Metaestabilidade para uma dinâmica de
Glauber com perturbação e o comportamento
assintótico de um modelo de exclusão com
taxa de Metrópolis

Cláudia Peixoto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**
Orientador: **Prof. Dra. Maria Eulália Vares**

–SÃO PAULO, Dezembro de 1995–

**METAESTABILIDADE PARA UMA DINÂMICA DE GLAUBER COM
PERTURBAÇÃO E O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE
UM MODELO DE EXCLUSÃO COM TAXA DE METRÓPOLIS**

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Cláudia Peixoto e aprovada
pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 4 de dezembro de 1995.

Banca Examinadora

- Prof^ª Dr^ª Maria Eulália Vares (Presidente) - IMPA - RJ
- Prof^º Dr^º Eduardo Jordão Neves - IME - USP
- Prof^º Dr^º João Alves Barata - IF - USP
- Prof^ª Dr^ª Stella Brassesco - IVCI - Venezuela
- Prof^ª Dr^ª Nancy Lopes Garcia - IMECC - UNICAMP

Resumo

Neste trabalho estudamos uma dinâmica que evolui em um toro finito bidimensional, a saber: a superposição de uma dinâmica de exclusão simples simétrica (mistura) a um modelo de Ising estocástico (Glauber).

Verificamos que este modelo apresenta comportamento metaestável em baixas temperaturas, isto é , partindo de uma configuração onde todos os spins são -1 o processo permanece próximo desta por um tempo imprevisível até que, abruptamente, uma gota de spins positivos se forme, com certo tamanho crítico e a partir daí, em um tempo relativamente curto, ele alcança a configuração onde todos os spins são $+1$. Observamos que o tamanho da gota depende da taxa de exclusão adotada.

Abstract

In this work we study a dynamics in a bidimensional finite volume: the Ising model with a perturbation .

We consider the metastable behavior of a superposition of a ferromagnetic spin system with a Glauber dynamics and stirring dynamics. Starting from configuration -1 , minus spins at all lattice sites in a fixed volume under periodic boundary conditions, the process stays close to this configuration for an unpredictable time until the formation of a droplet, of spins $+1$, with certain critical size and decays to configuration $+1$ in relatively short time. We observe that the size of the droplet depends on a rate of exclusion.

Agradecimentos

À Maria Eulália pela dedicada orientação, pelo exemplo profissional, pela oportunidade de poder trabalhar com uma grande pesquisadora e por ser uma pessoa honesta, determinada e humana.

Ao grupo de Sistemas de Partículas por seu dinamismo e proveitosas discussões.

Ao Galves, meu Mestre, que me introduziu aos Sistemas de Partículas.

À minha família paulista e carioca, meus grandes incentivadores, e em especial à D. Neusa sem a qual com certeza não teria conseguido terminar este trabalho.

Ao Adilson, colega, marido, pai da Gláucia e cúmplice por tudo.

À FAPESP (processo n. 92/1212-3) pelo indispensável auxílio financeiro.

Os Sistemas de Partículas Interagentes surgiram como um ramo da Teoria das Probabilidades na década de 60. Os primeiros trabalhos na área foram os de F. Spitzer (1969, 1970) e R. L. Dobrushin (1971).

Do ponto de vista matemático pode-se pensar que este campo é um ramo natural da Teoria dos Processos de Markov. Um sistema de partículas interagentes consiste de um número finito ou infinito de partículas, que na ausência de interação, evoluíram de acordo com um número finito ou enumerável de Cadeias de Markov; porém, é superposta a este mecanismo uma interação entre as partículas. Como resultado desta interação a evolução de uma partícula individual não é Markoviana mas o sistema como um todo é de Markov.

Um dos principais problemas que tem sido tratado nesta área envolve o comportamento do sistema ao longo do tempo.

Como pode ser esperado, o comportamento de um sistema de partículas interagentes depende da natureza da interação. Aqui trataremos a superposição de uma dinâmica de exclusão simples simétrica (mistura) a um modelo de Ising estocástico (Glauber).

O modelo de Ising dotado da chamada dinâmica de Metrópolis bidimensional, para volume e campo magnético positivo mantidos fixos no limite no qual a temperatura vai a zero, foi estudado por E. J. Neves e R. H. Schonmann (1991) e apresenta o comportamento metaestável.

Trataremos no Capítulo II o modelo descrito acima perturbado por um processo de exclusão simples simétrico. Nossa motivação é verificar, no limite quando a temperatura vai a zero, para um volume finito fixado, se este modelo ainda apresenta as características essenciais associadas à metaestabilidade. O modelo torna-se interessante quando escolhemos a taxa associada ao processo de exclusão constante e competindo com a taxa de erosão de cantos de [NS1].

De fato, se o campo externo, h , é pequeno e positivo ($0 < h < 1$), o sistema, quando a configuração inicial é -1 , ou seja, todos os sítios assumem o valor -1 , comporta-se como se estivesse em um estado estável por um tempo muito longo até a formação de uma gota de spins positivos. Então, em um tempo relativamente curto, evolui para a configuração $+1$. No primeiro caso que estudaremos, o tamanho da gota não depende de h como em [NS1] o que pode ser verificado no Teorema 1 do Capítulo II.

Vale observar ainda que o modelo tratado aqui não é reversível e sua medida invariante não é conhecida explicitamente, fato que foi fortemente utilizado em [NS1].

A caracterização do comportamento metaestável aqui adotada é aquela que considera a evolução ao longo das trajetórias, o chamado *pathwise approach* ou abordagem trajetória por trajetória, introduzido por M. Cassandro, A. Galves, E. Olivieri e M. E. Vares em (1984).

E. Scoppola (1993) apresentou um procedimento de renormalização para cadeias de Markov com espaço de estados finito e probabilidades de transição expo-

nencialmente pequenas em um parâmetro $\bar{\beta}$ com o qual os principais resultados de [NS1] foram rederivados. Utilizando este procedimento obtemos uma estimativa do tempo total necessário que nosso processo precisa para alcançar a configuração $+1$ quando parte de -1 .

Para obtermos a estabilidade das médias temporais, Teorema 3 do Capítulo II, necessitamos basicamente de duas coisas: um majorante para o tempo de *termalização* (aqui para retornar a -1) e um minorante para o tempo de *tunnelling*. Para este último utilizamos a estimativa mencionada acima.

Como em nosso modelo o procedimento de renormalização de [Sco] apresenta classes de equivalência não triviais, não poderemos utilizar o Teorema 2.2 de [Sco] para provar que o tempo necessário para alcançar $+1$, quando o processo tem como configuração inicial -1 , normalizado por sua média tem distribuição assintótica exponencial de média 1.

Desta maneira, apresentaremos outra demonstração para este resultado que se encontra no Teorema 2 do Capítulo II.

O Teorema 5 do Capítulo II fornece o caminho típico que o processo segue para escapar do estado metaestável e alcançar o estável. A ferramenta básica para demonstrar este tipo de resultado é a reversibilidade [S], mas neste caso, como o caminho é curto, com a estimativa do tempo total é possível selecionar o caminho mais provável de escape.

Na Seção 4 do Capítulo II o mesmo problema será tratado adotando outras taxas para o processo de exclusão. O motivo pelo qual estes casos estão sendo tratados

separadamente é que seus resultados seguem do procedimento de renormalização de [Sco]. Nesta seção daremos uma idéia geral de tal procedimento e apresentaremos resultados análogos aos dos Teoremas 1 e 2.

II.1 Modelo e Resultados

Consideraremos neste capítulo um modelo de Ising ferromagnético bidimensional com interação a vizinhos mais próximos em um toro finito Λ_N , com uma perturbação aleatória dada por um processo de exclusão simples simétrico.

O processo assume valores em $\overline{X}_N = \{-1, +1\}^{\Lambda_N}$ onde $\Lambda_N = \{1, \dots, N\}^2$ e seu gerador age sobre funções f cilíndricas da seguinte maneira

$$Lf(\eta) = \sum_{x \in \Lambda_N} c(x, \eta) [f(\eta^x) - f(\eta)] + \sum_{x, y \in \Lambda_N} c(x, y, \eta) [f(\eta^{x, y}) - f(\eta)], \quad (1.1)$$

onde $c(x, \eta)$ e $c(x, y, \eta)$ são as taxas associadas a dinâmica de Glauber e de exclusão respectivamente. Aqui consideramos dinâmicas de Glauber nas quais o conteúdo do sítio x , quando a configuração é $\eta \in \overline{X}_N$, troca de sinal com taxa de Metrópolis dada por

$$c(x, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \Delta_x H(\eta) \leq 0; \\ \exp\{-\beta \Delta_x H(\eta)\}, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $H(\eta)$, o Hamiltoniano da configuração η , é dado por:

$$H(\eta) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda_N \\ ||x-y||=1}} \eta(x)\eta(y) - \frac{h}{2} \sum_{x \in \Lambda_N} \eta(x); \quad (1.3)$$

com $\|x - y\| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

O primeiro termo, no Hamiltoniano, representa a soma sobre os pares de vizinhos próximos de Λ_N , contando cada par somente uma vez, e

$$\Delta_x H(\eta) = H(\eta^x) - H(\eta) \text{ com}$$

$$\eta^x(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } x \neq y, \\ -\eta(y) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consideraremos $\beta > 0$ o inverso da temperatura e $h > 0$ o campo magnético externo.

Para a dinâmica de exclusão tomaremos a seguinte taxa de salto:

$$c(x, y, \eta) = \begin{cases} \exp\{-\beta h\}, & \text{se } \|x - y\| = 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1.4)$$

com

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{se } z \neq x, z \neq y, \\ \eta(x) & \text{se } z = y, \\ \eta(y) & \text{se } z = x. \end{cases}$$

Para cada configuração inicial $\eta \in \overline{X}_N$, as taxas acima definem um processo Markoviano a tempo contínuo $\{\sigma_t^\eta; t \geq 0\}$, tal que em $t = 0$, $\sigma_t^\eta = \eta$ com probabilidade 1 e para $x \neq y$ e $\forall \epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\sigma_{t+\epsilon}^\eta = \xi | \sigma_t^\eta = \zeta) = \begin{cases} c(x, \zeta)\epsilon + o(\epsilon) & \text{se } \xi = \zeta^x \text{ para algum } x \in \Lambda_N, \\ c(x, y, \zeta)\epsilon + o(\epsilon) & \text{se } \xi = \zeta^{x,y}, \|x - y\| = 1, \\ o(\epsilon) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Para cada $\eta \in \overline{X}_N$ e $A \subset \overline{X}_N$, definimos o instante de entrada em A por

$$T^\eta(A) = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t^\eta \in A\}. \quad (1.6)$$

O objetivo principal neste capítulo é descrever o comportamento do sistema quando este parte da configuração $-\underline{1}$ até alcançar $+\underline{1}$ para N e h fixados e β tendendo a infinito (baixas temperaturas).

