**CALIBRAÇÃO ABSOLUTA
COM ERROS NAS VARIÁVEIS**

Claudia Regina Oliveira de Paiva Lima

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Estatística**
Orientador: **Prof. Heleno Bolfarine**
Co-Orientadora: **Profa. Mônica Carneiro Sandoval**

CALIBRAÇÃO ABSOLUTA COM ERROS NAS VARIÁVEIS

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida e defendida por
Claudia Regina Oliveira de Paiva Lima e aprovada
pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 03 de abril de 1996.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Heleno Bolfarine(Orientador)-IME-USP
- Profa. Dra. Denise Aparecida Botter-IME-USP
- Profa. Dra. Edna Miazaki-UnB
- Prof. Dr. Enrico Colossimo-UFMG
- Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro-UFPE

*Ao meu marido, Manoel Raimundo,
por compreender a oscilação de sentimentos
pela qual passei no decorrer deste trabalho.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente colaboraram comigo e, em especial,

- à minha família pela paciência, incentivo e dedicação que tiveram nestes últimos anos;
- ao Prof. Dr. Heleno Bolfarine pelas idéias e orientação segura em todos os momentos da elaboração deste trabalho;
- à Profa. Dra. Mônica Carneiro Sandoval, pelo excelente trabalho de co-orientação, por sua amizade, dedicação e valiosas sugestões;
- aos professores do IME pela formação que me deram com todo carinho, em especial à Profa. Dra. Iracema Martin Bund e ao Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka;
- aos funcionários do IME, notadamente Lourdes, Helena, Cecília, Dna. Maria e Lilian pela colaboração em todos os momentos necessários;
- aos amigos do IME que me cativaram, Antônio, Celma, Cláudia, Filidor, Linda, Manuel, Miguel, Oscar, Thelma e Wânia;
- aos colegas de trabalho da Universidade Federal da Paraíba - UFPB pelo apoio e credibilidade que depositaram em mim e no meu trabalho, em especial aos professores João Agnaldo e Ronei Marcos;
- aos amigos que ajudaram na minha adaptação a São Paulo, notadamente a família de Rubens de Moraes, Júlio da Motta Singer e Clóvis de Araújo Peres;
- a Walter Vicente Fernandes, pelo eficiente trabalho de digitação;
- ao apoio financeiro da CAPES/PICD.

RESUMO

Neste trabalho é considerado o problema de calibração linear em modelos com erros nas variáveis (Fuller, 1987), tanto funcional quanto estrutural. A maior parte é dedicada ao caso aditivo sob a suposição de normalidade dos erros. Alguns resultados preliminares são obtidos para o caso multiplicativo (Hwang, 1986) sem a suposição de normalidade admitindo, apenas, que as distribuições dos erros pertencem a uma família de distribuições com o quarto momento finito. Para cada modelo em estudo, vários estimadores (previsores, no caso estrutural) da quantidade de interesse são propostos, sendo o objetivo principal a obtenção de aproximações de primeira ordem para o vício e o erro quadrático médio desses estimadores. Estudos de simulação e alguns conjuntos de dados apresentados na literatura ilustram comparações entre os estimadores (previsores) propostos.

ABSTRACT

In this thesis we consider the linear calibration problems in measuring error model (Fuller, 1987). Both, functional and structural models are considered. Most of the thesis is dedicated to the additive case under the normality assumption. Some preliminary results are reported for the multiplicative model (Hwang, 1986), assuming only that the error distributions have finite fourth moments. For each model under consideration, several estimators (predictors, in the structural case) of the quantity of the interest are proposed. The main interest is to get the first order approximation for the bias and mean squared error of the estimators. Simulation studies and the use of some data sets presented in the literature illustrate comparisons between the proposed estimators (predictors).

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Formulação do problema	1
1.2	Definição dos objetivos	6
2	Considerações gerais	8
2.1	Modelo de calibração linear	9
2.1.1	Comparação dos estimadores pontuais	11
2.2	O modelo de calibração com erros nas variáveis	13
2.2.1	Modelo de calibração funcional	15
2.2.2	Modelo de calibração estrutural	16
2.3	Resumo do conteúdo	16
3	Modelo de calibração funcional com razão de variâncias λ conhecida	19
3.1	Estimadores de máxima verossimilhança e propriedades	19
3.2	Outros estimadores e suas propriedades	32
3.3	Comparações entre os estimadores	39
3.4	Representação dos erros quadráticos médios em termos de formas quadráticas	43
3.5	Exemplos	49
3.6	O uso de um valor incorreto para λ	54
3.7	Um estudo de simulação	61
4	Modelo de calibração funcional com uma das variâncias conhecida	63
4.1	Estimadores consistentes e outras propriedades	63
4.2	Outros estimadores e suas propriedades	73
4.3	Comparações entre os estimadores	76
4.4	Representação dos erros quadráticos médios em termos de formas quadráticas	80
4.5	Exemplo	86
4.6	O uso de um valor incorreto para σ_δ^2	89
4.7	Um estudo de simulação	94
5	Modelo de calibração estrutural	101
5.1	Previsores propostos	101
5.2	Previsores clássicos de U_0 combinados com os estimadores de máxima verossimilhança	107
5.2.1	Razão de variâncias conhecida	107
5.2.2	Uma das variâncias conhecida	114
5.2.3	Coeficiente de atenuação conhecido	117
5.3	Previsores de U_0 combinados com os estimadores de mínimos quadrados	119
5.4	Comparações entre os previsores	128
5.5	Exemplos	148
5.6	O uso de um valor incorreto na identificação do modelo	151

5.6.1 Razão das variâncias conhecida	151
5.6.2 Uma das variâncias conhecida.....	162
5.6.3 Coeficiente de atenuação conhecido.....	166
5.7 Um estudo de simulação	173
6 Modelo de calibração multiplicativo	183
6.1 Modelo multiplicativo com erros nas variáveis	183
6.2 Modelo de calibração multiplicativo estrutural.....	185
6.2.1 Previsores de U_0 e suas propriedades	185
6.2.2 Um estudo de simulação	199
6.3 Modelo de calibração multiplicativo funcional.....	201
6.3.1 Estimadores de U_0 e suas propriedades	201
6.3.2 Um estudo de simulação	213
Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	215
Referências bibliográficas	218

Capítulo 1

Introdução

1.1 Formulação do problema

Calibração estatística é bastante importante em aplicações práticas de diversas áreas. Na Biologia e na Química a técnica é aplicada para determinar concentrações de soluções e composições de materiais (através de fotômetros de chama, de cromatógrafos, etc.). Na Física e na Engenharia, tem despertado muito interesse na aferição de instrumentos de medição de grandezas físicas (como amperímetros, trenas, etc.). Na Medicina, é muito importante para a calibração de instrumentos que são indicadores do estado de saúde individual (termômetros, medidores de pressão sanguínea, entre outros), como também para as avaliações dos efeitos de dosagem de drogas.

A calibração estatística é um processo pelo qual a escala de um instrumento de medição é determinada ou ajustada a partir de um experimento de calibração, conhecido na inferência Bayesiana como experimento informativo.

É importante em qualquer discussão sobre calibração distinguir entre “calibração absoluta” e “calibração comparativa”. Williams (1969a) enfatiza que o termo calibração na literatura é aplicado sem distinção aos dois tipos de problemas que são conceitualmente diferentes, conduzindo a modelos estatísticos diferentes. Na calibração comparativa, pretende-se determinar a relação entre diversos testes ou instrumentos que fornecem medidas indiretas similares, não existindo, contudo, medidas padrões como referência.

Um exemplo é a capacidade pulmonar humana, que pode ser medida, por exemplo, por dois instrumentos, um mais tradicional, e outro mais moderno, portátil e de operação mais simples. Submetendo um grupo de indivíduos aos dois instrumentos, as medidas (ambas sujeitas a erros) dos dois aparelhos podem ser calibradas. Cochran (1943), Williams (1969), Barnett (1966, 1969), Theobald e Mallinson (1978) e Galea-Rojas (1995) discutem calibração comparativa. Outras referências desse modelo podem ser encontradas em Rosenblatt e Spiegelman (1981) e Bolfarine e Galea-Rojas (1995).

Na calibração absoluta, uma técnica para obtenção de medidas de forma rápida ou não padrão é calibrada por uma medida conhecida ou feita com erro experimental desprezível. O uso deste termo é o que está mais próximo do significado original da palavra calibração que, segundo Williams (1969a), correspondia à medida do calibre (ou diâmetro interno) de um tubo. O problema de calibração estatística é uma forma de predição inversa e alguns autores chamam-no de regressão inversa, predição inversa ou problema de discriminação (Hoadley, 1970). Como exemplo, pode-se considerar a situação descrita em Osborne (1991), onde um químico deseja estabelecer uma curva de calibração para usar na medição de quantidades de certa droga A em amostras enviadas para serem analisadas em um laboratório especializado. Consideram-se dois estágios no processo de calibração. No primeiro estágio, as amostras a serem analisadas têm quantidades conhecidas (X) da droga A, determinadas por um método padrão extremamente exato, mas demorado e de alto custo. Uma nova medida da quantidade da droga A é obtida através do método teste (Y), que é relativamente rápido e de baixo custo. Esses dados resultantes constituem o experimento de calibração e são usados para estimar uma curva de calibração f , que relaciona Y com X . No segundo estágio, amostras com quantidades desconhecidas da droga A são analisadas aplicando o método teste, e através da curva de calibração estimada no primeiro estágio, a quantidade da droga A determinada pelo método padrão é estimada para cada nova amostra. Para uma dada amostra, uma ou mais medidas,

usando o método teste, podem ser feitas. Neste trabalho, será examinada essencialmente a calibração absoluta, sendo referenciada apenas por calibração.

Muitos artigos têm se dedicado ao problema de calibração linear, pois existem muitas situações onde a natureza da relação entre as variáveis implica na linearidade da regressão. Contudo existem circunstâncias nas quais a curva de calibração linear não é adequada, tais como na calibração de termômetros, de amperímetros e nos ensaios radioimunológicos. Nesses casos, uma das alternativas é linearizar os dados através de transformações e procurar ajustar uma curva de calibração linear. Uma outra alternativa é ajustar diretamente uma curva de calibração não linear. Alguns resultados teóricos para o problema de calibração não linear foram desenvolvidos por Tallis (1969), Scheffé (1973), Schwartz (1977), Tiede e Pagano (1979), Lwin e Maritz (1980), Clark (1980), Lundberg e De Maré (1980), Knafl et al. (1984), Lwin e Spiegelman (1986) e Osborne (1990). A maioria deles considera o caso linear como de interesse especial devido à sua grande importância prática.

Grande parte da literatura em modelos de calibração linear assume que os erros de observação associados à variável aleatória Y se distribuem normalmente. Nesse caso, o estimador de máxima verossimilhança da quantidade X a ser estimada é denominado estimador clássico. Baseado na regressão inversa de X em Y , apesar de X não ser uma variável aleatória, com a suposição (falsa) de que os erros do modelo são independentes dos Y_i 's, obtém-se, pelo método dos mínimos quadrados, um estimador de X , conhecido como estimador inverso. Na literatura existe muita discussão e discordância sobre qual dos estimadores pontuais, o clássico ou o inverso, é o melhor estimador para X e, também, sobre qual o melhor critério para compará-los.

Historicamente, esta discussão pode ser resumida do seguinte modo. Inicialmente, Eisenhart (1939) rejeitou o estimador inverso por este não ser um estimador de máxima verossimilhança, enquanto que o clássico tinha esta propriedade. A partir de então, todos os artigos tratavam exclusivamente do estimador clássico, como pode ser visto em

Williams (1959), Brownlee (1965) e Linning e Mandel (1964), entre outros. Tal comportamento foi mantido até a publicação do artigo de Krutchokoff (1967). Nesse artigo, o autor conclui, através de resultados de estudos de simulação (procedimento de Monte Carlo), que o estimador inverso tem o erro quadrático médio uniformemente menor que o do estimador clássico e, portanto, deveria ser preferível. Contudo, num artigo posterior, Krutchokoff (1969) reconsiderou os resultados anteriores mostrando que, quando o valor a ser estimado extrapola os limites dos valores X_i prefixados, esta superioridade desaparece. Williams (1969) criticou o método de comparação de Krutchokoff provando que o erro quadrático médio do estimador clássico é infinito, enquanto que o do estimador inverso é finito para $n \geq 4$, onde n é o tamanho da amostra na primeira etapa. Berkson (1969) e Shukla (1972) obtiveram expressões assintóticas para o vício e para o erro quadrático médio dos dois estimadores, mostrando que o estimador clássico é consistente e que o erro quadrático médio assintótico do estimador clássico é menor que o do inverso, exceto quando o parâmetro de interesse está próximo à média dos valores iniciais de X . Halperin (1970) compara os dois estimadores baseando-se em propriedades como consistência, no erro quadrático médio assintótico e no critério da “proximidade” (closeness) relativa definido por Pitman. Sua conclusão quando o tamanho da amostra na primeira etapa do modelo é grande, é similar aos resultados e às conclusões obtidas até então. Conclui, também, que na prática o intervalo em torno da média dos valores iniciais de X , onde o estimador inverso tem melhor desempenho que o clássico, segundo os critérios utilizados por ele, é pequeno. Martinelle (1970) e Saw (1970) obtiveram resultados equivalentes aos obtidos por Berkson (1969), Halperin (1970) e posteriormente por Shukla (1972), mas cada um com o seu próprio critério de comparação.

Em 1981, Lwin obteve expressões para os erros quadráticos médios aproximados sem a suposição de normalidade dos erros, admitindo apenas que a distribuição dos erros pertence a uma família de distribuições com o quarto momento finito. Uma solução Bayesiana

para o problema de calibração pode ser vista em Hoadley (1970) onde argumenta-se que o estimador clássico não é satisfatório, de um ponto de vista independente do fato de seu erro quadrático médio ser infinito, como argumenta Krutchokoff (1967, 1969), mas contesta Williams (1969) e Halperin (1970). Hoadley (1970) parece ser o único autor a dar suporte analítico para o estimador inverso, assumindo para o parâmetro de interesse, uma distribuição t -Student centrada em $\bar{X}$, com priori conjunta não-informativa para os parâmetros da curva de calibração. A distribuição a posteriori obtida para o parâmetro de interesse tem como média o estimador inverso, no caso de se ter uma única observação no segundo estágio do problema de calibração. Esse resultado não é justificável, sem que a distribuição a priori acima seja razoável para descrever a incerteza a priori sobre o parâmetro de interesse, restringindo, assim, a validade do estimador inverso como um estimador de Bayes. Um enfoque alternativo é considerado em Rodrigues et al. (1995). Brown (1982) conclui que os resultados obtidos por Hoadley (1970) implicam que o método inverso é satisfatório, se o parâmetro desconhecido está aproximadamente centrado no conjunto de valores pré-escolhidos para X no experimento de calibração. Contudo a performance do estimador inverso não é satisfatória, quando o parâmetro X está fora deste intervalo. Outras soluções Bayesianas podem ser vistas em Dunsmore (1968) e em Hunter e Lamboy (1981).

Os artigos citados tratam da “calibração controlada”, isto é, consideram que os valores de X são fixados ou pré-escolhidos. O exemplo do químico, citado anteriormente, é um problema de calibração controlada. Recentemente, alguns autores estudam o problema de calibração quando, tanto a variável dependente quanto a variável independente, são sujeitas a erros de mensuração. Este tipo de experimento é denominado “calibração natural ou aleatória”. Brown (1982) enfatiza a importância da distinção entre calibração controlada e aleatória, apresentando exemplos referentes aos dois problemas.

No modelo onde tanto Y quanto X apresentam erros de medição, Mandel (1984)

propõe um método de estimação baseado em transformações dos dados originais, quando a razão das variâncias e o coeficiente de correlação entre os erros são conhecidos. O autor aplica esse método no modelo de calibração, concluindo que a divergência entre os dois tratamentos estatísticos, propostos na literatura para este modelo, não acontece com o método proposto por ele. Lwin e Spiegelman (1986) estudam o modelo quando os erros associados à variável independente são pequenos e têm um limite finito conhecido. Eles também constróem intervalos de confiança para um valor desconhecido da variável aleatória (v.a.) X , associado a um valor conhecido da variável aleatória Y . Carroll e Spiegelman (1986) discutem o significado de um erro de medida pequeno na variável independente, com a idéia de que, se tal erro for pequeno, pode-se seguramente ignorá-lo e assim usar a análise de mínimos quadrados ordinários. Eles mostram para o modelo de calibração que dois critérios utilizados na literatura são úteis e importantes para decidir quando um erro de medida em X pode ser considerado como pequeno. Um deles é apropriado para a estimação da v.a. X dada uma nova observação da v.a. Y , e o outro critério para o comprimento do intervalo de confiança da v.a. X dado um valor observado da v.a. Y . Lee e Yum (1989) comparam, através de expressões aproximadas para o erro quadrático médio, alguns procedimentos utilizados no problema de calibração. Estes procedimentos são baseados na estimação de máxima verossimilhança e de mínimos quadrados ordinários combinados com os estimadores clássico e inverso, assumindo a razão das variâncias dos erros de medida conhecida, com apenas uma observação na segunda etapa do modelo.

1.2 Definição dos objetivos

O objetivo geral deste trabalho está relacionado com um estudo estatístico teórico de alguns modelos envolvendo calibração linear absoluta. Neste trabalho contempla-se tanto o modelo funcional, que supõe que a variável independente do modelo é um parâmetro,

quanto o modelo estrutural, que supõe que a variável independente do modelo é aleatória. Baseado no artigo de Shukla (1972) para o caso do modelo de calibração linear absoluta controlada, é considerado neste trabalho um estudo assintótico dos estimadores propostos para cada modelo contemplado, e então comparados segundo o critério do erro quadrático médio. Finalmente, um estudo de sensibilidade dos estimadores propostos com relação a certas suposições que tornam o problema de estimação factível, é desenvolvido.

Desta forma, os objetivos específicos desta tese podem ser resumidos como segue:

- (1) apresentar o modelo de calibração linear usual e os resultados obtidos por Shukla (1972);
- (2) apresentar o modelo de calibração com erros aditivos nas variáveis, tanto funcional quanto estrutural, onde a ênfase é:
 - (2.1) estudar o comportamento assintótico do vício e do erro quadrático médio dos estimadores propostos quando, tanto o tamanho da amostra na primeira etapa quanto na segunda etapa do modelo de calibração, são grandes;
 - (2.2) derivar as expressões dos vícios e dos erros quadráticos médios dos estimadores propostos em cada modelo em estudo, quando apenas o tamanho da amostra na primeira etapa do problema de calibração, é grande;
 - (2.3) desenvolver um estudo da sensibilidade dos estimadores propostos, quando certas suposições que tornam possível o problema de estimação não são corretas;
 - (2.4) apresentar o modelo de calibração multiplicativo enfocando principalmente os objetivos (2.1) e (2.2) descritos acima.

Capítulo 2

Considerações gerais

Conforme descrito no Capítulo 1, o problema de calibração usual é caracterizado por duas variáveis Y e X , supostamente relacionadas através de uma função f conhecida, tais que Y (variável dependente) é um valor sujeito a um erro ε de observação e X (variável independente) é uma quantidade fixa e controlada, sem erro de medida, definida em um intervalo I denominado intervalo de calibração.

Numa primeira etapa, chamada de *experimento de calibração*, amostra-se n observações da variável aleatória Y , a partir de valores prefixados de X , de modo a se estimar a função f que relaciona as duas variáveis. Pode-se, então, relacionar Y e X através do modelo $Y = f(X) + \varepsilon$. Em uma segunda etapa, na *calibração propriamente dita*, fixa-se ou observa-se uma amostra aleatória de tamanho k ($k \geq 1$) da variável Y , correspondente a um valor de X desconhecido, digamos X_0 . Deseja-se, então, estimar este valor desconhecido X_0 baseado nas informações do ponto de interesse e da função estimada no experimento de calibração. Este procedimento é muitas vezes utilizado quando se tem duas técnicas para obter uma medida de um fenômeno, uma X exata, mas demorada e de alto custo, e outra Y , rápida e de baixo custo, mas não muito precisa. Supondo que as duas medidas se relacionam de alguma forma, o experimentador quer, usando o método impreciso e rápido, determinar o valor exato da medida.

2.1 Modelo de calibração linear

O modelo de calibração linear pode ser formalmente definido por:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

$$Y_{0i} = \alpha + \beta X_0 + \varepsilon_{0i}, \quad i = n+1, \dots, n+k, \quad (2.2)$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{0n+1}, \dots, \varepsilon_{0n+k}$ são mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância σ^2 . Considera-se $X_1, \dots, X_n$ constantes conhecidas e $\alpha, \beta, X_0, \sigma^2$ valores (parâmetros) desconhecidos.

Grande parte da literatura em modelos de calibração assume que os erros (ε_i 's e ε_{0i} 's) se distribuem normalmente com variâncias iguais. Uma extensão, quando as variâncias não são iguais, pode ser vista em Perng e Tong (1974).

Sob o modelo (2.1) e (2.2) com a suposição de normalidade, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\alpha, \beta, \sigma^2, X_0/X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{0n+k}) \\ = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n+k}{2}} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{n+k} (Y_{0i} - \alpha - \beta X_0)^2 \right\}.$$

Igualando-se a zero as derivadas parciais do logaritmo desta expressão com relação aos parâmetros do modelo, determina-se os estimadores de máxima verossimilhança, que podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X} \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \\ \hat{X}_{0C} &= \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}}, \quad \hat{\beta} \neq 0 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n+k} \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{n+k} (Y_{0i} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \hat{X}_{0C})^2 \right] \\ &= \frac{1}{n+k} \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{n+k} (Y_{0i} - \bar{Y}_0)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{Y}_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=n+1}^{n+k} Y_{0i}$.

O estimador de X_0 , $\widehat{X}_{0C}$ é frequentemente chamado de *estimador clássico*.

Observações:

- (i) Os estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ dos parâmetros α e β , respectivamente, dependem só de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, de modo que toda a teoria de regressão linear simples referente a estes estimadores continua válida. Portanto, além de estimadores de máxima verossimilhança, estes são estimadores lineares não viciados de variância mínima. São, também, assintoticamente eficientes e consistentes em probabilidade. Veja, por exemplo, Graybill (1976).
- (ii) O estimador de σ^2 , $\hat{\sigma}^2$, depende das duas etapas do experimento de calibração, isto é, é função de $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ e dos valores Y_{0i} , $i = n+1, \dots, n+k$, observados posteriormente para se estimar X_0 . Isso não ocorre quando $k = 1$, ou seja, quando tem-se uma única observação da variável aleatória Y_0 na segunda etapa.

Pode-se reescrever o modelo (2.1) como

$$X_i = \gamma + \phi Y_i + \varepsilon'_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

sendo $\varepsilon'_i = -\varepsilon_i \phi$, $\gamma = -\alpha/\beta$, $\phi = 1/\beta$.

Pelo método dos mínimos quadrados com a suposição (falsa) de que os ε'_i são independentes de Y_i , para $i = 1, \dots, n$, obtém-se a reta ajustada

$$\widehat{X}_i = \hat{\gamma} + \hat{\phi} Y_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde $\hat{\gamma} = \bar{X} - \hat{\phi} \bar{Y}$, $\hat{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{yy}}$. Observado um valor da variável aleatória Y_0 no modelo acima, tem-se um estimador para o X_0 correspondente, o qual é dado por

$$\widehat{X}_{0I} = \hat{\gamma} + \hat{\phi} Y_0.$$

Este é usualmente chamado *estimador inverso*, já que é baseado na regressão inversa de X em Y , apesar de X não ser uma variável aleatória. Dada uma amostra aleatória de tamanho k da variável aleatória Y_0 , cuja função de densidade é determinada por X_0 , obtém-se

$$\widehat{X}_{0I} = \widehat{\gamma} + \widehat{\phi}\overline{Y}_0, \quad (2.4)$$

com $\overline{Y}_0$ como definido acima.

2.1.1 Comparação dos estimadores pontuais

Como foi visto no Capítulo 1, existe uma grande polêmica sobre qual dos estimadores pontuais, o clássico definido em (2.3), ou o inverso, definido em (2.4), é o melhor estimador para X_0 e, também, sobre qual o melhor critério para compará-los. Shukla (1972) comparou os estimadores acima citados, a partir das expressões aproximadas para seus erros quadráticos médios.

Supondo $\beta \neq 0$ e que os ε_i 's são normalmente distribuídos, Shukla (1972), expandindo expressões apropriadas em série de Taylor, obteve aproximações de ordem n^{-1} das esperanças e variâncias de $\widehat{X}_{0C}$, que são dadas por

$$E(\widehat{X}_{0C}) = X_0 + \frac{\sigma^2}{A\beta^2}(X_0 - \overline{X}),$$

$$\text{Var}(\widehat{X}_{0C}) = \frac{\sigma^2}{\beta^2} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{3\sigma^2}{kA\beta^2} + \frac{(\overline{X} - X_0)^2}{A} \right].$$

Portanto,

$$EQM(\widehat{X}_{0C}) = \frac{\sigma^2}{\beta^2} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{3\sigma^2}{kA\beta^2} + \frac{(\overline{X} - X_0)^2}{A} \right].$$

De maneira similar, para $\widehat{X}_{0I}$ tem-se

$$E(\widehat{X}_{0I}) = X_0 + \frac{\sigma^2}{\beta^2\sigma_x^2\theta}(\overline{X} - X_0) - \frac{2\sigma^2(\overline{X} - X_0)}{n\beta^2\sigma_x^2\theta^3}$$

e

$$\text{Var}(\widehat{X}_{0I}) = \frac{\sigma^2}{\beta^2 \theta^2} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{(\bar{X} - X_0)^2}{A} + \frac{\sigma^2(\theta^2 - 2\theta + 6)}{kA\beta^2 \theta^2} \right] - \frac{2\sigma^4(\bar{X} - X_0)^2}{n\theta^4 \beta^4 \sigma_x^4},$$

de modo que

$$EQM(\widehat{X}_{0I}) = \frac{\sigma^2}{\beta^2 \theta^2} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{(\bar{X} - X_0)^2}{A} + \frac{\sigma^2(\theta^2 - 2\theta + 6)}{kA\beta^2 \theta^2} \right] + \frac{\sigma^4(\bar{X} - X_0)^2}{\beta^4 \sigma_x^4 \theta^2} \left(1 - \frac{6}{n\theta^2} \right),$$

onde $A = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = (n-1)\sigma_x^2$ e $\theta = 1 + \frac{\sigma^2}{\beta^2 \sigma_x^2}$.

Das expressões acima, é evidente que ambos os estimadores são viciados, mas o estimador clássico é assintoticamente não viciado, enquanto que o estimador inverso não é, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\widehat{X}_{0C}) &= X_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E(\widehat{X}_{0I}) &= X_0 + \frac{\sigma^2(\bar{X} - X_0)}{\beta^2 \sigma_x^2 \theta}. \end{aligned}$$

Note que ambos os vícios são nulos no ponto $X_0 = \bar{X}$ e podem ser pequenos quando X_0 está próximo a $\bar{X}$. Como os estimadores fornecem estimativas viciadas de X_0 , é mais apropriado compará-los através de seus erros quadráticos médios do que através de suas variâncias. Tomando $k = 1$, é fácil ver que o $EQM(\widehat{X}_{0C})$ é sempre maior que $EQM(\widehat{X}_{0I})$ quando $X_0 = \bar{X}$. Se o número de observações de $Y_1, \dots, Y_n$, na estimação da linha de calibração, tender a infinito, ou seja, $n \rightarrow \infty$, pelas aproximações dadas anteriormente tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\widehat{X}_{0C}) &= \frac{\sigma^2}{k\beta^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\widehat{X}_{0I}) &= \frac{\sigma^2}{k\beta^2 \theta^2} + \frac{\sigma^4(\bar{X} - X_0)^2}{\beta^4 \sigma_x^4 \theta^2}. \end{aligned}$$

Então, no limite,

$$EQM(\widehat{X}_{0C}) - EQM(\widehat{X}_{0I}) = \frac{\sigma^4}{k\beta^4 \theta^2 \sigma_x^4} \left[2\sigma_x^2 + \frac{\sigma^2}{\beta^2} - k(\bar{X} - X_0)^2 \right].$$

Portanto, para k fixo o erro quadrático médio do estimador inverso apresenta-se menor que o correspondente do estimador clássico quando $X_0 = \bar{X}$. Além disso, se o tamanho da amostra na segunda etapa for muito grande, ou seja $k \rightarrow \infty$, tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\widehat{X}_{0C}) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\widehat{X}_{0I}) = \frac{\sigma^4}{\beta^4 \sigma_x^4 \theta^2} (\bar{X} - X_0)^2 ,$$

isto é, o estimador clássico é consistente, enquanto que o inverso não é. Com esses resultados Shukla (1972) conclui que, quando o número de observações no experimento de calibração é pequeno, o estimador inverso produz um erro quadrático médio menor que o do estimador clássico, particularmente para interpolação. Quando o número de observações é grande na segunda etapa do experimento de calibração, é improvável que o método inverso seja mais vantajoso que o método clássico, exceto em casos triviais. Em muitos casos, não é possível tomar mais que uma observação na calibração propriamente dita, ou seja, $k = 1$. Nesse caso, o método inverso de estimação é preferível quando X_0 está próximo de $\bar{X}$, desde que o erro quadrático médio seja tomado como critério de comparação. Entretanto, para amostras grandes é aconselhável preferir um estimador com propriedades desejáveis (consistência), o que sugere o uso do estimador clássico na ausência de qualquer informação a priori sobre o valor desconhecido X_0 (vide Shukla, 1972).

Extensões dos resultados acima para o caso em que a distribuição dos erros não é normal, mas com terceiros e quartos momentos finitos, podem ser vistos em Lwin (1981).

2.2 O modelo de calibração com erros nas variáveis

Na Seção 2.1, foi considerado que a variável independente envolvida no modelo é medida sem erro. Apesar dos constantes avanços tecnológicos terem tornado cada vez mais precisos os procedimentos de mensuração, não é realista supor que tais variáveis são

medidas sem erro, e o mais comum é não se ter acesso aos seus verdadeiros valores. Logo, essa suposição é muitas vezes violada, particularmente em ciências sociais ou biológicas. Fuller (1987) relaciona, em seu livro, uma série de variáveis nesta situação, tais como idade, sexo, nível de instrução, nível sócio econômico, etc. Um modelo que leva em conta o fato de que toda medida geralmente contém erro, quer seja provocado pelo instrumento de medição ou pelo operador, pode ser formalmente definido por:

$$y_i = \alpha + \beta U_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

onde α e β são parâmetros desconhecidos. Contudo, nem y e nem U são observados diretamente, de modo que os valores observados são X_i e Y_i , onde

$$Y_i = y_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

$$X_i = U_i + \delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

com $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \delta_1, \dots, \delta_n$ sendo os erros de observação.

Como na segunda etapa do problema de calibração, observa-se uma amostra aleatória de tamanho k ($k \geq 1$) da variável Y correspondente a um valor de U desconhecido, o modelo de calibração com erros nas variáveis pode ser formalmente definido por:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta U_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ X_i &= U_i + \delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ Y_{0i} &= \alpha + \beta U_0 + \varepsilon_{0i}, \quad i = n+1, \dots, n+k, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{0n+1}, \dots, \varepsilon_{0n+k}$ são mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância σ_ε^2 . Também é assumido que $\delta_1, \dots, \delta_n$ são mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância σ_δ^2 . Sprent (1990) cita que várias denominações foram utilizadas para o modelo definido por (2.5) - (2.7), dentre os quais “regressão com erros em x ”, “regressão com erros em ambas variáveis”

e “modelo com erros nas variáveis”. Mas, alguns autores utilizam atualmente somente a nomenclatura: modelo funcional e modelo estrutural. Neste texto, o modelo de interesse (2.8) será denotado por *modelo de calibração funcional* e *modelo de calibração estrutural*.

Um outro modelo que tem sido considerado na literatura é o modelo multiplicativo (Hwang, 1986). Neste modelo, a equação (2.7) que representa o fato de que os erros de medida são aditivos, é substituída pela equação $X_i = U_i \delta_i$, $i = 1, \dots, n$. Essa equação representa o fato de que os erros de medida são multiplicativos.

2.2.1 Modelo de calibração funcional

Considerando o modelo definido por (2.8) com as suposições

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \delta_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\delta^2 \end{pmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{0i} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad i = n + 1, \dots, n + k, \quad (2.10)$$

onde N denota a distribuição normal univariada e N_2 denota a distribuição normal bivariada, e supondo $U_1, \dots, U_n$ como sendo constantes (parâmetros), tem-se o chamado *modelo de calibração funcional*. Nesse caso, o número de parâmetros cresce com o tamanho da amostra. Os $(n + 5)$ parâmetros do modelo são: $\alpha, \beta, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\delta^2, U_0, U_1, \dots, U_n$. Estes n últimos são parâmetros incidentais.

No modelo funcional pode ser facilmente visto que o logaritmo da função de verossimilhança é ilimitado. Veja, por exemplo, Bolfarine, Rodrigues e Cordani (1992). Como a primeira etapa do problema de calibração funcional é o modelo funcional usual, tem-se, então, o mesmo problema. Portanto, suposições adicionais são necessárias para tornar factível o problema de estimação no modelo de calibração funcional. Algumas das suposições comumente adotadas são: (i) $\lambda = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\delta^2$ conhecido; (ii) σ_ε^2 (ou σ_δ^2) conhecido; (iii) σ_ε^2 e σ_δ^2 conhecido. Os estimadores de máxima verossimilhança de α, β e U_i , $i = 1, \dots, n$, baseados na suposição (iii), dependem de σ_ε^2 e σ_δ^2 somente através de λ (Barnett, 1969).

2.2.2 Modelo de calibração estrutural

O modelo definido por (2.8), porém com U_i ($i = 1, \dots, n$) sendo variável aleatória, será denominado *modelo de calibração estrutural*. Para este trabalho serão feitas suposições adicionais de que $U_i \sim N(\mu_u, \sigma_u^2)$, sejam independentes entre si e também independentes de ε_i e de δ_i , para todo $i = 1, \dots, n$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} U_i \\ \varepsilon_i \\ \delta_i \end{pmatrix} \sim N_3 \left(\begin{pmatrix} \mu_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\delta^2 \end{pmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{0i} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad i = n+1, \dots, n+k, \quad (2.12)$$

onde N_3 denota a distribuição normal trivariada.

Sob a suposição de normalidade, o modelo estrutural é não identificável, no sentido de que dois diferentes vetores de parâmetros podem levar à mesma distribuição (Fuller, 1987). As suposições comumente adotadas para tornar o modelo identificável são as mesmas que no caso do modelo funcional. Pode-se verificar que, neste caso, o conhecimento do coeficiente de atenuação, $k_u = \sigma_u^2 / (\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2)$, também torna o modelo estrutural identificável (Fuller, 1987). O coeficiente de atenuação representa o quanto da variabilidade de X_i é explicada pela variabilidade de U_i . À luz do modelo estrutural, o modelo de calibração estrutural tem o mesmo problema de identificabilidade e também serão adotadas as suposições usuais para contornar o problema.

2.3 Resumo do conteúdo

No sentido de atingir os objetivos expostos no Capítulo 1, este trabalho é composto por mais quatro capítulos e uma conclusão geral. O conteúdo destes capítulos são resumidos abaixo.

No Capítulo 3, são apresentados os estimadores de máxima verossimilhança no modelo de calibração funcional quando a razão das variâncias dos erros é conhecida. É também

estudado o comportamento assintótico destes estimadores, quando o tamanho da amostra da primeira e da segunda etapas são grandes e quando apenas o tamanho da amostra da primeira etapa do experimento de calibração, é grande. Baseado no trabalho de Shukla (1972) onde é considerado o modelo de calibração sem erros nas variáveis, são obtidas, sob o modelo em estudo, expressões do erro quadrático médio até ordem n^{-1} para os estimadores clássico e inverso de U_0 combinados com os estimadores de máxima verossimilhança e de mínimos quadrados de α e β . As conclusões a respeito do comportamento dos estimadores são obtidas de modo analítico e via simulações. Como foi visto no Capítulo 1, Lee e Yum (1989) obtiveram expressões aproximadas para o erro quadrático médio para os estimadores citados acima, com apenas uma observação na segunda etapa do modelo. Neste capítulo será visto que as expressões obtidas por eles estão incorretas até ordem n^{-1} . Também será feito um estudo quando um valor incorreto para a razão das variâncias (λ) dos erros é usado para calcular o estimador de máxima verossimilhança.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo do modelo de calibração funcional quando uma das variâncias é conhecida. Inicialmente, as propriedades assintóticas do estimador proposto para U_0 baseado em estimadores consistentes de α e β são estudadas. Como no Capítulo 3, alguns procedimentos sob o modelo em estudo são comparados através de expressões aproximadas para o erro quadrático médio. Os procedimentos são baseados nos estimadores usuais de mínimos quadrados e também nos estimadores consistentes de α e β sob o modelo (2.8) combinados com o estimador clássico e inverso de U_0 . As comparações serão reexaminadas, assumindo que um valor incorreto para a variância dos erros de medida é usado para calcular o estimador do parâmetro de interesse U_0 . Estes resultados podem ser vistos como uma adaptação dos resultados obtidos por Ketellaper (1983) no modelo funcional usual, onde o interesse é na estimação de α e β .

No Capítulo 5, estuda-se o modelo de calibração estrutural considerando as suposições necessárias para tornar o modelo identificável. Vale ressaltar que para esse modelo o

problema é mais um problema de previsão, pois U_0 é uma variável aleatória. Nesse caso, para a obtenção do estimador inverso, não é necessário fazer a suposição (falsa) de que os erros são independentes dos Y_i 's. Portanto, nesse modelo, faz mais sentido o uso do estimador inverso que pode ser visto como um previsor de U_0 . O previsor condicional de U_0 proposto por Lwin e Maritz (1980) para o modelo de calibração aleatório é adaptado ao modelo estrutural. São, então, comparados os procedimentos citados nos capítulos anteriores e o previsor condicional combinado com os estimadores de máxima verossimilhança e de mínimos quadrados ordinários, através do erro quadrático médio assintótico. Nesse capítulo, também, será feito um estudo dos previsores de U_0 quando um valor incorreto, para a suposição em questão, é usado no cálculo dos estimadores de máxima verossimilhança.

O Capítulo 6 é dedicado ao estudo do modelo de calibração com erro nas variáveis seguindo o enfoque funcional e estrutural quando os erros de medida são multiplicativos. Nesse modelo será considerado o caso particular onde $\alpha = 0$. Como nos capítulos anteriores, alguns procedimentos sob o modelo em estudo são comparados através de expressões aproximadas para o erro quadrático médio. Os procedimentos são baseados nos estimadores usuais de mínimos quadrados e também nos estimadores consistentes de β combinados com o estimador clássico e inverso de U_0 .

Todos os resultados obtidos nos capítulos 3, 4, 5 e 6 são baseados em aproximações para grandes amostras, enquanto que aplicações dos procedimentos utilizados podem envolver amostras de tamanhos moderados. Um estudo de simulação, baseado no erro quadrático médio empírico, é feito nestes quatro capítulos para observar o comportamento dos estimadores propostos em amostras simuladas, tanto para amostras de tamanhos moderados quanto para grandes amostras.

Capítulo 3

Modelo de calibração funcional com razão de variâncias λ conhecida

Neste capítulo são obtidas expressões, até termos de primeira ordem, para o vício, a variância e o erro quadrático médio de alguns estimadores propostos para U_0 . Esses estimadores serão comparados baseando-se nas expressões aproximadas para seus vícios e erros quadráticos médios. Também será feito um estudo com o estimador de máxima verossimilhança quando é usado um valor incorreto para a razão das variâncias dos erros, que é suposta conhecida para tornar factível o problema de estimação. Para finalizar este capítulo, resultados de um estudo de simulação são apresentados, onde os objetivos principais são as comparações entre os erros quadráticos médios dos estimadores propostos.

3.1 Estimadores de máxima verossimilhança e propriedades

Neste capítulo será considerado que $\sigma_\varepsilon^2 = \lambda\theta$ e $\sigma_\delta^2 = \theta$, com λ conhecido, de modo que (2.9) e (2.10) podem ser reescritos como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \delta_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \lambda\theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{0i} \sim N(0, \lambda\theta), \quad i = n+1, \dots, n+k. \quad (3.2)$$

Portanto, de (2.8), (3.1) e (3.2), tem-se que

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} U_i \\ \alpha + \beta U_i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \lambda\theta \end{pmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

e

$$Y_{0i} \sim N(\alpha + \beta U_0; \lambda\theta), \quad i = n+1, \dots, n+k,$$

com $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0)$, mutuamente independentes, onde $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ e $\mathbf{Y}_0 = (Y_{0n+1}, \dots, Y_{0n+k})$. Note que estão sendo consideradas k observações independentes, $Y_{0n+1}, \dots, Y_{0n+k}$, da variável Y_0 , correspondente ao valor não observado X_0 na segunda etapa do procedimento de calibração.

Conseqüentemente, a função de verossimilhança pode ser escrita como

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \theta, U_0, U_i / \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0) \\ = \frac{1}{(2\pi\lambda)^{\frac{n+k}{2}}} \frac{1}{\theta^n} \frac{1}{\theta^{\frac{k}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\lambda\theta} \left[\sum_{i=1}^n \lambda(X_i - U_i)^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta U_i)^2 \right] \right\} \\ \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\lambda\theta} \sum_{i=n+1}^{n+k} (Y_{0i} - \alpha - \beta U_0)^2 \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Igualando-se a zero as derivadas parciais do logaritmo da verossimilhança com respeito a $(\alpha, \beta, \theta, U_0, U_i)$, para $i = 1, \dots, n$, chega-se aos seguinte estimadores de máxima verossimilhança:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_V &= \bar{Y} - \hat{\beta}_V \bar{X}, \\ \hat{\beta}_V &= \frac{(S_{yy} - \lambda S_{xx}) + \sqrt{(S_{yy} - \lambda S_{xx})^2 + 4\lambda S_{xy}^2}}{2S_{xy}}, \quad S_{xy} \neq 0, \\ \hat{U}_{iV} &= \frac{\lambda X_i + \hat{\beta}_V (Y_i - \hat{\alpha}_V)}{\lambda + \hat{\beta}_V^2}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \hat{\theta}_V &= \frac{n(S_{yy} + \hat{\beta}_V^2 S_{xx} - 2\hat{\beta}_V S_{xy})}{(2n+k)(\lambda + \hat{\beta}_V^2)} + \frac{k}{(2n+k)} \frac{S_{y_0 y_0}}{\lambda}, \\ \hat{U}_{0CV} &= \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_V}{\hat{\beta}_V}, \quad \hat{\beta}_V \neq 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \sum_{i=1}^n Y_i/n, & \bar{X} &= \sum_{i=1}^n X_i/n, & \bar{Y}_0 &= \sum_{i=n+1}^{n+k} Y_{0i}/k, \\ S_{yy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, & S_{xx} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, & S_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \\ e & & S_{y_0y_0} &= \frac{1}{k} \sum_{i=n+1}^{n+k} (Y_{0i} - \bar{Y}_0)^2.\end{aligned}$$

Observação: Vale ressaltar que os estimadores do intercepto α e da inclinação β na relação linear (2.8) só dependem da primeira etapa do problema de calibração, a exemplo do que ocorre no modelo usual (sem erros). O estimador de U_0 tem a mesma estrutura que em (2.3), mas com $\hat{\beta}$ substituído por $\hat{\beta}_V$. Por isso, é também denominado “estimador clássico”.

A seguir será estudado o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança quando o tamanho da amostra na primeira e na segunda etapas do experimento de calibração são grandes, ou seja, assume-se que $k = an$, $a > 0$, que também cresce com n . É considerado que $|\hat{\beta}_V| > 0$ com probabilidade 1.

Teorema 3.1 *Sob o modelo (2.8), (3.1), (3.2), com λ conhecido e com a suposição de que a seqüência $\{U_i = 1, 2, \dots\}$ dos parâmetros incidentais é tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U} = \mu < \infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(U_i - \bar{U})^2}{n} = \nu^2 < \infty ,$$

então $\hat{\alpha}_V$, $\hat{\beta}_V$, $\hat{U}_{0CV}$ e $\tilde{\theta}_V = \left(\frac{2n+k}{n+k}\right) \hat{\theta}_V$ são fortemente consistentes. A matriz de covariâncias de $(\hat{\alpha}_V, \hat{\beta}_V, \hat{U}_{0CV}, \tilde{\theta}_V)$, quando $k = an$, $a \in Q^+$, $k \in \mathbb{Z}^+$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\theta(\lambda + \beta^2) & \begin{bmatrix} \frac{1}{n} + \frac{\bar{U}^2(1+t)}{n(\Sigma(U_i - \bar{U})^2/n)} & -\frac{\bar{U}(1+t)}{n(\Sigma(U_i - \bar{U})^2/n)} & \frac{1}{\beta} \left[-\frac{1}{n} + \frac{(U_0 - \bar{U})\bar{U}(1+t)}{n(\Sigma(U_i - \bar{U})^2/n)} \right] & 0 \\ & \frac{1+t}{n(\Sigma(U_i - \bar{U})^2/n)} & -\frac{(U_0 - \bar{U})(1+t)}{n\beta(\Sigma(U_i - \bar{U})^2/n)} & 0 \\ & & \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{n} + \frac{\lambda}{k(\lambda + \beta^2)} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2(1+t)}{n(\Sigma(U_i - \bar{U})^2/n)} \right] & 0 \\ & & & \frac{2\theta}{(n+k)(\lambda + \beta^2)} \end{bmatrix} \\ & + O(n^{-2})\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{n}, \\ t &= \frac{\lambda\theta}{(\lambda + \beta^2)(\sum(U_i - \bar{U})^2/n)}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Prova: Tem-se que $X_1, X_2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes com $E(X_i) = U_i$ e $\text{Var}(X_i) = \theta$, $i = 1, 2, \dots$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta}{n^2} = \frac{\theta\pi^2}{6} < \infty.$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov, conclui-se que $\bar{X} - \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$. Como $\bar{U} \rightarrow \mu$, por hipótese, segue que $\bar{X} \xrightarrow{\text{q.c.}} \mu$, quando $n \rightarrow \infty$. De modo similar, mostra-se que

$$\begin{aligned}\bar{Y} &\xrightarrow{\text{q.c.}} \alpha + \beta\mu, & S_{xx} &\xrightarrow{\text{q.c.}} \theta + \nu^2, \\ S_{xy} &\xrightarrow{\text{q.c.}} \beta\nu^2, & S_{yy} &\xrightarrow{\text{q.c.}} \lambda\theta + \beta^2\nu^2, \\ \bar{Y}_0 &\xrightarrow{\text{q.c.}} \alpha + \beta U_0 & \text{e } S_{y_0 y_0} &\xrightarrow{\text{q.c.}} \lambda\theta.\end{aligned}$$

Como $\hat{\alpha}_V, \hat{\beta}_V, \hat{U}_{0CV}$ e $\hat{\theta}_V$ são funções contínuas dos momentos amostrais, exceto quando $S_{xy} = 0$ e $\hat{\beta}_V = 0$, eventos de probabilidade zero, segue das expressões dos estimadores de máxima verossimilhança em (3.3) que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\alpha}_V, \hat{\beta}_V, \hat{U}_{0CV}, \hat{\theta}_V) = (\alpha, \beta, U_0, \theta)$ com probabilidade um, o que prova a consistência forte (veja também Gleser, 1985).

Para obter a matriz de covariâncias assintótica será utilizada a seguinte expressão aproximada para a covariância de duas funções contínuas dos momentos amostrais (vide Barnett, 1969)

$$C(g(\mathbf{m}), h(\mathbf{m})) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k g^{(i)} h^{(j)} C(m_i, m_j) + \sum_{i=1}^k g^{(i)} h^{(i)} V(m_i) + O(n^{-2}), \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$ são os momentos amostrais; $g^{(i)}(\cdot)$ e $h^{(i)}(\cdot)$ são as derivadas parciais de $g(\mathbf{m})$ e $h(\mathbf{m})$, respectivamente, com respeito a m_i , avaliadas na $E(\mathbf{m})$; $V(m_i)$ e $C(m_i, m_j)$ são as respectivas variâncias e covariâncias dos momentos amostrais. Para o caso em estudo, o vetor dos momentos amostrais considerado é $\mathbf{m} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Y}_0, S_{xx}, S_{xy},$

$S_{yy}, S_{y_0y_0}$). É fácil mostrar que

$$\text{Var}(\bar{X}) = \theta/n, \quad (3.6)$$

$$\text{Var}(\bar{Y}) = \lambda\theta/n, \quad (3.7)$$

$$\text{Var}(\bar{Y}_0) = \lambda\theta/k. \quad (3.8)$$

Com alguns resultados de Kendall e Stuart (1952, 5ª edição, vol. I, p.322), mostra-se que

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{xx}) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{(\delta_i - \bar{\delta})^2}{n}\right) + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 \text{Var}(\delta_i) \\ &= \frac{2\theta^2}{n} - \frac{2\theta^2}{n^2} + \frac{4 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 \theta}{n^2}, \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\text{Var}(S_{xx}) = \frac{2\theta}{n} \left[\theta + \frac{2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n} \right] + O(n^{-2}). \quad (3.9)$$

De modo equivalente, mostra-se que

$$\text{Var}(S_{xy}) = \frac{\theta(\lambda + \beta^2)}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(U_i - \bar{U})^2}{n} + \frac{\lambda\theta^2}{n} + O(n^{-2}) \quad (3.10)$$

$$\text{Var}(S_{yy}) = \frac{2\lambda\theta}{n} \left[\lambda\theta + 2\beta^2 \sum_{i=1}^n \frac{(U_i - \bar{U})^2}{n} \right] + O(n^{-2}) \quad (3.11)$$

$$\text{Var}(S_{y_0y_0}) = \frac{2\lambda^2\theta^2}{k} + O(k^{-2}) = \frac{2\lambda^2\theta^2}{k} + O(n^{-2}), \quad (3.12)$$

pois, por hipótese, $k = an$. Da definição de covariância, segue que

$$\text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) = \frac{2\beta\theta}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(U_i - \bar{U})^2}{n}, \quad (3.13)$$

$$\text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) = \frac{2\beta\lambda\theta}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(U_i - \bar{U})^2}{n}, \quad (3.14)$$

$$\text{Cov}(S_{xx}, S_{yy}) = 0. \quad (3.15)$$

Sob o modelo (2.8) com as suposições (3.1) e (3.2), o vetor $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tem distribuição normal bivariada. Como é bem sabido, nesse caso, o vetor de médias amostrais $(\bar{X}, \bar{Y})$

é independente das covariâncias amostrais S_{ij} , $i, j = x, y$. Veja, por exemplo, Anderson (1958). Logo,

$$\text{Cov}(\bar{X}, S_{xx}) = \text{Cov}(\bar{X}, S_{xy}) = \text{Cov}(\bar{X}, S_{yy}) = 0, \quad (3.16)$$

$$\text{Cov}(\bar{Y}, S_{xx}) = \text{Cov}(\bar{Y}, S_{xy}) = \text{Cov}(\bar{Y}, S_{yy}) = 0. \quad (3.17)$$

O cálculo da matriz de covariâncias assintótica será ilustrado calculando-se $\text{Var}(\hat{U}_{0CV})$, a partir de (3.5). Nesse caso, como $h = g$, segue que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CV}) &= (g^{(1)})^2 \text{Var}(\bar{X}) + (g^{(2)})^2 \text{Var}(\bar{Y}) + (g^{(3)})^2 \text{Var}(\bar{Y}_0) \\ &\quad + (g^{(4)})^2 \text{Var}(S_{xx}) + (g^{(5)})^2 \text{Var}(S_{xy}) + (g^{(6)})^2 \text{Var}(S_{yy}) \\ &\quad + 2g^{(4)}g^{(5)} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + 2g^{(5)}g^{(6)} \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

já que todas as outras covariâncias são nulas, com

$$\begin{aligned} g^{(1)} &= 1, \quad g^{(2)} = -\frac{1}{\beta}, \quad g^{(3)} = \frac{1}{\beta}, \quad g^{(4)} = \frac{(U_0 - \bar{U})\lambda}{(\lambda + \beta^2) \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n}, \\ g^{(5)} &= -\frac{(U_0 - \bar{U})(\lambda - \beta^2)}{(\lambda + \beta^2)\beta \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n}, \quad g^{(6)} = -\frac{(U_0 - \bar{U})}{(\lambda + \beta^2) \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n}, \quad g^{(7)} = 0. \end{aligned}$$

O resultado segue pela substituição das igualdades (3.6) - (3.14) na expressão acima. De modo similar são obtidos os elementos restantes da matriz de covariâncias. $\square$

Patefield (1977) mostrou que, no modelo de regressão funcional, o inverso da matriz de informação de Fisher de α e β não coincide com a matriz de covariâncias assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança desses parâmetros, devido à presença dos n parâmetros incidentais. Para verificar que tal fato também ocorre no modelo de calibração funcional, é necessário obter a matriz de informação de Fisher de $\gamma = (U_1, U_2, \dots, U_n, \alpha, \beta, U_0, \theta)$. Depois de calcular as segundas derivadas do logaritmo da função de verossimilhança com relação aos parâmetros do modelo e as esperanças destas expressões, pode-se mostrar que

$$I_F(\gamma) = \frac{1}{\lambda\theta} \begin{bmatrix} \lambda + \beta^2 & 0 & \cdots & 0 & \beta & \beta U_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \beta^2 & \cdots & 0 & \beta & \beta U_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda + \beta^2 & \beta & \beta U_n & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & n+k & n\bar{U} + kU_0 & k\beta & 0 \\ \beta U_1 & \beta U_2 & \cdots & \beta U_n & n\bar{U} + kU_0 & \sum_{i=1}^n U_i^2 + kU_0^2 & k\beta U_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k\beta & k\beta U_0 & k\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & (2n+k)\lambda/2\theta \end{bmatrix}$$

O inverso da matriz de informação $I_F(\gamma)$ pode ser obtido considerando-se a matriz na forma partida e utilizando-se a teoria de matrizes para esse caso. Então, para os parâmetros estruturais do modelo segue que

$$I_F^{-1} \left(\alpha, \beta, U_0, \left(\frac{2n+k}{n+k} \right) \theta \right) = \theta(\lambda + \beta^2) \begin{bmatrix} \frac{1}{n} + \frac{\bar{U}^2}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} & -\frac{\bar{U}}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} & \frac{1}{\beta} \left[\frac{-1}{n} + \frac{(U_0 - \bar{U})\bar{U}}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} \right] & 0 \\ & \frac{1}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} & -\frac{(U_0 - \bar{U})}{n\beta(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} & 0 \\ & & i_{33} & 0 \\ & & & \frac{2\theta(2n+k)}{(n+k)^2(\lambda + \beta^2)} \end{bmatrix},$$

onde $i_{33} = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{n} + \frac{\lambda}{k(\lambda + \beta^2)} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} \right]$. Com esse resultado, pode-se afirmar que a conclusão de Patefield (1977) é também válida para o modelo de calibração funcional. Vale ressaltar que a parte da matriz de covariâncias assintótica e também da informação de Fisher referente a $(\hat{\alpha}_V, \hat{\beta}_V)$, coincide com aquela obtida em Patefield (1977). O lema apresentado a seguir será usado na prova do próximo teorema.

Lema 3.1 *Sob o modelo (2.8), (3.1), (3.2), com a suposição de que λ é conhecido, segue que*

$$E(\hat{\beta}_V) = \beta + \frac{\beta\theta}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)}(1+t) + O(n^{-2}),$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{X}) = \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{Y}) = 0,$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xx}) &= -\frac{2\theta\beta}{n}(1+t) + O(n^{-2}), \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xy}) &= \frac{\theta(\lambda - \beta^2)}{n}(1+t) + O(n^{-2})\end{aligned}$$

e

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{yy}) = \frac{2\lambda\theta\beta}{n}(1+t) + O(n^{-2}),$$

com t dado em (3.4).

