APLICAÇÕES DA RENORMALIZAÇÃO DINÂMICA
À PERCOLAÇÃO E AO PROCESSO DE CONTATO

Héliton Ribeiro Tavares

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: Probabilidade
Orientador: Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, Abril de 1995-

APLICAÇÕES DA RENORMALIZAÇÃO DINÂMICA À PERCOLAÇÃO E AO PROCESSO DE CONTATO

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Héilton Ribeiro Tavares
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 25 de Abril de 1995.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Pablo Ferrari - IME-USP
- Prof. Dr. Yoshiharu Kohayakawa - IME-USP

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer a todos os que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho. Em especial, eu gostaria de agradecer:

- Ao Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka, orientador e amigo, por sua dedicação e imensa paciência. Pela sua sempre presente disposição em atender e tirar dúvidas que me tiravam o sono. Pela sua mão estendida nas horas difíceis e por tudo mais.
- À minha família pela força e pelo carinho sempre presente. Mais especialmente, minha mãe Efigênia, meu pai Licínio, minhas irmãs Rosângela, Edivana, Silvana, Rosana e Gilvana e meus barulhentos sobrinhos Tainah, Brenno, Brunno, Érica e ao Felipão.
- À Regina, pelo carinho e companheirismo dedicado durante um período muito importante. Pela sua valiosa ajuda e também pela pressão.
- Ao Departamento de Estatística da Universidade Federal do Pará pela liberação para o término do programa de mestrado.
- Ao CNPq pelo financiamento durante todo o programa de mestrado.
- Ao Alberto, à Marli e ao C.C.C. pelo convívio amigo.
- Aos amigos do 204, Stan e Trevisan pelos bons tempos. Também à galera do anexo (204-B) pelas antigas gandaias.
- Às amigas Cleonice, Sandra e Mara pelos bons papos.
- Aos Amigos Antônio, Manoel, Miguel, Fillidor, Cláudia, Vânia, Telma e aos vários outros pelos papos descontraídos na hora do cafezinho.
- A todos os amigos da turma de mestrado pela união.

RESUMO

Neste trabalho aplicamos a técnica de renormalização dinâmica para resolver problemas relacionados à percolação e ao Processo de Contato. Damos uma prova alternativa de que a probabilidade de percolação no semi-espço bi-dimensional é contínua na respectiva densidade crítica. Para este modelo também provamos que a densidade crítica no semi-espço coincide com a densidade crítica do modelo de percolação no quadrante. Damos detalhes das várias consequências dos resultados obtidos em Grimmett & Marstrand (1990), explorando também detalhes da técnica apresentada no referido trabalho. Completamos a generalização da prova de dois resultados relacionados ao Processo de Contato, a saber, os Teoremas da Forma e da Convergência Completa. Concluimos nosso trabalho explicitando por que as técnicas desenvolvidas não são capazes de resolver o problema da continuidade da probabilidade de percolação para o espço todo, quando $d \geq 3$.

ABSTRACT

We apply the Dynamical Renormalization technique to solve problems in the regular percolation and in the Contact Process. We give an alternative proof to the fact that the percolation probability on the half-space is continuous at the respective critical density in $d = 2$. We also prove that the critical density for the half-space coincides with the critical density for the quadrant. We give a more detailed version of the several consequences from the results in Grimmett and Marstrand (1990). We complete the details for the proofs of the Shape and the Complete Convergence Theorems for the Contact Process. Finally, we explain why the developed technique does not solve the continuity problem for the percolation probability on the full space, when $d \geq 3$.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
2	CONTINUIDADE DA TRANSIÇÃO DE FASE EM $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$	11
2.1	Introdução	11
2.1.1	Algoritmo para o Crescimento do Conglomerado da Origem	12
2.2	Definições e Notações Iniciais	14
2.3	Existência de Blocos Ocupados	17
2.3.1	Determinação de k e M	18
2.3.2	Construção Probabilística	20
2.3.3	Prova da Proposição 2.3.1	29
2.4	Construção Gráfica	31
2.4.1	Construção do Cruzamento para o Caso $H \geq L$	35
2.4.2	Construção do Cruzamento para o Caso $H < L$	44
2.5	Prova do Teorema 1.1	52
2.6	Extensões dos Resultados para $d > 2$	53
3	CONTINUIDADE DA DENSIDADE CRÍTICA EM PERCOLAÇÃO RE- GULAR	59
3.1	Introdução	59
3.2	Definições e Notações Iniciais	61
3.3	Construção Probabilística	64

3.4	Construção Gráfica	76
3.5	Principais Consequências do Teorema 3.4.1	88
4	TEOREMAS DA FORMA E CONVERGÊNCIA COMPLETA PARA O	
	PROCESSO DE CONTATO	99
4.1	Associação com o Modelo de Percolação Orientada de Sítios	99
4.2	Construção Probabilística	101
4.3	Construção Gráfica	109
4.4	Prova da Proposição 4.1.1	113
4.5	Consequências da Construção	116
4.6	Prova dos Teoremas da Forma e da Convergência Completa	117
	Considerações Finais	128
	Bibliografia	131

Notações e Abreviações Utilizadas no Texto

tq : tal que

CP1 : com probabilidade 1

ié : isto é

v.a. : variável aleatória

i.i.d. : independentes e identicamente distribuídas

q.c. : quase certamente

$\simeq$: aproximadamente

$\sim$: tem distribuição

$\stackrel{dist}{=}$: igualdade em distribuição

$U[0,1]$: distribuição Uniforme no intervalo $[0,1]$

$Bin(n,p)$: distribuição Binomial com parâmetros n e p

$N(0,1)$: distribuição Normal padrão

FKG : desigualdade Harris-FKG; $(\uparrow)$ para eventos crescentes e $(\downarrow)$ para decrescentes

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{H} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$

$\mathcal{O} = \mathbb{Z}_+^2 = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$

$A \setminus B = A \cap B^c$

$\lfloor x \rfloor$: parte inteira de x

$\lceil x \rceil$: parte inteira de $(x + 1)$

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A *Teoria da Percolação* lida com o fenômeno da propagação de um fluido em um meio poroso. S.R. Broadbent e J.M. Hammersley em 1957 propuseram o primeiro modelo para o fenômeno.

O *Processo de Contato* foi introduzido por T.E. Harris em 1974. Seu objetivo é modelar o fenômeno de infecção em uma população biológica.

Nos últimos anos tem havido um grande progresso com relação às técnicas usadas para resolver problemas relacionados à percolação e ao Processo de Contato. O objetivo principal deste trabalho é aplicar a *técnica de renormalização dinâmica* para resolver problemas relacionados aos dois processos.

Inicialmente vamos fazer uma breve descrição do modelo de percolação, apresentando em seguida os resultados mais importantes associados ao modelo, alguns destes obtidos através da técnica acima mencionada e que serviram de motivação para o trabalho aqui apresentado. Serão também apresentadas versões diferentes da mesma técnica para resolver questões diferentes relacionadas à percolação.

Consideremos $\mathbb{Z}^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z}\}$ e $\mathbb{E}^d = \{e_{xy} = (x, y) : \|x - y\| = 1, x, y \in \mathbb{Z}^d\}$, onde $\|z\| = \sum_{i=1}^d |z_i|$. Cada ponto $x \in \mathbb{Z}^d$ será denominado de *sítio* e cada elemento $e_{xy} \in \mathbb{E}^d$ será denominado de *elo*. Associamos a cada $e \in \mathbb{E}^d$ uma variável aleatória X_e com

distribuição Bernoulli de parâmetro p , todas as variáveis sendo independentes. O parâmetro p será denominado de *densidade*. Se $X_e = 1$, diremos que e está *aberto*, em caso contrário diremos que está *fechado*. Assim

$$P_p(e \text{ estar aberto}) = p \quad \text{e} \quad P_p(e \text{ estar fechado}) = 1 - p,$$

onde P_p é a medida Bernoulli sobre $\{0, 1\}$. Este modelo é denominado de *percolação regular entre vizinhos mais próximos de elos*. Quando consideramos que todos os elos estão abertos e que cada sítio está aberto com probabilidade p e fechado com probabilidade $1 - p$, independentemente dos demais, temos um modelo denominado *percolação de sítios*. A seguir faremos algumas definições para percolação de elos, mas que podem ser estendidas de forma análoga para percolação de sítios.

Denotaremos o espaço amostral por

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}.$$

Diremos que $\omega \in \Omega$ representa uma *configuração*, onde $\omega(e) = 1$ se o elo e estiver aberto e $\omega(e) = 0$ se e estiver fechado.

Seja $\mathcal{F}$ a σ -álgebra gerada pelos subconjuntos cilíndricos de Ω . Tomaremos a medida de probabilidade P_p sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ determinada pelas medidas produtos sobre os eventos cilíndricos, ou seja, se

$$B = \{B(e), e \in A\} \quad \text{com } A \subset \mathbb{Z}^d, A \text{ finito},$$

então

$$P_p(B) = \prod_{e \in A} P_p(B(e)).$$

Para $x, y \in \mathbb{Z}^d$, diremos que x está conectado com y e denotaremos por $x \leftrightarrow y$ se existir uma sequência de sítios distintos $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$, tais que $e_{x_{i-1}x_i}$, $i = 1, \dots, n$, está aberto.

Podemos agora definir o *Conglomerado da Origem*:

$$C_0 = \{x \in \mathbb{Z}^d : 0 \leftrightarrow x\}.$$

Uma quantidade de bastante interesse na teoria da percolação é a *probabilidade de percolação*:

$$\theta(p) = P_p(|C_0| = \infty),$$

onde $|C_0|$ representa o número de elementos de C_0 . Diremos que *percolação ocorre* (em $\mathbb{Z}^d$) quando $|C_0| = \infty$.

É possível mostrar que $\theta(p)$ é uma função não decrescente de p , com $\theta(0) = 0$ e $\theta(1) = 1$ (veja, por ex., Grimmett (1989)). Com isto, podemos definir a *densidade crítica da transição de fase*:

$$p_c(d) = \inf\{p : \theta(p) > 0\}.$$

Usualmente denotaremos $p_c = p_c(d)$. Se $p < p_c$, diremos que estamos na *fase subcrítica*; se $p > p_c$, diremos que estamos na *fase supercrítica* e se $p = p_c$, estaremos na *fase crítica*.

É também possível mostrar que a transição é abrupta (veja Barsky, 1987):

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c. \end{cases}$$

O caso unidimensional não é de grande interesse na teoria, pois se $p < 1$ então existirá (quase certamente) infinitos elos fechados à esquerda e à direita da origem. Assim, $\theta(p) = 0$ se $p < 1$. Concluimos com isso que $p_c(1) = 1$. Neste caso não temos transição de fase.

Para que possamos expor com mais clareza o problema que nos propomos a resolver, precisaremos falar um pouco sobre o que já foi obtido até agora.

O primeiro ponto a ser comentado refere-se à transição de fase. Broadbent & Hammersley (1957) provaram que para $d \geq 2$, existe $p_c \in (0, 1)$, tal que $\theta(p) = 0$ para $p < p_c$ e $\theta(p) > 0$ para $p > p_c$.

É possível mostrar que θ é uma função sempre contínua à direita. Isto ocorre porque ela é um limite, quando $L \rightarrow \infty$, das funções semi-contínuas monótonas não crescentes:

$$\theta_L(p) = P_p(\text{ o conglomerado da origem alcança a superfície de } \{-L, \dots, L\}^d).$$

Foi provado em van den Berg & Keane (1984) que θ é uma função contínua em p , para $p > p_c$, se o conglomerado infinito for único (com probabilidade um) à densidade p . A unicidade do conglomerado infinito foi provada inicialmente para $d = 2$ em Harris (1960); depois foi provada para d geral em Aizenman, Kesten & Newman (1987). Demonstrações alternativas podem ser encontradas em Burton & Keane (1989) e em Gandolfi, Keane & Newman (1991). Com estes resultados, temos que para $d \geq 2$, a função θ é contínua para todo $p \in [0, 1]$ se e somente se $\theta(p_c) = 0$. Acredita-se que $\theta(p_c) = 0$ para $d > 2$. Este resultado constitui um dos grandes problemas abertos atualmente na área. Muito progresso tem sido feito rumo a prova desta conjectura. Contudo, este problema só foi resolvido para $d = 2$ como consequência da combinação dos resultados de Harris (1960) que estabeleceu que, para $d=2$, temos $\theta(\frac{1}{2}) = 0$ e Kesten (1980) que estabeleceu que para $d = 2$, temos $p_c = \frac{1}{2}$; depois foi resolvido para d suficientemente grande em Hara & Slade (1989 e 1990), que estabeleceram que existe uma dimensão $d_0 \geq 6$ tal que $\theta(p_c) = 0$ se $d > d_0$. Nesse trabalho foi provado que uma certa *condição triangular* é satisfeita para $d > d_0$. Esse fato, combinado com resultados de Barsky (1987) e Barsky & Aizenman (1991), implica que $\theta(p_c) = 0$. Hara & Slade mostram que $d_0 \leq 92$.

Observação 1.1 *É importante ressaltar que existem certos modelos de percolação independente em que $\theta(p_c) > 0$; estes incluem o modelo de percolação de longo alcance em uma dimensão (veja Aizenman & Newman (1986)) e o modelo de percolação regular em cunhas logarítmicas de $\mathbb{Z}^2$ (veja Chayes & Chayes (1986b)). Para alguns modelos de percolação independente em duas dimensões, tal como percolação de sitios em $\mathbb{Z}^2$, onde p_c ainda não é conhecido exatamente, foi provado em Russo (1981), usando técnicas de renormalização, que $\theta(p_c) = 0$.*

Investigando o problema da continuidade de θ em $\mathbb{Z}^d$ para d geral, Barsky, Grimmett & Newman (1991) resolveram o problema para subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$, que vão desde o semi-espaco até o ortante. Seus resultados foram estabelecidos apenas para $d \geq 3$. Sua validade para $d = 2$ já era conhecida devido a combinação dos resultados de Harris (1960), Russo (1978), Seymour & Welsh (1978) e Kesten (1980). Contudo, podemos aplicar uma adaptação de técnica de renormalização dinâmica utilizada por Barsky, Grimmett & Newman (1991) para dar uma prova alternativa no caso $d = 2$. Este será nosso objetivo no Capítulo 2. Como consequência de nossa construção provaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Seja $\mathcal{H} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ e $\mathcal{Q} = \mathbb{Z}_+^2$. Então*

$$\theta_{\mathcal{H}}(p_c(\mathcal{H})) = 0 \quad (1.1)$$

e

$$p_c(\mathcal{H}) = p_c(\mathcal{Q}). \quad (1.2)$$

Os resultados principais em Barsky, Grimmett & Newman (1991) são: consideremos, para $d \geq 3$,

$$\mathcal{H} = \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}_+, \quad \mathcal{S}_L = \mathbb{Z}^{d-1} \times \{0, \dots, L\}, \quad \mathcal{Q}_L = \{-L, \dots, L\}^{d-2} \times \mathbb{Z}_+^2. \quad (1.3)$$

Sejam

$$p_c(\mathcal{S}) = \lim_{L \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{S}_L) \quad \text{e} \quad p_c(\mathcal{Q}) = \lim_{L \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{Q}_L).$$

Valem os seguintes resultados:

- (i) $p_c(\mathcal{H}) = p_c(\mathbb{Z}^{d-2} \times \mathbb{Z}_+^2) = \dots = p_c(\mathbb{Z}_+^d) = p_c(\mathcal{Q}) = p_c(\mathcal{S})$.
- (ii) $\theta_{\mathcal{H}}(p_c(\mathcal{H})) = \dots = \theta_{\mathbb{Z}_+^d}(p_c(\mathbb{Z}_+^d)) = 0$.
- (iii) Quando ele existe, o conglomerado infinito em $\mathbb{Z}^{d-e} \times \mathbb{Z}_+^e$ ($1 \leq e \leq d$) é quase certamente único.
- (iv) As probabilidades de percolação de subspaços de $\mathbb{Z}^{d-e} \times \mathbb{Z}_+^e$ ($1 \leq e \leq d$) são funções contínuas em todo $p \in [0, 1]$.