Algumas taxas associadas a dinâmica de Glauber

1) Criação do primeiro spin positivo ($e^{-\beta(4-h)}$)

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & + & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array}$$

2) Criação de spin positivo com um vizinho positivo ($e^{-\beta(2-h)}$)

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & + & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & + & - & - & - \\ - & - & + & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array}$$

3) Erosão de Canto ($e^{-\beta h}$) 4) Erosão de Meio ($e^{-\beta(2+h)}$)

Com as taxas acima é fácil verificar que se $h > 4$ qualquer spin negativo torna-se positivo com taxa 1 mesmo que seus vizinhos sejam negativos, por outro lado, qualquer spin positivo troca de sinal com taxa que tende a zero quando β tende a infinito. Neste caso a ação do processo de exclusão não é percebida antes de $T^{-1}(+\underline{1})$ pois

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^{-1}(+\underline{1}) > \exp\{\beta(h - \delta)\}) = 0, \quad \forall 0 < \delta < h.$$

De fato $T^{-1}(+\underline{1})$, neste caso, é de ordem polinomial em N e independe de β .

Se $2 < h < 4$ e $N \geq 3$ o sistema após alcançar uma configuração com um spin positivo terá quatro alternativas, a saber: com taxa 1 o sistema retorna a $-\underline{1}$, com taxa 4 ele cria um spin positivo vizinho ao já existente, com taxa $(N^2 - 5) \exp\{-\beta(4 - h)\}$ cria um segundo spin positivo não vizinho ao já existente e com taxa $5 \exp\{-\beta h\}$ o processo de exclusão atua e basicamente nada se modifica. Como as duas últimas

taxas anulam-se no limite quando β tende a infinito apenas as duas primeiras possibilidades são importantes. Se o sistema retornar a -1 tudo recomeça mas se ele alcançar uma configuração com dois spins positivos unidos então ambos terão taxas $\exp\{-\beta(h-2)\}$ de retornarem a -1 enquanto seus vizinhos negativos tornam-se positivos com taxa 1. Assim, um par de vizinhos positivos formam a gota crítica para este caso.

Se $1 < h < 2$ o sistema após criar um par de vizinhos positivos ele poderá retornar a -1 com dois saltos de taxa 1 ou alcançar uma gota de dimensões 2×2 com um salto de taxa $\exp\{-\beta(2-h)\}$ seguido de saltos de taxa 1. Após a formação desta gota a taxa de criação de protuberância ($\exp\{-\beta(2-h)\}$) é exponencialmente maior, em β , que a taxa de erosão de cantos ($\exp\{-\beta h\}$), desta forma, partindo de uma gota 2×2 o processo visitará $+1$ antes de -1 com probabilidade tendendo a 1 quando β tende a infinito.

Aqui investigaremos como se dá a passagem de -1 a $+1$ para pequenos campos magnéticos, isto é, $0 < h < 1$.

Em [NS1] foi estudado o comportamento do processo dado por $L = L_G$, onde L_G é o gerador associado à dinâmica de Glauber definida acima. A questão aqui é: *O que acontece a este comportamento quando adicionamos uma perturbação dada por um processo de exclusão?* No caso em que a taxa de exclusão for $\exp\{-\beta h\}$ veremos que o tamanho da gota crítica não depende de h .

Antes de apresentar o Teorema 1 considere a seguinte definição:

Definição 1: Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de configurações com todos os spins negativos exceto por aqueles em um retângulo $l_1 \times l_2$ que são positivos, com l_1 e l_2 menores do que $N - 1$. Para $\eta \in \mathcal{R}$ denotaremos por $l(\eta) = \min(l_1, l_2)$.

Teorema 1: Suponha que $\eta \in \mathcal{R}$ e $0 < h < 1$.

a) Se $l(\eta) > 3$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1})) = 1. \quad (1.7)$$

b) Se $l(\eta) = 1$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1})) = 1. \quad (1.8)$$

c) Se $l(\eta) = 2$ ou $l(\eta) = 3$ então

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1})) > 0; \quad (1.9)$$

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1})) > 0.$$

O Teorema 1 tem como consequência a possibilidade de dividir o conjunto de configurações em três subconjuntos não vazios $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de tal modo que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ são, respectivamente, as bases de atração de $-\underline{1}$ e $+\underline{1}$, enquanto que o sistema partindo de qualquer configuração de $\mathcal{B}$ pode ir para $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{C}$, com probabilidades comparáveis quando β cresce.

Proposição 1: Suponha $0 < h < 1$. O conjunto de configurações pode ser particionado em três conjuntos não vazios $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tal que

a) Se $\eta \in \mathcal{A}$ e $\epsilon > 0$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1}), T^\eta(-\underline{1}) < e^{\beta\epsilon}) = 1. \quad (1.10)$$

b) Se $\eta \in \mathcal{C}$ e $\epsilon > 0$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1}), T^\eta(+\underline{1}) < e^{\beta(h+\epsilon)}) = 1. \quad (1.11)$$

c) Se $\eta \in \mathcal{B}$ então

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1})) > 0,$$

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1})) > 0,$$

e para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(\{-\underline{1}, +\underline{1}\}) < e^{\beta(h+\epsilon)}) = 1. \quad (1.12)$$

Os dois próximos teoremas caracterizam o comportamento metaestável de $\{\sigma_t^{-1}; t \geq 0\}$.

Teorema 2: Considere $T = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t^{-1} = +1\}$; então

$$\frac{T}{E(T)} \longrightarrow \tau \text{ em distribuição quando } \beta \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

onde τ é uma variável aleatória exponencial de média 1.

Antes de afirmar o Teorema 3 (estabilidade das médias temporais) considere a seguinte notação:

- $T^\eta = T^\eta(+1)$.
- $\tilde{T} = \inf_{\eta \in \mathcal{C}} \{t > T^\eta : \sigma_t^\eta = -1\}$.
- $\mathcal{M}_1$ denota o espaço das medidas de probabilidade sobre $\overline{X}_N$.
- $C_b(\overline{X}_N)$ denota o espaço das funções reais em $\overline{X}_N$.

Teorema 3: Considere γ_β tal que satisfaça a relação $IP(T > \gamma_\beta) = e^{-1}$. É possível encontrar $R_\beta > 0$ com $R_\beta \rightarrow \infty$ e $\frac{R_\beta}{\gamma_\beta} \rightarrow 0$ quando $\beta \rightarrow \infty$, tal que se definirmos o processo a valores em $\mathcal{M}_1$, $\{\nu_t^\beta; t \geq 0\}$, via

$$\nu_t^\beta(f) = \frac{1}{R_\beta} \int_{t\gamma_\beta}^{t\gamma_\beta + R_\beta} f(\sigma_u) du, \quad f \in C_b(\overline{X}_N), \quad (1.14)$$

então, para cada configuração inicial $\eta \in \mathcal{A}$,

$$IP\left\{\sup_{0 \leq s \leq \frac{T^\eta - 3R_\beta}{\gamma_\beta}} |\nu_s^\beta(f) - f(-1)| > \delta\right\} \rightarrow 0, \quad (1.15)$$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{\frac{T^\eta}{\gamma\beta} \leq s \leq \frac{T-3R_\beta}{\gamma\beta}} |\nu_s^\beta(f) - f(+\underline{1})| > \delta\right\} \rightarrow 0, \quad (1.16)$$

quando $\beta \rightarrow \infty$ para cada $f \in C_b(\overline{X}_N)$ e cada $\delta > 0$. Finalmente, considere

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_t^\beta &= \nu_t^\beta, \text{ if } t \notin \left[\frac{T^\eta - 3R_\beta}{\gamma\beta}, \frac{T^\eta}{\gamma\beta}\right) \\ &= \nu_{\frac{T^\eta - 3R_\beta}{\gamma\beta}}^\beta, \text{ caso contrário;} \end{aligned} \quad (1.17)$$

então, para cada $\eta \in \mathcal{A}$, $\{\tilde{\nu}_t^\beta; t \geq 0\}$ converge em lei em $D([0, +\infty), \mathcal{M}_1)$ a um processo de saltos de Markov $\{\nu_t; t \geq 0\}$ dado por

$$\begin{aligned} \nu_t &= \delta_{-\underline{1}}, \text{ se } t < \tau, \\ &= \delta_{+\underline{1}}, \text{ se } t \geq \tau, \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde τ é uma variável aleatória exponencial de média 1.

Para $\eta \in \{-1, +1\}^{\Lambda_N}$ definimos $T_+\eta$ como a configuração obtida de η trocando o sinal de todos os spins -1 com pelo menos dois vizinhos opostos; e $T_-\eta$ como a configuração obtida de η trocando o sinal de todos os spins $+1$ com pelo menos três vizinhos opostos. Aplicando iterativamente T_+ (respectivamente T_-) em η obtemos uma sequência crescente (decrecente) de configurações que torna-se constante após um número finito de operações. Denote por $\bar{\eta}$ (resp. $\underline{\eta}$) esta configuração final.

Para $0 < h < 1$, T_+ e T_- ocorrem com taxa 1 para a dinâmica de Glauber. Temos assim o seguinte lema,

Lema 1: Se $0 < h < 1$ e $0 < \delta < h$ então

$$\inf_{\beta \geq 0} \inf_{\eta \in \bar{X}_N} IP(A) := \alpha_+ > 0,$$

$$\inf_{\beta \geq 0} \inf_{\eta \in \bar{X}_N} IP(B) := \alpha_- > 0, \tag{2.1}$$

onde A e B são os seguintes eventos:

$$A := \left\{ \sigma_s^\eta = \bar{\eta} \text{ para algum } s \in [0, e^{\beta\delta}]; \sigma_{e^{\beta\delta}}^\eta = \underline{\bar{\eta}} \right\},$$

$$B := \left\{ \sigma_s^\eta = \underline{\eta} \text{ para algum } s \in [0, e^{\beta\delta}]; \sigma_{e^{\beta\delta}}^\eta = \overline{\underline{\eta}} \right\}.$$

Prova: Facilmente vemos que α_+ é a probabilidade de todas as trocas tais que $\eta \rightarrow \underline{\bar{\eta}}$, onde cada passo ocorre com taxa 1. ■

Pelo Lema 1, em um tempo de ordem $e^{\beta\delta}$, para qualquer $0 < \delta < h$, o sistema partindo de $\eta \in \{-1, +1\}^{\Lambda_N}$ pode ir com probabilidade não nula para $\bar{\eta}$, mas não para uma configuração maior quando β tende a infinito. Desta maneira, $\mathcal{A}$ precisa ser o conjunto de configurações η tal que partindo de $\bar{\eta}$ o processo visitará com probabilidade 1 quando β tende a infinito a configuração $-\underline{1}$ antes da $+\underline{1}$. Assim, definimos $\mathcal{A}$ como o conjunto de configurações η tal que $(\bar{\eta})$ é igual a configuração $-\underline{1}$.

Novamente pelo Lema 1, o sistema partindo de $\eta \in \bar{X}_N$ pode ir com probabilidade não nula em um tempo de ordem $e^{\beta\delta}$, para qualquer $0 < \delta < h$, para $\underline{\eta}$, mas não para uma configuração menor quando β tende a infinito. Desta maneira definimos $\mathcal{C}$ como o conjunto de configurações η tal que pelo menos uma das gotas de $+1$ em $(\underline{\eta})$ é um retângulo com lados maiores do que 3 ou um anel de largura maior do que 1 ao redor do toro.