Prova: Note que o estimador $\hat{\beta}_V$ em (3.3) é função de (S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}) . Portanto, pode-se expandir $\hat{\beta}_V$ em série de Taylor até ordem n^{-2} , em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(S_{xx}), E(S_{xy}), E(S_{yy}))$ e então, tomando-se a esperança, obtém-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}_V) &= \beta + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \hat{\beta}_V}{\delta S_{xx}^2} \Big|_{\mathbf{a}} \text{Var}(S_{xx}) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \hat{\beta}_V}{\delta S_{xy}^2} \Big|_{\mathbf{a}} \text{Var}(S_{xy}) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \hat{\beta}_V}{\delta S_{yy}^2} \Big|_{\mathbf{a}} \text{Var}(S_{yy}) \\ &\quad + \frac{\delta^2 \hat{\beta}_V}{\delta S_{xx} \delta S_{xy}} \Big|_{\mathbf{a}} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + \frac{\delta^2 \hat{\beta}_V}{\delta S_{yy} \delta S_{xy}} \Big|_{\mathbf{a}} \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) + O(n^{-2}).\end{aligned}$$

Substituindo (3.9) - (3.11), (3.13) e (3.14) na expressão acima, o resultado para $E(\hat{\beta}_V)$ é obtido após algumas manipulações algébricas. Como já mencionado, o estimador $\hat{\beta}_V$ é função de (S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}) , que, por sua vez, é independente de $\bar{X}$ e de $\bar{Y}$. Portanto, $\hat{\beta}_V$ é independente de $\bar{X}$ e de $\bar{Y}$. Logo, $\text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{X}) = \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{Y}) = 0$. As covariâncias restantes podem ser provadas utilizando-se (3.5) juntamente com (3.9) - (3.11), (3.13) - (3.15). $\square$

O próximo teorema apresenta um estudo do comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança quando apenas o tamanho da amostra da primeira etapa do problema de calibração é grande. Ou seja, k é considerado fixo.

Teorema 3.2 *Sob o modelo (2.8), (3.1), (3.2), com λ conhecido, a matriz de covariâncias de $(\hat{\alpha}_V, \hat{\beta}_V, \hat{U}_{0CV}, \hat{\theta}_V)$, quando k é um inteiro positivo qualquer fixado, é dada por*

$$\theta(\lambda + \beta^2) \begin{bmatrix} \frac{1}{n} + \frac{\bar{U}^2(1+t)}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} & -\frac{\bar{U}(1+t)}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} & \frac{1}{\beta} \left[-\frac{1}{n} + \frac{(U_0 - \bar{U})\bar{U}(1+t)}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} \right] & 0 \\ & \frac{(1+t)}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} & -\frac{(U_0 - \bar{U})(1+t)}{n\beta(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} & 0 \\ & & v_{33} & 0 \\ & & & \frac{2\theta}{(n+k)(\lambda + \beta^2)} \end{bmatrix} + O(n^{-2})$$

onde

$$v_{33} = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{n} + \frac{\lambda}{k(\lambda + \beta^2)} - \frac{2\lambda\theta(1+t)}{nk(\lambda + \beta^2)(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} + \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{3\lambda\theta}{k\beta^2} \right) \frac{(1+t)}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} \right]$$

e t é como dado em (3.4).

Prova: Como os estimadores $\hat{\alpha}_V$ e $\hat{\beta}_V$ só dependem da amostra da primeira etapa do problema de calibração, tem-se que suas variâncias e covariâncias serão as mesmas que as obtidas no Teorema 3.1. Por outro lado, note que pode-se escrever

$$\hat{U}_{0CV} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_V}{\hat{\beta}_V} = \frac{\bar{Y}_0 - \bar{Y} + \hat{\beta}_V \bar{X}}{\hat{\beta}_V} = \bar{X} + \frac{\beta(U_0 - \bar{U}) + \bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V}, \quad (3.18)$$

onde $\bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i/n$ e $\bar{\varepsilon}_0 = \sum_{i=n+1}^{n+k} \varepsilon_{0i}/k$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CV}) &= \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2(U_0 - \bar{U})^2 \text{Var}(1/\hat{\beta}_V) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V) \\ &\quad + 2\text{Cov}(\bar{X}, \beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V) + 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V) - 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V) \\ &\quad + 2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V) - 2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V) \\ &\quad - 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como o problema de calcular $\text{Var}(\hat{U}_{0CV})$ consiste basicamente em calcular as variâncias que estão em função de $1/\hat{\beta}_V$, toma-se uma expansão em série de Taylor de $1/\hat{\beta}_V$ até ordem n^{-2} , em torno de sua esperança, chegando assim a

$$\frac{1}{\hat{\beta}_V} = \frac{1}{E(\hat{\beta}_V)} - \frac{(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))}{E^2(\hat{\beta}_V)} + \frac{(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))^2}{E^3(\hat{\beta}_V)} + O_p(n^{-2}). \quad (3.20)$$

De (3.20), obtém-se

$$\text{Var} \left(\frac{1}{\hat{\beta}_V} \right) = \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{E^4(\hat{\beta}_V)} + O(n^{-2}), \quad (3.21)$$

$$\text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V} \right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{E^2(\hat{\beta}_V)} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{E^4(\hat{\beta}_V)} + O(n^{-2}), \quad (3.22)$$

$$\text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V} \right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{E^2(\hat{\beta}_V)} + O(n^{-2}). \quad (3.23)$$

Para calcular as aproximações até termos de primeira ordem para $1/E^2(\hat{\beta}_V)$ e $1/E^4(\hat{\beta}_V)$, retorne ao Lema 3.1, o qual estabelece que $E(\hat{\beta}_V) = \beta + \text{vício}(\hat{\beta}_V) + O(n^{-2})$, onde $\text{vício}(\hat{\beta}_V) = O(n^{-1})$. Como $E(\hat{\beta}_V)$ é função do vício $(\hat{\beta}_V)$, expansões convenientes de Taylor levam a

$$\frac{1}{E^2(\hat{\beta}_V)} = \frac{1}{\beta^2} - \frac{2\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} + O(n^{-2}) = \frac{1}{\beta^2} + O(n^{-1}) \quad (3.24)$$

e

$$\frac{1}{E^4(\hat{\beta}_V)} = \frac{1}{\beta^4} - \frac{4\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^5} + O(n^{-2}) = \frac{1}{\beta^4} + O(n^{-1}). \quad (3.25)$$

Logo,

$$\text{Var} \left(\frac{1}{\hat{\beta}_V} \right) = \text{Var}(\hat{\beta}_V) \left(\frac{1}{\beta^4} + O(n^{-1}) \right) = \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}), \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V} \right) &= \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{2\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} + O(n^{-2}) \right) + 3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_V) \left(\frac{1}{\beta^4} + O(n^{-1}) \right) \\ &= \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{\beta^2} - \frac{2\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V} \right) = \text{Var}(\bar{\varepsilon}) \left(\frac{1}{\beta^2} + O(n^{-1}) \right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{\beta^2} + O(n^{-2}), \quad (3.28)$$

pois $\text{Var}(\bar{\varepsilon}) = O(n^{-1})$.

Da expressão (3.20) e do Lema 3.1, é fácil ver que as covariâncias envolvidas na equação (3.19) são nulas. Substituindo (3.26) - (3.28) e $\text{Var}(\hat{\beta}_V)$ dada no Teorema 3.1 na expressão (3.19) e com algumas operações algébricas, chega-se à expressão desejada.

Além disso, como

$$\tilde{\theta}_V = \frac{n}{n+k} \left(\frac{S_{yy} + \hat{\beta}_V^2 S_{xx} - 2\hat{\beta}_V S_{xy}}{\lambda + \hat{\beta}_V^2} \right) + \frac{k}{n+k} \frac{S_{y_0y_0}}{\lambda},$$

tem-se que

$$\text{Var}(\tilde{\theta}_V) = \frac{n^2}{(n+k)^2} \text{Var} \left(\frac{S_{yy} + \hat{\beta}_V^2 S_{xx} - 2\hat{\beta}_V S_{xy}}{\lambda + \hat{\beta}_V^2} \right) + \frac{k^2}{(n+k)^2} \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{2\lambda^2\theta^2}{k} - \frac{2\lambda^2\theta^2}{k^2} \right),$$

pois $S_{y_0y_0}$ é independente de (S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}) . Denote $g(w) = \frac{S_{yy} + \hat{\beta}_V^2 S_{xx} - 2\hat{\beta}_V S_{xy}}{\lambda + \hat{\beta}_V^2}$, onde $w = (\hat{\beta}_V, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy})$. Para calcular $\text{Var}(g(w))$, expande-se $g(w)$ em série de Taylor até ordem n^{-2} em torno de $w_0 = (E(\hat{\beta}_V), E(S_{xx}), E(S_{xy}), E(S_{yy}))$. Então,

$$\begin{aligned} g(w) &= \theta - \frac{\theta}{n} + \frac{2\beta\theta}{n(\lambda + \beta^2)}(1+t)(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V)) + \frac{E^2(\hat{\beta}_V)}{\lambda + E^2(\hat{\beta}_V)}(S_{xx} - E(S_{xx})) \\ &\quad - \frac{2E(\hat{\beta}_V)}{(\lambda + E^2(\hat{\beta}_V))}(S_{xy} - E(S_{xy})) + \frac{1}{\lambda + E^2(\hat{\beta}_V)}(S_{yy} - E(S_{yy})) \\ &\quad + \frac{(\lambda + \beta^2)^2}{(\lambda + E^2(\hat{\beta}_V))^3} \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right) (\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))^2 \\ &\quad + \frac{2\lambda E(\hat{\beta}_V)}{(\lambda + E^2(\hat{\beta}_V))^2} (\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))(S_{xx} - E(S_{xx})) \\ &\quad - \frac{2(\lambda - E^2(\hat{\beta}_V))}{(\lambda + E^2(\hat{\beta}_V))^2} (\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))(S_{xy} - E(S_{xy})) \\ &\quad - \frac{2E(\hat{\beta}_V)}{(\lambda + E^2(\hat{\beta}_V))^2} (\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))(S_{yy} - E(S_{yy})) + Op(n^{-2}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde t é como dado em (3.4). Através do Lema 3.1, das expressões (3.24), (3.25) e (3.29), obtém-se

$$\text{Var}(\tilde{\theta}_V) = \frac{2\theta^2}{n+k} + O(n^{-2}).$$

Para obter as covariâncias envolvendo $\tilde{U}_{0CV}$ e $\tilde{\theta}_V$, utiliza-se as expansões (3.20) e (3.29) e o Lema 3.1. $\square$

Observação: Lee e Yum (1989) obtiveram uma expressão para a variância assintótica de $\hat{U}_{0CV}$ quando $k = 1$. A expressão por eles obtida pode ser escrita como

$$\frac{\theta(\lambda + \beta^2)}{\beta^2} \left[\frac{1}{n} + \frac{\lambda}{\lambda + \beta^2} + \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{\lambda\theta}{\beta^2} \right) \frac{(1 + \mathcal{J})}{n\nu^2} \right] ,$$

onde $\mathcal{J} = \frac{\lambda\theta}{(\lambda + \beta^2)\nu^2}$ e $\nu^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n$.

O enfoque por eles utilizado não permite um estudo detalhado da ordem das aproximações e tão pouco é de fácil extensão para k qualquer. Comparando essa expressão com a correspondente expressão obtida no Teorema 3.2, no caso particular onde $k = 1$, verifica-se que a expressão por eles obtida não envolve todos os termos de primeira ordem. Portanto, a expressão naquele trabalho não envolve todos os termos de ordem n^{-1} .

O próximo teorema completa o estudo do comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança quando apenas o tamanho da amostra do experimento de calibração é grande.

Teorema 3.3 *Sob o modelo (2.8), (3.1), (3.2), com a suposição de que λ é conhecido, e sendo k um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$E(\hat{U}_{0CV}) = U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})(1 + t)\lambda\theta}{n\beta^2(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n)} + O(n^{-2}) ,$$

onde t é dado em (3.4).

Prova: Utilizando (3.18), tem-se que

$$E(\hat{U}_{0CV}) = E(\bar{X}) + \beta(U_0 - \bar{U})E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) .$$

Pela expressão (3.20),

$$E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) = \frac{1}{E(\hat{\beta}_V)} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{E^3(\hat{\beta}_V)} + O(n^{-2}) .$$

Expandindo $1/E(\hat{\beta}_V)$ e $1/E^3(\hat{\beta}_V)$ em série de Taylor, tem-se

$$\frac{1}{E(\hat{\beta}_V)} = \frac{1}{\beta} - \frac{\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^2} + O(n^{-2}), \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{E^3(\hat{\beta}_V)} = \frac{1}{\beta^3} - \frac{3\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}). \quad (3.31)$$

Pelo Lema 3.1, $\frac{1}{E^3(\hat{\beta}_V)} = \frac{1}{\beta^3} + O(n^{-1})$. Então,

$$E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) = \frac{1}{\beta} - \frac{\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^2} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} + O(n^{-2}).$$

Pelo Lema 3.1 e Teorema 3.2,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) &= \frac{1}{\beta} - \frac{\beta\theta(1+t)}{\beta^2 n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} + \frac{\theta(\lambda + \beta^2)(1+t)}{\beta^3 n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} + O(n^{-2}) \\ &= \frac{1}{\beta} + \frac{\lambda\theta(1+t)}{n\beta^3(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$E(\hat{U}_{0CV}) = \bar{U} + \beta(U_0 - \bar{U}) \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\lambda\theta(1+t)}{n\beta^3(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} + O(n^{-2}) \right),$$

o que prova o resultado. $\square$

Como o vício do estimador de máxima verossimilhança de U_0 tem ordem n^{-1} , então a aproximação até primeira ordem do erro quadrático médio desse estimador coincide com sua variância dada no Teorema 3.2 para k fixado e no Teorema 3.1 para $k = an$.

O próximo teorema apresenta um estimador consistente para o erro quadrático médio de $\hat{U}_{0CV}$, para $k = an$.

Teorema 3.4 *Sob as condições consideradas no Teorema 3.1, um estimador consistente para $EQM(\hat{U}_{0CV})$ é dado por*

$$\begin{aligned} \widehat{EQM}(\hat{U}_{0CV}) &= \frac{\tilde{\theta}_V(\lambda + \hat{\beta}_V^2)}{n\hat{\beta}_V^2} + \frac{\lambda\tilde{\theta}_V}{k\hat{\beta}_V^2} - \frac{2\lambda\tilde{\theta}_V}{nk\hat{\beta}_V^2\hat{\ell}^2(\lambda + \hat{\beta}_V^2)}(\lambda(\hat{\ell} + 1) + \hat{\beta}_V^2\hat{\ell}) \\ &\quad + \left((\hat{U}_{0CV} - \bar{x})^2 + \frac{3\lambda\tilde{\theta}_V}{k\hat{\beta}_V^2} \right) \left(\frac{\lambda(\hat{\ell} + 1) + \hat{\beta}_V^2\hat{\ell}}{n\hat{\beta}_V^2\hat{\ell}^2} \right), \end{aligned}$$

onde $\hat{\ell} = \frac{S_{xy}}{\hat{\beta}_V\tilde{\theta}_V}$.

Prova: Pela consistência forte dos estimadores $\hat{\alpha}_V$, $\hat{\beta}_V$, $\hat{U}_{0CV}$ e $\hat{\theta}_V$, provada no Teorema 3.1, segue que

$$\hat{\ell} \xrightarrow{\text{q.c.}} \frac{\nu^2}{\theta},$$

quando $n \rightarrow \infty$. A prova da consistência forte do estimador do $EQM(\hat{U}_{0CV})$ é concluída observando-se que esse é uma função contínua de $\hat{\beta}_V$, $\hat{\theta}_V$ e $\hat{\ell}$. $\square$

3.2 Outros estimadores e suas propriedades

Conforme enfatizado no Capítulo 1, um possível competidor para o estimador clássico de U_0 , no modelo de calibração sem erros nas variáveis, é o estimador inverso. Devido a isso, um outro estimador, aqui estudado, será o inverso. Baseado na regressão inversa de U em Y , apesar de U não ser uma variável aleatória e sob a suposição (falsa) de que os erros ε'_i são independentes de Y_i , para $i = 1, \dots, n$, o logaritmo da função de verossimilhança pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \ell(\gamma, \phi, \theta, U_0, U_i/\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0) = & -\frac{(n+k)}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\lambda\theta) - \frac{n}{2} \ln \theta - \frac{k}{2} \ln(\lambda\theta) \\ & - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (X_i - U_i)^2 - \frac{1}{2\lambda\theta} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \frac{U_i}{\phi} + \frac{\gamma}{\phi} \right)^2 - \frac{1}{2\lambda\theta} \sum_{i=n+1}^{n+k} \left(Y_{0i} - \frac{U_0}{\phi} + \frac{\gamma}{\phi} \right)^2, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, n$, onde $\gamma = -\alpha/\beta$ e $\phi = 1/\beta$, $\beta \neq 0$. Diferenciando esta função com respeito a $(\gamma, \phi, \theta, U_0, U_i)$, para $i = 1, \dots, n$, chega-se aos seguintes estimadores de máxima verossimilhança

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_V &= \bar{X} - \hat{\phi}_V \bar{Y}, \\ \hat{\phi}_V &= \frac{(S_{xx} - \lambda^{-1} S_{yy}) + \sqrt{(S_{xx} - \lambda^{-1} S_{yy})^2 + 4\lambda^{-1} S_{xy}^2}}{2S_{xy}}, \quad S_{xy} \neq 0, \\ \hat{U}_{0IV} &= \hat{\gamma}_V + \hat{\phi}_V \bar{Y}_0, \\ \hat{U}_{iV} &= \frac{\lambda \hat{\phi}_V^2 X_i + \hat{\phi}_V Y_i + \hat{\gamma}_V}{\lambda \hat{\phi}_V^2 + 1} \end{aligned} \tag{3.32}$$

e

$$\hat{\theta}_V = \frac{1}{(2n+k)} \left\{ \frac{n}{\lambda \hat{\phi}_V^2 + 1} (S_{xx} - 2\hat{\phi}_V S_{xy} + \hat{\phi}_V^2 S_{yy}) + \frac{k S_{y_0 y_0}}{\lambda} \right\}.$$

Observação: Como visto no Capítulo 2, o estimador $\hat{U}_{0IV}$ é conhecido como “estimador inverso”. Fuller (1987) propôs este estimador no caso onde $k = 1$. Facilmente, pode-se mostrar que $\hat{\phi}_V = 1/\hat{\beta}_V$, onde $\hat{\beta}_V$ é dado em (3.3). Segue, então que

$$\hat{U}_{0CV} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_V}{\hat{\beta}_V} = \frac{\bar{Y}_0 - \bar{Y}}{\hat{\beta}_V} + \bar{X} = \bar{X} + (\bar{Y}_0 - \bar{Y})\hat{\phi}_V = \hat{\gamma}_V + \hat{\phi}_V \bar{Y}_0 = \hat{U}_{0IV}.$$

Isto é, os estimadores clássico e inverso coincidem quando estima-se os parâmetros do modelo pelo método da máxima verossimilhança. Conclusões similares podem ser encontradas em Mandel (1984), embora suas comparações sejam apenas de caráter numérico. Esse resultado e os estimadores de γ e ϕ são também apresentados em Lee e Yum (1989), quando $k = 1$.

Considerando o modelo do experimento de calibração como um modelo usual de regressão sem erros nas variáveis, os estimadores de mínimos quadrados de α , β , γ e ϕ , como é bem sabido, coincidem com os estimadores de máxima verossimilhança. Combinando esses estimadores com os estimadores clássico e inverso de U_0 , tem-se dois outros estimadores, os quais são dados respectivamente por

$$\hat{U}_{0CQ} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_Q}{\hat{\beta}_Q} \quad \text{e} \quad \hat{U}_{0IQ} = \hat{\gamma}_Q + \hat{\phi}_Q \bar{Y}_0,$$

onde $\hat{\alpha}_Q$, $\hat{\beta}_Q$, $\hat{\gamma}_Q$, $\hat{\phi}_Q$ são os estimadores de mínimos quadrados de α , β , γ e ϕ , respectivamente. Os estimadores de mínimos quadrados de α , β , γ e ϕ são dados por

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_Q &= \bar{Y} - \hat{\beta}_Q \bar{X}, & \hat{\beta}_Q &= S_{xy}/S_{xx}, \\ \hat{\gamma}_Q &= \bar{X} - \hat{\phi}_Q \bar{Y}, & \hat{\phi}_Q &= S_{xy}/S_{yy}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

A seguir são apresentados uma série de resultados relacionados com as propriedades assintóticas dos estimadores acima.

Lema 3.2 Sob o modelo (2.8), (3.1), (3.2), com a suposição de λ ser conhecido, tem-se que

$$E(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta\ell}{1+\ell} \left(1 + \frac{1+3\ell}{n(1+\ell)^2} \right) + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_Q) = \frac{\lambda}{n(1+\ell)} + \frac{\beta^2\ell(1+\ell^2)}{n(1+\ell)^4} + O(n^{-2}),$$

onde

$$\ell = \sum_{i=1}^n \frac{(U_i - \bar{U})^2}{n\theta}. \quad (3.34)$$

Prova: Note que o estimador $\hat{\beta}_Q$ é função de (S_{xx}, S_{xy}) . Uma expansão em série de Taylor de $\hat{\beta}_Q$ até ordem n^{-2} em torno do ponto $(E(S_{xx}), E(S_{xy}))$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_Q &= \frac{\beta\ell}{\ell+1-1/n} + \left(-\frac{\beta\ell}{\theta(1+\ell)^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx})) \\ &+ \left(\frac{1}{\theta(1+\ell)} + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy})) + \left(\frac{\beta\ell}{\theta^2(1+\ell)^3} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))^2 \\ &+ \left(-\frac{1}{\theta^2(1+\ell)^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))(S_{xy} - E(S_{xy})) + O_p(n^{-2}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Calculando a esperança e a variância dessa expressão, obtém-se

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_Q) &= \frac{\beta\ell}{\ell+1-1/n} + \frac{\beta\ell}{\theta^2(1+\ell)^3} \text{Var}(S_{xx}) - \frac{1}{\theta^2(1+\ell)^2} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2}) \\ \text{Var}(\hat{\beta}_Q) &= \frac{\beta^2\ell^2}{\theta^2(1+\ell)^4} \text{Var}(S_{xx}) + \frac{1}{\theta^2(1+\ell)^2} \text{Var}(S_{xy}) - \frac{2\beta\ell}{\theta^2(1+\ell)^3} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) \\ &+ O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Substituindo (3.9), (3.10) e (3.13) nas expressões acima e após algumas manipulações algébricas, completa-se a prova. $\square$

Davies e Hutton (1975) discutem o comportamento dos estimadores de mínimos quadrados usuais em grandes amostras quando o modelo de regressão apresenta a variável independente avaliada com erro. Contudo um estudo detalhado das ordens nas aproximações não é estabelecido naquele trabalho.

Lema 3.3 Sob o modelo (2.8), (3.1), (3.2), com a suposição de λ ser conhecido, segue que

$$\begin{aligned} E(\hat{\phi}_Q) &= \frac{Z}{\beta(1+Z)} + \frac{Z(1+3Z)}{n\beta(1+Z)^3} + O(n^{-2}), \\ \text{Var}(\hat{\phi}_Q) &= \frac{1}{n\lambda(1+Z)} + \frac{Z(1+Z^2)}{n\beta^2(1+Z)^4} + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde

$$Z = \frac{\beta^2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n\lambda\theta} = \frac{\beta^2 \ell}{\lambda}. \quad (3.36)$$

Prova: Esta prova é análoga à do Lema 3.2. O estimador $\hat{\phi}_Q$, agora estudado, é função de (S_{xy}, S_{yy}) e, portanto, a expansão em série de Taylor até ordem n^{-2} é feita em torno do ponto $(E(S_{xy}), E(S_{yy}))$, resultando na seguinte expressão

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_Q &= \frac{Z}{\beta(1+Z-1/n)} + \left(-\frac{Z}{\beta\lambda\theta(1+Z)^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{yy} - E(S_{yy})) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\lambda\theta(1+Z)} + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy})) \\ &\quad + \left(\frac{Z}{\beta\lambda^2\theta^2(1+Z)^3} + O(n^{-1}) \right) (S_{yy} - E(S_{yy}))^2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\lambda^2\theta^2(1+Z)^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{yy} - E(S_{yy}))(S_{xy} - E(S_{xy})) \\ &\quad + O_p(n^{-2}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Expressões para a esperança e a variância podem ser escritas como

$$\begin{aligned} E(\hat{\phi}_Q) &= \frac{Z}{\beta(1+Z-1/n)} + \frac{Z}{\beta\lambda^2\theta^2(1+Z)^3} \text{Var}(S_{yy}) - \frac{1}{\lambda^2\theta^2(1+Z)^2} \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) \\ &\quad + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\phi}_Q) &= \frac{Z^2}{\beta^2\lambda^2\theta^2(1+Z)^4} \text{Var}(S_{yy}) + \frac{1}{\lambda^2\theta^2(1+Z)^2} \text{Var}(S_{xy}) \\ &\quad - \frac{2Z}{\beta\lambda^2\theta^2(1+Z)^3} \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Substituindo (3.10), (3.11) e (3.14) nas expressões acima e com algumas operações algébricas, chega-se ao resultado desejado. $\square$

Teorema 3.5 *Sob o modelo (2.8), (3.1), (3.2), com a suposição de λ ser conhecido, quando k é um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})}{\ell} + \frac{(U_0 - \bar{U})}{n\ell} \left(\frac{(1 + \ell^2)}{\ell(1 + \ell)} + \frac{\lambda(1 + \ell)^2}{\beta^2 \ell^2} - \frac{(1 + 3\ell)}{1 + \ell} \right) + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{\theta}{n} \left(1 + \frac{\lambda(1 + \ell)^2}{\beta^2 \ell^2} \right) + \frac{\lambda\theta}{k\beta^2 \ell^2} (1 + \ell)^2 - \frac{2\lambda\theta}{nk\beta^2 \ell^2} (1 + 3\ell) \\ &+ \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{3\lambda\theta}{k\beta^2} \right) \left(\frac{\lambda(1 + \ell)^3}{n\beta^2 \ell^4} + \frac{(1 + \ell^2)}{n\ell^3} \right) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

com ℓ dado em (3.34).

Prova: Pela expressão (3.18) e (3.20), chega-se a

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = E(\bar{X}) + \beta(U_0 - \bar{U})E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) = \bar{U} + \beta(U_0 - \bar{U}) \left(\frac{1}{E(\hat{\beta}_Q)} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^3(\hat{\beta}_Q)} \right) + O(n^{-2}).$$

Procedendo de modo equivalente às expressões (3.30) e (3.31) e utilizando o Lema 3.2, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(\hat{\beta}_Q)} &= \frac{(1 + \ell)}{\beta\ell} - \frac{(1 + \ell)^2}{\beta^2 \ell^2} \left(\frac{\beta\ell(1 + 3\ell)}{n(1 + \ell)^3} \right) + O(n^{-2}) \\ &= \frac{(1 + \ell)}{\beta\ell} - \frac{(1 + 3\ell)}{n\beta\ell(1 + \ell)} + O(n^{-2}), \\ \frac{1}{E^3(\hat{\beta}_Q)} &= \frac{(1 + \ell)^3}{\beta^3 \ell^3} - \frac{3(1 + \ell)^4}{\beta^4 \ell^4} \left(\frac{\beta\ell(1 + 3\ell)}{n(1 + \ell)^3} \right) + O(n^{-2}) \\ &= \frac{(1 + \ell)^3}{\beta^3 \ell^3} - \frac{3(1 + \ell)(1 + 3\ell)}{n\beta^3 \ell^3} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Logo,

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = \bar{U} + (U_0 - \bar{U}) \frac{(1 + \ell)}{\ell} - \frac{(U_0 - \bar{U})(1 + 3\ell)}{n\ell(1 + \ell)} + \frac{(U_0 - \bar{U})(1 + \ell)^3}{\beta^2 \ell^3} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + O(n^{-2}).$$

Utilizando a expressão obtida para a variância de $\hat{\beta}_Q$ dada no Lema 3.2, obtém-se o resultado para a esperança de $\hat{U}_{0CQ}$. Para calcular a variância de $\hat{U}_{0CQ}$, retome a expressão (3.19). Como $\hat{\beta}_Q$ é uma função do vetor (S_{xx}, S_{xy}) , que é independente de $(\bar{X}, \bar{Y})$, tem-se que $\hat{\beta}_Q$ é independente de $\bar{X}$ e de $\bar{Y}$. Logo, as covariâncias envolvidas nesta expressão são nulas. Sendo assim, a variância desse estimador é dada por

$$\text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) = \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2(U_0 - \bar{U})^2 \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_Q}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_Q}\right).$$

Pelas expressões (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) e procedendo de modo equivalente aos resultados (3.24) e (3.25), e utilizando o Lema 3.2, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) &= \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^4(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2}) = \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_Q)(1+\ell)^4}{\beta^4 \ell^4} + O(n^{-2}), \\ \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_Q}\right) &= \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{E^2(\hat{\beta}_Q)} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^4(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2}) \\ &= \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{\beta^2 \ell^2} (1+\ell)^2 - \frac{2\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)(1+\ell)^3}{\beta^3 \ell^3} \frac{\beta \ell (1+3\ell)}{n(1+\ell)^3} \\ &\quad + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)(1+\ell)^4}{\beta^4 \ell^4} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + O(n^{-2}) \\ &= \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)(1+\ell)^2}{\beta^2 \ell^2} - \frac{2\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)(1+3\ell)}{n\beta^2 \ell^2} \\ &\quad + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)(1+\ell)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^4 \ell^4} + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

e

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_Q}\right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{E^2(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2}) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{\beta^2 \ell^2} (1+\ell)^2 + O(n^{-2}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{\theta}{n} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2(1+\ell)^4}{\beta^2 \ell^4} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + \frac{\lambda\theta(1+\ell)^2}{k\beta^2 \ell^2} - \frac{2\lambda\theta(1+3\ell)}{nk\beta^2 \ell^2} \\ &\quad + \frac{3\lambda\theta(1+\ell)^4}{k\beta^4 \ell^4} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + \frac{\lambda\theta(1+\ell)^2}{n\beta^2 \ell^2} + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

concluindo-se assim a prova. $\square$

O erro quadrático médio pode ser calculado pela soma da variância com o quadrado do vício, que neste caso é dado por

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0CQ}) = & \frac{\theta}{n} \left(1 + \frac{\lambda(1+\ell)^2}{\beta^2 \ell^2} \right) + \frac{\lambda\theta}{k\beta^2 \ell^2} (1+\ell)^2 - \frac{2\lambda\theta}{nk\beta^2 \ell^2} (1+3\ell) \\
& + \frac{3\lambda\theta}{nk\beta^2 \ell^3} \left(\frac{\lambda(1+\ell)^3}{\beta^2 \ell} + (1+\ell^2) \right) \\
& + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n\ell^2} \left(\frac{\lambda(1+\ell)^2(\ell+3)}{\beta^2 \ell^2} + \frac{(1+\ell^2)(\ell+3) - 2\ell(1+3\ell)}{\ell(1+\ell)} \right) \\
& + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2} + O(n^{-2}) , \tag{3.38}
\end{aligned}$$

com ℓ dado em (3.34).

Teorema 3.6 *Sob o modelo (2.8), (3.1), (3.2), com a suposição de λ ser conhecido, quando k é um inteiro positivo qualquer, segue que*

$$E(\hat{U}_{0IQ}) = U_0 - \frac{(U_0 - \bar{U})}{(1+Z)} + \frac{(U_0 - \bar{U})Z(1+3Z)}{n(1+Z)^3} + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) = & \frac{\theta}{n} \left(1 + \frac{\lambda Z^2}{\beta^2(1+Z)^2} \right) + \frac{\lambda\theta Z^2}{k\beta^2(1+Z)^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n(1+Z)} \left(\frac{\beta^2}{\lambda} + \frac{Z(1+Z^2)}{(1+Z)^3} \right) \\
& + \frac{\theta}{nk(1+Z)} \left(1 + \frac{\lambda Z(3Z^2 - 2Z + 1)}{\beta^2(1+Z)^3} \right) + O(n^{-2}) ,
\end{aligned}$$

com Z dado em (3.36).

Prova: Note que

$$\hat{U}_{0IQ} = \hat{\gamma}_Q + \hat{\phi}_Q \bar{Y}_0 = \bar{X} + \hat{\phi}_Q(\bar{Y}_0 - \bar{Y}) = \bar{X} + \hat{\phi}_Q(\beta(U_0 - \bar{U}) + \bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}), \tag{3.39}$$

de modo que $E(\hat{U}_{0IQ}) = E(\bar{X}) + \beta(U_0 - \bar{U})E(\hat{\phi}_Q)$. O resultado segue do Lema 3.3.

Calculando a variância da expressão (3.39), tem-se que

$$\text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) = \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2(U_0 - \bar{U})^2 \text{Var}(\hat{\phi}_Q) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0 \hat{\phi}_Q) + \text{Var}(\bar{\varepsilon} \hat{\phi}_Q) ,$$

pois $\bar{X}$ é não correlacionado com $\bar{Y}$ e $\bar{Y}_0$. Além disso, o vetor das médias amostrais é independente da matriz de covariâncias no modelo normal. Utilizando-se a expressão (3.37), pode-se mostrar que

$$\text{Var}(\bar{\varepsilon}\hat{\phi}_Q) = \frac{Z^2}{\beta^2(1+Z-1/n)^2} \text{Var}(\bar{\varepsilon}) + O(n^{-2}) = \frac{Z^2}{\beta^2(1+Z)^2} \text{Var}(\bar{\varepsilon}) + O(n^{-2}) ,$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0\hat{\phi}_Q) &= \frac{Z^2}{\beta^2(1+Z-1/n)^2} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) + \frac{1}{\lambda^2\theta^2(1+Z)^2} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \text{Var}(S_{xy}) \\ &\quad + \frac{3Z^2}{\beta^2\lambda^2\theta^2(1+Z)^4} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \text{Var}(S_{yy}) - \frac{4Z}{\beta\lambda^2\theta^2(1+Z)^3} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) \\ &\quad + O(n^{-2}) \\ &= \frac{Z^2}{\beta^2(1+Z)^2} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) - \frac{2Z^2}{n\beta^2(1+Z)^3} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) + \frac{1}{\lambda^2\theta^2(1+Z)^2} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \text{Var}(S_{xy}) \\ &\quad + \frac{3Z^2}{\beta^2\lambda^2\theta^2(1+Z)^4} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \text{Var}(S_{yy}) \\ &\quad - \frac{4Z}{\beta\lambda^2\theta^2(1+Z)^3} \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \text{Cov}(S_{xy}, S_{yy}) + O(n^{-2}) . \end{aligned}$$

Com a substituição de (3.10), (3.11) e (3.14) e após algumas operações algébricas, chega-se ao resultado desejado. $\square$

Com o teorema acima, tem-se que

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\theta}{n} \left(1 + \frac{\lambda Z^2}{\beta^2(1+Z)^2} \right) + \frac{\lambda\theta Z^2}{k\beta^2(1+Z)^2} \\ &\quad + \frac{\theta}{nk(1+Z)} \left(1 + \frac{\lambda Z(3Z^2 - 2Z + 1)}{\beta^2(1+Z)^3} \right) \\ &\quad + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n(1+Z)} \left(\frac{\beta^2}{\lambda} + \frac{Z(Z^2 - 6Z - 1)}{(1+Z)^3} \right) + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1+Z)^2} + O(n^{-2}) , \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde Z está definido em (3.36).

3.3 Comparações entre os estimadores

Nesta seção, os três procedimentos a serem comparados são:

Procedimento 1: Estimador clássico com mínimos quadrados ($\hat{U}_{0CQ}$);

Procedimento 2: Estimador clássico com máxima verossimilhança ($\hat{U}_{0CV}$);

Procedimento 3: Estimador inverso com mínimos quadrados ($\hat{U}_{0IQ}$).

Dos Teoremas 3.2, 3.3, 3.5 e 3.6 e das expressões (3.38) e (3.40), obtém-se, até ordem n^{-1} , os seguintes resultados:

Procedimento 1:

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})}{\ell} + \frac{(U_0 - \bar{U})}{n\ell} \left(\frac{\lambda(1 + \ell)^2}{\beta^2 \ell^2} + \frac{(1 + \ell^2)}{\ell(1 + \ell)} - \frac{(1 + 3\ell)}{1 + \ell} \right) \quad (3.41)$$

e

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{\theta}{n} \left(1 + \frac{\lambda(1 + \ell)^2}{\beta^2 \ell^2} \right) + \frac{\lambda\theta(1 + \ell)^2}{k\beta^2 \ell^2} - \frac{2\lambda\theta}{nk\beta^2 \ell^2} (1 + 3\ell) \\ &\quad + \frac{3\lambda\theta}{nk\beta^2 \ell^3} \left(\frac{\lambda(1 + \ell)^3}{\beta^2 \ell} + (1 + \ell^2) \right) \\ &\quad + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n\ell^3} \left(\frac{\lambda(1 + \ell)^2(\ell + 3)}{\beta^2 \ell} + \frac{(1 + \ell^2)(\ell + 3) - 2\ell(1 + 3\ell)}{1 + \ell} \right) \\ &\quad + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde $\ell = \frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n\theta}$, como definido em (3.34).

Procedimento 2:

$$E(\hat{U}_{0CV}) = U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})\lambda}{n(\lambda + \beta^2)\ell} \left(1 + \frac{\lambda(1 + \ell)}{\beta^2 \ell} \right) \quad (3.43)$$

e

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CV}) &= \text{Var}(\hat{U}_{0CV}) = \frac{\theta}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{\beta^2} \right) + \frac{\lambda\theta}{k\beta^2} - \frac{2\lambda\theta}{nk\ell(\lambda + \beta^2)} \left(1 + \frac{\lambda(1 + \ell)}{\beta^2 \ell} \right) \\ &\quad + \left(\frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n\ell} + \frac{3\lambda\theta}{nk\beta^2 \ell} \right) \left(1 + \frac{\lambda(1 + \ell)}{\beta^2 \ell} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Procedimento 3:

$$E(\hat{U}_{0IQ}) = U_0 - \frac{(U_0 - \bar{U})}{(1 + Z)} + \frac{(U_0 - \bar{U})Z(1 + 3Z)}{n(1 + Z)^3} \quad (3.45)$$

e

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0IQ}) = & \frac{\theta}{n} \left(1 + \frac{\lambda Z^2}{\beta^2(1 + Z)^2} \right) + \frac{\lambda \theta Z^2}{k\beta^2(1 + Z)^2} \\ & + \frac{\theta}{nk(1 + Z)} \left(1 + \frac{\lambda Z(3Z^2 - 2Z + 1)}{\beta^2(1 + Z)^3} \right) \\ & + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n(1 + Z)} \left(\frac{\beta^2}{\lambda} + \frac{Z(Z^2 - 6Z - 1)}{(1 + Z)^3} \right) + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1 + Z)^2}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde $Z = \beta^2 \frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n\lambda\theta} = \frac{\beta^2 \ell}{\lambda}$, como definido em (3.36).

Estudo dos vícios

Das expressões (3.41), (3.43) e (3.45), tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vício}(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{U_0 - \bar{U}}{\ell}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vício}(\hat{U}_{0CV}) &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vício}(\hat{U}_{0IQ}) = \frac{U_0 - \bar{U}}{1 + Z}.$$

É evidente que os três estimadores são viciados, mas só o estimador clássico com máxima verossimilhança é assintoticamente não viciado. Entretanto, os três vícios são zero quando $U_0 = \bar{U}$ e podem ser pequenos quando U_0 está próximo de $\bar{U}$. Para n e k grandes, não há mudança de comportamento desses vícios.

Estudo do erro quadrático médio

Das expressões (3.42), (3.44) e (3.46), tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) = \frac{\lambda\theta(1 + \ell)^2}{k\beta^2\ell^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CV}) = \frac{\lambda\theta}{k\beta^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \frac{\lambda\theta Z^2}{k\beta^2(1+Z)^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1+Z)^2} = \frac{\lambda\theta\beta^2\ell^2}{k(\lambda + \beta^2\ell)^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2\lambda^2}{(\lambda + \beta^2\ell)^2}.$$

Portanto, no limite,

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0CV}) = \frac{\lambda\theta}{k\beta^2} \left[\frac{(1+\ell)^2}{\ell^2} - 1 \right] + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2} > 0,$$

de onde se conclui que $EQM(\hat{U}_{0CV}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$.

Além disso,

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CV}) - EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\lambda\theta}{k\beta^2} \left[1 - \frac{Z^2}{(1+Z)^2} \right] - \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1+Z)^2} \\ &= \frac{\lambda\theta(1+2Z)}{k\beta^2(1+Z)^2} - \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1+Z)^2}. \end{aligned}$$

Logo, quando $U_0 = \bar{U}$, tem-se que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CV})$. Quando $U_0 \neq \bar{U}$, a comparação irá depender dos parâmetros do modelo. Então, no limite, quando $U_0 = \bar{U}$,

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CV}) < EQM(\hat{U}_{0CQ}),$$

ou seja, o estimador inverso é melhor que o clássico com máxima verossimilhança e este por sua vez é melhor que o clássico com mínimos quadrados no sentido de ter erro quadrático médio menor.

Quando n e k tendem ao infinito, tem-se de (3.42), (3.44) e (3.46) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) = \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2} = \frac{(U_0 - \bar{U})^2\beta^4}{\lambda^2 Z^2},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CV}) = 0$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1+Z)^2} = \frac{(U_0 - \bar{U})^2\lambda^2}{(\lambda + \beta^2\ell)^2},$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= (U_0 - \bar{U})^2 \left(\frac{\beta^4}{\lambda^2 Z^2} - \frac{1}{(1+Z)^2} \right) \\ &= \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\lambda^2 Z^2 (1+Z)^2} ((\beta^4 - \lambda^2) Z^2 + 2\beta^4 Z + \beta^4). \end{aligned}$$

Esses resultados mostram que o estimador clássico com máxima verossimilhança é consistente, enquanto que, tanto o estimador clássico como o inverso com mínimos quadrados não são. Embora os três estimadores passem a ser consistentes, quando $U_0 = \bar{U}$. A consistência do estimador clássico com máxima verossimilhança comprova o resultado do Teorema 3.1. A comparação entre o estimador clássico e o inverso combinados com mínimos quadrados irá depender dos valores de β , λ e Z . Como $Z > 0$, se $\beta^2 > \lambda$, então $EQM(\hat{U}_{0CQ}) > EQM(\hat{U}_{0IQ})$, para n e k grandes. Quando $\beta^2 < \lambda$, a escolha de um estimador não fica bem definida através do erro quadrático médio.

3.4 Representação dos erros quadráticos médios em termos de formas quadráticas

Para comparar as aproximações derivadas para os erros quadráticos médios, pode-se escrevê-las na forma de funções quadráticas. Tal procedimento é também considerado em Lwin e Maritz (1982). Depois de algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= A_1\omega^2 + C_1, \\ EQM(\hat{U}_{0CV}) &= A_2\omega^2 + C_2, \\ \text{e } EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= A_3\omega^2 + C_3, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \omega &= (U_0 - \bar{U}), \\ A_1 &= \frac{1}{\ell^2} + \frac{T(1+\ell)^2(\ell+3)}{n\ell^4} + \frac{(\ell+3)(1+\ell^2) - 2\ell(1+3\ell)}{n\ell^3(1+\ell)}, \\ C_1 &= \frac{\theta}{n} \left(1 + \frac{T(1+\ell)^2}{\ell^2} \right) + \frac{T\theta(1+\ell)^2}{k\ell^2} - \frac{2T\theta(1+3\ell)}{nk\ell^2} \\ &\quad + \frac{3T\theta}{nk\ell^3} \left((1+\ell^2) + \frac{T(1+\ell)^3}{\ell} \right), \\ A_2 &= \frac{1}{n\ell} + \frac{T(1+\ell)}{n\ell^2}, \end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{\theta}{n}(1+T) + \frac{T\theta}{k} - \frac{2T\theta}{nk\ell^2} \left(\ell + \frac{T}{T+1} \right) + \frac{3T\theta}{nk\ell} \left(1 + \frac{T(1+\ell)}{\ell} \right),$$

$$A_3 = \frac{1}{(1+Z)^2} + \frac{1}{nT(1+Z)} + \frac{Z(Z^2 - 6Z - 1)}{n(1+Z)^4}$$

e

$$C_3 = \frac{\theta}{n} \left(1 + \frac{TZ^2}{(1+Z)^2} \right) + \frac{TZ^2\theta}{k(1+Z)^2} + \frac{\theta}{nk(1+Z)} \left(1 + \frac{TZ(3Z^2 - 2Z + 1)}{(1+Z)^3} \right),$$

sendo $T = \lambda/\beta^2$.

Com algumas manipulações algébricas, pode ser visto que

$$\begin{array}{lll} A_1 > 0, \text{ se } n \geq 3 & \text{e} & C_1 > 0, \text{ se } n+k \geq 3; \\ A_2 > 0 & \text{e} & C_2 > 0; \\ A_3 > 0, \text{ se } n \geq 6 & \text{e} & C_3 > 0. \end{array}$$

Para exemplificar a técnica empregada nas comparações, serão utilizados os procedimentos 1 e 3. Comparações similares podem ser consideradas com os outros procedimentos. Como A_1 , A_3 , C_1 e C_3 são positivos quando $n \geq 6$, uma das seguintes situações pode ocorrer (veja Figura 3.1):

- (a) $C_1 > C_3$ e $A_1 > A_3$;
- (b) $C_1 < C_3$ e $A_1 < A_3$;
- (c) $C_1 > C_3$ e $A_1 < A_3$;
- (d) $C_1 < C_3$ e $A_1 > A_3$.

No caso (a), tem-se que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$, enquanto que no (b), $EQM(\hat{U}_{0CQ}) < EQM(\hat{U}_{0IQ})$. Para o caso (c), conclui-se que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$ se $U_0 \in \left(\bar{U} - \left(\frac{C_1 - C_3}{A_3 - A_1} \right)^{1/2}; \bar{U} + \left(\frac{C_1 - C_3}{A_3 - A_1} \right)^{1/2} \right)$, já para a situação (d), $EQM(\hat{U}_{0CQ}) < EQM(\hat{U}_{0IQ})$ se $U_0 \in \left(\bar{U} - \left(\frac{C_3 - C_1}{A_1 - A_3} \right)^{1/2}; \bar{U} + \left(\frac{C_3 - C_1}{A_1 - A_3} \right)^{1/2} \right)$.

É fácil ver que se $n \geq 4$, $A_1 > A_2$ e se $n+k \geq 2$, $C_1 > C_2$. Esse é o caso (a), de modo que se $n \geq 4$, $EQM(\hat{U}_{0CV}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Uma comparação analítica dos procedimentos 1 e 3 e dos procedimentos 2 e 3 é muito complicada, de modo que seus valores numéricos foram calculados para o conjunto de valores dos parâmetros dados

$C1 > C3$ e
 $A1 > A3$

$C1 > C3$ e
 $A1 < A3$

$C1 < C3$ e
 $A1 < A3$

$C1 < C3$ e
 $A1 > A3$

Figura 3.1: Representação gráfica dos EQM's correspondentes aos procedimentos 1 e 3 na forma quadrática.

Tabela 3.1: Resultado das avaliações numéricas na comparação entre A_1 e A_3 .

	ℓ	1			10				100				1000				
β	n	λ	0.1	1	10	0.1	1	10	20	0.1	1	10	20	0.1	1	10	20
0.5	10											•	•			•	•
	15						•	•			•	•	•		•	•	•
	30						•	•	•		•	•	•		•	•	•
	100						•	•	•		•	•	•		•	•	•
1.0	10							•	•			•	•				
	15							•	•			•	•			•	•
	30							•	•			•	•			•	•
	100							•	•			•	•			•	•
5.0	10																
	15																
	30																
	100																

Nota: • indica situações onde $A_3 > A_1$.

abaixo:

$$\theta = 0.01, 0.1, 1.0$$

$$\lambda = 0.1, 1, 10, 20$$

$$\ell = 1, 10, 100, 1000$$

$$\beta = 0.5, 1.0, 5.0$$

$$n = 10, 15, 30, 100$$

$$k = 1, 2, 5, 10, 15$$

Nas avaliações numéricas foi considerado $k < n$. Vale ressaltar que esse conjunto de valores é uma adaptação dos valores usados por Lee e Yum (1989). Nas avaliações numéricas, observa-se que $C_1 > C_3$. Os resultados computacionais da comparação entre A_1 e A_3 são dados na Tabela 3.1. A partir dessa tabela, tem-se que $A_1 > A_3$ para λ ou l pequenos, e também para β grande. Para ℓ e λ grandes, $A_1 < A_3$. Nas situações onde $A_1 > A_3$, recai-se no caso (a), de modo que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Caso contrário, existe um intervalo (U_{0L}, U_{0S}) tal que a performance do estimador inverso é melhor nessa região. Note que quanto menor for ℓ maior é a contribuição do erro de medida na variabilidade de X_i , $i = 1, \dots, n$.

Na comparação entre os procedimentos 2 e 3, as avaliações numéricas mostraram que $C_2 > C_3$, enquanto que os coeficientes A_2 e A_3 comportam-se como na Tabela 3.2. Da

Tabela 3.2: Resultado das avaliações numéricas na comparação entre A_2 e A_3 .

β	ℓ		1			10				100				1000			
	n	λ	0.1	1	10	0.1	1	10	20	0.1	1	10	20	0.1	1	10	20
0.5	10						.	.				.	.			.	.
	15			.		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	30	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	100	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1.0	10						.	.				.	.				.
	15		.	.			.	.	.		.	.	.		.	.	.
	30		.	.			.	.	.		.	.	.		.	.	.
	100	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5.0	10																
	15						.	.				.	.			.	.
	30			.			.	.				.	.			.	.
	100		.	.		.	.	.	.	.	.	.	.		.	.	.

Nota: . indica situações onde $A_3 > A_2$.

Tabela 3.2, tem-se que $A_3 > A_2$ na maioria dos casos, especialmente quando ℓ e λ são grandes. Quando $A_2 > A_3$, tem-se que $EQM(\hat{U}_{0CV}) > EQM(\hat{U}_{0IQ})$. Caso contrário, recai-se no caso (c), onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CV})$ se $U_0 \in (U_{0L}, U_{0S})$. Uma observação importante é que os resultados obtidos nestas avaliações independeram dos valores dos parâmetros θ e k .

Nas Figuras 3.2.a, b e c, compara-se o erro quadrático médio do estimador clássico com mínimos quadrados dado pela expressão (3.42) com o erro quadrático médio do estimador inverso com mínimos quadrados dado em (3.46). A razão das variâncias λ é assumida conhecida e θ , ℓ , β e k são fixados em 0.01, 10, 0.5 e 2, respectivamente. A Figura 3.2.a considera situações onde a distância $\omega = U_0 - \bar{U}$ é pequena. Essa distância é aumentada na Figura 3.2.b e é ainda maior na Figura 3.2.c. Observa-se que a distância ω tem uma influência fundamental no comportamento dos estimadores. Quando $\omega = 0.5$, a performance do estimador inverso é melhor para amostras de tamanho pequeno. Para amostras grandes, numa faixa pequena de valores de λ os dois estimadores têm

Figura 3.2: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{OCQ}$ e $\hat{U}_{IQ}$ com $n = 10, 20, 30$ e 100 , onde (a) $\omega = 0.5$, (b) $\omega = 3.0$ e (c) $\omega = 10.0$.

aproximadamente o mesmo comportamento. A melhoria do estimador inverso aumenta com λ . Quando a distância ω aumenta, o estimador inverso perde a supremacia sobre o estimador clássico, a não ser quando λ é muito pequeno, correspondendo a um erro relativamente pequeno na variável resposta, e o tamanho da amostra n é também pequeno.

As Figuras 3.3.a, b e c comparam o erro quadrático médio do estimador clássico com máxima verossimilhança dado em (3.44) com o erro quadrático médio do estimador inverso com mínimos quadrados dado em (3.46). Os parâmetros do modelo são os mesmos usados na construção da Figura 3.2. Quando ω é pequeno (Figura 3.3.a), o estimador inverso é melhor que o clássico, no sentido de ter um erro quadrático menor, a não ser em uma faixa pequena de valores de λ . Quando o tamanho da amostra é pequeno ($n = 10$), o estimador clássico é melhor que o estimador inverso num intervalo de valores de λ . Esse intervalo é ampliado com o aumento do valor de ω . Para $n \geq 20$, o estimador clássico tem um comportamento melhor que o estimador inverso. A conclusão geral retirada das comparações dos erros quadráticos médios ilustradas nessas figuras é que o estimador inverso tem melhor desempenho que o estimador clássico somente em um intervalo em torno da média. Conforme visto no Capítulo 2, Shukla (1972) obteve resultados similares em seu estudo do modelo de calibração sem erros nas variáveis.

3.5 Exemplos

Exemplo 3.1 O primeiro conjunto de dados considerado aparece em Miller (1980), onde duas medidas de níveis de canamicina sérica em amostras de sangue foram retiradas simultaneamente de vinte recém-nascidos. Uma das medidas foi obtida por punção venosa do calcanhar (X) e a outra usando um cateter umbilical (Y). Como é razoável supor erros de medida em ambos os métodos, será usado o modelo com erros nas variáveis. É também razoável que $\lambda = 1$ esteja correto (Kelly, 1984). Os vinte pares de valores da punção e do cateter são apresentados na Tabela 3.3 e representados na Figura 3.4. Serão apresentados

Figura 3.3: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ com $n = 10, 20, 30$ e 100 , onde (a) $\omega = 0.5$, (b) $\omega = 3.0$ e (c) $\omega = 10.0$.

Tabela 3.3: Nível de canamicina sérico em amostras de sangue retiradas simultaneamente por cateter umbilical e por punção venosa do calcanhar em vinte recém-nascidos.

Recém-nascidos	Punção do calcanhar (X)	Cateter (Y)
1	23.0	25.2
2	33.2	26.0
3	16.6	16.3
4	26.3	27.2
5	20.0	23.2
6	20.0	18.1
7	20.6	22.2
8	18.9	17.2
9	17.8	18.8
10	20.0	16.4
11	26.4	24.8
12	21.8	26.8
13	14.9	15.4
14	17.4	14.9
15	20.0	18.1
16	13.2	16.3
17	28.4	31.3
18	25.9	31.2
19	18.9	18.0
20	13.8	15.6

Figura 3.4: Nível de canamicina sérico em amostras de sangue retiradas simultaneamente por cateter umbilical e por punção venosa do calcanhar em vinte recém-nascidos

dois casos:

(I) Suponha que o objetivo é estimar $U_0 = X_2$, de modo que $k = 1$ e $n = 19$. Nesse caso, $U_0 = 33.20$ e $\bar{X} = 20.20$. As estimativas obtidas a partir da amostra observada foram

$$\begin{aligned}\hat{U}_{0CV} &= 29.17, & \hat{U}_{0CQ} &= 31.24, & \hat{U}_{0IQ} &= 28.87, \\ \hat{\beta}_V &= 1.29, & \hat{\beta}_Q &= 1.11, & \hat{\phi}_Q &= 0.70, \\ \tilde{\theta}_V &= 2.32, & \hat{\ell} &= 6.52, & \hat{\omega} &= \hat{U}_{0CV} - \bar{X} = 8.97.\end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= 0.037, & \hat{A}_2 &= 0.014, & \hat{A}_3 &= 0.016, \\ \hat{C}_1 &= 2.056, & \hat{C}_2 &= 1.613, & \hat{C}_3 &= 1.369.\end{aligned}$$

Como $\hat{A}_1$ é maior que $\hat{A}_2$ e $\hat{A}_3$ e $\hat{C}_1$ é maior que $\hat{C}_2$ e $\hat{C}_3$, conclui-se que $\hat{U}_{0CV}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ são preferíveis a $\hat{U}_{0CQ}$ (situação a). Por outro lado, como $\hat{A}_2 < \hat{A}_3$ e $\hat{C}_2 > \hat{C}_3$ segue da situação c) que, $\hat{U}_{0CV}$ é preferível a $\hat{U}_{0IQ}$, já que U_0 não pertence ao intervalo (9.91; 30.50). Então, a preferência pelo estimador $\hat{U}_{0CV}$ é clara nesse caso.

