, 2, \dots, n, j \neq j', i \neq i', i, i' = 1, 2, 3.$$

Por outro lado, a partir das suposições do modelo (1.2.1.10), podemos escrever que

$$\text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kj}) = 0, i, k = 1, 2, 3, i \neq k, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.11)$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_{ij}, F_j) = 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.12)$$

$$\text{Var}(F_j) = 1, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.13)$$

$$E(F_j) = 0, E(\varepsilon_{ij}) = 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.1.14)$$

e

$$\text{Var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma_i^2, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2.1.15)$$

Para $i \neq k, i, k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$, temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_{ij}, y_{kj}) &= \text{Cov}(\mu_i + \lambda_i F_j + \varepsilon_{ij}, \mu_k + \lambda_k F_j + \varepsilon_{kj}) \\ &= \text{Cov}(\lambda_i F_j, \lambda_k F_j) + \text{Cov}(\lambda_i F_j, \varepsilon_{kj}) + \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \lambda_k F_j) + \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kj}) \\ &= \lambda_i \lambda_k \text{Cov}(F_j, F_j) + \lambda_i \text{Cov}(F_j, \varepsilon_{kj}) + \lambda_k \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, F_j) + \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kj}) \\ &= \lambda_i \lambda_k \text{Var}(F_j) + \lambda_i \text{Cov}(F_j, \varepsilon_{kj}) + \lambda_k \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, F_j) + \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kj}). \end{aligned} \quad (1.2.1.16)$$

Substituindo (1.2.1.11), (1.2.1.12) e (1.2.1.13) em (1.2.1.16), obtemos

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{kj}) = \lambda_i \lambda_k, i \neq k, i, k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n.$$

Note que y_{ij} , definido em (1.2.1.10), é uma combinação linear de duas variáveis normais independentes, ε_{ij} e F_j . Logo y_{ij} terá uma distribuição normal de média $\mu_i, i = 1, 2, 3$, e variância $\lambda_i^2 + \sigma_i^2, i = 1, 2, 3$, desde que

$E(y_{ij}) = E(\mu_i + \lambda_i F_j + \varepsilon_{ij}) = \mu_i + \lambda_i E(F_j) + E(\varepsilon_{ij}), i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$, onde de (1.2.1.14) segue que $E(y_{ij}) = \mu_i, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n$;

e que

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_{ij}) &= \text{Var}(\mu_i + \lambda_i F_j + \varepsilon_{ij}) = \lambda_i^2 \text{Var}(F_j) + \text{Var}(\varepsilon_{ij}) + 2 \lambda_i \text{Cov}(\varepsilon_{ij}, F_j), \\ i &= 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Substituindo (1.2.1.12), (1.2.1.13) e (1.2.1.15) na expressão acima, segue que

$$\text{Var}(y_{ij}) = \lambda_i^2 + \sigma_i^2, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n.$$

Seja $\mathbf{Y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, y_{3j})'$, $j = 1, 2, \dots, n$. Desta forma, o vetor $\mathbf{Y}_j$ terá distribuição normal trivariada, com vetor de médias $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)'$ e matriz de covariância Σ , dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 + \sigma_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_2^2 + \sigma_2^2 & \lambda_2 \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_3 & \lambda_2 \lambda_3 & \lambda_3^2 + \sigma_3^2 \end{bmatrix}.$$

Os parâmetros do modelo acima são $\mu_i, \lambda_i, \sigma_i^2, i = 1, 2, 3$, com $\mu_i \in \mathfrak{R}, \lambda_i > 0, \sigma_i^2 > 0, i = 1, 2, 3$. Seja $\Theta = \{\theta : \mu_i \in \mathfrak{R}, \lambda_i > 0, \sigma_i^2 > 0, i = 1, 2, 3\}$ o espaço paramétrico de $\theta = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)'$.

Lembrando que há independência entre as medidas y_{ij} obtidas a partir de indivíduos diferentes, podemos concluir que $\mathbf{Y}_j, j = 1, 2, \dots, n$, são independentes e identicamente distribuídos com distribuição normal trivariada, com vetor de médias μ e matriz de covariância Σ . A densidade conjunta dos vetores $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$, ou função de verossimilhança do modelo, é dada por

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) &= \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-1/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \log(|\Sigma|) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) \right\} \end{aligned}$$

onde

$$|\Sigma| = \lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2,$$

$$(\mathbf{Y}_j - \mu) = (y_{1j} - \mu_1, y_{2j} - \mu_2, y_{3j} - \mu_3)',$$

e

$$\Sigma^{-1} = |\Sigma|^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2 & -\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2 & -\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2 \\ -\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2 & \lambda_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 & -\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2 \\ -\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2 & -\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2 & \lambda_1^2 \sigma_2^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) &= |\Sigma|^{-1} \{ (y_{1j} - \mu_1)^2 (\lambda_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) + \\ & (y_{2j} - \mu_2)^2 (\lambda_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) + (y_{3j} - \mu_3)^2 (\lambda_1^2 \sigma_2^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) + \\ & 2 (y_{1j} - \mu_1) (y_{2j} - \mu_2) (-\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2) + 2 (y_{1j} - \mu_1) (y_{3j} - \mu_3) (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2) + \end{aligned}$$

$$2 (y_{2j} - \mu_2) (y_{3j} - \mu_3) (-\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2) \},$$

de onde segue que $f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) =$

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{n}{2} \log(\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2) - \right. \\ & \frac{1}{2} |\Sigma|^{-1} (\lambda_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) \sum_{j=1}^n y_{1j}^2 + \\ & n \mu_1 \bar{Y}_1 |\Sigma|^{-1} (\lambda_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) - \frac{1}{2} n \mu_1^2 |\Sigma|^{-1} (\lambda_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) \\ & - \frac{1}{2} |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) \sum_{j=1}^n y_{2j}^2 + \\ & n \mu_2 \bar{Y}_2 |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) - \frac{1}{2} n \mu_2^2 |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) \\ & - \frac{1}{2} |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_2^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \sum_{j=1}^n y_{3j}^2 + \\ & n \mu_3 \bar{Y}_3 |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_2^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) - \frac{1}{2} n \mu_3^2 |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_2^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \\ & - |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2) \sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j} + n \mu_2 \bar{Y}_1 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2) + n \mu_1 \bar{Y}_2 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2) \\ & - n \mu_1 \mu_2 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2) - |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2) \sum_{j=1}^n y_{1j} y_{3j} + n \mu_3 \bar{Y}_1 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2) + \\ & n \mu_1 \bar{Y}_3 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2) - n \mu_1 \mu_3 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2) - |\Sigma|^{-1} (-\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2) \sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j} + \\ & n \mu_3 \bar{Y}_2 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2) + n \mu_2 \bar{Y}_3 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2) - n \mu_2 \mu_3 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2) \} \}. \end{aligned} \quad (1.2.1.17)$$

1.2.2 O modelo de regressão funcional

Para o caso de um número qualquer p de instrumentos de medição, estudamos o modelo de regressão funcional tratado por Kimura (1992), apresentado a seguir.

Seja y_{ij} a medida fornecida pelo instrumento i , $i = 1, 2, \dots, p$, da característica X associada ao j -ésimo indivíduo. Assumimos independência entre as medidas y_{ij} obtidas em indivíduos diferentes e também entre as medidas obtidas a partir do mesmo indivíduo. Seja x_j o verdadeiro valor da característica X associada ao j -ésimo indivíduo. O valor de x_j é conhecido somente através da observação y_{ij} , que contém erros de medição ε_{ij} , da seguinte forma

$$y_{ij} = \alpha_i + \beta_i x_j + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.2.1)$$

com $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$, onde supomos que ε_{ij} , $i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n$, são independentes entre si com distribuição $N(0, \sigma_{ij}^2)$, com $\sigma_{ij}^2 = \lambda_i \sigma^2$. Aqui, assumimos que λ_i , $i = 1, 2, \dots, p$, são constantes conhecidas.

Conforme recomendado por Kimura (1992), tomamos $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$ para que seja factível a obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança deste modelo. Este fato está verificado em Galea-Rojas (1995) e também discutido em Kimura (1992). Deste modo, o instrumento 1 passa a ser visto como um instrumento não viciado.

Considerações sobre o modelo definido em (1.2.2.1)

Para o modelo definido em (1.2.2.1), é assumido independência entre as medidas y_{ij} obtidas a partir de indivíduos diferentes e também entre as medidas obtidas a partir do mesmo indivíduo, de onde segue que

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{ij'}) = 0 \text{ com } j, j' = 1, 2, \dots, n, j \neq j', i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{i'j'}) = 0 \text{ com } j, j' = 1, 2, \dots, n, j \neq j', i \neq i', i, i' = 1, 2, \dots, p,$$

e

$$\text{Cov}(y_{ij}, y_{i'j}) = 0 \text{ com } j = 1, 2, \dots, n, i \neq i', i, i' = 1, 2, \dots, p.$$

Sob o modelo definido em (1.2.2.1), com as suposições mencionadas, temos que

$$\alpha_i, \beta_i \text{ e } x_j, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n, \text{ são os parâmetros do modelo,} \quad (1.2.2.2)$$

$$\text{Var}(\varepsilon_{ij}) = \lambda_i \sigma^2, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.2.3)$$

$$E(\varepsilon_{ij}) = 0, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2.2.4)$$

Por outro lado,

$$\text{Var}(y_{ij}) = \text{Var}(\alpha_i + \beta_i x_j + \varepsilon_{ij}),$$

onde de (1.2.2.2) e (1.2.2.3) vem que

$$\text{Var}(y_{ij}) = \text{Var}(\varepsilon_{ij}) = \lambda_i \sigma^2,$$

$$i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n.$$

De (1.2.2.2) e (1.2.2.4) segue que

$$E(y_{ij}) = E(\alpha_i + \beta_i x_j + \varepsilon_{ij}) = \alpha_i + \beta_i x_j + E(\varepsilon_{ij}) = \alpha_i + \beta_i x_j,$$

$$i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n, \text{ com } \alpha_1 = 0 \text{ e } \beta_1 = 1.$$

Seja $\mathbf{Y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{pj})'$, $j = 1, 2, \dots, n$. Desta forma, o vetor $\mathbf{Y}_j$ terá distribuição normal p-variada, com vetor de médias $\mu = (x_j, \alpha_2 + \beta_2 x_j, \dots, \alpha_p + \beta_p x_j)'$ e matriz de covariância Σ , dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda_1 \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Os parâmetros do modelo acima são α_i , β_i , $i = 2, \dots, p$, σ^2 e x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, com $\alpha_i \in \mathfrak{R}$, $\beta_i \in \mathfrak{R}$, $x_j \in \mathfrak{R}$, $\sigma^2 > 0$. Seja $\Theta = \{\theta : \alpha_i \in \mathfrak{R}, \beta_i \in \mathfrak{R}, x_j \in \mathfrak{R}, \sigma^2 > 0, i = 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n\}$ o espaço paramétrico de $\theta = (\alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_2, \dots, \beta_p, x_1, x_2, \dots, x_n, \sigma^2)'$.

Lembrando que há independência entre as medidas y_{ij} obtidas a partir de indivíduos diferentes e também entre as medidas obtidas a partir do mesmo indivíduo, podemos concluir que $\mathbf{Y}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, são independentes e identicamente distribuídos com distribuição normal p-variada, com vetor de médias μ e matriz de covariância Σ . A densidade conjunta dos vetores $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$, ou função de verossimilhança do modelo, é dada por

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n | \theta) &= \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-1/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) \right\}, \end{aligned}$$

onde $|\Sigma| = \prod_{i=1}^p (\lambda_i \sigma^2)$,

$$(\mathbf{Y}_j - \mu) = (y_{1j} - x_j, y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 x_j, \dots, y_{pj} - \alpha_p - \beta_p x_j)'$$

e

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 \sigma^2)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 \sigma^2)^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\lambda_p \sigma^2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Deste modo, após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$(\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) = \sum_{i=1}^p [(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)^2 (\lambda_i \sigma^2)^{-1}],$$

de onde segue que

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p [(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)^2 (\lambda_i \sigma^2)^{-1}] \right\},$$

ou então, $f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) =$

$$(2\pi)^{-n/2} \left[\prod_{i=1}^p (\lambda_i \sigma^2) \right]^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n [(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)^2 (\lambda_i \sigma^2)^{-1}] \right\}, \quad (1.2.2.5)$$

com $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$.

Capítulo 2

O modelo estrutural de regressão

2.1 Introdução

Neste capítulo determinamos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo definido em (1.2.1.1). Mostramos, com detalhes, a consistência destes estimadores e calculamos esperanças e variâncias assintóticas dos mesmos, cujos resultados aparecem em Barnett (1969). Por último, reanalisamos o conjunto de dados apresentado por Barnett (1969).

2.2 Estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção determinamos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo definido em (1.2.1.1). Para isto, utilizamos o Teorema A.1, apresentado no apêndice A. Algumas considerações que serão necessárias para a utilização do Teorema A.1 estão apresentadas a seguir.

No capítulo 1, expressão (1.2.1.7), obtemos a densidade conjunta dos vetores $\mathbf{Y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, y_{3j})'$, $j = 1, 2, \dots, n$, dada por $f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta)$. Observe que para todo $(y_1, y_2, \dots, y_n)'$ pertencente ao suporte da distribuição conjunta dos vetores $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ e todo $\theta \in \Theta$, $f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta)$ poderá ser escrita como

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) = h(y_1, y_2, \dots, y_n) \exp \left\{ \sum_{i=1}^9 T_i(y_1, y_2, \dots, y_n) c_i(\theta) + d(\theta) \right\}, \text{ onde}$$

$$h(y_1, y_2, \dots, y_n) = (2\pi)^{-n/2},$$

$$d(\theta) = -\frac{n}{2} \log(\sigma_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2) -$$

$$\frac{1}{2} n \mu^2 |\Sigma|^{-1} (\beta_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) -$$

$$\frac{1}{2} n |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu)^2 (\sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) -$$

$$\frac{1}{2} n |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu)^2 (\sigma_2^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) -$$

$$n \mu |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (-\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2) - n \mu |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (-\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2) -$$

$$n |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (-\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2),$$

$$T_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n y_{1j}^2,$$

$$c_1(\theta) = \frac{1}{2} |\Sigma|^{-1} (\beta_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2),$$

$$T_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n y_{2j}^2,$$

$$c_2(\theta) = \frac{1}{2} |\Sigma|^{-1} (\sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2),$$

$$T_3(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n y_{3j}^2,$$

$$c_3(\theta) = \frac{1}{2} |\Sigma|^{-1} (\sigma_2^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2),$$

$$T_4(y_1, y_2, \dots, y_n) = \bar{Y}_1,$$

$$c_4(\theta) = n \mu |\Sigma|^{-1} (\beta_2^2 \sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) + \\ n |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (-\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2) + n |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (-\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2),$$

$$T_5(y_1, y_2, \dots, y_n) = \bar{Y}_2,$$

$$c_5(\theta) = n |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (\sigma_3^2 \sigma^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) + n \mu |\Sigma|^{-1} (-\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2) + \\ n |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (-\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2),$$

$$T_6(y_1, y_2, \dots, y_n) = \bar{Y}_3,$$

$$c_6(\theta) = n |\Sigma|^{-1} (\alpha_3 + \beta_3 \mu) (\sigma_2^2 \sigma^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) + n \mu |\Sigma|^{-1} (-\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2) + \\ n |\Sigma|^{-1} (\alpha_2 + \beta_2 \mu) (-\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2),$$

$$T_7(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j},$$

$$c_7(\theta) = -|\Sigma|^{-1} (-\beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2),$$

$$T_8(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n y_{1j} y_{3j},$$

$$c_8(\theta) = -|\Sigma|^{-1} (-\beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2),$$

$$T_9(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j}$$

e

$$c_9(\theta) = -|\Sigma|^{-1} (-\beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2).$$

A seguir, calculamos as esperanças das estatísticas suficientes $T_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, 9$. Temos então:

$$E(T_1(y_1, y_2, \dots, y_n)) = E\left(\sum_{j=1}^n y_{1j}^2\right) = \sum_{j=1}^n E(y_{1j}^2) = \sum_{j=1}^n [\text{Var}(y_{1j}) + E(y_{1j})^2], \quad (2.2.1)$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.1), temos que $\text{Var}(y_{1j}) = \sigma^2 + \sigma_1^2$ e $E(y_{1j}) = \mu$. Assim, (2.2.1) torna-se

$$E(T_1(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sum_{j=1}^n (\sigma^2 + \sigma_1^2 + \mu^2) = n (\sigma^2 + \sigma_1^2 + \mu^2). \quad (2.2.2)$$

De modo similar, obtemos

$$E(T_2(y_1, y_2, \dots, y_n)) = n [\beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \mu)^2] \quad (2.2.3)$$

e

$$E(T_3(y_1, y_2, \dots, y_n)) = n [\beta_3^2 \sigma^2 + \sigma_3^2 + (\alpha_3 + \beta_3 \mu)^2].$$

Por outro lado, temos

$$E(T_4(y_1, y_2, \dots, y_n)) = E(\bar{Y}_1) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{1j}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(y_{1j}),$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.1), temos $E(y_{1j}) = \mu$. Assim, a expressão acima torna-se

$$E(T_4(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu = \mu. \quad (2.2.4)$$

De modo análogo, obtemos

$$E(T_5(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \alpha_2 + \beta_2 \mu \quad (2.2.5)$$

e

$$E(T_6(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \alpha_3 + \beta_3 \mu.$$

Concluindo, temos que $E(T_7(y_1, y_2, \dots, y_n)) = E\left(\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j}\right)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n E(y_{1j} y_{2j}) \\ &= \sum_{j=1}^n [\text{Cov}(y_{1j}, y_{2j}) + E(y_{1j}) E(y_{2j})], \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.1), temos que $\text{Cov}(y_{1j}, y_{2j}) = \beta_2 \sigma^2$, $E(y_{1j}) = \mu$ e $E(y_{2j}) = \alpha_2 + \beta_2 \mu$. Assim, (2.2.6) torna-se

$$E(T_7(y_1, y_2, \dots, y_n)) = n [\beta_2 \sigma^2 + \mu (\alpha_2 + \beta_2 \mu)]. \quad (2.2.7)$$

De modo análogo, obtemos

$$E(T_8(y_1, y_2, \dots, y_n)) = n [\beta_3 \sigma^2 + \mu (\alpha_3 + \beta_3 \mu)]$$

e

$$E(T_9(y_1, y_2, \dots, y_n)) = n [\beta_2 \beta_3 \sigma^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \mu)(\alpha_3 + \beta_3 \mu)]. \quad (2.2.8)$$

Seja C o interior do conjunto onde $(c_1(\theta), c_2(\theta), \dots, c_9(\theta))$ está definido, para todo $\theta \in \Theta$. Assim, segue do Teorema A.1 que o estimador de máxima verossimilhança de θ , $\hat{\theta}$, é a solução das equações obtidas quando igualamos cada estatística $T_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, 9$, a sua respectiva esperança, desde que $(c_1(\hat{\theta}(x)), c_2(\hat{\theta}(x)), \dots, c_p(\hat{\theta}(x))) \in C$. Cada uma das equações mencionadas acima está apresentada a seguir.

Equação (1): $\bar{Y}_1 = E(\bar{Y}_1)$

Por (2.2.4), temos que $E(\bar{Y}_1) = \mu$. Assim, a **Equação (1)** torna-se $\bar{Y}_1 = \hat{\mu}$. Logo,

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_1. \quad (2.2.9)$$

Equação (2): $\bar{Y}_2 = E(\bar{Y}_2)$

Por (2.2.5), temos que $E(\bar{Y}_2) = \alpha_2 + \beta_2 \mu$. Assim, a **Equação (2)** torna-se $\bar{Y}_2 = \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \hat{\mu}$. Logo,

$$\hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \hat{\mu}. \quad (2.2.10)$$

Substituindo $\hat{\mu}$ por $\bar{Y}_1$, obtido em (2.2.9), em (2.2.10), obtemos

$$\hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1. \quad (2.2.11)$$

De modo similar, obtemos

$$\hat{\alpha}_3 = \bar{Y}_3 - \hat{\beta}_3 \bar{Y}_1. \quad (2.2.12)$$

Equação (3): $\sum_{j=1}^n y_{1j}^2 = E(\sum_{j=1}^n y_{1j}^2)$

Por (2.2.2), temos que $E(\sum_{j=1}^n y_{1j}^2) = n(\sigma^2 + \sigma_1^2 + \mu^2)$. Assim, a **Equação (3)** torna-se

$$\sum_{j=1}^n y_{1j}^2 = n(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2), \text{ o que implica}$$

$$n \hat{\sigma}_1^2 = \sum_{j=1}^n y_{1j}^2 - n \hat{\mu}^2 - n \hat{\sigma}^2. \quad (2.2.13)$$

Substituindo $\hat{\mu}$ por $\bar{Y}_1$, obtido em (2.2.9), em (2.2.13), obtemos

$$\begin{aligned} n \hat{\sigma}_1^2 &= \sum_{j=1}^n y_{1j}^2 - n \bar{Y}_1^2 - n \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_{1j}^2 - n \bar{Y}_1^2 \right) - \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \\ \hat{\sigma}_1^2 &= S_1^2 - \hat{\sigma}^2, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

onde $S_1^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_{1j}^2 - n \bar{Y}_1^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{1j} - \bar{Y}_1)^2$.

Equação (4): $\sum_{j=1}^n y_{2j}^2 = E\left(\sum_{j=1}^n y_{2j}^2\right)$

Por (2.2.3), temos que $E\left(\sum_{j=1}^n y_{2j}^2\right) = n [\beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \mu)^2]$. Assim, a **Equação (4)**

torna-se $\sum_{j=1}^n y_{2j}^2 = n [\hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_2^2 + (\hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \hat{\mu})^2]$, de onde vem que

$$n \hat{\sigma}_2^2 = \sum_{j=1}^n y_{2j}^2 - n (\hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \hat{\mu})^2 - n \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2. \quad (2.2.15)$$

Substituindo $\hat{\alpha}_2$ por $\bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \hat{\mu}$, obtido em (2.2.10), em (2.2.15), obtemos

$$\begin{aligned} n \hat{\sigma}_2^2 &= \sum_{j=1}^n y_{2j}^2 - n \bar{Y}_2^2 - n \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_{2j}^2 - n \bar{Y}_2^2 \right) - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \\ &\hat{\sigma}_2^2 = S_2^2 - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$\text{onde } S_2^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_{2j}^2 - n \bar{Y}_2^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \bar{Y}_2)^2. \quad (2.2.17)$$

De maneira similar, obtemos

$$\hat{\sigma}_3^2 = S_3^2 - \hat{\beta}_3^2 \hat{\sigma}^2, \text{ onde } S_3^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{3j} - \bar{Y}_3)^2.$$

Equação (5): $\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j} = E\left(\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j}\right)$

De (2.2.7) temos que $E\left(\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j}\right) = n [\beta_2 \sigma^2 + \mu (\alpha_2 + \beta_2 \mu)]$. Assim, a **Equação (5)** torna-se

$$\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j} = n [\hat{\beta}_2 \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu} (\hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \hat{\mu})].$$

Substituindo $\hat{\mu}$ por $\bar{Y}_1$, obtido em (2.2.9), e $\hat{\alpha}_2$ por $\bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1$, obtido em (2.2.11), na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= \frac{1}{n \hat{\sigma}^2} \left(\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j} - n \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \right) \Rightarrow \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{S_{12}}{\hat{\sigma}^2}, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

onde $S_{12} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j} - n \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \bar{Y}_1)(y_{2t} - \bar{Y}_2)$.

De maneira similar, obtemos

$$\hat{\beta}_3 = \frac{S_{13}}{\hat{\sigma}^2}, \text{ onde } S_{13} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \bar{Y}_1)(y_{3t} - \bar{Y}_3). \quad (2.2.19)$$

Equação (6): $\sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j} = E\left(\sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j}\right)$

De (2.2.8) temos que $E\left(\sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j}\right) = n [\beta_2 \beta_3 \sigma^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \mu)(\alpha_3 + \beta_3 \mu)]$. Assim, a **Equação**

(6) torna-se $\sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j} = n [\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3 \hat{\sigma}^2 + (\hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \hat{\mu})(\hat{\alpha}_3 + \hat{\beta}_3 \hat{\mu})]$. Substituindo $\hat{\mu}$ por $\bar{Y}_1$, obtido em (2.2.9), $\hat{\alpha}_2$ por $\bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1$, obtido em (2.2.11), e $\hat{\alpha}_3$ por $\bar{Y}_3 - \hat{\beta}_3 \bar{Y}_1$, obtido em (2.2.12), na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3} \left(\sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j} - n \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 \right) \Rightarrow \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{S_{23}}{\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3}, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

onde $S_{23} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j} - n \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 \right) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{2t} - \bar{Y}_2)(y_{3t} - \bar{Y}_3)$. (2.2.21)

Substituindo $\hat{\beta}_2$ por $\frac{S_{12}}{\hat{\sigma}^2}$, obtido em (2.2.18), e $\hat{\beta}_3$ por $\frac{S_{13}}{\hat{\sigma}^2}$, obtido em (2.2.19), em (2.2.20), obtemos

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{12} S_{13}}{S_{23}}. \quad (2.2.22)$$

Por outro lado, substituindo $\hat{\sigma}^2$ por $\frac{S_{12} S_{13}}{S_{23}}$, obtido em (2.2.22), nas expressões (2.2.18) e (2.2.19), obtemos

$$\hat{\beta}_2 = \frac{S_{23}}{S_{13}} \quad (2.2.23)$$

e

$$\hat{\beta}_3 = \frac{S_{23}}{S_{12}}.$$

Observe que os estimadores $\hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1$, $\hat{\alpha}_3 = \bar{Y}_3 - \hat{\beta}_3 \bar{Y}_1$, $\hat{\beta}_2 = \frac{S_{23}}{S_{13}}$, $\hat{\beta}_3 = \frac{S_{23}}{S_{12}}$ e $\hat{\mu} = \bar{Y}_1$ sempre serão estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α_2 , α_3 , β_2 , β_3 e μ , enquanto que os estimadores $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}$, $\hat{\sigma}_1^2 = S_1^2 - \hat{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}_2^2 = S_2^2 - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2$ e $\hat{\sigma}_3^2 = S_3^2 - \hat{\beta}_3^2 \hat{\sigma}^2$ só serão estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros σ^2 , σ_1^2 , σ_2^2 e σ_3^2 , se suas estimativas pertencerem ao respectivo espaço paramétrico. Como já comentamos, Carter (1981) obtém estimadores de máxima verossimilhança no caso em que uma das variâncias é estimada com valor negativo, utilizando estimadores de máxima verossimilhança restritos. Bolfarine e Galea-Rojas (1994a) apresentam extensões dos resultados derivados por Carter (1981).