Um outro resultado apenas mencionado em Barsky, Grimmett & Newman (1991) que provamos no Capítulo 2 é o seguinte: sejam

$$\mathbb{L} = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \mathbb{Z}^{d-e-f} \times \mathbb{Z}_+^e \quad \text{e}$$

$$\mathbb{L}' = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L', \dots, L'\}^{d-f-2} \times \mathbb{Z}_+^2,$$

com $e \geq 1$ e $d - f \geq 2$.

Teorema 1.2 *Se $\theta_{\mathbb{L}}(p) > 0$ então existem $\delta > 0$ e $L' \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\theta_{\mathbb{L}'}(p - \delta) > 0$.*

Com este resultado, podemos provar versões dos resultados de Barsky, Grimmett & Newman (1991) para semi-faixas. Por exemplo, podemos provar (fazendo $e = f = 1$) que a probabilidade de percolação associada à região $\{0, \dots, h\} \times \mathbb{Z}^{d-2} \times \mathbb{Z}_+$ é contínua na respectiva densidade crítica. Mais ainda, o limite, quando L tende ao infinito, da densidade crítica associada à região $\{0, \dots, h\} \times \{-L, \dots, L\}^{d-3} \times \mathbb{Z}_+^2$ é igual à densidade crítica associada à região $\{0, \dots, h\} \times \mathbb{Z}^{d-2} \times \mathbb{Z}_+$.

Uma extensão do argumento de renormalização dinâmica foi aplicada por Grimmett & Marstrand (1990). Seu resultado tem como consequência que a densidade crítica do processo de percolação em um reticulado $\mathbb{L}$ é igual ao limite da densidade crítica de uma faixa de $\mathbb{L}$ quando a espessura desta faixa tende ao infinito. Com isto temos uma extensão do item (i) da página anterior:

Teorema 1.3 *Sejam $\mathbb{S}_L = \mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, L\}^{d-2}$ e $p_c(\mathbb{S}) = \lim_{L \rightarrow \infty} p_c(\mathbb{S}_L)$. Então*

$$p_c = p_c(\mathbb{S}). \tag{1.4}$$

Como consequência deste teorema temos que $p_c = p_c(\mathbb{H})$. No Capítulo 3 apresentamos algumas consequências deste resultado. Estas consequências nos mostram que o comportamento que é esperado para o sistema quando p é grande também deve ser esperado para $p > p_c$. Com isto passamos a conhecer um pouco mais sobre o comportamento do sistema quando a densidade p está muito próxima da densidade crítica p_c . Como a técnica em Grimmett & Marstrand (1990) é bastante interessante, resolvemos reescrevê-la, com mais detalhes, também no Capítulo 3.

Observação 1.2 *É importante notar que a densidade crítica de um conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ nem sempre é igual ao limite das densidades críticas de faixas de A . O processo construído em Durrett & Gray ([20] e [21]) tem $\lambda_c(\mathbb{Z}^2) < \infty$, enquanto $\lambda_c(\mathbb{Z} \times \{-L, \dots, L\}) = \infty$, $\forall L < \infty$.*

Apresentamos agora uma conjectura que, se provada, poderá ser combinada com os resultados de Barsky, Grimmett & Newman (1991) para provar a continuidade de $\theta(p)$ (em $\mathbb{Z}^d$) para todo $p \in [0, 1]$, ou seja, implicará que $\theta(p_c) = 0$:

Conjectura 1.1 *Se $\theta(p) > 0$, então $\theta_H(p) > 0$.*

Infelizmente as técnicas construídas até o momento não puderam resolver o problema da continuidade (ou não) da probabilidade de percolação em p_c . As técnicas utilizadas em Barsky, Grimmett & Newman (1991) e Grimmett & Marstrand (1990) não podem ser estendidas para resolver o problema. Após conhecermos as construções feitas nos Capítulos 2 e 3, daremos uma breve explanação de onde se concentra tal dificuldade. Isto será apresentado no final deste trabalho.

Uma outra aplicação da técnica de renormalização dinâmica prova os Teoremas da Forma e da Convergência Completa para o Processo de Contato em dimensão finita qualquer. Estas provas foram obtidas em Griffeath (1981) e Durrett & Griffeath (1982), respectivamente, para $d = 1$. Durrett (1991) usa a renormalização dinâmica para provar o caso geral, mas só fornece todos os detalhes para $d = 2$. Nosso trabalho completa os detalhes numa dimensão finita qualquer. Os dois teoremas foram citados sem provas em Bezuidenhout & Grimmett (1990). Vamos começar fazendo uma breve introdução ao Processo de Contato

Consideremos um processo $\xi_t^A \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ definido nos subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$, com $P(\xi_0^A = A) = 1$, $A \subseteq \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, inteiro. Adotando a convenção $\xi_t^A(x) = 1$ se e somente se $x \in \xi_t^A$, $x \in \mathbb{Z}^d$, então a dinâmica é dada por:

se $\xi_t^A(x) = 1$ então muda para 0 (zero) com taxa 1;

se $\xi_t^A(x) = 0$ então muda para 1 com taxa $\lambda |\{y \in \xi_t^A : \|x - y\| = 1\}|$

onde $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\|z\| = |z_1| + \dots + |z_d|$ para $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d$ e $|B|$ = número de pontos em B para $B \subset \mathbb{Z}^d$.

Diremos que x está *infectado* no instante t se $\xi_t^A(x) = 1$ e *sadio* em caso contrário. A dinâmica dada nos diz que a taxa de infecção é proporcional ao número de vizinhos infectados. Detalhes para a construção do processo podem ser encontrados em Durrett (1988) e Liggett (1985a).

Um evento de interesse neste estudo é

$$\Omega_\infty = \{\xi_t^0 \neq \emptyset, \forall t\},$$

onde $\xi_t^0 = \xi_t^{\{0\}}$. Com ele é possível definir o ponto crítico da transição de fases (maiores detalhes em Durrett e Liggett acima referidos)

$$\lambda_c = \sup\{\lambda : P_\lambda(\Omega_\infty) = 0\}.$$

Limitantes para este valor (veja Harris (1974) e Holley & Liggett (1978)), são

$$\frac{1}{2d-1} \leq \lambda_c \leq \frac{2}{d}.$$

Numericamente temos que $\lambda_c \simeq 1.65$ em $d = 1$ e $\lambda_c \simeq 0.41$ em $d = 2$. Para detalhes, ver Brower, Furman & Moshe (1978) e Grassberger & de la Torre (1979).

Uma consequência importante da construção deste modelo é que ela nos permite reverter a escala do tempo e obter a propriedade denominada *dualidade*, que tem a seguinte consequência:

$$P(\xi_t^A \cap B \neq \emptyset) = P(\xi_t^B \cap A \neq \emptyset). \quad (1.5)$$

Uma propriedade importante do Processo de Contato, que foi provada por Bezuidenhout & Grimmett (1990), é que ele *morre* no ponto crítico. Este é o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema 1.4 $P_{\lambda_c}(\Omega_\infty) = 0$.

A prova deste teorema, que será feita no Capítulo 4, baseia-se no seguinte lema:

Lema 1.1 *Se $P_\lambda(\Omega_\infty) > 0$ então, quando visto sob escalas convenientes do espaço e do tempo, o Processo de Contato domina percolação orientada de sítios independentes.*

A técnica utilizada para provar o Teorema 1.4 será aplicada para provar os dois teoremas seguintes.

Teorema 1.5 *TEOREMA DA CONVERGÊNCIA COMPLETA (TCC)*

Seja $\tau^A = \inf\{t : \xi_t^A = \emptyset\}$. Então

$$\xi_t^A \Rightarrow P(\tau^A < \infty)\delta_\emptyset + P(\tau^A = \infty)\xi_\infty^{\mathbb{Z}^d} \quad \text{quando } t \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

onde o símbolo $\Rightarrow$ significa convergência fraca; $\delta_\emptyset$ é a medida de probabilidade que põe massa 1 na configuração vazia e $\xi_\infty^{\mathbb{Z}^d}$ é a distribuição limite de $\xi_t^{\mathbb{Z}^d}$.

Para enunciar o Teorema da Forma consideremos

$$H_t = \bigcup_{s \leq t} \xi_s^0 \quad \text{e} \quad K_t = \xi_t^0 \cup (\xi_t^{\mathbb{Z}^d})^c = \{x \in \mathbb{Z}^d : \xi_t^0(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)\}.$$

$$\text{Seja } Q = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]^d, \quad \overline{H}_t = \bigcup_{x \in H_t} \{x + Q\} \quad \text{e} \quad \overline{K}_t = \bigcup_{x \in K_t} \{x + Q\}.$$

Teorema 1.6 *TEOREMA DA FORMA (TF). Seja $\lambda > \lambda_c$. Existe um conjunto convexo e compacto D tal que se $\omega \in \Omega_\infty$ e $\varepsilon > 0$ então para $t > t_0(\varepsilon, \omega)$ teremos*

$$(1 - \varepsilon)tD \subset \overline{H}_t \cap \overline{K}_t \quad e \quad \overline{H}_t \subset (1 + \varepsilon)tD.$$

As provas dos TCC e TF serão feitas na Seção 4.6.

Damos a seguir um arrazoado para usarmos H_t e K_t . Nosso interesse é obter conclusões para o processo ξ_t^0 , mas este conjunto tem muitos *buracos* na configuração (representados por sítios sadios) e com isso não é possível obter um conjunto convexo e compacto D , tal que tD esteja *próximo* de ξ_t^0 , por este motivo optamos por usar K_t . Mas, $K_t \supset \{x : \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x) = 0\}$, logo tem muitos pontos que devemos desconsiderar e por isso interseccionamos com H_t .

Devido à construção gráfica do processo (veja Durrett (1988)), temos que $\xi_t^A = \bigcup_{x \in A} \xi_t^x$. Com isso o TF pode ser generalizado para qualquer configuração finita A .

Capítulo 2

CONTINUIDADE DA TRANSIÇÃO DE FASE EM $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$

2.1 Introdução

Nosso objetivo neste capítulo será, usando *técnicas de renormalização dinâmica*, provar que não existe percolação no semi-espço bidimensional $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+)$ na densidade crítica (no final do capítulo apresentaremos alguns resultados análogos para $d > 2$). Este resultado serve tanto para percolação de elos como para percolação de sítios. Neste trabalho estaremos tratando com percolação de elos. Para percolação de sítios serão necessárias algumas leves adaptações.

Basicamente, a técnica de renormalização consiste em transformar um conjunto de sítios em um único *super-sítio*. Para isto deveremos descrever um evento que seja mensurável neste conjunto e que irá definir o estado de ocupação deste super-sítio.

Este tipo de renormalização pode ser aplicado a questões de continuidade. Para entendermos este procedimento, vamos começar descrevendo um tipo de algoritmo usado para acompanhar o crescimento do conglomerado da origem, que será usado no modelo de percolação dos super-sítios.

2.1.1 Algoritmo para o Crescimento do Conglomerado da Origem

Consideremos o modelo de percolação regular de sítios em $\mathbb{Z}_+^2$. Primeiro atribuímos uma ordem determinística a todos os sítios de $\mathbb{Z}_+^2$. Ao passo zero checamos o estado de ocupação da origem. Ao passo n escolhemos o sítio x_n (ainda não testado) com menor ordem dentre todos os vizinhos de sítios ocupados e checamos o estado de ocupação de x_n . Se o conjunto de sítios não checados for vazio o processo termina (e o conglomerado será finito). Consideremos p_n a probabilidade condicional de x_n estar ocupado dado a história do processo (ié, dado $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0$). Notemos que x_n e p_n são aleatórios, pois ambos dependem do passado do processo. Se $p_n > p_c(\mathbb{Z}_+^2) + \varepsilon$ (quase certamente) para algum $\varepsilon > 0$ e $\forall n \geq 1$, então o modelo original percola. Para ver por que isto ocorre, consideremos uma sequência de variáveis aleatórias $W_0, W_1, \dots$ independentes e identicamente distribuídas com distribuição Uniforme[0,1] que são independentes do modelo de percolação original. Diremos que x'_n está *vermelho* se x_n está ocupado e se $W_n < (p_c + \varepsilon)/p_n$. Nestas condições o conjunto dos sítios vermelhos associado a origem tem a mesma distribuição que o conglomerado da origem do modelo de percolação regular de sítios com densidade $p_c + \varepsilon$. A prova disto é a seguinte: sejam μ e P as medidas de probabilidade associadas a W_n e $\{x_0, \dots, x_n, \dots\}$, respectivamente, e Ω o espaço amostral associado a $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Então

$$\begin{aligned}
 P(x'_n = \text{vermelho}) &= P\left(x_n = 1, W_n < \frac{p_c + \varepsilon}{p_n}\right) \\
 &= \int_{[0,1] \times \Omega} 1_{\{x_n=1\}} 1_{\{W_n < (p_c + \varepsilon)/p_n\}} d(\mu \times P) \\
 &= \int_{\Omega} \left[\int_{[0,1]} 1_{\{x_n=1\}} 1_{\{W_n < (p_c + \varepsilon)/p_n\}} d\mu \right] dP \\
 &= \int_{\Omega} 1_{\{x_n=1\}} \frac{p_c + \varepsilon}{p_n} dP = \int_{\Omega} E\left(1_{\{x_n=1\}} \frac{p_c + \varepsilon}{p_n} \middle| x_0, \dots, x_{n-1}\right) dP \\
 &= \int_{\Omega} \frac{p_c + \varepsilon}{p_n} E\left(1_{\{x_n=1\}} \middle| x_0, \dots, x_{n-1}\right) dP = (p_c + \varepsilon) \int_{\Omega} dP \\
 &= p_c + \varepsilon = P(W_n < p_c + \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Esta relação também serve para verificarmos a independência entre os sítios vermelhos. Note que basta considerar sequências de 0 (zero) a n , pois o conglomerado é construído usando

esta ordem, e também basta considerar o evento $\bigcap_{i=0}^n \{x'_i = \text{vermelho}\}$. Seja $\bar{p}_i = P(x_i = 1 \mid x_{i-1} = 1, \dots, x_0 = 1)$, $i = 0, \dots, n$, com $\bar{p}_0 = 1$. Com isso

$$\begin{aligned}
& P(x'_0 = \text{vermelho}, x'_1 = \text{vermelho}, \dots, x'_n = \text{vermelho}) \\
&= P\left(x_0 = 1, W_0 < \frac{p_c + \varepsilon}{\bar{p}_0}, x_1 = 1, W_1 < \frac{p_c + \varepsilon}{\bar{p}_1}, \dots, x_n = 1, W_n < \frac{p_c + \varepsilon}{\bar{p}_n}\right) \\
&= P(x_0 = 1, x_1 = 1, \dots, x_n = 1) \prod_{i=0}^n P\left(W_i < \frac{p_c + \varepsilon}{\bar{p}_i}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^n P(x_i = 1 \mid x_{i-1} = 1, \dots, x_0 = 1)\right) P(x_0 = 1) \prod_{i=0}^n P\left(W_i < \frac{p_c + \varepsilon}{\bar{p}_i}\right) \\
&= \prod_{i=0}^n \bar{p}_i P\left(W_i < \frac{p_c + \varepsilon}{\bar{p}_i}\right) = \prod_{i=0}^n \bar{p}_i \frac{p_c + \varepsilon}{\bar{p}_i} = \prod_{i=0}^n (p_c + \varepsilon) \\
&= \prod_{i=0}^n P(W_i < p_c + \varepsilon) = \prod_{i=0}^n P(x'_i = \text{vermelho}).
\end{aligned}$$

A extensão às outras configurações segue por inclusão e exclusão.