(II) Suponha agora que seja de interesse estimar $U_0 = X_6, X_{10}, X_{15}$, de modo que $k = 3$ e $n = 17$. Nesse caso, $U_0 = 20.0$ e $\bar{X} = 21.0$. As estimativas da análise em questão foram

$$\begin{aligned}\hat{U}_{0CV} &= 16.82, & \hat{U}_{0CQ} &= 16.07, & \hat{U}_{0IQ} &= 17.43, \\ \hat{\beta}_V &= 1.01, & \hat{\beta}_Q &= 0.86, & \hat{\phi}_Q &= 0.84, \\ \tilde{\theta}_V &= 3.88, & \hat{\ell} &= 6.34, & \hat{\omega} &= \hat{U}_{0CV} - \bar{X} = -4.18,\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= 0.047, & \hat{A}_2 &= 0.019, & \hat{A}_3 &= 0.026, \\ \hat{C}_1 &= 2.218, & \hat{C}_2 &= 1.752, & \hat{C}_3 &= 1.364.\end{aligned}$$

Por esses resultados, vê-se que $\hat{A}_1$ é maior que $\hat{A}_2$ e $\hat{A}_3$, e $\hat{C}_1$ é maior que $\hat{C}_2$ e $\hat{C}_3$, donde conclui-se que $\hat{U}_{0CV}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ têm erro quadrático médio menor que $\hat{U}_{0CQ}$ (situação a). Observa-se também que $\hat{A}_2 < \hat{A}_3$ e $\hat{C}_2 > \hat{C}_3$, logo, $\hat{U}_{0IQ}$ é preferível a $\hat{U}_{0CV}$, pois $U_0 = 20.0$ pertence ao intervalo (13.14; 28.87), conclusão esta vinda da situação c).

Exemplo 3.2 Como segundo exemplo, serão considerados os dados apresentados em Madansky (1959), onde X representa o diâmetro da calota observada durante o ensaio de dureza de Brinell e Y o valor da dureza Brinell. De acordo com Madansky, é razoável tomar a razão das variâncias $\lambda = 150$, um valor não coberto pelas Tabelas 3.1 e 3.2. Na amostra de tamanho 50 registrada por Madansky as seguintes estatísticas podem ser calculadas

$$S_{xx} = 712.9, \quad S_{yy} = 13917.9 \quad \text{e} \quad S_{xy} = 2344.0,$$

levando aos seguintes estimadores

$$\hat{\beta}_V = 3.475, \quad \tilde{\theta} = 0.754 \quad \text{e} \quad \hat{\ell} = 893.981.$$

Pode ser mostrado que

$$\begin{array}{lll} \hat{A}_1 = 3.02 \times 10^{-4}, & \hat{A}_2 = 3.00 \times 10^{-4}, & \hat{A}_3 = 4.51 \times 10^{-4}, \\ \hat{C}_1 = 9.59, & \hat{C}_2 = 9.57, & \hat{C}_3 = 9.31. \end{array}$$

Como $\hat{A}_1 > \hat{A}_2$ e $\hat{C}_1 > \hat{C}_2$, segue da situação (a) que $\hat{U}_{0CV}$ é preferível a $\hat{U}_{0CQ}$. Também, como $\hat{A}_1 < \hat{A}_3$ e $\hat{C}_1 > \hat{C}_3$, segue da situação (c) que $\hat{U}_{0IQ}$ é preferível a $\hat{U}_{0CQ}$ no intervalo $(220.31; 307.53)$. Mais ainda, como $\hat{A}_2 < \hat{A}_3$ e $\hat{C}_2 > \hat{C}_3$, segue da situação (c) que $\hat{U}_{0IQ}$ é preferível a $\hat{U}_{0CV}$ no intervalo $(222.27; 305.57)$. Então, segue que

- se $U_0 < 220.31$, $\hat{U}_{0CV}$ é preferível a $\hat{U}_{0CQ}$, que por sua vez é preferível a $\hat{U}_{0IQ}$;
- se $U_0 \in (220.31; 222.27)$, $\hat{U}_{0CV}$ é preferível a $\hat{U}_{0IQ}$, que é preferível a $\hat{U}_{0CQ}$;
- se $U_0 \in (222.27; 305.57)$, $\hat{U}_{0IQ}$ é preferível a $\hat{U}_{0CV}$, que é preferível a $\hat{U}_{0CQ}$;
- se $U_0 \in (305.57; 307.53)$, $\hat{U}_{0CV}$ é preferível a $\hat{U}_{0IQ}$, que é preferível a $\hat{U}_{0CQ}$;
- se $U_0 > 307.53$, $\hat{U}_{0CV}$ é preferível a $\hat{U}_{0CQ}$, que é preferível a $\hat{U}_{0IQ}$.

Então, exceto quando U_0 está próximo a $\bar{U}$, tem-se que $\hat{U}_{0CV}$ é o estimador que deve ser usado.

3.6 O uso de um valor incorreto para λ

Suponha agora que em vez de usar o valor correto λ , o investigador usa um valor incorreto λ^* para calcular o estimador clássico. Um estudo do efeito de se considerar um valor errado para λ na estimação de β é visto em Lakshminarayanan e Gunst (1984). Veja também Ketellaper (1983). Nesta seção será investigado o efeito de adotar um valor errado para λ no vício e no erro quadrático médio do estimador de máxima verossimilhança apresentado na Seção 3.1. Nessa situação, $\hat{U}_{0CV}$ é inconsistente para U_0 se $\lambda \neq \lambda^*$. Esse e outros resultados são apresentados a seguir.

Seja

$$\hat{U}_{0CV}^* = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_V^*}{\hat{\beta}_V^*},$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_V^* &= \bar{Y} - \hat{\beta}_V^* \bar{X}, \\ \hat{\beta}_V^* &= S(\lambda^*) + \sqrt{\lambda^* + S^2(\lambda^*)}\end{aligned}$$

e

$$S(\lambda^*) = \frac{S_{yy} - \lambda^* S_{xx}}{2S_{xy}}.$$

Lema 3.4 *Sob o modelo (2.8), (3.1), (3.2), com a suposição de λ ser conhecido, mas substituído por um valor incorreto, λ^* , segue que*

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}_V^*) &= \frac{F}{F-1} g_\lambda(\lambda^*) + \frac{1}{n\ell\beta^2} \left\{ \frac{\lambda^*}{4} \left(\frac{F-1}{g_\lambda(\lambda^*)} \right)^3 J + F[g_\lambda(\lambda^*)(\lambda + \beta^2 + \lambda/\ell) \right. \\ &\quad \left. - (\lambda - \lambda^*)\beta \right\} + O(n^{-2})\end{aligned}$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_V^*) = \frac{F^2}{2n\ell\beta^2} J + O(n^{-2}),$$

onde

$$g_\lambda(\lambda^*) = \frac{(\beta^2 - \lambda^*)}{2\beta} + \frac{(\lambda - \lambda^*)}{2\beta\ell} + O(n^{-1}),$$

$$F = 1 + \frac{g_\lambda(\lambda^*)}{\sqrt{\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)}}$$

e

$$J = 2\lambda^{*2} + 2\lambda\beta^2 + 2\lambda\lambda^*/\ell - (\lambda - \lambda^*)(4\beta g_\lambda(\lambda^*) - (\lambda - \lambda^*)/\ell) \\ + 2g_\lambda^2(\lambda^*)(\lambda + \beta^2 + \lambda/\ell),$$

com ℓ dado em (3.34).

Prova: A expansão em série de Taylor de $\hat{\beta}_V^*$ até ordem n^{-2} em torno do ponto $(E(S_{xx}), E(S_{xy}), E(S_{yy}))$ é

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_V^* &= g_\lambda(\lambda^*) + \sqrt{\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)} - \frac{\lambda^* F}{2\beta\ell\theta} (S_{xx} - E(S_{xx})) - \frac{g_\lambda(\lambda^*) F}{\beta\ell\theta} (S_{xy} - E(S_{xy})) \\ &+ \frac{F}{2\beta\ell\theta} (S_{yy} - E(S_{yy})) + \frac{\lambda^{*3}}{8\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} (S_{xx} - E(S_{xx}))^2 \\ &+ \left(\frac{g_\lambda(\lambda^*) F}{\beta^2\ell^2\theta^2} + \frac{\lambda^* g_\lambda^2(\lambda^*)}{2\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} \right) (S_{xy} - E(S_{xy}))^2 \\ &+ \frac{\lambda^*}{8\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} (S_{yy} - E(S_{yy}))^2 \\ &+ \left(\frac{\lambda^* F}{2\beta^2\ell^2\theta^2} + \frac{\lambda^{*2} g_\lambda(\lambda^*)}{2\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))(S_{xy} - E(S_{xy})) \\ &- \frac{\lambda^{*2}}{4\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} (S_{xx} - E(S_{xx}))(S_{yy} - E(S_{yy})) \\ &- \left(\frac{F}{2\beta^2\ell^2\theta^2} + \frac{\lambda^* g_\lambda(\lambda^*)}{2\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} \right) (S_{yy} - E(S_{yy}))(S_{xy} - E(S_{xy})) + O_p(n^{-2}). \end{aligned}$$

Calculando a esperança e a variância dessa expressão, obtém-se

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_V^*) &= g_\lambda(\lambda^*) + \sqrt{\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)} + \frac{\lambda^{*3}}{8\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} \text{Var}(S_{xx}) \\ &+ \left(\frac{g_\lambda(\lambda^*) F}{\beta^2\ell^2\theta^2} + \frac{\lambda^* g_\lambda^2(\lambda^*)}{2\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} \right) \text{Var}(S_{xy}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda^*}{8\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} \text{Var}(S_{yy}) \\
& + \left(\frac{\lambda^*F}{2\beta^2\ell^2\theta^2} + \frac{\lambda^{*2}g_\lambda(\lambda^*)}{2\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} \right) \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) \\
& - \left(\frac{F}{2\beta^2\ell^2\theta^2} + \frac{\lambda^*g_\lambda(\lambda^*)}{2\beta^2\ell^2\theta^2[\lambda^* + g_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} \right) \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) + O(n^{-2})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{\beta}_V^*) &= \frac{\lambda^{*2}F^2}{4\beta^2\ell^2\theta^2} \text{Var}(S_{xx}) + \frac{g_\lambda^2(\lambda^*)F^2}{\beta^2\ell^2\theta^2} \text{Var}(S_{xy}) + \frac{F^2}{4\beta^2\ell^2\theta^2} \text{Var}(S_{yy}) \\
&+ \frac{\lambda^*g_\lambda(\lambda^*)F^2}{\beta^2\ell^2\theta^2} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) - \frac{g_\lambda(\lambda^*)F^2}{\beta^2\ell^2\theta^2} \text{Cov}(S_{xy}, S_{yy}) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Substituindo (3.9) - (3.11), (3.13) e (3.14) nas expressões acima, e após algumas manipulações algébricas, completa-se a prova. $\square$

A partir do lema acima é estabelecido o resultado principal desta seção.

Teorema 3.7 *Sob as suposições do Lema 3.4 e assumindo que k é um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$\begin{aligned}
E(\hat{U}_{0CV}^*) &= U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})}{Fg_\lambda(\lambda^*)} [F(\beta - g_\lambda(\lambda^*)) - \beta] - \frac{(U_0 - \bar{U})(F-1)^2}{n\beta\ell F^2 g_\lambda^2(\lambda^*)} I \\
&+ \frac{(U_0 - \bar{U})(F-1)^3}{2n\beta\ell F g_\lambda^3(\lambda^*)} J + O(n^{-2})
\end{aligned} \tag{3.47}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{U}_{0CV}^*) &= \frac{\theta(F^2 g_\lambda^2(\lambda^*) + \lambda(F-1)^2)}{nF^2 g_\lambda^2(\lambda^*)} + \frac{\lambda\theta(F-1)^2}{kF^2 g_\lambda^2(\lambda^*)} - \frac{2\lambda\theta(F-1)^3}{nk\beta^2\ell F^3 g_\lambda^3(\lambda^*)} I \\
&+ \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{3\lambda\theta}{k\beta^2} \right) \frac{(F-1)^4}{2n\ell F^2 g_\lambda^4(\lambda^*)} J + O(n^{-2}),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde ℓ é dado em (3.34), $g_\lambda(\lambda^*)$, F e J estão definidos no Lema 3.4 e

$$I = \frac{\lambda^*(F-1)^3}{4g_\lambda^3(\lambda^*)} J + F\{g_\lambda(\lambda^*)(\lambda + \beta^2 + \lambda/\ell) - (\lambda - \lambda^*)\beta\}.$$

Prova: Pela expansão (3.18) e (3.20), obtém-se

$$E(\hat{U}_{0CV}^*) = E(\bar{X}) + \beta(U_0 - \bar{U})E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) = \bar{U} + \beta(U_0 - \bar{U})\left(\frac{1}{E(\hat{\beta}_V^*)} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_V^*)}{E^3(\hat{\beta}_V^*)}\right) + O(n^{-2}).$$

Procedendo de modo equivalente às expressões (3.30) e (3.31) e utilizando o Lema 3.4, tem-se

$$\frac{1}{E(\hat{\beta}_V^*)} = \frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)} - \frac{1}{n\ell\beta^2}\left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right)^2 I + O(n^{-2})$$

e

$$\frac{1}{E^3(\hat{\beta}_V^*)} = \left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right)^3 + O(n^{-1}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0CV}^*) &= \bar{U} + \beta(U_0 - \bar{U})\left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right) - \frac{(U_0 - \bar{U})}{n\ell\beta}\left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right)^2 I \\ &\quad + \beta(U_0 - \bar{U})\left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

O resultado para a esperança segue da utilização do Lema 3.4. Para calcular a variância de $\hat{U}_{0CV}^*$, retome a expressão (3.19). Pela mesma justificativa dada no Teorema 3.2, tem-se que as covariâncias envolvidas são nulas. Logo, a variância desse estimador é dada por

$$\text{Var}(\hat{U}_{0CV}^*) = \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2(U_0 - \bar{U})^2 \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V^*}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V^*}\right).$$

Pelas expressões de (3.20) a (3.23), procedendo de modo equivalente aos resultados (3.24) e (3.25), e utilizando o Lema 3.4, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) &= \text{Var}(\hat{\beta}_V^*)\left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right)^4 + O(n^{-2}), \\ \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V^*}\right) &= \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right)^2 - \frac{2\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{n\ell\beta^2}\left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right)^3 I \\ &\quad + 3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + O(n^{-2}), \\ \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V^*}\right) &= \text{Var}(\bar{\varepsilon})\left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)}\right)^2 + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{U}_{0CV}) &= \frac{\theta}{n} + \beta^2(U_0 - \bar{U})^2 \left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)} \right)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + \frac{\lambda\theta}{k} \left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 \\ &\quad - \frac{2\lambda\theta}{nk\ell\beta^2} \left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)} \right)^3 I + \frac{3\lambda\theta}{k} \left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)} \right)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) \\ &\quad + \frac{\lambda\theta}{n} \left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 + O(n^{-2}).\end{aligned}$$

Assim, conclui-se o resultado do Lema 3.4. $\square$

Pelo teorema acima, obtém-se o erro quadrático médio, que é dado por

$$\begin{aligned}EQM(\hat{U}_{0CV}^*) &= \frac{\theta(F^2g_\lambda^2(\lambda^*) + \lambda(F-1)^2)}{nF^2g_\lambda^2(\lambda^*)} + \frac{\lambda\theta}{k} \left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 - \frac{2T\theta}{nk\ell} \left(\frac{F-1}{Fg_\lambda(\lambda^*)} \right)^3 I \\ &\quad + \frac{3T\theta}{2nk\ell} \frac{(F-1)^4}{F^2g_\lambda^4(\lambda^*)} J + (U_0 - \bar{U})^2 \left\{ \frac{(F-1)^4 J}{2n\ell F^2g_\lambda^4(\lambda^*)} + \frac{[F(\beta - g_\lambda(\lambda^*)) - \beta]^2}{F^2g_\lambda^2(\lambda^*)} \right. \\ &\quad - \frac{2(F-1)^2}{n\beta\ell F^3g_\lambda^3(\lambda^*)} [F(\beta - g_\lambda(\lambda^*)) - \beta] I \\ &\quad \left. + \frac{(F-1)^3}{n\beta\ell F^2g_\lambda^4(\lambda^*)} [F(\beta - g_\lambda(\lambda^*)) - \beta] J \right\} + O(n^{-2}),\end{aligned}\quad (3.49)$$

onde $g_\lambda(\lambda^*)$, F e J estão definidos no Lema 3.4, ℓ dado em (3.34), I definido no Teorema 3.7 e $T = \lambda/\beta^2$.

As Figuras 3.5.a, b e c apresentam o erro quadrático médio assintótico do estimador clássico com máxima verossimilhança ($\hat{U}_{0CV}$) baseado em (3.44) e do estimador clássico com máxima verossimilhança calculado com respeito a λ^* ($\hat{U}_{0CV}^*$) baseado em (3.49). Como pode ser visto, o erro quadrático médio do estimador $\hat{U}_{0CV}$ pode ser severamente afetado quando seleciona-se um valor errado λ^* , especialmente se esse valor está longe do verdadeiro valor. Mais ainda, o desempenho de $\hat{U}_{0CV}^*$ piora com o aumento de ω . Os parâmetros do modelo são os mesmos da Figura 3.2, com o verdadeiro valor de λ igual a 3.

Na Figura 3.6, compara-se o erro quadrático médio assintótico do estimador $\hat{U}_{0CV}^*$ dado pela expressão (3.49) com o do estimador $\hat{U}_{0IQ}$ baseado em (3.46). Observando-se essa figura e a figura 3.3.a, tem-se que para amostras de tamanho grande o comportamento do

Figura 3.5: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV}$ e $\hat{U}_{0CV}^*$ com $n = 10, 20, 30$ e 100 , onde (a) $\omega = 0.5$, (b) $\omega = 3.0$ e (c) $\omega = 10.0$. Verdadeiro $\lambda = 3.0$.

Figura 3.6: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV}^*$ e $\hat{U}_{0IQ}$, com $n = 10, 20, 30$ e 100 e $\omega = 0.5$. Verdadeiro $\lambda = 3.0$.

Figura 3.7: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0CV}^*$, com $n = 10, 20, 30$ e 100 e $\omega = 3.0$. Verdadeiro $\lambda = 3.0$.

estimador $\hat{U}_{0CV}^*$ é o mesmo que o estimador $\hat{U}_{0CV}$ se λ^* estiver próximo ao verdadeiro valor de λ , contudo a medida que λ^* se afasta do verdadeiro valor ($\lambda = 3$), o comportamento do estimador $\hat{U}_{0CV}^*$ é bastante prejudicado.

A Figura 3.7 compara o erro quadrático médio assintótico do estimador $\hat{U}_{0CV}^*$ dado na expressão (3.49) com o do estimador $\hat{U}_{0CQ}$ usando a expressão (3.42). Pode ser visto que o estimador $\hat{U}_{0CV}^*$ é severamente afetado por valores grandes de λ^* . É interessante ressaltar que foi mostrado analiticamente na Seção 3.4 que $EQM(\hat{U}_{0CV}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$.

3.7 Um estudo de simulação

Nesta seção serão descritos os resultados de um estudo de simulação com o objetivo de verificar o comportamento das aproximações para os vícios e os erros quadráticos médios obtidos neste capítulo.

Neste estudo, 1000 amostras de tamanho $n = 20$ e 100 foram geradas de acordo com o modelo especificado pelas equações (2.8), (3.1) e (3.2), com $\alpha = 10.0$, $\beta = 0.5$, $U_0 = 15.0$, $k = 2$, $\lambda\theta = 1$ e $\theta = 0.1$. A sequência de parâmetros $U_1, \dots, U_n$ foi gerada da distribuição $U(10, 30)$. Logo, $\ell = 333.33$. Esse estudo foi feito usando o pacote MATLAB, versão 4.0, e executado num microcomputador PC 486 DX4-100.

Para cada amostra, foram calculados três estimadores de U_0 , denotados por $\hat{U}_{0CV}$, $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$, e para cada um foi obtido o erro quadrático médio empírico (ou simulado) dado por

$$\frac{\sum_{i=1}^{1000} (U_0 - \hat{U}_{0i})^2}{1000}$$

e o vício empírico (ou simulado) dado por

$$\frac{\sum_{i=1}^{1000} (U_0 - \hat{U}_{0i})}{1000},$$

onde $\hat{U}_{0i}$ corresponde ao valor do estimador de U_0 , calculado a partir da i -ésima amostra gerada.

Com as especificações do modelo acima, foram obtidos os vícios e os erros quadráticos médios aproximados de $\hat{U}_{0CQ}$, $\hat{U}_{0CV}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ dados em (3.41) – (3.46).

As Tabelas 3.4 e 3.5 apresentam, respectivamente, os vícios e os erros quadráticos médios aproximados para cada estimador proposto.

Tabela 3.4: Vício de $\hat{U}_0$

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0CV}$		$\hat{U}_{0IQ}$	
	Empírico	Aproximado	Empírico	Aproximado	Empírico	Aproximado
20	-0.115	-0.194	-0.094	-0.508	0.648	0.684
100	-0.009	-0.037	0.003	-0.016	0.438	0.427

Tabela 3.5: Erro quadrático médio de $\hat{U}_0$

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0CV}$		$\hat{U}_{0IQ}$	
	Empírico	Aproximado	Empírico	Aproximado	Empírico	Aproximado
20	2.548	2.523	2.523	2.500	2.206	2.213
100	2.097	2.081	2.085	2.069	1.856	1.824

Essas tabelas mostram que mesmo com o tamanho da amostra pequeno as aproximações obtidas nesse trabalho são muito boas, já que a diferença máxima entre o vício empírico e o aproximado foi do estimador $\hat{U}_{0CV}$, que foi de 0.414, em valor absoluto, quando $n = 20$. Em relação ao erro quadrático médio, a diferença máxima foi de 0.032 para o estimador $\hat{U}_{0IQ}$, quando $n = 100$. Também pode ser observado que o vício, tanto empírico quanto aproximado, do estimador inverso com mínimos quadrados é o maior entre os três estimadores propostos. Apesar disso, o erro quadrático médio desse estimador é o menor. Mais uma vez, é comprovada a supremacia do estimador $\hat{U}_{0CV}$ em relação a $\hat{U}_{0CQ}$.

Capítulo 4

Modelo de calibração funcional com uma das variâncias conhecidas

Neste capítulo será considerado o caso em que a variância dos erros de medição σ_δ^2 é conhecida. Conforme mencionado no Capítulo 2, essa é uma das maneiras de tornar o logaritmo da função de verossimilhança do modelo definido pelas equações (2.8) - (2.10) limitado e, conseqüentemente, tornar factível a estimação dos parâmetros do modelo. Vários autores tratam da estimação do coeficiente angular β nesse caso. Dentre outros, pode ser citado Fuller (1987) que discute principalmente o caso estrutural e Cheng e Van Ness (1991) que se dedicam ao caso ultraestrutural. No modelo funcional deve ser enfatizado que os resultados obtidos são em geral de natureza assintótica, e que a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo não pode ser derivada a partir dos resultados usuais para o caso em que as condições de regularidade estão satisfeitas.

4.1 Estimadores consistentes e outras propriedades

Conforme mostrado em Moberg e Sundberg (1978), no caso em que σ_δ^2 é conhecido, os estimadores de máxima verossimilhança de α e β não são consistentes e não podem ser obtidos de forma explícita. Também não são conhecidas expressões para as variâncias assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança. Portanto, a inconsistência dos

estimadores de máxima verossimilhança de α e β no modelo de regressão funcional quando uma das variâncias é conhecida, implica também na inconsistência desses estimadores no modelo de calibração funcional sob as mesmas suposições. Contudo isso não significa que estimadores consistentes não possam ser obtidos. O procedimento comumente utilizado no modelo de regressão funcional para estimação de α e β , é adotar os estimadores obtidos pelo método dos momentos no modelo estrutural e estudar o seu comportamento no caso funcional. Veja, por exemplo, Cheng e Van Ness (1991). Vamos então usar o mesmo enfoque para obter estimadores consistentes no modelo de calibração linear quando σ_δ^2 é conhecido.

De (2.8), (2.9) e (2.10), tem-se que

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} U_i \\ \alpha + \beta U_i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_\delta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\epsilon^2 \end{pmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

e

$$Y_{0i} \sim N(\alpha + \beta U_0; \sigma_\epsilon^2), \quad i = n+1, \dots, n+k,$$

com $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0)$ mutuamente independentes, onde $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ e $\mathbf{Y}_0 = (Y_{0n+1}, \dots, Y_{0n+k})$, como definidos no Capítulo 3.

A fim de obter estimadores consistentes para os parâmetros do modelo acima, será considerado inicialmente o modelo estrutural. Suponha, então, que σ_δ^2 é conhecido e que $U_i \sim N(\mu_u, \sigma_u^2)$, $i = 1, \dots, n$. Baseado nessas suposições, pode-se mostrar que os momentos populacionais de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0)$ satisfazem

$$(\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{Y0}^2, \sigma_{XY}, \sigma_{XY0}, \sigma_{Y0Y}) = (\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2, \beta^2 \sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2, \sigma_\epsilon^2, \beta \sigma_u^2, 0, 0)$$

e

$$(\mu_X, \mu_Y, \mu_{Y0}) = (\mu, \alpha + \beta \mu, \alpha + \beta U_0).$$

Estimadores dos parâmetros desconhecidos são obtidos pela substituição dos momentos populacionais desconhecidos pelos correspondentes momentos amostrais, no lado es-

querdo das igualdades acima. Obtém-se, assim, um sistema de equações em função dos parâmetros desconhecidos.

Resolvendo esse sistema de equações, obtém-se os estimadores

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \\ \hat{\beta} &= \frac{S_{xy}}{S_{xx} - \sigma_\delta^2} \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{1}{2}(S_{yy} + S_{y0y0} - \hat{\beta}S_{xy}) \\ \hat{U}_{0C} &= \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}}, \quad \hat{\beta} \neq 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

e

$$\hat{\sigma}_u^2 = S_{xx} - \sigma_\delta^2,$$

onde $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Y}_0$, S_{xx} , S_{xy} , S_{yy} , S_{y0y0} estão definidos em (3.3). Para os estimadores dados em (4.1) estarem definidos no espaço paramétrico, $\hat{\sigma}_u^2$ e $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ devem ser positivos. Os estimadores de σ_u^2 e σ_ε^2 serão positivos se

$$(S_{yy} + S_{y0y0})(S_{xx} - \sigma_\delta^2) - S_{xy}^2 > 0,$$

isto é, se $S_{xx} > \sigma_\delta^2$ e $S_{yy} + S_{y0y0} > \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} - \sigma_\delta^2}$. Assintoticamente, não há restrições, pois $\hat{\sigma}_u^2 \rightarrow \sigma_u^2 > 0$ e $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \rightarrow \sigma_\varepsilon^2 > 0$.

Observação: Nesse modelo os estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ só dependem da primeira etapa do problema de calibração, como ocorre nos modelos apresentados nos capítulos anteriores. Como o estimador $\hat{U}_{0C}$ tem a mesma estrutura de (2.3), aqui também será denominado “estimador clássico”.

A matriz de covariâncias dos estimadores dados em (4.1), envolvendo termos até primeira ordem, é obtida a seguir sob a suposição de que $k = an$, com $a \in Q^+$, e de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U} = \mu < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(U_i - \bar{U})^2}{n} = \nu^2 < \infty. \tag{4.2}$$

A consistência forte desses estimadores é também provada.

Teorema 4.1 Sob o modelo (2.8) - (2.10), com σ_δ^2 conhecido, $k = an$, $a \in \mathbb{Q}^+$, $k \in \mathbb{Z}^+$, segue sob a suposição (4.2) que os estimadores $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ dados em (4.1) são fortemente consistentes com matriz de covariâncias dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{\varphi}{n} + \frac{\bar{U}^2 p}{n} & -\frac{\bar{U} p}{n} & -\frac{\varphi}{n\beta} + \frac{\bar{U}(U_0 - \bar{U})p}{n\beta} & -\frac{\bar{U} r}{n} \\ & \frac{p}{n} & -\frac{(U_0 - \bar{U})p}{n\beta} & \frac{r}{n} \\ & & \frac{\varphi}{n\beta^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2 p}{n\beta^2} & \frac{(U_0 - \bar{U})\varphi\sigma_\delta^2}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} \\ & & & \frac{\varphi^2}{2n} + \frac{\sigma_\varepsilon^4}{2k} \end{bmatrix} + O(n^{-2}),$$

onde

$$\varphi = \sigma_\varepsilon^2 + \beta^2 \sigma_\delta^2, \quad (4.3)$$

$$p = \frac{\left[(\sigma_\delta^2 + \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n) \varphi + \beta^2 \sigma_\delta^4 \right]}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n \right)^2}, \quad (4.4)$$

$$r = -\frac{\beta \sigma_\delta^2 \varphi}{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n}. \quad (4.5)$$

Prova: Primeiro, note que $X_1, X_2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes com $E(X_i) = U_i$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma_\delta^2$, $i = 1, 2, \dots$. Então, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} = \sigma_\delta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sigma_\delta^2 \frac{\pi^2}{6} < \infty,$$

segue da Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov que $\bar{X} - \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$. Da suposição (4.2), segue que $\bar{X} \xrightarrow{\text{q.c.}} \mu$, com $n \rightarrow \infty$. Similarmente, pode ser mostrado que

$$\bar{Y} \xrightarrow{\text{q.c.}} \alpha + \beta\mu,$$

$$S_{xx} \xrightarrow{\text{q.c.}} \sigma_\delta^2 + \nu^2,$$

$$S_{xy} \xrightarrow{\text{q.c.}} \beta\nu^2,$$

$$S_{yy} \xrightarrow{\text{q.c.}} \beta^2\nu^2 + \sigma_\varepsilon^2,$$

$$\bar{Y}_0 \xrightarrow{\text{q.c.}} \alpha + \beta U_0$$

e

$$S_{y0y0} \xrightarrow{\text{q.c.}} \sigma_\epsilon^2.$$

Como $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ são funções contínuas dos momentos amostrais acima, exceto quando $\hat{\beta} = 0$, que tem probabilidade zero, é fácil mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{U}_{0C}, \hat{\sigma}_\epsilon^2) = (\alpha, \beta, U_0, \sigma_\epsilon^2),$$

com probabilidade um, concluindo assim a consistência forte dos estimadores dados em (4.1).

Para se obter a aproximação até primeira ordem da matriz de covariâncias, será usada a aproximação considerada em Barnett (1969) dada pela expressão (3.5). É fácil mostrar que

$$\text{Var}(\bar{X}) = \sigma_\delta^2/n, \quad (4.6)$$

$$\text{Var}(\bar{Y}) = \sigma_\epsilon^2/n \quad (4.7)$$

e

$$\text{Var}(\bar{Y}_0) = \sigma_\epsilon^2/k. \quad (4.8)$$

Usando expansões padrões dos correspondentes momentos amostrais (veja Kendall e Stuart, 1952, 5.ed., vol. 1, p.322), pode ser mostrado que

$$\text{Var}(S_{xx}) = \frac{2\sigma_\delta^2}{n} \left[\sigma_\delta^2 + \frac{2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n} \right] + O(n^{-2}), \quad (4.9)$$

$$\text{Var}(S_{xy}) = \frac{\sigma_\epsilon^2 \sigma_\delta^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n} \left(\frac{\sigma_\epsilon^2 + \beta^2 \sigma_\delta^2}{n} \right) + O(n^{-2}), \quad (4.10)$$

$$\text{Var}(S_{yy}) = \frac{2\sigma_\epsilon^2}{n} \left[\sigma_\epsilon^2 + \frac{2\beta^2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n} \right] + O(n^{-2}), \quad (4.11)$$

$$\text{Var}(S_{y0y0}) = \frac{2\sigma_\epsilon^4}{k} + O(n^{-2}), \quad (4.12)$$

desde que, por hipótese, $k = an$. Depois de algumas manipulações algébricas simples, segue que

$$\text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) = \frac{2\beta\sigma_\delta^2}{n} \frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n}, \quad (4.13)$$

$$\text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) = \frac{2\beta\sigma_\varepsilon^2}{n} \frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n}, \quad (4.14)$$

$$\text{Cov}(S_{xx}, S_{yy}) = 0. \quad (4.15)$$

Além disso, as propriedades usuais da distribuição normal implicam que a covariância entre as médias amostrais e variâncias ou covariâncias amostrais são nulas, isto é,

$$\text{Cov}(\bar{X}, S_{xx}) = \text{Cov}(\bar{X}, S_{xy}) = \text{Cov}(\bar{X}, S_{yy}) = 0, \quad (4.16)$$

$$\text{Cov}(\bar{Y}, S_{xx}) = \text{Cov}(\bar{Y}, S_{xy}) = \text{Cov}(\bar{Y}, S_{yy}) = 0. \quad (4.17)$$

O cálculo das variâncias e covariâncias assintóticas dos estimadores dados em (4.1) será ilustrado através do cálculo da $\text{Var}(\hat{U}_{0C})$. Nesse caso, o vetor dos momentos amostrais é $\mathbf{m} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Y}_0, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}, S_{y0y0})$. Usando (3.5), com $h = g$, segue que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0C}) &= (g^{(1)})^2 \text{Var}(\bar{X}) + (g^{(2)})^2 \text{Var}(\bar{Y}) + (g^{(3)})^2 \text{Var}(\bar{Y}_0) \\ &\quad + (g^{(4)})^2 \text{Var}(S_{xx}) + (g^{(5)})^2 \text{Var}(S_{xy}) + 2g^{(4)}g^{(5)} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

já que $g^{(6)} = g^{(7)} = 0$ e as outras covariâncias são nulas, com

$$\begin{aligned} g^{(1)} &= 1, \quad g^{(2)} = -\frac{1}{\beta} + O(n^{-1}), \quad g^{(3)} = \frac{1}{\beta} + O(n^{-1}) \\ g^{(4)} &= \frac{U_0 - \bar{U}}{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n}, \quad g^{(5)} = -\frac{(U_0 - \bar{U})}{\beta \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n} + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

O resultado segue pela substituição, na expressão acima, dos resultados obtidos nas igualdades (4.6) - (4.14). Os elementos restantes da matriz de covariâncias podem ser calculados de maneira similar. $\square$

Uma maneira alternativa de obter os resultados do Teorema 4.1 é usar o enfoque considerado em Lwin e Maritz (1982).

A matriz de covariâncias dos estimadores $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ quando k é considerado fixo é discutida agora. O lema apresentado a seguir será utilizado na prova do teorema principal.

Lema 4.1 Sob o modelo (2.8) - (2.10), com σ_δ^2 conhecido, segue que

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= \beta + \frac{\beta\sigma_\delta^2}{n \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)} \left(3 + \frac{2\sigma_\delta^2}{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n} \right) + O(n^{-2}), \\ \text{Cov}(\hat{\beta}, \bar{X}) &= \text{Cov}(\hat{\beta}, \bar{Y}) = 0, \\ \text{Cov}(\hat{\beta}, S_{xx}) &= -\frac{2\beta\sigma_\delta^2}{n} - \frac{2\beta\sigma_\delta^4}{n \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)} + O(n^{-2}), \\ \text{Cov}(\hat{\beta}, S_{xy}) &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{n} - \frac{\beta^2\sigma_\delta^2}{n} + \frac{\sigma_\epsilon^2\sigma_\delta^2}{n \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)} + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

e

$$\text{Cov}(\hat{\beta}, S_{yy}) = \frac{2\beta\sigma_\epsilon^2}{n} + O(n^{-2}).$$

Prova: Para se obter a esperança de $\hat{\beta}$, note que $\hat{\beta}$ é uma função contínua de (S_{xx}, S_{xy}) . Tomando a esperança da expansão de Taylor de $\hat{\beta}$ em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(S_{xx}), E(S_{xy}))$, obtém-se

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= \beta + \frac{\beta\sigma_\delta^2}{n \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)} + \frac{\beta}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)^2} \text{Var}(S_{xx}) \\ &\quad - \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)^2} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

O resultado segue pela substituição de (4.9) e (4.13) na expressão acima. Da independência das médias amostrais com as variâncias e covariâncias amostrais em amostras que seguem a distribuição normal, prova-se que $\text{Cov}(\hat{\beta}, \bar{X}) = \text{Cov}(\hat{\beta}, \bar{Y}) = 0$. As outras covariâncias podem ser verificadas utilizando a técnica apresentada em Barnett (1969), juntamente com (4.9) - (4.11), (4.13) - (4.15). $\square$

No próximo teorema, a matriz de covariâncias dos estimadores $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ é discutida para o caso em que apenas o tamanho da amostra no experimento de calibração é grande. Ou seja, quando n é grande e k é fixado.

Teorema 4.2 Sob o modelo (2.8) - (2.10) com a suposição de que σ_δ^2 é conhecido e de que k é um inteiro positivo qualquer, segue que a matriz de covariâncias de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{U}_{0C}$ e

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{\varphi}{n} + \frac{\bar{U}^2 p}{n} & -\frac{\bar{U} p}{n} & -\frac{\varphi}{n\beta} + \frac{\bar{U}(U_0 - \bar{U})p}{n\beta} & -\frac{\bar{U} r}{n} \\ & \frac{p}{n} & -\frac{(U_0 - \bar{U})p}{n\beta} & \frac{r}{n} \\ & & v_{33} & \frac{(U_0 - \bar{U})\varphi\sigma_\delta^2}{n(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)} \\ & & & \frac{\varphi^2}{2n} + \frac{\sigma_\varepsilon^4}{2k} \end{bmatrix} + O(n^{-2}),$$

onde

$$\begin{aligned} v_{33} &= \frac{\varphi}{n\beta^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} - \frac{2\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2}{nk\beta^2(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n)^2} \left[3 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n + 2\sigma_\delta^2 \right] \\ &+ \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{3\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} \right) \frac{p}{n\beta^2}, \end{aligned}$$

φ é dado em (4.3), p é dado em (4.4) e r em (4.5).

Prova: A parte da matriz de covariâncias correspondente aos estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ é a mesma que a obtida no Teorema 4.1, já que esses estimadores só dependem da primeira etapa do problema de calibração. Com respeito a $\hat{U}_{0C}$, note que se pode escrevê-lo na forma dada em (3.18). Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0C}) &= \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2(U_0 - \bar{U})^2 \text{Var}(1/\hat{\beta}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}/\hat{\beta}) \\ &+ 2\text{Cov}(\bar{X}, \beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}) + 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}) - 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}) \\ &+ 2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}) - 2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}) \\ &- 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Então, as variâncias e covariâncias envolvendo $\hat{U}_{0C}$ dependem de $1/\hat{\beta}$, que pode ser escrito, depois de uma expansão em série de Taylor em torno de $E(\hat{\beta})$, como

$$\frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{1}{E(\hat{\beta})} - \frac{(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))}{E^2(\hat{\beta})} + \frac{(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))^2}{E^3(\hat{\beta})} + O_p(n^{-2}). \quad (4.19)$$

Usando (4.19), pode-se obter aproximações até termos de primeira ordem para as variâncias e covariâncias que envolvem $1/\hat{\beta}$. Do Lema 4.1 e da expressão (4.19), pode-se mostrar

que as covariâncias envolvidas na equação (4.18) são nulas. Após algumas manipulações algébricas com as expressões (4.19), (3.24) e (3.25), pode-se escrever

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{U}_{0C}) &= \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2(U_0 - \bar{U})^2 \frac{\text{Var}(\hat{\beta})}{\beta^4} + \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{\beta^2} - \frac{2\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{vício}(\hat{\beta})}{\beta^3} \\ &\quad + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta})}{\beta^4} + \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{\beta^2} + O(n^{-2}),\end{aligned}$$

onde, como no Capítulo 3, $\text{vício}(\hat{\beta})$ denota o vício do estimador $\hat{\beta}$, obtido a partir do Lema 4.1. O resultado segue substituindo-se na expressão acima as correspondentes expressões para $\text{Var}(\bar{\varepsilon})$, $\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)$, que são facilmente calculadas, e para $\text{Var}(\hat{\beta})$, que é dada no Teorema 4.1.

Como

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(S_{yy} + S_{y0y0} - \hat{\beta}S_{xy}) = \frac{1}{2}\left(S_{yy} + S_{y0y0} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} - \sigma_\delta^2}\right),$$

tem-se que $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ é função de $(S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}, S_{y0y0})$. Portanto, pode-se expandir $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ em série de Taylor até termos de ordem n^{-2} , em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(S_{xx}), E(S_{xy}), E(S_{yy}), E(S_{y0y0}))$, chegando-se assim à expressão

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \sigma_\varepsilon^2 - \frac{\varphi}{2n} - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2k} + \frac{1}{2}(S_{yy} - E(S_{yy})) + \frac{1}{2}(S_{y0y0} - E(S_{y0y0})) \\ &\quad - \beta(S_{xy} - E(S_{xy})) + \frac{\beta^2}{2}(S_{xx} - E(S_{xx})) + O_p(n^{-2}).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Então,

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) &= \frac{1}{4}\text{Var}(S_{yy}) + \frac{1}{4}\text{Var}(S_{y0y0}) + \beta^2\text{Var}(S_{xy}) + \frac{\beta^4}{4}\text{Var}(S_{xx}) \\ &\quad - \beta^3\text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) - \beta\text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) + O(n^{-2}).\end{aligned}$$

Substituindo nessa os resultados das expressões (4.9) - (4.14), obtém-se

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) = \frac{\varphi^2}{2n} + \frac{\sigma_\varepsilon^4}{2k} + O(n^{-2}).$$

Os termos restantes da matriz de covariâncias podem ser obtidos utilizando as expansões (4.19), (4.20) e o Lema 4.1. $\square$

O valor esperado do estimador $\hat{U}_{0C}$ envolvendo termos até primeira ordem é apresentado no próximo teorema.

Teorema 4.3 *Sob as mesmas condições do Teorema 4.2, tem-se que*

$$E(\hat{U}_{0C}) = U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})}{n\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)} \left[(\sigma_\varepsilon^2 - 2\beta^2 \sigma_\delta^2) + \frac{\sigma_\delta^2 \sigma_\varepsilon^2}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)} \right] + O(n^{-2}).$$

Prova: Calculando a esperança da expressão (3.18), tem-se que

$$E(\hat{U}_{0C}) = E(\bar{X}) + \beta(U_0 - \bar{U})E\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right).$$

Após algumas operações algébricas com as expressões (4.19), (3.30) e (3.31), obtém-se

$$E(\hat{U}_{0C}) = E(\bar{X}) + \beta(U_0 - \bar{U}) \left[\frac{1}{\beta} - \frac{\text{vício}(\hat{\beta})}{\beta^2} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta})}{\beta^3} \right] + O(n^{-2}).$$

Pelo Lema 4.1 e Teorema 4.2, chega-se ao resultado esperado. $\square$

Note que o valor esperado de $\hat{U}_{0C}$ dado no Teorema 4.3 também é válido para o caso em que k seja grande, já que essa esperança é independente de k . Além disso, como o vício de $\hat{U}_{0C}$ é de ordem n^{-1} , o erro quadrático médio aproximado até termos de primeira ordem, coincide com sua variância dada no Teorema 4.1 para k grande e no Teorema 4.2 para k fixado. No próximo teorema é apresentado um estimador consistente para $EQM(\hat{U}_{0C})$ para $k = an$.

Teorema 4.4 *Sob as condições consideradas no Teorema 4.1, tem-se que*

$$\begin{aligned} E\widehat{QM}(\hat{U}_{0C}) &= \frac{\hat{\varphi}}{n\hat{\beta}^2} + \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{k\hat{\beta}^2} + \frac{3\hat{\sigma}_\varepsilon^4(1+\hat{\ell})}{nk\hat{\beta}^4\hat{\ell}^2\sigma_\delta^2} + \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{nk\hat{\beta}^2\hat{\ell}^2}(2-3\hat{\ell}) \\ &\quad + \frac{(\hat{U}_{0C} - \bar{X})^2}{n\hat{\beta}^2\hat{\ell}^2\sigma_\delta^2}(\hat{\varphi}(1+\hat{\ell}) + \hat{\beta}^2\sigma_\delta^2), \end{aligned}$$

onde

$$\hat{\ell} = \frac{S_{xy}}{\hat{\beta}\sigma_\delta^2} \quad e \quad \hat{\varphi} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \hat{\beta}^2\sigma_\delta^2$$

é um estimador consistente para $EQM(\hat{U}_{0C})$.

Prova: O resultado segue basicamente do Teorema 4.1, que implica que

$$\widehat{\ell} \xrightarrow{\text{q.c.}} \frac{\nu^2}{\sigma_\delta^2} \quad \text{e} \quad \widehat{\varphi} \xrightarrow{\text{q.c.}} \varphi$$

quando $n \rightarrow \infty$. Como $E\widehat{QM}(\widehat{U}_{0C})$ é uma função contínua de $\widehat{\beta}$, $\widehat{\ell}$ e $\widehat{\varphi}$, é fácil mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\widehat{QM}(\widehat{U}_{0C}) = EQM(\widehat{U}_{0C})$$

com probabilidade um.

4.2 Outros estimadores e suas propriedades

A exemplo do que foi feito no Capítulo 3, um outro tipo de estimador para U_0 é o estimador inverso que pode ser obtido pela regressão inversa de U em Y . Supondo novamente um modelo estrutural, ou seja, que $U_i \sim N(\mu_u, \sigma_u^2)$, $i = 1, \dots, n$, o seguinte sistema de equações é obtido pelo método dos momentos

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= \frac{\widehat{\mu}}{\widehat{\phi}} - \frac{\widehat{\gamma}}{\widehat{\phi}}, \\ \overline{X} &= \widehat{\mu}, \\ \overline{Y}_0 &= \frac{\widehat{U}_0}{\widehat{\phi}} - \frac{\widehat{\gamma}}{\widehat{\phi}}, \\ S_{xx} &= \widehat{\sigma}_u^2 + \sigma_\delta^2, \\ S_{yy} &= \frac{\widehat{\sigma}_u^2}{\widehat{\phi}^2} + \widehat{\sigma}_\varepsilon^2, \\ S_{xy} &= \frac{\widehat{\sigma}_u^2}{\widehat{\phi}} \end{aligned}$$

e

$$S_{y0y0} = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2,$$

onde $\gamma = -\alpha/\beta$ e $\phi = 1/\beta$. Resolvendo esse sistema de equações, obtém-se

$$\widehat{\gamma} = \overline{X} - \widehat{\phi}\overline{Y},$$

$$\begin{aligned}
\hat{\phi} &= \frac{S_{xx} - \sigma_\delta^2}{S_{xy}}, \quad S_{xy} \neq 0, \\
\hat{U}_{0I} &= \hat{\gamma} + \hat{\phi} \bar{Y}_0, \\
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{1}{2} \left(S_{yy} + S_{y0y0} - \frac{S_{xy}^2}{\hat{\phi}} \right), \quad \hat{\phi} \neq 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

e

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = S_{xx} - \sigma_\delta^2.$$

Como considerado na literatura, $\hat{U}_{0I}$ é denominado “estimador inverso”. Pode ser mostrado que $\hat{\phi} = 1/\hat{\beta}$, com $\hat{\beta}$ dado em (4.1), o que implica em $\hat{U}_{0C} = \hat{U}_{0I}$. Isso é, os estimadores clássico e inverso coincidem quando obtidos através do método dos momentos assumindo o modelo estrutural. Ambos os estimadores têm vícios, variâncias e erros quadráticos médios idênticos. Considerando os estimadores clássico e inverso com respeito aos estimadores de mínimos quadrados de α , β , γ e ϕ , podem ser definidos dois outros estimadores, os quais serão denotados, respectivamente, por

$$\hat{U}_{0CQ} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_Q}{\hat{\beta}_Q} \quad \text{e} \quad \hat{U}_{0IQ} = \hat{\gamma}_Q + \hat{\phi}_Q \bar{Y}_0,$$

onde $\hat{\alpha}_Q$, $\hat{\beta}_Q$, $\hat{\gamma}_Q$ e $\hat{\phi}_Q$ são dados em (3.33). O estimador inverso também foi considerado por Fuller (1987) no caso em que λ é conhecido. Como os estimadores considerados acima são aqueles estudados no Capítulo 3, as expressões aproximadas até termos de primeira ordem para as médias e variâncias desses estimadores terão formas similares e podem ser obtidas como naquele capítulo.

Teorema 4.5 *Sob o modelo (2.8) - (2.10), com a suposição de σ_δ^2 ser conhecido e considerando k um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$E(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta\ell}{1+\ell} \left(1 + \frac{1+3\ell}{n(1+\ell)^2} \right) + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_Q) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n\sigma_\delta^2(1+\ell)} + \frac{\beta^2\ell(1+\ell^2)}{n(1+\ell)^4} + O(n^{-2}),$$

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})}{\ell} + \frac{(U_0 - \bar{U})}{n\ell} \left(\frac{(1 + \ell^2)}{\ell(1 + \ell)} + \frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)^2}{\sigma_\delta^2\beta^2\ell^2} - \frac{(1 + 3\ell)}{1 + \ell} \right) + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{1}{n} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)^2}{\beta^2\ell^2} \right) + \frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)^2}{k\beta^2\ell^2} - \frac{2\sigma_\epsilon^2(1 + 3\ell)}{nk\beta^2\ell^2} \\ &+ \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{3\sigma_\epsilon^2}{k\beta^2} \right) \left(\frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)^3}{n\beta^2\ell^4\sigma_\delta^2} + \frac{(1 + \ell^2)}{n\ell^3} \right) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde

$$\ell = \frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n\sigma_\delta^2}. \quad (4.22)$$

Prova: As provas são similares àquelas consideradas no Lema 3.2 e no Teorema 3.5 e serão, portanto, omitidas. $\square$

Teorema 4.6 *Sob o modelo (2.8) - (2.10) com a suposição de que σ_δ^2 é conhecido e considerando k um inteiro positivo qualquer, segue que*

$$E(\hat{\phi}_Q) = \frac{Z}{\beta(1 + Z)} + \frac{Z(1 + 3Z)}{n\beta(1 + Z)^3} + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var}(\hat{\phi}_Q) = \frac{\sigma_\delta^2}{n\sigma_\epsilon^2(1 + Z)} + \frac{Z}{n\beta^2(1 + Z)^4}(1 + Z^2) + O(n^{-2}),$$

$$E(\hat{U}_{0IQ}) = U_0 - \frac{(U_0 - \bar{U})}{(1 + Z)} + \frac{(U_0 - \bar{U})Z(1 + 3Z)}{n(1 + Z)^3} + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{1}{n} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\epsilon^2 Z^2}{\beta^2(1 + Z)^2} \right) + \frac{\sigma_\epsilon^2 Z^2}{k\beta^2(1 + Z)^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n(1 + Z)} \left(\frac{\sigma_\delta^2\beta^2}{\sigma_\epsilon^2} + \frac{Z(1 + Z^2)}{(1 + Z)^3} \right) \\ &+ \frac{1}{nk(1 + Z)} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\epsilon^2 Z(3Z^2 - 2Z + 1)}{\beta^2(1 + Z)^3} \right) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde

$$Z = \frac{\beta^2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n\sigma_\epsilon^2} = \frac{\beta^2 \sigma_\delta^2 \ell}{\sigma_\epsilon^2}. \quad (4.23)$$

Prova: As provas são similares àquelas apresentadas no Lema 3.3 e no Teorema 3.6 e, portanto, serão omitidas. $\square$

A partir dos teoremas acima, obtém-se os erros quadráticos médios, que são

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{1}{n} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\epsilon^2(1+\ell)^2}{\beta^2\ell^2} \right) + \frac{\sigma_\epsilon^2(1+\ell)^2}{k\beta^2\ell^2} - \frac{2\sigma_\epsilon^2(1+3\ell)}{nk\beta^2\ell^2} \\
&\quad + \frac{3\sigma_\epsilon^2}{nk\beta^2\ell^3} \left(\frac{\sigma_\epsilon^2(1+\ell)^3}{\sigma_\delta^2\beta^2\ell} + (1+\ell^2) \right) \\
&\quad + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n\ell^2} \left(\frac{\sigma_\epsilon^2(1+\ell)^2(\ell+3)}{\sigma_\delta^2\beta^2\ell^2} + \frac{(1+\ell^2)(\ell+3) - 2\ell(1+3\ell)}{\ell(1+\ell)} \right) \\
&\quad + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2} + O(n^{-2}), \tag{4.24}
\end{aligned}$$

com ℓ definido em (4.22) e

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{1}{n} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\epsilon^2 Z^2}{\beta^2(1+Z)^2} \right) + \frac{\sigma_\epsilon^2 Z^2}{k\beta^2(1+Z)^2} \\
&\quad + \frac{1}{nk(1+Z)} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\epsilon^2 Z(3Z^2 - 2Z + 1)}{\beta^2(1+Z)^3} \right) \\
&\quad + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n(1+Z)} \left(\frac{\sigma_\delta^2\beta^2}{\sigma_\epsilon^2} + \frac{Z(Z^2 - 6Z - 1)}{(1+Z)^3} \right) \\
&\quad + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1+Z)^2} + O(n^{-2}), \tag{4.25}
\end{aligned}$$

onde Z é dado em (4.23).

4.3 Comparações entre os estimadores

Os resultados das Seções 4.2 e 4.3 implicam que os três procedimentos a serem comparados são:

Procedimento 1: Estimador clássico com mínimos quadrados ($\hat{U}_{0CQ}$);

Procedimento 2: Estimador clássico consistente ($\hat{U}_{0C}$);

Procedimento 3: Estimador inverso com mínimos quadrados ($\hat{U}_{0IQ}$).

Os teoremas 4.2, 4.3, 4.5 e 4.6 e as expressões (4.24) e (4.25) fornecem as seguintes aproximações até termos de ordem n^{-1} .

Procedimento 1:

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})}{\ell} + \frac{(U_0 - \bar{U})}{n\ell} \left(\frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)^2}{\sigma_\delta^2\beta^2\ell^2} + \frac{(1 + \ell^2)}{\ell(1 + \ell)} - \frac{(1 + 3\ell)}{1 + \ell} \right), \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{1}{n} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)^2}{\beta^2\ell^2} \right) + \frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)^2}{k\beta^2\ell^2} - \frac{2\sigma_\epsilon^2(1 + 3\ell)}{nk\beta^2\ell^2} \\ &\quad + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n\ell^3} \left(\frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)^2(\ell + 3)}{\sigma_\delta^2\beta^2\ell} + \frac{(1 + \ell^2)(\ell + 3) - 2\ell(1 + 3\ell)}{(1 + \ell)} \right) \\ &\quad + \frac{3\sigma_\epsilon^2}{nk\beta^2\ell^3} \left(\frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)^3}{\sigma_\delta^2\beta^2\ell} + (1 + \ell^2) \right) + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $\ell = \frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n\sigma_\delta^2}$, como definido em (4.22).