Resumindo os resultados acima, temos que os estimadores obtidos são:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{Y}_1, & \hat{\alpha}_2 &= \bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1, \\ \hat{\alpha}_3 &= \bar{Y}_3 - \hat{\beta}_3 \bar{Y}_1, & \hat{\sigma}_1^2 &= S_1^2 - \hat{\sigma}^2, \\ \hat{\sigma}_2^2 &= S_2^2 - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2, & \hat{\sigma}_3^2 &= S_3^2 - \hat{\beta}_3^2 \hat{\sigma}^2, \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{S_{23}}{S_{13}}, & \hat{\beta}_3 &= \frac{S_{23}}{S_{12}} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}. \end{aligned}$$

2.3 Consistência dos estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção mostramos que os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\alpha}_3$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ e $\hat{\sigma}_3^2$ são, respectivamente estimadores consistentes de α_2 , α_3 , β_2 , β_3 , μ , σ^2 , σ_1^2 , σ_2^2 e σ_3^2 .

Teorema: Sob o modelo definido em (1.2.1.1), com as mencionadas suposições, temos que:

- (i) $\hat{\mu} \xrightarrow{P} \mu$, onde $\hat{\mu} = \bar{Y}_1$ foi determinado em (2.2.9).
- (ii) $\hat{\beta}_2 \xrightarrow{P} \beta_2$, onde $\hat{\beta}_2 = \frac{S_{23}}{S_{13}}$ foi determinado em (2.2.23).
- (iii) $\hat{\alpha}_2 \xrightarrow{P} \alpha_2$, onde $\hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1$ foi determinado em (2.2.11).
- (iv) $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$, onde $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}$ foi determinado em (2.2.22).
- (v) $\hat{\sigma}_2^2 \xrightarrow{P} \sigma_2^2$, onde $\hat{\sigma}_2^2 = S_2^2 - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2$ foi determinado em (2.2.16).

Resultados análogos valem para $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\alpha}_3$, $\hat{\beta}_3$ e $\hat{\sigma}_3^2$.

Prova

(i) Sob o modelo definido em (1.2.1.1) e com as suposições mencionadas, as variáveis aleatórias y_{ij} , $j = 1, 2, \dots, n$, são independentes e identicamente distribuídas com $E(y_{11}) = \mu$. Então,

segue do Teorema de Khintchin, veja apêndice A, que $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{1j} \xrightarrow{P} \mu$, ou seja,

$$\bar{Y}_1 \xrightarrow{P} \mu. \quad (2.3.1)$$

Por outro lado, de (2.2.9) temos que $\hat{\mu} = \bar{Y}_1$, o que implica, $\hat{\mu} \xrightarrow{P} \mu$. Logo, $\hat{\mu}$ é um estimador consistente de μ .

(ii) Primeiramente, observe que $S_{23} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{2i} - \bar{Y}_2)(y_{3i} - \bar{Y}_3)$, definido em (2.2.21), pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} S_{23} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{y_{2i} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu) + (\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2\} \{y_{3i} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu) + (\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_{2i} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3i} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_{2i} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] [y_{3i} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_{2i} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3i} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] + \frac{1}{n} [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] \sum_{i=1}^n [y_{2i} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] + \\ &\quad \frac{1}{n} [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] \sum_{i=1}^n [y_{3i} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] + [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_{2i} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3i} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] + \frac{1}{n} [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] [n \bar{Y}_2 - n(\alpha_2 + \beta_2 \mu)] + \\ &\quad \frac{1}{n} [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] [n \bar{Y}_3 - n(\alpha_3 + \beta_3 \mu)] + [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_{2i} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3i} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] + [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] [\bar{Y}_2 - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] + \\ &\quad [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] [\bar{Y}_3 - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] + [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_{2i} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3i} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] - [\bar{Y}_2 - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [\bar{Y}_3 - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] - \\ &\quad [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] + [(\alpha_2 + \beta_2 \mu) - \bar{Y}_2] [(\alpha_3 + \beta_3 \mu) - \bar{Y}_3] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_{2i} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3i} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] - [\bar{Y}_2 - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [\bar{Y}_3 - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)]. \end{aligned}$$

Note que $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [y_{2t} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3t} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)]$ é a média das variáveis $[y_{2t} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3t} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)]$, $t = 1, 2, \dots, n$, que, sob o modelo definido em (1.2.1.1) e com as suposições consideradas, são independentes e identicamente distribuídas com $E\{[y_{2t} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3t} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)]\} = \beta_2 \beta_3 \sigma^2$, calculada em (B.24), apêndice B. Então, pelo Teorema de Khintchin temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [y_{2t} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3t} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] \xrightarrow{P} \beta_2 \beta_3 \sigma^2. \quad (2.3.2)$$

Por outro lado, temos que $\bar{Y}_2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{2t}$ é a média das variáveis $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}$, que, sob o modelo definido em (1.2.1.1), são independentes e identicamente distribuídas com $E(y_{2t}) = \alpha_2 + \beta_2 \mu$. Então, do Teorema de Khintchin segue que $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{2t} \xrightarrow{P} \alpha_2 + \beta_2 \mu$, ou seja,

$$\bar{Y}_2 \xrightarrow{P} \alpha_2 + \beta_2 \mu. \quad (2.3.3)$$

Assim,

$$\bar{Y}_2 - (\alpha_2 + \beta_2 \mu) \xrightarrow{P} 0. \quad (2.3.4)$$

De modo similar, obtemos

$$\bar{Y}_3 - (\alpha_3 + \beta_3 \mu) \xrightarrow{P} 0. \quad (2.3.5)$$

De (2.3.4) e de (2.3.5) vem que

$$[\bar{Y}_2 - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [\bar{Y}_3 - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] \xrightarrow{P} 0. \quad (2.3.6)$$

Deste modo, segue de (2.3.2) e de (2.3.6) que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [y_{2t} - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [y_{3t} - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] - [\bar{Y}_2 - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)] [\bar{Y}_3 - (\alpha_3 + \beta_3 \mu)] \xrightarrow{P} \beta_2 \beta_3 \sigma^2,$$

ou seja,

$$S_{23} \xrightarrow{P} \beta_2 \beta_3 \sigma^2. \quad (2.3.7)$$

De modo similar, obtemos

$$S_{13} \xrightarrow{P} \beta_3 \sigma^2 \quad (2.3.8)$$

e

$$S_{12} \xrightarrow{P} \beta_2 \sigma^2. \quad (2.3.9)$$

Assim,

$$\frac{S_{23}}{S_{13}} \xrightarrow{P} \frac{\beta_2 \beta_3 \sigma^2}{\beta_3 \sigma^2} \Rightarrow \frac{S_{23}}{S_{13}} \xrightarrow{P} \beta_2, \text{ ou seja, } \hat{\beta}_2 \xrightarrow{P} \beta_2.$$

De modo similar, obtemos $\hat{\beta}_3 \xrightarrow{P} \beta_3$.

(iii) Segue de (2.3.1), (2.3.3) e (ii) que

$$\bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1 \xrightarrow{P} \alpha_2 + \beta_2 \mu - \beta_2 \mu \Rightarrow \bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1 \xrightarrow{P} \alpha_2.$$

Mas, $\hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1$ de onde se conclui que $\hat{\alpha}_2 \xrightarrow{P} \alpha_2$.

De modo similar, obtemos $\hat{\alpha}_3 \xrightarrow{P} \alpha_3$.

(iv) De (2.3.7), (2.3.8) e (2.3.9) segue que $\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \xrightarrow{P} \frac{\beta_2\sigma^2\beta_3\sigma^2}{\beta_2\beta_3\sigma^2}$, ou seja, $\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \xrightarrow{P} \sigma^2$. De

(2.2.22) temos que $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}$, de onde vem que $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.

(v) Primeiramente, observe que $S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{2t} - \bar{Y}_2)^2$, definido em (2.2.17), pode ser escrito

como $S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{2t}^2 - \bar{Y}_2^2$. Note também que $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{2t}^2$ é a média das variáveis y_{2t}^2 ,

$t = 1, 2, \dots, n$, que, sob o modelo definido em (1.2.1.1) e com as mencionadas suposições, são independentes e identicamente distribuídas com $E(y_{2t}^2) = \beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \mu)^2$, calculada em (B.25), apêndice B. Então, pelo Teorema de Khintchin temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{2t}^2 \xrightarrow{P} \beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \mu)^2. \quad (2.3.10)$$

De (2.3.3) temos que $\bar{Y}_2 \xrightarrow{P} \alpha_2 + \beta_2 \mu$, de onde segue que

$$\bar{Y}_2^2 \xrightarrow{P} (\alpha_2 + \beta_2 \mu)^2, \quad (2.3.11)$$

desde que $g(x) = x^2$ é uma função contínua. Assim, de (2.3.10) e (2.3.11) vem que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{2t}^2 - \bar{Y}_2^2 \xrightarrow{P} \beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 + (\alpha_2 + \beta_2 \mu)^2 - (\alpha_2 + \beta_2 \mu)^2,$$

de modo que,

$$S_2^2 \xrightarrow{P} \beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2. \quad (2.3.12)$$

Por outro lado, segue de (ii) que

$$\hat{\beta}_2^2 \xrightarrow{P} \beta_2^2, \quad (2.3.13)$$

desde que $g(x) = x^2$ é uma função contínua. De (2.3.12), (2.3.13) e de (iv), obtemos

$$S_2^2 - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2 - \beta_2^2 \sigma^2 \Rightarrow S_2^2 - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma_2^2,$$

ou seja, $\hat{\sigma}_2^2 \xrightarrow{P} \sigma_2^2$.

De modo similar, concluímos que $\hat{\sigma}_1^2 \xrightarrow{P} \sigma_1^2$ e $\hat{\sigma}_3^2 \xrightarrow{P} \sigma_3^2$.

2.4 Aproximações para as esperanças dos estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção calculamos esperanças aproximadas em amostras grandes, dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros σ^2 , α_2 , α_3 , β_2 , β_3 , σ_1^2 , σ_2^2 e σ_3^2 do modelo definido em (1.2.1.1) e também a esperança exata do EMV do parâmetro μ . Para estes cálculos utilizamos alguns resultados apresentados no apêndice B.

A partir destas aproximações, determinamos expressões aproximadas do vício de primeira ordem dos estimadores de máxima verossimilhança que derivamos e assim, construímos estimadores corrigidos para os parâmetros do modelo.

Esperança exata do EMV de μ

Segue de (2.2.9) e (B.14) que $E(\hat{\mu}) = \mu$, ou seja, $\hat{\mu}$ é não viciado para μ .

Esperança aproximada para o EMV de σ^2

De (2.2.22) segue que $E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right)$. Pelo Teorema A.3, veja apêndice A, temos até termos

de segunda ordem que

$$E(\hat{\sigma}^2) = g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} + \frac{1}{2} \{ [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{12}) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{13}) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{23}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12} \partial S_{13}] |_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12} \partial S_{23}] |_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{23}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13} \partial S_{23}] |_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, S_{23}) \}, \quad (2.4.1)$$

com $g(\mathbf{m}) = \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}$, $\mathbf{m} = (S_{12}, S_{13}, S_{23})'$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, onde de (B.23) vem que

$$E(S_{12}, S_{13}, S_{23})' = \left(\frac{n-1}{n} \beta_2 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2 \right)'.$$

Assim,

$$g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} = \left(\frac{n-1}{n} \right) \sigma^2, \quad (2.4.2)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12}^2] |_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (2.4.3)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{13}^2]_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (2.4.4)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{23}^2]_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{2S_{12}S_{13}}{S_{23}^3} \right]_{E(\mathbf{m})} = \frac{2}{\binom{n-1}{n} \beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2}, \quad (2.4.5)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{12} \partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{1}{S_{23}} \right]_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{\binom{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2}, \quad (2.4.6)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{12} \partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{S_{13}}{S_{23}^2} \right]_{E(\mathbf{m})} = -\frac{1}{\binom{n-1}{n} \beta_2^2 \beta_3 \sigma^2} \quad (2.4.7)$$

e

$$[\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{13} \partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{S_{12}}{S_{23}^2} \right]_{E(\mathbf{m})} = -\frac{1}{\binom{n-1}{n} \beta_2 \beta_3^2 \sigma^2}. \quad (2.4.8)$$

Por outro lado, segue de (B.7) que

$$\text{Cov}(S_{12}, S_{13}) = \frac{1}{n} (2 \beta_2 \beta_3 \sigma^4 + \beta_2 \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2), \quad (2.4.9)$$

$$\text{Cov}(S_{12}, S_{23}) = \frac{1}{n} (2 \beta_2^2 \beta_3 \sigma^4 + \beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2) \quad (2.4.10)$$

e

$$\text{Cov}(S_{13}, S_{23}) = \frac{1}{n} (2 \beta_3^2 \beta_2 \sigma^4 + \beta_2 \sigma_3^2 \sigma^2). \quad (2.4.11)$$

De (B.10) segue que

$$\text{Var}(S_{12}) = \frac{1}{n} [2 \beta_2^2 \sigma^4 + (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2], \quad (2.4.12)$$

$$\text{Var}(S_{13}) = \frac{1}{n} [2 \beta_3^2 \sigma^4 + (\sigma_3^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2) \sigma^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2] \quad (2.4.13)$$

e

$$\text{Var}(S_{23}) = \frac{1}{n} [2 \beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^4 + (\beta_2^2 \sigma_3^2 + \beta_3^2 \sigma_2^2) \sigma^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2]. \quad (2.4.14)$$

Substituindo (2.4.2) a (2.4.14) na expressão (2.4.1), obtemos, após algumas simplificações, que

$$E(\hat{\sigma}^2) = \left(\frac{n-1}{n} \right) \sigma^2 - \left(\frac{1}{n-1} \right) \left(-\sigma_1^2 - \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2} \right), \quad (2.4.15)$$

ou então,

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 - \left(\frac{1}{n-1} \right) \left(-\sigma_1^2 - \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2} \right).$$

Como

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \quad (2.4.16)$$

e $\frac{1}{n(n-1)}$ é de segunda ordem, segue que $\left(\frac{1}{n(n-1)}\right) \left(-\sigma_1^2 - \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2}\right)$ é de segunda ordem.

Logo, até termos de primeira ordem, temos que

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 - \left(\frac{1}{n}\right) \left(-\sigma_1^2 - \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2}\right) = \sigma^2 - \left(\frac{1}{n}\right) \left(\sigma^2 - \sigma_1^2 - \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2}\right).$$

Observe que, como mencionado no início desta seção, o estimador

$$\tilde{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2 + \left(\frac{1}{n}\right) \left(\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}_1^2 - \frac{\hat{\sigma}_2^2 \hat{\sigma}_3^2}{\hat{\beta}_2^2 \hat{\beta}_3^2 \hat{\sigma}^2}\right) \text{ é um estimador corrigido para } \sigma^2.$$

Esperança aproximada para o EMV de α_2

Segue de (2.2.11) que $E(\hat{\alpha}_2) = E(\bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1)$, onde de (2.2.23) temos que $\hat{\beta}_2 = \frac{S_{23}}{S_{13}}$. Assim,

$E(\hat{\alpha}_2) = E(\bar{Y}_2 - \frac{S_{23}}{S_{13}} \bar{Y}_1)$. Pelo Teorema A.3, temos, até termos de segunda ordem, que

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}_2) = & g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} + \frac{1}{2} \{ [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_2^2]_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(\bar{Y}_2) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2]_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{23}) + \\ & \{ [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2]_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{13}) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_1^2]_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(\bar{Y}_1) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_2 \partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(\bar{Y}_2, S_{23}) \\ & + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_2 \partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(\bar{Y}_2, S_{13}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_2 \partial \bar{Y}_1]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(\bar{Y}_2, \bar{Y}_1) + 2 \\ & [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{13}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial \bar{Y}_1]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, \bar{Y}_1) + 2 \\ & [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13} \partial \bar{Y}_1]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, \bar{Y}_1) \}, \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

com $\mathbf{m} = (\bar{Y}_2, S_{23}, S_{13}, \bar{Y}_1)'$, $g(\mathbf{m}) = \bar{Y}_2 - \frac{S_{23}}{S_{13}} \bar{Y}_1$ e $E(\mathbf{m}) = E(\bar{Y}_2, S_{23}, S_{13}, \bar{Y}_1)'$, onde de (B.14) e

(B.23) segue que $E(\bar{Y}_2, S_{23}, S_{13}, \bar{Y}_1)' = (\alpha_2 + \beta_2 \mu, \frac{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2, \mu)'$.

Pela independência entre $\bar{Y}_i$ e S_{kj} , $i, k, j = 1, 2, 3$, temos que

$$\text{Cov}(\bar{Y}_2, S_{23}) = 0, \text{Cov}(\bar{Y}_2, S_{13}) = 0, \text{Cov}(S_{23}, \bar{Y}_1) = 0 \text{ e } \text{Cov}(S_{13}, \bar{Y}_1) = 0.$$

Portanto, (2.4.17) se reduz a

$$E(\hat{\alpha}_2) = g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} + \frac{1}{2} \{ [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_2^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(\bar{Y}_2) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{23}) + \\ \{ [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{13}) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_1^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(\bar{Y}_1) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_2 \partial \bar{Y}_1] |_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(\bar{Y}_2, \bar{Y}_1) \\ + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial S_{13}] |_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{13}) \}, \quad (2.4.18)$$

com

$$g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} = \alpha_2, \quad (2.4.19)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_2^2] |_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (2.4.20)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2] |_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (2.4.21)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2] |_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{2S_{23}\bar{Y}_1}{S_{13}^3} \right] |_{E(\mathbf{m})} = -\frac{2\beta_2\mu}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \beta_3^2 \sigma^4}, \quad (2.4.22)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_1^2] |_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (2.4.23)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial \bar{Y}_2 \partial \bar{Y}_1] |_{E(\mathbf{m})} = 0 \quad (2.4.24)$$

e

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial S_{13}] |_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{\bar{Y}_1}{S_{13}^2} \right] |_{E(\mathbf{m})} = \frac{\mu}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \beta_3^2 \sigma^4}. \quad (2.4.25)$$

Substituindo (2.4.11), (2.4.13) e (2.4.19) a (2.4.25) em (2.4.18), obtemos, após algumas simplificações, que

$$E(\hat{\alpha}_2) = \alpha_2 - \frac{n}{(n-1)^2} \left(\frac{\beta_2 \mu \sigma_1^2}{\sigma^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2 \beta_3^2} \right).$$

Como

$$\frac{n}{(n-1)^2} = \frac{1}{n} + \frac{n}{(n-1)^2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - (n-1)^2}{n(n-1)^2} = \frac{1}{n} + \frac{2n-1}{n(n-1)^2} \quad (2.4.26)$$

e $\frac{2n-1}{n(n-1)^2}$ é de segunda ordem, segue que $\frac{2n-1}{n(n-1)^2} \left[\left(\frac{\beta_2 \mu \sigma_1^2}{\sigma^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2 \beta_3^2} \right) \right]$ é de segunda ordem.

Logo, até termos de primeira ordem, temos que

$$E(\hat{\alpha}_2) = \alpha_2 - \frac{1}{n} \left(\frac{\beta_2 \mu \sigma_1^2}{\sigma^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2 \beta_3^2} \right).$$

De modo similar, até termos de primeira ordem, obtemos

$$E(\hat{\alpha}_3) = \alpha_3 - \frac{1}{n} \left(\frac{\beta_3 \mu \sigma_1^2}{\sigma^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2 \beta_2^2} \right).$$

Neste caso, os estimadores corrigidos para α_2 e α_3 são, respectivamente

$$\tilde{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_2 + \frac{1}{n} \left(\frac{\hat{\beta}_2 \hat{\mu} \hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}^2} \right) \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_3^2}{\hat{\sigma}^2 \hat{\beta}_3^2} \right) \text{ e } \tilde{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_3 + \frac{1}{n} \left(\frac{\hat{\beta}_3 \hat{\mu} \hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}^2} \right) \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}^2 \hat{\beta}_2^2} \right).$$

Esperança aproximada para o EMV de β_2

De (2.2.23) segue que $E(\hat{\beta}_2) = E\left(\frac{S_{23}}{S_{13}}\right)$. Utilizando o Teorema A.3, temos, até termos de segunda

ordem, que

$$E(\hat{\beta}_2) = g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} + \frac{1}{2} \{ [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{23}) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{13}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial S_{13}] |_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{13}) \}, \quad (2.4.27)$$

com $\mathbf{m} = (S_{23}, S_{13})'$, $g(\mathbf{m}) = \frac{S_{23}}{S_{13}}$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{23}, S_{13})'$, onde de (B.23) vem que

$$E(\mathbf{m}) = E(S_{23}, S_{13})' = \left(\frac{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2 \right)'.$$

Assim,

$$g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} = \beta_2, \quad (2.4.28)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2] |_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (2.4.29)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2] |_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{2S_{23}}{S_{13}^3} \right] |_{E(\mathbf{m})} = \frac{2\beta_2}{\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \beta_3^2 \sigma^4} \quad (2.4.30)$$

e

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial S_{13}] |_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{1}{S_{13}^2} \right] = -\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \beta_3^2 \sigma^4}. \quad (2.4.31)$$

Substituindo (2.4.11), (2.4.13) e (2.4.28) a (2.4.31) em (2.4.27), obtemos, após algumas manipulações algébricas, que

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 - \frac{n}{(n-1)^2} \left(\frac{\beta_2 \sigma_1^2}{\sigma^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2 \beta_3^2} \right). \quad (2.4.32)$$

Como em (2.4.26), (2.4.32) pode ser escrita, até termos de primeira ordem, da seguinte maneira

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 - \frac{1}{n} \left(\frac{\beta_2 \sigma_1^2}{\sigma^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2 \beta_3^2} \right).$$

De modo similar, até termos de primeira ordem, obtemos

$$E(\hat{\beta}_3) = \beta_3 - \frac{1}{n} \left(\frac{\beta_3 \sigma_1^2}{\sigma^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2 \beta_2^2} \right).$$

Assim, os estimadores corrigidos de β_2 e β_3 são dados por

$$\tilde{\beta}_2 = \hat{\beta}_2 + \frac{1}{n} \left(\frac{\hat{\beta}_2 \hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}^2} \right) \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_3^2}{\hat{\sigma}^2 \hat{\beta}_3^2} \right) \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}_3 = \hat{\beta}_3 + \frac{1}{n} \left(\frac{\hat{\beta}_3 \hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}^2} \right) \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}^2 \hat{\beta}_2^2} \right).$$

Esperança aproximada do EMV de σ_1^2

De (2.2.14) vem que $E(\hat{\sigma}_1^2) = E(S_1^2 - \hat{\sigma}^2) = E(S_1^2) - E(\hat{\sigma}^2)$, onde de (2.4.15) temos, até termos de segunda ordem, que

$$E(\hat{\sigma}^2) = \left(\frac{n-1}{n} \right) \sigma^2 + \frac{1}{n-1} \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2} \right),$$

e de (B.19) temos $E(S_1^2) = \frac{n-1}{n} (\sigma^2 + \sigma_1^2)$. Assim, temos até termos de segunda ordem, que

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_1^2) &= \frac{n-1}{n} (\sigma^2 + \sigma_1^2) - \left(\frac{n-1}{n} \right) \sigma^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2} \right) \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma_1^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2} \right) \\ &= \sigma_1^2 - \frac{1}{n} \sigma_1^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

Como em (2.4.16), (2.4.33) pode ser escrita, até termos de primeira ordem, da seguinte maneira

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma_1^2 - \frac{1}{n} \sigma_1^2 - \frac{1}{n} \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2} \right),$$

ou então,

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma_1^2 - \frac{1}{n} \left(2\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2} \right).$$

Assim, o estimador corrigido de σ_1^2 é dado por

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_1^2 + \frac{1}{n} \left(2\hat{\sigma}_1^2 + \frac{\hat{\sigma}_2^2 \hat{\sigma}_3^2}{\hat{\beta}_2^2 \hat{\beta}_3^2 \hat{\sigma}^2} \right).$$

Esperança aproximada do EMV de σ_2^2

De (2.2.16) temos que $E(\hat{\sigma}_2^2) = E(S_2^2 - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2)$, onde de (2.2.22) e (2.2.23) temos que

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{12} S_{13}}{S_{23}} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_2 = \frac{S_{23}}{S_{13}}. \quad \text{Assim,}$$

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = E(S_2^2 - \frac{S_{23}S_{12}}{S_{13}}) = E(S_2^2) - E(\frac{S_{23}S_{12}}{S_{13}}).$$

Mas, de (B.29) segue que $E(S_2^2) = \frac{n-1}{n} (\beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2)$. Logo

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{n-1}{n} (\beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2) - E(\frac{S_{23}S_{12}}{S_{13}}). \quad (2.4.34)$$

Utilizando o Teorema A.3, temos até termos de segunda ordem que

$$\begin{aligned} E(\frac{S_{23}S_{12}}{S_{13}}) &= g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} + \frac{1}{2} \{ [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{23}) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{12}) + \\ &[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2] |_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{13}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial S_{12}] |_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{12}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial S_{13}] |_{E(\mathbf{m})} \\ &\text{Cov}(S_{23}, S_{13}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12} \partial S_{13}] |_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) \}, \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

com $\mathbf{m} = (S_{23}, S_{12}, S_{13})'$, $g(\mathbf{m}) = \frac{S_{23}S_{12}}{S_{13}}$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{23}, S_{12}, S_{13})'$, onde de (B.23) segue que

$$E(\mathbf{m}) = (\frac{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_2 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2)'.$$