Quando o conjunto dos sítios vermelhos percola, então o conglomerado da origem dos sítios ocupados, que contém o conjunto dos sítios vermelhos, também percola.

Digamos que queremos provar que existe percolação de elos em $\mathcal{D} = \mathbb{Z}_+^2$ a uma certa densidade p . Primeiro particionamos $\mathcal{D}$ em *quadrados* que são translações de $\{-K, \dots, K\}^2$; cada destas regiões pode ser identificada como um sítio de $\mathcal{D}$. O quadrado contendo a origem será dito ser *bom* se, por exemplo, o número de sítios nas faces que não contém a origem (norte e leste) que estão conectados a origem por elos abertos for “suficientemente grande”. Agora executamos o algoritmo para o crescimento do conglomerado descrito acima com a diferença de que aqui a cada passo escolhemos um novo quadrado que seja vizinho de um outro quadrado bom e testamos o estado de ocupação deste novo quadrado. Se a probabilidade condicional p_n de um particular quadrado ser bom (no sentido de que um grande número de sítios na face em comum com o quadrado vizinho ocupado está conectado a um grande número de sítios nas outras três outras faces do novo quadrado) exceder $p_c(\mathcal{D}) + \varepsilon$ então ocorre percolação em $\mathcal{D}$.

Para aplicarmos os argumentos acima à questão de continuidade, começamos assumindo que a um dado valor de p existe percolação em $\mathcal{H} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$. Mostramos então que K pode ser encontrado de tal forma que a probabilidade p_n exceda $p_c(\mathcal{D}) + \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. Isto mostra que percolação em $\mathcal{H}$ implica percolação em $\mathcal{D}$. As consequências deste resultado formam o conteúdo do Teorema 1.1, que estabelece que $\theta_{\mathcal{H}}(p_c(\mathcal{H})) = 0$ e ainda, $p_c(\mathcal{H}) = p_c(\mathcal{D})$. Para provar este teorema precisamos tornar precisa nossa técnica de renormalização. O passo principal para isto será mostrar que, sob a condição $\theta_{\mathcal{H}}(p) > 0$, poderemos construir super-sítios com probabilidade alta de estarem “abertos”.

2.2 Definições e Notações Iniciais

Por *bloco* entenderemos uma caixa $B(L, H)$ em $\mathbb{Z}^2$ com largura $2L$ e altura H para algum L e H . Nosso objetivo será descrever um evento mensurável no interior de $B(L, H)$ e útil para a construção de caminhos formados por estes blocos. Isto será feito na seção seguinte. Na Seção 2.4 será mostrada a existência (determinística) de L e H para que o referido evento tenha probabilidade alta quando $\theta_{\mathcal{H}}(p) > 0$.

Há quatro tipos de blocos: Norte, Sul, Leste e Oeste, que são translações, respect., de

$$\begin{aligned} B_N(L, H) &= \{-L, \dots, L\} \times \{0, \dots, H\}, \\ B_S(L, H) &= \{-L, \dots, L\} \times \{-H, \dots, 0\}, \\ B_L(L, H) &= \{0, \dots, H\} \times \{-L, \dots, L\}, \\ B_O(L, H) &= \{-H, \dots, 0\} \times \{-L, \dots, L\}. \end{aligned}$$

Por simplicidade, restringiremos nossa atenção (em princípio) ao Bloco Norte e, enquanto operando sob esta restrição, o representaremos por $B(L, H)$.

O bloco $B(L, H)$ pode ser dividido em

$$\begin{aligned} T_L(L, H) &= \{0, \dots, L\} \times \{H\} \\ T_O(L, H) &= \{-L, \dots, 0\} \times \{H\} \\ S_L(L, H) &= \{L\} \times \{0, \dots, H\} \\ S_O(L, H) &= \{-L\} \times \{0, \dots, H\}. \end{aligned}$$

Figura 2.1: Representação gráfica dos tipos de blocos

O topo e a região lateral do bloco são, respectivamente

$$T = T(L, H) = T_L(L, H) \cup T_O(L, H)$$

e

$$S = S(L, H) = S_L(L, H) \cup S_O(L, H).$$

Figura 2.2: Divisões do Topo e do Lado do bloco $B_N(L, H)$

A base do bloco será $D = \{-L, \dots, L\} \times \{0\}$.

A borda do bloco será $\partial B = \partial B(L, H) = T \cup S \cup D$.

Um *elo de borda* será qualquer elo entre sítios de ∂B .

Por uma *conexão em $B^*(L, H)$* entenderemos um caminho de elos abertos entre sítios de $B(L, H)$ sem usar os elos de ∂B .

Por uma *conexão em $B'(L, H)$* entenderemos um caminho de elos abertos entre sítios de

$B(L, H)$ sem usar os elos de D .

Um *hiperbloco* de tamanho k , $b_m(k)$, $k \in \mathbb{N}$, é uma translação de

$$b_m(k) = \{-k, \dots, k\}^{2-m} \times \{0\} \times \{-k, \dots, k\}^{m-1}, \quad m = 1, 2.$$

Figura 2.3: Tipos de hiperblocos

O hiperbloco $x + b_m(k)$ será dito *aberto* se todos os seus sítios estiverem conectados, um ao outro, por elos abertos totalmente dentro dele. Se $x \in S$ então denotaremos por $x + b_2(k)$ o hiperbloco centrado em x e paralelo a S . Analogamente, se $y \in T$ teremos $y + b_1(k)$.

Como o bloco $B(L, H)$ é $2L \times H$, deveremos ter $k \leq L$ e $2k \leq H$. Definiremos o bloco $B(L, H)$ como *ocupado* se existir pelo menos um sítio $x_\otimes \in S_\otimes$ e pelo menos um $y_\otimes \in T_\otimes$ para cada $\otimes \in \{L, O\}$ que são centros de hiperblocos abertos $x_\otimes + b_2(k)$ e $y_\otimes + b_1(k)$ contidos em S e T , respectivamente, e conectados a $b_1(k)$ em $B'(L, H)$. (Notemos que esta definição não exige que $b_1(k)$ esteja aberto.) Chamaremos estes sítios $x_\otimes$ e $y_\otimes$ de *sítios de ligação*. Com isso qualquer sítio que seja centro de um hiperbloco aberto contido em S ou T e que esteja conectado a $b_1(k)$ será assim chamado.

Poderemos agora enunciar o resultado que vai nos dar condições de construir caminhos formados por blocos ocupados.

Figura 2.4: Representação gráfica de um bloco ocupado

2.3 Existência de Blocos Ocupados

Proposição 2.3.1 *Suponhamos $\theta_H(p) > 0$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existem inteiros positivos $k, L (\geq k)$ e $H (\geq 2k)$ tal que*

$$P_p(B_N(L, H) \text{ Ocupado}) > 1 - \varepsilon \quad (2.1)$$

e ainda

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } P_{p-\delta}(B_N(L, H) \text{ Ocupado}) > 1 - \varepsilon. \quad (2.2)$$

Observação 2.1 : *A parte (2.2) é uma consequência imediata de (2.1) pois o número de elos em $B(L, H)$ é finito e portanto a probabilidade em (2.1) é uma função contínua de p . Com isso, se (2.1) for verdadeira, então ligeiramente abaixo de p ela ainda será verdadeira.*

A idéia da prova é a seguinte : como $\theta_H(p) > 0$, temos que existe quase certamente um conglomerado infinito em $\mathcal{H}$. Fazendo k muito grande poderemos assegurar que há uma probabilidade muito alta de que $b_1(k)$ contenha algum sítio z que pertença ao conglomerado infinito em $\mathcal{H}^*$ (isto é, $\mathcal{H}$ sem os elos da borda). Se este evento ocorrer para algum z , então quando L e $T \rightarrow \infty$, o número de sítios em $S \cup T$ de $B(L, T)$ que estão conectados a z em $B^*(L, T)$ será quase certamente ilimitado. Uma escolha apropriada de L e T irá assegurar que devem haver tantos destes sítios quanto queiramos em ambos S e T com probabilidade muito alta. Havendo muitos $x \in S$ (e $y \in T$) que estão conectados a z em $B^*(L, T)$ então poderemos

escolher muitos conjuntos de sítios disjuntos em S (e T) para assegurar que com probabilidade alta podemos achar hiperblocos abertos disjuntos contendo alguns destes sítios. Finalmente, se $b_1(k)$ estiver conectado com probabilidade alta a algum hiperbloco aberto em ambos S e T , então (usando FKG) com probabilidade alta teremos que $b_1(k)$ estará conectado a pelo menos um hiperbloco aberto em cada região $S_\otimes$ e $T_\otimes$.

O primeiro passo para tornar esta idéia rigorosa será escolher um k grande e mostrar que $b_1(k)$ estará conectado a pelo menos M sítios em cada S e T com probabilidade alta, onde M deverá ser grande o suficiente de forma que em qualquer conjunto de M sítios em S (e T) haja um grande número de hiperblocos disjuntos em S (e T) com cada hiperbloco contendo pelo menos um dos M sítios.

2.3.1 Determinação de k e M

Seja $\varepsilon > 0$ dado (da Proposição 2.3.1) e tomamos $\eta \in (0, 1/2)$. Escolhemos k satisfazendo

$$P(b_1(k) \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathcal{H}^*) > 1 - \eta^2. \quad (2.3)$$

Para provar que existe k satisfazendo esta condição é suficiente mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(b_1(k) \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathcal{H}^*) = 1. \quad (2.4)$$

PROVA: Esta prova é baseada em Durrett(1984). Seja $C_{\{x\}} = \{y : x \leftrightarrow y\}$. Devido ao fato do mecanismo aleatório ser o mesmo para qualquer sítio, temos que $\{C_{\{x\}}, x \in \mathbb{Z}\}$ é estacionário, ié

$$(C_{\{x\}}, C_{\{x+1\}}, \dots, C_{\{x+k\}}) \stackrel{dist}{=} (C_{\{x+n\}}, C_{\{x+n+1\}}, \dots, C_{\{x+n+k\}}), \forall k, n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Pela Proposição 6.32 de Breiman(1968), $\{C_{\{x\}}, x \in \mathbb{Z}\}$ é ergódico. Aplicando o Teorema Ergódico de Birkhoff (ver Durrett(1991) pág. 296) temos que

$$\frac{1}{2k+1} \sum_{x=-k}^k 1_{\{|C_{\{x\}}|=\infty\}} \longrightarrow \theta_H(p) \text{ q.c. quando } k \rightarrow \infty.$$

Como, por hipótese, temos que $\theta_H(p) > 0$, segue que

$$P \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{x=-k}^k 1_{\{|C_{\{x\}}|=\infty\}} = 0 \right) = 0$$

que implica

$$P \left(\sum_{x=-k}^k 1_{\{|C_{\{x\}}|=\infty\}} = 0 \right) \downarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Mas

$$\left\{ \sum_{x=-k}^k 1_{\{|C_{\{x\}}|=\infty\}} = 0 \right\} = \bigcap_{x=-k}^k \{|C_{\{x\}}| < \infty\}$$

Portanto

$$P \left(\bigcap_{x=-k}^k \{|C_{\{x\}}| < \infty\} \right) \downarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

Daí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(b_1(k) \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathcal{H}^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} P \left(\bigcup_{x=-k}^k \{|C_{\{x\}}| = \infty\} \right) = 1. \quad \square$$

A partir daqui fixamos k para o restante da prova da Proposição 2.3.1 e abreviamos $b_m(k)$ por b_m .

O próximo passo será determinar um número $M = M(k, \eta)$ tal que, dado M ou mais sítios $\{x_r\}$ em S , poderemos escolher um conjunto de sítios $\{z_r\}$ em S de forma que $x_r \in z_r + b_2 \subset S$ e que haja muitos hiperblocos disjuntos na coleção $\{z_r + b_2\}$ onde pelo menos um destes esteja aberto com probabilidade alta. Assim, M deve satisfazer

$$[1 - P(b_2 \text{ aberto})]^{N_1} < \eta \tag{2.5}$$

onde $N_1 = \lceil \frac{M}{3k+1} \rceil$ com $\lceil x \rceil$ = menor inteiro maior ou igual a x . O termo $3k+1$ ($> 2k+1$ = número de sítios em $[-k, k]$) é um fator geométrico que será usado para garantir que há muitos sítios $\{x_r\}$ de tal forma que muitos hiperblocos disjuntos $\{z_r + b_2\}$ estejam disponíveis.

Analogamente, se tivermos pelo menos M sítios $\{y_r\}$ em T com M satisfazendo (2.5) então haverá muitos hiperblocos disjuntos em T com probabilidade alta. Contudo, por razões técnicas (ver prova do Lema 2.3.4) ainda será exigido que

$$P(\text{menos que } M \text{ sucessos em } N_2 \text{ ensaios de Bernoulli}(p)) < \eta, \quad (2.6)$$

onde $N_2 = \lceil \frac{2M}{p} \rceil$.

Para provar que existe M satisfazendo esta condição é suficiente mostrar que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P(\text{Bin}(N_2, p) < M) = 0.$$

Se $X \sim \text{Binomial}(N_2, p)$ e $Z \sim N(0, 1)$, então, pelo Teorema Central do Limite Clássico,

$$P(X < M) \simeq P\left(Z < \frac{M - N_2 p}{\sqrt{N_2 p(1-p)}}\right)$$

Mas $N_2 \geq 2M/p$, logo $M - N_2 p \leq M - 2M = -M$. Daí

$$P(X < M) \leq P\left(Z < \frac{-M}{\sqrt{2M(1-p)}}\right) = P\left(Z < -\sqrt{\frac{M}{2(1-p)}}\right) \rightarrow 0, \text{ quando } M \rightarrow \infty. \square$$

A prova da Proposição 2.3.1 está quebrada em diversos lemas.

2.3.2 Construção Probabilística

Nesta seção serão usados os seguintes conjuntos: $S_h = \mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, h\}$ e $S_h^* = S_h^* \setminus \{\text{elos da base } \mathbb{Z} \times \{0\}\}$.

Lema 2.3.1 *Seja $\overline{S}_h = \mathbb{Z} \times \{h\}$ o topo de S_h e $Y_h = |\{y \in \overline{S}_h : b_1 \leftrightarrow y \text{ em } S_h^*\}|$. Então com probabilidade 1 (CP1) ou existe uma altura (aleatória) H tal que $Y_h = 0, \forall h \geq H$, ou senão $\lim_{h \rightarrow \infty} Y_h = \infty$.*

Observação 2.2 : *É intuitivo que se $\theta_H(p) > 0$ então $\lim_{h \rightarrow \infty} Y_h = \infty$ e se $\theta_H(p) = 0$ então $\exists H$ tal que $Y_h = 0, \forall h \geq H$.*

PROVA: Definimos uma nova variável $Z_h(n) = |\{j \leq h : 0 < Y_j < n\}|$. Será suficiente mostrar que $Z_\infty(n) = \lim_{h \rightarrow \infty} Z_h(n) < \infty$ quase certamente (q.c.) $\forall n \geq 1$, pois neste caso ou $\exists H$ tq $Y_h = 0 \forall h \geq H$ ou então $Y_h \geq n, \forall n$.