Procedimento 2:

$$E(\hat{U}_{0C}) = U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})}{n\sigma_\delta^2\beta^2\ell} \left[\frac{\sigma_\epsilon^2(1 + \ell)}{\ell} - 2\beta^2\sigma_\delta^2 \right], \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0C}) &= \text{Var}(\hat{U}_{0C}) = \frac{\sigma_\epsilon^2 + \beta^2\sigma_\delta^2}{n\beta^2} + \frac{\sigma_\epsilon^2}{k\beta^2} + \frac{3\sigma_\epsilon^4(1 + \ell)}{nk\sigma_\delta^2\beta^4\ell^2} \\ &\quad + \frac{\sigma_\epsilon^2(2 - 3\ell)}{nk\beta^2\ell^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n\sigma_\delta^2\beta^2\ell^2} (\sigma_\epsilon^2(1 + \ell) + \beta^2\sigma_\delta^2(\ell + 2)). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Procedimento 3:

$$E(\hat{U}_{0IQ}) = U_0 - \frac{(U_0 - \bar{U})}{1 + Z} + \frac{(U_0 - \bar{U})Z(1 + 3Z)}{n(1 + Z)^3}, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{1}{n} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2 Z^2}{\beta^2(1+Z)^2} \right) + \frac{\sigma_\varepsilon^2 Z^2}{k\beta^2(1+Z)^2} \\
&+ \frac{1}{nk(1+Z)} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2 Z(3Z^2 - 2Z + 1)}{\beta^2(1+Z)^3} \right) \\
&+ \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{n(1+Z)} \left(\frac{\beta^2 \sigma_\delta^2}{\sigma_\varepsilon^2} + \frac{Z(Z^2 - 6Z - 1)}{(1+Z)^3} \right) + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1+Z)^2}, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

onde $Z = \frac{\beta^2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\beta^2 \sigma_\delta^2 \ell}{\sigma_\varepsilon^2}$, como definido em (4.23).

(i) Estudo dos vícios

Das expressões (4.26), (4.28) e (4.30), pode-se concluir que todos os três estimadores são viciados. Contudo para $n \rightarrow \infty$ ($k \geq 1$), tem-se que

$$\begin{aligned}
\text{vício}(\hat{U}_{0CQ}) &\rightarrow \frac{U_0 - \bar{U}}{\ell}, \\
\text{vício}(\hat{U}_{0C}) &\rightarrow 0 \\
\text{e} \quad \text{vício}(\hat{U}_{0IQ}) &\rightarrow \frac{U_0 - \bar{U}}{1+Z}.
\end{aligned}$$

Então, assintoticamente, o estimador clássico consistente é o único estimador não viciado. Note também que, como no Capítulo 3, os três estimadores são não viciados quando $U_0 = \bar{U}$ e que os vícios podem ser pequenos quando U_0 está próximo a $\bar{U}$. Quando além de n ser grande, k também é grande, tem-se as mesmas conclusões.

(ii) Estudo do Erro Quadrático Médio

Das expressões (4.27), (4.29) e (4.31), tem-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2(1+\ell)^2}{k\beta^2\ell^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2}, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0C}) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} \\
\text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 Z^2}{k\beta^2(1+Z)^2} + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1+Z)^2}.
\end{aligned}$$

Segue, então, que

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0C}) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2\ell^2}(1 + 2\ell) + \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2} > 0$$

e

$$EQM(\hat{U}_{0C}) - EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1 + 2Z)}{k\beta^2(1 + Z)^2} - \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1 + Z)^2}.$$

Como $EQM(\hat{U}_{0CQ}) > EQM(\hat{U}_{0C})$, tem-se que entre os estimadores clássicos o consistente é melhor. A comparação entre o estimador clássico consistente e o estimador inverso com mínimos quadrados irá depender dos parâmetros do modelo. Quando $U_0 = \bar{U}$, tem-se que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0C}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$, portanto, para $n \rightarrow \infty$, o estimador inverso é melhor que os estimadores clássicos quando o critério de comparação é o erro quadrático médio.

Quando $n \rightarrow \infty$ e $k \rightarrow \infty$, tem-se que

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &\rightarrow \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2}, \\ EQM(\hat{U}_{0C}) &\rightarrow 0, \\ EQM(\hat{U}_{0IQ}) &\rightarrow \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{(1 + Z)^2} = \frac{(U_0 - \bar{U})^2\sigma_\varepsilon^4}{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2\beta^2\ell)^2}. \end{aligned}$$

Esses resultados implicam que $\hat{U}_{0C}$ é consistente (veja Teorema 4.1), enquanto que os outros não são. Quando $U_0 = \bar{U}$, os três estimadores são consistentes. Dos resultados acima tem-se

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= (U_0 - \bar{U})^2 \left(\frac{1}{\ell^2} - \frac{\sigma_\varepsilon^4}{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2\beta^2\ell)^2} \right) \\ &= \frac{(U_0 - \bar{U})^2}{\ell^2(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2\beta^2\ell)^2} (\sigma_\varepsilon^4(1 - \ell^2) + 2\sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2\beta^2\ell + \sigma_\delta^4\beta^4\ell^2). \end{aligned}$$

Se $0 < \ell < 1$, tem-se que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$, quando $n \rightarrow \infty$ e $k \rightarrow \infty$. Quando $\ell > 1$, a escolha de um estimador não fica bem definida pelo erro quadrático médio.

4.4 Representação dos erros quadráticos médios em termos de formas quadráticas

Como pode ser visto a partir das expressões dos erros quadráticos médios, não é simples comparar analiticamente os três estimadores. Para obter comparações analíticas entre os estimadores, serão consideradas as aproximações até primeira ordem para os erros quadráticos médios na forma de funções quadráticas, a exemplo do que foi feito no Capítulo 3. Depois de algumas manipulações algébricas, tem-se

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) = A_1\omega^2 + C_1,$$

$$EQM(\hat{U}_{0C}) = A_2w^2 + C_2,$$

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) = A_3w^2 + C_3,$$

onde

$$\omega = (U_0 - \bar{U}),$$

$$A_1 = \frac{1}{\ell^2} + \frac{T(1+\ell)^2(\ell+3)}{n\ell^4} + \frac{(1+\ell^2)(\ell+3) - 2\ell(1+3\ell)}{n\ell^3(1+\ell)},$$

$$C_1 = \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \frac{T(1+\ell)^2}{\ell^2} \right) + \frac{T\sigma_\delta^2(1+\ell)^2}{k\ell^2} - \frac{2T\sigma_\delta^2(1+3\ell)}{nk\ell^2} + \frac{3T\sigma_\delta^2}{nk\ell^3} \left(\frac{T(1+\ell)^3}{\ell} + (1+\ell^2) \right),$$

$$A_2 = \frac{T(1+\ell)}{n\ell^2} + \frac{(\ell+2)}{n\ell^2},$$

$$C_2 = \frac{\sigma_\delta^2(1+T)}{n} + \frac{\sigma_\delta^2 T}{k} + \frac{3\sigma_\delta^2 T^2(1+\ell)}{nk\ell^2} + \frac{\sigma_\delta^2 T(2-3\ell)}{nk\ell^2},$$

$$A_3 = \frac{1}{(1+Z)^2} + \frac{1}{nT(1+Z)} + \frac{Z(Z^2 - 6Z - 1)}{n(1+Z)^4}$$

e

$$C_3 = \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \frac{TZ^2}{(1+Z)^2} \right) + \frac{TZ^2\sigma_\delta^2}{k(1+Z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2}{nk(1+Z)} \left(1 + \frac{TZ(3Z^2 - 2Z + 1)}{(1+Z)^3} \right).$$

com $T = \sigma_\epsilon^2 / \sigma_\delta^2 \beta^2$.

Observando que A_1, A_3, C_1 e C_3 têm todos a mesma expressão que no Capítulo 3 com a conveniente adaptação de notação, pode-se então concluir que

$$\begin{aligned} A_1 &> 0 \text{ se } n \geq 3, & C_1 &> 0 \text{ se } n + k \geq 3, \\ A_3 &> 0 \text{ se } n \geq 6, & C_3 &> 0. \end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, pode ser visto que

$$A_2 > 0, \quad C_2 > 0.$$

Pode-se mostrar que se $n \geq 6$, $A_1 > A_2$, e se $n + k \geq 4$, $C_1 > C_2$. Essa é a situação expressa no caso (a) da Seção 3.4. Então, se $n \geq 6$, segue que $EQM(\hat{U}_{0C}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Comparações analíticas diretas entre os estimadores $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ e entre $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ são complicadas. Então, avaliações numéricas dos EQM's dos estimadores foram feitas para o conjunto de valores dos parâmetros dado abaixo, com a restrição de $n > k$:

$$\begin{array}{ll} \sigma_\epsilon^2 = 0.01; 0.1; 1.0 & \beta = 0.5; 1.0; 5.0 \\ \sigma_\delta^2 = 0.01; 0.1; 1.0; 10.0 & n = 10; 15; 30; 100 \\ \ell = 1; 10; 100; 1000 & k = 1; 2; 5; 10; 15. \end{array}$$

Em todas as avaliações numéricas, observa-se que $C_1 > C_3$. As comparações entre A_1 e A_3 são apresentadas na Tabela 4.1. A partir dessa tabela tem-se que $A_1 > A_3$ quando ℓ é pequeno e, também, quando β ou σ_δ^2 são grandes. Para ℓ e σ_ϵ^2 grandes, $A_1 < A_3$. Note que nas situações onde $A_1 > A_3$, segue o caso (a), isto é, $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Caso contrário, há um intervalo (U_{0L}, U_{0S}) , onde o estimador inverso $\hat{U}_{0IQ}$ tem um melhor desempenho. Vale ressaltar que essa análise independe do tamanho da amostra na segunda etapa do problema de calibração.

As comparações de A_2 com A_3 e de C_2 com C_3 são apresentadas na Tabela 4.2 e 4.3, respectivamente. Para σ_ϵ^2 pequeno e β grande, $A_2 > A_3$ e $C_2 < C_3$, situação esta que recai no caso (d), isto é, $EQM(\hat{U}_{0C}) < EQM(\hat{U}_{0IQ})$ no intervalo (U_{0L}, U_{0S}) . Enquanto que para σ_ϵ^2 grande e β pequeno, tem-se, em geral, que $A_2 < A_3$ e $C_2 > C_3$, seguindo o caso (c), ou seja, $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0C})$ no intervalo (U_{0L}, U_{0S}) .

Tabela 4.1: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre A_1 e A_3 .

σ_ε^2	0.01																
β	ℓ	1			10				100				1000				
	n	σ_δ^2	0.01	0.1	1	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10
0.5	10																
	15				•					•				•			
	30				•					•				•			
	100				•					•				•			
1.0	10																
	15																
	30																
	100																
5.0	10																
	15																
	30																
	100																

σ_ε^2	0.1																
β	ℓ	1			10				100				1000				
	n	σ_δ^2	0.01	0.1	1	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10
0.5	10									•				•			
	15				•	•				•	•			•	•		
	30				•	•				•	•			•	•		
	100				•	•				•	•			•	•		
1.0	10				•					•							
	15				•					•				•			
	30				•					•				•			
	100				•					•				•			
5.0	10																
	15																
	30																
	100																

σ_ε^2	1.0																
β	ℓ	1			10				100				1000				
	n	σ_δ^2	0.01	0.1	1	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10
0.5	10									•	•			•	•		
	15						•			•	•	•		•	•	•	
	30						•			•	•	•		•	•	•	
	100					•	•			•	•			•	•	•	
1.0	10						•			•	•			•			
	15						•			•	•			•	•		
	30					•				•	•			•	•		
	100					•				•	•			•	•		
5.0	10																
	15						•			•				•			
	30						•			•				•			
	100						•			•				•			

Nota: . indica situações onde $A_3 > A_1$.

Tabela 4.2: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre A_2 e A_3 .

σ_ε^2	0.01																
β	ℓ	1			10				100				1000				
	n	σ_δ^2	0.01	0.1	1	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10
0.5	10				.					.				.			
	15				.					.				.			
	30	.			.	.				.	.			.	.		
	100	.	.		.	.				.	.			.	.		
1.0	10				.					.				.			
	15				.					.				.			
	30	.			.					.				.			
	100	.			.					.				.			
5.0	10																
	15																
	30																
	100																

σ_ε^2	0.1																
β	ℓ	1			10				100				1000				
	n	σ_δ^2	0.01	0.1	1	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10
0.5	10				•	•				•				•			
	15				•	•				•	•			•	•		
	30			•	•	•	•			•	•	•		•	•	•	
	100	•		•	•	•	•	•		•	•	•		•	•	•	
1.0	10				•					•							
	15				•	•				•	•			•	•		
	30	•		•	•	•				•	•			•	•		
	100	•		•	•	•				•	•			•	•		
5.0	10																
	15																
	30					•					•				•		
	100			•		•					•				•		

σ_ε^2	1.0																
β	ℓ	1			10				100				1000				
	n	σ_δ^2	0.01	0.1	1	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10
0.5	10					.	.			.	.			.	.	.	
	15					.	.	.		.	.	.		.	.	.	
	30			.		.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	.
	100		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1.0	10					.	.			.	.			.	.	.	
	15				.	.	.			.	.	.		.	.	.	
	30		.	.	.	.	.	.		.	.	.		.	.	.	
	100		.	.	.	.	.	.		.	.	.		.	.	.	
5.0	10				.					.				.			
	15				.					.				.			
	30	.			.	.				.	.			.	.		
	100	.	.		.	.				.	.			.	.		

Nota: . indica situações onde $A_3 > A_2$.

Tabela 4.3: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre C_2 e C_3 .

σ_ε^2				0.01						0.1						1					
ℓ				1			10/100/100			1			10/100/100			1			10/100/100		
β	n	k	σ_δ^2	0.01	0.1	1	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	0.01	0.1	1	10	0.01	0.1	1	10
0.5	10	1/2				.			.	.						.					
		5			.				.	.						.					
	15	1/2			.				.	.						.					
		5/10/15			.				.	.						.					
	30	1/2							.	.						.					
		5/10/15							.	.						.					
	100	1/2							.							.					
		5/10/15							.							.					
1.0	10	1/2			.			.	.	.					.	.					.
		5			.			.	.	.					.	.					.
	15	1/2			.			.	.	.					.	.					.
		5/10/15			.			.	.	.					.	.					.
	30	1/2			.			.	.	.					.	.					.
		5/10/15			.			.	.	.					.	.					.
	100	1/2						.	.	.					.	.					.
		5/10/15						.	.	.					.	.					.
5.0	10	1/2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
		5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	15	1/2		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
		5/10/15		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	30	1/2		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
		5/10/15		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	100	1/2		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
		5/10/15		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Nota: . indica situações onde $C_3 > C_2$.

Figura 4.1: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ com $n = 10, 20, 30$ e 100 , onde (a) $\omega = 0.5$, (b) $\omega = 3.0$ e (c) $\omega = 10.0$.

Nas Figuras 4.1.a, b e c, compara-se o EQM aproximado do estimador $\hat{U}_{0CQ}$, dado pela expressão (4.27) com o EQM aproximado do estimador $\hat{U}_{0IQ}$, usando a expressão (4.31). Em todas as situações é assumido que $\sigma_\varepsilon^2 = 1.0$, $\ell = 10/\sigma_\delta^2$, $\beta = 0.5$ e $k = 2$. A Figura 4.1.a mostra o comportamento dos dois EQM's para $\omega = U_0 - \bar{U} = 0.5$, sendo essa distância aumentada na Figura 4.1.b ($\omega = 3.0$) e 4.1.c ($\omega = 10.0$). Essas figuras mostram que w tem uma influência fundamental no comportamento dos estimadores. Quando $\omega = 0.5$, o estimador inverso tem melhor desempenho, independente dos valores de n e de σ_δ^2 . Quando ω aumenta, o estimador $\hat{U}_{0CQ}$ é melhor para valores pequenos de σ_δ^2 . Quando σ_δ^2 está no intervalo (0.1, 2.0) corresponde aos valores de λ no intervalo (0.5, 10) considerado no Capítulo 3, o que mostra que as conclusões são equivalentes.

Nas Figuras 4.2.a, b e c são comparados o EQM aproximado do estimador $\hat{U}_{0C}$, dado em (4.29) e o do estimador $\hat{U}_{0IQ}$, dado em (4.31), para os três diferentes valores de ω e o mesmo conjunto de valores dos parâmetros do modelo considerado nas Figuras 4.1.a, b e c. As conclusões principais são similares ao caso considerado nas Figuras 4.1, isto é, para valores pequenos de ω o estimador inverso comporta-se melhor e com o aumento de ω , o estimador clássico passa a ser melhor que o inverso, no sentido de ter um erro quadrático menor, para pequenos valores de σ_δ^2 .

Comparando as Figuras 4.1 e 4.2, observa-se que o estimador $\hat{U}_{0C}$ é um melhor competidor para $\hat{U}_{0IQ}$ do que $\hat{U}_{0CQ}$. As conclusões ilustradas nessas figuras estão de acordo com aquelas obtidas por Shukla (1972), no modelo sem erros nas variáveis, no sentido de que o estimador inverso é melhor que o estimador clássico num intervalo em torno da média.

4.5 Exemplo

O exemplo considerado neste capítulo é o mesmo que aquele estudado no Exemplo 3.2, originalmente apresentado em Madansky (1959). Aqui será considerada a suposição de

(a)

(b)

(c)

Figura 4.2: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ com $n = 10, 20, 30$ e 100 , onde (a) $\omega = 0.5$, (b) $\omega = 3.0$ e (c) $\omega = 10.0$.

que uma das variâncias é conhecida, e, segundo o autor, é razoável admitir $\sigma_\delta^2 = 50$. Como visto no Capítulo 3, numa amostra de 50 observações registradas, as seguintes estatísticas podem ser calculadas

$$S_{xx} = 712.9, \quad S_{yy} = 13917.9 \quad \text{e} \quad S_{xy} = 2344.0,$$

levando aos seguintes estimadores

$$\hat{\beta} = 3.536, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 2814.784 \quad \text{e} \quad \hat{\ell} = 13.258.$$

Utilizando as devidas expressões, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= 1.64 \times 10^{-2}, & \hat{A}_2 &= 9.04 \times 10^{-3}, & \hat{A}_3 &= 6.30 \times 10^{-2}, \\ \hat{C}_1 &= 271.22, & \hat{C}_2 &= 234.59, & \hat{C}_3 &= 130.37. \end{aligned}$$

Como $\hat{A}_1 > \hat{A}_2$ e $\hat{C}_1 > \hat{C}_2$, de acordo com o que foi mostrado analiticamente na Seção 4.4, tem-se que $EQM(\hat{U}_{0C}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Como $\hat{A}_1 < \hat{A}_3$ e $\hat{C}_1 > \hat{C}_3$, tem-se que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$ no intervalo (208.92, 318.92). Além disso, como $\hat{A}_2 < \hat{A}_3$ e $\hat{C}_2 > \hat{C}_3$, segue do caso (c) que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0C})$ no intervalo (219.96, 307.88).

Concluindo, tem-se que

- se $U_0 < 208.92$, $\hat{U}_{0C}$ é melhor que $\hat{U}_{0CQ}$, que é melhor que $\hat{U}_{0IQ}$;
- se $208.92 < U_0 < 219.96$, $\hat{U}_{0C}$ é melhor que $\hat{U}_{0IQ}$, que é melhor que $\hat{U}_{0CQ}$;
- se $219.96 < U_0 < 307.88$, $\hat{U}_{0IQ}$ é melhor que $\hat{U}_{0C}$, que é melhor que $\hat{U}_{0CQ}$;
- se $307.88 < U_0 < 318.92$, $\hat{U}_{0C}$ é melhor que $\hat{U}_{0IQ}$, que é melhor que $\hat{U}_{0CQ}$;
- se $U_0 > 318.92$, $\hat{U}_{0C}$ é melhor que $\hat{U}_{0CQ}$, que é melhor que $\hat{U}_{0IQ}$.

Confirmando as conclusões da seção anterior, o estimador inverso só é preferível quando U_0 está próximo a $\bar{U}$, caso contrário, o estimador clássico consistente tem um melhor desempenho.

4.6 O uso de um valor incorreto para σ_δ^2

Suponha que o investigador use um valor incorreto (σ_δ^{*2}) da variância do erro de medida, o estimador usado será

$$\hat{U}_{0C}^* = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}^*}{\hat{\beta}^*},$$

onde $\hat{\alpha}^* = \bar{Y} - \hat{\beta}^* \bar{X}$ e $\hat{\beta}^* = \frac{S_{xy}}{S_{xx} - \sigma_\delta^{*2}}$.

Um estudo assintótico do estimador de $\hat{\beta}^*$ no modelo estrutural quando uma das variâncias é conhecida, é apresentado em Ketellaper (1983). Baseado nesse trabalho, será apresentado aqui um estudo assintótico de $\hat{U}_{0C}^*$. Obviamente, $\hat{U}_{0C}^*$ não é consistente para U_0 se $\sigma_\delta^{*2} \neq \sigma_\delta^2$. Primeiro é apresentado um lema que será usado para provar o resultado principal.

Lema 4.2 *Sob o modelo (2.8) - (2.10), com a suposição de σ_δ^2 ser conhecido, mas substituído por um valor incorreto, σ_δ^{*2} , segue que*

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}^*) &= \beta - \frac{\beta(\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2}\right)} \\ &+ \frac{\beta\sigma_\delta^2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n}{n \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2}\right)^3} [\sigma_\delta^2 + \sigma_\delta^{*2} + 3 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n] + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}^*) &= \frac{1}{n \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2}\right)^2} (\varphi \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n + \sigma_\delta^2 \sigma_\epsilon^2) \\ &+ \frac{2\beta^2 \sigma_\delta^2 \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n\right)^2 (2\sigma_\delta^{*2} - \sigma_\delta^2)}{n \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2}\right)^4} + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde φ é dado em (4.3).

Prova: Tomando a esperança da expansão em série de Taylor de $\hat{\beta}^*$ em torno do ponto

$(E(S_{xx}), E(S_{xy}))$, obtém-se

$$E(\hat{\beta}^*) = \frac{\beta \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n}{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2} - \sigma_\delta^2/n} - \frac{\text{Cov}(S_{xx}, S_{xy})}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2/n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2}\right)^2}$$

$$+ \frac{\beta \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2} \right)^3} \text{Var}(S_{xx}) + O(n^{-2}).$$

A variância da referida expressão é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}^*) &= \frac{\text{Var}(S_{xy})}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2} \right)^2} + \frac{\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2} \right)^4} \text{Var}(S_{xx}) \\ &\quad - \frac{2\beta \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2} \right)^3} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Substituindo (4.9), (4.10) e (4.13) nas expressões acima e após algumas manipulações algébricas, chega-se ao resultado desejado.

Teorema 4.7 *Sob as suposições do Lema 4.2 e assumindo que k é um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0C}^*) &= U_0 + \frac{(U_0 - \bar{U})}{n\beta^2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n} \left[(\sigma_\epsilon^2 - 2\beta^2 \sigma_\delta^2) + \frac{\sigma_\delta^2 \sigma_\epsilon^2}{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n} \right] \\ &\quad + \frac{(U_0 - \bar{U})(\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n} \left[1 + \frac{\varphi \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n + \sigma_\delta^2 \sigma_\epsilon^2}{n\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)^2} \right] + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0C}^*) &= \frac{\varphi}{n\beta^2} + \frac{\sigma_\epsilon^2}{k\beta^2} - \frac{2\sigma_\delta^2 \sigma_\epsilon^2 (\sigma_\delta^2 + \sigma_\delta^{*2} + 3 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n)}{nk\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)^2} \\ &\quad + \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{3\sigma_\epsilon^2}{k\beta^2} \right) \left(\frac{\varphi \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n + \sigma_\delta^2 (\sigma_\epsilon^2 + 2\beta^2 \sigma_\delta^{*2})}{n\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_\epsilon^2 (\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}{\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)^2} \left(2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2} \right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) \\ &\quad + \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{3\sigma_\epsilon^2}{k\beta^2} \right) \frac{(\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}{n\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)^2} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\left(2 \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2} \right) \left(\varphi \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n + \sigma_\delta^2 \sigma_\varepsilon^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2 / n \right)^2} - 2\beta^2 \sigma_\delta^2 \right]$$

$$+O(n^{-2}),$$

onde φ é dado em (4.3).

Prova: Pelas expressões (3.18) e (4.19), obtém-se

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0C}^*) &= E(\bar{X}) + \beta(U_0 - \bar{U})E\left(\frac{1}{\hat{\beta}^*}\right) \\ &= \bar{U} + \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{E(\hat{\beta}^*)} + \frac{\beta(U_0 - U)\text{Var}(\hat{\beta}^*)}{E^3(\hat{\beta}^*)} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Expandindo $1/E(\hat{\beta}^*)$ e $1/E^3(\hat{\beta}^*)$ em série de Taylor em torno de zero até primeira ordem, e utilizando o Lema 4.2, prova-se a esperança de $\hat{U}_{0C}^*$. Para o cálculo da variância de $\hat{U}_{0C}^*$, retorne a expressão (4.18). Pela mesma justificativa dada no Teorema 4.2, tem-se que as covariâncias envolvidas são nulas. Logo,

$$\text{Var}(\hat{U}_{0C}^*) = \text{Var}(\hat{X}) + \beta^2 \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}^*}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}^*}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}^*}\right).$$

De (4.19) pode ser obtido

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}^*}\right) &= \frac{\text{Var}(\hat{\beta}^*)}{E^4(\hat{\beta}^*)} + O(n^{-2}), \\ \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}^*}\right) &= \frac{\text{Var}(\hat{\beta}^*)}{E^2(\hat{\beta}^*)} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}^*)}{E^4(\hat{\beta}^*)} + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

e

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}^*}\right) = \frac{\text{Var}(\hat{\beta}^*)}{E^2(\hat{\beta}^*)} + O(n^{-2}).$$

Pelo Lema 4.2 e pela expansão em série de Taylor, até ordem n^{-1} , em torno de zero de $1/E^2(\hat{\beta}^*)$ e $1/E^4(\hat{\beta}^*)$, conclui-se a prova. $\square$

A partir do teorema acima, obtém-se

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0C}^*) &= \frac{\sigma_\delta^2}{n}(1+T) + \frac{\sigma_\delta^2 T}{k} - \frac{2T}{nk\ell^2}(\sigma_\delta^2(1+3\ell) + \sigma_\delta^{*2}) \\
&+ \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{3T\sigma_\delta^2}{k} \right) \left(\frac{\sigma_\delta^2(1+T)\ell + \sigma_\delta^2 T + 2\sigma_\delta^{*2}}{n\sigma_\delta^2 \ell^2} \right) \\
&+ \frac{(\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}{\sigma_\delta^2 \ell^2} T [\sigma_\delta^2(1+2\ell) - \sigma_\delta^{*2}] \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) \\
&+ \left((U_0 - \bar{U})^2 + \frac{3T\sigma_\delta^2}{k} \right) \left(\frac{\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2}}{n\ell^2 \sigma_\delta^4} \right) \\
&* \left[\frac{(\sigma_\delta^2(1+2\ell) - \sigma_\delta^{*2})(T + (1+T)\ell)}{\ell^2} - 2\sigma_\delta^2 \right] \\
&+ \frac{(U_0 - \bar{U})^2 (\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2}{\sigma_\delta^4 \ell^2} + \frac{2(U_0 - \bar{U})^2 (\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}{n\sigma_\delta^2 \ell^2} \left[(T-2) + \frac{T}{\ell} \right] \\
&+ \frac{2(U_0 - \bar{U})^2 (\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2}{n\sigma_\delta^4 \ell^4} [T + (1+T)\ell] + O(n^{-2}), \tag{4.32}
\end{aligned}$$

onde $T = \sigma_\epsilon^2 / \sigma_\delta^2 \beta^2$ e ℓ é dado em (4.22). Algumas comparações gráficas são feitas a seguir. Nas Figuras 4.3.a, b e c são apresentados o EQM aproximado do estimador $\hat{U}_{0C}$, usando a expressão (4.29) e o EQM aproximado do estimador clássico calculado com relação a $\sigma_\delta^{*2}(\hat{U}_{0C}^*)$ dado em (4.32). Os parâmetros do modelo são os mesmos da Figura 4.1, com o verdadeiro valor de σ_δ^2 igual a 3. Note que o erro quadrático médio de $\hat{U}_{0C}$ é bastante afetado quando um valor errado de σ_δ^2 é utilizado, principalmente quando a distância $\omega = U_0 - \bar{U}$ é pequena. Vale ressaltar que a Figura 4.3a está numa escala diferente das Figuras 4.3b e 4.3c.

Na Figura 4.4 compara-se o EQM aproximado do estimador $\hat{U}_{0C}^*$ dado em (4.32), com o estimador clássico com mínimos quadrados, baseado em (4.27). Observa-se que

(b)

(c)

Figura 4.3: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0C}^*$ com $n = 10, 20, 30$ e 100 , onde (a) $\omega = 0.5$, (b) $\omega = 3.0$ e (c) $w = 10.0$. Verdadeiro $\sigma_\delta^2 = 3.0$.

o estimador $\hat{U}_{0C}^*$ é severamente afetado para valores grandes de σ_δ^{*2} . Na Seção 4.4 foi mostrado que o estimador $\hat{U}_{0C}$ tem melhor desempenho que o estimador $\hat{U}_{0CQ}$.

A Figura 4.5 apresenta o EQM aproximado do estimador $\hat{U}_{0C}^*$ dado na expressão (4.32) e o estimador inverso $\hat{U}_{0IQ}$ baseado em (4.31). Observando-se essa figura e a Figura 4.2.b, tem-se que o comportamento do estimador $\hat{U}_{0C}^*$ é o mesmo que o estimador $\hat{U}_{0C}$, sendo que a medida que σ_δ^{*2} se afasta do verdadeiro valor (σ_δ^2), o comportamento do estimador $\hat{U}_{0C}^*$ é bastante prejudicado.

4.7 Um estudo de simulação

Nesta seção será apresentado um estudo de simulação no qual são comparados os vícios e os erros quadráticos médios aproximados dos estimadores propostos neste capítulo. Além desses estimadores será estudado o seguinte estimador, denominado aqui como estimador clássico melhorado,

$$\hat{U}_{0CM} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_M}{\hat{\beta}_M},$$

onde $\hat{\alpha}_M = \bar{Y} - \hat{\beta}_M \bar{X}$ e $\hat{\beta}_M = [\hat{H} + a(n-1)^{-1}\sigma_\delta^2]^{-1}S_{xy}$, com $a > 0$, um número fixado pré-determinado,

$$\hat{H} = \begin{cases} S_{xx} - \sigma_\delta^2 & \text{se } \hat{\lambda} \geq 1 + (n-1)^{-1} \\ S_{xx} - [\hat{\lambda} - (n-1)^{-1}]\sigma_\delta^2 & \text{se } \hat{\lambda} < 1 + (n-1)^{-1} \end{cases}$$

e

$$\hat{\lambda} = \left[S_{xx} - \frac{S_{xy}^2}{S_{yy}} \right] \frac{1}{\sigma_\delta^2}.$$

Fuller (1987) introduz o estimador $\hat{\beta}_M$ e mostra que possui propriedades superiores ao estimador $\hat{\beta}$ definido em (4.1) para pequenas amostras.

Neste estudo, 1000 amostras foram geradas de acordo com o modelo (2.8) - (2.10), com $\alpha = 10.0$, $\beta = 0.5$, $U_0 = 15.0$, $k = 2$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ e $a = 2$, para $n = 20, 100$, e $\sigma_\delta^2 = 0.1$ ($\ell = 333.3$), $\sigma_\delta^2 = 20.0$ ($\ell = 1.67$). Os parâmetros $U_1, U_2, \dots, U_n$ foram gerados da distribuição $U(10, 30)$. Para os modelos acima foram obtidos os vícios e os erros quadráticos médios

Figura 4.4: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0C}^*$, com $n = 10, 20, 30$ e 100 e $\omega = 3.0$. Verdadeiro $\sigma_\delta^2 = 3.0$.

Figura 4.5: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0C}^*$ e $\hat{U}_{0IQ}$, com $n = 10, 20, 30$ e 100 e $\omega = 3.0$. Verdadeiro $\sigma_\delta^2 = 3.0$.

aproximados de $\hat{U}_{0CQ}$, $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ dados em (4.26) – (4.31), respectivamente. Também foram calculados os seguintes estimadores de U_0 : $\hat{U}_{0C}$, $\hat{U}_{0CQ}$, $\hat{U}_{0IQ}$ e $\hat{U}_{0CM}$, para cada amostra e então obtido o erro quadrático médio e o vício empíricos (ou simulados) definidos na Seção 3.7. Os resultados são mostrados nas Tabelas 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7.

Tabela 4.4: Vício de $\hat{U}_0$ quando $\sigma_\delta^2 = 0.1$.

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0C}$		
	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	empírico $\hat{U}_{0CM}$	aproximado
20	-0.115	-0.194	0.648	0.684	-0.091	-0.094	0.051
100	-0.009	-0.037	0.438	0.427	0.004	0.003	-0.005

Tabela 4.5: Erro quadrático médio de $\hat{U}_0$ quando $\sigma_\delta^2 = 0.1$.

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0C}$		
	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	empírico $\hat{U}_{0CM}$	aproximado
20	2.548	2.523	2.213	2.213	2.521	2.524	2.498
100	2.097	2.081	1.856	1.824	2.084	2.085	2.069

Tabela 4.6: Vício de $\hat{U}_0$ quando $\sigma_\delta^2 = 20.0$.

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0C}$		
	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	empírico $\hat{U}_{0CM}$	aproximado
20	-4.697	-4.396	0.689	0.684	0.277	-0.863	0.369
100	-2.444	-2.435	0.446	0.427	0.036	-0.049	0.041

Tabela 4.7: Erro quadrático médio quando de $\hat{U}_0$ quando $\sigma_\delta^2 = 20.0$.

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0C}$		
	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	empírico $\hat{U}_{0CM}$	aproximado
20	37.719	32.349	4.403	4.277	8.436	7.734	6.872
100	11.612	11.592	2.127	2.123	2.467	2.518	2.482

Para $\sigma_\delta^2 = 0.1$, observa-se que mesmo o vício do estimador inverso sendo maior, o erro quadrático médio deste é menor que dos outros estimadores propostos. Nessa situação, o ganho do estimador clássico melhorado não é percebido, e deve-se ressaltar que todas as aproximações desenvolvidas nesse capítulo podem ser consideradas boas, mesmo para amostras de tamanho pequeno.

Quando $\sigma_\delta^2 = 20.0$, a diferença entre o erro quadrático médio de $\hat{U}_{0C}$ e de $\hat{U}_{0CM}$ chama a atenção para amostras de tamanho pequeno, mas quando o tamanho da amostra cresce esta diferença diminui. Observa-se que tanto o vício empírico e aproximado quanto o erro quadrático médio empírico e aproximado do estimador $\hat{U}_{0CQ}$ são bem maiores nessa situação, isto é, $\sigma_\delta^2 = 20.0$. Quanto ao erro quadrático médio, conclui-se a seguinte relação

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0C}) < EQM(\hat{U}_{0CQ}).$$

Comparando-se o estimador $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0CM}$, vê-se que para $n = 20$, $EQM(\hat{U}_{0CM}) < EQM(\hat{U}_{0C})$, enquanto que para $n = 100$, $EQM(\hat{U}_{0C}) < EQM(\hat{U}_{0CM})$. Fuller (1987) ressalta a superioridade do estimador modificado $\hat{\beta}_M$ definido acima em amostras pequenas. Uma possível questão seria verificar se essa superioridade também se manifesta para um estimador de U_0 construído a partir de $\hat{\beta}_M$.

A Figura 4.6.a mostra um histograma para o estimador $\hat{\beta}$ construído através de 1000 amostras de tamanho 20, geradas pelo modelo (2.8) - (2.10), com $\sigma_\delta^2 = 20.0$. A Figura 4.6.b mostra o histograma correspondente para o estimador modificado $\hat{\beta}_M$ com $a = 2$. A superioridade do estimador modificado é clara nessas figuras.

As Figuras 4.7.a e b apresentam os histogramas dos estimadores $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0CM}$ com $a = 2$, construídos com base nas amostras geradas para as Figuras 4.6.a e b. As grandes alterações sentidas na distribuição empírica do estimador $\hat{\beta}$ não é refletida para a distribuição empírica do estimador $\hat{U}_{0C}$.

Os percentis das distribuições empíricas de $\hat{\beta}$, $\hat{\beta}_M$, $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0CM}$ para 1000 amostras são dadas na Tabela 4.8. A distribuição do estimador modificado $\hat{\beta}_M$ está muito mais condensada do que a distribuição de $\hat{\beta}$. Essa condensação não é muito sentida na distribuição de $\hat{U}_{0CM}$.

Figura 4.6: (a) Histograma para 1000 estimativas de $\hat{\beta}$; (b) Histograma para 1000 estimativas modificadas.

(a)

(b)

Figura 4.7: (a) Histograma para 1000 estimativas de $\hat{U}_{0C}$; (b) Histograma para 1000 estimativas modificadas.

Tabela 4.8: Percentis da distribuição dos estimadores $\hat{\beta}$, $\hat{\beta}_M$ (com $a = 2$), $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0CM}$ (com $a = 2$), $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, $\sigma_\delta^2 = 20.0$, $\alpha = 10.0$, $\beta = 0.5$, $U_0 = 15.0$, $k = 2$ e $n = 20$.

Percentis	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_M$	$\hat{U}_{0C}$	$\hat{U}_{0CM}$
0.001	-60.2789	0.1265	-3.2206	-5.8373
0.01	-1.9253	0.2358	8.0325	7.0813
0.05	0.2950	0.2936	10.4753	9.7700
0.10	0.3394	0.3281	11.6259	10.8617
0.25	0.4189	0.3839	13.6027	12.6763
0.50	0.5226	0.4505	15.4590	14.3658
0.75	0.7242	0.5307	17.1032	15.8908
0.90	1.0594	0.5992	18.8281	17.1974
0.95	1.4812	0.6435	19.4045	17.9371
0.99	3.3991	0.7232	20.8532	18.9941
1.000	55.7968	0.8021	23.6595	20.5864

Capítulo 5

Modelo de calibração estrutural

Este capítulo é dedicado ao estudo do modelo de calibração estrutural. Vale ressaltar que para esse modelo o problema a ser considerado é um problema de previsão, pois U_0 é uma variável aleatória. Conforme visto no Capítulo 2, sob a suposição de normalidade, esse modelo é não identificável, no sentido de que dois diferentes vetores de parâmetros podem levar à mesma distribuição (Fuller, 1987). As suposições comumente adotadas para tornar o modelo estrutural identificável são as duas consideradas no caso funcional, isto é, σ_δ^2 conhecido e $\lambda = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\delta^2$ conhecido e mais uma terceira que consiste no conhecimento do coeficiente de atenuação $k_u = \sigma_u^2 / (\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2)$. Como nos capítulos anteriores, para cada um dos casos considerados para tornar o modelo identificável, serão sugeridos previsores para U_0 e um estudo assintótico para tornar factível comparações entre os previsores propostos. Serão considerados os previsores clássico e inverso como definidos nos capítulos anteriores, e também um predictor alternativo, adaptado para modelos com erros nas variáveis a partir de alguns resultados apresentados em Lwin e Maritz (1980).

5.1 Previsores propostos

No caso dos modelos estruturais não é possível derivar previsores para U_0 , baseado nos enfoques de máxima verossimilhança ou método dos momentos, como considerado nos capítulos anteriores.

No caso do modelo de regressão usual aleatório (sem erros nas variáveis), Lwin e Maritz (1980) propõem, para o caso de uma única observação de Y_0 na etapa da calibração propriamente dita, utilizar um previsor baseado na esperança condicional $E(U_0/Y_0)$, que é denotado por $\hat{E}(U_0/Y_0)$. A notação $\hat{E}(U_0/Y_0)$ se deve ao fato de que $E(U_0/Y_0)$ claramente depende de parâmetros desconhecidos que são substituídos por estimadores.

No modelo estrutural (2.8), (2.11) e (2.12) com $k \geq 1$ observações na segunda etapa do modelo de calibração, tem-se

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \sim N_{k+1} \left(\begin{pmatrix} \mu_u \\ (\alpha + \beta\mu_u) \mathbf{1}'_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \beta\sigma_u^2 \mathbf{1}_k \\ \beta\sigma_u^2 \mathbf{1}'_k & (\beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2) I_k \end{pmatrix} \right),$$

onde $N_{k+1}(A, B)$ denota a distribuição normal de dimensão $(k+1)$, com vetor de médias A e matriz de covariâncias B , $\mathbf{1}_k$ denota o vetor de uns de dimensão k , $\mathbf{1}'_k$ denota o vetor transposto de $\mathbf{1}_k$ e I_k denota a matriz identidade de dimensão k .

Propriedades usuais da distribuição normal multivariada (veja, por exemplo, Mardia et al., 1979, p.63) permitem escrever

$$E(U_0/Y_0 = y_{01}, \dots, y_{0k}) = \mu_u + \frac{k\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(\bar{Y}_0 - \alpha - \beta\mu_u),$$

onde $\sigma_{xy} = \beta\sigma_u^2$ e $\sigma_y^2 = \beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2$. Como previsores serão considerados: o previsor condicional dado por

$$\begin{aligned} \hat{U}_{0\ell} &= \hat{E}(U_0/Y_0 = y_{01}, \dots, y_{0k}) = \hat{\mu}_u + \frac{k\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_y^2}(\bar{Y}_0 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\hat{\mu}_u) \\ &= \bar{X} + k \frac{S_{xy}}{S_{yy}}(\bar{Y}_0 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\bar{X}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

e os previsores clássico e inverso, definidos, respectivamente, como nos capítulos anteriores por

$$\hat{U}_{0C} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}}, \quad (5.2)$$

$$\hat{U}_{0I} = \hat{\gamma} + \hat{\phi}\bar{Y}_0, \quad (5.3)$$

onde $\bar{X}$, S_{xy} , S_{yy} são os estimadores de máxima verossimilhança de μ_u , σ_{xy} e σ_y^2 , respectivamente, e estão definidos em (3.3) e $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\phi}$ são estimadores de α , β , γ e ϕ , respectivamente.

Os parâmetros α , β , γ e ϕ que são estimados na primeira etapa do problema de calibração, podem ser obtidos pelo método dos mínimos quadrados ou por máxima verossimilhança. Os estimadores de mínimos quadrados que estão definidos em (3.33) são

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_Q &= \bar{Y} - \hat{\beta}_Q \bar{X}, & \hat{\beta}_Q &= S_{xy}/S_{xx}, \\ \hat{\gamma}_Q &= \bar{X} - \hat{\phi}_Q \bar{Y}, & \hat{\phi}_Q &= S_{xy}/S_{yy}.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Sob a suposição de normalidade, os estimadores obtidos pelo método dos momentos no modelo estrutural são estimadores de máxima verossimilhança (vide Fuller, 1987 e Bickel e Doksum, 1977, p.106) e irão depender das suposições necessárias para tornar o modelo identificável.

Sob a suposição de $\lambda = \sigma_\epsilon^2/\sigma_\delta^2$ ser conhecido, os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) são dados por (vide Fuller, 1987, p.30 e 177)

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_V &= \bar{Y} - \hat{\beta}_V \bar{X}, \\ \hat{\beta}_V &= \frac{S_{yy} - \lambda S_{xx} + \sqrt{(S_{yy} - \lambda S_{xx})^2 + 4\lambda S_{xy}^2}}{2S_{xy}}, \\ \hat{\gamma}_V &= \bar{X} - \hat{\phi}_V \bar{Y}, \\ \hat{\phi}_V &= \frac{(S_{xx} - \lambda^{-1} S_{yy}) + \sqrt{(S_{xx} - \lambda^{-1} S_{yy})^2 + 4\lambda^{-1} S_{xy}^2}}{2S_{xy}},\end{aligned}\quad (5.5)$$

onde $\bar{X}$, $\bar{Y}$, S_{xx} , S_{xy} , S_{yy} estão definidos em (3.3). Pode-se observar que esses estimadores são aqueles obtidos no Capítulo 3, em (3.3) e (3.32). Portanto, tem-se que $\hat{\phi}_V = 1/\hat{\beta}_V$, de onde segue que

$$\hat{U}_{0CV\lambda} = \hat{U}_{0IV\lambda},$$

onde $\hat{U}_{0CV\lambda}$ e $\hat{U}_{0IV\lambda}$ denotam, respectivamente, o previsor clássico e o previsor inverso de U_0 combinado com os estimadores de máxima verossimilhança sob a suposição de λ ser conhecido.

Sob a suposição de σ_δ^2 ser conhecido, os EMV de α , β , γ e ϕ são dados em (4.1) e (4.21), ou seja,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_V &= \bar{Y} - \hat{\beta}_V \bar{X}, \\ \hat{\beta}_V &= \frac{S_{xy}}{S_{xx} - \sigma_\delta^2}, \\ \hat{\gamma}_V &= \bar{X} - \hat{\phi}_V \bar{Y}, \\ \hat{\phi}_V &= \frac{S_{xx} - \sigma_\delta^2}{S_{xy}}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Conforme visto no Capítulo 4, pode ser mostrado que $\hat{\phi}_V = 1/\hat{\beta}_V$, o que implica que

$$\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2} = \hat{U}_{0IV\sigma_\delta^2},$$

onde $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0IV\sigma_\delta^2}$ denotam, respectivamente, o previsor clássico e o previsor inverso de U_0 combinado com os estimadores de máxima verossimilhança sob a suposição de σ_δ^2 ser conhecido.

Supondo o modelo estrutural (2.8), (2.11) e (2.12) sob a suposição de $k_u = \sigma_u^2/(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2)$ ser conhecido, o seguinte sistema de equações é obtido pelo método dos momentos (vide também Fuller, 1987):

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \hat{\mu}_u, \\ \bar{Y} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\mu}_u, \\ S_{xx} &= \frac{\hat{\sigma}_u^2}{k_u}, \\ S_{xy} &= \hat{\beta}\sigma_u^2, \\ \text{e} \quad S_{yy} &= \hat{\beta}_u^2 \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{uV} &= \bar{X}, \\ \hat{\alpha}_V &= \bar{Y} - \hat{\beta}_V \bar{X},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_V &= \frac{S_{xy}}{k_u S_{xx}}, \\
\hat{\sigma}_u^2 &= k_u S_{xx}, \\
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= S_{yy} - \hat{\beta}_V S_{xy}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Para esses estimadores estarem definidos no espaço paramétrico, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ deve ser positivo. O estimador de σ_ε^2 será positivo se

$$S_{yy} - \hat{\beta}_V S_{xy} > 0,$$

isto é, se $k_u S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2 > 0$. Assintoticamente não há restrições, pois $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \rightarrow \sigma_\varepsilon^2$.

Baseado na regressão de U em Y de (2.8), e sob as suposições (2.11) e (2.12), tem-se que

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} \mu_u \\ \frac{\mu_u}{\phi} - \frac{\gamma}{\phi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_u^2/k_u & \sigma_u^2/\phi \\ \sigma_u^2/\phi & \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2/\phi^2 \end{pmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

onde $\gamma = -\alpha/\beta$ e $\phi = 1/\beta$. Pelo método dos momentos, obtém-se (vide também Bolfarine e Cordani, 1993)

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_{uV} &= \overline{X}, \\
\hat{\gamma}_V &= \overline{X} - \hat{\phi}_V \overline{Y} \\
\hat{\phi}_V &= \frac{k_u S_{xx}}{S_{xy}} \\
\hat{\sigma}_u^2 &= k_u S_{xx} \\
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= S_{yy} - \frac{S_{yy}}{\hat{\phi}_V}.
\end{aligned}$$

Para esses estimadores estarem definidos no espaço paramétrico, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ deve ser positivo. O estimador de σ_ε^2 será positivo se

$$S_{yy} - \frac{S_{xy}}{\hat{\phi}_V} > 0,$$

isto é, se $k_u S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2 > 0$. Assintoticamente não há restrições pois $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \rightarrow \sigma_\varepsilon^2$. Bolfarine et al. (1992) discute a estimação de β através de uma abordagem condicional. A distribuição assintótica dos estimadores $\hat{\beta}_V$ associada aos modelos discutidos aqui é apresentada

em Fuller (1987), sem contudo ser apresentado um estudo das ordens das aproximações.

Sob a suposição de k_u ser conhecido, mostra-se que

$$\hat{\phi}_V = k_u \frac{S_{xx}}{S_{xy}} = \frac{1}{\frac{S_{xy}}{k_u S_{xx}}} = \frac{1}{\hat{\beta}_V}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\hat{U}_{0CVk_u} &= \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_V}{\hat{\beta}_V} = \frac{\bar{Y}_0 - \bar{Y} + \hat{\beta}_V \bar{X}}{\hat{\beta}_V} = \bar{X} + \frac{(\bar{Y}_0 - \bar{Y})}{\hat{\beta}_V} \\ &= \bar{X} + \hat{\phi}_V (\bar{Y}_0 - \bar{Y}) = \bar{X} - \hat{\phi}_V \bar{Y} + \hat{\phi}_V \bar{Y}_0 = \hat{\gamma}_V + \hat{\phi}_V \bar{Y}_0 = \hat{U}_{0IVk_u},\end{aligned}$$

onde $\hat{U}_{0CVk_u}$ e $\hat{U}_{0IVk_u}$ denotam, respectivamente, o previsor clássico e o previsor inverso de U_0 combinado com os estimadores de máxima verossimilhança sob a suposição de k_u ser conhecido.

Seja $\hat{U}_{0\ell V}$ o previsor condicional de U_0 combinado com os estimadores de máxima verossimilhança de α e β e $\hat{U}_{0\ell Q}$ o previsor condicional de U_0 combinado com os estimadores de mínimos quadrados de α e β . Observe que substituindo $\hat{\alpha}_V$ e $\hat{\alpha}_Q$ em (5.1), tem-se

$$\hat{U}_{0\ell Q} = \bar{X} + \frac{kS_{xy}}{S_{yy}} (\bar{Y}_0 - \bar{Y} + \hat{\beta}_Q \bar{X} - \hat{\beta}_Q \bar{X}) = \bar{X} + \frac{kS_{xy}}{S_{yy}} (\bar{Y}_0 - \bar{Y})$$

e

$$\hat{U}_{0\ell V} = \bar{X} + \frac{kS_{xy}}{S_{yy}} (\bar{Y}_0 - \bar{Y} + \hat{\beta}_V \bar{X} - \hat{\beta}_V \bar{X}) = \bar{X} + \frac{kS_{xy}}{S_{yy}} (\bar{Y}_0 - \bar{Y}).$$

Portanto, o previsor condicional de U_0 com mínimos quadrados coincide com o previsor condicional de U_0 com máxima verossimilhança, qualquer que seja a suposição feita para tornar o modelo identificável.

Um resultado interessante é que o previsor condicional com $k = 1$ reduz-se ao previsor inverso com mínimos quadrados, fornecendo assim uma justificativa para o uso desse.

Pelo exposto neste capítulo até então, será feito um estudo do comportamento assintótico dos seguintes previsores de U_0 :

1. $\hat{U}_{0CV\lambda}$, $\hat{U}_{0CV\sigma_0^2}$ e $\hat{U}_{0CVk_u}$ que são os previsores clássicos de U_0 combinados com os EMV de α e β , conforme a suposição feita sob o modelo;

2. $\hat{U}_{0CQ}$, $\hat{U}_{0IQ}$ e $\hat{U}_{0eQ}$, que são os previsores clássico, inverso e condicional de U_0 , respectivamente, combinados com os estimadores de mínimos quadrados.

5.2 Previsores clássicos de U_0 combinados com os estimadores de máxima verossimilhança

Nesta seção será apresentado um estudo do comportamento dos previsores de U_0 com máxima verossimilhança quando apenas o tamanho da amostra da primeira etapa do problema de calibração é grande, ou seja, k é considerado fixo. Para tanto, esta seção será subdividida em três subseções que correspondem às suposições necessárias para tornar o modelo estrutural identificável.

5.2.1 Razão de variâncias conhecida

Esta subseção será dedicada ao caso em que a razão de variâncias dos erros λ é conhecido. Apresenta-se, primeiro, um lema, que será usado na prova do resultado principal.

Lema 5.1 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12), com λ conhecido, segue que*

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_V) &= \beta + \frac{\beta\sigma_\delta^2}{n\sigma_u^2}(1 + \mathcal{J}) + O(n^{-2}), \\ \text{Var}(\hat{\beta}_V) &= \frac{\sigma_\delta^2(\lambda + \beta^2)}{n\sigma_u^2}(1 + \mathcal{J}) + O(n^{-2}), \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{X}) &= \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{Y}) = 0, \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xx}) &= -\frac{2\beta\sigma_\delta^2}{n}(1 + \mathcal{J}) + O(n^{-2}), \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xy}) &= \frac{(\lambda - \beta^2)\sigma_\delta^2}{n}(1 + \mathcal{J}) + O(n^{-2}) \\ e \quad \text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{yy}) &= \frac{2\sigma_\epsilon^2\beta}{n}(1 + \mathcal{J}) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{J} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^2} \quad (5.8)$$

e $\hat{\beta}_V$ dado em (5.5).