Assim,

$$g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} = \left(\frac{n-1}{n} \right) \beta_3^2 \sigma^2, \quad (2.4.36)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2] |_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (2.4.37)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12}^2] |_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (2.4.38)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2] |_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{2S_{23}S_{12}}{S_{13}^3} \right] |_{E(\mathbf{m})} = \frac{2\beta_2^2}{\left(\frac{n-1}{n} \right) \beta_3^2 \sigma^2}, \quad (2.4.39)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial S_{12}] |_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{1}{S_{13}} \right] |_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n} \right) \beta_3 \sigma^2}, \quad (2.4.40)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23} \partial S_{13}] |_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{S_{12}}{S_{13}^2} \right] |_{E(\mathbf{m})} = -\frac{\beta_2}{\left(\frac{n-1}{n} \right) \beta_3^2 \sigma^2} \quad (2.4.41)$$

e

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12} \partial S_{13}] |_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{S_{23}}{S_{13}^2} \right] |_{E(\mathbf{m})} = -\frac{\beta_2}{\left(\frac{n-1}{n} \right) \beta_3 \sigma^2}. \quad (2.4.42)$$

Substituindo (2.4.9) a (2.4.11), (2.4.13) e (2.4.36) a (2.4.42) em (2.4.35), obtemos, após algumas simplificações,

$$E\left(\frac{S_{23}S_{12}}{S_{13}}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\beta_2^2\sigma^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sigma_2^2 + \frac{\beta_2^2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\beta_3^2\sigma^2}\right). \quad (2.4.43)$$

Finalmente, substituindo (2.4.43) em (2.4.34), obtemos

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_2^2) &= \frac{n-1}{n}(\beta_2^2\sigma^2 + \sigma_2^2) - \left(\frac{n-1}{n}\right)\beta_2^2\sigma^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sigma_2^2 + \frac{\beta_2^2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\beta_3^2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{n-1}{n}\sigma_2^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sigma_2^2 + \frac{\beta_2^2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\beta_3^2\sigma^2}\right) \\ &= \sigma_2^2 - \frac{1}{n}\sigma_2^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sigma_2^2 + \frac{\beta_2^2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\beta_3^2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

Como em (2.4.16), (2.4.44) pode ser escrita, até termos de primeira ordem, da seguinte maneira

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \sigma_2^2 - \frac{1}{n}\sigma_2^2 - \frac{1}{n}\left(\sigma_2^2 + \frac{\beta_2^2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\beta_3^2\sigma^2}\right),$$

ou então,

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \sigma_2^2 - \frac{1}{n}\left(2\sigma_2^2 + \frac{\beta_2^2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\beta_3^2\sigma^2}\right).$$

De modo similar, obtemos, até termos de primeira ordem,

$$E(\hat{\sigma}_3^2) = \sigma_3^2 - \frac{1}{n}\left(2\sigma_3^2 + \frac{\beta_3^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\beta_2^2\sigma^2}\right).$$

Assim, os estimadores corrigidos de σ_2^2 e σ_3^2 são, respectivamente dados por

$$\tilde{\sigma}_2^2 = \hat{\sigma}_2^2 + \frac{1}{n}\left(2\hat{\sigma}_2^2 + \frac{\hat{\beta}_2^2\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_3^2}{\hat{\beta}_3^2\hat{\sigma}^2}\right)$$

e

$$\tilde{\sigma}_3^2 = \hat{\sigma}_3^2 + \frac{1}{n}\left(2\hat{\sigma}_3^2 + \frac{\hat{\beta}_3^2\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\beta}_2^2\hat{\sigma}^2}\right).$$

Resumindo os resultados acima, temos $E(\hat{\mu}) = \mu$ e, até termos de primeira ordem,

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 - \frac{1}{n}\left(\sigma^2 - \sigma_1^2 - \frac{\sigma_2^2\sigma_3^2}{\beta_2^2\beta_3^2\sigma^2}\right),$$

$$E(\hat{\alpha}_2) = \alpha_2 - \frac{1}{n}\left(\frac{\beta_2\mu\sigma_1^2}{\sigma^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2\beta_3^2}\right), \quad E(\hat{\alpha}_3) = \alpha_3 - \frac{1}{n}\left(\frac{\beta_3\mu\sigma_1^2}{\sigma^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2\beta_2^2}\right),$$

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 - \frac{1}{n}\left(\frac{\beta_2\sigma_1^2}{\sigma^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\sigma^2\beta_3^2}\right), \quad E(\hat{\beta}_3) = \beta_3 - \frac{1}{n}\left(\frac{\beta_3\sigma_1^2}{\sigma^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2\beta_2^2}\right),$$

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma_1^2 - \frac{1}{n} \left(2\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2 \sigma^2} \right).$$

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \sigma_2^2 - \frac{1}{n} \left(2\sigma_2^2 + \frac{\beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2} \right)$$

e

$$E(\hat{\sigma}_3^2) = \sigma_3^2 - \frac{1}{n} \left(2\sigma_3^2 + \frac{\beta_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\beta_2^2 \sigma^2} \right).$$

2.5 Aproximações para as variâncias dos estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção calculamos variâncias aproximadas em amostras grandes, dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros σ^2 , α_2 , α_3 , β_2 , β_3 , σ_1^2 , σ_2^2 e σ_3^2 do modelo definido em (1.2.1.1) e a variância exata do EMV do parâmetro μ . Para estes cálculos utilizamos alguns resultados apresentados no apêndice B.

A partir destas aproximações, construímos, na seção 2.6, testes aproximados para os parâmetros de interesse.

Variância exata do EMV de μ

De (2.2.9) segue que $\text{Var}(\hat{\mu}) = \text{Var}(\bar{Y}_1)$. De (B.16) segue que $\text{Var}(\bar{Y}_1) = \frac{1}{n} (\sigma^2 + \sigma_1^2)$. Assim,

$$\text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} (\sigma^2 + \sigma_1^2).$$

Variância aproximada para o EMV de σ^2

De (2.2.22) vem que $\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = \text{Var} \left(\frac{S_{12} S_{13}}{S_{23}} \right)$. Pelo Teorema A.4, veja apêndice A, temos até termos de primeira ordem que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\sigma}^2) = & \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{12}) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{13}) + \\ & \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) + 2 \\ & [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \\ & \text{Cov}(S_{13}, S_{23}), \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

com $\mathbf{m} = (S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, $g(\mathbf{m}) = \frac{S_{12} S_{13}}{S_{23}}$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, onde segue de (B.23) que

$$E(S_{12}, S_{13}, S_{23})' = \left(\frac{n-1}{n} \beta_2 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2 \right)'$$

Assim,

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{S_{13}}{S_{23}} \right]|_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{\beta_2}, \quad (2.5.2)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{S_{12}}{S_{23}} \right]|_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{\beta_3} \quad (2.5.3)$$

e

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}^2} \right]|_{E(\mathbf{m})} = -\frac{1}{\beta_2\beta_3}. \quad (2.5.4)$$

Substituindo (2.5.2) a (2.5.4) e (2.4.9) a (2.4.14) em (2.5.1), obtemos, após algumas manipulações algébricas, até termos de primeira ordem, que

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{\Delta}{n} + \frac{2\sigma^2}{n} (2\sigma_1^2 + \sigma^2), \text{ onde } \Delta = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\sigma_1^2\sigma_3^2}{\beta_3^2} + \frac{\sigma_2^2\sigma_3^2}{\beta_2^2\beta_3^2}.$$

Variância aproximada para o EMV de α_2

De (2.2.11) segue que $\text{Var}(\hat{\alpha}_2) = \text{Var}(\bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1)$, onde de (2.2.23) temos que $\hat{\beta}_2 = \frac{S_{23}}{S_{13}}$.

Assim, $\text{Var}(\hat{\alpha}_2) = \text{Var}(\bar{Y}_2 - \frac{S_{23}}{S_{13}} \bar{Y}_1)$. Pelo Teorema A.4, temos, até termos de primeira ordem, que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\alpha}_2) &= \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_2]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(\bar{Y}_2) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{23}) + \\ &\{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{13}) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_1]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(\bar{Y}_1) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_2]|_{E(\mathbf{m})} \\ &[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(\bar{Y}_2, S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_2]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(\bar{Y}_2, S_{13}) + 2 \\ &[\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_2]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_1]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(\bar{Y}_2, \bar{Y}_1) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &\text{Cov}(S_{23}, S_{13}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_1]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, \bar{Y}_1) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &[\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_1]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, \bar{Y}_1), \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

com $\mathbf{m} = (\bar{Y}_2, S_{23}, S_{13}, \bar{Y}_1)'$, $g(\mathbf{m}) = \bar{Y}_2 - \frac{S_{23}}{S_{13}} \bar{Y}_1$ e $E(\mathbf{m}) = E(\bar{Y}_2, S_{23}, S_{13}, \bar{Y}_1)'$, onde de (B.14) e

(B.23) segue que $E(\bar{Y}_2, S_{23}, S_{13}, \bar{Y}_1)' = (\alpha_2 + \beta_2 \mu, \frac{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2, \mu)'$.

Pela independência entre $\bar{Y}_i$ e S_{kj} , $i, k, j = 1, 2, 3$, temos que

$$\text{Cov}(\bar{Y}_2, S_{23}) = 0, \text{Cov}(\bar{Y}_2, S_{13}) = 0, \text{Cov}(S_{23}, \bar{Y}_1) = 0 \text{ e } \text{Cov}(S_{13}, \bar{Y}_1) = 0.$$

Logo, (2.5.5) se reduz a

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\alpha}_2) &= \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_2]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(\bar{Y}_2) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{23}) + \\ &\{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{13}) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_1]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(\bar{Y}_1) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_2]|_{E(\mathbf{m})} \\ &[\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_1]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(\bar{Y}_2, \bar{Y}_1) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{13}), \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

com

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_2]_{E(\mathbf{m})} = 1, \quad (2.5.7)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{\bar{Y}_1}{S_{13}}]_{E(\mathbf{m})} = -\frac{\mu}{\frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2}, \quad (2.5.8)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} = [\frac{S_{23} \bar{Y}_1}{S_{13}^2}]_{E(\mathbf{m})} = \frac{\beta_2 \mu}{\frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2} \quad (2.5.9)$$

e

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial \bar{Y}_1]_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{S_{23}}{S_{13}}]_{E(\mathbf{m})} = -\beta_2. \quad (2.5.10)$$

De (B.16) segue que

$$\text{Var}(\bar{Y}_1) = \frac{1}{n} (\sigma^2 + \sigma_1^2), \quad (2.5.11)$$

$$\text{Var}(\bar{Y}_2) = \frac{1}{n} (\beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2) \quad (2.5.12)$$

e de (B.15) segue que

$$\text{Cov}(\bar{Y}_2, \bar{Y}_1) = \frac{1}{n} (\beta_2 \sigma^2). \quad (2.5.13)$$

Substituindo (2.4.11), (2.4.13), (2.4.14) e (2.5.7) a (2.5.13) em (2.5.6), obtemos, após algumas manipulações algébricas, que

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_2) = \frac{1}{n} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) + \frac{n}{(n-1)^2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2} + \frac{\beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2}). \quad (2.5.14)$$

Podemos reescrever (2.5.14) como

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_2) = \frac{1}{n} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) + \frac{n}{(n-1)^2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) (1 + \frac{\sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2}). \quad (2.5.15)$$

Como em (2.4.26), (2.5.15) pode ser escrita, até termos de primeira ordem, da seguinte maneira

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_2) = \frac{1}{n} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) + \frac{1}{n} \frac{\mu^2}{\sigma^2} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) (1 + \frac{\sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2}),$$

ou seja,

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_2) = \frac{1}{n} \{ \sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) (1 + \frac{\sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2}) \}.$$

De modo similar, obtemos, até termos de primeira ordem, que

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_3) = \frac{1}{n} \{ \sigma_3^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} (\sigma_3^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2) (1 + \frac{\sigma_2^2}{\beta_2^2 \sigma^2}) \}.$$

Variância aproximada para o EMV de β_2

De (2.2.23) temos que $\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \text{Var}\left(\frac{S_{23}}{S_{13}}\right)$. Utilizando o Teorema A.4, temos, até termos de primeira ordem, que

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{23}) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{13}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{13}), \quad (2.5.16)$$

com $\mathbf{m} = (S_{23}, S_{13})'$, $g(\mathbf{m}) = \frac{S_{23}}{S_{13}}$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{23}, S_{13})'$, onde de (B.23) segue que

$$E(S_{23}, S_{13})' = \left(\frac{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2\right)'.$$

Logo,

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{1}{S_{13}}\right]|_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right) \beta_3 \sigma^2} \quad (2.5.17)$$

e

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{S_{23}}{S_{13}^2}\right]|_{E(\mathbf{m})} = -\frac{\beta_2}{\left(\frac{n-1}{n}\right) \beta_3 \sigma^2}. \quad (2.5.18)$$

Substituindo (2.4.11), (2.4.13), (2.4.14), (2.5.17) e (2.5.18) em (2.5.16), obtemos, após algumas manipulações algébricas, que

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{n}{(n-1)^2} \frac{1}{\sigma^2} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2} + \frac{\beta_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2}). \quad (2.5.19)$$

Podemos reescrever (2.5.19) como

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{n}{(n-1)^2} \frac{1}{\sigma^2} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) \left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2}\right). \quad (2.5.20)$$

Como em (2.4.26), (2.5.20) pode ser escrita, até termos de primeira ordem, da seguinte maneira

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{n\sigma^2} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) \left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2}\right).$$

De modo similar, até termos de primeira ordem, obtemos

$$\text{Var}(\hat{\beta}_3) = \frac{1}{n\sigma^2} (\sigma_3^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2) \left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\beta_2^2 \sigma^2}\right).$$

Variância aproximada para o EMV de σ_1^2

De (2.2.14) temos que $\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = \text{Var}(S_1^2 - \hat{\sigma}^2)$, onde de (2.2.22) temos que $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}$. Assim,

$\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = \text{Var}(S_1^2 - \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})$. Segue do Teorema A.4, até termos de primeira ordem, que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = & \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_1^2) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{12}) + \\ & \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{13}) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]_{E(\mathbf{m})} \\ & [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_1^2, S_{12}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_1^2, S_{13}) + 2 \\ & [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_1^2, S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \\ & \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \\ & [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, S_{23}), \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

com $\mathbf{m} = (S_1^2, S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, $g(\mathbf{m}) = S_1^2 - \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_1^2, S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, onde de (B.23) e

(B.29) segue que

$$E(S_1^2, S_{12}, S_{13}, S_{23})' = (\frac{n-1}{n} (\sigma^2 + \sigma_1^2), \frac{n-1}{n} \beta_2 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2)'$$

Assim,

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]_{E(\mathbf{m})} = 1, \quad (2.5.22)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{S_{13}}{S_{23}}]_{E(\mathbf{m})} = -\frac{1}{\beta_2}, \quad (2.5.23)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{S_{12}}{S_{23}}]_{E(\mathbf{m})} = -\frac{1}{\beta_3} \quad (2.5.24)$$

e

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} = [\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}^2}]_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{\beta_2 \beta_3}. \quad (2.5.25)$$

De (B.8) segue que

$$\text{Cov}(S_1^2, S_{12}) = \frac{2}{n} (\beta_2 \sigma^4 + \beta_2 \sigma_1^2 \sigma^2) \quad (2.5.26)$$

e

$$\text{Cov}(S_1^2, S_{13}) = \frac{2}{n} (\beta_3 \sigma^4 + \beta_3 \sigma_1^2 \sigma^2). \quad (2.5.27)$$

Por outro lado, de (B.9) vem que

$$\text{Cov}(S_1^2, S_{23}) = \frac{2}{n} (\beta_1^2 \beta_2 \beta_3 \sigma^4), \quad (2.5.28)$$

e de (B.11) temos que

$$\text{Var}(S_1^2) = \frac{2}{n} [\sigma^2 + \sigma_1^2]^2. \quad (2.5.29)$$

Substituindo (2.4.9) a (2.4.14) e (2.5.22) a (2.5.29) em (2.5.21), obtemos, após algumas manipulações algébricas, até termos de primeira ordem, que

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{n} (2 \sigma_1^4 + \Delta), \text{ onde } \Delta = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{\beta_3^2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2}.$$

Variância aproximada para o EMV de σ_2^2

De (2.2.16) segue que $\text{Var}(\hat{\sigma}_2^2) = \text{Var}(S_2^2 - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}^2)$, onde de (2.2.22) e (2.2.23) temos $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{12} S_{13}}{S_{23}}$

e $\hat{\beta}_2 = \frac{S_{23}}{S_{13}}$. Assim, $\text{Var}(\hat{\sigma}_2^2) = \text{Var}(S_2^2 - \frac{S_{23} S_{12}}{S_{13}})$.

Segue do Teorema A.4, até termos de primeira ordem, que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\sigma}_2^2) = & \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_2^2]_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_2^2) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{23}) + \\ & \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{12}) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{13}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_2^2]_{E(\mathbf{m})} \\ & [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_2^2, S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_2^2]_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_2^2, S_{12}) + 2 \\ & [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_2^2]_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_2^2, S_{13}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} \\ & \text{Cov}(S_{23}, S_{12}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{13}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} \\ & [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}), \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

com $\mathbf{m} = (S_2^2, S_{23}, S_{12}, S_{13})'$, $g(\mathbf{m}) = S_2^2 - \frac{S_{23} S_{12}}{S_{13}}$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_2^2, S_{23}, S_{12}, S_{13})'$, onde de (B.23) e

(B.29) segue que

$$E(S_2^2, S_{23}, S_{12}, S_{13})' = (\frac{n-1}{n} (\beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2), \frac{n-1}{n} \beta_2 \beta_3 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_2 \sigma^2, \frac{n-1}{n} \beta_3 \sigma^2)'$$

Assim,

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_2^2]_{E(\mathbf{m})} = 1, \quad (2.5.31)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{S_{12}}{S_{13}}]_{E(\mathbf{m})} = -\frac{\beta_2}{\beta_3}, \quad (2.5.32)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{S_{23}}{S_{13}}]_{E(\mathbf{m})} = -\beta_2 \quad (2.5.33)$$

e

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} = [\frac{S_{23} S_{12}}{S_{13}^2}]_{E(\mathbf{m})} = \frac{\beta_2^2}{\beta_3}. \quad (2.5.34)$$

Por outro lado, de (B.8) segue que

$$\text{Cov}(S_2^2, S_{23}) = \frac{2}{n} (\beta_2^3 \beta_3 \sigma^4 + \beta_2 \beta_3 \sigma_2^2 \sigma^2), \quad (2.5.35)$$

$$\text{Cov}(S_2^2, S_{12}) = \frac{2}{n} (\beta_2^3 \sigma^4 + \beta_2 \sigma_2^2 \sigma^2), \quad (2.5.36)$$

e de (B.9) segue que

$$\text{Cov}(S_2^2, S_{13}) = \frac{2}{n} (\beta_2^2 \beta_1 \beta_3 \sigma^4). \quad (2.5.37)$$

De (B.11) segue que

$$\text{Var}(S_2^2) = \frac{2}{n} (\beta_2^2 \sigma^2 + \sigma_2^2)^2 \quad (2.5.38)$$

Substituindo (2.4.9) a (2.4.14) e (2.5.31) a (2.5.38) em (2.5.30), obtemos, após algumas manipulações algébricas, até termos de primeira ordem, que

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{n} (2 \sigma_2^4 + \beta_2^4 \Delta), \text{ onde } \Delta = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{\beta_3^2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2}.$$

De maneira similar, até termos de primeira ordem, obtemos

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_3^2) = \frac{1}{n} (2 \sigma_3^4 + \beta_3^4 \Delta), \text{ onde } \Delta = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{\beta_3^2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2}.$$

Resumindo os resultados obtidos acima, temos $\text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} (\sigma^2 + \sigma_1^2)$ e, até termos de primeira ordem,

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{\Delta}{n} + \frac{2\sigma^2}{n} (2 \sigma_1^2 + \sigma^2),$$

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_2) = \frac{1}{n} \left\{ \sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) \left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2} \right) \right\},$$

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_3) = \frac{1}{n} \left\{ \sigma_3^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} (\sigma_3^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2) \left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\beta_2^2 \sigma^2} \right) \right\},$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{n\sigma^2} (\sigma_2^2 + \beta_2^2 \sigma_1^2) \left(1 + \frac{\sigma_3^2}{\beta_3^2 \sigma^2} \right),$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_3) = \frac{1}{n\sigma^2} (\sigma_3^2 + \beta_3^2 \sigma_1^2) \left(1 + \frac{\sigma_2^2}{\beta_2^2 \sigma^2} \right),$$

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{n} (2 \sigma_1^4 + \Delta), \quad \text{Var}(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{n} (2 \sigma_2^4 + \beta_2^4 \Delta)$$

e

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_3^2) = \frac{1}{n} (2 \sigma_3^4 + \beta_3^4 \Delta), \text{ onde } \Delta = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{\beta_3^2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\beta_2^2 \beta_3^2}.$$

2.6 Uma reanálise dos dados de Barnett

O conjunto de dados apresentados por Barnett (1969) resultou de um estudo de comparação do desempenho de dois instrumentos elaborados para medir a capacidade vital do pulmão humano. Um dos instrumentos analisados era de um tipo usado frequentemente nesse tipo de medição, que foi chamado de instrumento padrão, e o outro, que tinha sido recentemente construído, possuía a vantagem de ser transportado com mais facilidade e também ser de fácil operação. Este último, foi chamado de instrumento experimental. Os dois instrumentos foram comparados através de seus desempenhos em um grupo comum de 72 pacientes, quando operados por um operador treinado e outro com pouca afinidade com o instrumento. A combinação “instrumento padrão operado por um operador treinado” foi representada pelo valor $i = 1$; a combinação “instrumento padrão operado por um operador destreinado” foi representada pelo valor $i = 2$; a combinação “instrumento experimental operado por um operador treinado” pelo valor $i = 3$ e a combinação “instrumento experimental operado por um operador destreinado”, pelo valor $i = 4$.

Foram estudados 72 pacientes, que produziram um conjunto de observações y_{ij} da capacidade vital, onde $i = 1, 2, 3, 4$, denota que tipo de combinação instrumento-operador foi utilizada e $j = 1, 2, \dots, 72$, o paciente. Os dados estão apresentados abaixo, na Tabela 1.

Tabela 1: Os dados de Barnett (1969)

Indivíduo j	y_{1j}	y_{2j}	y_{3j}	y_{4j}
1	3450	3530	4030	3720
2	1310	1320	1610	1600
3	3820	3720	4150	3700
4	2110	2880	2740	2520
5	1860	1420	1540	1690
6	1940	1780	2020	1800
7	2360	2260	2430	2350
8	2880	2920	2650	2860
9	1980	1720	1800	1660
10	3120	3180	3250	3040
11	1760	1630	1390	1200
12	1480	1760	1700	1640

Indivíduo j	y_{1j}	y_{2j}	y_{3j}	y_{4j}
13	1840	1660	1400	1650
14	3580	3480	3680	3960
15	1880	2000	2090	2070
16	2400	2320	2550	2480
17	2220	2120	2290	2270
18	2540	2500	2620	1960
19	920	1200	640	1030
20	2240	2160	2300	2300
21	2240	2130	2030	2140
22	2260	2510	2400	2450
23	3860	4180	3980	3680
24	2780	2100	1890	2000

Indivíduo j	y _{1j}	y _{2j}	y _{3j}	y _{4j}
25	2220	1400	1840	1360
26	1880	1820	1900	1840
27	940	960	1060	1000
28	2480	2220	2150	2150
29	1660	1780	1760	1800
30	4040	4180	4000	3770
31	2540	2560	2080	2250
32	1780	1700	1390	1200
33	1280	1300	800	1130
34	1940	2060	2030	1880
35	1760	2000	1860	1860
36	2040	1660	1470	1160
37	1060	1000	850	600
38	2000	1800	1270	1700
39	2280	2280	2380	2350
40	1940	1800	1670	1580
41	2580	2700	2850	2110
42	1400	1440	1680	1480
43	1260	1100	1000	1030
44	2320	2420	2360	2360
45	2000	1940	1980	1980
46	2400	1900	1470	1740
47	2880	2980	3240	3140
48	3420	3150	3200	3200

Indivíduo j	y _{1j}	y _{2j}	y _{3j}	y _{4j}
49	1000	1130	650	840
50	1400	1400	1350	1380
51	1880	1710	1600	1350
52	1280	1260	1160	1330
53	3120	3000	3110	3250
54	3770	3340	3900	3700
55	3420	3220	3120	3290
56	2740	2880	2850	2880
57	2840	2920	2710	2750
58	3800	3740	3440	3400
59	2100	1680	1650	1930
60	1820	1400	1060	1050
61	1400	1320	1350	1100
62	2200	1680	1640	1110
63	1940	1900	1820	1270
64	3260	3200	3250	3270
65	1960	1940	1890	1920
66	1320	1260	1140	1000
67	2840	3060	3650	3510
68	2060	1840	1720	1780
69	2200	1970	1900	2270
70	1260	1150	860	1150
71	3040	2840	2850	2670
72	2140	2180	2560	2720

Para o caso $p > 3$, Barnett (1969) propõe tomar subconjuntos de tamanho três dos valores $i = 1, 2, 3, 4$, de tal forma que o valor $i = 1$ apareça em cada subconjunto. Deste modo, teremos três subconjuntos que estão apresentados a seguir.

(a) o subconjunto formado pelos valores $i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$.

Segundo o modelo definido em (1.2.1.1), os parâmetros para esse subconjunto serão α_2 , α_3 , β_2 , β_3 , μ , σ^2 , σ_1^2 , σ_2^2 e σ_3^2 . Na Tabela 2, apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança e as estimativas dos desvios padrões dos EMV destes parâmetros, obtidas através dos resultados apresentados neste capítulo, seções 2.2 e 2.5.