Finalmente, $\mathcal{B}$ é o conjunto de configurações que não pertencem a $\mathcal{A}$ nem a $\mathcal{C}$. Partindo de $\eta \in \mathcal{B}$ o sistema tanto pode alcançar $-\underline{1}$ quanto $+\underline{1}$ com probabilidades comparáveis, ou seja,

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(\mathcal{A}) < T^\eta(\mathcal{C})) > 0, \forall \eta \in \mathcal{B}$$

e

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(\mathcal{A}) \geq T^\eta(\mathcal{C})) > 0, \forall \eta \in \mathcal{B}.$$

II.3.1 Prova do Teorema 1

Se $\eta \in \mathcal{R}$ podemos supor sem perda de generalidade que temos l_1 e l_2 com $l(\eta) = l = l_1 \leq l_2$ tal que todos os spins em η são -1 exceto aqueles dentro de um retângulo $R = \{1, \dots, l_1\} \times \{1, \dots, l_2\}$.

Definiremos as faixas de R da seguinte maneira:

$$H_j = \{1, \dots, l_1\} \times \{j\}, \quad j \in \{1, \dots, l_2\},$$

$$V_i = \{i\} \times \{1, \dots, l_2\}, \quad i \in \{1, \dots, l_1\}.$$

Primeiramente, note que $Y_t = \#\{x \in H_1 : \sigma_t(x) = -1\}$ não é um processo de Markov pois seus saltos dependem da configuração que o processo assume no momento. Ainda, um salto seguido da ação de T_- pode destruir no máximo três spins positivos quando estes formam um bloco isolado.

Exemplo:

$\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & + & + & + & - & - \\ - & + & + & + & - & - \\ - & + & + & + & - & - \\ - & + & + & + & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array}$	$\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & - & - \\ - & - & + & - & - & - \\ - & + & - & + & - & - \\ - & + & + & + & - & - \\ - & + & + & + & - & - \\ - & + & + & + & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array}$
---	---

Desta maneira

$$Y_t \leq \tilde{Y}_t \stackrel{\text{def}}{=} \#\{x \in H_1 : (T_- \sigma_t)(x) = -1 \text{ ou } \sigma_t(x) = -1\}.$$

Para provar a parte (a) do Teorema 1, necessitamos comparar o número de spins negativos em H_1 com o processo $\{X_t; t \geq 0\}$, onde $X_0 = 0$ e suas taxas de salto são

$$c_X(n, n+3) = 3le^{-\beta h} + (l-2)e^{-\beta(2+h)},$$

$$c_X(n, n-1) = 1.$$

Note que

$$c_X(n, n+3) \geq \max_{\eta} c_{\tilde{Y}}(n, n+1, \eta) + \max_{\eta} c_{\tilde{Y}}(n, n+2, \eta) + \max_{\eta} c_{\tilde{Y}}(n, n+3, \eta)$$

e (3.1)

$$c_X(n, n-1) \leq \min_{\eta} c_{\tilde{Y}}(n, n-1, \eta).$$

Agora, defina

$$\Theta_Y = \inf\{t \geq 0 : |Y_t| = l-1\} \text{ e}$$

$$\Theta_X = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq l-1\}.$$

Como consequência de (3.1) temos que

$$IP(\Theta_Y > t) \geq IP(\Theta_X > t).$$

Para estimar $\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\Theta_X > t)$ considere $T_1, T_2, \dots$, os instantes em que alguma modificação ocorreu em X_t . Sabemos que $T_1, T_k - T_{k-1}, k = 2, 3, \dots$ são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição exponencial de taxa $(1 + c_X(n, n + 3))$;

$$P(X_{T_k} = X_{T_{k-1}} - 1) = \frac{1}{1 + c_X(n, n + 3)} = q,$$

$$P(X_{T_k} = X_{T_{k-1}} + 3) = \frac{c_X(n, n + 3)}{1 + c_X(n, n + 3)} = p.$$

Agora, para qualquer $M > \lceil \frac{l}{3} \rceil$,

$$\begin{aligned} IP(\Theta_X < t) &= \sum_N IP(\Theta_X < t, T_N \leq t < T_{N+1}) \\ &= \sum_{N=\lceil \frac{l}{3} \rceil} IP(\Theta_X < t \mid T_N \leq t < T_{N+1}) IP(T_N \leq t < T_{N+1}) \\ &\leq \sum_{N=\lceil \frac{l}{3} \rceil}^M IP(\Theta_X < t \mid T_N \leq t < T_{N+1}) + \sum_{N>M} IP(T_N \leq t < T_{N+1}) \\ &\leq \sum_{N=\lceil \frac{l}{3} \rceil}^M IP(X_{T_i} \geq l - 1 \text{ para algum } i \in \{\lceil \frac{l}{3} \rceil, \dots, N\}) + \\ &\quad + \sum_{N>M} IP(T_N \leq t < T_{N+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} + M p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} + 2M p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} + \sum_{N=\lceil \frac{l}{3} \rceil+3}^M N p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} p^{\lceil \frac{N-\lceil \frac{l}{3} \rceil}{3} \rceil} + \\
 &+ \sum_{N>M} IP(T_N \leq t < T_{N+1}) \\
 &\leq 3M p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} + M p^{\lceil \frac{l}{3} \rceil} \sum_{N=1}^M 3p^N + \sum_{N>M} IP(T_N \leq t < T_{N+1}),
 \end{aligned}$$

onde $\lceil k \rceil$ = menor inteiro maior ou igual a k .

Tomando $t = \exp\{\beta(h(\lceil \frac{l}{3} \rceil) - \epsilon)\}$ e $M = \lceil (1 + c_X(n, n+3) + \delta)t \rceil$ temos que este majorante tende a zero quando β tende a infinito, para qualquer $\delta > 0$.

Ainda, dado $\delta_1 > 0$, uma protuberância aparece em um tempo de ordem $le^{\beta(h+\delta_1)}$, com probabilidade muito próxima de um quando β tende a infinito o que implica que uma nova faixa será criada antes de $t = \exp\{\beta(h(\lceil \frac{l}{3} \rceil) - \epsilon)\}$.

Desta maneira o processo atinge uma configuração com uma gota retangular ainda maior e pela Propriedade Forte de Markov o processo recomeça desta nova configuração.

Para provar a parte (b) do Teorema 1 é suficiente verificar que se $l(\eta) = 1$ uma erosão ocorre em um tempo de ordem $e^{\beta\delta}$, $0 < \delta < h$, isto é, um tempo menor do que $e^{\beta h}$ com probabilidade próxima de um quando β tende a infinito e, desde que as taxas de salto e criação de spins positivos são menores do que $e^{-\beta\delta}$, $0 < \delta < h$, temos o resultado.

Para a parte (c) é suficiente verificar que um salto seguido da ação de T_- pode destruir uma faixa de tamanho 3 e um salto seguido da ação de T_+ pode criar uma nova faixa. O resultado segue do Lema 1. ■

II.3.2 Prova da Proposição 1

a) Usando o Teorema 1 e o fato de que $\underline{\eta}$ é alcançado em um tempo de ordem polinomial em N temos o resultado.

b) Usando o Teorema 1 e o fato de que uma nova faixa é criada em um tempo de ordem $e^{\beta(h+\delta)}$, $\forall \delta > 0$, temos o resultado.

Antes de provarmos a parte (c) da Proposição 1 introduziremos a seguinte definição.

Definição 2 : Uma configuração η é dita estável se qualquer spin $+1$ possuir pelo menos dois vizinhos positivos e qualquer spin -1 possuir pelo menos três vizinhos negativos. Deste modo, uma configuração η é estável se $\eta = \cup_i R^i, i \in I$ onde R^i são retângulos no reticulado de lados $l_1^i \leq l_2^i$ com $l_1^i > 1$ para qualquer $i \in I$, e $dist(R^i, R^j) > 2$ se $i \neq j$, onde $dist(R^i, R^j) = \min_{\substack{x \in R^i \\ y \in R^j}} \|x - y\|$. Denotaremos este conjunto por $\mathcal{R}^*$.

Considerando $\eta \in \mathcal{B}$, então $\underline{(\eta)}$ e $\overline{(\eta)}$ são estáveis com $2 \leq l_1^k \leq 3, \forall k$.

Agora, defina o tempo de parada

$$T_{\mathcal{S}} = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t^\eta \in \mathcal{S}\}, \forall \eta \in \overline{X}_N. \quad (3.2)$$

Mostraremos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T_{\mathcal{A} \cup \mathcal{C}} < e^{\beta(h+\epsilon)}) = 1. \quad (3.3)$$

Como qualquer configuração em $\mathcal{B}$, pelo Lema 1, alcança uma configuração estável em $\mathcal{B}$ em um tempo de ordem 1, iremos comparar nosso processo com uma Cadeia de Markov cujo espaço de estados é o conjunto de configurações estáveis em $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$, a qual descreveremos abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A} & \eta_{2 \times 2} & \eta_{2 \times 3} & \cdots & \eta_{2 \times (N-2)} & & \mathcal{C} \\ & \eta_{3 \times 3} & \eta_{3 \times 4} & \cdots & \eta_{3 \times (N-2)} & & \end{array}$$

Espaço de Estados

onde $\eta_{ij} \in \mathcal{R}$ com $l_1(\eta) = i$ e $l_2(\eta) = j$.

De fato, considere

$$t_1 = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t^{-1} \text{ é estável}\},$$

$$t_k = \inf\{t \geq t_{k-1} : \sigma_t^{-1} \text{ é estável }\}, \text{ para } k = 2, \dots,$$

então $\{\sigma_{t_i}^{-1}\}_{i \geq 1}$ é a Cadeia de Markov que queremos descrever (até sua primeira saída de $\mathcal{B}$).

Considere

- $\mathcal{E} = \{\mathcal{A}, \mathcal{C}, \eta_{2 \times 2}, \eta_{2 \times 3}, \dots, \eta_{2 \times (N-2)}, \eta_{3 \times 3}, \eta_{3 \times 4}, \dots, \eta_{3 \times (N-2)}\}$ o espaço de estados.

- $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ são estados absorventes.

- $p(\eta, \zeta) > 0$ se η difere de ζ por apenas uma faixa (horizontal ou vertical) na gota de spins positivos ou $\eta = \zeta$.

Na Cadeia de Markov descrita acima cada passo espera um tempo exponencial com média da ordem de $e^{\beta h}$.

Defina $N(t)$ o número de passos no intervalo $[0, t]$; $N(t)$ pode ser superestimado por um processo de Poisson com taxa λt , onde λ é da ordem de $e^{-\beta h}$.

Como o número de passos em $[0, e^{\beta(h+\epsilon)}]$, $\forall \epsilon > 0$ vai a infinito ($\approx e^{\beta \epsilon}$) e $\mathcal{B}$ é composto por estados transitórios, então neste intervalo de tempo o processo sai de $\mathcal{B}$ com probabilidade próxima de 1 quando β tende a infinito.

Para provar que

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T_{\mathcal{A}} < T_{\mathcal{C}}) > 0,$$

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T_{\mathcal{C}} < T_{\mathcal{A}}) > 0,$$

é suficiente mostrar que cada sequência finita $s = (s_1, \dots, s_k)$ onde $s_1 = \eta$, $\eta \in \mathcal{B}$, $s_k \in \mathcal{C} \cup \mathcal{A}$ e $p(s_i, s_{i+1}) > 0$, tem probabilidade positiva.