Prova: Conforme visto no Capítulo 3, o estimador $\hat{\beta}_V$ dado em (5.5) é função de (S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}) . Portanto, pode-se expandir $\hat{\beta}_V$ em série de Taylor até ordem n^{-2} , em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(S_{xx}), E(S_{xy}), E(S_{yy}))$, obtendo-se assim a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_V &= \beta + \left(\frac{-\lambda\beta}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx})) \\
&+ \left(-\frac{(\beta^2 - \lambda)}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy})) \\
&+ \left(\frac{\beta}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{yy} - E(S_{yy})) \\
&+ \left(\frac{\lambda^3\beta}{(\lambda + \beta^2)^3\sigma_u^4} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))^2 \\
&+ \left(\frac{\beta}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^4} \left[1 - \frac{4\lambda^2}{(\lambda + \beta^2)^2} \right] + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy}))^2 \\
&+ \left(\frac{\lambda\beta}{(\lambda + \beta^2)^3\sigma_u^4} + O(n^{-1}) \right) (S_{yy} - E(S_{yy}))^2 \\
&+ \left(\frac{-2\lambda^2\beta}{(\lambda + \beta^2)^3\sigma_u^4} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))(S_{yy} - E(S_{yy})) \\
&+ \left(\frac{\lambda}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^4} \left[1 + \frac{2\lambda(\beta^2 - \lambda)}{(\lambda + \beta^2)^2} \right] + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))(S_{xy} - E(S_{xy})) \\
&+ \left(-\frac{1}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^4} \left[1 + \frac{2\lambda(\beta^2 - \lambda)}{(\lambda + \beta^2)^2} \right] + O(n^{-1}) \right) \\
&\cdot (S_{xy} - E(S_{xy}))(S_{yy} - E(S_{yy})) + O_p(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Calculando a esperança e a variância dessa expressão, obtém-se

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}_V) &= \beta + \frac{\lambda^3 \beta}{(\lambda + \beta^2)^3 \sigma_u^4} \text{Var}(S_{xx}) + \frac{\beta}{(\lambda + \beta^2) \sigma_u^4} \left[1 - \frac{4\lambda^2}{(\lambda + \beta^2)^2} \right] \text{Var}(S_{xy}) \\
&+ \frac{\lambda \beta}{(\lambda + \beta^2)^3 \sigma_u^4} \text{Var}(S_{yy}) - \frac{2\lambda^2 \beta}{(\lambda + \beta^2)^3 \sigma_u^4} \text{Cov}(S_{xx}, S_{yy}) \\
&+ \frac{\lambda}{(\lambda + \beta^2) \sigma_u^4} \left[1 + \frac{2\lambda(\beta^2 - \lambda)}{(\lambda + \beta^2)^2} \right] \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) \\
&- \frac{1}{(\lambda + \beta^2) \sigma_u^4} \left[1 + \frac{2\lambda(\beta^2 - \lambda)}{(\lambda + \beta^2)^2} \right] \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) + O(n^{-2})
\end{aligned} \tag{5.9}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{\beta}_V) &= \frac{\lambda^2 \beta^2}{(\lambda + \beta^2)^2 \sigma_u^4} \text{Var}(S_{xx}) + \frac{(\beta^2 - \lambda)^2}{(\lambda + \beta^2)^2 \sigma_u^4} \text{Var}(S_{xy}) \\
&+ \frac{\beta^2}{(\lambda + \beta^2)^2 \sigma_u^4} \text{Var}(S_{yy}) + \frac{2\lambda\beta(\beta^2 - \lambda)}{(\lambda + \beta^2)^2 \sigma_u^4} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) \\
&- \frac{2\lambda\beta^2}{(\lambda + \beta^2)^2 \sigma_u^4} \text{Cov}(S_{xx}, S_{yy}) - \frac{2\beta(\beta^2 - \lambda)}{(\lambda + \beta^2)^2 \sigma_u^4} \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) \\
&+ O(n^{-2}).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Com alguns resultados apresentados em Fuller (1987, p.88) e sabendo-se que $\sigma_y^2 = \beta^2 \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2$, $\sigma_x^2 = \sigma_u^2 + \sigma_\delta^2$ e $\sigma_{xy} = \beta \sigma_u^2$, mostra-se que

$$\text{Var}(S_{xx}) = \frac{2\sigma_x^4}{n} + O(n^{-2}) = \frac{2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2)^2}{n} + O(n^{-2}), \tag{5.11}$$

$$\text{Var}(S_{yy}) = \frac{2\sigma_y^4}{n} + O(n^{-2}) = \frac{2(\beta^2 \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2)^2}{n} + O(n^{-2}), \tag{5.12}$$

$$\text{Var}(S_{xy}) = \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2 + \sigma_{xy}^2}{n} + O(n^{-2}) = \frac{2\beta^2 \sigma_u^4 + \sigma_u^2 (\sigma_\varepsilon^2 + \beta^2 \sigma_\delta^2) + \sigma_\delta^2 \sigma_\varepsilon^2}{n} + O(n^{-2}), \tag{5.13}$$

$$\text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) = \frac{2\sigma_x^2 \sigma_{xy}}{n} + O(n^{-2}) = \frac{2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) \beta \sigma_u^2}{n} + O(n^{-2}), \tag{5.14}$$

$$\text{Cov}(S_{xx}, S_{yy}) = \frac{2\sigma_{xy}^2}{n} + O(n^{-2}) = \frac{2\beta^2 \sigma_u^4}{n} + O(n^{-2}) \tag{5.15}$$

$$e \quad \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) = \frac{2\sigma_y^2 \sigma_{xy}}{n} + O(n^{-2}) = \frac{2\beta \sigma_u^2 (\beta^2 \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{n} + O(n^{-2}). \tag{5.16}$$

Substituindo (5.11) – (5.16) nas expressões (5.9) e (5.10), a esperança e a variância são obtidas após algumas manipulações algébricas. Da independência das médias amostrais

com as variâncias e covariâncias amostrais em amostras que seguem a distribuição normal, prova-se que $\text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{X}) = \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{Y}) = 0$. O cálculo das outras covariâncias pode ser conduzido utilizando a técnica apresentada em Barnett (1969) e será ilustrado calculando-se $\text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xx})$. Usando (3.5), com $\mathbf{m} = (\bar{X}, \bar{Y}, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy})$, $h(\mathbf{m}) = S_{xx}$, $g(\mathbf{m}) = \hat{\beta}_V$, segue que

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xx}) = g^{(3)}h^{(3)}\text{Var}(S_{xx}) + g^{(4)}h^{(3)}\text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + g^{(5)}h^{(3)}\text{Cov}(S_{yy}, S_{xx}) + O(n^{-2}),$$

com

$$\begin{aligned} h^{(3)} &= 1, \quad h^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 4, 5, \\ g^{(1)} &= g^{(2)} = 0, \quad g^{(3)} = -\frac{\lambda\beta}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^2} + O(n^{-1}), \\ g^{(4)} &= -\frac{(\beta^2 - \lambda)}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^2} + O(n^{-1}) \quad \text{e} \quad g^{(5)} = \frac{\beta}{(\lambda + \beta^2)\sigma_u^2} + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

O resultado segue substituindo-se (5.11), (5.14) e (5.15) na expressão acima. $\square$

Teorema 5.1 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12) com a suposição de que λ é conhecido e k um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$EQM(\hat{U}_{0CV\lambda}) = \frac{\sigma_\delta^2(\lambda + \beta^2)}{n\beta^2} + \frac{\sigma_\epsilon^2}{k\beta^2} + \frac{\sigma_\delta^2(\lambda + \beta^2)(1 + \mathcal{J})}{n\beta^2} \left[1 + \frac{\mathcal{J}}{k} \left(1 + \frac{3\lambda}{\beta^2} \right) \right] + O(n^{-2}),$$

onde $\mathcal{J}$ é dado em (5.8).

Prova: Note que pode-se escrever $\hat{U}_{0CV\lambda}$ na forma dada em (3.18), isto é,

$$\hat{U}_{0CV\lambda} = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_V}{\hat{\beta}_V} = \frac{\bar{Y}_0 - \bar{Y} + \hat{\beta}_V \bar{X}}{\hat{\beta}_V} = \bar{X} + \frac{\beta(U_0 - \bar{U}) + \bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}}{\hat{\beta}_V}. \quad (5.17)$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0CV\lambda}) &= E(\bar{X}) + \beta E(U_0 - \bar{U}) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) + E(\bar{\epsilon}_0) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) - E(\bar{\epsilon}) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) \\ &= E(\bar{X}) = \mu_u, \end{aligned}$$

pela independência entre $\hat{\beta}_V$ e $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Y}_0)$ e pelas suposições $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_{0j}) = 0$, $i = 1, \dots, n$ e $j = n+1, \dots, n+k$.

O erro quadrático médio é dado por

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CV\lambda}) &= E(\hat{U}_{0CV\lambda} - U_0)^2 = E((\hat{U}_{0CV\lambda} - \mu_u) - (U_0 - \mu_u))^2 \\ &= \text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda}) + \text{Var}(U_0) - 2\text{Cov}(\hat{U}_{0CV\lambda}, U_0). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Inicialmente, será obtida a $\text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda})$. De (5.17), obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda}) &= \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2 \text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V}\right) \\ &\quad + 2\text{Cov}(\bar{X}, \beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V) + 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V) - 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V) \\ &\quad + 2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V) - 2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V) \\ &\quad - 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Como no Capítulo 3, a variância de $\hat{U}_{0CV\lambda}$ depende de $1/\hat{\beta}_V$, o qual pode ser escrito, depois de uma expansão em série de Taylor, como

$$\frac{1}{\hat{\beta}_V} = \frac{1}{E(\hat{\beta}_V)} - \frac{(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))}{E^2(\hat{\beta}_V)} + \frac{(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))^2}{E^3(\hat{\beta}_V)} + O_p(n^{-2}), \quad (5.20)$$

$$\frac{1}{\hat{\beta}_V^2} = \frac{1}{E^2(\hat{\beta}_V)} - \frac{2(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))}{E^3(\hat{\beta}_V)} + \frac{3(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))^2}{E^4(\hat{\beta}_V)} + O_p(n^{-2}). \quad (5.21)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V}\right) &= E\left(\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V}\right)^2\right) - \left[E\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V}\right)\right]^2 \\ &= E\left(\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V}\right)^2\right) - \left[E(U_0 - \bar{U})E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right)\right]^2 = E\left(\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V}\right)^2\right), \end{aligned}$$

pois U_0 e $\bar{U}$ são independentes de $\hat{\beta}_V$ e $E(U_0) = E(\bar{U}) = \mu_u$. De (5.21), tem-se

$$\text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V}\right) = \frac{E(U_0 - \bar{U})^2}{E^2(\hat{\beta}_V)} - \frac{2E((U_0 - \bar{U})^2(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V)))}{E^3(\hat{\beta}_V)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3E(U_0 - \bar{U})^2(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))^2}{E^4(\hat{\beta}_V)} + O(n^{-2}) \\
& = \frac{E(U_0 - \bar{U})^2}{E^2(\hat{\beta}_V)} + \frac{3E((U_0 - \bar{U})^2(\hat{\beta}_V - E(\hat{\beta}_V))^2)}{E^4(\hat{\beta}_V)} + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Mas,

$$E(U_0 - \bar{U})^2 = \text{Var}(U_0) + \text{Var}(\bar{U}) - 2\text{Cov}(U_0, \bar{U}) = \sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n}.$$

Como o Lema 5.1 estabelece que $E(\hat{\beta}_V) = \beta + \text{vício}(\hat{\beta}_V) + O(n^{-2})$, onde $\text{vício}(\hat{\beta}_V) = O(n^{-1})$, pode-se expandir $1/E(\hat{\beta}_V)$, $1/E^2(\hat{\beta}_V)$, $1/E^3(\hat{\beta}_V)$ e $1/E^4(\hat{\beta}_V)$ como função do vício $(\hat{\beta}_V)$ em série de Taylor em torno do zero, obtendo-se assim

$$\frac{1}{E(\hat{\beta}_V)} = \frac{1}{\beta} - \frac{\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^2} + O(n^{-2}), \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{E^2(\hat{\beta}_V)} = \frac{1}{\beta^2} - \frac{2\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} + O(n^{-2}), \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{E^3(\hat{\beta}_V)} = \frac{1}{\beta^3} - \frac{3\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}), \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{E^4(\hat{\beta}_V)} = \frac{1}{\beta^4} - \frac{4\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^5} + O(n^{-2}). \quad (5.25)$$

Logo, de (5.23) e (5.25), obtém-se

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V}\right) &= \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n}\right) \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{2\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3}\right) \\
&\quad + 3\left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n}\right) \text{Var}(\hat{\beta}_V) \left(\frac{1}{\beta^4} - \frac{4\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^5}\right) + O(n^{-2}) \\
&= \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n}\right) \frac{1}{\beta^2} - \frac{2\sigma_u^2 \text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} + \frac{3\sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}). \quad (5.26)
\end{aligned}$$

De (5.20), (5.23) e (5.25), tem-se

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V}\right) &= \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{E^2(\hat{\beta}_V)} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{E^4(\hat{\beta}_V)} + O(n^{-2}) \\
&= \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{\beta^2} - \frac{2\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}), \quad (5.27)
\end{aligned}$$

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V}\right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{E^2(\hat{\beta}_V)} + O(n^{-2}) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{\beta^2} + O(n^{-2}). \quad (5.28)$$

Agora,

$$\begin{aligned}\text{Cov}\left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V}\right) &= E\left(\frac{\bar{X}\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V}\right) - E(\bar{X})E\left(\frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V}\right) \\ &= \beta E(\bar{X}(U_0 - \bar{U}))E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right),\end{aligned}$$

pois $E(U_0) = E(\bar{U}) = \mu_u$ e $\hat{\beta}_V$ é independente de U_0 e $\bar{U}$. Mas,

$$\begin{aligned}E(\bar{X}(U_0 - \bar{U})) &= E((\bar{U} + \bar{\delta})(U_0 - \bar{U})) = E(U_0\bar{U}) - E(\bar{U}^2) + E(U_0\bar{\delta}) - E(\bar{U}\bar{\delta}) \\ &= \mu_u^2 - \left[\frac{\sigma_u^2}{n} + \mu_u^2\right] = -\frac{\sigma_u^2}{n}.\end{aligned}$$

Então, de (5.20) e (5.22),

$$\begin{aligned}\text{Cov}\left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V}\right) &= -\beta\frac{\sigma_u^2}{n}\left[\frac{1}{\beta} - \frac{\text{vício}(\hat{\beta})}{\beta^2}\right] + O(n^{-2}) \\ &= -\frac{\sigma_u^2}{n} + O(n^{-2}).\end{aligned}\tag{5.29}$$

Da expressão (5.20), da independência entre $\hat{\beta}_V$ e $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{U})$ e das suposições $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_{0j}) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = n+1, \dots, n+k$, pode-se mostrar que as outras covariâncias envolvidas na equação (5.19) são nulas.

Substituindo (5.26) – (5.29), o $\text{vício}(\hat{\beta}_V)$ e $\text{Var}(\hat{\beta}_V)$ dados no Lema 5.1, na expressão (5.19), e com algumas operações algébricas, chega-se à expressão da variância de $\hat{U}_{0CV\lambda}$, dada por

$$\text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda}) = \sigma_u^2 + \frac{\sigma_\delta^2(\lambda + \beta^2)}{n\beta^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} + \frac{\sigma_\delta^2(1 + \mathcal{J})}{n}\left(1 + \frac{3\lambda}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2\sigma_u^2}\right) + O(n^{-2}).\tag{5.30}$$

Da definição de covariância, obtém-se

$$\text{Cov}(\hat{U}_{0CV\lambda}, U_0) = E(\hat{U}_{0CV\lambda}U_0) - E(\hat{U}_{0CV\lambda})E(U_0) = E(\hat{U}_{0CV\lambda}U_0) - \mu_u^2.$$

De (5.17), tem-se

$$E(\hat{U}_{0CV\lambda}U_0) = E\left(U_0\left(\bar{X} + \frac{\beta(U_0 - \bar{U}) + \bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V}\right)\right) = \mu_u^2 + \beta E\left(\frac{U_0(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_u^2 + \beta E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) E(U_0^2 - \bar{U}U_0) = \mu_u^2 + \beta E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) [\sigma_u^2 + \mu_u^2 - \mu_u^2] \\
&= \mu_u^2 + \beta \sigma_u^2 E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right).
\end{aligned}$$

De (5.20), (5.22) e (5.24), obtém-se

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\hat{U}_{0CV\lambda}, U_0) &= \beta \sigma_u^2 \left(\frac{1}{E(\hat{\beta}_V)} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{E^3(\hat{\beta}_V)} \right) + O(n^{-2}) \\
&= \beta \sigma_u^2 \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^2} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} \right) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Logo, de (5.18),

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0CV\lambda}) &= \text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda}) + \text{Var}(U_0) - 2\sigma_u^2 + \frac{2\sigma_u^2 \text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta} \\
&\quad - \frac{2\sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^2} + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Substituindo $\text{vício}(\hat{\beta}_V)$, $\text{Var}(\hat{\beta}_V)$ obtidos no Lema 5.1 e a expressão da $\text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda})$ dada em (5.30), chega-se ao resultado desejado. $\square$

5.2.2 Uma das variâncias conhecida

Nesta subseção será considerado o caso em que a variância dos erros de medição σ_δ^2 é conhecido. O lema apresentado a seguir será usado na prova do próximo teorema.

Lema 5.2 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12) com σ_δ^2 conhecido, segue que*

$$E(\hat{\beta}_V) = \beta + \frac{\beta \sigma_\delta^2}{n \sigma_u^2} \left(3 + \frac{2 \sigma_\delta^2}{\sigma_u^2} \right) + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_V) = \frac{\varphi(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) + \beta^2 \sigma_\delta^4}{n \sigma_u^4} + O(n^{-2}),$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{X}) = \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{Y}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xx}) &= -\frac{2\beta\sigma_\delta^2}{n\sigma_u^2}(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) + O(n^{-2}), \\
\text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xy}) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 - \beta^2\sigma_\delta^2}{n} + \frac{\sigma_\delta^2\sigma_\varepsilon^2}{n\sigma_u^2} + O(n^{-2}) \\
e \quad \text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{yy}) &= \frac{2\beta\sigma_\varepsilon^2}{n} + O(n^{-2}),
\end{aligned}$$

onde $\varphi = \sigma_\varepsilon^2 + \beta^2\sigma_\delta^2$, como dado em (4.3) e $\hat{\beta}_V$ é dado em (5.6).

Prova: Como visto no Capítulo 4, o estimador $\hat{\beta}_V$ dado em (5.6) é função de (S_{xx}, S_{xy}) . Tomando a esperança e a variância da expansão de Taylor de $\hat{\beta}_V$ em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(S_{xx}), E(S_{xy}))$, obtém-se

$$E(\hat{\beta}_V) = \beta + \frac{\beta\sigma_\delta^2}{n\sigma_u^2} + \frac{\beta}{\sigma_u^4}\text{Var}(S_{xx}) - \frac{1}{\sigma_u^4}\text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_V) = \frac{\beta^2}{\sigma_u^4}\text{Var}(S_{xx}) + \frac{1}{\sigma_u^4}\text{Var}(S_{xy}) - \frac{2\beta}{\sigma_u^4}\text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2}).$$

As expressões da esperança e variância de $\hat{\beta}_V$ seguem pela substituição de (5.11), (5.13) e (5.14) nas expressões acima. Como $\hat{\beta}_V$ é uma função do vetor (S_{xx}, S_{xy}) , que é independente de $(\bar{X}, \bar{Y})$, tem-se que $\hat{\beta}_V$ é independente de $\bar{X}$ e de $\bar{Y}$. Logo, $\text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{X}) = \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{Y}) = 0$. As outras covariâncias podem ser verificadas utilizando a técnica apresentada por Barnett (1969), como exemplificada na prova do Lema 5.1, juntamente com (5.11), (5.13) – (5.16). $\square$

Teorema 5.2 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12), com a suposição de que σ_δ^2 é conhecido e de que k é um inteiro positivo qualquer, segue que*

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) &= \frac{2\sigma_\delta^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2)}{n\sigma_u^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n\beta^2\sigma_u^2}(\sigma_\delta^2 + 2\sigma_u^2) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} \\
&\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2\sigma_\delta^2}{nk\beta^2\sigma_u^4}(2\sigma_\delta^2 - 3\sigma_u^2) + \frac{3\sigma_\varepsilon^4}{nk\beta^4\sigma_u^4}(\sigma_\delta^2 + \sigma_u^2) + O(n^{-2}),
\end{aligned}$$

onde φ é dado em (4.3).

Prova: Utilizando (5.17), pode-se obter

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) &= E(\bar{X}) + \beta E(U_0 - \bar{U})E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) + E(\bar{\varepsilon}_0)E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) - E(\bar{\varepsilon})E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V}\right) \\ &= E(\bar{X}) = \mu_u, \end{aligned}$$

como dado no Teorema 5.1, e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) &= \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2 \text{Var}((U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V) \\ &\quad + 2\text{Cov}(\bar{X}, \beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V) + 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V) - 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V) \\ &\quad + 2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V) - 2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V) \\ &\quad - 2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Esta expressão é equivalente a (5.19) com o respectivo estimador $\hat{\beta}_V$. Similarmente à prova do Teorema 5.1, tem-se que

$$\text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\beta^2} + \frac{\sigma_u^2}{n\beta^2} - \frac{2\sigma_u^2 \text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} + \frac{3\sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V}\right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{\beta^2} - \frac{2\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta^3} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V}\right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{\beta^2} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Cov}\left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V}\right) = -\frac{\sigma_u^2}{n} + O(n^{-2}),$$

com as outras covariâncias na expressão (5.31) sendo nulas. Substituindo as expressões acima na equação (5.31) e utilizando o Lema 5.2, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) &= \sigma_u^2 + \frac{\varphi}{n\beta^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} + \frac{\sigma_\delta^4}{n\sigma_u^4} \left(2 - \frac{3\sigma_u^2}{\sigma_\delta^2}\right) \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2}\right) \\ &\quad + \frac{3\sigma_\varepsilon^2(\sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{n\beta^2\sigma_u^4} \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2}\right) + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Como no Teorema 5.1, o EQM pode ser escrito como

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) &= \text{Var}(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) + \text{Var}(U_0) - 2\sigma_u^2 + \frac{2\sigma_u^2 \text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta} \\ &\quad - \frac{2\sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^2} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Substituindo a $\text{Var}(\hat{\beta}_V)$, o vício($\hat{\beta}_V$) = $E(\hat{\beta}_V) - \beta$ dados no Lema 5.2 e a $\text{Var}(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2})$ dada na expressão (5.32), o erro quadrático médio é obtido após algumas manipulações algébricas. $\square$

5.2.3 Coeficiente de atenuação conhecido

Esta subseção será dedicada ao caso em que o coeficiente de atenuação $k_u = \sigma_u^2/(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2)$ é conhecido. O coeficiente de atenuação representa o quanto da variabilidade de X_i é explicada pela variabilidade de U_i . Apresenta-se primeiro um lema, que será usado na prova do próximo teorema.

Lema 5.3 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12) com k_u conhecido, segue que*

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_V) &= \beta + O(n^{-2}), \\ \text{Var}(\hat{\beta}_V) &= \frac{\beta^2}{n} \left(\frac{1}{k_u} - 1 \right) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{nk_u\sigma_u^2} + O(n^{-2}), \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{X}) &= \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{Y}) = 0, \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xx}) &= 0 + O(n^{-2}), \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{xy}) &= \frac{\beta^2\sigma_u^2}{n} \left(\frac{1}{k_u} - 1 \right) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{nk_u} + O(n^{-2}) \\ e \quad \text{Cov}(\hat{\beta}_V, S_{yy}) &= \frac{2\beta}{n} [\beta^2\sigma_u^2(1 - k_u) + \sigma_\varepsilon^2] + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde $\hat{\beta}_V$ é dado em (5.7).

Prova: O estimador $\hat{\beta}_V$ dado em (5.7) é função de (S_{xx}, S_{xy}) . Portanto, pode-se expandir $\hat{\beta}_V$ em série de Taylor até ordem n^{-2} em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(S_{xx}), E(S_{xy}))$, e

calculando a esperança e a variância dessa expansão, obtém-se

$$E(\hat{\beta}_V) = \beta + \frac{\beta k_u^2}{\sigma_u^4} \text{Var}(S_{xx}) - \frac{k_u}{\sigma_u^4} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_V) = \beta^2 \frac{k_u^2}{\sigma_u^4} \text{Var}(S_{xx}) + \frac{1}{\sigma_u^4} \text{Var}(S_{xy}) - \frac{2\beta k_u}{\sigma_u^4} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2}).$$

Substituindo (5.11), (5.13) e (5.14) nas expressões acima, a esperança e a variância são obtidas após algumas manipulações algébricas. Como $\hat{\beta}_V$ é uma função do vetor (S_{xx}, S_{xy}) , que é independente de $(\bar{X}, \bar{Y})$, tem-se que $\text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{X}) = \text{Cov}(\hat{\beta}_V, \bar{Y}) = 0$. As outras covariâncias são obtidas utilizando a técnica apresentada em Barnett (1969), juntamente com (5.11), (5.13), (5.14) e (5.15). $\square$

Teorema 5.3 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12) com a suposição de que k_u é conhecido e de que k é um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CVk_u}) &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k_u} - 1 \right) \left(2\sigma_u^2 + \frac{3\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} \right) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n\beta^2 k_u} \left(1 + \frac{3\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2 \sigma_u^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Prova: Pela prova do Teorema 5.1, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CVk_u}) &= \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2 \text{Var} \left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V} \right) + \text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V} \right) \\ &\quad + \text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V} \right) + 2\text{Cov} \left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V} \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

De maneira similar a (5.26) – (5.29), obtém-se

$$\text{Var} \left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V} \right) = \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n} \right) \frac{1}{\beta^2} + \frac{3\sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V} \right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{\beta^2} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^4} + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V} \right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{\beta^2} + O(n^{-2})$$

e
$$\text{Cov} \left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V} \right) = -\frac{\sigma_u^2}{n} + O(n^{-2}),$$

já que o Lema 5.3 estabelece que $E(\hat{\beta}_V) = \beta + O(n^{-2})$, isto é, $\text{vício}(\hat{\beta}_V) = O(n^{-2})$.

Substituindo em (5.33) as expressões acima e a $\text{Var}(\hat{\beta}_V)$ dada no Lema 5.3, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CVk_u}) &= \sigma_u^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k_u} - 1 \right) \left(4\sigma_u^2 + \frac{3\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} \right) + \frac{3\sigma_\varepsilon^2}{n\beta^2 k_u} \left(1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2 \sigma_u^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\beta^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (5.34)$$

No Teorema 5.1 foi estabelecido que o erro quadrático médio é dado por

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CVk_u}) &= \text{Var}(\hat{U}_{0CVk_u}) + \text{Var}(U_0) - 2\sigma_u^2 + \frac{2\sigma_u^2 \text{vício}(\hat{\beta}_V)}{\beta} \\ &\quad - \frac{2\sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\beta}_V)}{\beta^2} + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

já que é fácil mostrar pelo Teorema 5.1 que $E(\hat{U}_{0CVk_u}) = \mu_u$. Neste caso, vale lembrar que $\text{vício}(\hat{\beta}_V) = O(n^{-2})$, de modo que substituindo a expressão para a $\text{Var}(\hat{\beta}_V)$ dada no Lema 5.3 e para $\text{Var}(\hat{U}_{0CVk_u})$ dada em (5.34) na expressão acima, o erro quadrático médio é obtido. $\square$

5.3 Previsores de U_0 combinados com os estimadores de mínimos quadrados

Nesta seção será apresentado um estudo do comportamento assintótico dos previsores de U_0 , clássico, inverso e condicional, combinados com os estimadores de mínimos quadrados de α , β , γ e ϕ , quando k é considerado fixo. A seguir é apresentada uma série de resultados relacionados com as propriedades assintóticas dos estimadores (5.4).

Lema 5.4 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12), tem-se que*

$$E(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta L}{L+1} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_Q) = \frac{(\sigma_\varepsilon^2 + \beta^2 \sigma_\delta^2)L + \sigma_\varepsilon^2}{n\sigma_\delta^2(1+L)^2} + O(n^{-2}),$$

onde

$$L = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\delta^2} \quad (5.35)$$

e $\hat{\beta}_Q$ é dado em (5.4).

Prova: Conforme visto no Capítulo 3, $\hat{\beta}_Q$ é função de (S_{xx}, S_{xy}) . Uma expansão em série de Taylor de $\hat{\beta}_Q$ até ordem n^{-2} , em torno do ponto $(E(S_{xx}), E(S_{xy}))$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_Q &= \frac{\beta L}{L+1} + \left(-\frac{\beta L}{(L+1)^2 \sigma_\delta^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx})) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sigma_\delta^2(1+L)} + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy})) \\ &\quad + \left(\frac{\beta L}{\sigma_\delta^4(1+L)^3} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))^2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\sigma_\delta^4(1+L)^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))(S_{xy} - E(S_{xy})) + O_p(n^{-2}). \end{aligned}$$

Calculando a esperança e a variância dessa expressão, obtém-se

$$E(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta L}{L+1} + \frac{\beta L}{\sigma_\delta^4(1+L)^3} \text{Var}(S_{xx}) - \frac{1}{\sigma_\delta^4(1+L)^2} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) &= \frac{\beta^2 L^2}{(1+L)^4 \sigma_\delta^4} \text{Var}(S_{xx}) + \frac{1}{\sigma_\delta^4(1+L)^2} \text{Var}(S_{xy}) \\ &\quad - \frac{2\beta L}{\sigma_\delta^4(1+L)^3} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Substituindo (5.11), (5.13) e (5.14) nas expressões acima e após algumas manipulações algébricas, completa-se a prova. $\square$

Note deste lema que $\hat{\beta}_Q$ é viciado (assintoticamente) e portanto não consistente.

Lema 5.5 Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12), segue que

$$E(\hat{\phi}_Q) = \frac{z}{\beta(1+z)} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\phi}_Q) = \frac{\sigma_\delta^2}{n\sigma_\epsilon^2(1+z)} + \frac{z}{n\beta^2(1+z)^2} + O(n^{-2}),$$

onde

$$z = \frac{\beta^2 \sigma_u^2}{\sigma_\epsilon^2} = \frac{\beta^2 \sigma_\delta^2 L}{\sigma_\epsilon^2} \quad (5.36)$$

e $\hat{\phi}_Q$ é dado em (5.4).

Prova: Como no Capítulo 3, $\hat{\phi}_Q$ é função de (S_{xy}, S_{yy}) e, portanto, a expansão em série de Taylor até ordem n^{-2} é feita em torno do ponto $(E(S_{xy}), E(S_{yy}))$, resultando na seguinte expressão

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_Q &= \frac{z}{\beta(1+z)} + \left(\frac{1}{\sigma_\epsilon^2(1+z)} + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy})) \\ &\quad + \left(-\frac{z}{\beta\sigma_\epsilon^2(1+z)^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{yy} - E(S_{yy})) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\sigma_\epsilon^4(1+z)^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy}))(S_{yy} - E(S_{yy})) \\ &\quad + \left(\frac{z}{\beta\sigma_\epsilon^4(1+z)^3} + O(n^{-1}) \right) (S_{yy} - E(S_{yy}))^2 + O_p(n^{-2}). \end{aligned}$$

A esperança e a variância podem, então, serem escritas como

$$E(\hat{\phi}_Q) = \frac{z}{\beta(1+z)} - \frac{1}{\sigma_\epsilon^4(1+z)^2} \text{Cov}(S_{xy}, S_{yy}) + \frac{z}{\beta\sigma_\epsilon^4(1+z)^3} \text{Var}(S_{yy}) + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\phi}_Q) &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^4(1+z)^2} \text{Var}(S_{xy}) + \frac{z^2}{\beta^2\sigma_\epsilon^4(1+z)^4} \text{Var}(S_{yy}) \\ &\quad - \frac{2z}{\beta\sigma_\epsilon^4(1+z)^3} \text{Cov}(S_{xy}, S_{yy}) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Substituindo (5.12), (5.13) e (5.16) nas expressões acima e com algumas operações algébricas, chega-se ao resultado desejado. $\square$

Teorema 5.4 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12), quando k é um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{\sigma_u^2}{nL} + \frac{\sigma_u^2}{L^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{\sigma_\varepsilon^2(1+L)^2}{\beta^2 L^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right) \\ &\quad + \frac{3\sigma_\varepsilon^2(1+L)^3}{nk\beta^4 L^3} \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_u^2} + \frac{\beta^2}{1+L}\right) \\ &\quad + \frac{\sigma_u^2(1+L)^2}{n\beta^2 L^2} \left(1 + \frac{3}{L}\right) \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_u^2} + \frac{\beta^2}{1+L}\right) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde L é dado em (5.35).

Prova: Similarmente à demonstração dada no Teorema 5.1, tem-se que $E(\hat{U}_{0CQ}) = \mu_u$. Para calcular a variância de $\hat{U}_{0CQ}$, retome a expressão (5.19). Como $\hat{\beta}_Q$ é uma função de (S_{xx}, S_{xy}) , a qual é independente de $(\bar{X}, \bar{Y})$, tem-se que $\hat{\beta}_Q$ é independente de $\bar{X}$ e de $\bar{Y}$. Sendo assim, a variância desse estimador é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2 \text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_Q}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_Q}\right) \\ &\quad + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_Q}\right) + 2\text{Cov}\left(\bar{X}, \beta \frac{(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_Q}\right). \end{aligned}$$

Pelas expressões (5.20), (5.21), (5.26) – (5.29), procedendo de modo equivalente aos resultados (5.22) – (5.25) e utilizando o Lema 5.4, obtém-se

$$\text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_Q}\right) = \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n}\right) \left(\frac{(1+L)^2}{\beta^2 L^2}\right) + 3\sigma_u^2 \left(\frac{(1+L)^4}{\beta^4 L^4}\right) \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_Q}\right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{E^2(\hat{\beta}_Q)} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^4(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2})$$

$$= \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \left(\frac{(1+L)^2}{\beta^2 L^2} \right) + 3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_Q) \left(\frac{(1+L)^4}{\beta^4 L^4} \right) + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_Q} \right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{E^2(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2}) = \text{Var}(\bar{\varepsilon}) \left(\frac{(1+L)^2}{\beta^2 L^2} \right) + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Cov} \left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_Q} \right) = -\frac{\beta\sigma_u^2}{n} E \left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q} \right) = -\frac{\sigma_u^2}{n} \frac{(1+L)}{L} + O(n^{-2}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2}{n} + \frac{\sigma_u^2(1+L)^2}{L^2} + \frac{\sigma_u^2(1+L)^2}{nL^2} + \frac{3\sigma_u^2(1+L)^4}{\beta^2 L^4} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) \\ &\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2(1+L)^2}{k\beta^2 L^2} + \frac{3\sigma_\varepsilon^2(1+L)^4}{k\beta^4 L^4} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + \frac{\sigma_\varepsilon^2(1+L)^2}{n\beta^2 L^2} \\ &\quad - \frac{2\sigma_u^2(1+L)}{nL} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.4, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2}{n} + \frac{\sigma_u^2(1+L)^2}{L^2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{\sigma_\varepsilon^2(1+L)^2}{\beta^2 L^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) \\ &\quad - \frac{2\sigma_u^2(1+L)}{nL} + \frac{3(1+L)^3}{n\beta^2 L^4} \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2} \right) \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\delta^2} + \frac{\beta^2 L}{1+L} \right) + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Como visto no Teorema 5.1, o erro quadrático pode ser escrito como

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) = \text{Var}(U_0) + \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) - 2\text{Cov}(\hat{U}_{0CQ}, U_0),$$

com $\text{Cov}(\hat{U}_{0CQ}, U_0) = E(\hat{U}_{0CQ}U_0) - \mu_u^2$. De (5.17), obtém-se

$$E(\hat{U}_{0CQ}U_0) = \mu_u^2 + \beta\sigma_u^2 E \left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q} \right).$$

De (5.20) e procedendo de modo equivalente à demonstração das equações (5.22) e (5.24), obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{U}_{0CQ}, U_0) &= \beta\sigma_u^2 \left(\frac{1}{E(\hat{\beta}_Q)} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^3(\hat{\beta}_Q)} \right) + O(n^{-2}) \\ &= \frac{\sigma_u^2(1+L)}{L} + \frac{\sigma_u^2(1+L)^3}{\beta^2 L^3} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Logo,

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) = \text{Var}(U_0) + \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) - \frac{2\sigma_u^2(1+L)}{L} - \frac{2\sigma_u^2(1+L)^3}{\beta^2 L^3} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + O(n^{-2}).$$

Substituindo a expressão para a $\text{Var}(\hat{\beta}_Q)$ dada no Lema 5.4 e a expressão para a $\text{Var}(\hat{U}_{0CQ})$ dada em (5.37), chega-se ao resultado desejado. $\square$

Teorema 5.5 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12), quando k é um inteiro positivo qualquer, segue que*

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\sigma_u^2}{(1+z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2}{n} + \frac{1}{n(1+z)}(\sigma_u^2 + z\sigma_\delta^2) + \frac{\sigma_u^2 z}{(1+z)^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) \\ &\quad + \frac{1}{nk(1+z)} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_u^2}{1+z} \right) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde z é dado em (5.36).

Prova: Conforme visto no Capítulo 3, pode-se escrever $\hat{U}_{0IQ}$ como

$$\hat{U}_{0IQ} = \hat{\gamma}_Q + \hat{\phi}_Q \bar{Y}_0 = \bar{X} + \hat{\phi}_Q(\beta(U_0 - \bar{U}) + \bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}). \quad (5.38)$$

Logo,

$$E(\hat{U}_{0IQ}) = E(\bar{X}) = \mu_u,$$

pela independência entre $\hat{\phi}_V$ e $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Y}_0)$ e pelas suposições $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_{0j}) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = n+1, \dots, n+k$.

Calculando a variância da expressão (5.38), tem-se

$$\text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) = \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2 \text{Var}((U_0 - \bar{U})\hat{\phi}_Q) + \text{Var}(\hat{\phi}_Q \bar{\varepsilon}_0) + \text{Var}(\hat{\phi}_Q \bar{\varepsilon}) + 2\text{Cov}(\bar{X}, \hat{\phi}_Q \beta(U_0 - \bar{U})), \quad (5.39)$$

pois as outras covariâncias são nulas, já que $\hat{\phi}_Q$ é função do vetor (S_{xy}, S_{yy}) , que é independente do vetor $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Y}_0, \bar{U})$ e pelas suposições $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_{0j}) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = n+1, \dots, n+k$. Mas,

$$\text{Var}((U_0 - \bar{U})\hat{\phi}_Q) = E((U_0 - \bar{U})^2 \hat{\phi}_Q^2),$$

pois

$$E((U_0 - \bar{U})\hat{\phi}_Q) = E(\hat{\phi}_Q)E(U_0 - \bar{U}) = 0,$$

já que U_0 e $\bar{U}$ são independentes de $\hat{\phi}_Q$ e $E(U_0) = E(\bar{U}) = \mu_u$. Além disso,

$$\begin{aligned} E((U_0 - \bar{U})^2 \hat{\phi}_Q^2) &= E(\hat{\phi}_Q^2)E((U_0 - \bar{U})^2) = E(\hat{\phi}_Q^2)(\text{Var}(U_0) + \text{Var}(\bar{U}) - 2\text{Cov}(U_0, \bar{U})) \\ &= E(\hat{\phi}_Q^2) \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n} \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{Var}((U_0 - \bar{U})\hat{\phi}_Q) &= \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n} \right) E(\hat{\phi}_Q^2) = \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n} \right) (\text{Var}(\hat{\phi}_Q) + E^2(\hat{\phi}_Q)) \\ &= \sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\phi}_Q) + \sigma_u^2 E^2(\hat{\phi}_Q) + \frac{\sigma_u^2}{n} E^2(\hat{\phi}_Q) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.5, obtém-se

$$\text{Var}((U_0 - \bar{U})\hat{\phi}_Q) = \sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\phi}_Q) + \frac{\sigma_u^2 z^2}{\beta^2(1+z)^2} + \frac{\sigma_u^2 z^2}{n\beta^2(1+z)^2} + O(n^{-2}). \quad (5.40)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\phi}_Q \bar{\varepsilon}_0) &= E(\hat{\phi}_Q^2 \bar{\varepsilon}_0^2) - [E(\hat{\phi}_Q \bar{\varepsilon}_0)]^2 = E(\hat{\phi}_Q^2)E(\bar{\varepsilon}_0^2) - [E(\hat{\phi}_Q)E(\bar{\varepsilon}_0)]^2 \\ &= E(\hat{\phi}_Q^2) \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} [\text{Var}(\hat{\phi}_Q) + E^2(\hat{\phi}_Q)] = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \text{Var}(\hat{\phi}_Q)}{k} \\ &\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2 z^2}{k\beta^2(1+z)^2} + O(n^{-2}), \end{aligned} \quad (5.41)$$

pois $\hat{\phi}_Q$ é independente de $\bar{Y}_0$ e $E(\bar{\varepsilon}_0) = 0$,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\phi}_Q \bar{\varepsilon}) &= E(\hat{\phi}_Q^2)E(\bar{\varepsilon}^2) - [E(\hat{\phi}_Q)E(\bar{\varepsilon})]^2 \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} [\text{Var}(\hat{\phi}_Q) + E^2(\hat{\phi}_Q)] = \frac{\sigma_\varepsilon^2 z^2}{n\beta^2(1+z)^2} + O(n^{-2}), \end{aligned} \quad (5.42)$$

pois $\hat{\phi}_Q$ é independente de $\bar{Y}$ e $E(\bar{\varepsilon}) = 0$ e

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\bar{X}, \beta \hat{\phi}_Q(U_0 - \bar{U})) &= E(\beta \bar{X} \hat{\phi}_Q(U_0 - \bar{U})) - E(\bar{X})E(\beta \hat{\phi}_Q(U_0 - \bar{U})) \\ &= \beta E(\hat{\phi}_Q)E(\bar{X}(U_0 - \bar{U})) - \beta E(\bar{X})E(\hat{\phi}_Q)E(U_0 - \bar{U}) \\ &= \beta E(\hat{\phi}_Q)E(\bar{X}(U_0 - \bar{U})), \end{aligned}$$

pois $\hat{\phi}_Q$ é independente de $\bar{X}$ e $\bar{U}$ e $E(U_0) = E(\bar{U}) = \mu_u$. Mas,

$$\begin{aligned} E(\bar{X}(U_0 - \bar{U})) &= E((\bar{U} + \bar{\delta})(U_0 - \bar{U})) = E(U_0\bar{U}) - E(\bar{U}^2) + E(U_0\bar{\delta}) \\ &\quad - E(\bar{U}\bar{\delta}) = \mu_u^2 - \left[\frac{\sigma_u^2}{n} - \mu_u^2 \right] = -\frac{\sigma_u^2}{n}. \end{aligned}$$

Então,

$$\text{Cov}(\bar{X}, \beta\hat{\phi}_Q(U_0 - \bar{U})) = -\beta E(\hat{\phi}_Q) \frac{\sigma_u^2}{n} = -\frac{\sigma_u^2 z}{n(1+z)} + O(n^{-2}). \quad (5.43)$$

Substituindo (5.40) – (5.43) e a $\text{Var}(\hat{\phi}_Q)$ dada no Lema 5.5, na expressão (5.39), e com algumas operações algébricas, chega-se à expressão da variância de $\hat{U}_{0IQ}$, que é

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\sigma_u^2 z^2}{(1+z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2(1+2z)}{n(1+z)} + \frac{\sigma_u^2}{n(1+z)} + \frac{\sigma_u^2 z}{(1+z)^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) \\ &\quad + \frac{1}{nk(1+z)} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_u^2}{1+z} \right) + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Com respeito ao erro quadrático médio, note que

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \text{Var}(U_0) + \text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) - 2\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0IQ}).$$

Mas,

$$\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0IQ}) = E(U_0 \hat{U}_{0IQ}) - E(U_0)E(\hat{U}_{0IQ}) = E(U_0 \hat{U}_{0IQ}) - \mu_u^2.$$

De (5.38), tem-se que

$$\begin{aligned} E(U_0 \hat{U}_{0IQ}) &= E(U_0(\bar{X} + \beta\hat{\phi}_Q(U_0 - \bar{U}) + \hat{\phi}_Q\bar{\varepsilon}_0 - \hat{\phi}_Q\bar{\varepsilon})) \\ &= \mu_u^2 + \beta E(\hat{\phi}_Q)E(U_0(U_0 - \bar{U})) + E(\hat{\phi}_Q)E(U_0)E(\bar{\varepsilon}_0) - E(\hat{\phi}_Q)E(U_0)E(\bar{\varepsilon}) \\ &= \mu_u^2 + \beta E(\hat{\phi}_Q)[E(U_0^2) - E(U_0\bar{U})] = \mu_u^2 + \beta E(\hat{\phi}_Q)[\text{Var}(U_0) + E^2(U_0) - \mu_u^2] \\ &= \mu_u^2 + \beta E(\hat{\phi}_Q)\text{Var}(U_0) = \mu_u^2 + \beta E(\hat{\phi}_Q)\sigma_u^2. \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.5,

$$E(U_0 \hat{U}_{0IQ}) = \mu_u^2 + \frac{\beta\sigma_u^2 z}{\beta(1+z)} + O(n^{-2}) = \mu_u^2 + \frac{\sigma_u^2 z}{(1+z)} + O(n^{-2}).$$

Logo,

$$\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0IQ}) = \frac{\sigma_u^2 z}{(1+z)} + O(n^{-2}).$$

Então,

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \sigma_u^2 + \text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) - \frac{2\sigma_u^2 z}{(1+z)} + O(n^{-2}).$$

Substituindo na expressão acima a $\text{Var}(\hat{U}_{0IQ})$, dada em (5.44), obtém-se o resultado desejado. $\square$

Teorema 5.6 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12), quando k é um inteiro positivo qualquer, segue que*

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\sigma_u^2}{(1+z)^2} ((k-1)z - 1)^2 + \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \frac{k^2 z}{1+z}\right) + \frac{\sigma_u^2}{n} \left(1 + \frac{k^2 z}{1+z} - \frac{2kz}{1+z}\right) \\ &\quad + \frac{k^2 z \sigma_u^2}{(1+z)^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right) + \frac{k^2}{nk(1+z)} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_u^2}{1+z}\right) + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde z é dado em (5.36).

Prova: Note que pode-se escrever $\hat{U}_{0IQ}$ dado em (5.1) como

$$\begin{aligned} \hat{U}_{0IQ} &= \bar{X} + k \frac{S_{xy}}{S_{yy}} (\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_Q - \hat{\beta}_Q \bar{X}) = \bar{X} + k \hat{\phi}_Q (\bar{Y}_0 - \bar{Y}) \\ &= \bar{X} + k \hat{\phi}_Q (\beta(U_0 - \bar{U}) + \bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Logo, $E(\hat{U}_{0IQ}) = E(\bar{X}) = \mu_u$, pela independência entre $\hat{\phi}_Q$ e $(\bar{U}, \bar{Y}, \bar{Y}_0)$ e pelas suposições $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_{0j}) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = n+1, \dots, n+k$.

Calculando a variância de (5.45), tem-se

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) &= \text{Var}(\bar{X}) + k^2 \beta^2 \text{Var}((U_0 - \bar{U}) \hat{\phi}_Q) + k^2 \text{Var}(\hat{\phi}_Q \bar{\varepsilon}_0) \\ &\quad + k^2 \text{Var}(\hat{\phi}_Q \bar{\varepsilon}) + 2\text{Cov}(\bar{X}, k \hat{\phi}_Q \beta(U_0 - \bar{U})), \end{aligned}$$

pois como mostrado no Teorema 5.5 as outras covariâncias são nulas. Substituindo (5.40)

– (5.43) na expressão acima, obtém-se

$$\text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) = \frac{\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2}{n} + k^2 \beta^2 \left[\sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\phi}_Q) + \frac{\sigma_u^2 z^2}{\beta^2 (1+z)^2} + \frac{\sigma_u^2 z^2}{n \beta^2 (1+z)^2} \right]$$

$$+k^2 \left[\frac{\sigma_\varepsilon^2 \text{Var}(\hat{\phi}_Q)}{k} + \frac{\sigma_\varepsilon^2 z^2}{k\beta^2(1+z)^2} \right] + k^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2 z^2}{n\beta^2(1+z)^2} - \frac{2k\sigma_u^2 z}{n(1+z)} + O(n^{-2}).$$

Substituindo a $\text{Var}(\hat{\phi}_Q)$ dada no Lema 5.5 na expressão acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0\ell Q}) &= \frac{k^2 z^2 \sigma_u^2}{(1+z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \frac{k^2 z}{1+z} \right) + \frac{\sigma_u^2}{n} \left(1 + \frac{k^2 z}{1+z} - \frac{2kz}{1+z} \right) \\ &\quad + \frac{k^2 z \sigma_u^2}{(1+z)^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) + \frac{k^2}{nk(1+z)} \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_u^2}{1+z} \right) + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Como no Teorema 5.5, tem-se

$$EQM(\hat{U}_{0\ell Q}) = \text{Var}(U_0) + \text{Var}(\hat{U}_{0\ell Q}) - 2\text{Cov}(\hat{U}_{0\ell Q}, U_0)$$

e

$$\text{Cov}(\hat{U}_{0\ell Q}, U_0) = E(U_0 \hat{U}_{0\ell Q}) - \mu_u^2.$$

De (5.45),

$$\begin{aligned} E(U_0 \hat{U}_{0\ell Q}) &= E(U_0(\bar{X} + k\beta\hat{\phi}_Q(U_0 - \bar{U}) + k\hat{\phi}_Q\bar{\varepsilon}_0 - k\hat{\phi}_Q\bar{\varepsilon})) \\ &= \mu_u^2 + k\beta E(\hat{\phi}_Q U_0(U_0 - \bar{U})) + kE(\hat{\phi}_Q)E(U_0)E(\bar{\varepsilon}_0) - kE(\hat{\phi}_Q)E(U_0)E(\bar{\varepsilon}) \\ &= \mu_u^2 + k\beta E(\hat{\phi}_Q) \text{Var}(U_0) = \mu_u^2 + \frac{k\beta\sigma_u^2 z}{\beta(1+z)} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0\ell Q}) = \frac{k\sigma_u^2 z}{1+z} + O(n^{-2}).$$

Então,

$$EQM(\hat{U}_{0\ell Q}) = \sigma_u^2 + \text{Var}(\hat{U}_{0\ell Q}) - \frac{2k\sigma_u^2 z}{1+z} + O(n^{-2}).$$

Substituindo a $\text{Var}(\hat{U}_{0\ell Q})$ dada em (5.46) na expressão acima, chega-se ao resultado desejado. $\square$

5.4 Comparações entre os previsores

Neste capítulo, os quatro procedimentos a serem comparados são:

Procedimento 1: Previsor clássico com máxima verossimilhança ($\hat{U}_{0CV\lambda}$, $\hat{U}_{0CV\sigma_\epsilon^2}$, $\hat{U}_{0CVk_u}$);

Procedimento 2: Previsor clássico com mínimos quadrados ($\hat{U}_{0CQ}$);

Procedimento 3: Previsor inverso com mínimos quadrados ($\hat{U}_{0IQ}$);

Procedimento 4: Previsor condicional com mínimos quadrados ($\hat{U}_{0\ell Q}$).

Vale ressaltar que apenas o procedimento 1 depende da suposição feita para tornar o modelo identificável.

Denotando-se $L = \sigma_u^2/\sigma_\delta^2$ como dado em (5.35), $T = \sigma_\epsilon^2/(\sigma_\delta^2\beta^2)$ e $z = \beta^2\sigma_u^2/\sigma_\epsilon^2 = L/T$ e reescrevendo os resultados dos Teoremas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6, obtém-se, até ordem n^{-1} , os seguintes resultados:

Procedimento 1:

$$EQM(\hat{U}_{0CV\lambda}) = \frac{\sigma_\delta^2}{n}(1+T) + \frac{\sigma_\delta^2 T}{k} + \frac{\sigma_\delta^2 T}{nkL^2} \left(L + \frac{T}{T+1} \right) + \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \frac{T(1+L)}{L} \right) \left[1 + \frac{3T^2}{k(1+T)L} \right], \quad (5.47)$$

$$EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\epsilon^2}) = \frac{\sigma_\delta^2}{nL}(2+T+2L(1+T)) + \frac{T\sigma_\delta^2}{k} + \frac{T\sigma_\delta^2}{nkL^2}(2+3T+3L(T-1)), \quad (5.48)$$

$$EQM(\hat{U}_{0CVk_u}) = \frac{\sigma_\delta^2}{n}(1+T) + \frac{\sigma_\delta^2 T}{k} + \frac{3\sigma_\delta^2 T}{nkL} + \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \frac{T(1+L)}{L} \left(1 + \frac{3T}{kL} \right) \right) \quad (5.49)$$

Procedimento 2:

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) = \frac{\sigma_\delta^2}{L} + \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \frac{1}{L} + \frac{T(1+L)^2}{L^2} \right) + \frac{\sigma_\delta^2 T(1+L)^2}{kL^2} + \frac{3T\sigma_\delta^2(1+L)^2(L+T(1+L))}{nkL^4} + \frac{\sigma_\delta^2(1+L)}{nL^2} \left(1 + \frac{3}{L} \right) (L+T(1+L)) \quad (5.50)$$

Procedimento 3:

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \frac{z}{1+z} + \frac{Tz}{1+z} + \frac{Tz^2}{(1+z)^2} \right) + \frac{\sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2}{nk(1+z)} \left(1 + \frac{Tz}{1+z} \right), \quad (5.51)$$

Procedimento 4:

$$EQM(\hat{U}_{0lQ}) = \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} (1 - (k-1)z)^2 + \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \frac{k^2 z}{1+z} + \frac{k^2 Tz^2}{(1+z)^2} \right) + \frac{k^2 \sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{n(1+z)} (1 + (k-1)^2 z) + \frac{k^2 \sigma_\delta^2}{nk(1+z)} \left(1 + \frac{Tz}{1+z} \right). \quad (5.52)$$

Note que, se $k = 1$, $EQM(\hat{U}_{0lQ}) = EQM(\hat{U}_{0IQ})$.

(i) Estudo dos vícios

Dos Teoremas 5.1 – 5.4, tem-se que

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0C}) &= E\left(\frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\right) = E\left(\bar{X} + \frac{\beta(U_0 - \bar{U}) + \bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}}\right) \\ &= E(\bar{X}) + \beta E(U_0 - \bar{U}) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right) + E\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}}\right) - E\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}}\right) = E(\bar{X}) = \mu_u, \end{aligned}$$

tanto para previsores clássicos com máxima verossimilhança como para o preditor clássico com mínimos quadrados. Dos Teoremas 5.5 e 5.6, tem-se

$$E(\hat{U}_{0IQ}) = E(\hat{\gamma}_Q + \hat{\phi}_Q \bar{Y}_0) = E(\bar{X} + \beta \hat{\phi}_Q (U_0 - \bar{U}) + \hat{\phi}_Q \bar{\varepsilon}_0 - \hat{\phi}_Q \bar{\varepsilon}) = E(\bar{X}) = \mu_u$$

e

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0lQ}) &= E\left(\bar{X} + \frac{k S_{xy}}{S_{yy}} (\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_Q - \hat{\beta}_Q \bar{X})\right) \\ &= E(\bar{X}) + k E\left(\frac{S_{xy}}{S_{yy}}\right) E(\beta(U_0 - \bar{U}) + \bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}) = E(\bar{X}) = \mu_u, \end{aligned}$$

de modo que todos os previsores de U_0 considerados são não viciados no sentido de terem a mesma esperança que U_0 .

(ii) Estudo dos erros quadráticos médios

Este estudo é feito baseado nas expressões (5.47) – (5.52). Note que

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CV\lambda}) &= \frac{\sigma_\delta^2 T}{k}, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) &= \frac{\sigma_\delta^2 T}{k}, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CVk_u}) &= \frac{\sigma_\delta^2 T}{k}, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{\sigma_\delta^2}{L} + \frac{\sigma_\delta^2 T(1+L)^2}{kL^2} = \frac{\sigma_\delta^2}{Tz} + \frac{\sigma_\delta^2(1+Tz)^2}{kTz^2}, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2} \\
 \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0\ell Q}) &= \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} (1 - (k-1)z)^2 + \frac{k^2 \sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, no limite,

$$EQM(\hat{U}_{0CV\lambda}) = EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) = EQM(\hat{U}_{0CVk_u}) = EQM(\hat{U}_{0CV}),$$

isto é, o erro quadrático médio do previsor clássico é independente da suposição feita para tornar o modelo identificável.