Tabela 2: Estimativas dos EMV e dos desvios padrões

Parâmetro	Valores obtidos através dos resultados apresentados nesse capítulo		Valores obtidos por Barnett (1969)
	Estimativa	Desvio padrão	Estimativa
α_2	-217,7890848	93,77501	-218
α_3	-486,7889995	129,9557	-487
β_2	1,065612256	0,039711	1,07
β_3	1,173316893	0,055159	1,17
μ	2246,111	90,0841	2246
σ^2	538073,4851	97229,57	538073
σ_1^2	46216,94696	9436,825	46217
σ_2^2	7840,101299	6326,879	7854
σ_3^2	47185,9728	10870,79	47225

Utilizando a normalidade assintótica dos EMV, segue da Tabela 2 que as hipóteses $H_0: \beta_2 = 0$ e $H_0: \beta_3 = 0$ são rejeitadas aos níveis usuais. Também não existe evidência forte contra a hipótese $H_0: \beta_2 = 1.0$, enquanto que a hipótese $H_0: \beta_3 = 1.0$ é rejeitada ao nível de 5%.

(b) o subconjunto formado pelos valores $i = 1$, $i = 2$ e $i = 4$.

Segundo o modelo definido em (1.2.1.1), os parâmetros para esse subconjunto serão α_2 , α_4 , β_2 , β_4 , μ , σ^2 , σ_1^2 , σ_2^2 e σ_4^2 . Na Tabela 3, apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança e as estimativas dos desvios padrões dos EMV destes parâmetros, obtidas através dos resultados apresentados neste capítulo, seções 2.2 e 2.5.

Tabela 3: Estimativas dos EMV e dos desvios padrões

Parâmetro	Valores obtidos através dos resultados apresentados nesse capítulo		Valores apresentados por Barnett (1969)
	Estimativa	Desvio padrão	Estimativa
α_2	-222,1001496	93,92351	-222
α_4	-393,9177753	134,6772	-394
β_2	1,067531603	0,039774	1,07
β_4	1,111316348	0,057225	1,11
μ	2246,111	90,0841	2246
σ^2	537106,0671	97262,34	537106
σ_1^2	47184,36496	10022,28	47184
σ_2^2	6739,591001	7169,143	6776
σ_4^2	58156,16451	12362,38	58176

Utilizando a normalidade assintótica dos EMV, segue da Tabela 3 que a hipótese $H_0: \beta_4 = 0$ é rejeitada aos níveis usuais, enquanto que a hipótese $H_0: \beta_4 = 1.0$ não é rejeitada ao nível de 5%.

(c) o subconjunto formado pelos valores $i = 1$, $i = 3$ e $i = 4$.

Segundo o modelo definido em (1.2.1.1), os parâmetros para esse subconjunto serão α_3 , α_4 , β_3 , β_4 , μ , σ^2 , σ_1^2 , σ_3^2 e σ_4^2 . Na Tabela 4, apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança e as estimativas dos desvios padrões dos EMV destes parâmetros, obtidas através dos resultados apresentados neste capítulo, seções 2.2 e 2.5.

Tabela 4: Estimativas dos EMV e dos desvios padrões

Parâmetro	Valores obtidos através dos resultados apresentados nesse capítulo		Valores apresentados por Barnett (1969)
	Estimativa	Desvio padrão	Estimativa
α_3	-585,5759437	133,3706	-586
α_4	-482,8284991	137,5765	-483
β_3	1,217298219	0,056608	1,21
β_4	1,150900643	0,058457	1,15
μ	2246,111	90,0841	2246
σ^2	518632,7394	96973,82	518633
σ_1^2	65657,69271	12657,6	65657
σ_3^2	19419,21126	9966,496	28607
σ_4^2	34528,50678	10203,71	34529

As Tabelas 2, 3 e 4 apresentam, no total, três estimativas de σ^2 e σ_i^2 e duas estimativas para cada α_i , β_i e σ_i^2 , $i = 1, 2, 3, 4$. Para se ter uma única estimativa dos parâmetros acima, Barnett (1969) sugere tomar a média das estimativas de cada um destes parâmetros. Estes valores estão apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Estimativas dos EMV e dos desvios padrões

Parâmetro	Valores obtidos através dos resultados apresentados nesse capítulo		Valores apresentados por Barnett (1969)	
	Estimativa	Desvio padrão	Estimativa	Desvio padrão
α_2	-219,9446172	93,84926	-220	99
α_3	-536,1824716	131,6632	-538	126
α_4	-438,3731372	136,1268	-439	129
β_2	1,06657193	0,039743	1,07	0,042
β_3	1,195307556	0,055884	1,19	0,054
β_4	1,131108495	0,057841	1,13	0,055
μ	2246,111	90,0841	2246	-
σ^2	531270,7639	97155,24	531271	-
σ_1^2	53019,66821	10705,57	53019	$10,2 \times 10^3$
σ_2^2	7289,84615	6748,011	7315	$6,5 \times 10^3$
σ_3^2	33302,59203	10418,64	37916	$9,7 \times 10^3$
σ_4^2	46342,33565	11283,04	46353	$10,2 \times 10^3$

Capítulo 3

O modelo de análise de fatores

3.1 Introdução

Neste capítulo determinamos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo definido em (1.2.1.10). Mostramos, com detalhes, a consistência destes estimadores e calculamos as esperanças e variâncias assintóticas dos mesmos. Por último, reanalisamos o conjunto de dados apresentado por Barnett (1969).

3.2 Estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção determinamos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo definido em (1.2.1.10). Para isto, utilizamos o Teorema A.1 do apêndice A. Algumas considerações que serão necessárias para a utilização do Teorema A.1 estão apresentadas a seguir.

No capítulo 1, expressão (1.2.1.17), obtemos a densidade conjunta dos vetores $\mathbf{Y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, y_{3j})'$, $j = 1, 2, \dots, n$, dada por $f_{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n | \theta)$.

Observe que para todo $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)'$ pertencente ao suporte da distribuição conjunta dos vetores $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ e todo $\theta \in \Theta$, $f_{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n | \theta)$ poderá ser escrita como

$$f_{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n | \theta) = h(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) \exp \left\{ \sum_{i=1}^9 T_i(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) c_i(\theta) + d(\theta) \right\},$$

onde

$$h(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = (2\pi)^{-n/2},$$

$$d(\theta) = -\frac{n}{2} \log(\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2) -$$

$$\frac{1}{2} n \mu_1^2 |\Sigma|^{-1} (\lambda_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) -$$

$$\frac{1}{2} n \mu_2^2 |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) -$$

$$\frac{1}{2} n \mu_3^2 |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_2^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) -$$

$$n \mu_1 \mu_2 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2) - n \mu_1 \mu_3 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2) - n \mu_2 \mu_3 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2).$$

$$T_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{j=1}^n y_{1j}^2,$$

$$c_1(\theta) = \frac{-1}{2} |\Sigma|^{-1} (\lambda_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2),$$

$$T_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{j=1}^n y_{2j}^2,$$

$$c_2(\theta) = \frac{-1}{2} |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2),$$

$$T_3(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{j=1}^n y_{3j}^2,$$

$$c_3(\theta) = \frac{-1}{2} |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_2^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2),$$

$$T_4(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \bar{Y}_1,$$

$$c_4(\theta) = n \mu_1 |\Sigma|^{-1} (\lambda_2^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2) + n \mu_2 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2) + n \mu_3 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2),$$

$$T_5(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \bar{Y}_2,$$

$$c_5(\theta) = n \mu_2 |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_3^2 + \lambda_3^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) + n \mu_1 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2) + n \mu_3 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2),$$

$$T_6(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \bar{Y}_3,$$

$$c_6(\theta) = n \mu_3 |\Sigma|^{-1} (\lambda_1^2 \sigma_2^2 + \lambda_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) + n \mu_1 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2) + n \mu_2 |\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2),$$

$$T_7(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j},$$

$$c_7(\theta) = -|\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2),$$

$$T_8(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{j=1}^n y_{1j} y_{3j},$$

$$c_8(\theta) = -|\Sigma|^{-1} (-\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2),$$

$$T_9(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) = \sum_{j=1}^n y_{2j} y_{3j}$$

e

$$c_9(\theta) = -|\Sigma|^{-1} (-\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2).$$

A seguir, calculamos as esperanças das estatísticas suficientes $T_i(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$, $i = 1, 2, \dots, 9$.

Temos então:

$$E(T_1(y_1, y_2, \dots, y_n)) = E\left(\sum_{j=1}^n y_{1j}^2\right) = \sum_{j=1}^n E(y_{1j}^2) = \sum_{j=1}^n [\text{Var}(y_{1j}) + E(y_{1j})^2], \quad (3.2.1)$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.10), temos que $\text{Var}(y_{1j}) = \lambda_1^2 + \sigma_1^2$ e $E(y_{1j}) = \mu_1$. Assim, (3.2.1) torna-se

$$E(T_1(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sum_{j=1}^n (\lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \mu_1^2) = n (\lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \mu_1^2). \quad (3.2.2)$$

De modo análogo, obtemos

$$E(T_2(y_1, y_2, \dots, y_n)) = n (\lambda_2^2 + \sigma_2^2 + \mu_1^2)$$

e

$$E(T_3(y_1, y_2, \dots, y_n)) = n (\lambda_3^2 + \sigma_3^2 + \mu_3^2).$$

Por outro lado, temos

$$E(T_4(y_1, y_2, \dots, y_n)) = E(\bar{Y}_1) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{1j}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(y_{1j}), \quad (3.2.3)$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.10), temos que $E(y_{1j}) = \mu_1$. Assim, (3.2.3) torna-se

$$E(T_4(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu_1 = \mu_1. \quad (3.2.4)$$

De modo análogo, obtemos

$$E(T_5(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \mu_2 \quad \text{e} \quad E(T_6(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \mu_3.$$

Concluindo, temos

$$\begin{aligned} E(T_7(y_1, y_2, \dots, y_n)) &= E\left(\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n E(y_{1j} y_{2j}) \\ &= \sum_{j=1}^n [\text{Cov}(y_{1j}, y_{2j}) + E(y_{1j}) E(y_{2j})], \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.10), temos que $\text{Cov}(y_{1j}, y_{2j}) = \lambda_1 \lambda_2$, $E(y_{1j}) = \mu_1$ e $E(y_{2j}) = \mu_2$. Assim, (3.2.5) torna-se

$$E(T_7(y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sum_{j=1}^n (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2) = n (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2). \quad (3.2.6)$$

De modo similar, obtemos

$$E(T_8(y_1, y_2, \dots, y_n)) = n (\lambda_1 \lambda_3 + \mu_1 \mu_3)$$

e

$$E(T_9(y_1, y_2, \dots, y_n)) = n (\lambda_2 \lambda_3 + \mu_2 \mu_3).$$

Seja C o interior do conjunto onde $(c_1(\theta), c_2(\theta), \dots, c_9(\theta))$ está definido, para todo $\theta \in \Theta$. Assim, segue do Teorema A.1 do apêndice A que o estimador de máxima verossimilhança de θ , $\hat{\theta}$, é a solução das equações obtidas quando igualamos cada estatística $T_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, 9$, a sua respectiva esperança, desde que $(c_1(\hat{\theta}(x)), c_2(\hat{\theta}(x)), \dots, c_p(\hat{\theta}(x))) \in C$. Cada uma das equações mencionadas acima está apresentada a seguir.

Equação (1): $\bar{Y}_1 = E(\bar{Y}_1)$

Por (3.2.4), temos que $E(\bar{Y}_1) = \mu_1$. Assim, a **Equação (1)** torna-se

$$\bar{Y}_1 = \hat{\mu}_1. \quad (3.2.7)$$

De modo similar, obtemos

$$\bar{Y}_2 = \hat{\mu}_2 \quad (3.2.8)$$

e

$$\bar{Y}_3 = \hat{\mu}_3.$$

Equação (2): $\sum_{j=1}^n y_{1j}^2 = E(\sum_{j=1}^n y_{1j}^2)$

Por (3.2.2), temos que $E(\sum_{j=1}^n y_{1j}^2) = n(\lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \mu_1^2)$. Assim, a **Equação (2)** torna-se

$$\sum_{j=1}^n y_{1j}^2 = n(\hat{\lambda}_1^2 + \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\mu}_1^2). \quad (3.2.9)$$

Substituindo (3.2.7) em (3.2.9), obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$\hat{\sigma}_1^2 = S_1^2 - \hat{\lambda}_1^2, \quad (3.2.10)$$

$$\text{onde } S_1^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_{1j}^2 - n \bar{Y}_1^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{1j} - \bar{Y}_1)^2. \quad (3.2.11)$$

De modo análogo, obtemos

$$\hat{\sigma}_2^2 = S_2^2 - \hat{\lambda}_2^2, \text{ onde } S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \bar{Y}_2)^2$$

e

$$\hat{\sigma}_3^2 = S_3^2 - \hat{\lambda}_3^2, \text{ onde } S_3^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{3j} - \bar{Y}_3)^2.$$

Equação (3): $\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j} = E(\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j})$

Por (3.2.6), temos que $E(\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j}) = n (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2)$. Assim, a **Equação (3)** torna-se

$$\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j} = n (\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 + \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2). \quad (3.2.12)$$

Substituindo (3.2.7) e (3.2.8) em (3.2.12), obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{S_{12}}{\hat{\lambda}_2},$$

$$\text{onde } S_{12} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n y_{1j} y_{2j} - n \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{1j} - \bar{Y}_1)(y_{2j} - \bar{Y}_2). \quad (3.2.13)$$

De maneira similar, obtemos

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{S_{13}}{\hat{\lambda}_3}, \quad (3.2.14)$$

$$\text{onde } S_{13} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{1j} - \bar{Y}_1)(y_{3j} - \bar{Y}_3)$$

e

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{S_{23}}{\hat{\lambda}_3}, \quad (3.2.15)$$

$$\text{onde } S_{23} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{2j} - \bar{Y}_2)(y_{3j} - \bar{Y}_3).$$

Note que as expressões $\frac{S_{12}}{\hat{\lambda}_2}$ e $\frac{S_{13}}{\hat{\lambda}_3}$ são iguais, desde que ambas são iguais a $\hat{\lambda}_1$. Assim,

igualando-as, obtemos $\frac{S_{12}}{\hat{\lambda}_2} = \frac{S_{13}}{\hat{\lambda}_3}$, o que implica em

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{S_{12}}{S_{13}} \hat{\lambda}_3. \quad (3.2.16)$$

Agora, igualando as expressões (3.2.15) e (3.2.16), obtemos a equação

$$\frac{S_{23}}{\hat{\lambda}_3} = \frac{S_{12}}{S_{13}} \hat{\lambda}_3. \quad (3.2.17)$$

Se $\frac{S_{23}S_{13}}{S_{12}} > 0$ então a equação (3.2.17) tem solução dada por

$$\hat{\lambda}_3 = \sqrt{\frac{S_{23}S_{13}}{S_{12}}}, \quad (3.2.18)$$

e substituindo (3.2.18) em (3.2.14) e em (3.2.15), obtemos, respectivamente

$$\hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}} \quad (3.2.19)$$

e

$$\hat{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{S_{12}S_{23}}{S_{13}}}. \quad (3.2.20)$$

Observe que o estimador $\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i$, $i = 1, 2, 3$, sempre será estimador de máxima verossimilhança do parâmetro μ_i , $i = 1, 2, 3$, enquanto que os estimadores $\hat{\sigma}_i^2 = S_i^2 - \hat{\lambda}_i^2$, $i = 1, 2, 3$, $\hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}}$, $\hat{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{S_{12}S_{23}}{S_{13}}}$ e $\hat{\lambda}_3 = \sqrt{\frac{S_{23}S_{13}}{S_{12}}}$ só serão estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros σ_i^2 e λ_i , $i = 1, 2, 3$, se suas estimativas pertencerem ao respectivo espaço paramétrico.

Resumindo os resultados acima, temos que:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i &= \bar{Y}_i, i = 1, 2, 3, & \hat{\sigma}_i^2 &= S_i^2 - \hat{\lambda}_i^2, i = 1, 2, 3, \\ \hat{\lambda}_1 &= \sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}}, & \hat{\lambda}_2 &= \sqrt{\frac{S_{12}S_{23}}{S_{13}}} \end{aligned}$$

e

$$\hat{\lambda}_3 = \sqrt{\frac{S_{23}S_{13}}{S_{12}}}.$$

3.3 Consistência dos estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção mostramos que os estimadores de máxima verossimilhança, $\hat{\mu}_i$, $\hat{\sigma}_i^2$, $\hat{\lambda}_i$, $i = 1, 2, 3$, são, respectivamente estimadores consistentes de μ_i , σ_i^2 , λ_i , $i = 1, 2, 3$.

Teorema: Sob o modelo definido em (1.2.1.10) e com as suposições mencionadas, temos que:

- (i) $\hat{\mu}_1 \xrightarrow{P} \mu_1$, onde $\bar{Y}_1 = \hat{\mu}_1$ foi determinado em (3.2.7)
- (ii) $\hat{\lambda}_1 \xrightarrow{P} \lambda_1$, onde $\hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}}$ foi determinado em (3.2.19)
- (iii) $\hat{\sigma}_1^2 \xrightarrow{P} \sigma_1^2$, onde $\hat{\sigma}_1^2 = S_1^2 - \hat{\lambda}_1^2$ foi determinado em (3.2.10).

Resultados análogos valem para $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_3$, $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\lambda}_3$, $\hat{\sigma}_2^2$ e $\hat{\sigma}_3^2$.

Prova:

(i) Sob o modelo definido em (1.2.1.10), as variáveis aleatórias y_{1j} , $j = 1, 2, \dots, n$, são independentes e identicamente distribuídas com $E(y_{11}) = \mu_1$. Então, segue do Teorema de Khintchin, veja apêndice A, que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{1j} \xrightarrow{P} \mu_1, \text{ ou seja, } \bar{Y}_1 \xrightarrow{P} \mu_1. \quad (3.3.1)$$

Por outro lado, de (3.2.7) temos que $\hat{\mu}_1 = \bar{Y}_1$, o que implica, $\hat{\mu}_1 \xrightarrow{P} \mu_1$. Logo, $\hat{\mu}_1$ é um estimador consistente de μ_1 .

De modo similar, obtemos $\hat{\mu}_2 \xrightarrow{P} \mu_2$ e $\hat{\mu}_3 \xrightarrow{P} \mu_3$.

(ii) Primeiramente, observe que $S_{12} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \bar{Y}_1)(y_{2t} - \bar{Y}_2)$, definido em (3.2.13), pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1 + \mu_1 - \bar{Y}_1)(y_{2t} - \mu_2 + \mu_2 - \bar{Y}_2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1)(y_{2t} - \mu_2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1)(\mu_2 - \bar{Y}_2) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mu_1 - \bar{Y}_1)(y_{2t} - \mu_2) + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mu_1 - \bar{Y}_1)(\mu_2 - \bar{Y}_2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1)(y_{2t} - \mu_2) + \frac{1}{n} (\mu_2 - \bar{Y}_2) \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1) + \frac{1}{n} (\mu_1 - \bar{Y}_1) \sum_{t=1}^n (y_{2t} - \mu_2) + \\ &\quad (\mu_1 - \bar{Y}_1)(\mu_2 - \bar{Y}_2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1)(y_{2t} - \mu_2) + \frac{1}{n} (\mu_2 - \bar{Y}_2)(n \bar{Y}_1 - n \mu_1) + \frac{1}{n} (\mu_1 - \bar{Y}_1)(n \bar{Y}_2 - n \mu_2) + \\ &\quad (\mu_1 - \bar{Y}_1)(\mu_2 - \bar{Y}_2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1)(y_{2t} - \mu_2) + (\mu_2 - \bar{Y}_2)(\bar{Y}_1 - \mu_1) + (\mu_1 - \bar{Y}_1)(\bar{Y}_2 - \mu_2) + (\mu_1 - \bar{Y}_1) \\ &\quad (\mu_2 - \bar{Y}_2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1)(y_{2t} - \mu_2) - (\bar{Y}_1 - \mu_1)(\bar{Y}_2 - \mu_2) - (\mu_1 - \bar{Y}_1)(\mu_2 - \bar{Y}_2) + (\mu_1 - \bar{Y}_1)(\mu_2 - \bar{Y}_2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1)(y_{2t} - \mu_2) - (\bar{Y}_1 - \mu_1)(\bar{Y}_2 - \mu_2). \end{aligned}$$

Note que $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1)(y_{2t} - \mu_2)$ é a média das variáveis $(y_{1t} - \mu_1)(y_{2t} - \mu_2)$, $t = 1, 2, \dots, n$,

que, sob as suposições do modelo definido em (1.2.1.10), são independentes e identicamente distribuídas com $E\{(y_{1t} - \mu_1)(y_{2t} - \mu_2)\} = \lambda_1 \lambda_2$, calculada em (C.22), apêndice C. Então, pelo Teorema de Khintchin temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1) (y_{2t} - \mu_2) \xrightarrow{P} \lambda_1 \lambda_2. \quad (3.3.2)$$

Segue de (3.3.1) que

$$\bar{Y}_1 - \mu_1 \xrightarrow{P} 0. \quad (3.3.3)$$

De modo similar, temos que

$$\bar{Y}_2 - \mu_2 \xrightarrow{P} 0. \quad (3.3.4)$$

Logo, de (3.3.3) e de (3.3.4) segue que

$$(\bar{Y}_1 - \mu_1) (\bar{Y}_2 - \mu_2) \xrightarrow{P} 0. \quad (3.3.5)$$

Deste modo, segue de (3.3.2) e de (3.3.5) que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \mu_1) (y_{2t} - \mu_2) - (\bar{Y}_1 - \mu_1) (\bar{Y}_2 - \mu_2) \xrightarrow{P} \lambda_1 \lambda_2, \text{ ou seja, } S_{12} \xrightarrow{P} \lambda_1 \lambda_2.$$

De modo similar, obtemos

$$S_{13} \xrightarrow{P} \lambda_1 \lambda_3 \text{ e } S_{23} \xrightarrow{P} \lambda_2 \lambda_3.$$

Assim,

$$\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \xrightarrow{P} \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2\lambda_3} \Rightarrow \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \xrightarrow{P} \lambda_1^2.$$

Se $\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} > 0$, segue que $\sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}} \xrightarrow{P} \sqrt{\lambda_1^2}$, desde que $g(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua para

$x \geq 0$. Sob as suposições do modelo definido em (1.2.1.10), temos que $\lambda_1 > 0$, de onde segue que

$$\hat{\lambda}_1 \xrightarrow{P} \lambda_1.$$

De modo similar, obtemos $\hat{\lambda}_2 \xrightarrow{P} \lambda_2$ e $\hat{\lambda}_3 \xrightarrow{P} \lambda_3$.

(iii) Primeiramente, observe que $S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_{1t} - \bar{Y}_1)^2$, definido em (3.2.11), pode ser escrito

como $S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{1t}^2 - \bar{Y}_1^2$. Note também que $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{1t}^2$ é a média das variáveis y_{1t}^2 ,

$t = 1, 2, \dots, n$, que, sob o modelo definido em (1.2.1.10) e com as suposições mencionadas, são

independentes e identicamente distribuídas com $E(y_{1t}^2) = \lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \mu_1^2$, calculada em (C.18),

apêndice C. Então, pelo Teorema de Khintchin temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_{1t}^2 \xrightarrow{P} \lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \mu_1^2. \quad (3.3.6)$$

De (3.3.1) segue que

$$\overline{Y}_1^2 \xrightarrow{P} \mu_1^2, \quad (3.3.7)$$

desde que $g(x) = x^2$ é uma função contínua. De (3.3.6) e (3.3.7) concluímos que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{1i}^2 - \overline{Y}_1^2 \xrightarrow{P} \lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \mu_1^2 - \mu_1^2,$$

de onde segue que,

$$S_1^2 \xrightarrow{P} \lambda_1^2 + \sigma_1^2. \quad (3.3.8)$$

Por outro lado, segue de (ii) que

$$\hat{\lambda}_1^2 \xrightarrow{P} \lambda_1^2, \quad (3.3.9)$$

desde que $g(x) = x^2$ é uma função contínua. De (3.3.8) e (3.3.9) segue que

$$S_1^2 - \hat{\lambda}_1^2 \xrightarrow{P} \lambda_1^2 + \sigma_1^2 - \lambda_1^2 \Rightarrow S_1^2 - \hat{\lambda}_1^2 \xrightarrow{P} \sigma_1^2, \text{ ou seja, } \hat{\sigma}_1^2 \xrightarrow{P} \sigma_1^2.$$

De modo similar, concluímos que $\hat{\sigma}_2^2 \xrightarrow{P} \sigma_2^2$ e $\hat{\sigma}_3^2 \xrightarrow{P} \sigma_3^2$.

3.4 Aproximações para as esperanças dos estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção calculamos esperanças aproximadas em amostras grandes, dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ e σ_3^2 do modelo definido em (1.2.1.10) e a esperança exata dos EMV dos parâmetros μ_1, μ_2 e μ_3 . Para estes cálculos utilizamos alguns resultados apresentados no apêndice C.

Como na seção 2.4, determinamos, a partir destas aproximações, expressões aproximadas do vício de primeira ordem dos estimadores de máxima verossimilhança que derivamos e construímos estimadores corrigidos para os mesmos.

Esperança exata do EMV de μ_1

Segue de (3.2.7) que $E(\hat{\mu}_1) = E(\overline{Y}_1)$. De (C.13) segue que $E(\overline{Y}_1) = \mu_1$. Logo,

$$E(\hat{\mu}_1) = \mu_1.$$

De modo similar, obtemos $E(\hat{\mu}_2) = \mu_2$ e $E(\hat{\mu}_3) = \mu_3$.