Mas $IP(s) \geq (\frac{1}{N^2})^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, de modo que temos o resultado. ■

II.3.3 Prova do Teorema 2

Notação: Por simplicidade $T^{-1}(+\underline{1}) = T$.

Considere $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e defina

$$S = T - T(\mathcal{C})$$

Provaremos que

$$\frac{T(\mathcal{C})}{\gamma_{\beta}} \longrightarrow \tau \text{ em distribuição,} \quad (3.4)$$

onde τ é uma variável aleatória exponencial de média 1 e γ_{β} está definido por

$$IP(T(\mathcal{C}) > \gamma_{\beta}) = e^{-1}. \quad (3.5)$$

Então provaremos que

$$\frac{S}{\gamma_\beta} \longrightarrow 0 \text{ em probabilidade quando } \beta \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

a partir da qual segue que

$$\frac{T}{\gamma_\beta} \longrightarrow \tau \text{ em distribuição quando } \beta \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

Após fazer isto necessitamos somente trocar γ_β por ET , e isto será feito utilizando argumentos padrões.

Para provar (3.4) introduziremos uma dinâmica restrita ao conjunto $\mathcal{D}$. Apresentaremos a idéia de maneira geral.

Uma técnica muito utilizada no estudo de alguns sistemas de partículas é a de acoplar o processo original com o processo restrito a uma certa região conexa. Diremos que um conjunto φ de configurações está conectado se para qualquer par de configurações $\eta_1, \eta_2 \in \varphi$ é possível ir de η_1 a η_2 por uma cadeia de transformações, em que uma única dinâmica ocorre em cada passo, sem sair de φ .

Nossa dinâmica restrita a φ é definida pelas taxas

$$\begin{aligned} \tilde{c}(x, \eta) &= \begin{cases} c(x, \eta) & \text{se } \eta, \eta^x \in \varphi, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ \tilde{c}(x, y, \eta) &= \begin{cases} c(x, y, \eta) & \text{se } \eta, \eta^{x,y} \in \varphi, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Utilizaremos dois tipos de acoplamento como em [NS1]:

Acoplamento A: Para $\eta \in \varphi$, $\{\tilde{\sigma}_t^\eta\}$ e $\{\sigma_t^\eta\}$ saltam juntos até que o último saia de φ , neste instante o processo restrito fica parado e ambos começam a evoluir independentemente.

Acoplamento B: Para $\eta \in \varphi$, $\{\tilde{\sigma}_t^\eta\}$ e $\{\tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}\}$ evoluem independentemente até o instante em que se encontram; após isso passam a evoluir juntos.

Em nosso caso, $\varphi = \mathcal{D}$. Considere $\tilde{\mu}(\cdot)$ a medida invariante para a dinâmica restrita.

Lema 2: Considere $T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} = \inf\{t \geq 0 : \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} \in \mathcal{A}\}$, então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < e^{\beta(h+\delta)}) = 1, \quad \forall \delta > 0.$$

Prova:

$$\begin{aligned} IP(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < e^{\beta(h+\delta)}) &= IP(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < e^{\beta(h+\delta)}, \eta_0 \in \mathcal{A}) + IP(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < e^{\beta(h+\delta)}, \eta_0 \in \mathcal{B}) \\ &= \tilde{\mu}(\mathcal{A}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{B}} IP(T_{\mathcal{A}}^{\sigma} < e^{\beta(h+\delta)}) IP(\eta_0 = \sigma). \end{aligned}$$

Pela Proposição 1 e o Lema 1,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T_{\mathcal{A}}^{\sigma} < e^{\beta(h+\delta)}) = 1, \quad \text{se } \sigma \in \mathcal{B}.$$

Então,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < e^{\beta(h+\delta)}) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} [\tilde{\mu}(\mathcal{A}) + \tilde{\mu}(\mathcal{B})] = 1.$$

■

Para o próximo lema utilizaremos o Acoplamento B.

Lema 3: $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(-\underline{1}) = 1.$

Prova: Considere $\Theta = \inf\{t \geq 0 : \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} = -\underline{1}\}$. Pelo Lema 2 e Proposição 1 sabemos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\Theta < e^{\beta(h+\delta_1)}) = 1, \forall \delta_1 > 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq -\underline{1}, \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta(4-h-\delta_2)}]) = 0. \quad (3.9)$$

Desta maneira,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} = \tilde{\sigma}_t^{-1}, \text{ para algum } t < e^{\beta(h+\delta_1)}) = 1.$$

Para $t \in [e^{\beta(h+\delta_1)}, e^{\beta(4-h-\delta_2)}]$ e pelo acoplamento B temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq -1) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq 1, \tilde{\sigma}_t^{-1} \neq \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}) + IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq -1, \tilde{\sigma}_t^{-1} \neq \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}) \right\} \\
&\geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq -1, \tilde{\sigma}_t^{-1} = \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}) \\
&= \lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} \neq -1) \\
&= \tilde{\mu}(\mathcal{D} \setminus \{-1\}) \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Por (3.9) e (3.10) temos

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(-1) = 1.$$

■

Agora provaremos (3.4) mostrando a correspondente perda de memória assintótica.

Isto consiste em verificar que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} |\Delta_\beta(s, t)| = 0, \tag{3.11}$$

onde $\Delta_\beta(s, t) = IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > (s+t)\gamma_\beta) - IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta) IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta)$.

Como em [NS1], usando a Propriedade de Markov facilmente temos que:

$$\begin{aligned}
IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > (s+t)\gamma_\beta) &= \sum_{\eta \in \mathcal{D}} IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma_{s\gamma_\beta}^{-1} = \eta) IP(T^\eta(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta) \\
&= IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma_{s\gamma_\beta}^{-1} = -\underline{1}) IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta) + \\
&\quad + \sum_{\eta \in \mathcal{D} \setminus \{-\underline{1}\}} IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma_{s\gamma_\beta}^{-1} = \eta) IP(T^\eta(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta) \\
&\leq IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta) IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta) + \\
&\quad + \sum_{\eta \in \mathcal{D} \setminus \{-\underline{1}\}} IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma_{s\gamma_\beta}^{-1} = \eta) IP(T^\eta(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta).
\end{aligned}$$

Deste modo

$$\begin{aligned}
\Delta_\beta(s, t) &\leq IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta, \sigma_{s\gamma_\beta}^{-1} \neq -\underline{1}) \\
&\leq IP(\tilde{\sigma}_{s\gamma_\beta}^{-1} \neq -\underline{1}).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > (s+t)\gamma_\beta) &\geq \\
&\geq IP(\sigma_{s\gamma_\beta}^{-1} = -\underline{1}, \sigma_0^{-1} = \sigma_0^{\tilde{\mu}} / T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta) IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta) IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta) \\
&\quad + IP(\sigma_{s\gamma_\beta}^{-1} = -\underline{1}, \sigma_0^{-1} \neq \sigma_0^{\tilde{\mu}} / T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta) IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > s\gamma_\beta) IP(T^{-1}(\mathcal{C}) > t\gamma_\beta).
\end{aligned}$$

Agora, pelo acoplamento B,

$$\begin{aligned}
IP(\tilde{\sigma}_{s\gamma_\beta}^{-1} \neq -\underline{1}) &= IP(\tilde{\sigma}_{s\gamma_\beta}^{-1} \neq -\underline{1}, \tilde{\sigma}_0^{-1} = \tilde{\sigma}_0^{\tilde{\mu}}) + IP(\tilde{\sigma}_{s\gamma_\beta}^{-1} \neq -\underline{1}, \tilde{\sigma}_0^{-1} \neq \tilde{\sigma}_0^{\tilde{\mu}}) \\
&\leq IP(\tilde{\sigma}_{s\gamma_\beta}^{\tilde{\mu}} \neq -\underline{1}) + IP(\tilde{\sigma}_0^{-1} \neq \tilde{\sigma}_0^{\tilde{\mu}}) \\
&= \tilde{\mu}(\mathcal{D} \setminus \{-\underline{1}\}) + \tilde{\mu}(\mathcal{D} \setminus \{-\underline{1}\}).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

A probabilidade acima vai a zero quando β vai a infinito pelo Lema 3 o que finaliza a prova.

Para provar (3.6) observamos que T é maior do que o tempo necessário para a criação do primeiro spin positivo partindo de -1 , assim temos

$$\gamma_\beta \geq e^{\beta(4-h)}.$$

(3.6) segue agora utilizando a parte (b) da Proposição 1. Para trocar γ_β por ET , observe que, por monotonicidade

$$IP(T > \gamma_\beta u) \leq [IP(T > \gamma_\beta)]^u.$$

Usando (3.7) segue que $IP(T > \gamma_\beta) < 1$ se β é grande, tal que podemos usar o Teorema da Convergência Dominada como segue:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{ET}{\gamma_\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\infty IP(T > t) dt}{\gamma_\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\infty IP\left(\frac{T}{\gamma_\beta} > u\right) du = 1.$$

■

II.3.4 Prova do Teorema 3

Como mencionado na introdução, para obtermos a estabilidade das médias temporais precisamos primeiro um minorante para o tempo de *tunnelling* $T^{-1}(+1)$. Utilizando um importante resultado de [Sco] obtemos o seguinte teorema

Teorema 4:

a) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log T^{-1}(+\underline{1}) = 6 - h$ em probabilidade.

b) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log E(T^{-1}(+\underline{1})) = 6 - h.$

Prova: A prova segue do esquema de renormalização desenvolvido em [Sco].

O *Esquema de Iteração* será apresentado na Seção II.4 ou com maiores detalhes na página 101 em [Sco] . Aqui apresentaremos apenas a aplicação imediata.

$$\mathcal{S}^{(0)} = \{-1, +1\}^{\Lambda_N}, \quad M^{(0)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}, \mathcal{R}\},$$

$$\mathcal{S}^{(1)} = M^{(0)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}, \mathcal{R}\}, \quad M^{(1)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}\},$$

$$\mathcal{S}^{(2)} = M^{(1)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}\}, \quad M^{(2)} = \{+\underline{1}\}.$$

Considere $\phi : IN \rightarrow \overline{X}_N$.

$$\begin{aligned} V_1 &= \inf_{\substack{\eta \in M, \\ \zeta \in \mathcal{S}}} V(\eta, \zeta) = \inf_{\substack{\eta \in M, \\ \zeta \in \mathcal{S}}} \inf_{\substack{\phi, t \\ \phi_0 = \eta \\ \phi_t = \zeta}} I_{[0, t]}(\phi) \\ &= \inf_{\substack{\eta \in M, \\ \zeta \in \mathcal{S}}} \inf_{\substack{\phi, t \\ \phi_0 = \eta \\ \phi_t = \zeta}} \sum_{i=0}^{t-1} \Delta(\phi_i, \phi_{i+1}) \\ &= h. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= \inf_{\substack{\eta \in M^{(1)}, \\ \zeta \in S^{(1)}}} V^{(1)}(\eta, \zeta) \\
&= \inf_{\substack{\eta \in M^{(1)}, \\ \zeta \in S^{(1)}}} \inf_{\substack{\phi, t, \\ \phi_0 = \eta, \\ \phi_t = \zeta}} I^{(1)}(\phi) \\
&= \inf_{\substack{\eta \in M^1, \\ \zeta \in S^1}} \inf_{\substack{\phi, t, \\ \phi_0 = \eta, \\ \phi_t = \zeta}} \sum_{i=0}^{t-1} \bar{\Delta}^{(1)}(\phi_i, \phi_{i+1}) \\
&= \inf_{\substack{\eta \in M^{(1)}, \\ \zeta \in S^{(1)}}} \inf_{\substack{\phi, t, \\ \phi_0 = \eta, \\ \phi_t = \zeta}} \sum_{i=0}^{t-1} \bar{\Delta}^{(0)}(\phi_i, \phi_{i+1}) - V_1 \quad \phi_i, \phi_{i+1} \in S^{(1)} \\
&= 6 - 2h.
\end{aligned}$$

Então do Teorema 2.1 em [Sco] temos a prova do Teorema 4.