Além disso,

$$\begin{aligned}
 EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0CV}) &= \frac{\sigma_\delta^2}{L} + \frac{\sigma_\delta^2 T(1+L)^2}{kL^2} - \frac{\sigma_\delta^2 T}{k} \\
 &= \frac{\sigma_\delta^2}{L} + \frac{\sigma_\delta^2 T}{kL^2} (1+2L) > 0,
 \end{aligned}$$

ou seja, $EQM(\hat{U}_{0CV}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
 EQM(\hat{U}_{0IQ}) - EQM(\hat{U}_{0CV}) &= \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2} - \frac{\sigma_\delta^2 T}{k} \\
 &= \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} + \frac{\sigma_\delta^2 T}{k(1+z)^2} (-1-2z) = \frac{\sigma_\delta^2 T}{k(1+z)^2} (z(k-2) - 1),
 \end{aligned}$$

de modo que, se $k > 2$ e $z > \frac{1}{k-2}$, $EQM(\hat{U}_{0CV}) < EQM(\hat{U}_{0IQ})$, se $k \leq 2$, tem-se

$EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CV})$. Agora,

$$EQM(\hat{U}_{0\ell Q}) - EQM(\hat{U}_{0CV}) = \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} (1 - (k-1)z)^2 + \frac{k^2 \sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2} - \frac{\sigma_\delta^2 T}{k}$$

$$= \frac{\sigma_\delta^2 T z}{(1+z)^2} (1 - (k-1)z)^2 + \frac{\sigma_\delta^2 T}{k} \left(\frac{k^2 z^2}{(1+z)^2} - 1 \right),$$

logo, se $k > 1 + \frac{1}{z}$, tem-se que $EQM(\hat{U}_{0CV}) < EQM(\hat{U}_{0\ell Q})$. Além disso,

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\sigma_\delta^2}{Tz} + \frac{\sigma_\delta^2(1+Tz)^2}{kTz^2} - \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} - \frac{\sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2} \\ &= \sigma_\delta^2 \left(\frac{1}{Tz} - \frac{Tz}{(1+z)^2} \right) + \frac{\sigma_\delta^2}{kTz^2(1+z)^2} ((1+2Tz)(1+z)^2 + T^2 z^2(1+2z)), \end{aligned}$$

então se $0 < T < 1$, ou seja, se $\sigma_\varepsilon^2 < \beta^2 \sigma_\delta^2$, segue que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Agora,

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0\ell Q}) &= \frac{\sigma_\delta^2}{Tz} + \frac{\sigma_\delta^2(1+Tz)^2}{kTz^2} - \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} (1 - (k-1)z)^2 \\ &\quad - \frac{k^2 \sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2} \\ &= \frac{\sigma_\delta^2}{Tz(1+z)^2} (1 + 2z + z^2(1 - kT^2z - T^2(1 - (k-1)z)^2)) + \frac{\sigma_\delta^2(1+2Tz)}{kTz^2}, \end{aligned}$$

se $0 < T < \sqrt{1/(kz + (1 - (k-1)z)^2)}$, tem-se que $EQM(\hat{U}_{0\ell Q}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Por fim,

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0\ell Q}) - EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} (1 - (k-1)z)^2 + \frac{k^2 \sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2} \\ &\quad - \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} - \frac{\sigma_\delta^2 Tz^2}{k(1+z)^2} = \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{k(1+z)^2} [k(1 - (k-1)z)^2 + k^2 z - k - z], \end{aligned}$$

se $z > \frac{1}{k}$, segue que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0\ell Q})$.

Estes resultados mostram que, quando n é grande, o previsor clássico de U_0 combinado com o estimador de máxima verossimilhança de α e de β é melhor que o previsor clássico combinado com os estimadores de mínimos quadrados no sentido de ter um erro quadrático médio menor. As outras comparações dependem dos parâmetros do modelo. Quando n e k tendem ao infinito, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CV}) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{\sigma_\delta^2}{Tz}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} \\ \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0\ell Q}) &= \infty, \end{aligned}$$

de modo que, no limite,

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \frac{\sigma_\delta^2}{Tz} - \frac{\sigma_\delta^2 Tz}{(1+z)^2} = \frac{\sigma_\delta^2}{Tz(1+z)^2} [1 + 2z + z^2(1 - T^2)],$$

logo se $0 < T < 1$, ou $\sigma_\varepsilon^2 < \sigma_\delta^2 \beta^2$, segue que $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$.

Portanto, o previsor clássico com máxima verossimilhança é consistente, enquanto que o previsor condicional com mínimos quadrados tem um erro quadrático médio infinito. A comparação entre o previsor inverso e o clássico combinados com os estimadores de mínimos quadrados irá depender dos valores de β , σ_ε^2 e σ_δ^2 .

Para n e k finitos, as comparações entre os erros quadráticos médios são baseadas nas expressões (5.47) – (5.52). Com bastante álgebra, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CV\lambda}) &< EQM(\hat{U}_{0CQ}), \\ EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) &< EQM(\hat{U}_{0CQ}) \quad \text{e} \\ EQM(\hat{U}_{0CVk_u}) &< EQM(\hat{U}_{0CQ}), \end{aligned}$$

isto é, o erro quadrático médio do previsor clássico combinado com os estimadores de máxima verossimilhança é menor que o do previsor clássico combinado com os estimadores de mínimos quadrados, independente da suposição do modelo. Uma outra comparação analítica possível de ser obtida após algumas manipulações algébricas é que se $z > \frac{(n-k)}{(n+1)k}$, $EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0\ell Q})$.

As comparações entre os procedimentos 1 e 3, e 1 e 4, e entre os procedimentos 2 e 3, e 2 e 4 são muito complicados, de modo que valores numéricos para os erros quadráticos médios foram calculados usando o conjunto de valores dos parâmetros dados abaixo:

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= 0.5, 10.0, 100.0, & \beta &= 0.5, 1.0, 5.0, \\ \sigma_\varepsilon^2 &= 0.1, 1.0, 10.0, & n &= 10, 15, 30, 100, \\ L &= 1, 10, 100, & k &= 1, 2, 5, 10, 15, \end{aligned}$$

com a restrição $k \leq n$.

Os resultados computacionais das comparações entre $\hat{U}_{0CV\lambda}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ são apresentados nas Tabelas 5.1.a, 5.1.b e 5.1.c, das comparações entre $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ são dados nas

Tabela 5.1.a: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre $\hat{U}_{0CV\lambda}$ e $\hat{U}_{0IQ}$, para $\beta = 0.5$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ϵ^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
0.5	10	1																												
		2																												
		5													•			•									•			•
		10													•			•									•		•	•
	15	1																												
		2																												
		5													•			•							•		•		•	•
		10													•			•						•		•		•	•	•
		15													•			•						•		•		•	•	•
	30	1																												
		2																												
		5													•			•						•		•		•	•	•
		10													•			•						•		•		•	•	•
		15													•			•						•		•		•	•	•
	100	1																												
		2																												
		5													•			•						•		•		•	•	•
		10													•			•						•		•		•	•	•
		15													•			•						•		•		•	•	•

Nota: • indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CV\lambda})$.

Tabela 5.1.b: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre $\hat{U}_{0CV\lambda}$ e $\hat{U}_{0IQ}$, para $\beta = 1.0$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ϵ^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
1.0	10	1																												
		2																												
		5		.	.									.		.									.			.		.
		10		.	.									.		.	.		.	.					.		.	.	.	.
	15	1																												
		2																												
		5		.	.									.		.	.								.		.	.	.	.
		10		.	.									.		.	.		.	.					.		.	.	.	.
		15		.	.		.	.						.		.	.		.	.					.		.	.	.	.
	30	1																												
		2																												
		5		.	.									.		.	.		.	.					.		.	.	.	.
		10		.	.	.	.	.	.					.	.	.	.	.	.	.	.			.	.	.	.	.	.	.
		15		.	.	.	.	.	.					.	.	.	.	.	.	.	.			.	.	.	.	.	.	.
	100	1																												
		2																												
		5		.	.	.		.	.					.	.	.	.	.	.	.	.			.	.	.	.	.	.	.
		10		.	.	.	.	.	.					.	.	.	.	.	.	.	.			.	.	.	.	.	.	.
		15		.	.	.	.	.	.					.	.	.	.	.	.	.	.			.	.	.	.	.	.	.

Nota: . indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CV\lambda})$.

Tabela 5.1.c: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre $\hat{U}_{0CV\lambda}$ e $\hat{U}_{0IQ}$, para $\beta = 5.0$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ε^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
5.0	10	1																												
		2																												
		5				.			.												.									
		10				.		.	.		.	.									.									
	15	1																												
		2																												
		5				.		.	.			.			.		.	.			.								.	.
		10				.		.	.		.	.			.		.	.			.								.	.
		15				.		.	.	.	.	.			.		.	.			.								.	.
	30	1																												
		2																												
		5				.		.	.		.	.			.		.	.			.								.	.
		10				.		.	.	.	.	.			.		.	.			.								.	.
		15				.		.	.	.	.	.			.		.	.			.								.	.
	100	1																												
		2																												
		5			.	.	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	.				.	.	.	.	.	.
		10			.	.	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	.				.	.	.	.	.	.
		15			.	.	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	.				.	.	.	.	.	.

Nota: . indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CV\lambda})$.

Tabela 5.2.a: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre $\hat{U}_{0CV\sigma_g^2}$ e $\hat{U}_{0IQ}$, para $\beta = 0.5$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ε^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
0.5	10	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
	15	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												
	30	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												
	100	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												

Nota: . indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_g^2})$.

Tabela 5.2.b: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre $\hat{U}_{0CV\sigma_\beta^2}$ e $\hat{U}_{0IQ}$, para $\beta = 1.0$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ϵ^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
1.0	10	1																												
		2																												
		5				.										.													.	
		10			.	.								.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.
	15	1																												
		2																												
		5			.	.								.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.
		10			.	.								.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.
		15			.	.	.	.						.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.
	30	1																												
		2																												
		5			.	.								.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.
		10			.	.	.	.						.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.
		15			.	.	.	.	.					.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.
	100	1																												
		2																												
		5			.	.	.	.						.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.
		10			.	.	.	.	.					.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.
		15			.	.	.	.	.					.		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.

Nota: . indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\beta^2})$.

Tabela 5.2.c: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0IQ}$, para $\beta = 5.0$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ε^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
5.0	10	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
	15	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												
	30	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												
	100	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												

Nota: • indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2})$.

Tabela 5.3.a: Resultados das avaliações numéricas da comparação entre $\hat{U}_{0CVk_u}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ para $\beta = 0.5$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ϵ^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
0.5	10	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
	15	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												
	30	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												
	100	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												

Nota: • indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CVk_u})$.

Tabela 5.3.b: Resultados das avaliações numéricas da comparação entre $\hat{U}_{0CVk_u}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ para $\beta = 1.0$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ϵ^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
1.0	10	1																												
		2																												
		5			.									.		.									.		.		.	
		10		.	.									.		.	.		.	.				.		.		.	.	
	15	1																												
		2																												
		5		.	.									.		.	.								.		.	.	.	
		10		.	.									.		.	.	.	.	.				.		.	.	.	.	
		15		.	.		.	.						.		.	.	.	.	.				.		.	.	.	.	
	30	1																												
		2																												
		5		.	.									.		.	.	.	.	.				.		.	.	.	.	
		10		.	.	.		.	.					.		.	.	.	.	.	.			.		.	.	.	.	
		15		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	
	100	1																												
		2																												
		5		.	.	.		.	.					.		.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	
		10		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	
		15		.	.	.	.	.	.					.		.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.	

Nota: . indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_3^2})$.

Tabela 5.3.c: Resultados das avaliações numéricas da comparação entre $\hat{U}_{0CVk_u}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ para $\beta = 5.0$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ϵ^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
5.0	10	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
	15	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												
	30	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												
	100	1																												
		2																												
		5																												
		10																												
		15																												

Nota: . indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_s^2})$.

Tabelas 5.2.a, 5.2.b e 5.2.c e as Tabelas 5.3.a, 5.3.b e 5.3.c apresentam comparações entre $\hat{U}_{0CVk_u}$ e $\hat{U}_{0IQ}$. Em todas essas comparações observa-se que o previsor inverso tem um comportamento melhor quando σ_u^2 e β são pequenos e σ_ε^2 é grande ou quando σ_u^2 e β são grandes.

Na comparação entre os procedimentos $\hat{U}_{0CV}$ e $\hat{U}_{0IQ}$, as avaliações numéricas mostram que o comportamento do procedimento 1, em geral, independe da suposição feita para tornar o modelo identificável, como pode ser visto na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre $\hat{U}_{0CV}$ e $\hat{U}_{0IQ}$

σ_u^2			0.5									10.0									100.0								
σ_ε^2			0.1			1.0			10.0			0.1			1.0			10.0			0.1			1.0			10.0		
β	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
0.5	2					•	•	•	•	•	•							•	•	•									
	5					•	•	•	•	•	•							•	•	•									
	10					•	•	•	•	•	•																		
	15								•	•	•																		
1.0	2					•	•	•	•	•	•							•	•	•									
	5								•	•	•																		
	10								•	•	•																		
	15								•	•	•																		
5.0	2																												
	5																												
	10																												
	15																												

Nota: • indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0CV}) > EQM(\hat{U}_{0IQ})$.

Nas seguintes situações o comportamento foi diferente do descrito pela tabela acima:

- (1) Quando $n = 100$, $\sigma_u^2 = 0.5$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1.0$, $\beta = 0.5$, $k = 10$, tem-se que $EQM(\hat{U}_{0CV}) < EQM(\hat{U}_{0IQ})$.
- (2) Para σ_δ^2 conhecido, $n = 10$, $k = 2$, $\sigma_u^2 = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\sigma_\varepsilon^2 = 0.1$, $L = 1$, tem-se $EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) > EQM(\hat{U}_{0IQ})$, e para $n = 10$, $k = 2$, $\sigma_u^2 = 0.5$, $\beta = 5.0$, $\sigma_\varepsilon^2 = 10.0$, $L = 1$, tem-se $EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) > EQM(\hat{U}_{0IQ})$.

Tabela 5.5.a: Resultados das avaliações numéricas da comparação entre $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ para $\beta = 0.5$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ϵ^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
0.5	10	1																												
		2																												
		5																												
		10				•									•			•								•			•	
		15				•									•			•								•			•	
	15	1																												
		2																												
		5													•			•								•			•	
		10				•									•			•								•			•	
		15				•	•								•		•	•								•		•	•	
	30	1																												
		2																												
		5				•									•			•								•			•	
		10				•	•								•		•	•								•		•	•	
		15				•	•								•		•	•			•					•		•	•	
	100	1																												
		2																												
		5				•	•								•		•	•								•		•	•	
		10				•	•								•		•	•			•					•		•	•	
		15				•	•								•		•	•		•						•		•	•	

Nota: • indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CQ})$.

Tabela 5.5.b: Resultados das avaliações numéricas da comparação entre $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ para $\beta = 1.0$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ε^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
1.0	10	1																												
		2																												
		5				•												•												•
		10				•												•			•									•
		15				•												•			•									•
	15	1																												
		2																												
		5				•												•												•
		10				•												•			•									•
		15				•			•									•		•	•									•
	30	1																												
		2																												
		5				•												•			•									•
		10				•		•	•									•		•	•									•
		15				•		•	•									•		•	•									•
	100	1																												
		2																												
		5				•			•									•		•	•									•
		10			•	•		•	•									•		•	•									•
		15			•	•		•	•									•		•	•									•

Nota: • indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CQ})$.

Tabela 5.5.c: Resultados das avaliações numéricas da comparação entre $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ para $\beta = 5.0$.

σ_u^2				0.5									10.0									100								
σ_ϵ^2				0.1			1.0			10			0.1			1.0			10			0.1			1.0			10		
β	n	k	L	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
5.0	10	1																												
		2																												
		5							•												•									
		10							•			•									•									
		15							•			•									•									
	15	1																												
		2																												
		5							•												•									
		10							•			•									•									
		15							•		•	•									•									
	30	1																												
		2																												
		5							•			•									•									
		10							•		•	•									•									
		15							•		•	•									•									
	100	1																												
		2																												
		5							•		•	•									•									
		10							•		•	•									•									
		15							•		•	•									•									

Nota: • indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0IQ}) > EQM(\hat{U}_{0CQ})$.

Uma observação importante é que, em geral, os resultados das avaliações numéricas independem dos valores de n . Nessas comparações, observa-se que o previsor condicional tem melhor desempenho que o previsor clássico quando σ_u^2 e β são pequenos e σ_ε^2 é grande.

A comparação entre os procedimentos 2 e 3 é apresentada na Tabela 5.5, onde observa-se que em geral o previsor inverso é melhor que o previsor clássico com mínimos quadrados. Quando L é grande, o previsor clássico é em geral melhor.

A Tabela 5.6 apresenta a comparação entre os procedimentos 2 e 4. Essa tabela mostra que o previsor condicional tem melhor desempenho que o previsor clássico com mínimos quadrados quando σ_u^2 e β são pequenos e L é pequeno. É importante ressaltar que essas comparações também independem dos valores de n . Vale ressaltar que essa tabela, assim como na Tabela 5.4, não apresenta a comparação quando $k = 1$, já que, nessa situação, o previsor condicional é igual ao previsor inverso.

Tabela 5.6: Resultados das avaliações numéricas na comparação entre $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0\ell Q}$

$\frac{\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2}$			0.5									10.0									100.0								
β			0.1			1.0			10.0			0.1			1.0			10.0			0.1			1.0			10.0		
k	L		1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
0.5	2		•	•		•	•	•	•	•	•	•			•			•	•	•	•			•			•		
	5					•	•	•	•	•	•							•	•	•									
	10					•	•	•	•	•	•							•											
	15					•			•	•	•																		
1.0	2		•			•	•	•	•	•	•	•			•			•	•	•	•			•			•		
	5					•			•	•	•																		
	10								•	•	•																		
	15								•	•	•																		
5.0	2		•			•			•	•		•			•			•			•			•			•		
	5																												
	10																												
	15																												

Nota: • indica situações onde $EQM(\hat{U}_{0CQ}) > EQM(\hat{U}_{0\ell Q})$.

Para $\sigma_u^2 = 0.5$, $n = 100$ e

- (1) $\sigma_\varepsilon^2 = 0.1$, $L = 10$, $\beta = 0.5$ e $k = 2$;
- (2) $\sigma_\varepsilon^2 = 1.0$, $L = 100$, $\beta = 0.5$ e $k = 10$;

(3) $\sigma_\varepsilon^2 = 10.0$, $L = 10$, $\beta = 5.0$ e $k = 2$, tem-se

$$EQM(\hat{U}_{0\ell Q}) > EQM(\hat{U}_{0CQ}),$$

o que mostra um comportamento diferente da tabela acima.

5.5 Exemplos

Neste capítulo é apresentado um exemplo para cada suposição que torna o modelo identificável. Em cada exemplo, os pares $\{(X_j, Y_j), j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ serão usados como observações prévias obtidas no experimento de calibração, X_i será tratado como o valor desconhecido de U_0 e Y_i será usado como a observação de Y_0 . Denota-se por $\hat{U}_{0i}$ o previsor de X_i . Esse procedimento é repetido para $i = 1, \dots, n$. Isto torna factível uma comparação entre os previsores e o valor observado (verdadeiro) de U_0 . Uma medida da performance de cada previsor utilizada por Lwin e Maritz (1980) pode ser obtida pelo cálculo da média dos desvios quadráticos,

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \hat{U}_{0i})^2}{n}. \quad (5.53)$$

Os correspondentes valores numéricos de (5.53) são apresentados na última linha das tabelas dadas abaixo.

Exemplo 5.1 Os dados utilizados nesse exemplo, considerados em Fuller (1987), referem-se a índices baseados em contagens do número de faisões registrados por observadores treinados durante o verão (Y) e durante a primavera (X), em Iowa, num período de quinze anos consecutivos. O valor de λ é considerado conhecido e igual a $1/6$, isto é, considera-se que a variância do erro associado à contagem da primavera é, aproximadamente, seis vezes a variância do erro associado à contagem do verão. Esses dados são reproduzidos na Tabela 5.7 e satisfazem o modelo estrutural.

Tabela 5.7: Número de faisões em Iowa no verão (Y) e na primavera (X).

i	Y_i	X_i	$\hat{U}_{0CV\lambda}$	$\hat{U}_{0CQ}$	$\hat{U}_{0IQ}$
1	8.0	9.0	9.17	9.02	9.21
2	6.0	6.6	6.44	5.59	6.68
3	9.8	12.3	11.45	11.71	11.38
4	10.8	11.9	13.19	13.66	13.03
5	9.7	11.9	11.36	11.60	11.30
6	9.3	12.0	10.78	10.91	10.75
7	9.2	9.6	10.85	10.95	10.82
8	6.9	7.5	7.74	7.28	7.87
9	8.1	10.9	9.16	9.08	9.19
10	8.7	10.4	10.07	10.08	10.07
11	8.7	10.2	10.08	10.09	10.08
12	7.4	7.4	8.51	8.24	8.59
13	10.1	11.0	12.11	12.41	12.02
14	10.0	11.8	11.82	12.15	11.73
15	7.3	8.2	8.23	7.90	8.33
Média dos desvios quadráticos			0.76	0.93	0.75

Em termos do critério (5.53), o previsor clássico com máxima verossimilhança e o previsor inverso com mínimos quadrados são equivalentes e melhores que o previsor clássico com mínimos quadrados.

Exemplo 5.2 Os dados usados aqui, apresentados em Fuller (1987), referem-se à produção de trigo (Y) e à determinação de nitrogênio disponível no solo (X), coletados em 11 terrenos em Iowa. As estimativas do nitrogênio no solo contém erros de medida, sendo a variância desse erro estimada por $\sigma_\delta^2 = 57$. Para propósito desse exemplo, é assumido que σ_δ^2 é conhecido e que o modelo estrutural é satisfeito.

Tabela 5.8: Produção de trigo (Y) e nitrogênio no solo (X) em terrenos de Iowa.

i	Y_i	X_i	$\hat{U}_{0CV\sigma_i^2}$	$\hat{U}_{0CQ}$	$\hat{U}_{0IQ}$
1	86	70	40.70	33.80	52.79
2	115	97	129.60	149.63	87.37
3	90	53	53.02	47.86	63.31
4	86	64	39.58	32.14	54.69
5	110	95	103.55	114.59	82.18
6	91	64	54.08	50.04	62.74
7	99	50	75.85	76.75	74.81
8	96	70	66.92	66.04	68.78
9	99	94	71.46	72.42	70.26
10	104	69	87.60	91.48	80.00
11	96	51	69.37	68.47	70.74
Média dos desvios quadráticos			412.43	700.75	221.71

Nesse exemplo, o predictor inverso é o melhor e o predictor clássico com máxima verossimilhança fica em segundo lugar, em termos do critério definido em (5.53).

Exemplo 5.3 Suponha que os dados apresentados na Tabela 5.9 (Fuller, 1987) representam uma amostra do modelo estrutural com $k_u = 0.85$.

Tabela 5.9: Dados dos doze pares (Y_i, X_i) com $k_u = 0.85$.

i	Y_i	X_i	$\hat{U}_{0CVk_u}$	$\hat{U}_{0CQ}$	$\hat{U}_{0IQ}$
1	3.6	3.9	3.53	3.40	3.66
2	2.5	2.9	2.10	1.71	2.66
3	3.9	4.4	3.84	3.79	3.91
4	5.0	5.9	4.92	5.08	4.76
5	4.9	5.4	4.92	5.06	4.74
6	4.5	4.2	4.57	4.64	4.50
7	2.9	2.3	2.92	2.66	3.29
8	5.2	4.5	5.41	5.63	5.20
9	2.7	3.5	2.37	2.04	2.70
10	5.8	6.0	6.06	6.42	5.45
11	4.1	3.3	4.19	4.17	4.20
12	5.1	4.1	5.29	5.48	5.16
Média dos desvios quadráticos			0.59	0.78	0.54

Como no Exemplo 5.1, o previsor clássico com máxima verossimilhança e o previsor inverso com mínimos quadrados são praticamente equivalentes e melhores que o previsor clássico com mínimos quadrados, em termos do critério adotado em (5.53).

Vale ressaltar que para esses exemplos tem-se $k = 1$. Logo, como já visto na Seção 5.1, o previsor condicional coincide com o previsor inverso.

5.6 O uso de um valor incorreto na identificação do modelo

Esta seção será subdividida nas três suposições que tornam o modelo estrutural identificável. Suponha que no cálculo do previsor clássico com máxima verossimilhança apresentado na Seção 5.2 o investigador use um valor incorreto na suposição para tornar o modelo identificável. O objetivo desta seção é estudar o efeito de adotar esse valor errado no vício e no erro quadrático médio do previsor clássico com máxima verossimilhança.

5.6.1 Razão das variâncias conhecida

Suponha que o investigador use um valor incorreto (λ^*) da razão das variâncias para calcular o previsor clássico com máxima verossimilhança, isto é, o seguinte previsor é usado

$$\hat{U}_{0CV\lambda}^* = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_V^*}{\hat{\beta}_V^*},$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_V^* &= \bar{Y} - \hat{\beta}_V^* \bar{X}, \\ \hat{\beta}_V^* &= S(\lambda^*) + \sqrt{\lambda^* + S^2(\lambda^*)} \\ \text{e} \quad S(\lambda^*) &= \frac{S_{yy} - \lambda^* S_{xx}}{2S_{xy}}, \end{aligned}$$

como apresentado no Capítulo 3.

O lema apresentado a seguir será utilizado na prova do resultado principal.

Lema 5.6 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12), com a suposição de λ ser conhecido, mas substituído por λ^* (errado), segue que*

$$E(\hat{\beta}_V^*) = \frac{F}{F-1} h_\lambda(\lambda^*) + \frac{(\lambda/L^2 + (\lambda + \beta^2)/L)}{n\beta^2} \left\{ \frac{\lambda^*(F-1)}{2h_\lambda(\lambda^*)} + Fh_\lambda(\lambda^*) \right\} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_V^*) = \frac{F^2}{n\beta^2} (\lambda^* + h_\lambda^2(\lambda^*)) ((\lambda + \beta^2)/L + \lambda/L^2) + O(n^{-2}),$$

onde

$$\begin{aligned} h_\lambda(\lambda^*) &= \frac{(\beta^2 - \lambda^*)}{2\beta} + \frac{(\lambda - \lambda^*)}{2\beta L}, \\ F &= 1 + \frac{h_\lambda(\lambda^*)}{\sqrt{\lambda^* + h_\lambda^2(\lambda^*)}}, \text{ como dado no Lema 3.4,} \\ L &= \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\delta^2}, \text{ como dado em (5.35).} \end{aligned}$$

Prova: A expansão em série de Taylor de $\hat{\beta}_V^*$ até ordem n^{-2} , em torno do ponto $(E(S_{xx}), E(S_{xy}), E(S_{yy}))$ é

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_V^* &= h_\lambda(\lambda^*) + \sqrt{\lambda^* + h_\lambda^2(\lambda^*)} + \left(-\frac{\lambda^* F}{2\beta\sigma_u^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx})) \\ &+ \left(-\frac{h_\lambda(\lambda^*) F}{\beta\sigma_u^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy})) + \left(\frac{F}{2\beta\sigma_u^2} + O(n^{-1}) \right) (S_{yy} - E(S_{yy})) \\ &+ \left(\frac{\lambda^{*3}}{8\beta^2\sigma_u^4[\lambda^* + h_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))^2 \\ &+ \left(\frac{h_\lambda(\lambda^*) F}{\beta^2\sigma_u^4} + \frac{\lambda^* h_\lambda^2(\lambda^*)}{2\beta^2\sigma_u^4[\lambda^* + h_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy}))^2 \\ &+ \left(\frac{\lambda^*}{8\beta^2\sigma_u^4[\lambda^* + h_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} + O(n^{-1}) \right) (S_{yy} - E(S_{yy}))^2 \\ &+ \left(\frac{\lambda^{*2} h_\lambda(\lambda^*)}{2\beta^2\sigma_u^4[\lambda^* + h_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} + \frac{\lambda^* F}{2\beta^2\sigma_u^4} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))(S_{xy} - E(S_{xy})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{\lambda^{*2}}{4\beta^2\sigma_u^4[\lambda^* + h_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} + O(n^{-1}) \right) (S_{xx} - E(S_{xx}))(S_{yy} - E(S_{yy})) \\
& + \left(-\frac{F}{2\beta^2\sigma_u^4} - \frac{\lambda^*h_\lambda(\lambda^*)}{2\beta^2\sigma_u^4[\lambda^* + h_\lambda^2(\lambda^*)]^{3/2}} + O(n^{-1}) \right) (S_{xy} - E(S_{xy}))(S_{yy} - E(S_{yy})) \\
& + O_p(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Calculando a esperança e a variância dessa expressão, obtém-se

$$\begin{aligned}
E(\hat{\beta}_V^*) &= \frac{F}{F-1}h_\lambda(\lambda^*) + \frac{\lambda^{*3}(F-1)^3}{8\beta^2\sigma_u^4h_\lambda^3(\lambda^*)}\text{Var}(S_{xx}) + \frac{\lambda^*(F-1)^3}{8\beta^2\sigma_u^4h_\lambda^3(\lambda^*)}\text{Var}(S_{yy}) \\
&+ \left(\frac{h_\lambda(\lambda^*)F}{\beta^2\sigma_u^4} + \frac{\lambda^*(F-1)^3}{2\beta^2\sigma_u^4h_\lambda(\lambda^*)} \right) \text{Var}(S_{xy}) - \frac{\lambda^{*2}(F-1)^3}{4\beta^2\sigma_u^4h_\lambda^3(\lambda^*)}\text{Cov}(S_{xx}, S_{yy}) \\
&+ \left(\frac{\lambda^*F}{2\beta^2\sigma_u^4} + \frac{\lambda^{*2}(F-1)^3}{2\beta^2\sigma_u^4h_\lambda^2(\lambda^*)} \right) \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) \\
&- \left(\frac{F}{2\beta^2\sigma_u^4} + \frac{\lambda^*(F-1)^3}{2\beta^2\sigma_u^4h_\lambda^2(\lambda^*)} \right) \text{Cov}(S_{yy}, S_{xy}) + O(n^{-2})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{\beta}_V^*) &= \frac{\lambda^{*2}F^2}{4\beta^2\sigma_u^4}\text{Var}(S_{xx}) + \frac{h_\lambda^2(\lambda^*)F^2}{\beta^2\sigma_u^4}\text{Var}(S_{xy}) + \frac{F^2}{4\beta^2\sigma_u^4}\text{Var}(S_{yy}) \\
&+ \frac{2\lambda^*h_\lambda(\lambda^*)F^2}{2\beta^2\sigma_u^4}\text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) - \frac{2\lambda^*F^2}{4\beta^2\sigma_u^4}\text{Cov}(S_{xx}, S_{yy}) \\
&- \frac{2h_\lambda(\lambda^*)F^2}{2\beta^2\sigma_u^4}\text{Cov}(S_{xy}, S_{yy}) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Substituindo (5.11) – (5.16) nas expressões acima e após algumas manipulações algébricas, completa-se a prova. $\square$

Teorema 5.7 *Sob o modelo especificado por (2.8), (2.11) e (2.12), com as suposições do Lema 5.6 e assumindo que k é um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0CV\lambda}^*) &= \sigma_u^2 \left(1 - \beta \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right) \right)^2 + \frac{\sigma_\delta^2}{n} \left(1 + \lambda \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 \right) \\
&+ \frac{\sigma_u^2}{n} \left(1 - \beta \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right) \right)^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 \\
&+ \frac{2\sigma_\delta^2(\lambda/L + \lambda + \beta^2)}{n\beta} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 \left[\frac{\lambda^*}{2} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right) + h_\lambda(\lambda^*) \right] \\
&* \left[F - \frac{(F-1)\beta}{h_\lambda(\lambda^*)} \left(1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2\sigma_u^2} \right) \right] + \frac{\sigma_\delta^2(\lambda/L + \lambda + \beta^2)}{n\beta} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right) \\
&* \left[3\beta \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right) \left(1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2\sigma_u^2} \right) - 2 \right] + O(n^{-2}),
\end{aligned}$$

onde $h_\lambda(\lambda^*)$ e F estão definidos no Lema 5.6 e L é dado em (5.35).

Prova: Utilizando (5.17), pode-se obter

$$\begin{aligned}
E(\hat{U}_{0CV\lambda}^*) &= E(\bar{X}) + \beta E(U_0 - \bar{U}) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) + E(\bar{\varepsilon}_0) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) - E(\bar{\varepsilon}) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) = E(\bar{X}) = \mu_u, \\
&\text{pela independência entre } \hat{\beta}_V^* \text{ e } (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Y}_0) \text{ e pelas suposições } E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_{0j}) = 0, i = \\
&1, \dots, n, j = n+1, \dots, n+k.
\end{aligned}$$

Para calcular a variância de $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$, retome a expressão (5.19). Pela mesma justificativa dada no Teorema 5.1, tem-se que $\text{Cov}(\bar{X}, \beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V^*)$ não é nula, enquanto que as outras covariâncias são nulas. Logo, a variância desse previsor é dada por

$$\text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda}^*) = \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2 \text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V^*}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V^*}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V^*}\right) + 2\text{Cov}\left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V^*}\right).$$

Pelas expressões (5.20), (5.21), procedendo do modo equivalente aos resultados (5.22) – (5.29) e utilizando o Lema 5.6, obtém-se

$$\text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V^*}\right) = \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n}\right) \left(\frac{1}{E^2(\hat{\beta}_V^*)} + \frac{3\text{Var}(\hat{\beta}_V^*)}{E^4(\hat{\beta}_V^*)}\right) + O(n^{-2})$$

$$= \left(\sigma_u^2 + \frac{\sigma_u^2}{n} \right) \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 - \frac{2\sigma_\delta^2(\lambda/L + \lambda + \beta^2)}{n\beta^2} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^3$$

$$* \left\{ \frac{\lambda^*(F-1)}{2h_\lambda(\lambda^*)} + Fh_\lambda(\lambda^*) \right\} + 3\sigma_u^2 \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V^*} \right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{E^2(\hat{\beta}_V^*)} + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_V^*)}{E^4(\hat{\beta}_V^*)} + O(n^{-2})$$

$$= \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 - \frac{2\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)(\lambda/L + \lambda + \beta^2)}{n\beta^2 L} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^3$$

$$* \left\{ \frac{\lambda^*(F-1)}{2h_\lambda(\lambda^*)} + Fh_\lambda(\lambda^*) \right\} + 3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)\text{Var}(\hat{\beta}_V^*) \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^4$$

$$+ O(n^{-2}),$$

$$\text{Var} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V^*} \right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{E^2(\hat{\beta}_V^*)} + O(n^{-2}) = \text{Var}(\bar{\varepsilon}) \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Cov} \left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V^*} \right) = -\frac{\beta\sigma_u^2}{n} E \left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*} \right) = -\frac{\beta\sigma_u^2}{n} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right) + O(n^{-2}).$$

Portanto,

$$\text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda}^*) = \frac{\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2}{n} + \beta^2\sigma_u^2 \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$- \frac{2\beta^2\sigma_\delta^2(\lambda/L + \lambda + \beta^2)}{n\beta^2} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^3 \left\{ \frac{\lambda^*(F-1)}{2h_\lambda(\lambda^*)} + Fh_\lambda(\lambda^*) \right\}$$

$$+ 3\beta^2\sigma_u^2 \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\sigma_\varepsilon^2}{nk\beta^2L}(\lambda/L + \lambda + \beta^2) \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^3 \left\{ \frac{\lambda^*(F-1)}{2h_\lambda(\lambda^*)} + Fh_\lambda(\lambda^*) \right\} \\
& + \frac{3\sigma_\varepsilon^2}{k} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 - \frac{2\beta\sigma_u^2}{n} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right) \\
& + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

De (5.17), (5.20), procedendo de modo equivalente aos resultados (5.22) e (5.24), e utilizando o Lema 5.6, obtém-se

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\hat{U}_{0CV\lambda}^*, U_0) &= \beta\sigma_u^2 E \left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*} \right) = \beta\sigma_u^2 \left[\frac{1}{E(\hat{\beta}_V^*)} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_V^*)}{E^3(\hat{\beta}_V^*)} \right] + O(n^{-2}) \\
&= \beta\sigma_u^2 \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right) - \frac{\beta\sigma_u^2(\lambda/L + \lambda + \beta^2)}{nL\beta^2} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 \left\{ \frac{\lambda^*(F-1)}{2h_\lambda(\lambda^*)} \right. \\
&\quad \left. + Fh_\lambda(\lambda^*) \right\} + \beta\sigma_u^2 \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0CV\lambda}^*) &= \text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda}^*) + \text{Var}(U_0) - 2\text{Cov}(\hat{U}_{0CV\lambda}^*, U_0) \\
&= \sigma_u^2 + \text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda}^*) - 2\beta\sigma_u^2 \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right) - 2\beta\sigma_u^2 \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) \\
&\quad + \frac{2\beta\sigma_u^2(\lambda/L + \lambda + \beta^2)}{nL\beta^2} \left(\frac{F-1}{Fh_\lambda(\lambda^*)} \right)^2 \left\{ \frac{\lambda^*(F-1)}{2h_\lambda(\lambda^*)} + Fh_\lambda(\lambda^*) \right\} \\
&\quad + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Substituindo a $\text{Var}(\hat{\beta}_V^*)$ dada no Lema 5.6 e a expressão da $\text{Var}(\hat{U}_{0CV\lambda}^*)$ desse teorema, conclui-se a prova. $\square$

Algumas comparações gráficas são feitas a seguir.

Nas Figuras 5.1a, b e c são apresentadas a razão do EQM aproximado do previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}$, usando a expressão (5.47) com o EQM aproximado do previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ dado no Teorema 5.7. Os parâmetros do modelo dessa seção são $\sigma_\epsilon^2 = 1.0$, $\beta = 0.5$ e $k = 2$, com o verdadeiro valor de λ igual a 3. Note que o erro quadrático médio de $\hat{U}_{0CV\lambda}$ é bastante afetado quando um valor errado de λ é utilizado, principalmente, quando σ_u^2 é pequena.

Nas Figuras 5.2a e b compara-se o EQM aproximado de $\hat{U}_{0CV\lambda}$, dado em (5.47) e do previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ dado no Teorema 5.7, com o previsor clássico com mínimos quadrados baseado em (5.50). Nota-se que o previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ é severamente afetado para valores pequenos de λ^* . Na Seção 5.4 foi mostrado que o previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}$ tem melhor desempenho que o previsor $\hat{U}_{0CQ}$.

As Figuras 5.3a e b comparam o EQM aproximado do previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ dado no Teorema 5.7 e do previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}$ dado na expressão (5.47) com o previsor inverso $\hat{U}_{0IQ}$ baseado em (5.51). Observa-se que para valores pequenos de λ^* , o comportamento do EQM do previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ é bastante alterado quando comparado com o comportamento do previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}$. Observe que para os parâmetros definidos na Figura 5.1, o valor de L é 300. Observando na Tabela 5.1, com $L = 100$, conclui-se que o previsor $\hat{U}_{0IQ}$ é melhor que o previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}$ para todos os valores de n avaliados, obtendo assim a mesma conclusão da Figura 5.3a.

Nas Figuras 5.4.a e b compara-se o EQM aproximado do previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ dado no Teorema 5.7 e do previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}$ dado na expressão (5.47), com o previsor condicional $\hat{U}_{0\ell Q}$, baseado em (5.52). Na Tabela 5.4, com $L = 100$, observa-se que o previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}$ tem melhor desempenho que o previsor $\hat{U}_{0\ell Q}$, independente do valor de n , conclusão esta que também é tirada da Figura 5.4.a com $L = 30$. A Figura 5.4.b apresenta que o previsor $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ é afetado para valores pequenos de λ^* .

Figura 5.1: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\lambda}$ e $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ com $n = 10, 20, 30$ e 100 , onde (a) $\sigma_u^2 = 0.5$; (b) $\sigma_u^2 = 10.0$ e (c) $\sigma_u^2 = 100.0$. Verdadeiro $\lambda = 3.0$.

Figura 5.2: (a) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0CV\lambda}$; (b) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$, com $n = 10, 20, 30$ e 100 e $\sigma_u^2 = 10.0$. Verdadeiro $\lambda = 3.0$.

Figura 5.3: (a) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\lambda}$ e $\hat{U}_{0IQ}$; (b) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ e $\hat{U}_{0IQ}$, com $n = 10, 20, 30$ e 100 e $\sigma_u^2 = 100.0$. Verdadeiro $\lambda = 3.0$.

Figura 5.4: (a) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\lambda}$ e $\hat{U}_{0IQ}$; (b) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\lambda}^*$ e $\hat{U}_{0IQ}$, com $n = 10, 20, 30, 100$ e $\sigma_u^2 = 10.0$. Verdadeiro $\lambda = 3.0$.

5.6.2 Uma das variâncias conhecida

Suponha agora que o investigador use um valor incorreto, σ_δ^{*2} , para calcular o previsor clássico com máxima verossimilhança, isto é, o seguinte previsor é usado

$$\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^* = \frac{\bar{Y}_0 - \hat{\alpha}_V^*}{\hat{\beta}_V^*},$$

onde

$$\hat{\alpha}_V^* = \bar{Y} - \hat{\beta}_V^* \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_V^* = \frac{S_{xy}}{S_{xx} - \sigma_\delta^{*2}},$$

como apresentado no Capítulo 4.

Como dito no Capítulo 4, Ketellaper (1983) apresenta um estudo assintótico do comportamento do estimador $\hat{\beta}_V^*$ no modelo estrutural com uma das variâncias conhecida, sem contudo se preocupar com as ordens das aproximações.

Primeiro apresenta-se um lema, que é usado para provar o resultado principal.

Lema 5.7 *Sob o modelo especificado por (2.8), (2.11) e (2.12) com a suposição de σ_δ^2 ser conhecido mas substituído por σ_δ^{*2} (errado), segue que*

$$E(\hat{\beta}_V^*) = \frac{\beta\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2}} + \frac{\beta\sigma_u^2\sigma_\delta^{*2}}{n(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^3} [3(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) - \sigma_\delta^{*2}] + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_V^*) = \frac{\beta^2\sigma_u^2\sigma_\delta^2 + \sigma_\epsilon^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2)}{n(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2} + \frac{2\beta^2\sigma_u^4\sigma_\delta^{*4}}{n(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^4} + O(n^{-2}).$$

Prova: Tomando a esperança e a variância da expansão em série de Taylor de $\hat{\beta}_V^*$ em torno do ponto $(E(S_{xx}), E(S_{xy}))$, obtém-se

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_V^*) &= \frac{\beta\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2}} + \frac{\beta\sigma_u^2\sigma_\delta^{*2}}{n(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2} - \frac{1}{(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) \\ &\quad + \frac{\beta\sigma_u^2}{(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^3} \text{Var}(S_{xx}) + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\beta}_V^*) &= \frac{\beta^2 \sigma_u^4}{(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^4} \text{Var}(S_{xx}) + \frac{1}{(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2} \text{Var}(S_{xy}) \\ &\quad - \frac{2\beta \sigma_u^2}{(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^3} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2}).\end{aligned}$$

Substituindo (5.11), (5.13) e (5.14) nas expressões acima e após alguma álgebra, chega-se ao resultado desejado. $\square$

Teorema 5.8 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12) com as suposições do Lema 5.7 e assumindo que k é um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$\begin{aligned}EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*) &= \frac{(\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2}{\sigma_u^2} - \frac{(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - 2\sigma_\delta^{*2})}{n} + \frac{(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})(\sigma_u^2 - \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}{n\sigma_u^2} \\ &\quad + \frac{3[\sigma_\delta^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2 + 2\sigma_\delta^{*4}\sigma_u^2]}{n\sigma_u^4} - \frac{4\sigma_\delta^{*4}}{n(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})} \\ &\quad - \frac{2\sigma_\delta^{*2}(\sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})[3(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) - \sigma_\delta^{*2}]}{n\sigma_u^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})} + \frac{\sigma_\varepsilon^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2(4\sigma_u^2 + 3\sigma_\delta^2)}{n\beta^2\sigma_u^6} \\ &\quad - \frac{2\sigma_\varepsilon^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2)(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}{n\beta^2\sigma_u^4} + \frac{\sigma_\varepsilon^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2}{k\beta^2\sigma_u^4} \\ &\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{nk\beta^2\sigma_u^6} \{3\sigma_\delta^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2 - 2\sigma_\delta^{*2}\sigma_u^2[3(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) - 4\sigma_\delta^{*2}]\} \\ &\quad + \frac{3\sigma_\varepsilon^4(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2)(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2}{nk\beta^4\sigma_u^8} + O(n^{-2}).\end{aligned}$$

Prova: Similarmente à demonstração dada no Teorema 5.7, tem-se que $E(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*) = \mu_u$.

Note que pode-se escrever $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ na forma dada em (5.17). Logo,

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*) &= \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2 \text{Var}((U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V^*) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V^*) + \text{Var}(\bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V^*) \\ &\quad + 2\text{Cov}(\bar{X}, \beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V^*) + 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V^*) - 2\text{Cov}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V^*, \bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V^*) - 2\text{Cov}(\beta(U_0 - \bar{U})/\hat{\beta}_V^*, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V^*) \\
& -2\text{Cov}(\bar{\varepsilon}_0/\hat{\beta}_V^*, \bar{\varepsilon}/\hat{\beta}_V^*).
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Essa expressão é equivalente à (5.31) com o estimador $\hat{\beta}_V^*$. Da mesma maneira que no Teorema 5.7 e utilizando o Lema 5.7, tem-se

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V^*}\right) &= \frac{\sigma_u^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2}{\beta^2 \sigma_u^4} + \frac{\sigma_u^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2}{n\beta^2 \sigma_u^4} \\
&\quad - \frac{2\sigma_u^2 \sigma_\delta^{*2} [3(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) - \sigma_\delta^{*2}]}{n\beta^2 \sigma_u^4} + \frac{3\sigma_u^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^4}{\beta^4 \sigma_u^8} \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + O(n^{-2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V^*}\right) &= \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2}{\beta^2 \sigma_u^4} - \frac{2\sigma_\delta^{*2} [3(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) - \sigma_\delta^{*2}] \text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{n\beta^2 \sigma_u^4} \\
&\quad + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0) \text{Var}(\hat{\beta}_V^*)(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^4}{\beta^4 \sigma_u^8} + O(n^{-2}),
\end{aligned}$$

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V^*}\right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^2}{\beta^2 \sigma_u^4} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Cov}\left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V^*}\right) = \frac{-\beta \sigma_u^2(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}{n\beta \sigma_u^2} + O(n^{-2})$$

e as outras covariâncias da expressão (5.54) são nulas, pela mesma justificativa dada no Teorema 5.7.

Substituindo as expressões acima na expressão (5.54) e utilizando o Lema 5.7, obtém-se a expressão para a variância de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$.

Como no Teorema 5.7, o erro quadrático médio é

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*) &= \text{Var}(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*) + \text{Var}(U_0) - 2\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*) \\
&= \text{Var}(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*) + \text{Var}(U_0) - 2\left((\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2}) - \frac{\sigma_\delta^{*2} [3(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2) - \sigma_\delta^{*2}]}{n(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{(\sigma_u^2 + \sigma_\delta^2 - \sigma_\delta^{*2})^3}{\beta^2 \sigma_u^4} \text{Var}(\hat{\beta}_V^*)\right) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Substituindo a $\text{Var}(\hat{\beta}_V^*)$ dada no Lema 5.7 e a $\text{Var}(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*)$ desse teorema na expressão acima, o erro quadrático médio é obtido após algumas manipulações algébricas. $\square$

As Figuras 5.5.a, b e c estudam a aproximação do EQM assintótico de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ baseado em (5.48) e a do previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ dado no Teorema 5.8. Os parâmetros do modelo das figuras dessa seção são $\sigma_\varepsilon^2 = 1.0$, $\beta = 0.5$ e $k = 2$, com o verdadeiro valor de σ_δ^2 igual a 3. Como pode ser visto, o erro quadrático médio do previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ é severamente afetado quando seleciona-se um valor errado, σ_δ^{*2} , sendo que o desempenho de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ piora quando com o aumento de σ_u^2 .

Nas Figuras 5.6.a e b compara-se o EQM assintótico do previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ usando o Teorema 5.8 e do previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ usando a expressão (5.48) com o previsor $\hat{U}_{0CQ}$ baseado em (5.50). Observa-se que $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ apresenta um melhor desempenho na vizinhança do verdadeiro valor de σ_δ^2 , mas quando σ_δ^{*2} cresce o comportamento de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ piora. É interessante ressaltar que foi mostrado analiticamente na Seção 5.4 que $EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$.

As Figuras 5.7.a e b comparam o EQM assintótico do previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ dado no Teorema 5.8 e do previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ dado na expressão (5.48) com o previsor $\hat{U}_{0IQ}$ usando a expressão (5.51). Pode ser visto que o previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ é severamente afetado para valores grandes de σ_δ^{*2} . Observando a Tabela 5.2, com $L = 100$, chega-se à mesma conclusão da Figura 5.7.a, isto é, que o previsor $\hat{U}_{0IQ}$ é melhor que o previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ para o conjunto de parâmetros especificados e para todos os valores de n avaliados.

As Figuras 5.8.a e b comparam o EQM assintótico do previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ dado no Teorema 5.8 e do previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ baseado na expressão (5.48) com o previsor $\hat{U}_{0\ell Q}$ usando a expressão (5.52). Observa-se que para valores grandes de σ_δ^{*2} o EQM do previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ é bastante afetado. Da Figura 5.8.a observa-se que o previsor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ tem melhor desempenho que o previsor condicional $\hat{U}_{0\ell Q}$ independente do valor de n , conclusão esta que

coincide com a Tabela 5.4.

5.6.3 Coeficiente de atenuação conhecido

Suponha que o investigador use um valor incorreto (k_u) para calcular previsor clássico com máxima verossimilhança, isto é, o seguinte previsor é usado

$$\hat{U}_{0CVk_u}^* = \frac{Y_0 - \hat{\alpha}_V^*}{\hat{\beta}_V^*},$$

onde

$$\hat{\alpha}_V^* = \bar{Y} - \hat{\beta}_V^* \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_V^* = \frac{S_{xy}}{S_{xx}k_u^*}.$$

Primeiro é apresentado um lema, que será usado para provar o resultado principal. Vale ressaltar que na literatura não é encontrado nenhum estudo para este caso, mesmo na estimação de β .

Lema 5.8 *Sob o modelo (2.8), (2.11) e (2.12) com a suposição de k_u ser conhecido, mas substituído por k_u^* (errado), segue que*

$$E(\hat{\beta}_V^*) = \frac{\beta k_u}{k_u^*} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_V^*) = \frac{\beta^2}{n} \left(\frac{k_u}{k_u^*} \right)^2 \left(\frac{1}{k_u} - 1 \right) + \frac{\sigma_\varepsilon^2 k_u}{n \sigma_u^2 k_u^{*2}} + O(n^{-2}).$$

Prova: Calculando a esperança e a variância da expansão em série de Taylor de $\hat{\beta}_V^*$ até ordem n^{-2} em torno do ponto $(E(S_{xx}), E(S_{yy}))$, obtém-se

$$E(\hat{\beta}_V^*) = \frac{\beta k_u}{k_u^*} + \frac{\beta k_u^3}{\sigma_u^4 k_u^*} \text{Var}(S_{xx}) - \frac{k_u^2}{\sigma_u^4 k_u^*} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) &= \frac{\beta^2 k_u^4}{\sigma_u^4 k_u^{*2}} \text{Var}(S_{xx}) + \frac{k_u^2}{\sigma_u^4 k_u^{*2}} \text{Var}(S_{xy}) \\ &\quad - \frac{2\beta k_u^3}{\sigma_u^4 k_u^{*2}} \text{Cov}(S_{xx}, S_{xy}) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

(a)

(b)

(c)

Figura 5.5: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$, com $n = 10, 20, 30$ e 100 , onde (a) $\sigma_u^2 = 0.5$; (b) $\sigma_u^2 = 10.0$ e (c) $\sigma_u^2 = 100.0$. Verdadeiro $\sigma_\delta^2 = 3.0$.

Figura 5.6: (a) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$; (b) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$, com $n = 10, 20, 30, 100$ e $\sigma_u^2 = 10.0$. Verdadeiro $\sigma_\delta^2 = 3.0$.

Figura 5.7: (a) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0IQ}$; (b) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ e $\hat{U}_{0IQ}$, com $n = 10, 20, 30, 100$ e $\sigma_u^2 = 100.0$. Verdadeiro $\sigma_\delta^2 = 3.0$.

Figura 5.8: (a) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0\ell Q}$; (b) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}^*$ e $\hat{U}_{0\ell Q}$, com $n = 10, 20, 30, 100$ e $\sigma_u^2 = 10.0$. Verdadeiro $\sigma_\delta^2 = 3.0$.

Substituindo (5.11), (5.13) e (5.14) nas expressões acima, a esperança e a variância são obtidas após alguma álgebra. $\square$

Teorema 5.9 *Sob o modelo especificado por (2.8), (2.11) e (2.12) com as suposições do Lema 5.8 e assumindo que k é um inteiro positivo qualquer, tem-se que*

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CVk_u}^*) &= \sigma_u^2 \left(1 - \frac{k_u^*}{k_u}\right)^2 + \frac{\sigma_u^2}{n} \left(\frac{1}{k_u} - \frac{2k_u^*}{k_u} + \left(\frac{k_u^*}{k_u}\right)^2\right) \\ &\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\beta^2} \left(\frac{k_u^*}{k_u}\right)^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right) + \frac{\sigma_u^2}{n} \left(\frac{k_u^*}{k_u}\right)^2 \left(\frac{1}{k_u} - 1\right) \left(3 + \frac{3\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2\sigma_u^2} - \frac{2k_u}{k_u^*}\right) \\ &\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2 k_u^{*2}}{n\beta^2 k_u^3} \left(3 + \frac{3\sigma_\varepsilon^2}{k\beta^2\sigma_u^2} - \frac{2k_u}{k_u^*}\right) + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Prova: Da expressão (5.17), tem-se que

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0CVk_u}^*) &= E(\bar{X}) + \beta E(U_0 - \bar{U}) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) + E(\bar{\varepsilon}_0) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) - E(\bar{\varepsilon}) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) \\ &= E(\bar{X}) = \mu_u, \end{aligned}$$

como dado no Teorema 5.7. Pela prova do Teorema 5.7, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CVk_u}^*) &= \text{Var}(\bar{X}) + \beta^2 \text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V^*}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V^*}\right) + \text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V^*}\right) \\ &\quad + 2\text{Cov}\left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V^*}\right). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Procedendo de modo equivalente ao Teorema 5.7 e utilizando o Lema 5.8, obtém-se

$$\text{Var}\left(\frac{U_0 - \bar{U}}{\hat{\beta}_V^*}\right) = \sigma_u^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{k_u^*}{k_u}\right)^2 + \frac{3\sigma_u^2}{\beta^4} \left(\frac{k_u^*}{k_u}\right)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\hat{\beta}_V^*}\right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{\beta^2} \left(\frac{k_u^*}{k_u}\right)^2 + \frac{3\text{Var}(\bar{\varepsilon}_0)}{\beta^4} \left(\frac{k_u^*}{k_u}\right)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + O(n^{-2}),$$

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\hat{\beta}_V^*}\right) = \frac{\text{Var}(\bar{\varepsilon})}{\beta^2} \left(\frac{k_u^*}{k_u}\right)^2 + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Cov}\left(\bar{X}, \frac{\beta(U_0 - \bar{U})}{\hat{\beta}_V^*}\right) = -\frac{\beta\sigma_u^2}{n} \frac{1}{\beta} \frac{k_u^*}{k_u} + O(n^{-2}).$$

Substituindo em (5.55) as expressões acima e a $\text{Var}(\hat{\beta}_V^*)$ dada no Lema 5.8, obtém-se a expressão da $\text{Var}(\hat{U}_{0CVk_u}^*)$. Procedendo de modo equivalente ao Teorema 5.7, tem-se

$$\begin{aligned}\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0CVk_u}^*) &= \beta\sigma_u^2 E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_V^*}\right) = \beta\sigma_u^2 \left[\frac{1}{E(\hat{\beta}_V^*)} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_V^*)}{E^3(\hat{\beta}_V^*)} \right] + O(n^{-2}) \\ &= \beta\sigma_u^2 \left[\frac{k_u^*}{\beta k_u} + \frac{1}{\beta^3} \left(\frac{k_u^*}{k_u} \right)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) \right] + O(n^{-2}).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}EQM(\hat{U}_{0CVk_u}^*) &= \text{Var}(U_0) + \text{Var}(\hat{U}_{0CVk_u}^*) - 2\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0CVk_u}^*) \\ &= \sigma_u^2 + \text{Var}(\hat{U}_{0CVk_u}^*) - \frac{2\sigma_u^2 k_u^*}{k_u} - \frac{2\sigma_u^2}{\beta^2} \left(\frac{k_u^*}{k_u} \right)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_V^*) + O(n^{-2}).\end{aligned}$$

Substituindo a $\text{Var}(\hat{\beta}_V^*)$ dada no Lema 5.8 e a $\text{Var}(\hat{U}_{0CVk_u}^*)$ desse teorema na expressão acima, o erro quadrático médio é obtido. $\square$

Algumas comparações gráficas são feitas a seguir.