Esperança aproximada para o EMV de λ_1

De (3.2.19) segue que $E(\hat{\lambda}_1) = E(\sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}})$. Pelo Teorema A.3. apresentado no apêndice A.

temos, até termos de segunda ordem, que

$$E(\hat{\lambda}_1) = g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} + \frac{1}{2} \{ [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{12}^2]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{12}) + [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{13}^2]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{13}) + [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{23}^2]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{23}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{12}\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{12}\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{23}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{13}\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, S_{23}) \}, \quad (3.4.1)$$

com $g(\mathbf{m}) = \sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}}$, $\mathbf{m} = (S_{12}, S_{13}, S_{23})'$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, onde de (C.17) segue que

$$E(S_{12}, S_{13}, S_{23})' = (\frac{n-1}{n}\lambda_1\lambda_2, \frac{n-1}{n}\lambda_1\lambda_3, \frac{n-1}{n}\lambda_2\lambda_3)'.$$

Assim,

$$g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \sqrt{\lambda_1^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \lambda_1, \quad (3.4.2)$$

$$\begin{aligned} [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{12}\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} &= [-\frac{1}{4}(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-3/2} S_{13} S_{12} S_{23}^{-2} + \frac{1}{2}(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-1/2} S_{23}^{-1}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-3/2} \frac{1}{4\lambda_1\lambda_2\lambda_3}, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned} [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{12}\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} &= [-\frac{1}{4}(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-3/2} S_{12} S_{13}^2 S_{23}^{-3} - \frac{1}{2}(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-1/2} S_{13} S_{23}^{-2}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &= -\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-3/2} \frac{1}{4\lambda_2^2\lambda_3}, \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

$$\begin{aligned} [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{13}\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} &= [+ \frac{1}{4}(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-3/2} S_{12}^2 S_{13} S_{23}^{-3} - \frac{1}{2}(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-1/2} S_{12} S_{23}^{-2}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &= -\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-3/2} \frac{1}{4\lambda_3^2\lambda_2}, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{12}^2]|_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{1}{4}(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-3/2} S_{13}^2 S_{23}^{-2}]|_{E(\mathbf{m})} = -\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-3/2} \frac{1}{4\lambda_2^2\lambda_1}, \quad (3.4.6)$$

$$\begin{aligned} [\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{13}^2]|_{E(\mathbf{m})} &= [-\frac{1}{4}(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-3/2} S_{12}^2 S_{13}^2 S_{23}^{-4} + (\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-1/2} S_{12} S_{13} S_{23}^{-3}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &= -\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-3/2} \frac{3\lambda_1}{4\lambda_2^2\lambda_3^2} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

e

$$[\partial^2 g(\mathbf{m})/\partial S_{23}^2]_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{1}{4} (\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})^{-3/2} S_{12}^2 S_{23}^{-2}]_{E(\mathbf{m})} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-3/2} \frac{1}{4\lambda_2^2 \lambda_3^2}. \quad (3.4.8)$$

Por outro lado, segue de (C.6) que

$$\text{Cov}(S_{12}, S_{13}) = \frac{1}{n} (2\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \sigma_1^2 \lambda_2 \lambda_3), \quad (3.4.9)$$

$$\text{Cov}(S_{12}, S_{23}) = \frac{1}{n} (2\lambda_2^2 \lambda_1 \lambda_3 + \sigma_2^2 \lambda_1 \lambda_3) \quad (3.4.10)$$

e

$$\text{Cov}(S_{13}, S_{23}) = \frac{1}{n} (2\lambda_3^2 \lambda_1 \lambda_2 + \sigma_3^2 \lambda_1 \lambda_2). \quad (3.4.11)$$

De (C.9) segue que

$$\text{Var}(S_{12}) = \frac{1}{n} (2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \lambda_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2), \quad (3.4.12)$$

$$\text{Var}(S_{13}) = \frac{1}{n} (2\lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \lambda_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2) \quad (3.4.13)$$

e

$$\text{Var}(S_{23}) = \frac{1}{n} (2\lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_2^2 \lambda_3^2 + \sigma_2^2 \sigma_3^2). \quad (3.4.14)$$

Substituindo (3.4.2) a (3.4.14) na expressão (3.4.1), obtemos, após algumas manipulações algébricas, que

$$E(\hat{\lambda}_1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \lambda_1 + \frac{1}{2n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-3/2} \left\{ -\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} - \frac{3}{4} \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\}.$$

Observe que a expressão acima pode ser reescrita como

$$E(\hat{\lambda}_1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} \lambda_1 + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3/2} \left\{ -\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} - \frac{3}{4} \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\}.$$

Utilizando o Teorema A.7, veja apêndice A, podemos expandir os termos $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2}$ e $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3/2}$,

até termos de primeira ordem, da seguinte maneira

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{n}\right) \binom{1/2}{1} = 1 - \frac{1}{2n}$$

e

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3/2} = 1 + \left(-\frac{1}{n}\right) \binom{-3/2}{1} = 1 + \frac{3}{2n}.$$

Assim, $E(\hat{\lambda}_1)$ pode ser escrita, até termos de segunda ordem, da seguinte forma

$$E(\hat{\lambda}_1) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \lambda_1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2n}\right) \frac{1}{n} \left\{ -\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} - \frac{3}{4} \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\}.$$

A expressão acima pode ser reescrita, até termos de segunda ordem, como

$$E(\hat{\lambda}_1) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \lambda_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2}\right) \left\{ -\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} - \frac{3}{4} \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\}.$$

Logo, até termos de primeira ordem, temos que

$$E(\hat{\lambda}_1) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \lambda_1 + \frac{1}{2n} \left\{ -\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} - \frac{3}{4} \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\},$$

ou seja,

$$E(\hat{\lambda}_1) = \lambda_1 - \frac{3\lambda_1}{4n} + \frac{1}{2n} \left\{ -\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} - \frac{3}{4} \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\},$$

ou ainda,

$$E(\hat{\lambda}_1) = \lambda_1 - \frac{1}{2n} \left\{ \frac{3\lambda_1}{2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} + \frac{3}{4} \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\}.$$

Como na seção 2.4, o estimador corrigido de λ_1 é dado por

$$\tilde{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_1 + \frac{1}{2n} \left\{ \frac{3\hat{\lambda}_1}{2} + \frac{\hat{\sigma}_1^2 \hat{\sigma}_2^2}{4\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2^2} + \frac{\hat{\sigma}_1^2 \hat{\sigma}_3^2}{4\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_3^2} + \frac{3}{4} \frac{\hat{\lambda}_1 \hat{\sigma}_2^2 \hat{\sigma}_3^2}{\hat{\lambda}_2^2 \hat{\lambda}_3^2} \right\}.$$

Do mesmo modo obtemos, até termos de primeira ordem, que

$$E(\hat{\lambda}_2) = \lambda_2 - \frac{1}{2n} \left\{ \frac{3\lambda_2}{2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_1^2}{4\lambda_2 \lambda_1^2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2 \lambda_3^2} + \frac{3}{4} \frac{\lambda_2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} \right\}$$

e

$$E(\hat{\lambda}_3) = \lambda_3 - \frac{1}{2n} \left\{ \frac{3\lambda_3}{2} + \frac{\sigma_3^2 \sigma_1^2}{4\lambda_3 \lambda_1^2} + \frac{\sigma_3^2 \sigma_2^2}{4\lambda_3 \lambda_2^2} + \frac{3}{4} \frac{\lambda_3 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right\}.$$

Esperança aproximada para o EMV de σ_1^2

De (3.2.10) segue que $E(\hat{\sigma}_1^2) = E(S_1^2 - \lambda_1^2) = E(S_1^2) - E(\hat{\lambda}_1^2)$, onde $E(S_1^2)$ foi obtido em (C.21), de modo que

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{n-1}{n} (\lambda_1^2 + \sigma_1^2) - E(\hat{\lambda}_1^2). \quad (3.4.15)$$

Observe que de (3.2.19) segue que $E(\hat{\lambda}_1^2) = E(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})$. Do Teorema A.3. veja apêndice A.

temos. até termos de segunda ordem, que

$$E(\hat{\lambda}_1^2) = g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} + \frac{1}{2} \{ [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12}^2]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{12}) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{13}) + [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{23}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12} \partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12} \partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{23}) + 2 [\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13} \partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, S_{23}) \}. \quad (3.4.16)$$

com $\mathbf{m} = (S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, $g(\mathbf{m}) = (\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}})$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, onde de (C.17) segue que

$$E(S_{12}, S_{13}, S_{23})' = (\frac{n-1}{n} \lambda_1 \lambda_2, \frac{n-1}{n} \lambda_1 \lambda_3, \frac{n-1}{n} \lambda_2 \lambda_3)'.$$

Assim,

$$g(\mathbf{m})|_{E(\mathbf{m})} = \frac{n-1}{n} \lambda_1^2, \quad (3.4.17)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12}^2]|_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (3.4.18)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13}^2]|_{E(\mathbf{m})} = 0, \quad (3.4.19)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{23}^2]|_{E(\mathbf{m})} = [\frac{2S_{12}S_{13}}{S_{23}^3}]|_{E(\mathbf{m})} = \frac{n}{n-1} \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2}, \quad (3.4.20)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12} \partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} = [\frac{1}{S_{23}}]|_{E(\mathbf{m})} = \frac{n}{n-1} \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3}, \quad (3.4.21)$$

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{12} \partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{S_{13}}{S_{23}^2}]|_{E(\mathbf{m})} = -\frac{n}{n-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2 \lambda_3}, \quad (3.4.22)$$

e

$$[\partial^2 g(\mathbf{m}) / \partial S_{13} \partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} = [-\frac{S_{12}}{S_{23}^2}]|_{E(\mathbf{m})} = -\frac{n}{n-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3^2}. \quad (3.4.23)$$

Substituindo (3.4.9) a (3.4.11), (3.4.14) e (3.4.17) a (3.4.23) em (3.4.16), obtemos, após algumas manipulações algébricas, que

$$E(\hat{\lambda}_1^2) = \frac{n-1}{n} \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} (\sigma_1^2 - \lambda_1^2 - \frac{\lambda_1^2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} - \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{2\lambda_2^2 \lambda_3^2}). \quad (3.4.24)$$

Finalmente, substituindo (3.4.24) em (3.4.15) temos que

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_1^2) &= \frac{n-1}{n} (\lambda_1^2 + \sigma_1^2) - \{ \frac{n-1}{n} \lambda_1^2 + \frac{1}{n-1} (\sigma_1^2 - \lambda_1^2 - \frac{\lambda_1^2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} - \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{2\lambda_2^2 \lambda_3^2}) \} \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma_1^2 - \frac{1}{n-1} (\sigma_1^2 - \lambda_1^2 - \frac{\lambda_1^2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} - \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{2\lambda_2^2 \lambda_3^2}). \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} \quad (3.4.25)$$

e $\frac{1}{n(n-1)}$ é de segunda ordem, segue que $\frac{1}{n(n-1)} (\sigma_1^2 - \lambda_1^2 - \frac{\lambda_1^2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} - \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{2\lambda_2^2 \lambda_3^2})$ é de segunda ordem. Logo, até termos de primeira ordem, temos que

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{n-1}{n} \sigma_1^2 - \frac{1}{n} (\sigma_1^2 - \lambda_1^2 - \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} - \frac{\lambda_1^2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{2\lambda_2^2 \lambda_3^2})$$

ou então,

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma_1^2 - \frac{1}{n} (2\sigma_1^2 - \lambda_1^2 - \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} - \frac{\lambda_1^2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{2\lambda_2^2 \lambda_3^2}).$$

Assim, o estimador corrigido de σ_1^2 é dado por

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_1^2 + \frac{1}{n} (2\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\lambda}_1^2 - \frac{\hat{\lambda}_1^2 \hat{\sigma}_2^2}{2\hat{\lambda}_2^2} - \frac{\hat{\lambda}_1^2 \hat{\sigma}_3^2}{2\hat{\lambda}_3^2} + \frac{\hat{\lambda}_1^2 \hat{\sigma}_2^2 \hat{\sigma}_3^2}{2\hat{\lambda}_2^2 \hat{\lambda}_3^2}).$$

De modo análogo, obtemos até termos de primeira ordem que

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \sigma_2^2 - \frac{1}{n} (2\sigma_2^2 - \lambda_2^2 - \frac{\lambda_2^2 \sigma_1^2}{2\lambda_1^2} - \frac{\lambda_2^2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} + \frac{\lambda_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\lambda_1^2 \lambda_3^2})$$

e

$$E(\hat{\sigma}_3^2) = \sigma_3^2 - \frac{1}{n} (2\sigma_3^2 - \lambda_3^2 - \frac{\lambda_3^2 \sigma_1^2}{2\lambda_1^2} - \frac{\lambda_3^2 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} + \frac{\lambda_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}).$$

Resumindo os resultados acima, temos $E(\hat{\mu}_i) = \mu_i$, $i = 1, 2, 3$, e, até termos de segunda ordem, temos

$$E(\hat{\lambda}_1) = \lambda_1 - \frac{1}{2n} \left\{ \frac{3\lambda_1}{2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} + \frac{3}{4} \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\},$$

$$E(\hat{\lambda}_2) = \lambda_2 - \frac{1}{2n} \left\{ \frac{3\lambda_2}{2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_1^2}{4\lambda_2 \lambda_1^2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2 \lambda_3^2} + \frac{3}{4} \frac{\lambda_2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} \right\},$$

$$E(\hat{\lambda}_3) = \lambda_3 - \frac{1}{2n} \left\{ \frac{3\lambda_3}{2} + \frac{\sigma_3^2 \sigma_1^2}{4\lambda_3 \lambda_1^2} + \frac{\sigma_3^2 \sigma_2^2}{4\lambda_3 \lambda_2^2} + \frac{3}{4} \frac{\lambda_3 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right\},$$

$$E(\hat{\sigma}_1^2) = \sigma_1^2 - \frac{1}{n} \left\{ 2\sigma_1^2 - \lambda_1^2 - \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} - \frac{\lambda_1^2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{2\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\},$$

$$E(\hat{\sigma}_2^2) = \sigma_2^2 - \frac{1}{n} \left\{ 2\sigma_2^2 - \lambda_2^2 - \frac{\lambda_2^2 \sigma_1^2}{2\lambda_1^2} - \frac{\lambda_2^2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} + \frac{\lambda_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} \right\}$$

e

$$E(\hat{\sigma}_3^2) = \sigma_3^2 - \frac{1}{n} \left\{ 2\sigma_3^2 - \lambda_3^2 - \frac{\lambda_3^2 \sigma_1^2}{2\lambda_1^2} - \frac{\lambda_3^2 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} + \frac{\lambda_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right\}.$$

3.5 Aproximações para as variâncias dos estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção calculamos variâncias aproximadas em grandes amostras, dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ e σ_3^2 do modelo definido em (1.2.1.10) e a variância exata do estimador de máxima verossimilhança do parâmetro $\mu_i, i = 1, 2, 3$. Para estes cálculos utilizamos alguns resultados apresentados no apêndice C. Por último, calculamos a covariância assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros $\lambda_i, \lambda_j, i, j = 1, 2, 3$.

Como na seção 2.5, a partir destas aproximações, construímos testes aproximados para os parâmetros de interesse, apresentados na seção 3.6.

Variância exata do EMV de μ_1

Segue de (3.2.7) que $\text{Var}(\hat{\mu}_1) = \text{Var}(\bar{Y}_1)$ e de (C.14) que $\text{Var}(\bar{Y}_1) = \frac{1}{n} (\lambda_1^2 + \sigma_1^2)$, de onde vem que $\text{Var}(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{n} (\lambda_1^2 + \sigma_1^2)$.

De modo igual, obtemos $\text{Var}(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{n} (\lambda_2^2 + \sigma_2^2)$ e $\text{Var}(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{n} (\lambda_3^2 + \sigma_3^2)$.

Variância aproximada para o EMV de λ_1

De (3.2.19) segue que $\text{Var}(\hat{\lambda}_1) = \text{Var} \left(\sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}} \right)$. Pelo Teorema A.4, dado no apêndice A, temos, até termos de primeira ordem, que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\lambda}_1) &= \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{12}) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{13}) + \\ &+ \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) + 2 \\ &+ [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &\text{Cov}(S_{13}, S_{23}), \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

com $\mathbf{m} = (S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, $g(\mathbf{m}) = \sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}}$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, onde de (C.17) segue que

$$E(S_{12}, S_{13}, S_{23})' = \left(\frac{n-1}{n} \lambda_1 \lambda_2, \frac{n-1}{n} \lambda_1 \lambda_3, \frac{n-1}{n} \lambda_2 \lambda_3 \right)'.$$

Assim,

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \right)^{-1/2} \frac{S_{13}}{S_{23}} \right]|_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{2\lambda_2} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-1/2}, \quad (3.5.2)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \right)^{-1/2} \frac{S_{12}}{S_{23}} \right]|_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{2\lambda_3} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-1/2} \quad (3.5.3)$$

e

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \right)^{-1/2} \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}^2} \right]|_{E(\mathbf{m})} = -\frac{\lambda_1}{2\lambda_2\lambda_3} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-1/2}. \quad (3.5.4)$$

Substituindo (3.4.9) a (3.4.14) e (3.5.2) a (3.5.4) em (3.5.1), obtemos, após algumas manipulações algébricas, que

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_1) = \frac{1}{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\}. \quad (3.5.5)$$

Como em (3.4.25), (3.5.5) pode ser escrita, até termos de primeira ordem, da seguinte maneira

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_1) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\}.$$

De modo análogo, obtemos, até termos de primeira ordem, que

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_2) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^2 + \sigma_2^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_1^2}{4\lambda_1^2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_3^2} + \frac{\lambda_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1^2 \lambda_3^2} \right\}$$

e que

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_3) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_3^2 + \sigma_3^2 + \frac{\sigma_3^2 \sigma_1^2}{4\lambda_1^2} + \frac{\sigma_3^2 \sigma_2^2}{4\lambda_2^2} + \frac{\lambda_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right\}.$$

Variância aproximada para o EMV de σ_1^2

De (3.2.10) segue que $\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = \text{Var}(S_1^2 - \lambda_1^2)$ e de (3.2.19) segue que $\hat{\lambda}_1^2 = \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}$. Assim,

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = \text{Var}\left(S_1^2 - \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right) = \text{Var}(S_1^2) + \text{Var}\left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right) - 2 \text{Cov}\left(S_1^2, \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right). \text{ De (C.10) segue que}$$

$$\text{Var}(S_1^2) = \frac{2}{n} (\lambda_1^2 + \sigma_1^2)^2, \text{ de onde vem que}$$

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{2}{n} (\lambda_1^2 + \sigma_1^2)^2 + \text{Var}\left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right) - 2 \text{Cov}\left(S_1^2, \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right). \quad (3.5.6)$$

Pelo Teorema A.4, temos, até termos de primeira ordem, que

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right) &= \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{12}) + \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{13}) + \\ &+ \{[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})}\}^2 \text{Var}(S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) + 2 \\ &+ [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{23}) + 2 [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &\text{Cov}(S_{13}, S_{23}), \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

com $\mathbf{m} = (S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, $g(\mathbf{m}) = \left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right)$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, onde de (C.17) segue que

$$E(S_{12}, S_{13}, S_{23})' = \left(\frac{n-1}{n}\lambda_1 \lambda_2, \frac{n-1}{n}\lambda_1 \lambda_3, \frac{n-1}{n}\lambda_2 \lambda_3\right)'.$$

Assim,

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{S_{13}}{S_{23}}\right]|_{E(\mathbf{m})} = \lambda_1 \lambda_2^{-1}, \quad (3.5.8)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{S_{12}}{S_{23}}\right]|_{E(\mathbf{m})} = \lambda_1 \lambda_3^{-1} \quad (3.5.9)$$

e

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}^2}\right]|_{E(\mathbf{m})} = -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2 \lambda_3}. \quad (3.5.10)$$

Substituindo (3.4.9) a (3.4.14) e (3.5.8) a (3.5.10) em (3.5.7), obtemos, após algumas simplificações, que

$$\text{Var}\left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right) = \frac{1}{n} \{2 \lambda_1^4 + 4 \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \frac{\lambda_1^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1^4 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2}\}. \quad (3.5.11)$$

Por outro lado, pelo Teorema A.5, veja apêndice A, temos, até termos de primeira ordem, que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_1^2, \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}) &= [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_1^2]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_1^2) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &+ [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{12}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{13}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &+ [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{23}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_1^2, S_{12}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]|_{E(\mathbf{m})} \\ &+ [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_1^2, S_{13}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_1^2, S_{23}) + \\ &+ [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{23}) \\ &+ [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, S_{23}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_1^2]|_{E(\mathbf{m})} \\ &\text{Cov}(S_{12}, S_1^2) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_1^2]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, S_1^2) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \\ &+ [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, S_{12}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_1^2]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_1^2) + \\ &+ [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{12}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{12}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]|_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{13}]|_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{13}), \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

com $\mathbf{m} = (S_1^2, S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, $g(\mathbf{m}) = S_1^2$, $h(\mathbf{m}) = \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_1^2, S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, onde de (C.17) e (C.21) segue que

$$E(S_1^2, S_{12}, S_{13}, S_{23})' = \left(\frac{n-1}{n}(\lambda_1^2 + \sigma_1^2), \frac{n-1}{n}\lambda_1\lambda_2, \frac{n-1}{n}\lambda_1\lambda_3, \frac{n-1}{n}\lambda_2\lambda_3 \right)'.$$

Assim,

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_1^2]_{|E(\mathbf{m})} = 1, \quad (3.5.13)$$

$$[\partial h(\mathbf{m})/\partial S_1^2]_{|E(\mathbf{m})} = 0, \quad (3.5.14)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{|E(\mathbf{m})} = 0, \quad (3.5.15)$$

$$[\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{|E(\mathbf{m})} = \left[\frac{S_{13}}{S_{23}} \right]_{|E(\mathbf{m})} = \lambda_1\lambda_2^{-1}, \quad (3.5.16)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{|E(\mathbf{m})} = 0, \quad (3.5.17)$$

$$[\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{|E(\mathbf{m})} = \left[\frac{S_{12}}{S_{23}} \right]_{|E(\mathbf{m})} = \lambda_1\lambda_3^{-1}, \quad (3.5.18)$$

$$[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{|E(\mathbf{m})} = 0 \quad (3.5.19)$$

e

$$[\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{|E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}^2} \right]_{|E(\mathbf{m})} = -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2\lambda_3}. \quad (3.5.20)$$

Por outro lado, segue de (C.7) que

$$\text{Cov}(S_1^2, S_{12}) = \frac{2}{n}(\lambda_1^2 + \sigma_1^2)(\lambda_1\lambda_2), \quad (3.5.21)$$

$$\text{Cov}(S_1^2, S_{13}) = \frac{2}{n}(\lambda_1^2 + \sigma_1^2)(\lambda_1\lambda_3) \quad (3.5.22)$$

e de (C.8) segue que

$$\text{Cov}(S_1^2, S_{23}) = \frac{2}{n}\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3. \quad (3.5.23)$$

De (C.10) segue que

$$\text{Var}(S_1^2) = \frac{2}{n}(\lambda_1^2 + \sigma_1^2)^2 \quad (3.5.24)$$

Substituindo (3.4.9) a (3.4.14) e (3.5.13) a (3.5.24) em (3.5.12), obtemos, após algumas simplificações, que

$$\text{Cov}\left(S_1^2, \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}\right) = \frac{2}{n}\lambda_1^4 + \frac{4}{n}\lambda_1^2\sigma_1^2. \quad (3.5.25)$$

Finalmente, substituindo (3.5.11) e (3.5.25) em (3.5.6), obtemos, após algumas simplificações,

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{n} \left\{ 2\sigma_1^4 + \frac{\lambda_1^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1^2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1^4\sigma_2^2\sigma_3^2}{\lambda_2^2\lambda_3^2} \right\}.$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{n} \left\{ 2 \sigma_2^4 + \frac{\lambda_2^2 \sigma_2^2 \sigma_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_3^2} + \frac{\lambda_2^4 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} \right\}$$

e

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_3^2) = \frac{1}{n} \left\{ 2 \sigma_3^4 + \frac{\lambda_3^2 \sigma_3^2 \sigma_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_3^2 \sigma_3^2 \sigma_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_3^4 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right\}.$$

Covariância aproximada para os EMV de λ_1 e λ_2

De (3.2.19) e (3.2.20) segue que $\text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \text{Cov}\left(\sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}}, \sqrt{\frac{S_{12}S_{23}}{S_{13}}}\right)$. Pelo Teorema A.5,

apresentado no apêndice A, temos, até termos de primeira ordem, que

$$\begin{aligned} \text{CoV}\left(\sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}}, \sqrt{\frac{S_{12}S_{23}}{S_{13}}}\right) &= [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{12}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \\ &[\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{13}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} \text{Var}(S_{23}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} \\ &[\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{13}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{12}, S_{23}) + \\ &[\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, S_{12}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{13}, S_{23}) \\ &+ [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} \text{Cov}(S_{23}, S_{12}) + [\partial g(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} [\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} \\ &\text{Cov}(S_{23}, S_{13}), \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

com $\mathbf{m} = (S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, $g(\mathbf{m}) = \sqrt{\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}}}$ e $h(\mathbf{m}) = \sqrt{\frac{S_{12}S_{23}}{S_{13}}}$ e $E(\mathbf{m}) = E(S_{12}, S_{13}, S_{23})'$, onde de

(C.17) segue que

$$E(S_{12}, S_{13}, S_{23})' = \left(\frac{n-1}{n} \lambda_1 \lambda_2, \frac{n-1}{n} \lambda_1 \lambda_3, \frac{n-1}{n} \lambda_2 \lambda_3 \right)'.$$

Assim,

$$[\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{12}]_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \right)^{-1/2} \frac{S_{23}}{S_{13}} \right]_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{2\lambda_1} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-1/2}, \quad (3.5.27)$$

$$[\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{13}]_{E(\mathbf{m})} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \right)^{-1/2} \frac{S_{12}}{S_{23}} \right]_{E(\mathbf{m})} = -\frac{\lambda_2}{2\lambda_1 \lambda_3} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-1/2} \quad (3.5.28)$$

e

$$[\partial h(\mathbf{m})/\partial S_{23}]_{E(\mathbf{m})} = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}} \right)^{-1/2} \frac{S_{12}S_{13}}{S_{23}^2} \right]_{E(\mathbf{m})} = \frac{1}{\lambda_3} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-1/2}. \quad (3.5.29)$$

Substituindo (3.4.9) a (3.4.14), (3.5.27) a (3.5.29) e (3.5.2) a (3.5.4) em (3.5.26), obtemos, após algumas manipulações algébricas, que

$$\text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \frac{1}{n-1} \left\{ \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} - \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2 \lambda_3^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} \right\}. \quad (3.5.30)$$

Como em (3.4.25), (3.5.30) pode ser escrita, até termos de primeira ordem, da seguinte maneira:

$$\text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2 \lambda_3^2} - \frac{\lambda_2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} \right\}.$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_3) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3} - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{2} - \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_3 \lambda_2^2} - \frac{\lambda_3 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} \right\}$$

e

$$\text{Cov}(\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2 \lambda_3} - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{2} - \frac{\lambda_2 \sigma_3^2 \sigma_1^2}{4\lambda_3 \lambda_1^2} - \frac{\lambda_3 \sigma_2^2 \sigma_1^2}{4\lambda_2 \lambda_1^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2}{2\lambda_1^2} \right\}.$$

Resumindo os resultados obtidos acima, temos $\text{Var}(\hat{\mu}_i) = \frac{1}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, 3$, e, até termos de primeira ordem, temos

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_1) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\},$$

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_2) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^2 + \sigma_2^2 + \frac{\sigma_2^2 \sigma_1^2}{4\lambda_1^2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_3^2} + \frac{\lambda_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1^2 \lambda_3^2} \right\},$$

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_3) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_3^2 + \sigma_3^2 + \frac{\sigma_3^2 \sigma_1^2}{4\lambda_1^2} + \frac{\sigma_3^2 \sigma_2^2}{4\lambda_2^2} + \frac{\lambda_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right\},$$

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{n} \left\{ 2\sigma_1^4 + \frac{\lambda_1^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\lambda_3^2} + \frac{\lambda_1^4 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \right\},$$

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{n} \left\{ 2\sigma_2^4 + \frac{\lambda_2^2 \sigma_2^2 \sigma_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_2^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{\lambda_3^2} + \frac{\lambda_2^4 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} \right\},$$

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_3^2) = \frac{1}{n} \left\{ 2\sigma_3^4 + \frac{\lambda_3^2 \sigma_3^2 \sigma_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_3^2 \sigma_3^2 \sigma_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_3^4 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right\},$$

$$\text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2 \lambda_3^2} - \frac{\lambda_2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \sigma_3^2}{2\lambda_3^2} \right\},$$

$$\text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_3) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{4\lambda_1 \lambda_3} - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{2} - \frac{\lambda_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_3 \lambda_2^2} - \frac{\lambda_3 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{4\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 \sigma_2^2}{2\lambda_2^2} \right\}$$

e

$$\text{Cov}(\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{4\lambda_2 \lambda_3} - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{2} - \frac{\lambda_2 \sigma_3^2 \sigma_1^2}{4\lambda_3 \lambda_1^2} - \frac{\lambda_3 \sigma_2^2 \sigma_1^2}{4\lambda_2 \lambda_1^2} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 \sigma_1^2}{2\lambda_1^2} \right\}.$$

3.6 Uma reanálise dos dados de Barnett (1969)

Nesta seção reanalisamos o conjunto de dados apresentados na seção 2.6. Neste contexto, utilizamos para esta reanálise somente as combinações instrumento-operador de valores $i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$.