■

Lema 4: Denotaremos $I(\cdot)$ a função indicadora de $-\underline{1}$ e tome

$R'_\beta = \exp(\beta(3 - h))$, $0 < h < 1$. Então para $\delta > 0$, existe $\beta_0(\delta) < \infty$ tal que

$$\sup_{\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \mathbb{P} \left\{ \left| \frac{1}{R} \int_0^R I(\sigma_s^\eta) ds - 1 \right| > \delta, T^\eta(\mathcal{C}) > R \right\} \leq e^{-c_\delta \frac{R}{R'_\beta}}, \quad (3.13)$$

para $R > 2R'_\beta$ e $\beta > \beta_0$, onde c_δ é uma constante positiva.

Prova : A prova segue de [CGOV].

Se definirmos $t_\beta = \exp(\beta(2h))$, então $t_\beta < R'_\beta$ e $\frac{t_\beta}{R'_\beta} \rightarrow 0$. Considere a seguinte decomposição $(0, R] = \bigcup_{i=1}^{N_\beta} ((i-1)t_\beta, it_\beta] \cup (N_\beta t_\beta, R]$, onde $N_\beta = \lceil \frac{R}{t_\beta} \rceil$.

Se $\frac{t_\beta}{R} < \frac{\delta}{2}$, então

$$\begin{aligned} & \left\{ \left| \frac{1}{R} \int_0^R I(\sigma_s^\eta) ds - 1 \right| > \delta, T^\eta(\mathcal{C}) > R \right\} \\ & \subseteq \left\{ \left| \frac{1}{N_\beta t_\beta} \int_0^{N_\beta t_\beta} I(\sigma_s^\eta) ds - 1 \right| > \frac{\delta}{2}, T^\eta(\mathcal{C}) > N_\beta t_\beta \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Defina as variáveis aleatórias $Y_\beta^i, i = 1, \dots, N_\beta$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Y_\beta^i &= 0, \quad \text{se } \sigma. \text{ visita } -\underline{1} \text{ durante } ((i-1)t_\beta, (i-1)t_\beta + \sqrt{t_\beta}] \\ &\quad \text{e gasta o resto do tempo } ((i-1)t_\beta, it_\beta] \text{ em } (-\underline{1}) \end{aligned}$$

$$= 1, \quad \text{caso contrário.}$$

Então,

$$\begin{aligned} p(\beta) &\stackrel{def}{=} \sup_{\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} IP(Y_\beta^1 = 1, T^\eta(\mathcal{C}) > t_\beta) \\ &\leq \sup_{\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} IP(T^\eta(-\underline{1}) > \sqrt{t_\beta}, T^\eta(\mathcal{C}) > t_\beta) + \\ &\quad + IP(T^{-1}(-\underline{1}^c) < t_\beta). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pela Proposição 1 e (3.9) notamos que $p(\beta)$ tende a zero quando β tende a infinito.

Agora, para $\frac{t_\beta}{R} < \frac{\delta}{2}$ (que ocorre se $R > R'_\beta$ e β é grande o suficiente), podemos obter usando (3.14), que para todo $\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} IP \left\{ \left| \frac{1}{R} \int_0^R I(\sigma_s^\eta) ds - 1 \right| > \delta, T^\eta(\mathcal{C}) > R \right\} \\ \leq IP \left\{ \frac{1}{N_\beta} \sum_{i=1}^{N_\beta} Y_\beta^i > \frac{\delta}{2} - \frac{t}{\sqrt{t_\beta}}, T^\eta(\mathcal{C}) > N_\beta t_\beta \right\} \\ \leq IP \left\{ \sum_{i=1}^{N_\beta} Y_\beta^i > \frac{\delta N_\beta}{4}, T^\eta(\mathcal{C}) > N_\beta t_\beta \right\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

se β é grande o suficiente ($\sqrt{t_\beta} > \frac{4}{\delta}$).

Podemos estimar agora o lado direito de (3.16) para toda $\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} IP \left\{ \sum_{i=1}^{N_\beta} Y_\beta^i > \frac{N_\beta \delta}{4}, T^\eta(\mathcal{C}) > N_\beta t_\beta \right\} \\ \leq \exp\left(-\frac{N_\beta \delta}{4}\right) E \left(1_{(T^\eta(\mathcal{C}) > N_\beta t_\beta)} \exp(Y_\beta^1) \right)^{N_\beta}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agora,

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} E[1_{(T^\eta(C) > t_\beta)} \exp(Y_\beta^1)] \\
 & \leq \sup_{\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} [eIP(Y_\beta^1 = 1, T^\eta(C) > t_\beta) + IP(Y_\beta^1 = 0, T^\eta(C) > t_\beta)] \\
 & = \sup_{\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} [IP(T^\eta(C) > t_\beta) + (e - 1)p(\beta)] \leq \\
 & \leq \exp[(e - 1)p(\beta)],
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $p(\beta)$ está definido em (3.15).

De (3.16)-(3.18) temos que

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} IP\left\{\left|\frac{1}{R} \int_0^R I(\sigma_s^\beta) ds - 1\right| > \delta, T^\eta(C) > R\right\} \\
 & \leq \exp\left[-\frac{N_\beta \delta}{4} + (e - 1)p(\beta)\right] \\
 & \leq \exp\left[-\frac{N_\beta \delta}{8}\right] \leq \exp\left[-c_\delta \frac{R}{R'_\beta}\right],
 \end{aligned}$$

com $c_\delta = \frac{\delta}{12}$ para β suficientemente grande e $R \geq 2R'_\beta$.

■

Lema 5: Existe $R_\beta \rightarrow \infty$ com $\frac{R_\beta}{\gamma_\beta} \rightarrow 0$ tal que para todo $\delta > 0$,

$$\sup_{\eta \in \mathcal{A}} IP\left\{\sup_{0 < s < T^\eta(C) - 2R_\beta} \left|\frac{1}{R_\beta} \int_s^{s+R_\beta} I(\sigma_u^\eta) du - 1\right| > \delta\right\} \rightarrow 0, \tag{3.19}$$

quando $\beta \rightarrow \infty$.

Prova: A prova segue de [CGOV].

Para cada δ positivo e cada l inteiro não negativo temos para R_β a ser escolhido mais tarde que

$$A_l^\beta(\delta) = A_l^\beta = \left\{ \left| \frac{1}{R_\beta} \int_{lR_\beta}^{(l+1)R_\beta} I(\sigma_u^\eta) du - 1 \right| \leq \delta \right\}.$$

Então, (3.19) seguirá se provarmos que, para R_β conveniente, com $\frac{R_\beta}{\gamma_\beta} \rightarrow 0$, temos

$$\inf_{\eta \in \mathcal{A}} \mathbb{P} \left(\bigcap_{0 \leq l \leq l_\beta} A_l^\beta(\delta), l_\beta \geq 1 \right) \rightarrow 1,$$

onde $l_\beta = \inf \{ l \in \mathbb{N} : T^\eta(\mathcal{C}) \leq (l+1)R_\beta \}$.

Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{0 \leq l \leq l_\beta} A_l^\beta, l_\beta \geq 1 \right) &= \sum_{L=1}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{0 \leq l < L} A_l^\beta, l_\beta = L \right) \\ &= \mathbb{P}(l_\beta \geq 1) - \sum_{L=1}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq l < L} (A_l^\beta)^c, l_\beta = L \right) \\ &\geq \mathbb{P}(l_\beta \geq 1) - \sum_{L=1}^{K_\beta} \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq l < L} (A_l^\beta)^c, l_\beta = L \right) - \mathbb{P}(l_\beta > K_\beta). \end{aligned}$$

Para concluirmos a prova de (3.19), queremos escolher R_β e K_β tal que

$$\begin{aligned} (1) \quad & \inf_{\eta \in \mathcal{A}} IP(l_\beta \geq 1) \rightarrow 1, \\ (2) \quad & \sup_{\eta \in \mathcal{A}} IP(l_\beta > K_\beta) \rightarrow 0, \\ (3) \quad & \sup_{\eta \in \mathcal{A}} \sum_{L=1}^{K_\beta} IP\left(\bigcup_{0 \leq l < L} (A_l^\beta)^c, l_\beta = L\right) \rightarrow 0, \text{ quando } \beta \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Note que as condições acima são satisfeitas por:

C1)

$$\inf_{\eta \in \mathcal{A}} IP(l_\beta \geq 1) = \inf_{\eta \in \mathcal{A}} IP(T^\eta(\mathcal{C}) > R_\beta)$$

Considere agora $R_\beta = \exp(\beta(4 - h))$. Então pela Proposição 1 e o Lema 3

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \inf_{\eta \in \mathcal{A}} IP(l_\beta \geq 1) = 1.$$

C2)

$$\sup_{\eta \in \mathcal{A}} IP(l_\beta > K_\beta) \leq \sup_{\eta \in \mathcal{A}} IP(T^\eta(\mathcal{C}) > (K_\beta + 1)R_\beta),$$

Então considere $K_\beta = \exp(\beta(2 - h))$ e temos o resultado pela Proposição 1 e o Lema 3.

C3)

$$\begin{aligned} & \sum_{L=1}^{K_\beta} IP\left(\bigcup_{0 \leq l < L} (A_l^\beta)^c, l_\beta = L\right) \\ & \leq \sum_{L=1}^{K_\beta} \sum_{0 \leq l < L} IP((A_l^\beta)^c, l_\beta > l) \\ & \leq K_\beta^2 \sup_{0 \leq l < K_\beta} IP((A_l^\beta)^c, l_\beta > l). \end{aligned}$$

Pelo Lema 4 se tomarmos $R'_\beta = \exp(\beta(3-h))$ e $R_\beta \geq 2R'_\beta$, este será uniformemente limitado para $\eta \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, por

$$K_\beta^2 \exp(-c_\delta \frac{R_\beta}{R'_\beta}),$$

desde que β seja suficientemente grande. Assim, (3) em (3.20) será verdade se K_β e R_β satisfizerem $R_\beta \geq \exp(\beta(3-h))$, e

$$K_\beta^2 \exp(-\delta R_\beta / R'_\beta) \rightarrow 0, \text{ quando } \beta \rightarrow \infty \text{ para todo } \delta > 0.$$

Do Lema 4, segue imediatamente que para todo $\delta > 0$, e para cada $f \in C_b(\overline{X}_N)$,

$$\sup_{\eta \in \mathcal{A}} \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < s < T^\eta(\mathcal{C}) - 2R_\beta} \left| \frac{1}{R_\beta} \int_s^{s+R_\beta} f(\sigma_u^\eta) du - 1 \right| > \delta \right\} \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

■

A escolha acima de R_β também vale para o teorema com -1 e $+1$ invertidos no Lema 5. Este fato e o uso da Propriedade Forte de Markov em $\tilde{T}$ nos permite concluir a validade de (1.16) .