Nas Figuras 5.9.a, b e c são apresentadas a razão do EQM aproximado do predictor $\hat{U}_{0CVk_u}$ usando a expressão (5.49) com o EQM aproximado do predictor $\hat{U}_{0CVk_u}^*$ dado no Teorema 5.9. Os parâmetros do modelo dessa seção são $\sigma_\varepsilon^2 = 1.0$, $\beta = 0.5$ e $k = 2$, com o verdadeiro valor de k_u igual a 0.3. Como pode ser visto, o EQM de $\hat{U}_{0CVk_u}$ é bastante afetado quando um valor errado de k_u é utilizado, principalmente quando σ_u^2 é pequena.

Nas Figuras 5.10.a e b compara-se o EQM aproximado de $\hat{U}_{0CVk_u}$ dado em (5.49) e do predictor $\hat{U}_{0CVk_u}^*$ dado no Teorema 5.9, com o predictor clássico com mínimos quadrados baseado em (5.50). Nota-se que o predictor $\hat{U}_{0CVk_u}^*$ é severamente afetado para valores pequenos de k_u^* . Na Seção 5.4 foi mostrado analiticamente que o predictor $\hat{U}_{0CVk_u}$ tem melhor desempenho que o predictor $\hat{U}_{0CQ}$.

As Figuras 5.11.a e b comparam o EQM aproximado do predictor $\hat{U}_{0CVk_u}^*$ dado no Teorema 5.9 e do predictor $\hat{U}_{0CVk_u}$ dado na expressão (5.49), com o predictor inverso $\hat{U}_{0IQ}$ baseado em (5.51). Observa-se que o estimador $\hat{U}_{0CVk_u}^*$ tem um comportamento bastante

prejudicado quando k_u^* se afasta do verdadeiro valor ($k_u = 0.3$). Observando a Tabela 5.3 com $L = 100$, chega-se à mesma conclusão da Figura 5.11.a, ou seja, que o previsor $\hat{U}_{0IQ}$ tem melhor desempenho que o previsor $\hat{U}_{0CVk_u}$, independente do valor do parâmetro n .

As Figuras 5.12.a e b comparam o EQM aproximado do previsor $\hat{U}_{0CVk_u}^*$, dado no Teorema 5.9, e do previsor $\hat{U}_{0CVk_u}$, dado na expressão (5.49), com o previsor condicional $\hat{U}_{0\ell Q}$ baseado em (5.52). Como pode ser visto, para valores grandes de k_u^* , o EQM do previsor $\hat{U}_{0CVk_u}^*$ é bastante afetado. Da Figura 5.12.a, observa-se que o previsor $\hat{U}_{0CVk_u}$ tem melhor desempenho que o previsor condicional $\hat{U}_{0\ell Q}$ para todos os valores de n , conclusão esta que também é obtida da Tabela 5.4.

5.7 Um estudo de simulação

Nesta seção serão descritos os resultados de um estudo de simulação com o objetivo de verificar o comportamento das aproximações dos erros quadráticos médios obtidas neste capítulo. Neste estudo, 1000 amostras de tamanho $n = 20$ e 100 foram geradas de acordo com o modelo especificado pelas equações (2.8), (2.11) e (2.12), com $\alpha = 10.0$, $\beta = 0.5$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1.0$, $\mu_u = 15$, $\sigma_u^2 = 9$, $U_0 = 15.0$, $k = 2$, e para σ_δ^2 foram considerados os valores $\sigma_\delta^2 = 0.1$ ($L = 90$) e $\sigma_\delta^2 = 10.0$ ($L = 0.9$). Para cada amostra foram calculados os seguintes previsores de U_0 : $\hat{U}_{0CV\lambda}$, $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$, $\hat{U}_{0CVk_u}$, $\hat{U}_{0CQ}$, $\hat{U}_{0IQ}$, $\hat{U}_{0\ell Q}$ e o previsor clássico melhorado com uma das variâncias conhecidas, $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$, definido na Seção 4.7, com $a = 2$, e então foram obtidos o erro quadrático médio e o vício empíricos (ou simulados) definidos na Seção 3.7.

Com as especificações dos modelos acima, foram obtidos os erros quadráticos médios aproximados dos previsores estudados, dados de (5.47) a (5.52), respectivamente. Os resultados são mostrados nas Tabelas 5.10 e 5.11, quando $\sigma_\delta^2 = 0.1$.

(a)

(b)

(c)

Figura 5.9: Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CVk_u}$ e $\hat{U}_{0CVk_u}^*$, com $n = 10, 20, 30$ e 100 , onde (a) $\sigma_u^2 = 0.5$; (b) $\sigma_u^2 = 10.0$ e (c) $\sigma_u^2 = 100.0$. Verdadeiro $k_u = 0.3$.

Figura 5.10: (a) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0CVk_u}$; (b) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0CVk_u}^*$, com $n = 10, 20, 30, 100$ e $\sigma_u^2 = 100.0$. Verdadeiro $k_u = 0.3$.

Figura 5.11: (a) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CVk_u}$ e $\hat{U}_{0IQ}$; (b) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CVk_u}^*$ e $\hat{U}_{0IQ}$, com $n = 10, 20, 30, 100$ e $\sigma_u^2 = 100.0$. Verdadeiro $k_u = 0.3$.

Figura 5.12: (a) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CVk_u}$ e $\hat{U}_{0lQ}$; (b) Razão dos EQM's de $\hat{U}_{0CVk_u}^*$ e $\hat{U}_{0lQ}$, com $n = 10, 20, 30, 100$ e $\sigma_u^2 = 10.0$. Verdadeiro $k_u = 0.3$.

Tabela 5.10: Vício empírico de $\hat{U}_0$ quando $\sigma_\delta^2 = 0.1$.

n	$\hat{U}_{0CV\lambda}$	$\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$	$\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$	$\hat{U}_{0CVk_u}$	$\hat{U}_{0CQ}$	$\hat{U}_{0IQ}$	$\hat{U}_{0\ell Q}$
20	-0.064	-0.063	-0.064	-0.064	-0.074	0.224	-0.341
100	0.013	0.013	0.013	0.013	0.008	0.143	-0.138

Tabela 5.11: Erro quadrático médio de $\hat{U}_0$ quando $\sigma_\delta^2 = 0.1$.

n	$\hat{U}_{0CV\lambda}$		$\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$			$\hat{U}_{0CVk_u}$	
	Empírico	Aproximado	Empírico	Empírico $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$	Aproximado	Empírico	Aproximado
20	2.383	2.548	2.378	2.384	2.544	2.381	2.550
100	2.124	2.110	2.123	2.124	2.109	2.123	2.110

$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0\ell Q}$	
Empírico	Aproximado	Empírico	Aproximado	Empírico	Aproximado
2.443	2.613	1.049	2.076	4.095	6.106
2.174	2.159	0.999	1.864	3.935	5.354

Para $\sigma_\delta^2 = 0.1$, observa-se que o vício empírico está muito próximo a zero, que é o valor do vício teórico exposto nas seções anteriores, para todos os previsores propostos. Nessa situação, o ganho do erro quadrático médio do predictor clássico melhorado, $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$, não é percebido, e deve-se ressaltar que, a menos do predictor condicional com mínimos quadrados, todas as aproximações desenvolvidas neste capítulo podem ser consideradas boas, mesmo para amostras de tamanho pequeno. Quanto à aproximação do erro quadrático médio do predictor $\hat{U}_{0\ell Q}$, percebe-se que a diferença entre o EQM empírico e o aproximado apesar de grande para amostras de tamanho pequeno, diminui quando o tamanho da amostra cresce. Também pode ser observado a seguinte relação

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) < EQM(\hat{U}_{0CV}) < EQM(\hat{U}_{0CQ}) < EQM(\hat{U}_{0\ell Q}),$$

isto é, o predictor inverso tem melhor desempenho que o clássico com máxima verossimilhança, para qualquer suposição do modelo, que por sua vez é melhor que o clássico com mínimos quadrados, e por último o predictor condicional.

Quando $\sigma_\delta^2 = 10.0$, foram estudados os previsores $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$, $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$, $\hat{U}_{0CQ}$, $\hat{U}_{0IQ}$, $\hat{U}_{0\ell Q}$, com o objetivo de analisar o predictor clássico melhorado, sendo os resultados apresentados nas Tabelas 5.12 e 5.13.

Tabela 5.12: Vício empírico de $\hat{U}_0$ quando $\sigma_\delta^2 = 10.0$.

n	$\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$	$\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$	$\hat{U}_{0CQ}$	$\hat{U}_{0IQ}$	$\hat{U}_{0\ell Q}$
20	0.034	-0.263	-1.400	0.255	-0.285
100	0.018	0.004	-0.474	0.140	-0.140

Tabela 5.13: Erro quadrático médio de $\hat{U}_0$ quando $\sigma_\delta^2 = 10.0$.

n	$\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$			$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0\ell Q}$	
	Empírico	Empírico $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$	Aproximado	Empírico	Aproximado	Empírico	Aproximado	Empírico	Aproximado
20	4.463	5.441	4.928	21.920	33.148	1.721	2.989	5.160	8.277
100	2.268	2.388	2.586	10.571	22.649	1.080	2.040	4.010	5.788

Quando $\sigma_\delta^2 = 10.0$, pode ser visto na Tabela 5.12 que o vício empírico do predictor $\hat{U}_{0CQ}$ foi bastante afetado, sendo os vícios dos outros previsores bem próximos a zero, principalmente do predictor clássico melhorado. Quanto ao erro quadrático médio, observa-se que o do predictor inverso é o menor. Mais uma vez é comprovada a supremacia do predictor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ em relação a $\hat{U}_{0CQ}$. Nessa situação, o predictor $\hat{U}_{0\ell Q}$ comportou-se melhor que o predictor $\hat{U}_{0CQ}$. Comparando-se o predictor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$, vê-se que $EQM(\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}) < EQM(\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2})$, mas a aproximação obtida neste capítulo para o predictor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ está mais próxima ao EQM simulado do predictor $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$ quando a amostra tem tamanho grande.

Como visto no Capítulo 4, Fuller (1987) ressalta a superioridade do estimador modificado $\hat{\beta}_M$ definido na Seção 4.7 em amostras pequenas. Aqui será verificado se esta superioridade é mantida para o predictor de U_0 , isto é, para o modelo de calibração estrutural.

Foram geradas 1000 amostras de tamanho 20 do modelo (2.8), (2.11) e (2.12), com $\sigma_\delta^2 = 10.0$. A Figura 5.13.a contém um histograma para o estimador $\hat{\beta}_V$ e a Figura 5.13.b o histograma correspondente para o estimador $\hat{\beta}_M$, com $a = 2$. A superioridade do estimador modificado é clara também para esse modelo. As Figuras 5.14.a e b apresentam os histogramas dos previsores $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$ com $a = 2$, construídos em base das amostras geradas para as Figuras 5.13.a e b. Como no Capítulo 4, a distribuição empírica do predictor $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ não é tão modificada quanto a distribuição empírica do estimador $\hat{\beta}_V$.

Os percentis das distribuições empíricas de $\hat{\beta}_V$, $\hat{\beta}_M$, $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$, para 1000 amostras, são dadas na Tabela 5.14. A concentração da distribuição do estimador modificado $\hat{\beta}_M$ com relação à distribuição de $\hat{\beta}_V$ não é sentida na distribuição de $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$.

Tabela 5.14: Percentis da distribuição dos estimadores $\hat{\beta}_V$ e $\hat{\beta}_M$ (com $a = 2$) e dos previsores $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$ e $\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$ (com $a = 2$), $\alpha = 10.0$, $\beta = 0.5$, $\sigma_\epsilon^2 = 1.0$, $\mu_u = 15$, $\sigma_u^2 = 9$, $U_0 = 15.0$, $k = 2$, $n = 20$ e $\sigma_\delta^2 = 10.0$.

Percentis	$\hat{\beta}_V$	$\hat{\beta}_M$	$\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$	$\hat{U}_{0CVM\sigma_\delta^2}$
0.001	-125.9270	-0.1232	-7.800	-9.4021
0.01	-9.3176	0.1088	9.4047	7.9487
0.05	-0.7031	0.2050	11.5777	11.1279
0.10	0.1940	0.2621	12.5773	12.0341
0.25	0.3534	0.3412	13.9713	13.4341
0.50	0.4963	0.4504	15.2017	14.8886
0.75	0.7978	0.5568	16.2292	16.1479
0.90	1.3022	0.6314	17.2906	17.3457
0.95	1.9809	0.6869	17.7185	17.9876
0.99	11.0005	0.7648	19.2048	19.9889
1.000	341.6359	0.8369	27.0248	22.5699

Figura 5.13: (a) Histograma para 1000 estimativas de $\hat{\beta}_V$; (b) Histograma para 1000 estimativas modificadas.

(a)

(b)

Figura 5.14: (a) Histograma para 1000 estimativas de $\hat{U}_{0CV\sigma_\delta^2}$; (b) Histograma para 1000 estimativas modificadas.

Capítulo 6

Modelo de calibração multiplicativo

Este capítulo é dedicado ao estudo do modelo de calibração com erros nas variáveis (funcional e estrutural) quando os erros de medição associados à variável independente são multiplicativos (Hwang, 1986). Será assumido um modelo bastante geral, sem a suposição de normalidade, admitindo que as distribuições dos erros pertencem a uma família de distribuições com o quarto momento finito. Será considerado o caso particular onde $\alpha = 0$, embora acreditando que extensões para o caso α desconhecido envolva apenas dificuldades técnicas adicionais. Como nos capítulos anteriores, para os modelos funcional e estrutural, alguns procedimentos são comparados através de expressões aproximadas para o erro quadrático médio. Os procedimentos são baseados no estimador usual de mínimos quadrados e em estimadores consistentes de β e ϕ (regressão inversa) combinados com os estimadores (previsores, no caso estrutural) clássico e inverso de U_0 .

6.1 Modelo multiplicativo com erros nas variáveis

Nos capítulos anteriores, foi considerado que as variáveis independentes envolvidas no modelo são medidas com erros aditivos. Hwang (1986) considera situações onde não é possível observar diretamente U_i , mas apenas X_i onde

$$X_i = U_i \delta_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.1)$$

Por razões óbvias, o modelo especificado por (2.5), (2.6) e (6.1) foi então denominado modelo multiplicativo com erros nas variáveis. À primeira vista, uma análise desse modelo poderia ser obtida através da aplicação de uma transformação logaritmica nos dois lados de (6.1), o que tornaria o modelo de erros multiplicativos num modelo de erros aditivo. Contudo tal transformação destrói a suposição de linearidade do modelo e o estudo de modelos não lineares com erros nas variáveis é ainda bastante difícil, conforme menciona o próprio Hwang (1986). Este modelo tem sido utilizado em situações onde é de interesse principal a manutenção da confidencialidade dos dados fornecidos pelos elementos da amostra. Os valores verdadeiros de U são portanto desconhecidos. No caso estrutural a distribuição de U é desconhecida.

O modelo de calibração multiplicativo com erros nas variáveis pode ser formalmente definido por

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta U_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ X_i &= U_i \delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ Y_{0i} &= \alpha + \beta U_0 + \varepsilon_{0i}, \quad i = n+1, \dots, n+k, \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde $\varepsilon_i, \varepsilon_{0j}, 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+k$, são mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média zero; $\delta_i, 1 \leq i \leq n$ são mutuamente independentes e identicamente distribuídos com média um; δ e ε são independentes, sendo $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{0n+1}, \dots, \varepsilon_{0n+k})$.

Considerando $U_1, \dots, U_n$ como constantes (parâmetros), caracteriza-se o chamado *modelo de calibração multiplicativo funcional*. Porém, se $U_1, \dots, U_n$ forem variáveis aleatórias, caracteriza-se o *modelo de calibração multiplicativo estrutural*. Para esse modelo são feitas suposições adicionais de que $U_i, i = 1, \dots, n$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com uma distribuição desconhecida, e que $\mathbf{U}, \delta$ e ε são independentes, sendo $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$. Para este trabalho será considerado o caso particular,

onde o modelo (6.2) é tal que $\alpha = 0$ e serão feitas as seguintes suposições adicionais

$$m_2^\varepsilon, m_3^\varepsilon, m_4^\varepsilon, m_2^\delta, m_3^\delta, m_4^\delta,$$

$$m_1^U, m_2^U, m_3^U, m_4^U \text{ (no caso estrutural)}$$

existem e são finitos, onde

$$m_i^\varepsilon = E(\varepsilon_1^i) = E(\varepsilon_{0n+1}^i), \quad m_i^\delta = E(\delta_1^i),$$

$$m_i^U = E(U_1^i) = E(U_0^i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

6.2 Modelo de calibração multiplicativo estrutural

Nesta seção será estudado o caso estrutural. O problema considerado será portanto, prever a quantidade desconhecida U_0 . Hwang (1986) obtém um estimador consistente para β nessa situação e também deriva sua distribuição assintótica. Será apresentado um estudo do comportamento assintótico dos previsores clássico e inverso de U_0 , combinados com os estimadores usuais de mínimos quadrados, com o estimador consistente de β apresentado em Hwang (1986) e com um estimador consistente de ϕ proposto aqui, quando apenas o tamanho da amostra da primeira etapa do problema de calibração é grande, ou seja, k é considerado fixo.

6.2.1 Previsores de U_0 e suas propriedades

Como possíveis previsores a serem considerados, lembrando que $\alpha = 0$, será proposta a utilização dos previsores clássico e inverso definidos, respectivamente, por

$$\hat{U}_{0C} = \frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}}, \quad (6.3)$$

$$\hat{U}_{0I} = \hat{\phi} \bar{Y}_0, \quad (6.4)$$

onde $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ são estimadores de β e ϕ , respectivamente.

Os estimadores de mínimos quadrados de β e ϕ são

$$\hat{\beta}_Q = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_Q = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n Y_i^2}, \quad (6.5)$$

enquanto que o estimador consistente de β , apresentado em Hwang (1986), pode ser escrito como

$$\hat{\beta}_C = m_2^\delta \hat{\beta}_Q, \quad (6.6)$$

onde $m_2^\delta = E(\delta_1^2)$ é conhecido.

Lema 6.1 *Sob o modelo (2.5), (2.6) e (6.1), com a suposição de que m_i^ε , m_i^δ e m_i^U , $1 \leq i \leq 4$, existam, com m_2^ε e m_2^δ conhecidos, então*

$$\hat{\phi}_C = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i / n}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 / n - m_2^\varepsilon} \quad (6.7)$$

$$\hat{\phi}'_C = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{m_2^\delta \sum_{i=1}^n X_i Y_i} \quad (6.8)$$

são estimadores fortemente consistentes para ϕ .

Prova: Tem-se que $Y_1^2, Y_2^2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes com $E(Y_i^2) = m_2^U / \phi^2 + m_2^\varepsilon$ e

$$\text{Var}(Y_i^2) = \frac{m_4^U}{\phi^4} + \frac{4m_2^U m_2^\varepsilon}{\phi^2} + \frac{4m_1^U m_3^\varepsilon}{\phi} + m_4^\varepsilon - \frac{(m_2^U)^2}{\phi^4} - (m_2^\varepsilon)^2,$$

$i = 1, 2, \dots$. Logo, $\sum_{n=1}^\infty \frac{\text{Var}(Y_n^2)}{n^2} < \infty$. Pela Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov, conclui-se que

$$\sum_{i=1}^n \frac{Y_i^2}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} \frac{m_2^U}{\phi^2} + m_2^\varepsilon.$$

De modo similar, mostra-se que

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i Y_i}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} \frac{m_2^U}{\phi}$$

e

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} m_2^U m_2^\delta.$$

A prova da consistência forte dos estimadores $\hat{\phi}_C$ e $\hat{\phi}'_C$ é concluída observando-se que esses estimadores são funções contínuas de $\sum_{i=1}^n Y_i^2/n$, $\sum_{i=1}^n X_i Y_i/n$ e $\sum_{i=1}^n X_i^2/n$. $\square$

Pode-se observar que $\hat{\phi}'_C = 1/\hat{\beta}_C$, de onde segue que

$$\hat{U}_{0I} = \hat{\phi}'_C \bar{Y}_0 = \frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_C} = \hat{U}_{0C},$$

isto é, os previsores clássico e inverso coincidem quando o estimador $\hat{\phi}'_C$ é usado.

Combinando os previsores clássico e inverso de U_0 com os estimadores de mínimos quadrados e com os estimadores consistentes de β e ϕ , tem-se os seguintes previsores

$$\begin{aligned} \hat{U}_{0C} &= \frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_C}, & \hat{U}_{0CQ} &= \frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_Q}, \\ \hat{U}_{0IC} &= \hat{\phi}_C \bar{Y}_0 & \text{e} & \hat{U}_{0IQ} = \hat{\phi}_Q \bar{Y}_0, \end{aligned}$$

onde $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0IC}$ são os previsores clássico e inverso de U_0 , respectivamente, combinados com os estimadores consistentes, $\hat{\beta}_C$ dado em (6.6) e $\hat{\phi}_C$ dado em (6.7), enquanto que $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ são os previsores clássico e inverso de U_0 , respectivamente, combinados com os estimadores de mínimos quadrados de β e ϕ dados em (6.5).

A seguir é apresentada uma série de resultados relacionados com as propriedades assintóticas dos estimadores de β e ϕ . Tais resultados serão utilizados no estudo dos previsores de U_0 considerados acima.

Lema 6.2 *Sob o modelo (6.2), com a suposição de que m_i^ε , m_i^δ e m_i^U , $1 \leq i \leq 4$, existam e com m_2^δ conhecido, segue que*

$$(i) \ E(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta}{m_2^\delta} + \frac{\beta m_4^U}{n(m_2^U)^2(m_2^\delta)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_Q) = \frac{m_2^\varepsilon}{nm_2^U m_2^\delta} + \frac{\beta^2 m_4^U}{n(m_2^U)^2 m_2^\delta} \left[1 + \frac{m_4^\delta}{(m_2^\delta)^3} - \frac{2m_3^\delta}{(m_2^\delta)^2} \right] + O(n^{-2});$$

$$(ii) \ E(\hat{\beta}_C) = \beta + \frac{\beta m_4^U}{n(m_2^U)^2 m_2^\delta} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\beta}_C) = \frac{m_2^\delta m_2^\varepsilon}{nm_2^U} + \frac{\beta^2 m_4^U m_2^\delta}{n(m_2^U)^2} \left[1 + \frac{m_4^\delta}{(m_2^\delta)^3} - \frac{2m_3^\delta}{(m_2^\delta)^2} \right] + O(n^{-2}).$$

Prova: (i) Note que o estimador $\hat{\beta}_Q$ em (6.5) é função de $(\sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i Y_i)$. Portanto, pode-se expandir $\hat{\beta}_Q$ em série de Taylor até ordem n^{-2} , em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(\sum_{i=1}^n X_i^2), E(\sum_{i=1}^n X_i Y_i))$, obtendo-se assim a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_Q &= \frac{\beta}{m_2^\delta} + \frac{1}{nm_2^U m_2^\delta} (\ell_1 - E(\ell_1)) - \frac{\beta}{nm_2^U (m_2^\delta)^2} (\ell_2 - E(\ell_2)) \\ &+ \frac{\beta}{n^2 (m_2^U)^2 (m_2^\delta)^3} (\ell_2 - E(\ell_2))^2 - \frac{1}{n^2 (m_2^U)^2 (m_2^\delta)^2} (\ell_1 - E(\ell_1)) (\ell_2 - E(\ell_2)) \\ &+ O_p(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde

$$\ell_1 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \quad \text{e} \quad \ell_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2. \quad (6.9)$$

Calculando a esperança e a variância dessa expressão, obtém-se

$$E(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta}{m_2^\delta} + \frac{\beta}{n^2 (m_2^U)^2 (m_2^\delta)^3} \text{Var}(\ell_2) - \frac{1}{n^2 (m_2^U)^2 (m_2^\delta)^2} \text{Cov}(\ell_1, \ell_2) + O(n^{-2}) \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) &= \frac{1}{n^2 (m_2^U)^2 (m_2^\delta)^2} \text{Var}(\ell_1) + \frac{\beta^2}{n^2 (m_2^U)^2 (m_2^\delta)^4} \text{Var}(\ell_2) \\ &- \frac{2\beta}{n^2 (m_2^U)^2 (m_2^\delta)^3} \text{Cov}(\ell_1, \ell_2) + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

É fácil mostrar que

$$E(\ell_1) = n\beta m_2^U, \quad (6.12)$$

$$E(\ell_2) = nm_2^U m_2^\delta, \quad (6.13)$$

$$\text{Var}(\ell_1) = n\beta^2 m_4^U m_2^\delta - n\beta^2 (m_2^U)^2 + nm_2^\varepsilon m_2^U m_2^\delta, \quad (6.14)$$

$$\text{Var}(\ell_2) = nm_4^U m_2^\delta - n(m_2^U)^2 (m_2^\delta)^2, \quad (6.15)$$

$$\text{Cov}(\ell_1, \ell_2) = n\beta m_4^U m_2^\delta - n\beta (m_2^U)^2 (m_2^\delta). \quad (6.16)$$

Substituindo (6.14) – (6.16) nas expressões (6.10) e (6.11), os resultados são obtidos após alguma álgebra.

(ii) Como $\hat{\beta}_C = m_2^\delta \hat{\beta}_Q$, tem-se que

$$E(\hat{\beta}_C) = m_2^\delta E(\hat{\beta}_Q) \quad \text{e} \quad \text{Var}(\hat{\beta}_C) = (m_2^\delta)^2 \text{Var}(\hat{\beta}_Q).$$

O resultado segue pela substituição das igualdades do item (i) nas expressões acima. $\square$

Lema 6.3 *Sob o modelo (6.2) com a suposição de que m_i^ε , m_i^δ e m_i^U , $1 \leq i \leq 4$, existam e com m_2^ε conhecido, segue que*

$$(i) \quad E(\hat{\phi}_Q) = \frac{\beta m_2^U}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{\beta m_2^U}{n \Delta^3} [4\beta^2 m_2^U m_2^\varepsilon + 3\beta m_1^U m_3^\varepsilon + m_4^\varepsilon + \beta^4 (m_2^U)^2] \\ - \frac{m_2^\varepsilon}{n \Delta^3} [\beta^3 m_4^U - \beta^3 (m_2^U)^2 + m_3^\varepsilon m_1^U - 2\beta m_2^\varepsilon m_2^U] + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\phi}_Q) = \frac{1}{n \Delta^3} [\Delta (\beta^2 m_4^U m_2^\delta - \beta^2 (m_2^U)^2 + m_2^\varepsilon m_2^U m_2^\delta) - 2\beta m_2^U (\beta^3 m_4^U - \beta^3 (m_2^U)^2 \\ + m_3^\varepsilon m_1^U + 2\beta m_2^\varepsilon m_2^U)] + \frac{\beta^2 (m_2^U)^2}{n \Delta^4} [\beta^4 m_4^U + 4\beta^2 m_2^U m_2^\varepsilon + 4\beta m_1^U m_3^\varepsilon + m_4^\varepsilon \\ - \beta^4 (m_2^U)^2 - (m_2^\varepsilon)^2] + O(n^{-2});$$

$$(ii) \quad E(\hat{\phi}_C) = \frac{1}{\beta} + \frac{2m_2^\varepsilon}{n\beta^3 m_2^U} + \frac{3m_1^U m_3^\varepsilon}{n\beta^4 (m_2^U)^2} + \frac{(m_4^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2)}{n\beta^5 (m_2^U)^2} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\phi}_C) = \frac{m_4^U m_2^\delta}{n\beta^2 (m_2^U)^2} + \frac{m_2^\varepsilon m_2^\delta}{n\beta^4 m_2^U} - \frac{m_4^U}{n\beta^2 (m_2^U)^2} + \frac{2m_1^U m_3^\varepsilon}{n\beta^5 (m_2^U)^2} + \frac{((m_4^\varepsilon) - (m_2^\varepsilon)^2)}{n\beta^6 (m_2^U)^2} \\ + O(n^{-2}),$$

onde

$$\Delta = \beta^2 m_2^U + m_2^\varepsilon. \quad (6.17)$$

Prova: (i) Note que o estimador $\hat{\phi}_Q$ em (6.5) é função de $(\sum_{i=1}^n Y_i^2, \sum_{i=1}^n X_i Y_i)$. Tomando a esperança e a variância da expansão de Taylor de $\hat{\phi}_Q$ em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(\sum_{i=1}^n Y_i^2),$

$E(\sum_{i=1}^n X_i Y_i)$, obtém-se

$$E(\hat{\phi}_Q) = \frac{\beta m_2^U}{\Delta} + \frac{\beta m_2^2}{n^2 \Delta^3} \text{Var}(\ell_3) - \frac{1}{n^2 \Delta^2} \text{Cov}(\ell_1, \ell_3) + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\phi}_Q) = \frac{1}{n^2 \Delta^2} \text{Var}(\ell_1) + \frac{\beta^2 (m_2^U)^2}{n^2 \Delta^4} \text{Var}(\ell_3) - \frac{2\beta m_2^U}{n^2 \Delta^3} \text{Cov}(\ell_1, \ell_3) + O(n^{-2}),$$

onde $\ell_1 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$, como dado em (6.9) e

$$\ell_3 = \sum_{i=1}^n Y_i^2. \quad (6.18)$$

É fácil mostrar que

$$E(\ell_3) = n\Delta, \quad (6.19)$$

$$\text{Var}(\ell_3) = n\beta^4 m_4^U + 4n\beta^2 m_2^U m_2^\varepsilon + 4n\beta m_1^U m_3^\varepsilon + nm_4^\varepsilon - n\beta^4 (m_2^U)^2 - n(m_2^\varepsilon)^2, \quad (6.20)$$

$$\text{Cov}(\ell_1, \ell_3) = n\beta^3 m_4^U - n\beta^3 (m_2^U)^2 + nm_1^U m_3^\varepsilon + 2n\beta m_2^U m_2^\varepsilon. \quad (6.21)$$

As expressões da esperança e da variância de $\hat{\phi}_Q$ seguem pela substituição de (6.14), (6.20) e (6.21) nas expressões acima.

(ii) O estimador $\hat{\phi}_C$ em (6.7) é função de $(\sum_{i=1}^n X_i Y_i / n, \sum_{i=1}^n Y_i^2 / n - m_2^\varepsilon)$. Tomando a esperança e a variância da expansão de Taylor de $\hat{\phi}_C$ em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(\sum_{i=1}^n X_i Y_i / n), E(\sum_{i=1}^n Y_i^2 / n - m_2^\varepsilon))$, obtém-se

$$E(\hat{\phi}_C) = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^5 (m_2^U)^2} \text{Var}(s_2) - \frac{1}{\beta^4 (m_2^U)^2} \text{Cov}(s_1, s_2) + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\phi}_C) = \frac{1}{\beta^4 (m_2^U)^2} \text{Var}(s_1) + \frac{1}{\beta^6 (m_2^U)^2} \text{Var}(s_2) - \frac{2}{\beta^5 (m_2^U)^2} \text{Cov}(s_1, s_2) + O(n^{-2}),$$

onde

$$s_1 = \sum_{i=1}^n \frac{X_i Y_i}{n} = \frac{\ell_1}{n} \quad \text{e} \quad s_2 = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i^2}{n} - m_2^\varepsilon = \frac{\ell_3}{n} - m_2^\varepsilon.$$

De (6.14), (6.20), (6.21), tem-se

$$\text{Var}(s_1) = \frac{\text{Var}(\ell_1)}{n^2} = \frac{\beta^2 m_4^U m_2^\delta}{n} - \frac{\beta^2 (m_2^U)^2}{n} - \frac{m_2^\varepsilon m_2^U m_2^\delta}{n}, \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(s_2) &= \frac{\text{Var}(\ell_3)}{n^2} = \frac{\beta^4 m_4^U}{n} + \frac{4\beta^2 m_2^U m_2^\varepsilon}{n} + \frac{4\beta m_1^U m_3^\varepsilon}{n} + \frac{m_4^\varepsilon}{n} \\ &\quad - \frac{\beta^4 (m_2^U)^2}{n} - \frac{(m_2^\varepsilon)^2}{n}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\text{Cov}(s_1, s_2) = \frac{\text{Cov}(\ell_1, \ell_3)}{n^2} = \frac{\beta^3 m_4^U}{n} - \frac{\beta^3 (m_2^U)^2}{n} - \frac{m_1^U m_3^\varepsilon}{n} + \frac{2\beta m_2^U m_2^\varepsilon}{n}. \quad (6.24)$$

O resultado segue substituindo-se (6.22) – (6.24) nas expressões acima. $\square$

Teorema 6.1 *Sob o modelo (6.2) com a suposição de que m_i^ε , m_i^δ e m_i^U , $1 \leq i \leq 4$ existam e com m_2^δ conhecido, segue que*

$$\begin{aligned} (i) \quad EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= m_2^U (m_2^\delta - 1)^2 + \frac{m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^2}{k\beta^2} + \frac{3m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^3}{n\beta^2} - \frac{2m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^2}{n\beta^2} \\ &\quad + \frac{m_2^\delta m_4^U m_2^\varepsilon}{nk\beta^2 (m_2^U)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - 4m_3^\delta \right) + \frac{3(m_2^\delta)^3 m_2^\varepsilon}{nk\beta^2 m_2^U} \left(\frac{m_2^\varepsilon}{\beta^2} + \frac{m_4^U}{m_2^U} \right) \\ &\quad + \frac{m_2^\delta m_4^U}{nm_2^U} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - 4m_3^\delta + 3(m_2^\delta)^2 - 2m_2^\delta + \frac{2m_3^\delta}{m_2^\delta} \right) + O(n^{-2}), \\ (ii) \quad EQM(\hat{U}_{0C}) &= \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2} + \frac{m_2^\delta m_2^\varepsilon}{n\beta^2} + \frac{m_4^U m_2^\varepsilon}{nk\beta^2 m_2^\delta (m_2^U)^2} \left[\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - 4m_3^\delta \right] \\ &\quad + \frac{3m_2^\delta m_2^\varepsilon}{nk\beta^2 m_2^U} \left[\frac{m_2^\varepsilon}{\beta^2} + \frac{m_4^U}{m_2^U} \right] + \frac{m_4^U}{nm_2^U m_2^\delta} \left[\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - 2m_3^\delta + (m_2^\delta)^2 \right] + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Prova: (i) O erro quadrático médio é dado por

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= E(\hat{U}_{0CQ} - U_0)^2 = E((\hat{U}_{0CQ} - E(\hat{U}_{0CQ})) - (U_0 - E(U_0))) \\ &\quad + (E(\hat{U}_{0CQ}) - E(U_0)))^2 \\ &= E((\hat{U}_{0CQ} - E(\hat{U}_{0CQ})) - (U_0 - E(U_0)))^2 + (E(\hat{U}_{0CQ}) - E(U_0))^2 \\ &\quad + 2(E(\hat{U}_{0CQ}) - E(U_0))E(\hat{U}_{0CQ} - E(\hat{U}_{0CQ}) - U_0 + E(U_0)) \\ &= \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) + \text{Var}(U_0) - 2\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0CQ}) + (E(\hat{U}_{0CQ}) - E(U_0))^2. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Inicialmente, será obtida a variância de $\hat{U}_{0CQ}$.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \text{Var}\left(\frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_Q}\right) = E\left(\frac{\bar{Y}_0^2}{\hat{\beta}_Q^2}\right) - E^2(\bar{Y}_0)E^2\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) \\
&= \left(\beta^2\sigma_u^2 + \beta^2(m_1^U)^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k}\right) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q^2}\right) - \beta^2(m_1^U)^2 E^2\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) \\
&= \left(\beta^2\sigma_u^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k}\right) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q^2}\right) + \beta^2(m_1^U)^2 \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right), \tag{6.26}
\end{aligned}$$

onde $\sigma_u^2 = m_2^U - (m_1^U)^2$ e $\sigma_\varepsilon^2 = m_2^\varepsilon - (m_1^\varepsilon)^2 = m_2^\varepsilon$. Como no Capítulo 3, a variância de $\hat{U}_{0CQ}$ depende de $1/\hat{\beta}_Q$ e de $1/\hat{\beta}_Q^2$, que podem ser escritos, depois de uma expansão em série de Taylor, como

$$\frac{1}{\hat{\beta}_Q} = \frac{1}{E(\hat{\beta}_Q)} - \frac{(\hat{\beta}_Q - E(\hat{\beta}_Q))}{E^2(\hat{\beta}_Q)} + \frac{(\hat{\beta}_Q - E(\hat{\beta}_Q))^2}{E^3(\hat{\beta}_Q)} + O_p(n^{-2}), \tag{6.27}$$

$$\frac{1}{\hat{\beta}_Q^2} = \frac{1}{E^2(\hat{\beta}_Q)} - \frac{2(\hat{\beta}_Q - E(\hat{\beta}_Q))}{E^3(\hat{\beta}_Q)} + \frac{3(\hat{\beta}_Q - E(\hat{\beta}_Q))^2}{E^4(\hat{\beta}_Q)} + O_p(n^{-2}). \tag{6.28}$$

Logo,

$$E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q^2}\right) = \frac{1}{E^2(\hat{\beta}_Q)} + \frac{3\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^4(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) = \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^4(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2}).$$

Como o Lema 6.2 estabelece que $E(\hat{\beta}_Q) = \beta/m_2^\delta + \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q) + O(n^{-2})$, onde $\text{vício}^*(\hat{\beta}_Q) = \frac{\beta m_4^U}{n(m_2^U)^2(m_2^\delta)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta\right) = O(n^{-1})$, pode-se expandir $1/E(\hat{\beta}_Q)$, $1/E^2(\hat{\beta}_Q)$, $1/E^3(\hat{\beta}_Q)$ e $1/E^4(\hat{\beta}_Q)$ como função do $\text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)$ em série de Taylor em torno do zero, obtendo-se

$$\frac{1}{E(\hat{\beta}_Q)} = \frac{m_2^\delta}{\beta} - \frac{(m_2^\delta)^2 \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)}{\beta^2} + O(n^{-2}), \tag{6.29}$$

$$\frac{1}{E^2(\hat{\beta}_Q)} = \frac{(m_2^\delta)^2}{\beta^2} - \frac{2(m_2^\delta)^3 \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)}{\beta^3} + O(n^{-2}), \tag{6.30}$$

$$\frac{1}{E^3(\hat{\beta}_Q)} = \frac{(m_2^\delta)^3}{\beta^3} - \frac{3(m_2^\delta)^4 \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)}{\beta^4} + O(n^{-2}), \tag{6.31}$$

$$\frac{1}{E^4(\hat{\beta}_Q)} = \frac{(m_2^\delta)^4}{\beta^4} - \frac{4(m_2^\delta)^5 \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)}{\beta^5} + O(n^{-2}). \tag{6.32}$$

Logo, de (6.30) e (6.32), obtém-se

$$E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q^2}\right) = \frac{(m_2^\delta)^2}{\beta^2} - \frac{2(m_2^\delta)^3 \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)}{\beta^3} + \frac{3(m_2^\delta)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^4} + O(n^{-2}), \quad (6.33)$$

$$\text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) = \frac{(m_2^\delta)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^4} + O(n^{-2}). \quad (6.34)$$

Substituindo (6.33), (6.34), o vício^{*}($\hat{\beta}_Q$) e $\text{Var}(\hat{\beta}_Q)$ dada no Lema 6.2 na expressão (6.26), chega-se à expressão da variância de $\hat{U}_{0CQ}$. Agora,

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = E\left(\frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_Q}\right) = E(\bar{Y}_0)E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) = \beta m_1^U E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right). \quad (6.35)$$

Da expressão (6.27), (6.29) e (6.31), tem-se

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) &= \frac{1}{E(\hat{\beta}_Q)} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^3(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2}) \\ &= \frac{m_2^\delta}{\beta} - \frac{(m_2^\delta)^2 \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)}{\beta^2} + \frac{(m_2^\delta)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^3} + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Substituindo (6.36), o vício^{*}($\hat{\beta}_Q$) e $\text{Var}(\hat{\beta}_Q)$ dada no Lema 6.2 na expressão (6.35), chega-se à expressão da esperança de $\hat{U}_{0CQ}$ dada por

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = m_2^\delta m_1^U + \frac{m_1^U m_4^U}{n(m_2^U)^2}((m_2^\delta)^2 - m_3^\delta) + \frac{m_1^U m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^2}{n\beta^2 m_2^U} + O(n^{-2}). \quad (6.37)$$

Da definição de covariância, obtém-se

$$\text{Cov}(\hat{U}_{0CQ}, U_0) = E(\hat{U}_{0CQ}U_0) - E(U_0)E(\hat{U}_{0CQ}) = E(\hat{U}_{0CQ}U_0) - m_1^U E(\hat{U}_{0CQ}).$$

Contudo

$$E(U_0\hat{U}_{0CQ}) = E\left(\frac{U_0\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_Q}\right) = E\left(\frac{\beta U_0^2 + \bar{\varepsilon}_0 U_0}{\hat{\beta}_Q}\right) = \beta m_2^U E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right).$$

Logo, de (6.35) e (6.36), tem-se

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{U}_{0CQ}, U_0) &= \beta m_2^U E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) - \beta (m_1^U)^2 E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) = \beta \sigma_u^2 E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) \\ &= \sigma_u^2 \left[m_2^\delta - \frac{(m_2^\delta)^2 \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)}{\beta} + \frac{(m_2^\delta)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^2} \right] + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Assim, de (6.25), (6.26), (6.33), (6.34), (6.37) e (6.38), obtém-se

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= \sigma_u^2 + \left(\beta^2 \sigma_u^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} \right) \left(\frac{(m_2^\delta)^2}{\beta^2} - \frac{2(m_2^\delta)^3 \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)}{\beta^3} + \frac{3(m_2^\delta)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^4} \right) \\ &+ \frac{(m_1^U)^2 (m_2^\delta)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^2} - 2\sigma_u^2 \left[m_2^\delta - \frac{(m_2^\delta)^2 \text{vício}^*(\hat{\beta}_Q)}{\beta} + \frac{(m_2^\delta)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^2} \right] \\ &+ \left[m_1^U (m_2^\delta - 1) + \frac{m_1^U m_4^U}{n(m_2^U)^2} ((m_2^\delta)^2 - m_3^\delta) + \frac{m_1^U m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^2}{n\beta^2 m_2^U} \right] + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Substituindo o vício^{*}($\hat{\beta}_Q$) e $\text{Var}(\hat{\beta}_Q)$ dada no Lema 6.2 e com alguma álgebra, chega-se ao resultado desejado.

(ii) De maneira similar ao item (i), tem-se que

$$EQM(\hat{U}_{0C}) = \text{Var}(U_0) + \text{Var}(\hat{U}_{0C}) - 2\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0C}) + (E(\hat{U}_{0C}) - E(U_0))^2.$$

Para calcular a variância de $\hat{U}_{0C}$, retome a expressão (6.26), que é dada por

$$\text{Var}(\hat{U}_{0C}) = \left(\beta^2 \sigma_u^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} \right) E \left(\frac{1}{\hat{\beta}_C^2} \right) + \beta^2 (m_1^U)^2 \text{Var} \left(\frac{1}{\hat{\beta}_C} \right). \quad (6.39)$$

Pelas expressões (6.27), (6.28) e procedendo-se de modo equivalente aos resultados (6.29) – (6.32), obtém-se

$$E \left(\frac{1}{\hat{\beta}_C^2} \right) = \frac{1}{\beta^2} - \frac{2\text{vício}(\hat{\beta}_C)}{\beta^3} + \frac{3\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^4} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var} \left(\frac{1}{\hat{\beta}_C} \right) = \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^4} + O(n^{-2}).$$

Logo,

$$\text{Var}(\hat{U}_{0C}) = \left(\beta^2 \sigma_u^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} \right) \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{2\text{vício}(\hat{\beta}_C)}{\beta} + \frac{3\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^2} \right) + \frac{(m_1^U)^2 \text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^2} + O(n^{-2}). \quad (6.40)$$

De (6.35), tem-se

$$E(\hat{U}_{0C}) = \beta m_1^U E \left(\frac{1}{\hat{\beta}_C} \right).$$

Da expressão (6.27) e procedendo de modo equivalente às expressões (6.29) e (6.31), tem-se

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C}\right) &= \frac{1}{E(\hat{\beta}_C)} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{E^3(\hat{\beta}_C)} + O(n^{-2}) \\ &= \frac{1}{\beta} - \frac{\text{vício}(\hat{\beta}_C)}{\beta^2} + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^3} + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Logo, substituindo o vício($\hat{\beta}_C$) e $\text{Var}(\hat{\beta}_C)$ dados no Lema 6.2 na expressão (6.41), chega-se à expressão da esperança de $\hat{U}_{0C}$ dada por

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0C}) &= \beta m_1^U E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C}\right) = m_1^U - \frac{m_1^U \text{vício}(\hat{\beta}_C)}{\beta} + \frac{m_1^U \text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^2} + O(n^{-2}) \\ &= m_1^U + \frac{m_1^U m_2^\delta m_2^\varepsilon}{n\beta^2 m_2^U} + \frac{m_1^U m_4^U}{nm_2^\delta (m_2^U)^2} ((m_2^\delta)^2 - m_3^\delta) + O(n^{-2}). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Pelas expressões (6.38) e (6.41), obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{U}_{0C}, U_0) &= E(\hat{U}_{0C}U_0) - E(U_0)E(\hat{U}_{0C}) = \beta\sigma_u^2 E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C}\right) \\ &= \sigma_u^2 - \frac{\sigma_u^2 \text{vício}(\hat{\beta}_C)}{\beta} + \frac{\sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^2} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Logo,

$$EQM(\hat{U}_{0C}) = \sigma_u^2 + \text{Var}(\hat{U}_{0C}) - 2\sigma_u^2 + \frac{2\sigma_u^2 \text{vício}(\hat{\beta}_C)}{\beta} - \frac{2\sigma_u^2 \text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^2} + O(n^{-2}), \quad (6.43)$$

pois $E(\hat{U}_{0C}) - E(U_0) = E(\hat{U}_{0C}) - m_1^U = O(n^{-1})$, então

$$(E(\hat{U}_{0C}) - E(\hat{U}_0))^2 = O(n^{-2}).$$

Substituindo-se (6.40), o vício($\hat{\beta}_C$) e $\text{Var}(\hat{\beta}_C)$ dados no Lema 6.2 na expressão (6.43), chega-se ao resultado desejado. $\square$

Teorema 6.2 *Sob o modelo (6.2) com a suposição de que m_i^ε , m_i^δ e m_i^U , $1 \leq i \leq 4$, existam e com m_2^ε conhecido, segue que*

$$(i) \quad EQM(\hat{U}_{0IQ}) = m_2^U - \frac{2\beta^2(m_2^U)^2}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{2\beta^2(m_2^U)^2}{n\Delta^3} [4\beta^2 m_2^U m_2^\varepsilon + 3\beta m_1^U m_3^\varepsilon]$$

$$\begin{aligned}
& + m_4^\varepsilon + \beta^4 (m_2^U)^2] + \frac{2\beta m_2^U m_2^\varepsilon}{n\Delta^3} [\beta^3 m_4^U - \beta^3 (m_2^U)^2 + m_3^\varepsilon m_1^U + 2\beta m_2^\varepsilon m_2^U] \\
& + \left(\beta^2 m_2^U + \frac{m_2^\varepsilon}{k} \right) \left[\frac{\beta^2 (m_2^U)^2}{\Delta^2} + \frac{1}{n\Delta^2} (\beta^2 m_4^U m_2^\varepsilon - 3\beta^2 (m_2^U)^2 + m_2^\varepsilon m_2^U m_2^\varepsilon) \right. \\
& + \frac{\beta^2 (m_2^U)^2}{n\Delta^4} (\beta^4 m_4^U + 12\beta^2 m_2^U m_2^\varepsilon + 10\beta m_1^U m_3^\varepsilon + 3m_4^\varepsilon + \beta^4 (m_2^U)^2 - (m_2^\varepsilon)^2) \\
& \left. - \frac{2\beta m_2^U}{n\Delta^4} (\Delta + m_2^\varepsilon) (\beta^3 m_4^U - \beta^3 (m_2^U)^2 + m_1^U m_3^\varepsilon + 2\beta m_2^U m_2^\varepsilon) \right] + O(n^{-2}); \\
(ii) \quad EQM(\hat{U}_{0IC}) &= \frac{m_4^U (m_2^\delta - 1)}{nm_2^U} + \frac{m_2^\varepsilon m_2^\delta}{n\beta^2} + \frac{2m_1^U m_3^\varepsilon}{n\beta^3 m_2^U} + \frac{(m_4^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2)}{n\beta^4 m_2^U} + \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2} \\
& + \frac{m_2^\varepsilon m_4^U (m_2^\delta - 1)}{nk\beta^2 (m_2^U)^2} + \frac{m_2^\delta (m_2^\varepsilon)^2}{nk\beta^4 m_2^U} + \frac{4(m_2^\varepsilon)^2}{nk\beta^4 m_2^U} + \frac{8m_1^U m_2^\varepsilon m_3^\varepsilon}{nk\beta^5 (m_2^U)^2} + \frac{3m_2^\varepsilon (m_4^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2)}{nk\beta^6 (m_2^U)^2} + O(n^{-2}),
\end{aligned}$$

onde Δ é dado em (6.17).

Prova: (i) Como visto no Teorema 6.1, o erro quadrático médio pode ser escrito como

$$EQM(\hat{U}_{0IQ}) = \text{Var}(U_0) + \text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) - 2\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0IQ}) + (E(\hat{U}_{0IQ}) - E(U_0))^2 \quad (6.44)$$

Primeiramente, tem-se

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) &= \text{Var}(\bar{Y}_0 \hat{\phi}_Q) = E(\bar{Y}_0^2) E(\hat{\phi}_Q^2) - E^2(\bar{Y}_0) E^2(\hat{\phi}_Q) \\
&= \left(\beta^2 m_2^U + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} \right) E(\hat{\phi}_Q^2) - \beta^2 (m_1^U)^2 E^2(\hat{\phi}_Q) \quad (6.45)
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
E(\hat{U}_{0IQ}) &= E(\bar{Y}_0 \hat{\phi}_Q) = E(\bar{Y}_0) E(\hat{\phi}_Q) = \beta m_1^U E(\hat{\phi}_Q) \\
&= \frac{\beta^2 m_2^U m_1^U}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{\beta^2 m_2^U m_1^U}{n\Delta^3} [4\beta^2 m_2^U m_2^\varepsilon + 3\beta m_1^U m_3^\varepsilon + m_4^\varepsilon + \beta^4 (m_2^U)^2] \\
&\quad - \frac{\beta m_1^U m_2^\varepsilon}{n\Delta^3} [\beta^3 m_4^U - \beta^3 (m_2^U)^2 + m_1^U m_3^\varepsilon + 2\beta m_2^\varepsilon m_2^U] + O(n^{-2}). \quad (6.46)
\end{aligned}$$

Da definição de covariância e da expressão (6.46), tem-se

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0IQ}) &= E(U_0 \hat{U}_{0IQ}) - E(U_0) E(\hat{U}_{0IQ}) \\
&= E(\hat{\phi}_Q \bar{Y}_0 U_0) - \beta (m_1^U)^2 E(\hat{\phi}_Q) = \beta m_2^U E(\hat{\phi}_Q) - \beta (m_1^U)^2 E(\hat{\phi}_Q) \\
&= \beta \sigma_u^2 E(\hat{\phi}_Q). \quad (6.47)
\end{aligned}$$

Substituindo (6.45) – (6.47) na expressão (6.44), tem-se

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \sigma_u^2 + \left(\beta^2 m_2^U + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} \right) E(\hat{\phi}_Q^2) - \beta^2 (m_1^U)^2 E^2(\hat{\phi}_Q) \\
&\quad - 2\beta \sigma_u^2 E(\hat{\phi}_Q) + (\beta m_1^U E(\hat{\phi}_Q) - m_1^U)^2 \\
&= m_2^U - (m_1^U)^2 + \beta^2 m_2^U E(\hat{\phi}_Q^2) + \frac{m_2^\varepsilon}{k} E(\hat{\phi}_Q^2) - \beta^2 (m_1^U)^2 E^2(\hat{\phi}_Q) \\
&\quad - 2\beta m_2^U E(\hat{\phi}_Q) + 2\beta (m_1^U)^2 E(\hat{\phi}_Q) + \beta^2 (m_1^U)^2 E^2(\hat{\phi}_Q) + (m_1^U)^2 \\
&\quad - 2\beta (m_1^U)^2 E(\hat{\phi}_Q) \\
&= m_2^U - 2\beta m_2^U E(\hat{\phi}_Q) + \left(\beta^2 m_2^U + \frac{m_2^\varepsilon}{k} \right) E(\hat{\phi}_Q^2).
\end{aligned}$$

Substituindo $E(\hat{\phi}_Q)$ e $E(\hat{\phi}_Q^2) = \text{Var}(\hat{\phi}_Q) + E^2(\hat{\phi}_Q)$, obtidos no Lema 6.3, chega-se ao resultado desejado.

(ii) Da expressão (6.46) e do Lema 6.3, obtém-se

$$\begin{aligned}
E(\hat{U}_{0IC}) &= \beta m_1^U E(\hat{\phi}_C) = m_1^U + \frac{2m_1^U m_2^\varepsilon}{n\beta^2 m_2^U} + \frac{m_1^U (m_4^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2)}{n\beta^4 (m_2^U)^2} \\
&\quad + \frac{3(m_1^U)^2 m_3^\varepsilon}{n\beta^3 (m_2^U)^2} + O(n^{-2}).
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Então, $E(\hat{U}_{0IC}) - E(U_0) = O(n^{-1})$. Logo, de (6.44), (6.45) e (6.47), tem-se

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0IC}) &= \text{Var}(U_0) + \text{Var}(\hat{U}_{0IC}) - 2\text{Cov}(U_0, \hat{U}_{0IC}) \\
&= \sigma_u^2 + \left(\beta^2 m_2^U + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} \right) E(\hat{\phi}_C^2) - \beta^2 (m_1^U)^2 E^2(\hat{\phi}_C) - 2\beta \sigma_u^2 E(\hat{\phi}_C).
\end{aligned}$$

Substituindo $E(\hat{\phi}_C)$ e $E(\hat{\phi}_C^2)$, obtidos no Lema 6.3, conclui-se a prova. $\square$

Das expressões (6.37), (6.42), (6.46), (6.48), tem-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{U}_{0CQ}) &= m_2^\delta m_1^U, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{U}_{0C}) &= m_1^U, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\beta^2 m_2^U m_1^U}{\Delta} \\
\text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{U}_{0IC}) &= m_1^U.
\end{aligned}$$

É evidente que os quatro previsores são viciados no sentido de não terem a mesma esperança que $U_0(E(U_0) = m_1^U)$. Contudo os previsores clássico e inverso combinados com os estimadores consistentes, $\hat{\beta}_C$ e $\hat{\phi}_C$, são assintoticamente não viciados, enquanto os outros previsores não são. Para n e k grandes, não há mudança de comportamento desses vícios.