Segundo o modelo definido em (1.2.1.10), os parâmetros para os valores $i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$ serão $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ e σ_3^2 . Na Tabela 1, apresentamos as estimativas de máxima verossimilhança e as estimativas dos desvios padrões dos EMV destes parâmetros obtidas através dos resultados apresentados neste capítulo, seções 3.2 e 3.5.

Tabela 1: Estimativas dos EMV e dos desvios padrões

Parâmetro	Valores obtidos através dos resultados apresentados nesse capítulo	
	Estimativa	Desvio padrão
μ_1	2246,111111	90,0841
μ_2	2175,694444	92,7091
μ_3	2148,611111	104,6115
λ_1	733,5349243	66,27467
λ_2	781,6638058	66,08793
λ_3	860,6689184	76,27893
σ_1^2	46216,94696	9436,825
σ_2^2	7840,101304	6326,879
σ_3^2	47185,97278	10870,79

Conforme enfatizado anteriormente, as variâncias σ_1^2, σ_2^2 e σ_3^2 têm significados iguais nos dois modelos, modelos (1.2.1.1) e (1.2.1.10). Logo, é de se esperar que suas estimativas sejam iguais nos dois modelos. Estas estimativas estão apresentadas na Tabela 2 da seção 2.6 e na Tabela 1 desta seção. Utilizando a normalidade assintótica dos EMV, segue da Tabela 1 que as hipóteses $H_0: \lambda_1 = 0$, $H_0: \lambda_2 = 0$ e $H_0: \lambda_3 = 0$ são claramente rejeitadas aos níveis usuais.

Com as estimativas das variâncias e covariâncias assintóticas obtidas na seção 3.5, podemos testar hipóteses de maior interesse sobre a eficiência dos instrumentos, como $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, usando o teste de Wald. Note que H_0 pode ser escrita como $H_0: C \theta^* = q_0$, onde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \theta^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad e \quad q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Seja } \Omega_{0^*} = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{\lambda}_1) & \text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) & \text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_3) \\ \text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) & \text{Var}(\hat{\lambda}_2) & \text{Cov}(\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) \\ \text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_3) & \text{Cov}(\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3) & \text{Var}(\hat{\lambda}_3) \end{pmatrix}.$$

A estatística de Wald para testar H_0 , denotada por W_0 , é dada por

$$W_0 = n (C \hat{\theta}^* - q_0)' (C \hat{\Omega}_{0^*} C')^{-1} (C \hat{\theta}^* - q_0),$$

que, sob H_0 , converge em distribuição para uma variável aleatória $\chi^2(6)$, onde $\hat{\Omega}_{0^*}$ é a matriz Ω_{0^*} , avaliada no EMV de θ^* , $\hat{\theta}^*$. (2) ?

H_0 é rejeitada ao nível de 5% se $W_0 > 12,592$, onde 12,592 é o percentil 95% da distribuição $\chi^2(6)$.

Vale salientar que os elementos da matriz $\hat{\Omega}_{0^*}$ são obtidos através dos resultados obtidos na seção 3.5, quando avaliados nas estimativas de máxima verossimilhança que aparecem na Tabela 1.

Deste modo, $\hat{\Omega}_{0^*}$ é dada por

$$\hat{\Omega}_{0^*} = \begin{pmatrix} 4392,33188 & -4245,75638 & -4442,67119 \\ -4245,75638 & 4367,61449 & -5088,22463 \\ -4442,67119 & -4442,67119 & 5818,47516 \end{pmatrix}.$$

Após algumas manipulações matriciais, obtemos $W_0 = 4,7902 \times 10^{18}$. Logo, rejeitamos H_0 ao nível de 5%, ou seja, existe diferença de medição entre os instrumentos 1, 2 e 3.

Capítulo 4

O modelo de regressão funcional

4.1 Introdução

Neste capítulo determinamos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo definido em (1.2.2.1). Aproximações para variâncias e covariâncias destes estimadores são obtidas através da matriz de informação observada. Usando um tipo de algoritmo EM, calculamos estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros desse modelo. Calculamos também estimativas para os desvios padrões destes estimadores. Através de resultados de simulação, procuramos comprovar afirmações feitas por Kimura (1992) sobre a precisão de estimadores e de estatísticas que testam hipóteses de interesse. Extensões dos resultados obtidos sob normalidade são derivados considerando-se um modelo t de Student funcional.

4.2 Estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção determinamos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo definido em (1.2.2.1).

No capítulo 1, expressão (1.2.2.5), obtemos a densidade conjunta dos vetores $\mathbf{Y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{pj})'$, $j = 1, 2, \dots, n$, dada por $f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n | \theta)$, de onde segue que o logaritmo ℓ da correspondente função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned}\ell &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \prod_{i=1}^p (\lambda_i \sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p [(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)^2 (\lambda_i \sigma^2)^{-1}] \\ &= -\frac{n}{2} \ln \prod_{i=1}^p (p\sqrt{2\pi} \lambda_i \sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p [(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)^2 (\lambda_i \sigma^2)^{-1}] \\ &= -\frac{n}{2} \sum_{i=1}^p \ln(p\sqrt{2\pi} \lambda_i \sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p [y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2 (\lambda_i \sigma^2)^{-1},\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

com $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$.

As correspondentes equações de máxima verossimilhança são:

$$\text{Equação 1: } \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0, \text{ onde } \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \frac{(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)^2}{2\lambda_i \sigma^4},$$

Equação 2: $\frac{\partial \ell}{\partial x_j} = 0$, onde $\frac{\partial \ell}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^p \frac{(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j) \beta_i}{\lambda_i \sigma^2}$,

Equação 3: $\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_i} = 0$, onde $\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^n \frac{y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j}{\lambda_i \sigma^2}$

e

Equação 4: $\frac{\partial \ell}{\partial \beta_i} = 0$, onde $\frac{\partial \ell}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^n \frac{(y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j) x_j}{\lambda_i \sigma^2}$.

Após algumas manipulações algébricas, obtemos as soluções das Equações 1, 2, 3 e 4, que são, respectivamente os estimadores de máxima verossimilhança de σ^2 , x_j , α_i e β_i , dados por

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \frac{(y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \hat{x}_j)^2}{np\lambda_i}, \quad (4.2.2)$$

$$\hat{x}_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{\hat{\beta}_i^2}{\lambda_i} \right)} \sum_{i=1}^p \frac{(y_{ij} \hat{\beta}_i - \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_i)}{\lambda_i}, j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2.3)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \hat{\beta}_i \bar{x}, \text{ onde } \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^n \frac{y_{ij}}{n} \text{ e } \bar{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\hat{x}_j}{n}, i = 2, \dots, p, \quad (4.2.4)$$

e

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{x}_j (y_{ij} - \hat{\alpha}_i)}{\sum_{j=1}^n \hat{x}_j^2}, i = 2, \dots, p.$$

Substituindo (4.2.4) na expressão de $\hat{\beta}_i$, obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n [(\hat{x}_j - \bar{x})(y_{ij} - \bar{Y}_i)]}{\sum_{j=1}^n (\hat{x}_j - \bar{x})^2}, i = 2, \dots, p. \quad (4.2.5)$$

Perceba que não temos expressões explícitas para estes estimadores, assim, estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α_i , β_i e x_j , $i = 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, n$, só poderão ser obtidas através de algoritmos computacionais, como o considerado na seção 4.4.

4.3 Estimação da matriz de covariância dos estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção apresentamos expressões aproximadas para variâncias e covariâncias dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros α_i , β_i , $i = 2, \dots, p$, e x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, calculados na seção 4.2. Para isto, usamos o oposto da inversa da matriz Hessiana, como recomendado por Kimura.

As derivadas segundas de ℓ , dado em (4.2.1), com respeito aos parâmetros x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, α_i e β_i , $i = 2, \dots, p$, necessárias para formar a matriz Hessiana são:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial x_j^2} = -\sum_{i=1}^p \left(\frac{\beta_i^2}{\lambda_i \sigma^2} \right), j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial x_j \partial x_k} = 0, j, k = 1, 2, \dots, n, j \neq k,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i \partial x_j} = -\frac{\beta_i}{\lambda_i \sigma^2}, i = 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_i \partial x_j} = -\frac{\alpha_i + 2\beta_i x_j - y_{ij}}{\lambda_i \sigma^2}, i = 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i^2} = -\frac{n}{\lambda_i \sigma^2}, i = 2, \dots, p,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} = 0, i, k = 2, \dots, p, i \neq k,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} = -\sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{\lambda_i \sigma^2} \right), i = 2, \dots, p,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i \partial \beta_k} = 0, i, k = 2, \dots, p, i \neq k,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_i^2} = -\sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j^2}{\lambda_i \sigma^2} \right), i = 2, \dots, p,$$

e

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_i \partial \beta_k} = 0, i, k = 2, \dots, p, i \neq k.$$

Assim, a matriz Hesssiana correspondente aos parâmetros $x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p$, nesta ordem, é dada por:

$$V = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix},$$

onde $A = -\sum_{i=1}^p \left(\frac{\beta_i^2}{\lambda_i \sigma^2} \right) I_n$,

I_n é a matriz identidade de dimensão n ,

$B = (B_1 \ B_2)$, com

$$B_1 = -\frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \frac{\beta_2}{\lambda_2} & \frac{\beta_3}{\lambda_3} & \dots & \frac{\beta_p}{\lambda_p} \\ \frac{\beta_2}{\lambda_2} & \frac{\beta_3}{\lambda_3} & \dots & \frac{\beta_p}{\lambda_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_2}{\lambda_2} & \frac{\beta_3}{\lambda_3} & \dots & \frac{\beta_p}{\lambda_p} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = -\frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2 + 2\beta_2 x_1 - y_{21}}{\lambda_2} & \frac{\alpha_3 + 2\beta_3 x_1 - y_{31}}{\lambda_3} & \dots & \frac{\alpha_p + 2\beta_p x_1 - y_{p1}}{\lambda_p} \\ \frac{\alpha_2 + 2\beta_2 x_2 - y_{22}}{\lambda_2} & \frac{\alpha_3 + 2\beta_3 x_2 - y_{32}}{\lambda_3} & \dots & \frac{\alpha_p + 2\beta_p x_2 - y_{p2}}{\lambda_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_2 + 2\beta_2 x_n - y_{2n}}{\lambda_2} & \frac{\alpha_3 + 2\beta_3 x_n - y_{3n}}{\lambda_3} & \dots & \frac{\alpha_p + 2\beta_p x_n - y_{pn}}{\lambda_p} \end{pmatrix},$$

B' é a transposta da matriz B ,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix}, \text{ com}$$

$$C_1 = -\frac{n}{\sigma^2} \text{diag}(\lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \dots, \lambda_p^{-1}),$$

$$C_2 = -\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\sigma^2} \text{diag}(\lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \dots, \lambda_p^{-1})$$

e

$$C_3 = -\frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{\sigma^2} \text{diag}(\lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \dots, \lambda_p^{-1}).$$

A inversa da matriz Hessiana V pode ser escrita como

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + FE^{-1}F^t & -FE^{-1} \\ -E^{-1}F^t & E^{-1} \end{pmatrix},$$

onde $E = C - B^t A^{-1} B$ e $F = A^{-1} B$, e portanto o oposto da inversa da matriz Hessiana é $-V^{-1}$.

Conforme menciona Kimura, $-V^{-1}$ não é consistente para a matriz de covariância assintótica dos EMV parâmetros deste modelo, pois o número de parâmetros cresce com o tamanho da amostra. Patefield (1977) prova este fato para o caso $p = 2$ e Bolfarine e Galea-Rojas (1995) para o caso p qualquer. Na verdade, quando usamos $-V^{-1}$ como a matriz de covariância assintótica dos EMV dos parâmetros deste modelo estamos subestimando as variâncias dos mesmos.

4.4 O algoritmo EM

Kimura propõe um tipo de algoritmo EM para obter estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros α_i , β_i e x_j , $i = 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, n$. A partir destas estimativas, obtemos a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro σ^2 . Este algoritmo está apresentado abaixo.

(i) Tomar $\hat{\alpha}_i = 0$ e $\hat{\beta}_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, p$;

(ii) estimar x_j , usando

$$\hat{x}_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^p \left(\frac{\hat{\beta}_i^2}{\lambda_i} \right)} \sum_{i=1}^p \frac{(y_{ij} \hat{\beta}_i - \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_i)}{\lambda_i}, j = 1, 2, \dots, n, \text{ calculado em (4.2.3);}$$

(iii) considerar $\hat{\alpha}_1 = 0$, $\hat{\beta}_1 = 1$ e para todo $i > 1$, estimar

$$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \hat{\beta}_i \bar{x}, \text{ calculado em (4.2.4)}$$

e

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n [(\hat{x}_j - \bar{x})(y_{ij} - \bar{Y})]}{\sum_{j=1}^n (\hat{x}_j - \bar{x})^2}, \text{ onde } \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^n \frac{y_{ij}}{n} \text{ e } \bar{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\hat{x}_j}{n}, \text{ calculado em (4.2.5);}$$

(iv) repetir os passos (ii) e (iii) por um número grande de vezes, até que as estimativas dos parâmetros estejam estabilizadas e então, estimar σ^2 por

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \frac{(y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \hat{x}_j)^2}{np\lambda_i}, \text{ calculado em (4.2.2).}$$

Um estudo de simulação

O algoritmo apresentado acima foi usado num estudo de simulação onde consideramos $p = 2$, $n = 50$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\sigma^2 = 9$, $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = 1$, $i = 1, 2$. Assim, os dados para este estudo foram obtidos simulando distribuições normais, da seguinte forma:

$$y_{1j} \sim N(x_j, 9) \text{ e } y_{2j} \sim N(x_j, 9), j = 1, 2, \dots, 50,$$

onde os valores x_j foram gerados segundo uma distribuição $N(20, 4)$, $j = 1, 2, \dots, 50$. Os resultados dessa simulação estão apresentados na Tabela 1, que contém as estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir do algoritmo e as estimativas dos desvios padrões dos EMV dos parâmetros α_i e β_i , calculadas através dos resultados da seção 4.3.

Tabela 1: Estimativas dos EMV e dos desvios padrões

Parâmetro	Estimativa obtida pelo algoritmo	Desvio padrão
α_2	1,3198031	2,2095411
β_2	0,9552002	0,1129286

A partir das estimativas de $\hat{x}_j$, $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}_i$, obtidas pelo algoritmo, calculamos $\hat{\sigma}^2 = 3,1390171$.

A Tabela 2 mostra as estimativas de máxima verossimilhança de α_2 e β_2 obtidas a partir do algoritmo apresentado nesta seção, quando variamos o número de iterações do mesmo.

Tabela 2: Convergência do algoritmo EM

Número de iterações	Estimativa de $\hat{\alpha}_2$ obtida pelo algoritmo	Estimativa de $\hat{\beta}_2$ obtida pelo algoritmo
5	1,2307208	0,9591860
20	1,3197537	0,9552027
50	1,3198031	0,9552002
100	1,3198031	0,9552002
500	1,3198031	0,9552002

Nota-se que com 50 iterações do algoritmo, as estimativas de $\hat{\alpha}_2$ e $\hat{\beta}_2$ são bastante estáveis e razoavelmente próximas dos parâmetros utilizados na simulação.

4.5 Verificação de algumas conjecturas formuladas em Kimura (1992)

Kimura (1992) faz conjecturas sobre o comportamento do estimador do parâmetro σ^2 e também propõe um teste para a igualdade dos α_i 's e β_i 's, $i = 1, \dots, p$. A seguir, vamos verificar, através de um estudo de simulação, a validade de tais afirmações.

Afirmção 1: “O vício do estimador de máxima verossimilhança de σ^2 , calculado em (4.2.2), pode ser reduzido quando substituímos o denominador $(n p \lambda_i)$ do estimador obtido em (4.2.2), pelo denominador $(n - 2)(p - 1) \lambda_i$.”

Para testarmos esse resultado, fizemos uma simulação, onde foram geradas 1000 amostras do conjunto de dados obtido a partir de distribuições normais, da seguinte forma:

$$y_{1j} \sim N(x_j, 9) \text{ e } y_{2j} \sim N(x_j, 9), j = 1, 2, \dots, 50,$$

onde os valores x_j foram gerados segundo uma distribuição $N(20, 4)$, $j = 1, 2, \dots, 50$.

Observe que essa simulação apresenta as mesmas condições daquela realizada na seção 4.4, isto é, $p = 2$, $n = 50$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\sigma^2 = 9$, $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = 1$, $i = 1, 2$. Fizemos outras duas simulações iguais a esta, onde alteramos o valor de n para $n = 20$ e $n = 30$.

Lembrando que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, seja $\hat{\sigma}^2$ o estimador de máxima verossimilhança de σ^2 , dado por

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \left(\frac{(y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \hat{x}_j)^2}{np} \right), \text{ e seja } \tilde{\sigma}^2 \text{ o estimador modificado que reduziria o vício de } \hat{\sigma}^2,$$

$$\text{dado por } \tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \left(\frac{(y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \hat{x}_j)^2}{(n-2)(p-1)} \right). \text{ O resultado dessas simulações está na Tabela 3 que}$$

apresenta o erro quadrático médio (EQM) de cada um desses estimadores quando variamos o valor de n . $n = 20$, $n = 30$ e $n = 50$.

Tabela 3: EQM de $\hat{\sigma}^2$ e de $\tilde{\sigma}^2$

Estimador	EQM (n = 20)	EQM (n = 30)	EQM (n = 50)
$\hat{\sigma}^2$	27.6287936	24.7964003	23.3446199
$\tilde{\sigma}^2$	8.1938408	5.5495893	3.1384488

Os resultados apresentados acima sugerem que o estimador $\tilde{\sigma}^2$ é preferível ao estimador $\hat{\sigma}^2$, desde que possui menor EQM. Bolfarine e Galea Rojas (1995) mostraram que $\tilde{\sigma}^2$ é na verdade um estimador consistente para σ^2 .

Afirmção 2: “Para o caso onde $\lambda_i = 1$, $i = 1, \dots, p$, a hipótese de que todos os instrumentos de medição têm vícios iguais, isto é, $H_0: \alpha_1 = \dots = \alpha_p$ e $\beta_1 = \dots = \beta_p$, poderá ser testada através da

estatística $\hat{F}$, dada por $\hat{F} = \frac{SSH}{\tilde{\sigma}^2}$, onde $df_h = 2(p - 1)$, $\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \left(\frac{(y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \hat{x}_i)^2}{(n - 2)(p - 1)} \right)$,

$SSH = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \left(y_{ij} - \sum_{i=1}^p \left(\frac{y_{ij}}{p} \right) \right)^2 - [(n - 2)(p - 1)]\tilde{\sigma}^2$. Sob H_0 , a distribuição de $\hat{F}$ é aproximadamente

$F(df_h, (n - 2)(p - 1))$, e rejeitaremos H_0 ao nível de significância α se $\hat{F} > F_c$, onde F_c é tal que $P(Y > F_c) = \alpha$, com $Y \sim F(df_h, (n - 2)(p - 1))$. Se $\hat{F} \leq F_c$, então não rejeitamos H_0 ao nível de significância α .”

Para verificarmos se é razoável a suposição de que a distribuição de $\hat{F}$ é $F(2, 48)$, fizemos um estudo de simulação cujas condições usadas foram iguais às da primeira simulação apresentada na Afirmção 1, onde $n = 50$. Calculamos o valor de $\hat{F}$ para cada uma das 1000 amostras e contamos quantos desses valores eram menores que $F_c = 3,21$, obtido quando fixamos α em 5%. Outras duas simulações iguais a esta foram realizadas quando alteramos o valor de n para $n = 30$ e $n = 70$. Vale observar que, para a simulação com $n = 30$ foi usado $F_c = 3,34$ e para a simulação com $n = 70$, usamos $F_c = 3,12$. Os resultados destas simulações estão na Tabela 4, que apresenta a porcentagem do número de amostras que tiveram $\hat{F} \leq F_c$, para os valores, $n = 30$, $n = 50$ e $n = 70$.

Tabela 4: Porcentagem de amostras com $\hat{F} \leq F_c$

	n = 30	n = 50	n = 70
%	90,1	90,2	88,8

Observamos que em nenhuma das três simulações, a porcentagem observada do número de amostras que tiveram $\hat{F} \leq F_c$ está próxima da esperada, que é de 95%. Observamos também que, sob H_0 , o aumento do tamanho da amostra não parece melhorar a aproximação da distribuição de $\hat{F}$ para a F . Essa última afirmação também pode ser verificada através dos gráficos apresentados abaixo. O Gráfico 1 contém a distribuição acumulada de uma variável F cuja distribuição é $F(2, 28)$ e a proporção observada do número de amostras que tiveram $\hat{F} \leq x$, $x \geq 0$, para a simulação com $n = 30$.

Gráfico 1: Distribuição teórica e simulada

O Gráfico 2 contém a distribuição acumulada de uma variável F cuja distribuição é $F(2, 48)$ e a proporção observada do número de amostras que tiveram $\hat{F} \leq x$, $x \geq 0$, para a simulação com $n = 50$.

Gráfico 2: Distribuição teórica e simulada

O Gráfico 3 contém a distribuição acumulada de uma variável F cuja distribuição é $F(2, 68)$ e a proporção observada do número de amostras que tiveram $\hat{F} \leq x$, $x \geq 0$, para a simulação com $n = 70$.

Gráfico 3: Distribuição teórica e simulada

4.6 O modelo funcional de regressão com erros distribuídos segundo uma distribuição t de Student

Recentemente a distribuição t tem sido muito utilizada, para ν pequeno, em análise multivariada, devido ao fato de produzir inferências robustas com relação a presença de “outliers”, que acabam tendo grande influência sobre os estimadores e testes baseados no enfoque de máxima verossimilhança. Uma outra vantagem é que a distribuição normal pode ser vista como um caso particular da distribuição t de Student. Nesta seção trabalhamos com um modelo funcional, cujos erros são distribuídos segundo uma distribuição t, de tal forma que

$$\underline{Y}_j \sim t_p(\underline{\mu}_j; \underline{\Psi}_j; \nu), j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.6.1)$$

onde $t_p(\underline{\mu}_j; \underline{\Psi}_j; \nu)$ denota uma distribuição t p-variada, com ν graus de liberdade, vetor de médias e matriz de escala dados, respectivamente por

$$\underline{\mu}_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 x_j \\ \alpha_2 + \beta_2 x_j \\ \vdots \\ \alpha_p + \beta_p x_j \end{pmatrix} \text{ e } \underline{\Psi}_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (4.6.2)$$

com $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$.