A idéia para a prova é a seguinte: se $Z_\infty(n) = \infty$ então há infinitos $\bar{S}_h$ que estão conectados a b_1 em $\mathcal{H}^*$, mas que contém menos que n sítios conectados a b_1 em S_h^* . Cada vez que uma nova $\bar{S}_h$ é alcançada há uma probabilidade $\geq (1-p)^n$ de que nenhum destes sítios esteja conectado a $\bar{S}_{h+1}$, ou seja, se há $r, (r < n)$, sítios em $\bar{S}_h$ conectados a b_1 em S_h^* então todos os elos entre estes r sítios e $\bar{S}_{h+1}$ estarão fechados com probabilidade $(1-p)^r > (1-p)^n$. Como $(1-p)^n > 0$ então em algum instante (ié, para algum $h = H$) não haverá conexão entre $\bar{S}_h$ e $\bar{S}_{h+1}$ quase certamente, logo $P(Z_\infty(n) = \infty) = 0$, que implica $Z_\infty(n) < \infty$, q.c..

Mais rigorosamente, definimos para cada $n \geq 1$ uma sequência de variáveis aleatórias $W_r, r \geq 1$, onde W_r é a menor altura h tq $Z_h(n) = r$ e $W_r = \infty$ se $Z_\infty(n) < r$. Então

$$\{Z_\infty(n) < r\} = \{W_r = \infty\} \Leftrightarrow \{Z_\infty(n) \geq r\} = \{W_r < \infty\}.$$

Daí, para cada $r \geq 1$

$$\begin{aligned} P(Z_\infty(n) < \infty | Z_\infty(n) \geq r) &= P(Z_\infty(n) < \infty | W_r < \infty) \\ &\geq P(Z_\infty(n) \leq r | W_r < \infty) = P(Y_{W_r+1} = 0 | W_r < \infty) \geq (1-p)^n > 0 \end{aligned}$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$, vemos que $P(Z_\infty(n) < \infty) = 1$, pois para qualquer variável aleatória Z , vale

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(Z < \infty | Z \geq r) = \begin{cases} 1, & \text{se } P(Z < \infty) = 1 \\ 0, & \text{se } P(Z < \infty) < 1. \end{cases}$$

Sabemos que eventos de probabilidade zero ou um são independentes de qualquer outro, então se $P(Z < \infty) = 1$ teremos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(Z < \infty | Z \geq r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{P(Z < \infty)}{P(Z \geq r)} P(Z \geq r) = P(Z < \infty) = 1.$$

onde, por definição de probabilidade condicional, a primeira igualdade ainda é válida mesmo quando $P(Z \geq r) = 0$. Se $P(Z < \infty) < 1$, então

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(Z < \infty | Z \geq r) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} P(Z = \infty | Z \geq r) = 1 - 1 = 0.$$

Como $\lim_{r \rightarrow \infty} P(Z_\infty(n) < \infty | Z_\infty(n) \geq r) > 0$, temos $P(Z_\infty(n) < \infty) = 1$. $\square$

Lema 2.3.2 *Se $\theta_H(p) > 0$, k e N_2 são escolhidos como em (2.3) e (2.6), então $\exists H_0 = H_0(\eta)$ tq $\forall h \geq H_0$*

$$P(Y_h \geq 2N_2) > 1 - \eta. \quad (2.7)$$

PROVA: Do Lema 2.3.1, CP1 ou $Y_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \infty$ ou eventualmente $Y_h = 0$. Devido $\theta_{S_h^*}(p) = 0$, $\forall h$, os eventos $\{Y_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \infty\}$ e $\{b_1 \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathcal{H}^*\}$ podem diferir apenas por um conjunto de configurações de elos de probabilidade zero. Assim

$$\begin{aligned} P(Y_h \geq 2N_2) &\geq P(Y_h \geq 2N_2 | Y_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty) P(Y_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty) \\ &= P(Y_h \geq 2N_2 | Y_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty) P(b_1 \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathcal{H}^*). \end{aligned}$$

A probabilidade condicional acima converge para 1 quando $h \rightarrow \infty$, logo, tomando h suficientemente grande podemos garantir que ela é $\geq 1 - \eta^2$ e pela escolha de k temos de (2.3) que $P(b_1 \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathcal{H}^*) > 1 - \eta^2$. Daí

$$P(Y_h \geq 2N_2) \geq (1 - \eta^2)(1 - \eta^2) = (1 - \eta^2)^2 > 1 - 2\eta^2 > 1 - \eta,$$

onde a última igualdade é válida porque $\eta < 1/2$, que implica $2\eta^2 < \eta$. $\square$

Consideremos agora $Y_{l,h}$ como o número de sítios no topo do bloco $B(l, h)$ que estão conectados a b_1 por elos abertos e sem usar os elos da borda do bloco:

$$Y_{l,h} = |\{y \in T(l, h) : b_1 \leftrightarrow y \text{ em } B^*(l, h)\}|$$

Claramente $Y_{l,h} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} Y_h$, pois $T(l, h) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \overline{S}_h$. Combinando este fato com o Lema 2.3.2 temos que $\forall h \geq H_0$, existe um $L_0 = L_0(h)$ tq $\forall l \geq L_0$

$$P(Y_{l,h} \geq N_2) > 1 - 2\eta. \quad (2.8)$$

Isto é verdade porque

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P(Y_{l,h} \geq N_2) = P(Y_h \geq N_2) > P(Y_h \geq 2N_2) > 1 - \eta.$$

Logo, podemos escolher l grande o suficiente de forma que (2.8) seja verdadeira.

Faremos agora um *refinamento* na altura h de tal forma que haja justamente N_2 sítios no topo de $B(l, h)$ conectados a b_1 em $B^*(l, h)$. Este refinamento será usado para provar que devem haver muitos sítios, em ambos S e T do bloco, que estão conectados a b_1 em $B^*(l, h)$.

Lema 2.3.3 *Para cada $l > L_0(H_0)$, $\exists H_1 = H_1(l)$ tq*

$$P(Y_{l,H_1-1} \geq N_2) > 1 - 2\eta, \quad (2.9)$$

$$P(Y_{l,H_1} \geq N_2) \leq 1 - 2\eta \quad (2.10)$$

e ainda

$$H_1(l) \rightarrow \infty, \quad \text{quando } l \rightarrow \infty.$$

PROVA: Tomando $H_1 - 1 = H_0$, temos por (2.8) que (2.9) é verdadeira. Daí, para demonstrarmos a existência de H_1 será suficiente mostrar que $Y_{l,h} \Rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$ (onde $\Rightarrow$ representa convergência fraca). Se a subsequência de variáveis aleatórias $\{Y_{l,h}, h \geq H_0\}$ não tende a zero para algum valor $l \geq L_0(H_0)$ então deve haver percolação em $\{-l, \dots, l\} \times \mathbb{Z}_+$, que é um evento de probabilidade zero. Por este motivo as probabilidades em (2.9) e (2.10) são satisfeitas para algum $H_1 > H_0$, daí tomamos $H_1(l)$ como o mínimo valor satisfazendo esta condição, isto é, $H_1 = H_0 + 1$.

Para ver que $H_1(l)$ diverge quando $l \rightarrow \infty$, primeiro observamos que H_1 é não decrescente em l . Se H_1 não diverge, então ele tem um limite finito $H_1(\infty)$. Portanto $Y_{l,H_1(l)} \Rightarrow Y_{H_1(\infty)}$ quando $l \rightarrow \infty$ e segue de (2.10) que

$$P(Y_{H_1(\infty)} \geq 2N_2) \leq P(Y_{H_1(\infty)} \geq N_2) \leq P(Y_{l, H_1(l)} \geq N_2) \leq 1 - 2\eta,$$

que claramente contradiz (2.7). Assim, $H_1(l) \rightarrow \infty$, quando $l \rightarrow \infty$. $\square$

Introduziremos agora uma v.a. $X_{l,h}$ que conta o número de sítios no lado de $B(l, h)$ que estão conectados a b_1 por elos abertos em $B^*(l, h)$:

$$X_{l,h} = |\{x \in S(l, h) : b_1 \leftrightarrow x \text{ em } B^*(l, h)\}|.$$

Deveremos mostrar agora que o refinamento do Lema 2.2.3 garante a existência de valores l e h tal que, com probabilidade alta, $X_{l,h}$ e $Y_{l,h}$ são grandes.

Lema 2.3.4 *Existe uma largura $L_1 > L_0(H_0)$ tal que $\forall l > L_1$, temos*

$$P(Y_{l, H_1(l)} \geq M) > 1 - 3\eta. \quad (2.11)$$

e

$$P(X_{l, H_1(l)} \geq M) > 1 - \eta. \quad (2.12)$$

PROVA: De (2.9) segue que para cada $l \geq L_0(H_0)$

$$\begin{aligned} P(Y_{l, H_1(l)} \geq M) &\geq P(Y_{l, H_1(l)} \geq M \mid Y_{l, H_1(l)-1} \geq N_2) P(Y_{l, H_1(l)-1} \geq N_2) \\ &> P(Y_{l, H_1(l)} \geq M \mid Y_{l, H_1(l)-1} \geq N_2) (1 - 2\eta). \end{aligned}$$

Uma maneira em que o evento $\{Y_{l, H_1(l)} \geq M\}$ pode ocorrer é quando pelo menos M sítios dos que estão conectados em $Y_{l, H_1(l)-1}$ estão diretamente conectados (ié, por únicos elos abertos) a seus vizinhos mais próximos em $\{-l, \dots, l\} \times \{H_1(l)\}$. Assim

$$\begin{aligned} P(Y_{l, H_1(l)} \geq M) &> (1 - 2\eta) P(\text{pelo menos } M \text{ sucessos em } N_2 \text{ ensaios de Bernoulli}(p)) \\ &> (1 - 2\eta)(1 - \eta) = 1 - 3\eta + 2\eta^2 > 1 - 3\eta. \end{aligned}$$

Para a prova de (2.12) será usado o fato que existe $L_1 > L_0(H_0)$ tq $\forall l \geq L_1$, temos

$$P(X_{l,H_1(l)} + Y_{l,H_1(l)} \geq M + N_2) > 1 - 2\eta^2.$$

Para ver isto notemos que $\hat{Z}(m) = |\{j : 0 < X_{j,H_1(j)} + Y_{j,H_1(j)} < m\}|$ é q.c. finito (prova análoga ao do Lema 2.3.1). Logo os eventos $\{X_{l,H_1(l)} + Y_{l,H_1(l)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty\}$ e $\{b_1 \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathbb{H}^*\}$ diferem apenas por um conjunto de eventos de probabilidade zero. Daí

$$\begin{aligned} P(X_{l,H_1(l)} + Y_{l,H_1(l)} \geq M + N_2) &\geq P(X_{l,H_1(l)} + Y_{l,H_1(l)} \geq M + N_2 | X_{j,H_1(j)} + Y_{j,H_1(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty) \times \\ &P(b_1 \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathbb{H}^*). \end{aligned}$$

Fazendo $l \rightarrow \infty$ e usando (2.3) temos que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P(X_{l,H_1(l)} + Y_{l,H_1(l)} \geq M + N_2) > 1 \cdot (1 - \eta^2).$$

Podemos portanto escolher L_1 suficientemente grande tq $\forall l \geq L_1$, temos

$$P(X_{l,H_1(l)} + Y_{l,H_1(l)} \geq M + N_2) > 1 - 2\eta^2.$$

Com isso, tomando $l \geq L_1$ e usando FKG, obtemos

$$\begin{aligned} 2\eta^2 &\geq P(X_{l,H_1(l)} + Y_{l,H_1(l)} < M + N_2) \geq P(X_{l,H_1(l)} < M, Y_{l,H_1(l)} < N_2) \\ &\geq P(X_{l,H_1(l)} < M)P(Y_{l,H_1(l)} < N_2) > P(X_{l,H_1(l)} < M)2\eta, \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade segue por FKG($\downarrow$) e a última por (2.10). Temos, portanto, que $P(X_{l,H_1(l)} < M) \leq \eta$, que implica $P(X_{l,H_1(l)} \geq M) > 1 - \eta$. $\square$

Agora, dado um conjunto $\mathcal{X}$ contendo M ou mais sítios, podemos encontrar um conjunto $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ contendo pelo menos $N_1 = \lceil M/(3k+1) \rceil$ sítios em S com as seguintes propriedades:

- (i) $\forall z \in \mathcal{Z}, \exists x \in \mathcal{X}$ tq $\|x - z\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1,2} |x(i) - z(i)| \leq k$,
- (ii) Os hiperblocos $\{z + b_2 : z \in \mathcal{Z}\}$ são disjuntos e estão inteiramente em S .

Pela propriedade (ii) os eventos $\{\{z + b_2 \text{ está aberto}\} : z \in \mathcal{Z}\}$ são independentes. Como há mais que N_1 sítios, a condição (2.5) implica que

$$P(\exists \text{ um sítio } z \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \text{ para o qual } z + b_2 \text{ está aberto em } S) > 1 - \eta, \quad (2.13)$$

para cada coleção $\mathcal{X}$ de pelo menos M sítios em S . Para vermos isto, notemos que

$$\begin{aligned} & P(\nexists z \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \text{ para o qual } z + b_2 \text{ está aberto em } S) \\ &= P(\text{ todos os } N_1 + N_3 \text{ hiperblocos fechados em } S), \text{ onde } N_3 \geq 1 \\ &= [P(b_2 \text{ fechado})]^{N_1+N_3} < [1 - P(b_2 \text{ aberto})]^{N_1} < \eta. \end{aligned}$$

onde a última igualdade se dá por independência e a última desigualdade segue por (2.5). Estas definições e argumentos podem ser estendidos para o topo do bloco com $\mathcal{X}$, S , $\mathcal{Z}$, x, z e b_2 substituídos por $\mathcal{N}$, T , $\mathcal{M}$, w, y e b_1 , respectivamente. Assim, também temos que

$$P(\exists \text{ um sítio } w \in \mathcal{M}(\mathcal{N}) \text{ para o qual } w + b_1 \text{ está aberto em } T) > 1 - \eta, \quad (2.14)$$

para cada coleção $\mathcal{N}$ de pelo menos M sítios em T .