O estudo dos erros quadráticos médios é feito baseado nos Teoremas 6.1 e 6.2. Note que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= m_2^U (m_2^\delta - 1)^2 + \frac{m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^2}{k\beta^2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0C}) &= \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{m_2^U (m_2^\varepsilon)^2}{\Delta^2} + \frac{\beta^2 m_2^\varepsilon (m_2^U)^2}{k\Delta^2} \\ \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IC}) &= \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2}. \end{aligned}$$

Portanto, no limite,

$$EQM(\hat{U}_{0C}) = EQM(\hat{U}_{0IC}),$$

isto é, os erros quadráticos médios dos previsores clássico e inverso têm o mesmo comportamento quando combinados com os estimadores consistentes. Como $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0IC}$ têm os mesmos vícios e EQM's no limite, serão denotados por $\hat{U}_C$. Além disso,

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_C) = m_2^U (m_2^\delta - 1)^2 + \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2} ((m_2^\delta)^2 - 1),$$

de modo que, se $m_2^\delta > 1$, $EQM(\hat{U}_C) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0IQ}) - EQM(\hat{U}_C) &= \frac{m_2^U (m_2^\varepsilon)^2}{\Delta^2} + \frac{m_2^\varepsilon}{k} \left(\frac{\beta^2 (m_2^U)^2}{\Delta^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) \\ &= \frac{m_2^U (m_2^\varepsilon)^2}{\Delta^2} - \frac{(m_2^\varepsilon)^2}{k\beta^2 \Delta^2} (\Delta + \beta^2 m_2^U) = \frac{(m_2^\varepsilon)^2}{\Delta^2} \left(m_2^U - \frac{(\Delta + \beta^2 m_2^U)}{k\beta^2} \right), \end{aligned}$$

de modo que, se $k > 2 + \frac{m_2^\varepsilon}{\beta^2 m_2^U}$, tem-se que $EQM(\hat{U}_C) < EQM(\hat{U}_{0IQ})$. Agora,

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_{0IQ}) = m_2^U \left[(m_2^\delta - 1)^2 - \frac{(m_2^\varepsilon)^2}{\Delta^2} \right]$$

$$+\frac{m_2^\varepsilon}{k} \left[\frac{(m_2^\delta)^2}{\beta^2} - \frac{\beta^2(m_2^U)^2}{\Delta^2} \right],$$

isto é, a comparação irá depender de β , m_2^U , m_2^ε e m_2^δ .

Quando n e k tendem ao infinito, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= m_2^U (m_2^\delta - 1)^2 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0C}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IC}) = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{m_2^U (m_2^\varepsilon)^2}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Esses resultados mostram que os previsores clássico e inverso combinados com os estimadores consistentes, $\hat{\beta}_C$ e $\hat{\phi}_C$, são consistentes, enquanto que os que envolvem os estimadores de mínimos quadrados não são. No caso especial onde $m_2^\delta = 1$, o predictor clássico com mínimos quadrados passa a ser consistente. A comparação entre os previsores clássico e inverso combinados com os estimadores de mínimos quadrados, $\hat{\beta}_Q$ e $\hat{\phi}_Q$, irá depender dos parâmetros do modelo.

6.2.2 Um estudo de simulação

Nesta subseção serão descritos os resultados de um estudo de simulação com o objetivo de verificar o comportamento das aproximações para os vícios e para os erros quadráticos médios obtidas nesta seção. Neste estudo, 1.000 amostras de tamanho $n = 10, 20, 30, 50$ e 100 foram geradas de acordo com o modelo especificado pela equação (6.2), com $\beta = 0.5$, $U_0 = 15$, $k = 2$. O vetor ε foi gerado a partir da distribuição $N(0, 1)$. O vetor δ foi gerado a partir da distribuição $N(1, 0.1)$, enquanto que o vetor $\mathbf{U}$ foi gerado a partir da distribuição $N(15, 9)$. Para cada amostra foram calculados os previsores $\hat{U}_{0CQ}$, $\hat{U}_{0C}$, $\hat{U}_{0IQ}$ e $\hat{U}_{0IC}$, e então foram obtidos os erros quadráticos médios e os vícios empíricos (ou simulados) como definidos na Seção 3.7. Com as especificações do modelo acima, foram obtidos os vícios e os erros quadráticos médios aproximados dos previsores dados em

(6.37), (6.42), (6.46), (6.48) e nos Teoremas 6.1 e 6.2. As Tabelas 6.1 e 6.2 apresentam, respectivamente, os vícios e os erros quadráticos médios para cada previsor proposto.

Tabela 6.1: Vício de $\hat{U}_0$.

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0C}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0IC}$	
	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	aproximado
10	1.358	1.376	-0.129	-0.113	-0.236	2.742	-0.008	0.052
20	1.424	1.438	-0.069	-0.056	-0.249	1.245	-0.018	0.026
30	1.433	1.458	-0.061	-0.038	-0.267	0.746	-0.033	0.017
50	1.531	1.475	0.028	-0.023	-0.179	0.347	0.051	0.010
100	1.503	1.488	0.003	-0.011	-0.241	0.047	-0.001	0.005

Tabela 6.2: Erro quadrático médio de $\hat{U}_0$.

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0C}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0IC}$	
	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	aproximado
10	7.169	7.616	4.417	4.681	4.980	4.591	5.105	5.188
20	5.916	6.188	3.219	3.340	3.458	3.295	3.518	3.594
30	5.677	5.712	2.998	2.894	3.208	2.863	3.250	3.062
50	5.123	5.331	2.298	2.536	2.335	2.518	2.383	2.638
100	4.980	5.046	2.249	2.268	2.263	2.259	2.281	2.319

Essas tabelas mostram que, em geral, as aproximações obtidas nesta seção são boas. Observa-se que os previsores clássico e inverso combinados com os estimadores consistentes têm seus vícios, em valores absolutos, convergindo para zero. Com as especificações do modelo acima, e pelos estudos da seção anterior, tem-se que os vícios aproximados dos previsores clássico e inverso com mínimos quadrados convergem, respectivamente, para 1.5 e -0.252 . Esses valores, como pode ser verificado, devem ser obtidos quando o tamanho da amostra aumenta. Em relação ao erro quadrático médio aproximado, quando $n \rightarrow \infty$, deve-se ter

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &\rightarrow 2.42, & EQM(\hat{U}_{0C}) &\rightarrow 2.0, \\ EQM(\hat{U}_{0IQ}) &\rightarrow 1.933 \text{ e } & EQM(\hat{U}_{0IC}) &\rightarrow 2.0 \end{aligned}$$

Observa-se que na simulação há uma tendência em direção a esses valores e que apenas o previsor $\hat{U}_{0CQ}$ ainda está longe (com $n = 100$) do valor teórico previsto. Nota-se também que os valores empíricos e aproximados estão próximos, mostrando que as aproximações obtidas para os erros quadráticos médios são boas.

6.3 Modelo de calibração multiplicativo funcional

Nesta seção será considerado o caso em que U_i , $i = 1, \dots, n$, é fixo, ou seja, $U_1, \dots, U_n$ são parâmetros incidentais. Enfatizando que esse caso não é estudado diretamente em Hwang (1986), pois ele se dedica apenas ao modelo estrutural. A exemplo do que foi feito na Seção 6.3, um estudo do comportamento assintótico dos estimadores clássico e inverso de U_0 , combinados com os estimadores usuais de mínimos quadrados de β e ϕ e com estimadores consistentes desses parâmetros é apresentado quando k é considerado fixo.

6.3.1 Estimadores de U_0 e suas propriedades

Como possíveis estimadores serão considerados os estimadores clássico e inverso definidos em (6.3) e (6.4), ou seja,

$$\hat{U}_{0C} = \frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}} \quad \text{e} \quad \hat{U}_{0I} = \hat{\phi} \bar{Y}_0,$$

onde $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ são estimadores de β e ϕ , respectivamente.

Os estimadores de mínimos quadrados são aqueles definidos em (6.5), ou seja,

$$\hat{\beta}_Q = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_Q = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n Y_i^2}. \quad (6.49)$$

A seguir serão apresentados estimadores consistentes para β e ϕ .

Lema 6.4 *Sob o modelo (2.5), (2.6) e (6.1), com a suposição de que a sequência $\{U_i, i = 1, 2, \dots\}$ dos parâmetros incidentais é tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U} = \mu < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{U_i^2}{n} = \delta^2 < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{U_i^4}{n} = \gamma^4 < \infty, \quad (6.50)$$

onde $\bar{U} = \sum_{i=1}^n U_i/n$ e com a suposição de que $m_i^\varepsilon, m_i^\delta, 1 \leq i \leq 4$, existam e com m_2^δ conhecido, então

$$\hat{\beta}_C = m_2^\delta \hat{\beta}_Q \quad (6.51)$$

é um estimador fortemente consistente para β .

Prova: Tem-se que $X_1^2, X_2^2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes com $E(X_i^2) = m_2^\delta U_i^2$ e $\text{Var}(X_i^2) = U_i^4(m_4^\delta - (m_2^\delta)^2)$, $i = 1, 2, \dots$, de modo que $\sum_{n=1}^\infty \frac{\text{Var}(X_n^2)}{n^2} < \infty$. Pela Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov, conclui-se que $\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - m_2^\delta \frac{\sum_{i=1}^n U_i^2}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$. Pelas suposições (6.50), tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n U_i^2}{n} = \delta^2$, de modo que $\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} m_2^\delta \delta^2$. De modo similar, mostra-se que

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i Y_i}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} \beta \delta^2.$$

Como $\hat{\beta}_C$ é uma função contínua de $\sum_{i=1}^n X_i^2/n$ e de $\sum_{i=1}^n X_i Y_i/n$, segue de (6.51) que $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}_C = \beta$ com probabilidade um, o que prova a consistência forte. $\square$

Lema 6.5 *Sob o modelo (2.5), (2.6) e (6.1), com as suposições (6.50) do Lema 6.4 e assumindo que m_2^ε e m_2^δ são conhecidos, segue que*

$$\hat{\phi}_C = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i / n}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 / n - m_2^\varepsilon} \quad \text{e} \quad \hat{\phi}'_C = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{m_2^\delta \sum_{i=1}^n X_i Y_i} \quad (6.52)$$

são estimadores fortemente consistentes para ϕ .

Prova: De modo equivalente ao Lema 6.4, mostra-se que

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n} \xrightarrow{\text{q.c.}} \frac{\delta^2}{\phi^2} + m_2^\varepsilon.$$

A prova da consistência forte desses estimadores é concluída observando-se que esses estimadores são funções contínuas de $\sum_{i=1}^n Y_i^2/n$, $\sum_{i=1}^n X_i Y_i/n$ e $\sum_{i=1}^n X_i^2/n$ e do Lema 6.4. $\square$

Como na seção anterior, tem-se que $\hat{\phi}'_C = 1/\hat{\beta}_C$, logo,

$$\hat{U}_{0I} = \hat{U}_{0C}.$$

Os estimadores que serão considerados são

$$\begin{aligned}\hat{U}_{0C} &= \frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_C}, & \hat{U}_{0CQ} &= \frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_Q}, \\ \hat{U}_{0IC} &= \hat{\phi}_C \bar{Y}_0 & \text{e} & \hat{U}_{0IQ} = \hat{\phi}_Q \bar{Y}_0,\end{aligned}$$

onde $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0IC}$ são os estimadores clássico e inverso de U_0 , respectivamente, combinados com os estimadores consistentes, $\hat{\beta}_C$ dado em (6.51) e $\hat{\phi}_C$ dado em (6.52), enquanto que $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ são os estimadores clássico e inverso de U_0 , respectivamente, combinados com os estimadores de mínimos quadrados de β e ϕ dados em (6.49).

Lema 6.6 *Sob o modelo (6.2) com a suposição de que m_i^ε e m_i^δ , $1 \leq i \leq 4$, existam e com m_2^δ conhecido, segue que*

$$\begin{aligned}(i) \quad E(\hat{\beta}_Q) &= \frac{\beta}{m_2^\delta} + \frac{\beta (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n(m_2^\delta)^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) + O(n^{-2}) \\ &e \\ \text{Var}(\hat{\beta}_Q) &= \frac{m_2^\varepsilon}{nm_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i/n)} + \frac{\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{nm_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left[1 + \frac{m_4^\delta}{(m_2^\delta)^3} - \frac{2m_3^\delta}{(m_2^\delta)^2} \right] + O(n^{-2}), \\ (ii) \quad E(\hat{\beta}_C) &= \beta + \frac{\beta (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{nm_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) + O(n^{-2}) \\ &e \\ \text{Var}(\hat{\beta}_C) &= \frac{m_2^\delta m_2^\varepsilon}{n (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{\beta^2 m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left[1 + \frac{m_4^\delta}{(m_2^\delta)^3} - \frac{2m_3^\delta}{(m_2^\delta)^2} \right] + O(n^{-2}),\end{aligned}$$

Prova: (i) Como visto no Lema 6.2, $\hat{\beta}_Q$ é função de $(\sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n X_i Y_i)$. Tomando a esperança e a variância da expansão de Taylor de $\hat{\beta}_Q$ em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(\sum_{i=1}^n X_i^2), E(\sum_{i=1}^n X_i Y_i))$, obtém-se

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}_Q) &= \frac{\beta}{m_2^\delta} + \frac{\beta}{n^2(m_2^\delta)^3 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \text{Var}(\ell_2) - \frac{1}{n^2(m_2^\delta)^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \text{Cov}(\ell_1, \ell_2) \\ &+ O(n^{-2})\end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\beta}_Q) &= \frac{1}{n^2(m_2^\delta)^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \text{Var}(\ell_1) + \frac{\beta^2}{n^2(m_2^\delta)^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \text{Var}(\ell_2) \\ &- \frac{2\beta \text{Cov}(\ell_1, \ell_2)}{n^2(m_2^\delta)^3 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} + O(n^{-2}),\end{aligned} \tag{6.54}$$

onde ℓ_1 e ℓ_2 são dados em (6.9).

É fácil mostrar que

$$E(\ell_1) = n\beta \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right), \quad (6.55)$$

$$E(\ell_2) = nm_2^\delta \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right), \quad (6.56)$$

$$\text{Var}(\ell_1) = n\beta^2 m_2^\delta \left(\sum_{i=1}^n U_i^4/n \right) - n\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n U_i^4/n \right) + nm_2^\varepsilon m_2^\delta \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right), \quad (6.57)$$

$$\text{Var}(\ell_2) = n(m_4^\delta - (m_2^\delta)^2) \left(\sum_{i=1}^n U_i^4/n \right), \quad (6.58)$$

$$\text{Cov}(\ell_1, \ell_2) = n\beta(m_3^\delta - m_2^\delta) \left(\sum_{i=1}^n U_i^4/n \right). \quad (6.59)$$

Substituindo (6.57) – (6.59) nas expressões (6.53) e (6.54), os resultados são obtidos após algumas manipulações algébricas.

(ii) Como $\hat{\beta}_C = m_2^\delta \hat{\beta}_Q$, tem-se que

$$E(\hat{\beta}_C) = m_2^\delta E(\hat{\beta}_Q) \quad \text{e} \quad \text{Var}(\hat{\beta}_C) = (m_2^\delta)^2 \text{Var}(\hat{\beta}_Q).$$

O resultado segue pela substituição das igualdades do item (i) nas expressões acima. $\square$

Lema 6.7 *Sob o modelo (6.2) com a suposição de que m_i^ε e m_i^δ , $1 \leq i \leq 4$, existam e com m_2^ε conhecido, segue que*

$$\begin{aligned} (i) \quad E(\hat{\phi}_Q) &= \frac{\beta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{d} + \frac{\beta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{nd^3} [m_4^\varepsilon - 3(m_2^\varepsilon)^2] + \frac{2\beta^3 m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{nd^3} \\ &+ \frac{m_3^\varepsilon \bar{U}}{nd^3} \left[3\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) - m_2^\varepsilon \right] + O(n^{-2}), \\ e \\ \text{Var}(\hat{\phi}_Q) &= \frac{\beta^2 (m_2^\delta - 1) (\sum_{i=1}^n U_i^4/n) + m_2^\varepsilon m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{nd^2} \\ &+ \frac{\beta^2 (m_4^\varepsilon - 5(m_2^\varepsilon)^2) (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{nd^3} + \frac{2\beta m_3^\varepsilon \bar{U} (\sum_{i=1}^n U_i^2/n) [(\sum_{i=1}^n U_i^2/n) - m_2^\varepsilon]}{nd^4} \\ &+ O(n^{-2}), \end{aligned}$$

$$(ii) \quad E(\hat{\phi}_C) = \frac{1}{\beta} + \frac{2m_2^\varepsilon}{n\beta^3 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{3m_3^\varepsilon \bar{U}}{n\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} + \frac{(m_4^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2)}{n\beta^5 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\phi}_C) &= \frac{(\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} (m_2^\delta - 1) + \frac{m_2^\varepsilon m_2^\delta}{n\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{2m_3^\varepsilon \bar{U}}{n\beta^5 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \\ &+ \frac{(m_4^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2)}{n\beta^6 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

onde

$$d = \beta^2 \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) + m_2^\varepsilon. \quad (6.60)$$

Prova: (i) Como visto no Lema 6.3, $\hat{\phi}_Q$ é função de $(\sum_{i=1}^n Y_i^2, \sum_{i=1}^n X_i Y_i)$. Tomando a esperança e a variância da expansão de Taylor de $\hat{\phi}_Q$ em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(\sum_{i=1}^n Y_i^2), E(\sum_{i=1}^n X_i Y_i))$, obtém-se

$$E(\hat{\phi}_Q) = \frac{\beta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{d} + \frac{\beta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{n^2 d^3} \text{Var}(\ell_3) - \frac{\text{Cov}(\ell_1, \ell_3)}{n^2 d^2} + O(n^{-2})$$

e

$$\text{Var}(\hat{\phi}_Q) = \frac{1}{n^2 d^2} \text{Var}(\ell_1) + \frac{\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{n^2 d^4} \text{Var}(\ell_3) - \frac{2\beta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n) \text{Cov}(\ell_1, \ell_3)}{n^2 d^3} + O(n^{-2}),$$

onde ℓ_1 é dado em (6.9) e ℓ_3 é dado em (6.18).

É fácil mostrar que

$$E(\ell_3) = nd, \quad (6.61)$$

$$\text{Var}(\ell_3) = 4n\beta^2 m_2^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) + 4\beta m_3^\varepsilon \bar{U} + nm_4^\varepsilon - n(m_2^\varepsilon)^2, \quad (6.62)$$

$$\text{Cov}(\ell_1, \ell_3) = 2n\beta m_2^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) + nm_3^\varepsilon \bar{U}. \quad (6.63)$$

Substituindo (6.62) e (6.63) nas expressões acima, o resultado segue.

(ii) O estimador de $\hat{\phi}_C$ é função de $(\ell_1/n, \ell_3/n - m_2^\varepsilon)$. Tomando a esperança e a variância da expansão de Taylor de $\hat{\phi}_C$ em torno do ponto $\mathbf{a} = (E(\ell_1/n), E(\ell_3/n - m_2^\varepsilon))$, obtém-se

$$E(\hat{\phi}_C) = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^5 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \text{Var}(s_2) - \frac{1}{\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \text{Cov}(s_1, s_2) + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\phi}_C) &= \frac{1}{\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \text{Var}(s_1) + \frac{1}{\beta^6 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \text{Var}(s_2) \\ &\quad - \frac{2}{\beta^5 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \text{Cov}(s_1, s_2) + O(n^{-2}),\end{aligned}$$

onde $s_1 = \ell_1/n$ e $s_2 = \frac{\ell_3}{n} - m_2^\varepsilon$.

De (6.57), (6.62) e (6.63), tem-se

$$\begin{aligned}\text{Var}(s_1) &= \frac{\text{Var}(\ell_1)}{n^2} = \frac{\beta^2 m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n} - \frac{\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n} \\ &\quad + \frac{m_2^\varepsilon m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{n},\end{aligned}\tag{6.64}$$

$$\text{Var}(s_2) = \frac{\text{Var}(\ell_3)}{n^2} = \frac{4\beta^2 m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{n} + \frac{4\beta m_3^\varepsilon \bar{U}}{n} + \frac{m_4^\varepsilon}{n} - \frac{(m_2^\varepsilon)^2}{n},\tag{6.65}$$

$$\text{Cov}(s_1, s_2) = \frac{\text{Cov}(\ell_1, \ell_3)}{n^2} = \frac{2\beta m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{n} + \frac{m_3^\varepsilon \bar{U}}{n}.\tag{6.66}$$

O resultado segue substituindo-se (6.64) – (6.66) nas expressões acima. $\square$

Teorema 6.3 *Sob o modelo (6.2) com a suposição de que m_i^ε e m_i^δ , $1 \leq i \leq 4$, existam e com m_2^δ conhecido, segue que*

$$(i) \ E(\hat{U}_{0CQ}) = m_2^\delta U_0 + \frac{U_0 m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^2}{n\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{U_0 (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} ((m_2^\delta)^2 - m_3^\delta) + O(n^{-2})$$

e

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^2}{k\beta^2} + \frac{3(m_2^\delta)^3 (m_2^\varepsilon)^2}{nk\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{3(m_2^\delta)^3 m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{nk\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \\ &\quad + \frac{m_2^\delta m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{nk\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - 4m_3^\delta \right) + \frac{U_0^2 (m_2^\delta)^3 m_2^\varepsilon}{n\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} \\ &\quad + \frac{U_0^2 (m_2^\delta)^3 (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left[1 + \frac{m_4^\delta}{(m_2^\delta)^3} - \frac{2m_3^\delta}{(m_2^\delta)^2} \right] + O(n^{-2});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad E(\hat{U}_{0C}) &= U_0 + \frac{U_0 m_2^\delta m_2^\varepsilon}{n\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{U_0 (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{nm_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} ((m_2^\delta)^2 - m_3^\delta) + O(n^{-2}) \\
&e \\
\text{Var}(\hat{U}_{0C}) &= \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2} + \frac{3m_2^\delta (m_2^\varepsilon)^2}{nk\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{U_0^2 m_2^\delta m_2^\varepsilon}{n\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} \\
&+ \frac{m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{nk\beta^2 m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - 4m_3^\delta + 3(m_2^\delta)^2 \right) \\
&+ \frac{U_0^2 m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left[1 + \frac{m_4^\delta}{(m_2^\delta)^3} - \frac{2m_3^\delta}{(m_2^\delta)^2} \right] + O(n^{-2}). \tag{6.67}
\end{aligned}$$

Prova: (i) Como em (6.35), pode-se escrever

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = E\left(\frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_Q}\right) = E(\bar{Y}_0)E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) = \beta U_0 E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right). \tag{6.68}$$

Da expressão (6.27) e procedendo de modo equivalente aos resultados (6.29) e (6.31), tem-se

$$E(\hat{U}_{0CQ}) = \beta U_0 \left[\frac{m_2^\delta}{\beta} - \frac{(\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n\beta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) + \frac{(m_2^\delta)^3 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^3} \right] + O(n^{-2}).$$

Substituindo $\text{Var}(\hat{\beta}_Q)$ dada no Lema 6.6, chega-se à expressão da esperança de $\hat{U}_{0CQ}$.

Para calcular a variância de $\hat{U}_{0CQ}$, retome a expressão (6.26), isto é,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \text{Var}\left(\frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_Q}\right) = E\left(\frac{\bar{Y}_0^2}{\hat{\beta}_Q^2}\right) - E^2(\bar{Y}_0)E^2\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) \\
&= \left(\beta^2 U_0^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k}\right) E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q^2}\right) - \beta^2 U_0^2 E^2\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q^2}\right) + \beta^2 U_0^2 \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right).
\end{aligned}$$

Pelas expressões (6.27), (6.28), procedendo de modo equivalente aos resultados (6.30) e (6.32) e utilizando o Lema 6.6, obtém-se

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q^2}\right) &= \frac{1}{E^2(\hat{\beta}_Q)} + \frac{3\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^4(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2}) \\
&= \frac{(m_2^\delta)^2}{\beta^2} - \frac{2m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) + \frac{3(m_2^\delta)^4}{\beta^4} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + O(n^{-2})
\end{aligned}$$

e

$$\text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_Q}\right) = \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{E^4(\hat{\beta}_Q)} + O(n^{-2}) = \frac{(m_2^\delta)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^4} + O(n^{-2}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0CQ}) &= \frac{m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^2}{k\beta^2} - \frac{2m_2^\varepsilon m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{nk\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) \\ &\quad + \frac{3m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^4}{k\beta^4} \text{Var}(\hat{\beta}_Q) + \frac{U_0^2 (m_2^\delta)^4 \text{Var}(\hat{\beta}_Q)}{\beta^2} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

O resultado segue do Lema 6.6.

(ii) Das expressões (6.27), (6.68) e procedendo de modo equivalente aos resultados (6.29)

e (6.31), tem-se

$$\begin{aligned} E(\hat{U}_{0C}) &= E\left(\frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_C}\right) = E(\bar{Y}_0)E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C}\right) = \beta U_0 E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C}\right) \\ &= \beta U_0 \left[\frac{1}{\beta} - \frac{(\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n\beta m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) + \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^3} \right] + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Substituindo $\text{Var}(\hat{\beta}_C)$ dada no Lema 6.6, chega-se à expressão da esperança de $\hat{U}_{0C}$. Para o cálculo da variância de $\hat{U}_{0C}$, retome mais uma vez a expressão (6.26), que é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0C}) &= \text{Var}\left(\frac{\bar{Y}_0}{\hat{\beta}_C}\right) = E\left(\frac{\bar{Y}_0^2}{\hat{\beta}_C^2}\right) - E^2(\bar{Y}_0)E^2\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C}\right) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k} E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C^2}\right) + \beta^2 U_0^2 \text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C}\right). \end{aligned}$$

Como foi feito no item (i), pelas expressões (6.27), (6.28) e procedendo de modo equivalente aos resultados (6.30) e (6.32), obtém-se

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C^2}\right) &= \frac{1}{E^2(\hat{\beta}_C)} + \frac{3\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{E^4(\hat{\beta}_C)} + O(n^{-2}) \\ &= \frac{1}{\beta^2} - \frac{2(\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n\beta^2 m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) + \frac{3\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^4} + O(n^{-2}) \end{aligned}$$

e

$$\text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\beta}_C}\right) = \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{E^4(\hat{\beta}_C)} + O(n^{-2}) = \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^4} + O(n^{-2}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{U}_{0C}) &= \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2} - \frac{2(\sum_{i=1}^n U_i^4/n) m_2^\varepsilon}{nk\beta^2 m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - m_3^\delta \right) + \frac{3m_2^\varepsilon \text{Var}(\hat{\beta}_C)}{k\beta^4} \\ &\quad + \frac{U_0^2 \text{Var}(\hat{\beta}_C)}{\beta^2} + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

O resultado segue do Lema 6.6. $\square$

Com o teorema acima, podem ser obtidos os erros quadráticos médios lembrando que este pode ser calculado pela soma da variância com o quadrado do vício. Como o vício do estimador $\hat{U}_{0C}$ tem ordem n^{-1} , a aproximação até primeira ordem do erro quadrático médio desse estimador coincide com sua variância dada no teorema acima.

Para o estimador $\hat{U}_{0CQ}$, tem-se

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &= U_0^2(m_2^\delta - 1)^2 + \frac{3(m_2^\delta)^3(m_2^\varepsilon)^2}{nk\beta^4(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{m_2^\varepsilon(m_2^\delta)^2}{k\beta^2} \\ &\quad + \frac{m_2^\delta m_2^\varepsilon(\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{nk\beta^2(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left(\frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} - 4m_3^\delta + 3(m_2^\delta)^2 \right) + \frac{U_0^2(m_2^\delta)^2 m_2^\varepsilon(3m_2^\delta - 2)}{n\beta^2(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} \\ &\quad + \frac{U_0^2 m_2^\delta(\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \left[3(m_2^\delta)^2 - 4m_3^\delta - 2m_2^\delta + \frac{m_4^\delta}{m_2^\delta} + \frac{2m_3^\delta}{m_2^\delta} \right] + O(n^{-2}). \quad (6.69) \end{aligned}$$

Teorema 6.4 *Sob o modelo (6.2) com a suposição de que m_i^ε e m_i^δ , $1 \leq i \leq 4$, existam e com m_2^ε conhecido, segue que*

$$\begin{aligned} (i) \quad E(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{U_0\beta^2(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{d} + \frac{U_0\beta^2(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{nd^3}(m_4^\varepsilon - 3(m_2^\varepsilon)^2) \\ &\quad + \frac{2U_0\beta^4 m_2^\varepsilon(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{nd^3} + \frac{U_0\beta m_3^\varepsilon \bar{U}}{nd^3} [3\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) - m_2^\varepsilon] + O(n^{-2}) \\ e \\ \text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{\beta^2 m_2^\varepsilon(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{kd^2} + \frac{m_2^\varepsilon [\beta^2(m_2^\delta - 1)(\sum_{i=1}^n U_i^4/n) + m_2^\varepsilon m_2^\delta(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)]}{nk d^2} \\ &\quad + \frac{\beta^2 m_2^\varepsilon(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{nk d^4} (3m_4^\varepsilon - 11(m_2^\varepsilon)^2) + \frac{4\beta^4(m_2^\varepsilon)^2(\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^3}{nk d^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4\beta m_2^\varepsilon m_3^\varepsilon \bar{U} (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{nk d^4} \left[2\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) - m_2^\varepsilon \right] \\
& + \frac{\beta^2 U_0^2}{nd^2} \left[\beta^2 (m_2^\delta - 1) \left(\sum_{i=1}^n U_i^4/n \right) + m_2^\varepsilon m_2^\delta \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) \right] \\
& + \frac{\beta^4 U_0^2 (m_4^\varepsilon - 5(m_2^\varepsilon)^2) (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{nd^4} + \frac{2\beta^3 U_0^2 m_3^\varepsilon \bar{U} (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{nd^4} \left[\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) - m_2^\varepsilon \right] \\
& + O(n^{-2}); \\
(ii) \quad E(\hat{U}_{0IC}) &= U_0 + \frac{2U_0 m_2^\varepsilon}{n\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{3U_0 \bar{U} m_3^\varepsilon}{n\beta^3 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} + \frac{U_0 (m_4^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2)}{n\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} + O(n^{-2}) \\
e \\
\text{Var}(\hat{U}_{0IC}) &= \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2} + \frac{U_0^2 (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{n (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} (m_2^\delta - 1) + \frac{U_0^2 m_2^\varepsilon m_2^\delta}{n\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{2m_3^\varepsilon \bar{U} U_0^2}{n\beta^3 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} \\
& + \frac{U_0^2 (m_3^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2)}{n\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} + \frac{m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^4/n)}{nk\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} (m_2^\delta - 1) + \frac{m_2^\delta (m_2^\varepsilon)^2}{nk\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} \\
& + \frac{8m_2^\varepsilon m_3^\varepsilon \bar{U}}{nk\beta^5 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} + \frac{4(m_2^\varepsilon)^2}{nk\beta^4 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)} + \frac{3m_2^\varepsilon (m_3^\varepsilon - (m_2^\varepsilon)^2)}{nk\beta^6 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2} + O(n^{-2}), \quad (6.70)
\end{aligned}$$

onde d é dado em (6.60).

Prova: (i) Como no Teorema 6.2, tem-se

$$E(\hat{U}_{0IQ}) = E(\bar{Y}_0 \hat{\phi}_Q) = E(\bar{Y}_0) E(\hat{\phi}_Q) = \beta U_0 E(\hat{\phi}_Q).$$

Utilizando o Lema 6.7, chega-se à expressão da esperança de $\hat{U}_{0IQ}$.

Para calcular a variância de $\hat{U}_{0IQ}$, retome a expressão (6.45), isto é,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{U}_{0IQ}) &= \text{Var}(\bar{Y}_0 \hat{\phi}_Q) = E(\bar{Y}_0^2) E(\hat{\phi}_Q^2) - E^2(\bar{Y}_0) E^2(\hat{\phi}_Q) \\
&= \left(\frac{m_2^\varepsilon}{k} + \beta^2 U_0^2 \right) E(\hat{\phi}_Q^2) - \beta^2 U_0^2 E^2(\hat{\phi}_Q) = \frac{m_2^\varepsilon}{k} E(\hat{\phi}_Q^2) + \beta^2 U_0^2 \text{Var}(\hat{\phi}_Q).
\end{aligned}$$

Substituindo $E(\hat{\phi}_Q)$ e $E(\hat{\phi}_Q^2)$ obtidos no Lema 6.7, chega-se ao resultado desejado.

(ii) As provas são similares àsquelas apresentadas no item (i). □

Com o teorema acima, podem ser obtidos os erros quadráticos médios. Observe que $\text{vício}(\hat{U}_{0IC}) = O(n^{-1})$, de modo que a aproximação até primeira ordem do erro quadrático

médio desse estimador coincide com sua variância dada na expressão (6.70). Quanto ao estimador $\hat{U}_{0IQ}$, tem-se

$$\begin{aligned}
EQM(\hat{U}_{0IQ}) = & \frac{\beta^2 m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{kd^2} + \frac{m_2^\varepsilon [\beta^2(m_2^\delta - 1) (\sum_{i=1}^n U_i^4/n) + m_2^\varepsilon m_2^\delta (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)]}{nkd^2} \\
& + \frac{\beta^2 m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{nkd^4} (3m_4^\varepsilon - 11(m_2^\varepsilon)^2) + \frac{4\beta^4 (m_2^\varepsilon)^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^3}{nkd^4} \\
& + \frac{4\beta m_2^\varepsilon m_3^\varepsilon \bar{U} (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{nkd^4} \left(2\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) - m_2^\varepsilon \right) + \frac{U_0^2 (m_2^\varepsilon)^2}{d^2} \\
& + \frac{\beta^2 U_0^2}{nd^2} \left[\beta^2 (m_2^\delta - 1) \left(\sum_{i=1}^n U_i^4/n \right) + m_2^\varepsilon m_2^\delta \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) \right] \\
& - \frac{2U_0^2 m_2^\varepsilon \beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{nd^4} (m_4^\varepsilon - 3(m_2^\varepsilon)^2) + \frac{\beta^4 U_0^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{nd^4} (m_4^\varepsilon - 9(m_2^\varepsilon)^2) \\
& - \frac{2\beta U_0^2 m_2^\varepsilon m_3^\varepsilon \bar{U}}{nd^4} \left[3\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) - m_2^\varepsilon \right] \\
& + \frac{2\beta^3 U_0^2 m_3^\varepsilon \bar{U} (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{nd^4} \left[\beta^2 \left(\sum_{i=1}^n U_i^2/n \right) - m_2^\varepsilon \right] + O(n^{-2}). \tag{6.71}
\end{aligned}$$

Dos Teoremas 6.3 e 6.4, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{U}_{0CQ}) &= m_2^\delta U_0, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{U}_{0C}) &= U_0, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{U_0 \beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{d} \\
\text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{U}_{0IC}) &= U_0.
\end{aligned}$$

Como pode ser facilmente observado, os quatro estimadores são viciados, mas os estimadores clássico e inverso combinados com os estimadores consistentes de β e ϕ são assintoticamente não viciados. Note que não há mudança no comportamento dos vícios quando k também é grande.

O estudo dos erros quadráticos médios é feito baseado nas expressões (6.67), (6.69) – (6.71). Note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0CQ}) = U_0^2 (m_2^\delta - 1)^2 + \frac{m_2^\varepsilon (m_2^\delta)^2}{k\beta^2},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0C}) &= \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IQ}) &= \frac{U_0^2(m_2^\varepsilon)^2}{d^2} + \frac{\beta^2 m_2^\varepsilon (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{kd^2}, \\ \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} EQM(\hat{U}_{0IC}) &= \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2}. \end{aligned}$$

Segue, então que, no limite,

$$EQM(\hat{U}_{0C}) = EQM(\hat{U}_{0IC}),$$

isto é, no limite os erros quadráticos médios dos estimadores clássico e inverso combinados com os estimadores consistentes, $\hat{\beta}_C$ e $\hat{\phi}_C$, têm o mesmo comportamento. Além disso, chamando $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0IC}$ de $\hat{U}_C$, para simplificar a notação, tem-se

$$EQM(\hat{U}_{0CQ}) - EQM(\hat{U}_C) = U_0^2(m_2^\delta - 1)^2 + \frac{m_2^\varepsilon}{k\beta^2}((m_2^\delta)^2 - 1),$$

logo, se $m_2^\delta > 1$, tem-se que $EQM(\hat{U}_C) < EQM(\hat{U}_{0CQ})$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0IQ}) - EQM(\hat{U}_C) &= \frac{U_0^2(m_2^\varepsilon)^2}{d^2} + \frac{m_2^\varepsilon}{k} \left(\frac{\beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)^2}{d^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) \\ &= \frac{(m_2^\varepsilon)^2}{d^2} \left(U_0^2 - \frac{(d + \beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n))}{k\beta^2} \right), \end{aligned}$$

de modo que, se $k > \frac{d + \beta^2 (\sum_{i=1}^n U_i^2/n)}{\beta^2 U_0^2}$, $EQM(\hat{U}_C) < EQM(\hat{U}_{0IQ})$, a comparação entre $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ irá depender dos parâmetros do modelo e serão estudadas futuramente.

Agora, quando $n \rightarrow \infty$ e $k \rightarrow \infty$, tem-se que

$$\begin{aligned} EQM(\hat{U}_{0CQ}) &\rightarrow U_0^2(m_2^\delta - 1)^2, \\ EQM(\hat{U}_{0C}) &= EQM(\hat{U}_{0IC}) = EQM(\hat{U}_C) \rightarrow 0 \\ \text{e} \quad EQM(\hat{U}_{0IQ}) &\rightarrow \frac{U_0^2(m_2^\varepsilon)^2}{d^2}. \end{aligned}$$

Então, os resultados acima implicam que os estimadores $\hat{U}_{0C}$ e $\hat{U}_{0IC}$ são consistentes. Quando $m_2^\delta = 1$, o estimador $\hat{U}_{0CQ}$ também passa a ser consistente. A comparação entre $\hat{U}_{0CQ}$ e $\hat{U}_{0IQ}$ irá depender dos parâmetros do modelo, podendo ser estudada numericamente. Tal comparação deverá ser objeto de um estudo futuro.

6.3.2 Um estudo de simulação

Nesta subseção será apresentado um estudo de simulação, no qual é verificado o comportamento dos vícios e dos erros quadráticos médios aproximados dos estimadores propostos nesta seção. Neste estudo, 1.000 amostras são geradas de acordo com o modelo (6.2), com $\beta = 0.5$, $U_0 = 15.0$, $k = 2$, para $n = 10, 20, 30, 50, 100$. O vetor ε foi gerado a partir da distribuição $N(0, 0.1)$, o vetor δ foi gerado a partir da distribuição $N(0, 1)$, enquanto que os parâmetros $U_1, U_2, \dots, U_n$ foram gerados a partir da distribuição $U(10, 30)$. Para os modelos acima foram obtidos os vícios aproximados de $\hat{U}_{0CQ}$, $\hat{U}_{0C}$, $\hat{U}_{0IQ}$ e $\hat{U}_{0IC}$, dados nos Teoremas 6.3 e 6.4, e os erros quadráticos médios aproximados desses estimadores dados em (6.67), (6.69) – (6.71). Também foram calculados os estimadores $\hat{U}_{0CQ}$, $\hat{U}_{0C}$, $\hat{U}_{0IQ}$ e $\hat{U}_{0IC}$, para cada amostra e então obtidos os seus erros quadráticos médios e seus vícios empíricos (ou simulados) derivados na Seção 3.7. Os resultados são mostrados nas Tabelas 6.3 e 6.4.

Tabela 6.3: Vício de $\hat{U}_0$.

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0C}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0IC}$	
	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	aproximado
10	1.344	1.359	-0.142	-0.128	-0.175	-0.119	-0.027	0.030
20	1.400	1.427	-0.091	-0.066	-0.167	-0.125	-0.029	0.014
30	1.405	1.448	-0.087	-0.047	-0.188	-0.129	-0.049	0.009
50	1.516	1.468	0.015	-0.028	-0.106	-0.139	0.040	0.006
100	1.491	1.484	-0.007	-0.014	-0.157	-0.147	-0.007	0.003

Tabela 6.4: Erro quadrático médio de $\hat{U}_0$.

n	$\hat{U}_{0CQ}$		$\hat{U}_{0C}$		$\hat{U}_{0IQ}$		$\hat{U}_{0IC}$	
	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	aproximado	empírico	aproximado
10	7.031	7.211	4.338	4.450	4.873	4.847	4.952	4.933
20	5.726	5.957	3.122	3.245	3.385	3.443	3.427	3.493
30	5.696	5.564	3.084	2.867	3.320	3.000	3.353	3.040
50	5.056	5.219	2.279	2.532	2.374	2.606	2.412	2.638
100	4.954	4.950	2.255	2.271	2.245	2.300	2.267	2.325

Com as especificações do modelo acima e pelos estudos da seção anterior, tem-se que os vícios e os erros quadráticos médios aproximados, quando $n \rightarrow \infty$, são

$$\begin{array}{ll}
 \text{vício}(\hat{U}_{0CQ}) \rightarrow 1.5 & \text{e} \quad EQM(\hat{U}_{0CQ}) \rightarrow 2.42, \\
 \text{vício}(\hat{U}_{0C}) \rightarrow 0 & \text{e} \quad EQM(\hat{U}_{0C}) \rightarrow 2.0, \\
 \text{vício}(\hat{U}_{0IQ}) \rightarrow -0.137 & \text{e} \quad EQM(\hat{U}_{0IQ}) \rightarrow 1.982, \\
 \text{vício}(\hat{U}_{0IC}) \rightarrow 0 & \text{e} \quad EQM(\hat{U}_{0IC}) \rightarrow 2.0.
 \end{array}$$

Observa-se que na simulação há uma tendência em direção a esses valores e que apenas o erro quadrático médio do estimador $\hat{U}_{0CQ}$ ainda está longe (para $n = 100$) do valor teórico previsto, mas os valores empíricos e aproximados estão próximos. Essas tabelas também mostram que, em geral, as aproximações obtidas nesta seção são boas, mesmo para amostra de tamanho pequeno.

Conclusões e sugestões para futuros trabalhos

Nessa tese foi feito um estudo estatístico teórico de alguns modelos de calibração linear absoluta, contemplando tanto o modelo funcional quanto o estrutural no caso aditivo. Alguns resultados preliminares foram também obtidos para o caso do modelo multiplicativo. Para o modelo de calibração usual (sem erros nas variáveis) são obtidos alguns resultados em Shukla (1972). A obtenção de resultados similares para os modelos de calibração com erros nas variáveis foi possibilitada por resultados recentes (Patefield, 1977, Gleser, 1985, Cheng e Van Ness, 1991) na estimação dos parâmetros da reta de regressão, principalmente para o caso funcional. Nesse caso, a metodologia usual para o estudo do comportamento assintótico dos estimadores de máxima verossimilhança não pode ser considerada devido a presença dos parâmetros incidentais.

Para o modelo de calibração funcional (Capítulos 3 e 4) foram propostos estimadores clássicos (Eisenhart, 1939) e inverso (Krutchkoff, 1967) para U_0 . Com o propósito de obter um estimador com propriedades desejáveis (consistência, por exemplo) para amostras de tamanho grande, é preferível o uso do estimador clássico combinado com os estimadores de máxima verossimilhança de α e β , no caso de λ conhecido (Capítulo 3), ou combinado com os estimadores consistentes de α e β , no caso de σ_δ^2 conhecido (Capítulo 4), quando não há suficiente informação a priori a respeito do desconhecido U_0 . Os estimadores clássicos têm um comportamento melhor que o estimador inverso, no sentido de ter um erro quadrático médio menor, exceto em alguns casos triviais. Em muitos casos não é

possível tomar mais que uma observação do valor de Y correspondente ao valor desconhecido U_0 . Em tais situações, sendo o erro quadrático médio tomado como critério de comparação, o estimador inverso parece ser preferível quando U_0 está próximo à média dos valores observados de U . No caso estrutural (Capítulo 5), o previsor condicional (Lwin e Maritz, 1980) teve um comportamento bastante inferior ao dos previsores clássicos e inverso, enquanto que os previsores clássicos de U_0 combinado com os estimadores de máxima verossimilhança de α e β foram, em geral, os mais adequados para esse modelo. Nos estudos preliminares do modelo de calibração multiplicativo (Capítulo 6), observou-se que os estimadores (previsores, no caso estrutural) clássico e inverso combinados com os estimadores consistentes de β e ϕ (regressão inversa) têm a propriedade da consistência quando os tamanhos das amostras são grandes. Comparações quanto ao erro quadrático médio ainda devem ser aprofundadas em futuras investigações. Uma extensão natural desse capítulo deverá compreender o caso em que α é desconhecido.

Dando continuidade ao estudo feito nos Capítulos 3, 4 e 5, seria de interesse investigar modelos sem a suposição de normalidade, admitindo apenas que as distribuições dos erros pertencem a uma família de distribuições com o quarto momento finito, a exemplo do que foi feito no Capítulo 6. Uma outra linha de pesquisa que poderia ser desenvolvida e que teria grande interesse na literatura envolve procedimentos robustos, que podem ser obtidos substituindo-se a distribuição normal para os erros do modelo por distribuições mais resistentes à presença de observações extremas como a t -Student e a normal contaminada, que combinam simplicidade com generalidade, já que podem ser aplicadas a muitos problemas práticos. Seria também bastante interessante estudar o comportamento dos previsores clássico e inverso no modelo de calibração ultraestrutural. O modelo ultraestrutural foi proposto por Dolby (1976), sendo uma generalização dos modelos funcional e estrutural. Essa generalização assume que os valores observados da variável independente têm médias distintas e não uma média comum como no caso do modelo estrutural

ordinário.

Extensões dos resultados apresentados nessa tese para modelos múltiplos ou multivariados poderiam ser também objeto de pesquisa futura. Um modelo interessante e que vem recebendo bastante ênfase na literatura é o modelo considerado por Lieftinck-Koeijers (1988), onde é considerado um estudo de calibração para o modelo $y_{ij} = \alpha_i + \beta_i x_j + e_{ij}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$, ou seja, para um valor de x_j são feitas p medições, $y_{1j}, \dots, y_{pj}$ da variável dependente, $j = 1, \dots, n$.

Referências bibliográficas

- Anderson, T.W. (1958). *Introduction to multivariate statistical analysis*. New York: Wiley.
- Barnett, V.D. (1966). Discussion of a paper by P. Sprent. *Journal of The Royal Statistical Society, B*, **28**, 291–292.
- Barnett, V.D. (1969). Simultaneous pairwise linear structural relationships. *Biometrics*, **25**, 129–142.
- Berkson, J. (1969). Estimation of a linear function for a calibration line: consideration of a recent proposal. *Technometrics*, **11**, 649–660.
- Bickel, P.J. & Doksum, K.A. (1977). *Mathematical Statistics*. Holden-Day, Inc. San Francisco.
- Bolfarine, H. & Galea-Rojas, M.J. (1995). Structural comparative calibration using the EM algorithm. *Journal of Applied Statistics*, **22**, 277–292.
- Bolfarine, H. & Cordani, L.K. (1993). Estimation of a structural linear regression model with a known reliability ratio. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **45**, 531–540.
- Bolfarine, H., Rodrigues, J. & Cordani, L.K. (1992). O modelo de regressão com erros nas variáveis. Texto do minicurso do X SINAPE.
- Brown, P.J. (1982). Multivariate calibration (with discussion). *Journal of The Royal Statistical Society, B*, **44**, 237–321.
- Brown, P.J. (1993). *Measurement, regression and calibration*. Oxford: Oxford University Press.
- Brownlee, K.A. (1965). *Statistical theory and methodology in science and engineering*. 2.ed. New York: John Wiley.

- Carroll, R.J. & Spiegelman, C.H. (1986). The effect of ignoring small measurement errors in precision instrument calibration. *Journal of Quality Technology*, **18**, 170–173.
- Cheng, C.L. & Van Ness, J.W. (1991). On the unreplicated ultrastructural model. *Biometrika*, **78**, 442–445.
- Clark, R.M. (1980). Calibration, cross-validation and carbon-14 II. *Journal of The Royal Statistical Society, A*, **143**, 177–194.
- Cochran, W.C. (1943). The comparison of different scales of measurement for experimental results. *The Annals of Mathematical Statistics*, **14**, 205–216.
- Davies, R.B. & Hutton, B. (1975). The effect of errors in the independent variables in linear regression. *Biometrika*, **62**, 383–391.
- Dolby, G.R. (1976). The ultrastructural relation: a synthesis of the functional and structural relations. *Biometrika*, **63**, 39–50.
- Dolby, G.R. & Lipton, S. (1972). Maximum likelihood estimation of the general nonlinear functional relationship with replicated observations and correlated errors. *Biometrika*, **59**, 121–129.
- Dunsmore, I.R. (1968). A Bayesian approach to calibration. *Journal of The Royal Statistical Society, B*, **30**, 396–405.
- Eisenhart, C. (1939). The interpretation of certain regression methods and their use in biological and industrial research. *The Annals of Mathematical Statistics*, **10**, 168–186.
- Fuller, W.A. (1987). *Measurement error models*. New York: Wiley.
- Galea-Rojas, M.J. (1995). Calibração comparativa estrutural e funcional. Tese, IME-USP.
- Graybill, F.A. (1976). *Theory and application of linear model*. North Situate, Duxbury Press.
- Gleser, L.J. (1985). A note on G.R. Dolby's unreplicated ultrastructural model. *Biometrika*, **72**, 117–124.
- Halperin, M. (1970). On inverse estimation in linear regression. *Technometrics*, **12**, 727–736.

- Hoadley, B. (1970). A Bayesian look at inverse linear regression. *Journal of American Statistical Association*, **65**, 356–369.
- Hunter, W.G. & Lamboy, W.F. (1981). A Bayesian analysis of the linear calibration problem. *Technometrics*, **23**, 323–328.
- Hunter, W.G. & Lamboy, W.F. (1981a). Response to discussion of their 1981 paper. *Technometrics*, **23**, 344–350.
- Hwang, J.T. (1986). Multiplicative errors-in-variables models with applications to recent data released by the U.S. Department of Energy. *Journal of American Statistical Association*, **81**, 680–688.
- Kelly, G. (1984). The influence function in the errors in variables problem. *The Annals of Statistics*, **12**, 87–100.
- Kendall, M.G. & Stuart, A. (1952). *The advanced theory of statistics*. v.1. 5.ed. London: Griffin.
- Ketellapper, R.H. (1983). On estimating parameters in a simple linear errors-in-variables model. *Technometrics*, **25**, 43–47.
- Knafl, G., Spiegelman, C., Sacks, J. & Ylvisaker, D. (1984). Nonparametrics calibration. *Technometrics*, **26**, 233–241.
- Krutchkoff, R.G. (1967). Classical and inverse regression methods of calibration. *Technometrics*, **9**, 425–439.
- Krutchkoff, R.G. (1969). Classical and inverse regression methods of calibration in extrapolation. *Technometrics*, **11**, 605–608.
- Lakshminarayanan, M.Y. & Gunst, R.F. (1984). Estimation of parameters in linear structural relationships: sensitivity to the choice of the ratio of error variances. *Biometrika*, **71**, 569–573.
- Lee, S.H. & Yum, B.J. (1989). Large sample comparisons of calibration procedures when both measurements are subject to error: the unreplicated case. *Communication in Statistics – Theory and Methods*, **18**, 3821–3840.
- Leite, J.G. & Singer, J.M. (1990). Métodos assintóticos em estatística. Texto do mini-curso do IX SINAPE.

- Lieftinck-Koeijers, C.A.J. (1988). Multivariate calibration: a generalization of the classical estimator. *Journal of Multivariate Analysis*, **25**, 31–44.
- Linder, E. & Babu, G.J. (1994). Bootstrapping the linear functional relationship with known error variance ratio. *Scandinavian Journal of Statistics*, **21**, 21–39.
- Linnig, F.J. & Mandel, J. (1964). Which measure of precision? *Analytical Chemistry*, **36**, 25A–32A.
- Lundberg, E. & De Maré, J. (1980). Interval estimates in the spectroscopy calibration problem. *Scandinavian Journal of Statistics*, **7**, 40–42.
- Lwin, T. (1981). Discussion of Hunter and Lamboy's 1981 paper. *Technometrics*, **23**, 339–341.
- Lwin, T. & Maritz, J.S. (1980). A note on the problem of statistical calibration. *Applied Statistics*, **29**, 135–141.
- Lwin, T. & Maritz, J.S. (1982). An analysis of the linear calibration controversy from the perspective of compound estimation. *Technometrics*, **24**, 235–242.
- Lwin, T. & Spiegelman, C.H. (1986). Calibration with working standards. *Applied Statistics*, **35**, 256–261.
- Madansky, A. (1959). The fitting of straight lines when both variables are subject to error. *Journal of American Statistical Association*, **54**, 173–205.
- Mandel, J. (1984). Fitting straight lines when both variables are subject to error. *Journal of Quality Technology*, **16**, 1–14.
- Mardia, K.V., Kent, J.T. & Bibby, J.M. (1979). *Multivariate analysis*. London: Academic Press Inc.
- Martinelle, S. (1970). On the choice of regression in linear calibration. *Technometrics*, **12**, 157–161.
- Miller Jr., R.G. (1980). *Kanamycin levels in premature babies*. Biostatistics Casebook, v.III, 127–142. Technical Report n.57, Division of Biostatistics, Stanford University.
- Moberg, L. & Sundberg, R. (1978). Maximum likelihood estimation of a linear functional relationship when one of the departure variances is known. *Scandinavian Journal of Statistics*, **5**, 61–64.

- Mood, A.M. & Graybill, F.A. (1963). *Introduction to the theory of statistics*. 2.ed. San Francisco: McGraw-Hill Book Co.
- Osborne, C. (1990). Non-parametric calibration. Ph.D. Thesis, University of Bath.
- Osborne, C. (1991). Statistical calibration: a review. *International Statistical Review*, **59**, 309–336.
- Patefield, W.M. (1977). On the information matrix in the linear functional relationship problem. *Applied Statistics*, **26**, 69–70.
- Perng, S.K. & Tong, Y.L. (1974). Sequential solution to inverse linear regression problem. *The Annals of Statistics*, **2**, 535–539.
- Ramos, P.G.A. (1987). Calibração linear. Dissertação, IME-USP.
- Rodrigues, J., Bolfarine, H. & Cordeiro, G.M. (1995). Nonlinear quasi-Bayesian theory and inverse linear regression. São Carlos: ICMSC/USP. (Notas do ICMSC, Série Estatística, 20.)
- Rosenblatt, J.R. & Spiegelman, C.H. (1981). Discussion of Hunter and Lamboy's 1981 paper. *Technometrics*, **23**, 329–333.
- Saw, J.G. (1970). Letter to the editor. *Technometrics*, **12**, 937.
- Scheffé, H. (1973). A statistical theory of calibration. *The Annals of Statistics*, **1**, 1–37.
- Schwartz, L.M. (1977). Nonlinear calibration. *Analytical Chemistry*, **49**, 2062–2068.
- Sen, P.K. & Singer, J.M. (1993). *Large sample methods in statistics: an introduction with applications*. New York: Chapman & Hall.
- Shukla, G.K. (1972). On the problem of calibration. *Technometrics*, **14**, 547–553.
- Sprenst, P. (1990). Some historical of functional and structural relationships. *Contemporary Mathematics*, **112**, 3–15.
- Tallis, G.M. (1969). Note on a calibration problem. *Biometrika*, **56**, 505–508.
- Tiede, J.J. & Pagano, M. (1979). The application of robust calibration to radioimmunoassay. *Biometrics*, **35**, 567–574.

- Theobald, C.M. & Mallinson, J.R. (1978). Comparative calibration, linear structural relationships and congeneric measurements. *Biometrics*, **34**, 39–45.
- Williams, E.J. (1959). *Regression analysis*. New York: Wiley.
- Williams, E.J. (1969). A note on regression methods in calibration. *Technometrics*, **11**, 189–192.
- Williams, E.J. (1969a). Regression methods in calibration problems. *Bulletin of The International Statistical Institute*, **43**, 17–28.
- Wolter, K.M. & Fuller, W.A. (1982a). Estimation of the quadratic errors-in-variables model. *Biometrika*, **69**, 175–182.
- Wolter, K.M. & Fuller, W.A. (1982b). Estimation of the nonlinear errors-in-variables models. *The Annals of Statistics*, **10**, 539–548.