■

II.3.5 A Saída Padrão

A estimativa de $T^{-1}(+\underline{1})$ sugere a maneira pela qual o processo sai de $-\underline{1}$. Primeiramente note que uma configuração em $\mathcal{B}$ possui, pelo menos, dois spins positivos e a configuração

$$\begin{array}{cccccccc} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & + & - & - & - \\ - & - & - & + & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

η^*

pertence a $\mathcal{B}$.

De fato, qualquer rotação ou translação de η^* pertence a $\mathcal{B}$. Denotemos esta classe por $\mathcal{M}^*$.

Agora, considere $\overline{\mathcal{M}}^2$ a classe de configurações com dois spins positivos e $\mathcal{M}^2$ a classe de configurações com dois spins positivos vizinhos ($\mathcal{M}^2 \subset \overline{\mathcal{M}}^2$). Temos que

Teorema 5:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\sigma_{T^{-1}(\overline{\mathcal{M}}^2)}^{-1} \in \mathcal{M}^2 ; \sigma_{T^{-1}(\mathcal{B})}^{-1} \in \mathcal{M}^*) = 1.$$

Prova: A prova deste resultado torna-se fácil a partir do Teorema 4.

Suponha que $\sigma_{T^{-1}(\overline{\mathcal{M}}^2)}^{-1} \notin \mathcal{M}^2$. Até $T^{-1}(\overline{\mathcal{M}}^2)$ o processo de exclusão apenas translada as configurações com um spin positivo, desta forma utilizando os resultados

para a dinâmica de Glauber [NS1] temos que o tempo necessário para a criação de dois spins positivos não vizinhos é maior do que $\exp(\beta(8-2h-\epsilon))$ com probabilidade próxima de um, para qualquer $\epsilon > 0$ quando β tende a infinito.

Agora, suponha que $\sigma_{T^{-1}(\mathcal{B})}^{-1} \notin \mathcal{M}^*$. Desta maneira, esta configuração tem, pelo menos, três spins positivos. Mas a criação destes três spins, sem passar por $\mathcal{M}^*$, (isto é, o processo de exclusão não ocorre na configuração com dois spins positivos vizinhos), necessita de um tempo maior do que $\exp(\beta(8-3h-\delta))$, com probabilidade tendendo a um, para qualquer delta positivo, quando β tende a infinito, pois somente a dinâmica de Glauber será responsável pela criação de spins positivos.

Como $8-2h > 6-h$ e $8-3h > 6-h$ para qualquer $h < 1$ temos o resultado. ■

Note que o Teorema 5 implica que a saída de $-\underline{1}$ a $\mathcal{B}$, não segue o caminho reverso, contrastando com a dinâmica de Glauber.

II.4.1 Principais Resultados

Nesta seção consideraremos $c(x, y, \eta) = \exp\{-\beta(h + \epsilon)\}$, para $\epsilon > 0$ tal que $h < h + \epsilon \leq 2 - h$. Estes casos podem ser obtidos via o procedimento de renormalização apresentado em [Sco] e por isto estão sendo tratados separadamente. Por facilidade de exposição suporemos que, para estas taxas, o processo evolui e tempo discreto, ou seja,

$$IP(\sigma_n, \sigma_{n+1}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sigma_{n+1} \neq \sigma^x \text{ e } \sigma_{n+1} \neq \sigma^{z,y} \quad \forall x, y, z \in \Lambda_N; \\ \frac{1}{2|\Lambda_N|} c(x, \sigma) & \text{se } \sigma^x = \sigma_{n+1} \text{ para algum } x \in \Lambda_N; \\ \frac{1}{4|\Lambda_N|} c(x, y, \sigma) & \text{se } \sigma_{n+1} = \sigma^{x,y} \text{ para algum } x, y \in \Lambda_N. \end{cases}$$

Verificaremos que se $h < h + \epsilon \leq 2h$ a dimensão da gota crítica ainda não dependerá do campo magnético externo h , porém, se $2h < h + \epsilon \leq 2 - h$ este tamanho será $\lceil \frac{2h+\epsilon}{h} \rceil$, ou seja, para ϵ fixado o tamanho da gota crítica aumentará se h decrescer.

O próximo Teorema formaliza estes resultados.

Teorema 6: Suponha $0 < h < 1$, $\frac{2h+\epsilon}{h} \notin \mathbb{N}$, $h < h + \epsilon \leq 2 - h$ e $\eta \in \mathcal{R}$.

1. Para $h < h + \epsilon \leq 2h$ temos que

a) Se $l(\eta) \leq 2$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(-1) < T^\eta(+1)) = 1.$$

b) Se $l(\eta) \geq 4$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1})) = 1.$$

c) Se $l(\eta) = 3$ então

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1})) > 0,$$

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1})) > 0.$$

2. Para $2h < h + \epsilon \leq 2 - h$ temos que

a) Se $l(\eta) < \frac{2h+\epsilon}{h}$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(-\underline{1}) < T^\eta(+\underline{1})) = 1.$$

b) Se $l(\eta) > \frac{2h+\epsilon}{h}$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T^\eta(+\underline{1}) < T^\eta(-\underline{1})) = 1.$$

O próximo Teorema fornecerá uma estimativa do tempo $T^{-1}(+\underline{1})$ bem como a convergência em distribuição de $T^{-1}(+\underline{1})$ reescalado por sua esperança, quando β tende a infinito.

Teorema 7: Considere $T = \inf\{t \geq 0 : \sigma_t^{-1} = +\underline{1}\}$. Então

$$\frac{T}{ET} \longrightarrow \tau \text{ em distribuição quando } \beta \rightarrow \infty,$$

onde τ é uma variável aleatória exponencial de média 1.

Ainda, para $0 < h < 1$ temos que

a) Se $h < h + \epsilon \leq 2h$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log T = 6 - h + 3\epsilon \text{ em probabilidade,}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log E(T) = 6 - h + 3\epsilon.$$

b) Se $2h < h + \epsilon \leq 2 - h$ e $L = \lceil \frac{2h+\epsilon}{h} \rceil$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log T = \Gamma(h) - (2 - 2h - \epsilon)(2L - 3) \text{ em probabilidade,}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log E(T) = \Gamma(h) - (2 - 2h - \epsilon)(2L - 3);$$

onde $\Gamma(h) = 4L - h(L^2 - L + 1)$.

II.4.2 Demonstrações dos Resultados

As demonstrações dos resultados apresentados na Seção II.4.1 seguem o esquema de renormalização de [Sco]. Para $h < h + \epsilon \leq 2h$ demonstraremos que $T/ET \rightarrow \tau$; τ v.a. $\exp(1)$, quando $\beta \rightarrow \infty$, seguindo os passos da prova do Teorema 2 com algumas alterações nos Lemas 2 e 3. Abaixo apresentaremos de forma sucinta o procedimento mencionado e em seguida as demonstrações propriamente ditas.

Esquema de Renormalização para Cadeias de Markov

Hipóteses básicas. Considere uma Cadeia de Markov X_t com espaço de estados finito S , irredutível e com probabilidades de transição satisfazendo a seguinte condição: para quaisquer $\eta, \zeta \in S$, com $\eta \neq \zeta$, se $IP(\eta, \zeta) > 0$ então

$$\exp(-\Delta(\eta, \zeta)\bar{\beta} - \gamma\bar{\beta}) \leq IP(\eta, \zeta) \leq \exp(-\Delta(\eta, \zeta)\bar{\beta} + \gamma\bar{\beta}), \quad (3.22)$$

onde $\Delta(\eta, \zeta)$ assume os valores $\Delta_0 = 0 < \Delta_1 < \dots < \Delta_n$ e $\gamma = \gamma(\bar{\beta}) \rightarrow 0$ quando $\bar{\beta} \rightarrow \infty$.

O método consiste em classificar os estados de S baseando-se em suas estabilidades. De fato, devido a (3.22) há estados que são completamente instáveis, no sentido que o tempo médio que o processo gasta para sair destes é d e ordem 1 enquanto que em outros casos este tempo é exponencialmente grande em $\bar{\beta}$.

Assim, define-se a primeira escala de tempo, t_1 , correspondendo ao menor tempo médio de saída dos estados estáveis e observa-se a nova cadeia $\bar{X}_t$ nesta nova escala

de tempo. Para esta nova cadeia, se esta for irredutível e se obtivermos estimativas para suas probabilidades de transição do mesmo tipo de (3.22), poderemos iterar nossa análise.

Para cada $\phi : \mathbb{N} \rightarrow S$, $\phi = \{\phi_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ associamos o funcional

$$I_{[0,t]}(\phi) \equiv \sum_{i=0}^{t-1} \Delta(\phi_i, \phi_{i+1}).$$

Podemos definir uma relação de equivalência em S utilizando o funcional acima.

Defina

$$V(\eta, \zeta) \equiv \inf_{\substack{t, \phi \\ \phi_0 = \eta \\ \phi_t = \zeta}} I_{[0,t]}(\phi), \quad e \quad (3.23)$$

$$\eta \sim \zeta \text{ se e somente se } V(\eta, \zeta) = V(\zeta, \eta) = 0.$$

M , o conjunto de mínimos locais, será dado por

$$M = \{\eta \in S : \forall \zeta \in S, \zeta \not\sim \eta, \zeta \neq \eta, V(\eta, \zeta) > 0\}.$$

Sejam

$$V_1 \equiv \inf_{\substack{\eta \in M \\ \zeta \in S}} V(\eta, \zeta) \quad e \quad (3.24)$$

$$t_1 = e^{V_1 \bar{\beta} + \delta \bar{\beta}}, \quad \delta = 2\gamma|S|; \quad \text{a primeira escala de tempo .}$$

Considere Θ o operador translação para a cadeia de Markov X_t definido por

$$\Theta(\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}) = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \dots\}.$$

Denote por Θ_p o operador $\Theta_p = \Theta \circ \Theta \dots \circ \Theta$, p vezes. Definiremos agora, recursivamente, uma sequência de tempos de parada.

$$\tau_0 \equiv \inf\{t > 0; X_t \not\sim X_0\},$$

$$\tau \equiv \inf\{t > \tau_0; X_t \in M\},$$

$$\zeta_1 = \begin{cases} t_1 & \text{se } \tau_0 > t_1, \\ \tau & \text{se } \tau_0 \leq t_1; \end{cases}$$

e para cada $n > 1$,

$$\zeta_n = \zeta_{n-1} + \zeta_1 \circ \Theta_{\zeta_{n-1}}.$$

$\zeta_1, \dots, \zeta_n$ são tempos de parada e $\overline{X}_n = X_{\zeta_n}$ é uma cadeia de Markov homogênea. Para qualquer $\eta, \zeta \in M$ denotemos por $\overline{IP}(\eta, \zeta)$ a probabilidade de transição associada à cadeia $\overline{X}_t$ em M , isto é ,

$$\overline{IP}(\eta, \zeta) = IP(X_{\zeta_n} = \zeta | X_{\zeta_{n-1}} = \eta).$$