Para o próximo lema, introduziremos um par de v.a. que são análogas a $X_{l,h}$ e $Y_{l,h}$, com a diferença que estas novas variáveis contam os sítios de ligação (i.e., que são centros de hiperblocos abertos) de $B(l, h)$ ao invés dos sítios conectados a b_1 em $B^*(l, h)$:

$$U_{l,h} = |\{x \in S(l, h) : x + b_2 \text{ é um hiperbloco aberto contido em } S \text{ e conectado a } b_1 \text{ em } B'(l, h)\}|$$

e

$$V_{l,h} = |\{y \in T(l, h) : y + b_1 \text{ é um hiperbloco aberto contido em } T \text{ e conectado a } b_1 \text{ em } B'(l, h)\}|.$$

Lema 2.3.5 $\forall l \geq L_1$ (com L_1 do Lema 2.3.4)

$$P(U_{l,H_1(l)} \geq 1) > 1 - 2\eta, \quad (2.15)$$

e

$$P(V_{l,H_1(l)} \geq 1) > 1 - 4\eta. \quad (2.16)$$

PROVA: Temos que b_1 está conectado em $B^*(L, H)$ a uma coleção de pelo menos M sítios em S e há pelo menos um destes sítios, digamos $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, para o qual $z + b_2$ está aberto. Condicionando sobre o conjunto de sítios com os quais b_1 está conectado em $B^*(L, H)$, temos

$$P(U_{l,H_1(l)} \geq 1)$$

$$\geq \sum_{\mathcal{X} \subset S: |\mathcal{X}| \geq M} P(\exists z \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \text{ tq } z + b_2 \text{ está aberto em } S | \mathcal{X} = \{x \in S : x \leftrightarrow b_1 \text{ em } B^*(L, H)\}) \times \\ P(\mathcal{X} = \{x \in S : x \leftrightarrow b_1 \text{ em } B^*(L, H)\}).$$

As probabilidades condicionais são da forma $P(G|F)$ onde F depende apenas de elos de $B(L, H)$ que não estão na borda e G depende apenas de elos da borda; assim F e G são independentes e portanto $P(G|F) = P(G)$. Daí

$$P(U_{l,H_1(l)} \geq 1) \\ \geq \sum_{\mathcal{X} \subset S: |\mathcal{X}| \geq M} P(\exists z \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \text{ tq } z + b_2 \text{ está aberto em } S) P(\mathcal{X} = \{x \in S : x \leftrightarrow b_1 \text{ em } B^*(L, H)\}) \\ \geq \sum_{\mathcal{X} \subset S: |\mathcal{X}| \geq M} (1 - \eta) P(\mathcal{X} = \{x \in S : x \leftrightarrow b_1 \text{ em } B^*(L, H)\})$$

onde a última igualdade segue de (2.13). Agora

$$\sum_{\mathcal{X} \subset S: |\mathcal{X}| \geq M} P(\mathcal{X} = \{x \in S : x \leftrightarrow b_1 \text{ em } B^*(L, H)\}) \geq P(X_{l,H_1(l)} \geq M).$$

Logo,

$$P(U_{l,H_1(l)} \geq 1) \geq (1 - \eta) P(X_{l,H_1(l)} \geq M) \geq (1 - \eta)(1 - \eta) > 1 - 2\eta,$$

onde a última desigualdade é devida a (2.12). Analogamente,

$$P(V_{l,H_1(l)} \geq 1)$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{\mathcal{N} \in T: |\mathcal{N}| \geq M} P(\exists y \in \mathcal{M}(\mathcal{N}) \text{ tq } y + b_1 \text{ está aberto em } T \mid \mathcal{N} = \{w \in T : w \leftrightarrow b_1 \text{ em } B^*(L, H)\}) \times \\ &\quad P(\mathcal{N} = \{w \in T : w \leftrightarrow b_1 \text{ em } B^*(L, H)\}) \\ &\geq \sum_{\mathcal{N} \in T: |\mathcal{N}| \geq M} (1 - \eta) P(\mathcal{N} = \{w \in T : w \leftrightarrow b_1 \text{ em } B^*(L, H)\}) \\ &\geq (1 - \eta) P(Y_{l,H_1(l)} \geq M) > (1 - \eta)(1 - 3\eta) > 1 - 4\eta. \quad \square \end{aligned}$$

Como consequência do Lema 2.3.5, temos um resultado cuja prova serve de modelo para a prova da Proposição 2.3.1.

Corolário 2.3.1 *Suponhamos $\theta_H(p) > 0$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existem inteiros positivos k, L e H tal que*

$$P(B(L, H) \text{ tem pelo menos um sítio de ligação em } S \text{ e um em } T) > 1 - \varepsilon. \quad (2.17)$$

PROVA: Tomando $\eta = \varepsilon/6$ e $k, L = L_1$ e $H = H_1(L_1)$ satisfazendo (2.3) e os Lemas 2.3.4 e 2.3.3, respectivamente. Então a probabilidade em (2.17) é igual a

$$\begin{aligned} P(U_{L,H} \geq 1, V_{L,H} \geq 1) &= P(U_{L,H} \geq 1) - P(U_{L,H} \geq 1, V_{L,H} = 0) \\ &\geq P(U_{L,H} \geq 1) - P(V_{L,H} = 0) \geq 1 - 2\eta - 4\eta = 1 - 6\eta = 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue por (2.10). $\square$

O Corolário 2.3.1 é uma versão mais fraca da Proposição 2.3.1. Para esta é necessário ter um maior controle sobre as posições dos sítios de ligação. Para isto, definiremos as seguintes variáveis aleatórias:

$$\begin{aligned} U_{l,h}^{(\otimes)} &= |\{x \in S_{\otimes}(l, h) : x + b_2 \text{ é um hiperbloco aberto contido em } S \text{ e conectado a } \\ &\quad b_1 \text{ em } B'(l, h)\}|, \text{ para cada } \otimes \in \{L, O\}, \\ \text{e } V_{l,h}^{(\otimes)} &= |\{y \in T_{\otimes}(l, h) : y + b_1 \text{ é um hiperbloco aberto contido em } T \text{ e conectado a } \\ &\quad b_1 \text{ em } B'(l, h)\}|, \text{ para cada } \otimes \in \{L, O\}. \end{aligned}$$

2.3.3 Prova da Proposição 2.3.1

Escolhemos η tal que $f(\eta) = \varepsilon$, onde

$$f(\eta) = 2(2\eta)^{1/2} + 2(4\eta)^{1/2}.$$

Tomamos $k, L = L_1$ e $H = H_1(L_1)$ satisfazendo (2.3) e os Lemas 2.3.4 e 2.3.3, respectivamente.

Por simetria, segue que

$$P\left(U_{L,H}^{(L)} = n\right) = P\left(U_{L,H}^{(O)} = n\right), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Então, aplicando FKG($\downarrow$), temos

$$\begin{aligned} \left[P\left(U_{L,H}^{(L)} = 0\right)\right]^2 &= P\left(U_{L,H}^{(L)} = 0\right) P\left(U_{L,H}^{(O)} = 0\right) \leq P\left(U_{L,H}^{(L)} = 0, U_{L,H}^{(O)} = 0\right) \\ &< P\left(U_{L,H} = 0\right) \leq 2\eta, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é devida a (2.15). Com isso

$$P\left(U_{L,H}^{(\otimes)} = 0\right) < (2\eta)^{1/2}, \text{ para cada } \otimes \in \{L, O\}.$$

Analogamente, $P\left(V_{L,H}^{(L)} = n\right) = P\left(V_{L,H}^{(O)} = n\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí, aplicando FKG($\downarrow$), temos

$$\begin{aligned} \left[P\left(V_{L,H}^{(L)} = 0\right)\right]^2 &= P\left(V_{L,H}^{(L)} = 0\right) P\left(V_{L,H}^{(O)} = 0\right) \leq P\left(V_{L,H}^{(L)} = 0, V_{L,H}^{(O)} = 0\right) \\ &< P\left(V_{L,H} = 0\right) \leq 4\eta, \end{aligned}$$

com a última desigualdade sendo devida a (2.16). Com isso

$$P\left(V_{L,H}^{(\otimes)} = 0\right) < (4\eta)^{1/2}, \text{ para cada } \otimes \in \{L, O\}.$$

Com estes resultados, temos que

$$\begin{aligned}
P(B_N(L, H) \text{ ocupado}) &= 1 - P(\{U_{L,H}^{(\otimes)} = 0, \text{ para algum } \otimes\} \cup \{V_{L,H}^{(\otimes)} = 0, \text{ para algum } \otimes\}) \\
&\geq 1 - [P(U_{L,H}^{(\otimes)} = 0, \text{ para algum } \otimes) + P(V_{L,H}^{(\otimes)} = 0, \text{ para algum } \otimes)] \\
&\geq 1 - [2P(U_{L,H}^{(L)} = 0) + 2P(V_{L,H}^{(L)} = 0)] \\
&> 1 - [2(2\eta)^{1/2} + 2(4\eta)^{1/2}] \\
&= 1 - f(\eta) = 1 - \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Concluimos esta seção retornando a uma breve discussão sobre os blocos Sul, Leste e Oeste. Para isto, introduziremos o conceito de codireção: as duas codireções de uma dada direção $\oplus$ são suas duas direções ortogonais $\otimes$. Assim, as codireções das direções Norte (e Sul) são as direções Leste e Oeste e vice-versa.

Basicamente o bloco Sul $B_S(L, H)$ é o bloco $B_N(L, H)$ refletido no eixo x_1 e o bloco Leste (ou Oeste) é o bloco $B_N(L, H)$ rotacionado 90° no sentido horário (respectivamente anti-horário). Os “topos” e “lados” destes blocos são as imagens do topo e dos lados de $B_N(L, H)$ (refletidos e rotacionados). Usaremos a notação T_N, S_N, T_S, S_S, T_L , etc. para representar os respectivos topos e lados dos blocos. O topo $T_\oplus$ e o lado $S_\oplus$ de qualquer destes blocos podem ser divididos em 2 subregiões congruentes $T_{\oplus, \otimes}$ e $S_{\oplus, \otimes}$, onde $\oplus$ e $\otimes$ são codireções. O Bloco $x + B_S(L, H)$ será dito ocupado (para um dado valor de k) se o hiperbloco $x + b_1$ estiver conectado em $x + B'_S(L, H)$ a sítios de ligação em cada subregião $x + S_{S, \otimes}$ e $x + T_{S, \otimes}$ para $\otimes \in \{L, O\}$ e o bloco $x + B_L(L, H)$ (respectivamente $x + B_O(L, H)$) será dito ocupado (para um dado valor de k) se o hiperbloco $x + b_2$ estiver conectado em $B'_L(L, H)$ (respectivamente $B'_O(L, H)$) a sítios de ligação em cada subregião $x + S_{L, \otimes}$ e $x + T_{L, \otimes}$ (respectivamente $x + S_{O, \otimes}$ e $x + T_{O, \otimes}$) para $\otimes \in \{N, S\}$. Com isto temos uma consequência imediata da Proposição 2.3.1:

Proposição 2.3.2 *Suponhamos $\theta_H(p) > 0$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ e inteiros positivos k , $L(\geq k)$ e $H(\geq 2k)$ tal que*

$$P_{p-\delta}(B_\oplus(L, H) \text{ Ocupado}) > 1 - \varepsilon. \quad (2.18)$$

onde $\oplus \in \{N, S, L, O\}$.

Para o restante deste capítulo fixamos L e H e representamos $B_\oplus(L, H)$ apenas por $B_\oplus$.

2.4 Construção Gráfica

Na seção anterior vimos que se $\theta_H(p) > 0$ então há uma probabilidade alta (se ε for pequeno) de podermos produzir blocos $B_{\oplus}(L, H)$ ocupados, onde $\oplus$ pode ser N, S, L ou O. Na primeira parte desta seção mostraremos que estes blocos podem ser empilhados de forma que possamos construir caminhos formados por estes blocos. Estes caminhos deverão começar em um dos lados de um quadrado maior (do tipo $\{-K, \dots, K\}^2$) e chegar aos três outros lados deste quadrado.

Se formos ligando um bloco ao outro, estaremos formando uma pilha. Não será permitida sobreposição de blocos e nem mais de uma ligação por face. Precisaremos também controlar a localização dos novos blocos que formos colocando na pilha para que esta não se extravie de uma certa região pré-definida.

Suponhamos que o bloco B_N esteja ocupado. Então o hiperbloco b_1 ao centro da base de B_N estará conectado em B^* a sítios de ligação em $y_{\otimes} + T_{N,\otimes}$ (se houver mais que um sítios de ligação em $T_{N,\otimes}$ escolheremos o primeiro em alguma ordem pré-fixada e o chamaremos de $y_{\otimes}$). Para cada $\otimes \in \{L, O\}$, podemos agora examinar o bloco $y_{\otimes} + B_N$. Se este segundo bloco estiver ocupado então o hiperbloco b_1 estará conectado (através de $y_{\otimes} + B_N$) a sítios de ligação no topo e nos lados de $y_{\otimes} + B_N$.

Notemos agora que se y for um sítio de ligação fixado em $T_{N,\otimes}$ ($\otimes$ fixado) então os eventos

$$E_1 : B_N \text{ está ocupado com sítio de ligação } y \text{ em } T_{N,\otimes}$$

e

$$E_2 : y + B_N \text{ está ocupado}$$

são independentes, pois E_1 depende apenas de elos inteiramente dentro de B_N , enquanto E_2 depende de elos inteiramente dentro de $y + B_N$. Assim, se $\theta_H(p) > 0$, teremos

$$\begin{aligned} & P(b_1 \text{ esteja conectado a algum sítio de ligação em } T_{N,L} \text{ de algum segundo } B_N) \\ & \geq P(b_1 \text{ esteja conectado a algum sítio de ligação em } T_{N,L} \text{ de algum segundo } B_N \text{ através de} \\ & \text{algum } y_{\otimes} \text{ em } T_{N,\otimes}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{y \in T_{N,\otimes}} P(b_1 \text{ esteja conectado a algum sítio de ligação em } T_{N,L} \text{ de um segundo } B_N \text{ através de } y_\otimes \mid y_\otimes = y) P(y_\otimes = y) \\
&= \sum_{y \in T_{N,\otimes}} P(E_1 \cap E_2) P(y_\otimes = y) \\
&= P(E_1 \cap E_2) \sum_{y \in T_{N,\otimes}} P(y_\otimes = y) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) > (1 - \varepsilon)^2.
\end{aligned}$$

Entretanto, se para algum $z \in T_N$ (com $z \neq y$) definirmos

$$E_3 : z + B_N \text{ está ocupado}$$

então podemos notar que E_2 e E_3 dependerão de alguns elos em comum e assim serão geralmente dependentes. Este raciocínio pode ser estendido para qualquer ligação com dois blocos do mesmo tipo, por isso não permitiremos que sejam colocados dois blocos no topo de um mesmo bloco ocupado.

Será permitido ligarmos dois blocos de tipos diferentes. A condição para que este tipo de ligação possa ser feito é que os dois blocos a serem ligados sejam codirecionados. Com isto, poderemos ligar qualquer bloco com qualquer uma de suas codireções. Ligações entre blocos Norte e Sul (assim como entre blocos Leste e Oeste) não serão permitidas.

Bloco $y_L + B_N$ ligado ao bloco B_N

Bloco $x_L + B_L$ ligado ao bloco B_N

Figura 2.5: Exemplos de ligações permitidas entre blocos

Tal como no caso de ligar dois blocos do mesmo tipo, para qualquer $x \in S_{N,L} = \{L\} \times \{0, \dots, H\}$ os eventos

$$\{B_N \text{ está ocupado com sítio de ligação } x \in S_{N,L}\} \text{ e } \{x + B_L \text{ está ocupado}\}$$

serão independentes, enquanto os eventos

$$\{x + B_L \text{ está ocupado}\} \text{ e } \{x' + B_L \text{ está ocupado}\}$$

com $x \neq x' \in S_{N,L}$ serão geralmente dependentes.

Para evitar problemas de dependência não ligaremos mais que um bloco em cada face $S_\otimes$ ou $T_\otimes$ do primeiro bloco. Entretanto, poderemos ligar um bloco em $S_\otimes$ e outro em T_* tomando cuidado para evitar intersecção entre estes dois blocos; para isso precisamos que $\otimes$ seja diferente de $*$.