Assumimos que $\underline{Y}_j, j = 1, 2, \dots, n$, são independentes entre si, de onde segue que a função de verossimilhança observada do modelo acima é dada por

$$L = \prod_{j=1}^n f(\underline{Y}_j),$$

onde $f(\underline{Y}_j)$ é a função densidade de $\underline{Y}_j$ dada por

$$f(\underline{Y}_j) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(vp)^{p/2}} |\underline{\Psi}_j|^{-1/2} \left\{1 + \frac{1}{v} (\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j)' \underline{\Psi}_j^{-1} (\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j)\right\}^{-\frac{v+p}{2}},$$

onde $\underline{\mu}_j$ e $\underline{\Psi}_j$ são como em (4.6.2). Deste modo, após algumas operações algébricas, obtemos

$$L = \frac{\Gamma\left(\frac{v+p}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^n (vp)^{np/2}} |\underline{\Psi}_j|^{-n/2} \prod_{j=1}^n \left\{1 + \frac{1}{v\sigma^2} \sum_{i=1}^p \left[\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right] \right\}^{-\frac{v+p}{2}}.$$

O logaritmo ℓ da correspondente função de verossimilhança observada do modelo (4.6.1) é dado por

$$\begin{aligned} \ell = n \ln \Gamma\left(\frac{v+p}{2}\right) - n \ln \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) - \frac{np}{2} \ln(v\pi) - \frac{n}{2} \ln |\underline{\Psi}_j| - \frac{v+p}{2} \\ \sum_{j=1}^n \ln \left\{1 + \frac{1}{v\sigma^2} \sum_{i=1}^p \left[\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde $|\underline{\Psi}_j| = \prod_{i=1}^p (\lambda_i \sigma^2)$. Ignorando constantes, temos que

$$\begin{aligned} \ell &\propto -\frac{n}{2} \ln |\underline{\Psi}_j| - \frac{v+p}{2} \sum_{j=1}^n \ln \left\{1 + \frac{1}{v\sigma^2} \sum_{i=1}^p \left[\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right] \right\} \\ \ell &\propto -\frac{np}{2} \ln \sigma^2 - \frac{v+p}{2} \sum_{j=1}^n \ln \left\{1 + \frac{1}{v\sigma^2} \sum_{i=1}^p \left[\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Este modelo também pode ser obtido através da mistura de uma distribuição normal e uma qui-quadrado, dadas por

$$\underline{Y}_j | q_j \sim N_p(\underline{\mu}_j; q_j^{-1} \underline{\Psi}_j)$$

e (4.6.4)

$$q_j \sim v^{-1} \chi_v^2,$$

onde χ_v^2 é uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade, $\underline{\mu}_j$ e $\underline{\Psi}_j$ são como em (4.6.2), e $\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_n$ e $q_1, \dots, q_n$ são todas independentes entre si. Seja $f(\underline{Y}_j, q_j)$ a densidade conjunta de $\underline{Y}_j$ e q_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Logo, podemos escrever

$$f(\underline{Y}_j, q_j) = f(\underline{Y}_j | q_j) f(q_j), j = 1, 2, \dots, n.$$

O logaritmo ℓ da correspondente função de verossimilhança completa do modelo obtido pela mistura dessas variáveis é dado por

$$\ell = \ln \prod_{j=1}^n f(\underline{Y}_j | q_j) + \ln \prod_{j=1}^n f(q_j),$$

onde

$$f(\underline{Y}_j | q_j) = (2\pi)^{-1/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j)' (q_j^{-1} \underline{\Psi}_j)^{-1} (\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j) \right\}$$

e

$$f(q_j) = q_j^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{q_j v}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \right)^{-1} \left(\frac{v}{2} \right)^{\frac{v}{2}}, \text{ obtida pelo método Jacobiano.}$$

Para o caso em que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1$, após algumas manipulações algébricas, obtemos que

$$\begin{aligned} \ell &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \sum_{j=1}^n \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{ (\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j)' (q_j^{-1} \underline{\Psi}_j)^{-1} (\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j) \} + \\ &\quad \left(\frac{v}{2} - 1 \right) \sum_{j=1}^n \ln q_j - \frac{v}{2} \sum_{j=1}^n q_j - \ln \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{nv}{2} \ln\left(\frac{v}{2}\right) \\ \ell &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \sum_{j=1}^n \ln |q_j^{-1} \underline{\Psi}_j| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{ (\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j)' (q_j^{-1} \underline{\Psi}_j)^{-1} (\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j) \} + \\ &\quad \left(\frac{v}{2} - 1 \right) \sum_{j=1}^n \ln q_j - \frac{v}{2} \sum_{j=1}^n q_j - \ln \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{nv}{2} \ln\left(\frac{v}{2}\right), \end{aligned}$$

onde $|q_j^{-1} \underline{\Psi}_j| = q_j^{-p} \sigma^{2p}$,

$$(q_j^{-1} \underline{\Psi}_j)^{-1} = q_j \begin{pmatrix} \sigma^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^{-2} \end{pmatrix}$$

e

$$(\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j)' (q_j^{-1} \underline{\Psi}_j)^{-1} (\underline{Y}_j - \underline{\mu}_j) = \sum_{i=1}^p q_j (y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)^2 \sigma^{-2}.$$

Assim, ignorando constantes, temos que

$$\begin{aligned} \ell \propto & -\frac{np}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p q_j (y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)^2 \sigma^{-2} + \\ & \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) \sum_{j=1}^n \ln q_j - \frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^n q_j - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{n\nu}{2} \ln\left(\frac{\nu}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Para estimar os parâmetros do modelo t discutido acima vamos utilizar um algoritmo do tipo ECM. Este algoritmo é introduzido em Meng e Rubin (1993) e é uma modificação do algoritmo EM. Ele envolve duas etapas. Na etapa M, de maximização, maximizamos o logaritmo da verossimilhança completa, $\ell = \ln \prod_{j=1}^n f(\tilde{Y}_j/q_j) + \ln \prod_{j=1}^n f(q_j)$. Na etapa E, obtemos a esperança condicional das variáveis não observadas q_j , $j = 1, 2, \dots, n$, dados os parâmetros do modelo e as variáveis observadas.

4.6.1 Etapa M do algoritmo

Nesta seção determinamos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo definido em (4.6.4), para o caso em que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1$.

As correspondentes equações de máxima verossimilhança seguem de (4.6.5) e são dadas por

Equação 1: $\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0$, onde $\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{np}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \frac{q_j (y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)^2}{2\sigma^4}$,

Equação 2: $\frac{\partial \ell}{\partial x_j} = 0$, onde $\frac{\partial \ell}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^p \frac{q_j (y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j) \beta_i}{\sigma^2}$,

Equação 3: $\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_i} = 0$, onde $\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^n \frac{q_j (y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j)}{\sigma^2}$

e

Equação 4: $\frac{\partial \ell}{\partial \beta_i} = 0$, onde $\frac{\partial \ell}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^n \frac{q_j (y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j) x_j}{\sigma^2}$.

Após algumas manipulações algébricas, obtemos as soluções das Equações 1, 2, 3 e 4, que são, para $q_1, q_2, \dots, q_n$ dados, os estimadores de máxima verossimilhança de σ^2 , x_j , α_i e β_i . Estes estimadores são dados por:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \frac{q_j (y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \hat{x}_j)^2}{np}, \quad (4.6.1.1)$$

$$\hat{x}_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^p \hat{\beta}_i^2} \sum_{i=1}^p (y_{ij} \hat{\beta}_i - \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_i), j = 1, \dots, n, \quad (4.6.1.2)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \hat{\beta}_i \bar{x}, \text{ onde } \bar{Y}_i = \frac{\sum_{j=1}^n q_j y_{ij}}{\sum_{j=1}^n q_j} \text{ e } \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n q_j \hat{x}_j}{\sum_{j=1}^n q_j} \quad (4.6.1.3)$$

e

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n q_j \hat{x}_j (y_{ij} - \hat{\alpha}_i)}{\sum_{j=1}^n q_j \hat{x}_j^2}, i = 2, \dots, p, \quad (4.6.1.4)$$

4.6.2 Etapa E do algoritmo (Para o caso em que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1$)

Para implementar a etapa E do algoritmo ECM devemos estimar q_j , usando

$\hat{q}_j = E(q_j / Y_j, \alpha_i, \beta_i, i = 2, \dots, p, x_j, j = 1, \dots, n, \sigma^2) = \frac{v+p}{v+\delta_j^2}, j = 1, 2, \dots, n$, onde

$\delta_j^2 = \sum_{i=1}^p \frac{(y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \hat{x}_j)^2}{\hat{\sigma}^2}$, ver Lange, Little e Taylor, (1989). A implementação do algoritmo

procede então, da seguinte forma:

(i) Valores iniciais são atribuídos aos estimadores dos parâmetros $\sigma^2, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots, p$.

Como recomendado por Kimura, podemos tomar estimadores $\hat{\sigma}^2 = 1, \hat{\alpha}_i = 0, \hat{\beta}_i = 1, i = 1, 2, \dots, p$, como valores iniciais;

(ii) estimar x_j , usando $\hat{x}_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^p \hat{\beta}_i^2} \sum_{i=1}^p (y_{ij} \hat{\beta}_i - \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_i), j = 1, 2, \dots, n$, calculado em (4.6.1.2);

(iii) estimar q_j , usando a etapa E do algoritmo. Assim, estimamos q_j por $\hat{q}_j = \frac{v+p}{v+\delta_j^2},$

$j = 1, 2, \dots, n$, onde $\delta_j^2 = \sum_{i=1}^p \frac{(y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \hat{x}_j)^2}{\hat{\sigma}^2};$

(iv) estimar $\alpha_i, \beta_i, i = 2, \dots, p$, usando a etapa M do algoritmo. Assim, consideramos $\hat{\alpha}_1 = 0$, $\hat{\beta}_1 = 1$ e para todo $i > 1$ estimamos

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n q_j \hat{x}_j (y_{ij} - \bar{Y}_i)}{\sum_{j=1}^n q_j \hat{x}_j^2 - \bar{x} \sum_{j=1}^n q_j \hat{x}_j}, \text{ obtido quando substituímos (4.6.1.3) em (4.6.1.4),}$$

e

$$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \hat{\beta}_i \bar{x}, \text{ onde } i = 2, \dots, p, \bar{Y}_i = \frac{\sum_{j=1}^n q_j y_{ij}}{\sum_{j=1}^n q_j} \text{ e } \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n q_j \hat{x}_j}{\sum_{j=1}^n q_j}, \text{ calculado em (4.6.1.3);}$$

(v) repetir os passos (ii) a (iv) até que haja convergência, ou até a realização de um número fixado de iterações, por exemplo, 1000 iterações. como proposto por Kimura e então, estimar σ^2 por

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \frac{q_j (y_{ij} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i \hat{x}_j)^2}{np}, \text{ calculado em (4.6.1.1).}$$

Um estudo de simulação

O algoritmo apresentado acima foi usado numa simulação com $p = 3$, $n = 50$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\sigma^2 = 9$, $\beta_i = 1, i = 1, 2, 3$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 10$, $\alpha_3 = 10$ e $v = 100$. Assim, os dados para esta simulação foram obtidos através da distribuição t, da seguinte forma:

$$y_{1j} \sim t(x_j; 9; 100), y_{2j} \sim t(10 + x_j; 9; 100) \text{ e } y_{3j} \sim t(10 + x_j; 9; 100), j = 1, 2, \dots, 50.$$

onde os valores x_j foram gerados segundo uma distribuição $N(20, 4)$, $j = 1, 2, \dots, 50$. Vale salientar que v grande faz com que a distribuição t seja próxima da distribuição normal. Os resultados dessa simulação estão apresentados na Tabela 5 que contém as estimativas de máxima verossimilhança obtidas a partir do algoritmo.

Tabela 5: Estimativas dos EMV

Parâmetro	Estimativa obtida pelo algoritmo
α_2	8.4441007
α_3	13.4133712
β_2	1.1189153
β_3	0.8591609

A partir das estimativas $\hat{x}_j, j = 1, \dots, 50, \hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}_i, i = 2, 3$, obtidas pelo algoritmo, calculamos $\hat{\sigma}^2 = 4.6325151$.

4.6.3 Estimação da matriz de covariância dos EMV

Nesta seção apresentamos expressões aproximadas para variâncias e covariâncias dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros $\alpha_i, \beta_i, i = 2, \dots, p$, e $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, calculados na seção 4.6.1. Para isto usamos o oposto da inversa da matriz de informação observada, ou seja, usamos o oposto da inversa da matriz Hessiana.

As derivadas segundas do logaritmo ℓ da função de verossimilhança observada, dado pela expressão (4.6.3), com respeito aos parâmetros $x_j, j = 1, 2, \dots, n, \alpha_i$ e $\beta_i, i = 2, \dots, p$, necessárias para formar a matriz Hessiana são:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial x_j^2} = (v + p) \frac{\left\{ \left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right] \sum_{i=1}^p \left(-\frac{\beta_i^2}{\lambda_i} \right) + 2 \left[\sum_{i=1}^p \left(\frac{y_{ij}\beta_i - \alpha_i\beta_i - \beta_i^2 x_j}{\lambda_i} \right) \right]^2 \right\}}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2},$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial x_j \partial x_k} = 0, j, k = 1, 2, \dots, n, j \neq k,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i \partial x_j} = (v + p)$$

$$\frac{\left\{ \left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right] \left(-\frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) + 2 \left[\sum_{i=1}^p \left(\frac{y_{ij}\beta_i - \alpha_i\beta_i - \beta_i^2 x_j}{\lambda_i} \right) \right] \left(\frac{y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j}{\lambda_i} \right) \right\}}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2}$$

$$i = 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_i \partial x_j} = (v+p) \left\{ \frac{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right] \left(\frac{y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)}{\lambda_i} \right)}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2} + \right. \\ \left. \frac{2 \left[\sum_{i=1}^p \left(\frac{y_{ij} \beta_i - \alpha_i \beta_i - \beta_i^2 x_j}{\lambda_i} \right) \right] \left(\frac{y_{ij} x_j - \alpha_i x_j - \beta_i x_j^2}{\lambda_i} \right)}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2} \right\}, i = 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i^2} = (v+p) \sum_{j=1}^n \frac{\left\{ \left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right] \left(\frac{y_{ij} - 2\alpha_i - \beta_i x_j}{\lambda_i} \right) + 2 \left(\frac{y_{ij} \alpha_i - \alpha_i^2 - \alpha_i \beta_i x_j}{\lambda_i} \right) \left(\frac{y_{ij} - \alpha_i - \beta_i x_j}{\lambda_i} \right) \right\}}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2},$$

$$i = 2, \dots, p,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} = 2(v+p) \sum_{j=1}^n \frac{\left(\frac{y_{ij} \alpha_i - \alpha_i^2 - \alpha_i \beta_i x_j}{\lambda_i} \right) \left(\frac{y_{kj} - \alpha_k - \beta_k x_j}{\lambda_k} \right)}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2}, i, k = 2, \dots, p, i \neq k,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} = (v+p) \sum_{j=1}^n \frac{\left\{ \left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right] \left(-\frac{\alpha_i x_j}{\lambda_i} \right) + 2 \left(\frac{y_{ij} \alpha_i - \alpha_i^2 - \alpha_i \beta_i x_j}{\lambda_i} \right) \left(\frac{y_{ij} x_j - \alpha_i x_j - \beta_i x_j^2}{\lambda_i} \right) \right\}}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2},$$

$$i = 2, \dots, p,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_i \partial \beta_k} = 2(v+p) \sum_{j=1}^n \frac{\left(\frac{y_{ij} \alpha_i - \alpha_i^2 - \alpha_i \beta_i x_j}{\lambda_i} \right) \left(\frac{y_{kj} x_j - \alpha_k x_j - \beta_k x_j^2}{\lambda_k} \right)}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2}, i, k = 2, \dots, p, i \neq k,$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_i^2} = (v+p) \sum_{j=1}^n \frac{\left\{ \left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right] \left(-\frac{x_j^2}{\lambda_i} \right) + 2 \left(\frac{y_{ij} x_j - \alpha_i x_j - \beta_i x_j^2}{\lambda_i} \right)^2 \right\}}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2},$$

$i = 2, \dots, p, e$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_i \partial \beta_k} = 2(v+p) \sum_{j=1}^n \frac{\left(\frac{y_{ij} x_j - \alpha_i x_j - \alpha_i \beta_i x_j^2}{\lambda_i} \right) \left(\frac{y_{kj} x_j - \alpha_k x_j - \beta_k x_j^2}{\lambda_k} \right)}{\left[v\sigma^2 + \sum_{i=1}^p \left(\frac{[y_{ij} - (\alpha_i + \beta_i x_j)]^2}{\lambda_i} \right) \right]^2}, i, k = 2, \dots, p, i \neq k.$$

Como na seção 4.3, a matriz Hessiana associada aos parâmetros $x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \beta_2, \dots, \beta_p$, nesta ordem, é dada por:

$$v = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix},$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \ell}{\partial x_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

$$B = (B_1 \quad B_2), \text{ com } B_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_3 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_p \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_3 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_p \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_3 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_p \partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_3 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_p \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_3 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_p \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_3 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_p \partial x_n} \end{pmatrix},$$

B^t é a transposta da matriz B ,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix}, \text{ com } C_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_p} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_p} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_p} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_p^2} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \beta_3} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_2 \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_3 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_3 \partial \beta_3} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_3 \partial \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_p \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_p \partial \beta_3} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_p \partial \beta_p} \end{pmatrix}$$

e

$$C_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_2^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_2 \partial \beta_3} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_2 \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_3 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_3 \partial \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_p \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_p \partial \beta_3} & \cdots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_p^2} \end{pmatrix}.$$

Assim, a inversa da matriz Hessiana V é dada por

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + FE^{-1}F^t & -FE^{-1} \\ -E^{-1}F^t & E^{-1} \end{pmatrix},$$

onde $E = C - B^t A^{-1} B$ e $F = A^{-1} B$. Portanto o oposto da inversa da matriz Hessiana é $-V^{-1}$.

Conforme mencionamos na seção 4.3, $-V^{-1}$ não é consistente para a matriz de covariância assintótica dos parâmetros deste modelo.

Apêndice A

Teorema A.1: Seja $f_X(x|\theta) = h(x) \exp\{\sum_{i=1}^p T_i(x) c_i(\theta) + d(\theta)\}$ para todo $\theta \in \Theta$ e todo x pertencente ao suporte da distribuição de X e seja C o interior do conjunto onde $(c_1(\theta), c_2(\theta), \dots, c_p(\theta))$ está definido, para todo $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$. Se as equações

$$E_0(T_i(X)) = T_i(X), \text{ para } i = 1, 2, \dots, p,$$

têm solução $\hat{\theta}(x) = (\hat{\theta}_1(x), \hat{\theta}_2(x), \dots, \hat{\theta}_p(x))$ para o qual $(c_1(\hat{\theta}(x)), c_2(\hat{\theta}(x)), \dots, c_p(\hat{\theta}(x))) \in C$, então $\hat{\theta}(x)$ é o único estimador de máxima verossimilhança do parâmetro θ .

Demonstração: Veja Bickel e Doksum (1976).

Teorema A.2: Seja $Y_k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{pk})'$ com distribuição normal multivariada, com vetor de médias $\mu_1 = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ e matriz de covariância Σ , onde os elementos de Σ são do tipo σ_{ij} . Seja uma amostra aleatória de vetores independentes $Y_k, k = 1, \dots, n$, onde

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ik} \text{ e } S_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)(y_{jk} - \bar{Y}_j) \text{ com } i, j = 1, 2, \dots, p.$$

Então,

$$(i) E(\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} \sigma_{ij} + \mu_i \mu_j,$$

$$(ii) \text{Cov}(S_{ij}, S_{km}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ik} \sigma_{jm} + \sigma_{im} \sigma_{jk})$$

e

$$(iii) \text{Var}(S_{ij}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} + \sigma_{ij}^2).$$

Demonstração: Veja Fuller (1987).

Teorema A.3: Seja $g(\underline{m}) \in \mathbb{R}$ uma função racional aplicada em um vetor $\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)'$ de momentos amostrais de uma distribuição multivariada, então, até termos de segunda ordem, temos

$$E(g(\underline{m})) = g(\underline{m}) \Big|_{E(\underline{m})} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \Big|_{E(\underline{m})} \text{Cov}(m_i, m_j) \right],$$

onde $E(\underline{m})$ é o vetor das esperanças dos momentos amostrais da distribuição multivariada, ou seja,

$$E(\underline{m}) = (E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k))' \text{ e } g(\underline{m}) \Big|_{E(\underline{m})} = g(E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k)).$$

Demonstração:

A expansão de Taylor, de ordem 2, da função $g(m_1, m_2, \dots, m_k)$ em torno do ponto $E(\underline{m}) = (E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k))'$ é dada por

$$g(m_1, m_2, \dots, m_k) = g(E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k)) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \Big|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \Big|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] [m_j - E(m_j)].$$

Tomando-se a esperança de ambos os membros da igualdade acima, obtemos,

$$E \{ g(m_1, m_2, \dots, m_k) \} = E \{ g(E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k)) \} +$$

$$E \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \Big|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] \right\} +$$

$$E \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \Big|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] [m_j - E(m_j)] \right\},$$

onde $g(E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k)), \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \Big|_{E(\underline{m})}$ e $\frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \Big|_{E(\underline{m})}$ são constantes. Conseqüentemente,

temos que

$$E \{ g(m_1, m_2, \dots, m_k) \} = g(E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k)) +$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \Big|_{E(\underline{m})} E \{ m_i - E(m_i) \} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \Big|_{E(\underline{m})} E \{ [m_i - E(m_i)] [m_j - E(m_j)] \}.$$

onde $E\{m_i - E(m_i)\} = 0$ e $E\{[m_i - E(m_i)][m_j - E(m_j)]\} = \text{Cov}(m_i, m_j)$, de onde segue que

$$E(g(\underline{m})) = g(E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k)) + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \right]_{E(\underline{m})} \text{Cov}(m_i, m_j).$$

Mas, $g(\underline{m}) \Big|_{E(\underline{m})} = g(E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k))$, então, até termos de segunda ordem, temos

$$E(g(\underline{m})) = g(\underline{m}) \Big|_{E(\underline{m})} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \right]_{E(\underline{m})} \text{Cov}(m_i, m_j). \quad \blacksquare$$

Teorema A.4: *Seja $g(\underline{m}) \in \mathfrak{R}$ uma função racional aplicada em um vetor $\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)'$ de momentos amostrais de uma distribuição multivariada, então, até termos de primeira ordem, temos*

$$\text{Var}(g(\underline{m})) = \sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right]_{E(\underline{m})}^2 \text{Var}(m_i) + \sum_{i \neq j=1}^k \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \Big|_{E(\underline{m})} \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_j} \Big|_{E(\underline{m})} \text{Cov}\{m_i, m_j\},$$

onde $E(\underline{m})$ é como no Teorema A.3.

Demonstração:

Do Teorema A.3 temos, até termos de segunda ordem, que

$$E(g(\underline{m})) = g(\underline{m}) \Big|_{E(\underline{m})} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \right]_{E(\underline{m})} \text{Cov}(m_i, m_j). \quad (\text{A.4.1})$$

A expansão de Taylor, de ordem 2, da função $g(m_1, m_2, \dots, m_k)$ em torno do ponto $E(\underline{m}) = (E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k))'$ é dada por

$$g(m_1, m_2, \dots, m_k) = g(E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_k)) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \Big|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \Big|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] [m_j - E(m_j)]. \quad (\text{A.4.2})$$

Subtraindo-se (A.4.1) de (A.4.2), obtemos

$$g(m_1, m_2, \dots, m_k) - E(g(m_1, m_2, \dots, m_k)) = \sum_{i=1}^k \left. \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \right|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] [m_j - E(m_j)] - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial^2 g(\underline{m})}{\partial m_i \partial m_j} \right|_{E(\underline{m})} \text{Cov}(m_i, m_j) \right]. \quad (\text{A.4.3})$$

Até termos de primeira ordem, (A.4.3) pode ser escrita como:

$$g(m_1, m_2, \dots, m_k) - E(g(m_1, m_2, \dots, m_k)) = \sum_{i=1}^k \left. \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)].$$

Tomando-se a esperança do quadrado de ambos os lados da igualdade acima, temos

$$E[g(m_1, m_2, \dots, m_k) - E(g(m_1, m_2, \dots, m_k))]^2 = E \left[\sum_{i=1}^k \left. \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] \right]^2,$$

ou seja,

$$\text{Var} \{g(m_1, m_2, \dots, m_k)\} = E \left[\sum_{i=1}^k \left. \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] \right]^2. \quad (\text{A.4.4})$$

Utilizando o resultado, $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i \neq j=1}^n a_i a_j$, podemos reescrever (A.4.4) como

$$\text{Var} \{g(m_1, m_2, \dots, m_k)\} = E \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\left. \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] \right]^2 + \right.$$

$$\left. \sum_{i \neq j=1}^k \left. \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right|_{E(\underline{m})} \left. \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_j} \right|_{E(\underline{m})} [m_i - E(m_i)] [m_j - E(m_j)] \right\},$$

onde $\left. \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right|_{E(\underline{m})}$ e $\left. \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_j} \right|_{E(\underline{m})}$ são constantes. Conseqüentemente, temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}\{g(m_1, m_2, \dots, m_k)\} &= \sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right]_{E(\underline{m})}^2 E[m_i - E(m_i)]^2 + \\ &\quad \sum_{i \neq j=1}^k \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \bigg|_{E(\underline{m})} \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_j} \bigg|_{E(\underline{m})} E\{[m_i - E(m_i)] [m_j - E(m_j)]\}. \end{aligned}$$

Note que, $E[m_i - E(m_i)]^2 = \text{Var}(m_i)$ e $E\{[m_i - E(m_i)] [m_j - E(m_j)]\} = \text{Cov}(m_i, m_j)$, de onde se conclui que, até termos de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \text{Var}\{g(m_1, m_2, \dots, m_k)\} &= \sum_{i=1}^k \left[\frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \right]_{E(\underline{m})}^2 \text{Var}(m_i) + \\ &\quad \sum_{i \neq j=1}^k \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \bigg|_{E(\underline{m})} \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_j} \bigg|_{E(\underline{m})} \text{Cov}(m_i, m_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema A.5: *Sejam $g(\underline{m})$ e $h(\underline{m})$ funções racionais reais aplicadas em um vetor $\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)'$ de momentos amostrais de uma distribuição multivariada, então, até termos de primeira ordem, temos*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(g(\underline{m}), h(\underline{m})) &= \sum_{i \neq j=1}^k \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \bigg|_{E(\underline{m})} \frac{\partial h(\underline{m})}{\partial m_j} \bigg|_{E(\underline{m})} \text{Cov}(m_i, m_j) + \\ &\quad \sum_{i=1}^k \frac{\partial g(\underline{m})}{\partial m_i} \bigg|_{E(\underline{m})} \frac{\partial h(\underline{m})}{\partial m_i} \bigg|_{E(\underline{m})} \text{Var}(m_i), \end{aligned}$$

onde $E(\underline{m})$ é como no Teorema A.3.

Demonstração: Similar a demonstração dos Teoremas A.3 e A.4. Veja também Barnett (1969).