Considere

$$\overline{\Delta}(\eta, \zeta) \equiv \inf_{\substack{t, \phi \\ \phi_0 = \eta \\ \phi_t = \zeta \\ \phi_s \notin M \setminus \{\eta, \zeta\}}} I_{[0, t]}(\phi) \quad \forall \eta, \zeta \in M.$$

Se a quantidade acima estiver bem definida então

$$t_1 \exp\{-\overline{\Delta}(\eta, \zeta)\overline{\beta} - \overline{\gamma}\overline{\beta}\} \leq \overline{IP}(\eta, \zeta) \leq t_1 \exp\{-\overline{\Delta}(\eta, \zeta)\overline{\beta} + \overline{\gamma}\overline{\beta}\}; \quad (3.25)$$

onde $\overline{\Delta}(\eta, \zeta) = V_1 < \overline{\Delta}_2 < \dots < \overline{\Delta}_n$ com $\overline{\Delta}_n < |S|\Delta_n$ e

$$\overline{\gamma} = [(|S| + 1)\gamma + \delta + \frac{1 + \ln 2|S|}{\beta}] \vee [\frac{|S|\Delta_n}{\Delta_1}(\gamma + \delta) + \delta].$$

Esquema de Iteração

1. Construa M .
2. Considere em M a nova cadeia $\overline{X}_t$ e calcule suas probabilidades de transição via (3.25).

Desta maneira obtemos uma sequência de cadeias $X_t^{(n)}$ nos espaços $S^{(n)}$ cujas cardinalidades vão diminuindo com n . O esquema de iteração é o seguinte:

$$S^{(0)} = S,$$

$$\Delta^{(0)}(\eta, \zeta) = \Delta(\eta, \zeta) \text{ definido por (3.22),}$$

$$\overline{\Delta}^{(0)}(\eta, \zeta) = \overline{\Delta}(\eta, \zeta), \forall \eta, \zeta \in M \text{ definido por (3.25),}$$

$$M^{(0)} = M \text{ definido após (3.23),}$$

$$V_1 \text{ está definido por (3.24),}$$

e para qualquer $n \geq 1$ definimos as quantidades

$$S^{(n)} = M^{(n-1)},$$

$$\Delta^{(n)}(\eta, \zeta) = \overline{\Delta}^{(n-1)}(\eta, \zeta) - V_n, \quad \forall \eta, \zeta \in S^{(n)}.$$

Para toda $\phi : \mathbb{N} \rightarrow S^{(n)}$:

$$I_{[0,t]}^{(n)}(\phi) = \sum_{i=0}^{t-1} \Delta^{(n)}(\phi_i, \phi_{i+1}),$$

$$V^{(n)}(\eta, \zeta) = \inf_{\substack{t, \phi \\ \phi_0 = \eta \\ \phi_t = \zeta}} I_{[0,t]}^{(n)}(\phi), \quad \forall \eta, \zeta \in S^{(n)},$$

$$\eta \sim^{(n)} \zeta \quad \text{se e somente se} \quad V^{(n)}(\eta, \zeta) = V^{(n)}(\zeta, \eta) = 0,$$

$$M^{(n)} = \{\eta \in S^{(n)} : \forall \zeta \in S^{(n)}, \eta \not\sim^{(n)} \zeta, \zeta \neq \eta, V^{(n)}(\eta, \zeta) > 0\},$$

$$\overline{\Delta}^{(n)}(\eta, \zeta) = \inf_{\substack{\phi, t \\ \phi_0 = \eta, \\ \phi_t = \zeta}} I_{[0,t]}^{(n)}(\phi), \quad \forall \eta, \zeta \in M^{(n)},$$

$$V_{n+1} = \inf_{\substack{\eta \in M^{(n)}, \\ \zeta \in S^{(n)}}} V^{(n)}(\eta, \zeta),$$

$$t_{n+1} = e^{V_{n+1}\overline{\beta} + \delta\overline{\beta}}, \quad \delta = 2|S|\gamma.$$

Aplicação do Esquema ao Nosso Problema

Primeiramente vamos utilizar o esquema descrito para demonstrar o Teorema 6.

A dificuldade nesta aplicação é estimar $\overline{\Delta}^{(n)}(\eta, \zeta)$, $\forall \eta, \zeta \in M^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Antes de apresentarmos o esquema propriamente dito iremos estimar estas quantidades.

Como o conjunto de mínimos será formado pelas configurações estáveis, $\mathcal{R}^*$, (definição 2 pag.20), estimaremos as quantidades acima para estas configurações no passo 0.

Para $\eta \in \mathcal{R}^*$ considere $\eta_{(+L_j^i)}$ e $\eta_{(-L_j^i)}$ as configurações estáveis obtidas a partir de η pela criação ou aniquilação de uma faixa L_j^i de tamanho l_j^i no retângulo R^i .

Se η é estável na escala 0 ($\eta \in M$) então $\eta_{(+L_j^i)}$ também será estável ou, com a criação desta nova faixa em R^i , existe $k \in I$, com $\text{dist}(R^i, R^k) = 2$. Neste caso considere $\eta_{(+L_j^i)}$ tal que seu conjunto de sítios positivos contenha o menor retângulo que contém $R^i \cup L_j^i \cup R^k$.

Analogamente, se $R^i \setminus L_j^i$ é um retângulo com menor lado maior ou igual a 2 então $\eta_{(-L_j^i)}$ ainda pertencer a M , caso contrário $\eta_{(-L_j^i)} = \cup_{k \neq i} R^k$.

É fácil ver que $\Delta(\eta, \eta_{(+L_j^i)}) \leq h + \epsilon$; pois uma exclusão (nas bordas) seguida de T_+ gera uma nova faixa. Por outro lado, qualquer sítio vazio de η possui no máximo 1 vizinho ocupado e portanto, pela dinâmica de Glauber este sítio tornar-se-á ocupado com probabilidade menor ou igual a $c_1 e^{-\beta(2-h)}$, $c_1 > 0$; o que implica que $\Delta(\eta, \eta_{(+L_j^i)}) = h + \epsilon$.

Considere $\eta \in \mathcal{R}^*$, $\zeta = \eta_{(-L_j^i)}$ e $L_j^i = L$ fixado, o tamanho da faixa a ser aniquilada.

Observe que:

- a) Uma exclusão seguida de T_- só poderá eliminar três partículas quando estas formarem um bloco isolado.
- b) A eliminação de uma partícula pela dinâmica de Glauber poderá ocorrer via erosão de cantos ($e^{-\beta h}$) ou erosão de meio ($e^{-\beta(2+h)}$).
- c) A partir de b) verifica-se que a eliminação de uma partícula do meio da faixa (com três vizinhos ocupados) ocorrerá via a dinâmica de exclusão seguida de T_- .
- d) Uma exclusão (seguida de T_-) ocorrendo em uma partícula vizinha a de canto eliminará duas partículas caso o tamanho da faixa ainda seja maior do que 3.
- e) Após a criação de um bloco de três partículas isoladas (via uma exclusão) é necessário uma outra exclusão seguida de T_- para eliminar este bloco, ou seja, são necessárias duas exclusões para eliminar quatro partículas o que equivale ao item d) duas vezes consecutivas.

Dadas as observações acima, para cada L calculamos $I_{[0,t]}(\phi)$ supondo x partículas eliminadas via erosão de canto e as restantes via uma exclusão seguida de T_- . Desta maneira temos que

$$I_{[0,t]}(\phi) = \begin{cases} xh + (\frac{L-1-x}{2})(h + \epsilon), & \text{se } \begin{matrix} L \text{ ímpar e } x \text{ par,} \\ \text{ou } L \text{ par e } x \text{ ímpar.} \end{matrix} \\ xh + (\frac{L-x}{2})(h + \epsilon), & \text{se } \begin{matrix} L \text{ par e } x \text{ par ou} \\ L \text{ ímpar e } x \text{ ímpar,} \end{matrix} \end{cases}$$

para $x \in \{0, \dots, L-1\}$.

Para minimizar a expressão acima vamos considerar três casos.

1. Se $h < h + \epsilon \leq 2h$ e L é par então

$$\overline{\Delta}(\eta, \eta_{(-L_j^i)}) = h + (\frac{L-2}{2})(h + \epsilon); \quad (3.26)$$

devido às observações a) - e), pois como $2h > h + \epsilon$ o processo eliminará a faixa de duas em duas partículas via uma exclusão seguida de T_- . Quando restarem apenas duas partículas basta eliminar uma delas com um erosão de canto (h) e T_- eliminará a última partícula com taxa 1.

2. Se $h < h + \epsilon \leq 2h$ e L é ímpar então

$$\overline{\Delta}(\eta, \eta_{(-L_j^i)}) = (\frac{L-1}{2})(h + \epsilon); \quad (3.27)$$

devido às observações a) - e) pois o processo eliminará a faixa de duas em duas partículas via uma exclusão seguida de T_- . Quando restarem três partículas basta uma única exclusão seguida de T_- .

3. Se $2h < h + \epsilon \leq 2 - h$ então

$$\overline{\Delta}(\eta, \eta_{(-L_j^i)}) = (L - 1)h; \quad (3.28)$$

devido às observações a) - e) pois como $2h < h + \epsilon$ o processo eliminará duas partículas via duas erosões de canto consecutivas; ou seja, a faixa será erodida via erosões de canto a menos da última partícula que será eliminada com taxa 1.

Esquema para o caso $2h < h + \epsilon \leq 2 - h$

Neste caso, devido a (3.28) haverá uma competição entre $h(L - 1)$ e $h + \epsilon$.

Seguindo os passos da Seção 3 de [Sco] teremos:

Passo 0: Para qualquer $\sigma \in S^{(0)}$ denote por $C_+(\sigma)$ o conjunto dos sítios positivos:

$$C_+(\sigma) \equiv \{x \in \Lambda_N : \sigma(x) = +1\}.$$

Lema 3.1(0)': Uma configuração $\sigma \in M$ se e só se

$$\forall x \in C_+(\sigma) \quad \sum_{y: |y-x|=1} \sigma(y) \geq 0,$$

$$\forall x \in C_-(\sigma) \quad \sum_{y: |y-x|=1} \sigma(y) \leq -2.$$

Isto significa que uma configuração $\sigma \in M$ se e só se for uma configuração estável (definição 2, pag. 20).

Prova : Como a taxa de exclusão é menor do que 1 a demonstração é análoga ao Lema 3.1(0) de [Sco]. ■_{Lema3.1(0)'}

Lema 3.2(0)' : A cadeia $X_t^{(0)} \equiv X_t$ não possui configurações equivalentes e assim $M = S^{(1)}$.