Figura 2.6: Ligação de dois blocos a um outro bloco

Daqui em diante vamos dividir $\mathbb{Z}_+^2$ em quadrados que são translações de $Q = \{-K, \dots, K\}^2$ para algum $K = K(L, H) > 0$. Para cada $(x, y) \in \mathbb{Z}_+^2$ seja $Q(x, y) = \{2xK, \dots, 2(x+1)K\} \times \{2yK, \dots, 2(y+1)K\}$. Cada quadrado tem no máximo 4 vizinhos e compartilha uma face com cada vizinho. Estamos interessados em examinar os quadrados no contexto do algoritmo para o crescimento do conglomerado da origem da Seção 2.1.1. Especificamente, se um quadrado $Q(x, y)$ tem um vizinho que foi previamente declarado ser *bom*, então mostraremos que $Q(x, y)$ tem uma probabilidade alta de ser bom quando o algoritmo testá-lo. Será necessário definir um evento particular para decidir se o quadrado $Q(0, 0)$ é bom. Isto será feito na Seção 2.5. Para $(x, y) \neq (0, 0)$ diremos que $Q(x, y)$ é bom se as condições abaixo estão satisfeitas:

- (i) ele tem um vizinho bom,
- (ii) um particular tipo de *cruzamento* for *bem sucedido*.

Um cruzamento é uma união de sequências de blocos $B_{\oplus}$ conectados de tal maneira que este cruzamento será *bem sucedido* se todos os blocos que o compõem estiverem ocupados.

Por facilidade, serão explicadas apenas as regras para a construção do cruzamento do quadrado Q a partir do seu vizinho Sul $Q' = \{-K, \dots, K\} \times \{-3K, \dots, -K\}$. Usando invariância por translação, por reflexão e por rotação de 90° teremos que a probabilidade de que Q seja declarado bom dado que Q' é bom, é igual a probabilidade de que qualquer quadrado Q'' seja bom dado que seu vizinho Q''' é bom. Neste exemplo particular, desejamos ter um procedimento que sirva para construir um cruzamento bem sucedido que conecte um dado sítio de ligação na face comum de Q e Q' a sítios de ligação nas outras três faces (Norte, Leste e Oeste) de Q . Contudo, na construção das sequências de blocos, embora tenhamos controle sobre a direção a seguir, haverá sempre alguma incerteza sobre a posição exata do bloco final, ou seja, não temos certeza de que o último bloco na direção Norte, por exemplo, terá seu topo exatamente na face Sul do quadrado Q . Para contornar este problema vamos parar a construção (em uma dada direção) quando um bloco estiver suficientemente “próximo” da respectiva face de Q . Para tornar este “próximo” preciso, vamos definir *regiões alvo*, que são regiões do quadrado que estão próximas das bordas (veja Figura 2.7). Contentaremos-nos em provar que, com probabilidade alta, podemos construir um cruzamento partindo de um dado ponto de uma região alvo de um quadrado Q' e chegando a todas as regiões alvo de seu vizinho Q .

Uma característica importante desta construção geométrica é que ela nos permitirá determinar um limitante superior R (independente de L e H) para o número de blocos $B_{\oplus}$ necessários para um cruzamento. Como a Proposição 2.3.2 nos diz que L e H podem ser encontrados de forma que cada bloco do cruzamento tem probabilidade (condicional a $\theta_H(p) > 0$) superior a $(1 - \varepsilon)$ de estar ocupado, então o cruzamento inteiro (de blocos disjuntos) terá probabilidade superior a $(1 - \varepsilon)^R$ de ser bem sucedido. Podemos tornar esta probabilidade tão próxima de 1 quanto queiramos por uma apropriada escolha de ε .

Infelizmente a falta de controle de sobre a razão H/L nos traz dificuldades para a determinação do limitante R . Para contornar este problema faremos duas construções diferentes de acordo com o caso $H \geq L$ ou $H < L$.

Para $H \geq L$:

$$K = 5H + 7L; \alpha = 4H + 5L; \beta = K - H + 1$$

Para $H < L$:

$$K = 11(H + L); \alpha = 9(H + L); \beta = K - L - 2H + 1$$

Tamanho das Regiões Alvo: $(2\alpha) \times (K - \beta)$
ou $(K - \beta) \times (2\alpha)$

$$K - \beta = \begin{cases} H - 1 & \text{se } H \geq L \\ L + 2H - 1 & \text{se } H < L \end{cases}$$

Figura 2.7: Ilustração das Regiões Alvo e da Linha de divisão

2.4.1 Construção do Cruzamento para o Caso $H \geq L$

Nesta seção usaremos $K = 5H + 7L$, $\alpha = 4H + 5L$ e $\beta = K - H + 1$. As Regiões Alvo serão da forma $(2\alpha) \times (K - \beta) = (8H + 10L) \times (H - 1)$. No exemplo particular de construir um cruzamento em Q partindo de Q' , descreveremos um procedimento para fazer o cruzamento partindo da Região Alvo Norte de Q' que é a região $\{-\alpha, \dots, \alpha\} \times \{-K - (K - \beta), \dots, -K\}$ e chegando às regiões alvo Norte, Leste e Oeste de Q , que são:

$$RA_N = \{-\alpha, \dots, \alpha\} \times \{\beta, \dots, K\}$$

$$RA_L = \{\beta, \dots, K\} \times \{-\alpha, \dots, \alpha\}$$

$$RA_O = \{-K, \dots, -\beta\} \times \{-\alpha, \dots, \alpha\}$$

As regras para a construção dos cruzamentos estão divididas em dois conjuntos, que cha-

maremos de regras de *centralização* e *bifurcação*. Estas regras são sempre da forma: conectar um tipo específico de bloco a um primeiro bloco em um sítio de ligação específico. Será sempre assumido que estamos fazendo as ligações com blocos ocupados; se em algum momento obtemos um bloco não ocupado, então o procedimento de cruzamento será terminado e o quadrado será declarado ser *mal sucedido*.

Figura 2.8: Esquema do cruzamento para o caso $H \geq L$

O procedimento de construção do cruzamento é o seguinte (veja Figura 2.8): primeiro as regras de centralização são usadas para construir uma sequência (denominada *centralização inicial*) de blocos (Norte) que segue na direção Norte de Q a partir da Região Alvo Norte (RA_N) de Q' sem chegar muito perto dos lados Leste e Oeste de Q . Após esta sequência de blocos ter avançado o suficiente (alcançado a *linha de divisão*), as regras de centralização são suspensas e aplicamos as regras de bifurcação para conectar uma particular sequência

de nove blocos (que é a *sequência de bifurcação*) à sequência de centralização. A sequência de bifurcação é montada de forma que possamos encontrar três sítios de ligação z_N, z_L, z_O a partir dos quais possamos aplicar novamente as regras de centralização e conectar cada sítio de ligação $z_\oplus$ com sua respectiva região alvo $RA_\oplus$. Se a sequência de centralização inicial, a sequência de bifurcação e as três sequências finais de centralização forem bem sucedidas, a união das sequências resultará em um cruzamento bem sucedido.

Apresentamos agora os detalhes das regras de centralização: seja $z_1 = (x_1, y_1)$ o sítio de ligação inicial (na RA_N de Q') para o cruzamento de Q e ligamos o bloco Norte $B_1 = z_1 + B_N$ ao sítio z_1 (mais tarde veremos como escolher este z_1). O bloco B_1 deve ter (sob a suposição de que ele está ocupado) pelo menos um sítio de ligação em cada uma das duas metades do topo: $T_{N,L}$ e $T_{N,O}$. Se $x_1 \geq 0$ escolhemos o próximo sítio de ligação $z_2 = (x_2, y_2)$ na região $z_1 + T_{N,O}$. Se $x_1 < 0$ tomamos z_2 em $z_1 + T_{N,L}$. Em qualquer caso, o bloco Norte $B_2 = z_2 + B_N$ estará ligado a B_1 no sítio z_2 . Esta escolha do próximo sítio de ligação que vai conectar o próximo bloco será referida como *centralização em torno da linha $x = 0$* . Continuamos empilhando blocos Norte no topo dos anteriores usando este critério de centralização ($x_i \geq 0 \Rightarrow z_{i+1} \in z_i + T_{N,O}$ e $x_i < 0 \Rightarrow z_{i+1} \in z_i + T_{N,L}$) para decidir qual o próximo sítio de conexão a ser usado. Este empilhamento pára quando algum bloco alcançar a *linha de divisão*.

Figura 2.9: Escolha do próximo sítio de ligação

Quando a sequência de centralização inicial chega na linha de divisão começa o procedimento de bifurcação que servirá para separar as sequências que irão eventualmente chegar às

outras regiões alvo.

Suponhamos que o bloco atravessando a linha de divisão seja $B_n = z_n + B_N$, onde $z_n = (x_n, y_n)$. Neste caso deveremos ter $-\alpha - H \leq y_n < -\alpha$ (estes extremos representam os piores casos).

Para o resto desta seção iremos supor (sem perda de generalidade) que $x_n < 0$. Para o caso complementar ($x_n \geq 0$) temos apenas que inverter todas as futuras referências a Leste e Oeste.

Na Figura 2.10 temos o esquema da sequência de bifurcação.

Figura 2.10: Sequência de bifurcação

Para montar a sequência de bifurcação, começamos chamando de z_{b_1} o sítio de ligação de B_n no lado Oeste de seu topo (i.e., $z_{b_1} \in z_n + T_{N,O}$) e ligamos o primeiro bloco $B_{b_1} = z_{b_1} + B_N$ em z_{b_1} . Conectamos agora o segundo bloco $B_{b_2} = z_{b_2} + B_N$ em $z_{b_2} \in z_{b_1} + T_{N,O}$. Para $i = 3, 4$ e 5 , tomamos z_{b_i} sendo o sítio de ligação de $B_{b_{i-1}}$ em $z_{b_{i-1}} + T_{N,L}$ e ligamos o próximo

bloco da bifurcação neste sítio. Agora escolhemos z_{b_6} sendo o sítio de ligação de B_{b_5} no seu lado Oeste e conectamos o sexto bloco $B_{b_6} = z_{b_6} + B_L$ em z_{b_5} . Finalmente, tomamos z_{b_i} , $i=7, 8$ e 9 , sendo os sítios de ligação na metade Norte do topo de $B_{b_{(i-1)}}$ e ligamos o próximo bloco da bifurcação $B_{b_i} = z_{b_i} + B_L$ neste sítio.

Pela Figura 2.10 podemos notar que se todos estes blocos estiverem ocupados, então não haverá intersecção entre os blocos Norte e Leste, pois se (x, y) é um sítio de qualquer dos blocos Leste, então

$$y \geq y_{b_6} - L \geq y_{b_5} + k - L = y_{b_4} + H + k - L \geq y_{b_4} + k > y_{b_4}. \quad (2.19)$$

Deste modo não será possível haver intersecção entre os primeiros 3 blocos e os blocos Leste e também não haverá intersecção entre qualquer dos blocos B_{b_4} ou B_{b_5} e os blocos Leste. Também não será possível haver intersecção entre qualquer dos blocos da sequência inicial e da sequência de bifurcação, pois $\{B_1, \dots, B_n, B_{b_1}, \dots, B_{b_5}\}$ é uma sequência de blocos Norte. A relação (2.19) nos garante que não há intersecção entre qualquer dos blocos da sequência inicial de centralização e os blocos Leste da bifurcação.

A última parte do processo de bifurcação será a identificação dos 3 sítios de ligação a partir dos quais as sequências de centralização finais serão construídas. Os sítios de ligação correspondentes às regiões alvo Norte, Leste e Oeste serão representados, respectivamente, por $z_{N_1} = (x_{N_1}, y_{N_1})$, $z_{L_1} = (x_{L_1}, y_{L_1})$ e $z_{O_1} = (x_{O_1}, y_{O_1})$. Escolheremos z_{N_1} na face Norte de B_{b_9} , z_{L_1} na metade sul do topo de B_{b_9} e z_{O_1} na face Oeste de B_{b_2} . Trataremos com maiores detalhes apenas a sequência de centralização Oeste. O procedimento é análogo para as outras duas sequências.

Consideremos $\{B_{O_1}, \dots, B_{O_f}\}$ a sequência de blocos Oeste com sítio inicial z_{O_1} que está centrada na linha $y_c = y_{O_1} + L$ (que será chamada de *linha de centralização*) e que pára logo que um bloco alcança a linha $x = -\beta$. O procedimento de centralização que aplicaremos agora é similar ao descrito para a sequência inicial, exceto que usamos blocos Oeste em vez de blocos Norte. Destacamos agora as seguintes consequências da construção:

(a) A coordenada x_1 do ponto inicial satisfaz $x_1 \geq -\alpha$, pois z_1 está no topo do bloco que chegou à RA_N de Q' . Com isso, as regras de centralização implicam que $x_n \geq -\alpha + L$, que nos leva a ter $x_{O_1} \geq -\beta + 1$, pois

$$x_{O_1} \geq x_n - L - 2(L - k) > x_n - 3L \geq -\alpha + L - 3L = -\alpha - 2L = -\beta + 1.$$

Como a sequência Oeste começa à direita de sua linha final $x = -\beta$, então ela contém pelo menos um bloco.

(b) As regras de centralização e a escolha da linha de centralização da sequência Oeste asseguram que cada bloco desta sequência está na região

$$A_O = \{(x, y) \in Q : x \leq x_{O_1}, y_{O_1} - L \leq y \leq y_{O_1} + 3L\}.$$

Para ver isto, notemos que a linha de centralização ($y_c = y_{O_1} + L$) passa por todos os blocos da sequência, logo a distância entre y_c e as faces Leste e Oeste de cada bloco não pode exceder $2L$ (na verdade $2L - k$). Então se B_{O_n} é um bloco da sequência Oeste e $(x, y) \in B_{O_n}$, teremos $y_c - 2L \leq y \leq y_c + 2L$, ié, $y_{O_1} - L \leq y \leq y_{O_1} + 3L$. Ainda, como todos os blocos devem estar à esquerda de x_{O_1} , teremos que $x \leq x_{O_1}$.

O confinamento da sequência à região A_O tem algumas consequências importantes. A primeira delas é que a informação $y_{O_1} - L \leq y \leq y_{O_1} + 3L$ pode ser combinada com as relações (veja Figura 2.10)

$$y_{b_2} < y_{O_1} < y_{b_2} + H, \quad y_{b_2} = y_{b_1} + H, \quad -\alpha \leq y_{b_1} < -\alpha + H$$

para mostrar que o “topo” do último bloco na sequência Oeste está inteiramente dentro da Regial Alvo Oeste, ou seja, se $(x, y) \in B_{O_f}$ então $-\alpha < y < \alpha$:

$$y \geq y_{O_1} - L \geq y_{b_2} + k - L > y_{b_2} - L = y_{b_1} + H - L \geq -\alpha + H - L \geq -\alpha$$

e

$$y \leq y_{O_1} + 3L < y_{b_2} + H + 3L = y_{b_1} + H + H + 3L \leq -\alpha + 3H + 3L < -\alpha + 8H + 10L = \alpha.$$

Uma outra consequência do confinamento é que a sequência Oeste não pode se sobrepor à sequência inicial, pois $\forall (x, y) \in A_O$ temos que $y > y_{O_1} - L > y_{b_2} - L = y_{b_1} + H - L \geq y_{b_1}$, enquanto $y \leq y_{b_1}$, $\forall (x, y)$ na sequência inicial.