Teorema A.6: (Teorema de Khintchin)

Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e $E(X_1)$ existe, $E(X_1) = a$, então

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} a,$$

onde $\xrightarrow{P}$ denota convergência em probabilidade.

Demonstração: Veja Barry R. James (1981).

Teorema A.7: Para todo número real a e para todo t no intervalo $(-1, 1)$, vale a fórmula do binômio de Newton:

$$(1 + t)^a = 1 + \binom{a}{1}t + \binom{a}{2}t^2 + \binom{a}{3}t^3 + \dots$$

Demonstração: Veja Feller (1976).

Apêndice B

Neste apêndice obtemos alguns resultados que serão necessários na formulação do capítulo 2. tais como, variâncias, esperanças e covariâncias de alguns momentos amostrais correspondentes ao modelo definido em (1.2.1.1). Trabalhamos com os seguintes momentos amostrais de interesse:

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ik} \text{ com } i = 1, 2, 3,$$

$$S_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)(y_{jk} - \bar{Y}_j) \text{ com } i, j = 1, 2, 3, i \neq j,$$

e

$$S_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)^2 \text{ com } i = 1, 2, 3.$$

Do Teorema A.2, apresentado no apêndice A, temos que

$$\text{Cov}(S_{ij}, S_{km}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ik} \sigma_{jm} + \sigma_{im} \sigma_{jk}), \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Var}(S_{ij}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} + \sigma_{ij}^2) \quad (\text{B.2})$$

e

$$E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} \sigma_{ij} + \mu_i \mu_j, \quad (\text{B.3})$$

onde, para o modelo definido em (1.2.1.1), temos que

$$\text{para } i = 1, 2, 3, \sigma_{ii} = \beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2 \text{ e } \mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu \text{ onde } \alpha_1 = 0 \text{ e } \beta_1 = 1, \quad (\text{B.4})$$

$$\text{para } i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma^2 \text{ onde } \beta_1 = 1, \quad (\text{B.5})$$

e

$$\text{para } i = 1, 2, 3, \mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu \text{ onde } \alpha_1 = 0 \text{ e } \beta_1 = 1. \quad (\text{B.6})$$

Resultado 1: De (B.1), (B.4) e (B.5) segue que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_{ik}, S_{ij}) &= \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{kj} + \sigma_{ij} \sigma_{ik}) = \frac{1}{n} [(\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2)(\beta_k \beta_j \sigma^2) + (\beta_i \beta_j \sigma^2)(\beta_i \beta_k \sigma^2)] \\ &= \frac{1}{n} [2 \beta_i^2 \beta_k \beta_j \sigma^4 + \beta_k \beta_j \sigma_i^2 \sigma^2], i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k, \text{ e } \beta_1 = 1, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_i^2, S_{ij}) &= \text{Cov}(S_{ii}, S_{ij}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \sigma_{ii}) = \frac{1}{n} 2 [(\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2)(\beta_i \beta_j \sigma^2)] \\ &= \frac{2}{n} [\beta_i^3 \beta_j \sigma^4 + \beta_i \beta_j \sigma_i^2 \sigma^2], i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \text{ e } \beta_1 = 1, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_i^2, S_{jk}) &= \text{Cov}(S_{ii}, S_{jk}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ij} \sigma_{ik} + \sigma_{ik} \sigma_{ij}) = \frac{2}{n} \sigma_{ij} \sigma_{ik} \\ &= \frac{2}{n} [\beta_i^2 \beta_j \beta_k \sigma^4], i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k, \text{ e } \beta_1 = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Resultado 2: Substituindo (B.4) e (B.5) em (B.2), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{ij}) &= \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} + \sigma_{ij}^2) = \frac{1}{n} [(\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2) (\beta_j^2 \sigma^2 + \sigma_j^2) + (\beta_i \beta_j \sigma^2)^2] \\ &= \frac{1}{n} [2 \beta_i^2 \beta_j^2 \sigma^4 + (\beta_i^2 \sigma_j^2 + \beta_j^2 \sigma_i^2) \sigma^2 + \sigma_i^2 \sigma_j^2], i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \text{ e } \beta_1 = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Resultado 3: Segue de (B.2) e (B.4) que

$$\text{Var}(S_i^2) = \text{Var}(S_{ii}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{ii} + \sigma_{ii}^2) = \frac{2}{n} \sigma_{ii}^2 = \frac{2}{n} (\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2)^2, \quad (\text{B.11})$$

$i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \text{ e } \beta_1 = 1.$

Resultado 4: Substituindo (B.4) e (B.6) em (B.3), temos

$$E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} \sigma_{ij} + \mu_i \mu_j = \frac{1}{n} (\beta_i \beta_j \sigma^2) + (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu), \quad (\text{B.12})$$

$i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \beta_1 = 1 \text{ e } \alpha_1 = 0.$

Resultado 5: Vem de (B.3), (B.4) e (B.6) que

$$E(\bar{Y}_i^2) = E(\bar{Y}_i \bar{Y}_i) = \frac{1}{n} \sigma_{ii} + \mu_i \mu_i = \frac{1}{n} (\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2) + (\alpha_i + \beta_i \mu)^2, \quad (\text{B.13})$$

$i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \beta_1 = 1 \text{ e } \alpha_1 = 0.$

Resultado 6: $E(\bar{Y}_i) = E(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ik}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(y_{ik})$, onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.1)

temos que $E(y_{ik}) = \alpha_i + \beta_i \mu$. Conseqüentemente,

$$E(\bar{Y}_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_i + \beta_i \mu = \alpha_i + \beta_i \mu, i = 1, 2, 3, \beta_1 = 1 \text{ e } \alpha_1 = 0. \quad (\text{B.14})$$

Resultado 7: De (B.12) e (B.14), segue que

$$\text{Cov}(\bar{Y}_i, \bar{Y}_j) = E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j) - E(\bar{Y}_i) E(\bar{Y}_j) = \frac{1}{n} (\beta_i \beta_j \sigma^2), \quad (\text{B.15})$$

$i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \beta_i = 1$ e $\alpha_i = 0$.

Resultado 8: $\text{Var}(\bar{Y}_i) = E(\bar{Y}_i^2) - [E(\bar{Y}_i)]^2$. Substituindo (B.13) e (B.14) na expressão acima, concluímos que

$$\text{Var}(\bar{Y}_i) = \frac{1}{n} (\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2), i = 1, 2, 3 \text{ e } \beta_i = 1. \quad (\text{B.16})$$

Resultado 9: $E(S_{ij}) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)(y_{jk} - \bar{Y}_j)\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[(y_{ik} - \bar{Y}_i)(y_{jk} - \bar{Y}_j)]$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E(y_{ik} y_{jk}) - E(y_{ik} \bar{Y}_j) - E(y_{jk} \bar{Y}_i) + E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j)], \quad (\text{B.17})$$

onde $E(y_{ik} y_{jk}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) + E(y_{ik}) E(y_{jk})$,

$$E(y_{ik} \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(y_{ik} y_{jt}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt})], \quad (\text{B.18})$$

$$E(y_{jk} \bar{Y}_i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(y_{jk} y_{it}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\text{Cov}(y_{jk}, y_{it}) + E(y_{jk}) E(y_{it})] \quad (\text{B.19})$$

e

$$E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} (\beta_i \beta_j \sigma^2) + (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu), \text{ calculado em (B.12).}$$

Assim, (B.17) torna-se

$$E(S_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) + E(y_{ik}) E(y_{jk}) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt})] - \right.$$

$$\left. \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\text{Cov}(y_{jk}, y_{it}) + E(y_{jk}) E(y_{it})] + \frac{1}{n} (\beta_i \beta_j \sigma^2) + (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu) \right\},$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.1) temos que $\text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) = \beta_i \beta_j \sigma^2$, $E(y_{ik}) = \alpha_i + \beta_i \mu$ e $E(y_{jk}) = \alpha_j + \beta_j \mu$. Assim,

$$E(S_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \beta_i \beta_j \sigma^2 + (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt})] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\text{Cov}(y_{jk}, y_{it}) + E(y_{jk}) E(y_{it})] + \frac{1}{n} (\beta_i \beta_j \sigma^2) + (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu) \right\}. \quad (\text{B.20})$$

Mas, sob as suposições do modelo (1.2.1.1), temos que para $t \neq k$,

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) = 0 \Rightarrow \text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt}) = E(y_{ik}) E(y_{jt}) = (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu)$$

e para $t = k$,

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) = \beta_i \beta_j \sigma^2 \Rightarrow \text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) +$$

$$E(y_{ik}) E(y_{jk}) = \beta_i \beta_j \sigma^2 + (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu). \text{ Logo, (B.18) torna-se}$$

$$\begin{aligned}
E(y_{ik} \bar{Y}_j) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt})] = \frac{1}{n} [n (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu) + \beta_i \beta_j \sigma^2] \\
&= \frac{1}{n} \beta_i \beta_j \sigma^2 + (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu).
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Do mesmo modo, temos que (B.19) é dado por

$$E(y_{jk} \bar{Y}_i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\text{Cov}(y_{jk}, y_{it}) + E(y_{jk}) E(y_{it})] = \frac{1}{n} \beta_i \beta_j \sigma^2 + (\alpha_i + \beta_i \mu)(\alpha_j + \beta_j \mu). \tag{B.22}$$

Finalmente, substituindo (B.21) e (B.22) em (B.20), obtemos, após algumas manipulações algébricas, que

$$E(S_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{n-1}{n} \beta_i \beta_j \sigma^2 \right] = \frac{n-1}{n} \beta_i \beta_j \sigma^2,$$

$$i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \beta_i = 1 \text{ e } \alpha_i = 0. \tag{B.23}$$

Resultado 10: $E\{[y_{ik} - (\alpha_i + \beta_i \mu)] [y_{jk} - (\alpha_j + \beta_j \mu)]\} =$

$$\begin{aligned}
&= E(y_{ik} y_{jk}) - (\alpha_j + \beta_j \mu) E(y_{ik}) - (\alpha_i + \beta_i \mu) E(y_{jk}) + (\alpha_i + \beta_i \mu) (\alpha_j + \beta_j \mu) \\
&= \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) + E(y_{ik}) E(y_{jk}) - (\alpha_j + \beta_j \mu) E(y_{ik}) - (\alpha_i + \beta_i \mu) E(y_{jk}) + (\alpha_i + \beta_i \mu) (\alpha_j + \beta_j \mu),
\end{aligned}$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.1) temos que $\text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) = \beta_i \beta_j \sigma^2$, $E(y_{ik}) = \alpha_i + \beta_i \mu$ e $E(y_{jk}) = \alpha_j + \beta_j \mu$. Assim,

$$E\{[y_{ik} - (\alpha_i + \beta_i \mu)] [y_{jk} - (\alpha_j + \beta_j \mu)]\} = \beta_i \beta_j \sigma^2. \tag{B.24}$$

Resultado 11: $E(y_{ik}^2) = \text{Var}(y_{ik}) + [E(y_{ik})]^2$, onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.1) temos que $\text{Var}(y_{ik}) = \beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2$ e $[E(y_{ik})]^2 = (\alpha_i + \beta_i \mu)^2$. Assim,

$$E(y_{ik}^2) = \beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2 + (\alpha_i + \beta_i \mu)^2, i = 1, 2, 3, \beta_i = 1 \text{ e } \alpha_i = 0. \tag{B.25}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{Resultado 12: } E(S_i^2) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[(y_{ik} - \bar{Y}_i)^2] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [E(y_{ik}^2) - 2 E(y_{ik} \bar{Y}_i) + E(\bar{Y}_i^2)],
\end{aligned}$$

Substituindo (B.25) na expressão acima, obtemos

$$E(S_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2 + (\alpha_i + \beta_i \mu)^2 - 2 E(y_{ik} \bar{Y}_i) + E(\bar{Y}_i^2)], \tag{B.26}$$

Por outro lado, temos que

$$E(y_{ik} \bar{Y}_i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(y_{ik} y_{it}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) + E(y_{ik}) E(y_{it})], \tag{B.27}$$

onde, para $t \neq k$,

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) = 0 \Rightarrow \text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) + E(y_{ik}) E(y_{it}) = E(y_{ik}) E(y_{it}) = (\alpha_i + \beta_i \mu)^2,$$

e para $t = k$,

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{ik}) = \text{Var}(y_{ik}) = \beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2 \Rightarrow$$

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) + E(y_{ik}) E(y_{it}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{ik}) + E(y_{ik}) E(y_{ik}) = \beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2 + (\alpha_i + \beta_i \mu)^2.$$

Assim, (B.27) torna-se

$$E(y_{ik} \bar{Y}_i) = \frac{1}{n} [n (\alpha_i + \beta_i \mu)^2 + \beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2] = \frac{1}{n} (\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2) + (\alpha_i + \beta_i \mu)^2. \quad (\text{B.28})$$

Portanto, substituindo (B.13) e (B.28) em (B.26), obtemos, após algumas manipulações algébricas, que

$$\begin{aligned} E(S_i^2) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{n-1}{n} (\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2) \right] \\ &= \frac{n-1}{n} (\beta_i^2 \sigma^2 + \sigma_i^2), i = 1, 2, 3, \text{ e } \beta_1 = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Apêndice C

Neste apêndice obtemos alguns resultados que serão necessários na formulação do capítulo 3. tais como, variâncias, covariâncias e esperanças de alguns momentos amostrais correspondentes ao modelo definido em (1.2.1.10). Trabalhamos com os seguintes momentos amostrais de interesse:

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ik} \text{ com } i = 1, 2, 3,$$

$$S_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)(y_{jk} - \bar{Y}_j) \text{ com } i, j = 1, 2, 3, i \neq j$$

e

$$S_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)^2 \text{ com } i = 1, 2, 3.$$

Do Teorema A.2, dado no apêndice A, temos que

$$\text{Cov}(S_{ij}, S_{km}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ik} \sigma_{jm} + \sigma_{im} \sigma_{jk}), \quad (\text{C.1})$$

$$\text{Var}(S_{ij}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} + \sigma_{ij}^2) \quad (\text{C.2})$$

e

$$E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} \sigma_{ij} + \mu_i \mu_j. \quad (\text{C.3})$$

Para o modelo definido acima, temos que

$$\text{para } i = 1, 2, 3, \sigma_{ii} = \lambda_i^2 + \sigma_i^2 \quad (\text{C.4})$$

e

$$\text{para } i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \text{ temos } \sigma_{ij} = \lambda_i \lambda_j. \quad (\text{C.5})$$

Resultado 1: De (C.1), (C.4) e (C.5) segue que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_{ik}, S_{ij}) &= \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{kj} + \sigma_{ij} \sigma_{ki}) = \frac{1}{n} [(\lambda_i^2 + \sigma_i^2)(\lambda_k \lambda_j) + (\lambda_i \lambda_j)(\lambda_k \lambda_i)] \\ &= \frac{1}{n} (2 \lambda_i^2 \lambda_j \lambda_k + \sigma_i^2 \lambda_j \lambda_k), i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_i^2, S_{ij}) &= \text{Cov}(S_{ii}, S_{ij}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \sigma_{ii}) \\ &= \frac{2}{n} [(\lambda_i^2 + \sigma_i^2)(\lambda_i \lambda_j)], i, j = 1, 2, 3, i \neq j \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_i^2, S_{jk}) &= \text{Cov}(S_{ii}, S_{jk}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ij} \sigma_{ik} + \sigma_{ik} \sigma_{ij}) = \frac{1}{n} [(\lambda_i \lambda_j)(\lambda_i \lambda_k) + (\lambda_i \lambda_k)(\lambda_i \lambda_j)] \\ &= \frac{2}{n} (\lambda_i^2 \lambda_j \lambda_k), i, j, k = 1, 2, 3, \text{ e } i \neq j \neq k. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Resultado 2: De (C.2), (C.4) e (C.5) segue que

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{ij}) &= \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} + \sigma_{ij}^2) = \frac{1}{n} [(\lambda_i^2 + \sigma_i^2)(\lambda_j^2 + \sigma_j^2) + (\lambda_i \lambda_j)^2] \\ &= \frac{1}{n} (2 \lambda_i^2 \lambda_j^2 + \lambda_i^2 \sigma_j^2 + \sigma_i^2 \lambda_j^2 + \sigma_i^2 \sigma_j^2), i, j = 1, 2, 3, \text{ e } i \neq j. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Resultado 3: Por outro lado, de (C.2) e (C.4) segue que

$$\text{Var}(S_i^2) = \text{Var}(S_{ii}, S_{ii}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{ii} + \sigma_{ii}^2) = \frac{2}{n} \sigma_{ii}^2 = \frac{2}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2)^2, i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.10})$$

Resultado 4: De (C.3), (C.4) e (C.5) segue que

$$E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} \sigma_{ij} + \mu_i \mu_j = \frac{1}{n} \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j, i, j = 1, 2, 3, \text{ e } i \neq j. \quad (\text{C.11})$$

Resultado 5: De (C.3) e (C.4) segue que

$$E(\bar{Y}_i^2) = E(\bar{Y}_i \bar{Y}_i) = \frac{1}{n} \sigma_{ii} + \mu_i \mu_i = \frac{1}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2) + \mu_i^2, i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.12})$$

Resultado 6: $E(\bar{Y}_i) = E(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ik}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(y_{ik})$, onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.10), temos que $E(y_{ik}) = \mu_i$. Assim,

$$E(\bar{Y}_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_i = \mu_i, i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.13})$$

Resultado 7: $\text{Var}(\bar{Y}_i) = E(\bar{Y}_i^2) - [E(\bar{Y}_i)]^2$. Substituindo (C.12) e (C.13) na expressão de $\text{Var}(\bar{Y}_i)$, obtemos

$$\text{Var}(\bar{Y}_i) = \frac{1}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2), i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.14})$$

Resultado 8: $E(S_{ij}) = E\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)(y_{jk} - \bar{Y}_j)\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\{(y_{ik} - \bar{Y}_i)(y_{jk} - \bar{Y}_j)\}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{E(y_{ik} y_{jk}) - E(y_{ik} \bar{Y}_j) - E(y_{jk} \bar{Y}_i) + E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j)\},$$

onde

$$E(y_{ik} y_{jk}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) + E(y_{ik}) E(y_{jk}),$$

$$E(y_{ik} \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(y_{ik} y_{jt}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{ \text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt}) \},$$

$$E(y_{jk} \bar{Y}_i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(y_{jk} y_{it}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{ \text{Cov}(y_{jk}, y_{it}) + E(y_{jk}) E(y_{it}) \}$$

e

$$E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j, \text{ calculado em (C.11).}$$

Assim,

$$\begin{aligned} E(S_{ij}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{ \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) + E(y_{ik}) E(y_{jk}) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{ \text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt}) \} - \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{ \text{Cov}(y_{jk}, y_{it}) + E(y_{jk}) E(y_{it}) \} + \frac{1}{n} \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j \} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.10), $E(y_{ik}) = \mu_i$, $E(y_{jk}) = \mu_j$ e $\text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) = \lambda_i \lambda_j$. Assim, (C.15) torna-se

$$\begin{aligned} E(S_{ij}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{ \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{ \text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt}) \} - \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{ \text{Cov}(y_{jk}, y_{it}) + E(y_{jk}) E(y_{it}) \} + \frac{1}{n} \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j \}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Mas, sob as suposições do modelo (1.2.1.10), temos que para $t \neq k$,

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) = 0 \Rightarrow \text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt}) = E(y_{ik}) E(y_{jt}) = \mu_i \mu_j$$

e para $t = k$,

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) = \lambda_i \lambda_j \Rightarrow$$

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{jt}) + E(y_{ik}) E(y_{jt}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) + E(y_{ik}) E(y_{jk}) = \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j.$$

Logo, (C.16) torna-se

$$\begin{aligned} E(S_{ij}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{ \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j - \frac{2}{n} [n \mu_i \mu_j + \lambda_i \lambda_j] + \frac{1}{n} \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j \}, \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{ \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j - 2 \mu_i \mu_j - \frac{2}{n} \lambda_i \lambda_j + \frac{1}{n} \lambda_i \lambda_j + \mu_i \mu_j \} \\ &= \lambda_i \lambda_j - \frac{1}{n} \lambda_i \lambda_j \\ &= \frac{n-1}{n} \lambda_i \lambda_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \text{ e } i \neq j. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Resultado 9: $E(S_i^2) = E\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)^2 \right\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\{(y_{ik} - \bar{Y}_i)^2\}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{E(y_{ik}^2) - 2 E(y_{ik} \bar{Y}_i) + E(\bar{Y}_i^2)\}.$$

Mas, $E(y_{ik}^2) = \text{Var}(y_{ik}) + [E(y_{ik})]^2$. Sob as suposições do modelo (1.2.1.10) temos que $\text{Var}(y_{ik}) = \lambda_i^2 + \sigma_i^2$ e $E(y_{ik}) = \mu_i$, de modo que

$$E(y_{ik}^2) = \lambda_i^2 + \sigma_i^2 + \mu_i^2. \quad (\text{C.18})$$

Assim,

$$E(S_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{\lambda_i^2 + \sigma_i^2 + \mu_i^2 - 2 E(y_{ik} \bar{Y}_i) + E(\bar{Y}_i^2)\},$$

que juntamente com (C.12) implica que

$$E(S_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{\lambda_i^2 + \sigma_i^2 + \mu_i^2 - 2 E(y_{ik} \bar{Y}_i) + \frac{1}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2) + \mu_i^2\}. \quad (\text{C.19})$$

Por outro lado,

$$E(y_{ik} \bar{Y}_i) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(y_{ik} y_{it}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{\text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) + E(y_{ik}) E(y_{it})\}$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.10), temos para $t \neq k$,

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) = 0 \Rightarrow \text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) + E(y_{ik}) E(y_{it}) = E(y_{ik}) E(y_{it}) = \mu_i^2$$

e para $t = k$,

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{ik}) = \text{Var}(y_{ik}) = \lambda_i^2 + \sigma_i^2 \Rightarrow$$

$$\text{Cov}(y_{ik}, y_{it}) + E(y_{ik}) E(y_{it}) = \text{Cov}(y_{ik}, y_{ik}) + E(y_{ik}) E(y_{ik}) = \lambda_i^2 + \sigma_i^2 + \mu_i^2.$$

Conseqüentemente,

$$E(y_{ik} \bar{Y}_i) = \frac{1}{n} [n \mu_i^2 + \lambda_i^2 + \sigma_i^2] = \frac{1}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2) + \mu_i^2. \quad (\text{C.20})$$

Substituindo (C.20) em (C.19), obtemos

$$\begin{aligned} E(S_i^2) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{\lambda_i^2 + \sigma_i^2 + \mu_i^2 - 2 [\frac{1}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2) + \mu_i^2] + \frac{1}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2) + \mu_i^2\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{\lambda_i^2 + \sigma_i^2 - \frac{1}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2)\} \\ &= \frac{n-1}{n} (\lambda_i^2 + \sigma_i^2), i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Resultado 10: $E[(y_{ik} - \mu_i)(y_{jk} - \mu_j)] = E(y_{ik} y_{jk}) - \mu_j E(y_{ik}) - \mu_i E(y_{jk}) + \mu_j \mu_i$,

$$= \text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) + E(y_{ik}) E(y_{jk}) - \mu_j E(y_{ik}) - \mu_i E(y_{jk}) + \mu_i \mu_j$$

onde, sob as suposições do modelo (1.2.1.10) temos que $\text{Cov}(y_{ik}, y_{jk}) = \lambda_i \lambda_j$, $E(y_{ik}) = \mu_i$ e $E(y_{jk}) = \mu_j$. Assim,

$$E[(y_{ik} - \mu_i)(y_{jk} - \mu_j)] = \lambda_i \lambda_j. \quad (\text{C.22})$$

REFERÊNCIAS

- Barnett, V.D. (1969). Simultaneous pairwise linear structural relationships. *Biometrics*, 25, 129-142.
- Bickel, P.J and Doksum, K.A (1977). *Mathematical Statistics*, Holden-Day, Inc. San Francisco.
- Bolfarine, H. and Arellano, R. (1994). Robust modelling in measurement error models using the t distribution. *Revista Brasileira de probabilidade e Estatística*, 1, 67-84.
- Bolfarine, H. and Galea-Rojas, M. (1993). Structural comparative calibration using the EM algorithm. *Relatório Técnico*, RT-MAE 9320, IME-USP.
- Bolfarine, H. and Galea-Rojas, M. (1994a). On structural comparative calibration. *Relatório Técnico*, RT-MAE 9414, IME-USP.
- Bolfarine, H. and Galea-Rojas, M. (1994b). On structural comparative calibration under a t -model. *Relatório Técnico*, RT-MAE 9420, IME-USP.
- Bolfarine, H. and Galea-Rojas, M. (1995). Comments on “Functional comparative calibration using an EM algorithm” by D. Kimura, *Biometrics*, 51, 4, 1579-1580.
- Bolfarine, H., Rodrigues, J. e Cordani, L. (1992). *O modelo de regressão com erros nas variáveis*. 10º SINAPE, Rio de Janeiro.
- Carter, R. (1981). Restricted maximum likelihood estimation of bias and reliability in the comparison of several measuring methods. *Biometrics*, 37, 733-741.
- Feller, W. (1976). *Introdução à Teoria das Probabilidades e Suas Aplicações, Parte 1*. Edgard Blucher, São Paulo.
- Fuller, W.A. (1987). *Measurement error models*. Wiley, New York.

Galea-Rojas, M. (1995). *Calibração comparativa estrutural e funcional*, Tese, IME-USP.

James, B.R. (1981). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Projeto Euclides, CNPq, Rio de Janeiro.

Kimura, D.k. (1992). Functional comparative calibration using an EM algoritmo. *Biometrics*, 48, 1263-1271.

Lange, K.L., Little, R.J. and Taylor, J. (1989). Robust statistical modelling using the t-distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 84, 881-896.

Leite, J.G. e Singer, J.M. (1990). *Métodos assintóticos em estatística, fundamentos e aplicações*. 9º SINAPE, São Paulo.

Meng, X.L. and Rubin, D.B. (1993). Maximum likelihood estimation via the ECM algoritmo: A general framework. *Biometrika*, 80, 267-278.

Patefield, W.M. (1977). On the information matrix in the linear functional relationship problem. *Applied Statistics*, 26, 69-70.