Prova: Análoga ao Lema 3.2(0) de [Sco] pois a taxa de exclusão é menor do que 1. ■_{Lema3.2(0)'}

Lema 3.3(0)': Para $l_c = \lceil \frac{2h+\epsilon}{h} \rceil$ temos

$$(a) \quad \overline{\Delta}(\eta, \eta_{(+L_j^i)}) = h + \epsilon,$$

$$\overline{\Delta}(\eta, \eta_{(-L_j^i)}) \begin{cases} = h(l_j^i - 1) & \text{se } l_j^i < l_c; \\ > h + \epsilon & \text{se } l_j^i > l_c. \end{cases}$$

(b) Para $\sigma \notin \{\eta_{(+L_j^i)}, \eta_{(-L_j^i)}\}$, $\forall i \in I, j = 1, 2$ pelo menos uma das seguintes afirmações valem

1. O processo deverá criar mais que uma faixa

$$\overline{\Delta}(\eta, \sigma) \geq (h + \epsilon)k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}.$$

2. O processo deverá eliminar mais que uma faixa das bordas dos retângulos

$$\overline{\Delta}(\eta, \sigma) \geq \sum_i h(l_1^i - 1),$$

ou faixas que não sejam das bordas

$$\overline{\Delta}(\eta, \sigma) \geq 2(h + \epsilon).$$

(c) Considere $\sigma_{\mathcal{Q}_l}$ a configuração tal que $C_+(\sigma_{\mathcal{Q}_l}) = \mathcal{Q}_l$ com $\mathcal{Q}_l$ um quadrado de lado l ; então

$$\overline{\Delta}(-\underline{1}, \sigma_{\mathcal{Q}_2}) = 6 - h + \epsilon$$

e para todo $\sigma \in M, \sigma \neq \sigma_{\mathcal{Q}_2}$

$$\overline{\Delta}(-\underline{1}, \sigma) \geq \overline{\Delta}(-\underline{1}, \sigma_{\mathcal{Q}_2}) + K(h + \epsilon),$$

onde K é o número de faixas que deverão ser criadas.

(d) Ainda,

$$\overline{\Delta}(\sigma, \eta) = h \text{ então } H(\sigma) > H(\eta).$$

Prova: O item (a) já foi discutido anteriormente.

Em (b) basta observar que um spin positivo de uma faixa que não seja das bordas pode mudar de sinal via exclusões seguidas de T_- ou via erosões de meio.

(c) segue do Teorema 5 da Seção II.3.5., pois a criação do terceiro spin positivo poderá ocorrer via Glauber ou via exclusão seguida de T_+ . Ainda, como já foi visto, uma faixa será criada via uma exclusão seguida de T_+ .

(d) Pelos itens (a) e (b) temos que se $\sigma = \cup_{i \in I} R^i$ então $\eta = \cup_{i \in I} R^i \cup L_1^i$, onde L_1^i é uma faixa de tamanho 2 e assim $H(\eta) < H(\sigma)$. ■_{Lema 3.3(0)'}

Lema 3.4(0)':

$$V_1 = h, \quad t_1 = e^{h\beta + \delta\beta}.$$

Prova: Segue do Lema 3.3(0)'.

■_{Lema 3.4(0)'}

Os passos $n, n+1$ e $l_c - 2$ seguirão, agora, da mesma forma que em [Sco], pags. 113-118 ; substituindo $2 - h$ por $h + \epsilon$.

Esquema para o caso $h < h + \epsilon \leq 2h$

Denote por $\mathcal{R}_m^*$ as configurações $\eta \in \mathcal{R}^*$ com $l_1^k \geq m, \forall k \in \mathbb{N}$.

Passo 0:

$$S^{(0)} = \{-1, +1\}^{\Lambda_N}, \quad M^{(0)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}, \mathcal{R}^*\},$$

$$V_1 = h;$$

pois para destruir uma faixa de comprimento 2 basta uma erosão de canto. Por outro lado, se $\eta \in \mathcal{R}^*$, $c(x, \eta) \leq e^{-\beta h}$, $\forall x \in \Lambda_N$ e $c(x, y, \eta) = e^{-\beta(h+\epsilon)} \forall x, y \in \Lambda_N$.

Passo 1:

$$S^{(1)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}, \mathcal{R}^*\}, \quad M^{(1)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}, \mathcal{R}^* \setminus \mathcal{R}_2^*\},$$

$$V_2 = h + \epsilon - h;$$

pois para criar uma faixa basta uma exclusão seguida de T_+ e para destruir uma faixa de comprimento 3 basta uma exclusão seguida de T_- .

Passo 2:

$$S^{(2)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}, \mathcal{R}^* \setminus \mathcal{R}_2^*\}, \quad M^{(2)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}\},$$

$$V_3 = 6 - 2h + 2\epsilon;$$

pelo item (c) do Lema 3.3(0)'.

Passo 3:

$$S^{(3)} = \{-\underline{1}, +\underline{1}\}, \quad M^{(3)} = \{+\underline{1}\}.$$

■ *Teorema 6*

Vamos agora demonstrar o Teorema 7.

1. Para $2h, h + \epsilon \leq 2 - h$ temos pelo esquema que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log T = 4L - h(L^2 - L + 1) - (2 - 2h - \epsilon)(2L - 3) \text{ em probabilidade;}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log ET = 4L - h(L^2 - L + 1) - (2 - 2h - \epsilon)(2L - 3).$$

Ainda, os espaços $S^{(n)}$ não possuem configurações equivalentes e portanto aplicando o Teorema 2.2 de [Sco] e argumentos padrões temos a convergência em distribuição de T/ET .

2. Para $h < h + \epsilon \leq 2h$ temos pelo esquema que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log T = V_1 + V_2 + V_3 = 6 - h + 3\epsilon \text{ em probabilidade;}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log ET = V_1 + V_2 + V_3 = 6 - h + 3\epsilon.$$

Agora observe que:

- a. Em $S^{(0)}$ não há configurações equivalentes pois como a taxa de exclusão é estritamente menor do que 1 teremos o caso anterior.

b. Em $S^{(1)}$ não há configurações equivalentes pois

$$\overline{\Delta}^{(1)}(\eta, \zeta) = \overline{\Delta}(\eta, \zeta) - h$$

e como $h + \epsilon - h > 0$ também neste caso a taxa de exclusão não interferirá na relação de equivalência.

c. Em $S^{(2)}$ há configurações equivalentes pois tanto para destruir uma faixa de tamanho 3 como para criar uma nova faixa basta uma exclusão seguida de saltos de taxa 1. Por exemplo, a configuração $\eta_{3 \times 3}$ é equivalente a $\eta_{3 \times 4}$.

Desta forma, provaremos a convergência em distribuição utilizando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 2 substituindo o Lema 2 pelo seguinte

Lema2':

Considere $T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} = \inf \{t \geq 0 : \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} \in \mathcal{A}\}$, então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(T_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mu}} < e^{\beta(h+\epsilon+\delta_1)}) = 1, \forall \delta_1 > 0.$$

Prova :

Para demonstrar este Lema utilizaremos os mesmos argumentos da prova da Proposição 1.

Considere a Cadeia de Markov $\{\sigma_{t_i}\}_{i \geq 1}$ definida na demonstração da Proposição 1, pag.22, (a cadeia de Markov cujo espaço de estados é composto pelas configurações estáveis de $\mathcal{B}$.) .

Observe que neste caso,

$$\eta_{3 \times j}, \quad j \in \{3, \dots, N-2\} \in \mathcal{B}.$$

Nesta cadeia cada salto espera um tempo exponencial com média da ordem de $e^{\beta(h+\epsilon)}$. Defina $N(t)$ o número de saltos no intervalo $[0, t]$; $N(t)$ pode ser superestimado por um Processo de Poisson com taxa λt , onde λ é da ordem de $e^{-\beta(h+\epsilon)}$. Como o número de passos em $[0, e^{\beta(h+\epsilon+\delta_1)}]$, $\forall \delta_1 > 0$, vai a infinito e $\mathcal{B}$ é composto por estados transitórios, então neste intervalo de tempo o processo sai de $\mathcal{B}$ com probabilidade próxima de 1 quando $\beta \rightarrow \infty$ e portanto temos o resultado. ■

Para o próximo lema utilizaremos o Acoplamento B.

Lema 3': $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(-\underline{1}) = 1$.

Prova : Considere $\Theta = \inf\{t \geq 0 : \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} = -\underline{1}\}$. Pelo Lema 2' sabemos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\Theta < e^{\beta(h+\epsilon+\delta_3)}) = 1, \quad \forall \delta_3 > 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq -\underline{1}, \text{ para algum } t \in [0, e^{\beta(4-h-\delta_2)}]) = 0.$$

Desta maneira,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} = \tilde{\sigma}_t^{-1}, \text{ para algum } t < e^{\beta(h+\epsilon+\delta_3)}) = 1.$$

Para $t \in [e^{\beta(h+\epsilon+\delta_3)}, e^{\beta(4-h-\delta_2)}]$ e pelo acoplamento B temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq -1) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left\{ IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq 1, \tilde{\sigma}_t^{-1} = \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}) + IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq -1, \tilde{\sigma}_t^{-1} \neq \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}) \right\} \\ &\geq \lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{-1} \neq -1, \tilde{\sigma}_t^{-1} = \tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}}) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} IP(\tilde{\sigma}_t^{\tilde{\mu}} \neq -1) \\ &= \tilde{\mu}(\mathcal{D} \setminus \{-1\}) \geq 0. \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(-1) = 1.$$

Portanto, utilizando os Lemas 2', 3' e seguindo os passos da prova do Teorema 2, concluímos a demonstração.

■ Teorema 7

Referências Bibliográficas

- [GOV] M. Cassandro, A. Galves, E. Olivieri and M. E. Vares, Metastable behavior of stochastic dynamics: A pathwise approach, *Journal Statistical Physics*, **35**:603, (1984).
- [CS] P. Clifford and A. Sudbury, A model for spatial conflict. *Biometrika*, **60**:581, (1973).
- [GOV] A. Galves, E. Olivieri and M. E. Vares, Metastability for a class of dynamical systems subject to small random perturbations. *Ann. Probab.* **15**:1288 (1987).
- [Dob1] R. L. Dobrushin, Markov processes with a large number of locally interacting components: existence of a limit process and its ergodicity, *Problems Inform. Transmission*, **7**:149, (1971).
- [Dob2] R. L. Dobrushin, Markov processes with many locally interacting components - the reversible case and some generalizations. *Problems Inform. Transmission*, **7**:235, (1971).
- [KO1] R. Kotecky and E. Olivieri, Droplet dynamics for asymmetric Ising model, *Journal Statistical Physics*, **70**:1121 (1993).
- [KO2] R. Kotecky and E. Olivieri, Shapes of growing droplets - A model of escape from a metastable phase, *Journal Statistical Physics*, **75**:409, (1994).

- [Ligg] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1985.
- [N] E. J. Neves, Resultados sobre Metaestabilidade num Modelo de Ising Estocástico, *Tese de Doutorado - IME-USP* , (1990).
- [NS1] E. J. Neves and R. H. Schonmann, Critical droplets and metastability for a Glauber dynamics at very low temperatures, *Probab. Theory Related Fields* , **91**:331 (1992).
- [NS2] E. J. Neves and R. H. Schonmann, Behavior of droplets for a class of Glauber dynamics at very low temperatures, *Commun. Math. Phys.* **137**:209 (1991).
- [S] R. H. Schonmann, The pattern of escape from metastability of a stochastic Ising model, *Comm. Math. Phys.*, **147**:231, (1992).
- [Sco] E. Scoppola, Renormalization group for Markov chains and application to metastability, *Journal Statistical Physics* **73**:83 (1993).
- [Spi1] F. Spitzer, Random processes defined through the interaction of an infinite particle system, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, **89**:201, (1969).
- [Spi2] F. Spitzer, Interaction of Markov Process, *Adv. Math.* , **5**:246, (1970).