Finalmente, a intersecção entre a sequência Oeste e a sequência de bifurcação é um subconjunto da base de B_{O_1} , que é permitido. Assim, os eventos de ocupação dos blocos das sequências inicial, de bifurcação e Oeste são (condicionalmente) independentes.

Similarmente, a sequência Norte $\{B_{N_i}\}$ será definida começando do sítio de ligação z_{N_1} e com linha de centralização $x_c = x_{N_1} - L$. Esta sequência pára quando alcançar a linha final $y = \beta$. Temos também que sequência Norte contém pelo menos um bloco, pois

$$y_{N_1} \leq -\alpha + H - 1 + 5H + 4L = 2H - L - 1 < 4H + 7L + 1 = \beta.$$

As regras de centralização garantem-nos que a sequência Norte está confinada à região

$$A_N = \{(x, y) \in Q : x_{N_1} - 3L \leq x \leq x_{N_1} + L, y \geq y_{N_1}\}.$$

Para ver isto, notemos novamente que a linha de centralização (x_c) passa por todos os blocos da sequência, daí se B_{N_n} é um bloco da sequência Norte e $(x, y) \in B_{N_n}$, teremos $x_c - 2L \leq x \leq x_c + 2L$ ié, $x_{N_1} - 3L \leq x \leq x_{N_1} + L$. Ainda, como todos os blocos devem estar acima de y_{N_1} , teremos que $y \geq y_{N_1}$.

A sequência Leste $\{B_{L_i}\}$ será definida começando do sítio de ligação z_{L_1} e com linha de centralização $y_c = y_{L_1} - L$. Esta sequência pára quando alcançar a linha $x = \beta$. Novamente esta sequência contém pelo menos um bloco, pois $z_{b_1} \in z_n + T_{N,O}$, logo $x_{b_1} \leq x_n < 0$, que nos leva a $x_{L_1} \leq x_{b_1} + 3L + 4H < 3L + 7L + 1 = \beta$.

Esta sequência está confinada à região

$$A_L = \{(x, y) \in Q : x \geq x_{L_1}, y_{L_1} - 3L \leq y \leq y_{L_1} + L\}.$$

Novamente, a linha de centralização (y_c) passa por todos os blocos da sequência, daí se B_{L_n} é um bloco da sequência Leste e $(x, y) \in B_{L_n}$, teremos $y_c - 2L \leq y \leq y_c + 2L$, ié, $y_{L_1} - 3L \leq y \leq y_{L_1} + L$. Ainda, como todos os blocos devem estar à direita de x_{L_1} , teremos que $x \geq x_{L_1}$.

Vemos ainda que A_N e A_L não sobrepõem seus blocos iniciais, pois se $(x, y) \in B_{L_1}$ então $y \leq y_{L_1} + L$, enquanto $y \geq y_{L_1} + L$, $\forall (x, y) \in B_{N_1}$. Também não há intersecção destas duas

regiões com A_O . Para provar que o primeiro bloco da sequência Norte não sobrepõe o primeiro bloco da sequência Oeste, notemos que se $(x, y) \in B_{N_1}$, então $x \geq x_{N_1} - L \geq x_{b_9} - L > x_{b_9} - H = x_{b_8} > x_{O_1}$ e se $(x, y) \in B_{L_1}$ teremos que $x > x_{b_9} > x_{O_1}$.

Com isto estabelecido, temos que as intersecções entre as sequências de bifurcação, Norte e Leste são subconjuntos das bases de B_{N_1} e B_{L_1} , que é permitido. Assim, a união das cinco sequências - inicial, bifurcação, Norte, Leste e Oeste - formará um quadrado bem sucedido se todas as sequências forem bem sucedidas. Finalmente, os limites das regiões $A_\oplus$ podem ser combinados com as relações

$$-H - 5L < x_{N_1} < 4H + 4L \quad \text{e} \quad -6L < y_{L_1} < 2H - 2L$$

para mostrar que os topos dos blocos finais B_{N_f} e B_{L_f} estão no interior da correspondente região alvo, ou seja, se $(x, y) \in B_{N_f}$ então $-\alpha < x < \alpha$ e se $(x, y) \in B_{L_f}$ então $-\alpha < y < \alpha$.

Para verificar as relações acima, notemos que

$$\begin{aligned} x_{N_1} &> x_{b_9} = x_{b_6} + 3H \geq x_{O_1} + 2L + L - k + 3H > x_{O_1} + 3H > -\alpha + 3H = -H - 5L \quad \text{e} \\ x_{N_1} &\leq x_{L_1} - k \leq x_{L_1} = x_{b_6} + 4H \leq x_n + L + 3(L - k) + 4H < L + 3L + 4H = 4H + 4L, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é válida porque estamos assumindo $x_n < 0$. Também

$$\begin{aligned} y_{L_1} &\geq y_{b_6} - L + k > y_{b_5} - L = y_{b_1} + 4H - L \geq -4H - 5L + 4H - L = -6L \quad \text{e} \\ y_{L_1} &\leq y_{N_1} - L \leq y_{b_5} + H + 4(L - k) - L \leq y_{b_5} + H + 4L - L = y_{b_1} + 4H + H + 3L \\ &< -3H - 5L + 5H + 3L = 2H - 2L. \end{aligned}$$

Com isso, $\forall (x, y) \in B_{N_f}$, temos

$$\begin{aligned} x &\geq x_{N_1} - 3L > -H - 5L - 3L > -H - 5L - 3H = -4H - 5L = -\alpha \quad \text{e} \\ x &\leq x_{N_1} + L < 4H + 4L + L = 4H + 5L = \alpha. \end{aligned}$$

Também, se $(x, y) \in B_{L_f}$, temos

$$\begin{aligned} y &\geq y_{L_1} - 3L > -6L - 3L = -4L - 5L \geq -4H - 5L = -\alpha \quad \text{e} \\ y &\leq y_{L_1} + L < 2H - 2L + L = 2H - L < 4H + 5L = \alpha. \end{aligned}$$

Com isso mostramos que as sequências Norte e Leste terminam em suas respectivas regiões alvo.

O último passo na construção do cruzamento é a determinação dos sítios de ligação $z_{N_{(f+1)}}$, $z_{L_{(f+1)}}$ e $z_{O_{(f+1)}}$ que poderão servir como sítios de ligação iniciais para os cruzamentos dos três outros quadrados vizinhos de Q (pois o outro vizinho Q' está bem sucedido). Escolheremos os sítios de ligação finais dos topos dos blocos $B_{N_f}, B_{L_f}, B_{O_f}$ de acordo com as regras de centralização iniciais. Por exemplo, se $y_{O_f} < 0$ então tomamos $z_{O_{(f+1)}} \in z_{O_f} + T_{O,N}$; caso contrário tomamos $z_{O_{(f+1)}} \in z_{O_f} + T_{O,S}$.

Notemos agora que escolhemos um ponto x_1 de forma que se $x_1 < 0$ então $x_1 \geq -\alpha + L$ - esta desigualdade foi usada diretamente para provar que z_{O_1} ainda não estava na Região Alvo Oeste e depois usada implicitamente para provar que $x_{N_1} > -H - 5L$ (que implica que $z_{N_f} + T_N$ estava contida na Região Alvo Norte). Agora, o topo final da sequência Norte está contido na RA_N , assim se $(x, y) \in z_{N_f} + T_N$ teremos $-\alpha \leq x \leq \alpha$. Combinando esta desigualdade com a regra de centralização para a escolha de $z_{N_{(f+1)}}$, temos que $-\alpha + L \leq x_{N_{(f+1)}} \leq \alpha - L$. Da mesma forma temos que $y_{L_{(f+1)}}, y_{O_{(f+1)}} \in \{-\alpha + L, \dots, \alpha - L\}$.

Chegamos ao final da construção do cruzamento do quadrado Q . Vimos que um cruzamento só será bem sucedido se todas as cinco sequências o forem. Naturalmente nenhum bloco usado no cruzamento de Q intersecta nenhum bloco no cruzamento de Q' . Com isso, a união do cruzamento de Q com o cruzamento de Q' será bem sucedida se cada cruzamento for bem sucedido.

Condicionado em que Q ainda não foi testado, a probabilidade de que Q seja declarado ser *bom* é pelo menos $(1 - \varepsilon)^R$, onde R é um limitante superior para o número de blocos necessários para o cruzamento de Q . Precisamos agora encontrar um valor para R quando $H \geq L$. Notemos que se formos colocando um bloco no topo do outro, partindo da RA_N de Q' até a RA_N de Q teremos que “andar” da linha $y = -K$ até a linha $y = \beta$. Se indicarmos por D a distância (em y) que temos que andar, teremos que $D < \beta - (-K) = \beta + K < 2K$. Logo, o número de blocos deve satisfazer

$$\frac{D}{H} < \frac{2K}{H} = \frac{10H + 14L}{H} = 10 + 14\frac{L}{H} \leq 10 + 14 = 24.$$

Para cruzar da RA_O à RA_L de Q precisamos de pelo menos um bloco a menos (pois agora todos os blocos estão em Q). Logo, no máximo 23 blocos serão necessários. Com isso podemos tomar $R = 24 + 23 = 47$.

2.4.2 Construção do Cruzamento para o Caso $H < L$

Esta construção é baseada na construção do caso $H \geq L$, com algumas modificações. Da maneira como foi construído o cruzamento para o caso $H \geq L$, teríamos algumas complicações geométricas. Por exemplo, não seria possível a determinação do limitante R para o número de blocos necessários para o cruzamento. Assim, para garantir que podemos cruzar um quadrado Q com um número máximo de blocos R deveremos descobrir uma maneira de usar o comprimento L do bloco como medida principal e não sua altura H (como foi feito para o caso $H \geq L$, onde para um cruzamento de uma RA à RA do lado oposto poderíamos ir empilhando blocos um no topo do outro e cada bloco empilhado aumenta em H o “tamanho do caminho percorrido”). O método que usaremos neste caso é combinar blocos em grupos de 3, que serão chamados de *triplos*. Podemos ter 8 ($=4 \times 2$) tipos de triplos, que denotaremos por $C_{\oplus, \otimes}$ onde $\oplus \in \{N, S, L, O\}$ e $\otimes$ é uma codireção de $\oplus$. Para construir o triplo $C_{\oplus, \otimes}$ no sítio z_1 (i.e., $z_1 + C_{\oplus, \otimes}$), começamos com o bloco $B_1 = z_1 + B_{\oplus}$. Agora ligamos um outro bloco do mesmo tipo $B_2 = z_2 + B_{\oplus}$ no sítio $z_2 \in z_1 + T_{\oplus, \otimes}$. Finalmente, conectamos o bloco $B_3 = z_3 + B_{\otimes}$ em $z_3 \in z_2 + S_{\oplus, \otimes}$. O primeiro bloco no triplo será denotado por t_1 e o terceiro por t_3 (a necessidade desta diferença será vista mais adiante). Um triplo qualquer será dito ser *bem sucedido* se seus três blocos estiverem ocupados.

Triplos têm propriedades de empilhamento um tanto semelhante às dos blocos. Por exemplo, se $z_1 + C_{\oplus, \otimes}$ for qualquer triplo bem sucedido e $*$ for uma codireção de $\oplus$, então tomando z_2 sendo o sítio na face $\oplus$ de t_3 poderemos ligar um segundo triplo $z_2 + C_{\oplus, *}$ ao primeiro triplo

Figura 2.11: Exemplos de tipos de triplos

de forma que sua intersecção esteja contida à base de t_1 do segundo triplo. Assim, a união de dois triplos será bem sucedida se cada triplo for bem sucedido.

A maior parte do cruzamento do quadrado no caso $H \geq L$ foi completada pelas quatro sequências de centralização. Uma propriedade importante destas sequências foi que a conexão de cada bloco adicional avançava a sequência em uma distância H (que foi a principal medida) na direção da linha de centralização. Os triplos têm uma propriedade similar na situação em que $H < L$: a ligação de cada triplo adicional na sequência de $C_{\oplus, \otimes}$ e $C_{\oplus, *}$ (onde $\otimes$ e $*$ são as duas codireções de $\oplus$) avança a sequência em uma distância de pelo menos $H + L$ (na verdade $H + L + k$) na direção $\oplus$.

Figura 2.12: Avanço mínimo em cada triplo adicional

Definiremos uma sequência de triplos por um exemplo: uma sequência de triplos centrada na linha $y = y_c$ é uma sequência $\{C_i = z_i + C_{L, \otimes}\}_{i=1}^n$ onde $\otimes \in \{N, S\}$ para $i \geq 1$ e $z_i = (x_i, y_i)$ é o sítio de ligação na face Leste do triplo C_{i-1} para $i \geq 1$. Centramos a sequência através da

escolha dos $\otimes$'s da seguinte forma: tomamos $\otimes = N$ se $y_i < y_c$ e $\otimes = S$ se $y_i \geq y_c$.

As sequências nas outras direções são definidas de forma análoga.

Uma diferença fundamental entre uma sequência de blocos quando $H \geq L$ e a correspondente sequência de triplos quando $H < L$ é que os triplos irão geralmente se afastar mais da linha de centralização. Mais precisamente, cada sítio em uma sequência de centralização de blocos está a uma distância máxima de $2L$ da linha de centralização, ao passo que os sítios em uma sequência de triplos podem estar até uma distância de $3L + H$ (na verdade $3L + H - k$) da linha de centralização. Devido a estes desvios maiores, devemos usar um quadrado maior com Regiões Alvos maiores que no caso $H \geq L$. Para isto usaremos

$$K = 11(L + H), \quad \alpha = 9L + 9H, \quad \text{e} \quad \beta = K - L - 2H + 1.$$

Uma outra diferença fundamental com relação à sequência de blocos é o que denominaremos de *saliência* (veja Figura 2.13). Como exemplo, observemos que em uma sequência de blocos Norte, cada sítio (exceto os da base) do $(n + 1)$ -ésimo bloco têm uma ordenada y estritamente maior do que a de qualquer sítio no n -ésimo bloco, enquanto para triplos esta relação pode ser falsa.

Figura 2.13: Ilustração da região que forma a saliência

Devido a estas saliências precisamos ter um pouco mais de controle sobre as posições dos triplos e por isto definiremos um quadrado ser *bom* apenas se um particular cruzamento

de triplos definido a seguir for bem sucedido. Se apenas exigíssemos a existência de algum cruzamento de triplos estas saliências poderiam causar dificuldades de dependências nos pontos onde fossemos ligar os cruzamentos de dois quadrados adjacentes. Para o caso $H \geq L$ não há este problema.

Figura 2.14: Esquema do cruzamento para o caso $H < L$ e $x_{b_1} < 0$

A construção do cruzamento é como segue: tal como no caso $H \geq L$ o cruzamento será dividido em cinco subsequências - inicial, bifurcação e as três sequências finais. Neste caso, devido a sequência de centralização dos triplos mostrar uma maior movimentação lateral (no sentido do afastamento da linha de centralização) que os blocos do caso $H \geq L$, deveremos usar uma maior sequência de bifurcação para separar as Regiões Alvo das sequências.

Vamos começar com o sítio de ligação z_1 na RA_N de Q' . Formamos uma sequência inicial de triplos centrada em $x = 0$. Quando esta sequência alcança linha de divisão $y = -\alpha$ começamos a formar a sequência de bifurcação. Novamente, sem perda de generalidade, vamos supor que o sítio de ligação $z_{b_1} = (x_{b_1}, y_{b_1})$ tem $x_{b_1} < 0$. (Para o caso $x_{b_1} \geq 0$ temos apenas que inverter todas as referências a Leste e Oeste.)

Na Figura 2.15 temos o esquema da bifurcação.

Figura 2.15: Sequência de bifurcação para o caso $H < L$ com $x_{b_1} < 0$

A sequência de bifurcação será uma sequência de dezessete blocos $\{B_{b_i}\}_{i=1}^{17}$ (ver Figura 2.15). Os três primeiros são blocos que compõem o triplo $z_{b_1} + C_{N,L}$. O quarto bloco será um bloco Norte conectado ao triplo no sítio z_{b_4} na face Norte de t_3 . O quinto bloco também será um bloco Norte conectado a B_{b_4} no sítio de ligação z_{b_5} na metade Oeste do topo de B_{b_4} . O sexto bloco também será conectado a B_{b_4} . Tomamos B_{b_6} onde z_{b_6} é o sítio de ligação na face Leste de B_{b_4} . Os próximos blocos (B_{b_7} e B_{b_8}) também são blocos Leste; ligamos $B_{b_7} = z_{b_7} + T_{N,L}$ no sítio de ligação $z_{b_7} \in z_{b_8} + T_{L,N}$ e $B_{b_8} = z_{b_8} + B_L$ ao bloco B_{b_8} no sítio $z_{b_8} \in z_{b_7} + T_{N,L}$. O bloco B_{b_8} será o primeiro de uma sequência de 10 blocos que formam uma *escadaria* (ver Figura 2.15). Para $i = 1, \dots, 5$ o bloco $B_{b_{(2i+7)}}$ ($\in \{B_{b_9}, B_{b_{11}}, B_{b_{13}}, B_{b_{15}}, B_{b_{17}}\}$) será um bloco Norte conectado à face Norte do bloco Leste $B_{b_{(2i+6)}}$ no sítio de ligação $z_{b_{(2i+7)}}$; para $i = 2, \dots, 5$ o bloco $B_{b_{(2i+6)}}$ ($\in \{B_{b_{10}}, B_{b_{12}}, B_{b_{14}}, B_{b_{16}}\}$) será um bloco Leste conectado à face Leste do bloco Norte $B_{b_{(2i+5)}}$ em $z_{b_{(2i+6)}}$.

Com esta construção não há sobreposição dos blocos da sequência de bifurcação. Para ver que não há intersecção entre B_{b_5} e B_{b_9} usamos o seguinte argumento: se $L > 2H$ então temos que $\forall (x, y) \in B_{b_5}$ devemos ter $y \leq y_{b_4} + 2H$, enquanto $\forall (x, y) \in B_{b_9}$ temos que $y \geq y_{b_4} + L + k > y_{b_4} + 2H$. Por outro lado, se $L \leq 2H$ então $\forall (x, y) \in B_{b_5}$ devemos ter $x < x_{b_4} + L$ enquanto, $\forall (x, y) \in B_{b_9}$, temos que $x \geq x_{b_9} - L \geq x_{b_8} + k - L = x_{b_4} + 2H + L + k - L > x_{b_4} + 2H > x_{b_4} + L$. Com isso, vemos que se $L > 2H$ então B_{b_9} está estritamente acima de B_{b_5} e se $L \leq 2H$ então B_{b_9} está estritamente à direita de B_{b_5} .

Precisamos agora começar a construir as sequências de centralização finais. O sítio de ligação para a sequência Oeste será $z_{O_1} \in S_{N,O}$. Um triplo $C_{O,N}$ será ligado à sequência de bifurcação em z_{O_1} e a partir daí a sequência de triplos será centrada na linha $y = y_{O_1} + 2L + H$. Esta sequência pára quando alcança a linha $x = -\beta$. Com esta centralização temos que cada triplo da sequência está contido na região

$$A_O = \{(x, y) \in Q : x \leq x_{O_1}, y_{O_1} - L \leq y \leq y_{O_1} + 5L + H\}$$

$$\cup \{(x, y) \in Q : x_{O_1} < x < x_{O_1} - H - k + L, y_{O_1} + L \leq y \leq y_{O_1} + 2L + H - k\},$$

onde a segunda parte serve pra garantir que todo $(x, y) \in t_3$ do primeiro triplo está em A_O .

O limitante $x_{b_1} \geq -\alpha$ implica que $x_{O_1} \geq -\beta + 1$, pois no pior caso teremos

$$x_{O_1} \geq x_{b_3} - 2(L - k) \geq x_{b_1} + L - 2(L - k) > x_{b_1} + L - 2L = x_{b_1} - L \geq -\alpha - L = -\beta + 1.$$

Com isso temos que a sequência Oeste tem pelo menos um triplo.

A desigualdade $-\alpha \leq y_{b_1} \leq -\alpha + L + 2H$ implica que $-\alpha + L + 2H \leq y_{O_1} \leq -\alpha + 2L + 6H$, pois

$$y_{O_1} \geq y_{b_5} = y_{b_4} + H \geq y_{b_2} + L + k + H = y_{b_1} + L + k + 2H > y_{b_1} + L + 2H > -\alpha + L + 2H \text{ e}$$

$$y_{O_1} \leq y_{b_6} = y_{b_4} + 2H < y_{b_2} + H + L - k + 2H < y_{b_2} + L + 3H = y_{b_1} + L + 4H \leq -\alpha + L + 2H + L + 4H = -\alpha + 2L + 6H.$$

Portanto temos que a sequência estará na RA_O quando ela alcançar a linha $x = \beta$.

O sítio de ligação para a sequência Leste será $z_{L_1} \in z_{b_{17}} + S_{N,L}$. Conectamos um triplo $C_{L,S}$ em $B_{b_{17}}$ no sítio $z_{b_{17}}$ e continuamos a sequência de triplos centralizando na linha $y_c =$

$y_{L_1} - 2L - H$ até algum triplo alcançar a linha $x = \beta$. Novamente esta sequência começa à esquerda da linha $x = \beta$, pois

$$x_{L_1} = x_{b_{17}} + L < x_{b_{16}} + H + L < 5(L - k) + L + 7H < 6L + 7H < 10L + 9H + 1 = \beta$$

e termina com o t_3 do triplo final totalmente dentro da RA_L , ié, $-\alpha < y_{L_f} < \alpha$, pois

$$\begin{aligned} y_{L_f} &\geq y_c - (3L + H) = y_{L_1} - 2L - H - (3L - H) = y_{L_1} - 5L - 2H \geq y_{b_{17}} - 5L - 2H \\ &\geq y_{b_1} + 6(L + k) + H - 5L - 2H = y_{O_1} + L - H > y_{O_1} > -\alpha \text{ e} \\ y_{L_f} &\leq y_c + (3L + H) = y_{L_1} - 2L - H + 3L + H = y_{L_1} + L \leq y_{b_{17}} + H + L \leq y_{b_1} + 7(L - k) + 6H \\ &\leq -\alpha + L + 2H + 7L + 6H < -\alpha + 18L + 18H = \alpha. \end{aligned}$$

Esta sequência está restrita à região

$$\begin{aligned} A_L &= \{(x, y) \in Q : x \geq x_{L_1}, y_{L_1} - 5L - 2H \leq y \leq y_{L_1} + L\} \\ &\cup \{(x, y) \in Q : x_{L_1} - L + H + k < x < x_{L_1}, y_{L_1} - 2L - H \leq y \leq y_{L_1} - L\}, \end{aligned}$$

pois $y \leq y_c + 3L + H = y_{L_1} - 2L - H + 3L + H = y_{L_1} + L$ e

$$y \geq y_c - (3L + H) = y_{L_1} - 2L - H - 3L - H = y_{L_1} - 5L - 2H.$$

A última sequência de centralização é diferente das duas outras no sentido de que ela não começa em um sítio de um bloco da sequência de bifurcação. Tomaremos z_{N_1} sendo o sítio de ligação na face Norte do primeiro bloco Leste (T_L) do primeiro triplo da sequência Leste. Centraremos a sequência Norte em $x_c = x_{N_1} - 2L - H$. O primeiro triplo deve ser do tipo $C_{N,O}$. Esta sequência pára quando algum triplo alcançar a linha $y = \beta$. Analogamente às outras sequências, temos que $y_{N_1} < \beta$, pois $y_{N_1} = y_{L_1} + L \leq \alpha + L < \beta$. Temos também que ela termina dentro da RA_N , ié, $-\alpha < x_{N_f} < \alpha$, pois

$$\begin{aligned} x_{N_f} &\leq x_c + (3L + H) = x_{N_1} + L \leq x_{L_1} + H + L \leq x_{b_1} + 7(L - k) + 7H + L + H \\ &< x_{b_1} + 7L + 7H + L + H < x_{b_1} + 8L + 8H < 8L + 8H = \alpha \end{aligned}$$

e

$$x_{N_f} \geq x_c - (3L + H) = x_{N_1} - 5L \geq x_{L_1} - 5L \geq x_{b_1} + 7(L + k - H) + 7H - 5L > x_{b_1} + 2L > -\alpha + 2L > -\alpha.$$

Esta sequência está confinada à região

$$A_N = \{(x, y) \in Q : x_{N_1} - 5L - 2H \leq x \leq x_{N_1} + L, y_{N_1} \leq y\} \\ \cup \{(x, y) \in Q : x_{N_1} - 2L - H \leq x \leq x_{N_1} - L, y_{N_1} - L + H - k \leq y \leq y_{N_1}\}.$$

A demonstração é análoga à das outras sequências.

Para o caso $H < L$ não há alternativa quanto às escolhas dos três sítios de ligação que vão dar origem aos cruzamentos dos outros três vizinhos de Q . Tomamos o sítio de ligação final em, digamos, a sequência Leste na face Leste de t_3 do último triplo. Como a sequência final Leste em Q e a sequência inicial em $Q'' = \{K, \dots, 3K\} \times \{-K, \dots, K\}$ (o vizinho Leste de Q) são sequências de triplos $C_{L,N}$ e $C_{L,S}$ (e portanto sem intersecção) segue que a união dos cruzamentos em Q e Q'' será bem sucedida se cada cruzamento for bem sucedido. Considerações similares se aplicam para os sítios de ligações finais nas sequências Oeste e Norte.

Com a construção acima podemos, de forma similar ao caso $H \geq L$, verificar que não há sobreposição das cinco subsequências. Como consequência disto temos que a união será bem sucedida se cada bloco estiver ocupado.

Resta agora determinar um limitante R para o número de blocos necessários para o cruzamento do quadrado para o caso $H < L$. Notemos que o comprimento mínimo que um triplo pode assumir é $H + L + k$. Com isso o número máximo de triplos necessários para cruzar da RA_N de Q' até a RA_N de Q deve satisfazer

$$\frac{K + \beta}{H + L + k} < \frac{K + \beta}{H + L} = \frac{21L + 20H + 1}{H + L} < \frac{21L}{H + L} + \frac{20H}{H + L} + 1 \\ < \frac{21L}{L} + \frac{20H}{2H} + 1 < 21 + 10 + 1 = 32 \text{ triplos}$$

que é equivalente a $32 \times 3 = 96$ blocos. Para cruzar da RA_L à RA_O de Q precisamos de pelo menos um triplo a menos, que equivale a $31 \times 3 = 93$ blocos. Logo podemos tomar $R = 96 + 93 = 189$ blocos.

2.5 Prova do Teorema 1.1

Na seção anterior vimos que podemos construir supersítios onde cada um tem probabilidade (condicional) alta de ser bom. Para a origem $Q(0,0)$ precisamos definir um evento diferente de ocupação, pois ele será o primeiro quadrado a ser examinado. Consideremos então a região

$$A_{Or} = \{0, \dots, K+k\}^2 \cup \left(\{K-k, \dots, K+k\} \times \{K+k, \dots, 2K\} \cup \{K+k, \dots, 2K\} \times \{K-k, \dots, K+k\} \right)$$

Esta região garante-nos que os triplos não ocupam áreas de nenhum quadrado vizinho. Consideremos agora os hiperblocos

$$h_1 = \{K-k, \dots, K+k\} \times \{2K\} \quad \text{e} \quad h_2 = \{2K\} \times \{K-k, \dots, K+k\}.$$

Como $\theta_H(p) > 0$ então há uma probabilidade positiva $\pi_0(p, k, K)$ de que a origem $(0,0)$ esteja conectada dentro de A_{Or} aos hiperblocos h_1 e h_2 . Se este evento ocorrer, diremos que $Q(0,0)$ é bom. Usando o algoritmo para o crescimento do conglomerado e assumindo, por simplicidade, que $Q(1,0)$ é o primeiro vizinho a ser testado, temos pela Proposição 2.3.2 que

$$P_{p-\delta}(Q(1,0) \text{ ser bom} \mid Q(0,0) \text{ é bom}) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^R > 1 - \varepsilon.$$

Por invariância por translação e rotação, temos que se $Q(x,y)$ for um super-sítio vizinho de $Q(x',y')$ que ainda não foi examinado, então

$$P_{p-\delta}(Q(x,y) \text{ ser bom} \mid Q(x',y') \text{ é bom}) > 1 - \varepsilon.$$

Seja $p_c^s(\mathcal{D})$ a densidade crítica do modelo de percolação regular de sítios independentes em $\mathcal{D}$, com probabilidade de percolação $\theta_{\mathcal{D}}^s(p)$. Escolhemos ε tal que $1 - \varepsilon > p_c^s(\mathcal{D})$. Com isto, e notando que só haverá percolação se a origem estiver ocupada, temos que

$$P_{p-\delta}(\text{percolação de super-sítios}) > \pi_0(p, k, K) \cdot \theta_{\mathbb{Z}_+^2}^s(1 - \varepsilon) > 0$$

Como esta renormalização foi feita de forma que percolação de super-sítios na rede renormalizada implica em percolação de elos na rede original, temos que se $\theta_H(p) > 0$ então $\theta_{\mathcal{D}}(p - \delta) > 0$, para algum $\delta > 0$.

Com este resultado fica fácil provar o Teorema 1.1. A prova será feita por absurdo, usando os seguintes fatos:

- (1) se $\theta_H(p) > 0$, então existe $\delta > 0$ tq $\theta_D(p - \delta) > 0$,
- (2) $p_c(\mathcal{H}) \leq p_c(\mathcal{D})$, pois $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$,
- (3) $\theta_H(p) \geq \theta_D(p)$.

Suponhamos que $\theta_H(p) > 0$. Para provarmos a parte (1.1) fazemos $p = p_c(\mathcal{H})$ em (1). Isto, juntamente com (3), nos dá que

$$\theta_H(p_c(\mathcal{H}) - \delta) \geq \theta_D(p_c(\mathcal{H}) - \delta) > 0 \Rightarrow \theta_H(p_c(\mathcal{H}) - \delta) > 0 \text{ (ABSURDO)}, \quad (2.20)$$

pois, por definição, $\theta_L(p) = 0$ para $p < p_c(\mathcal{L})$, $\forall \mathcal{L} \subseteq \mathbb{Z}^d$. A primeira desigualdade em (2.20) segue por (3) e a segunda por (1). Portanto a hipótese $\theta_H(p_c(\mathcal{H})) > 0$ está errada, logo $\theta_H(p_c(\mathcal{H})) = 0$.

Para provarmos a parte (1.2) fazemos $p = p_c(\mathcal{D})$ em (1) e temos que se $\theta_H(p_c(\mathcal{D})) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $\theta_D(p_c(\mathcal{D}) - \delta) > 0$ (ABSURDO). Com isso temos que $\theta_H(p_c(\mathcal{D})) = 0$, que implica $p_c(\mathcal{D}) \leq p_c(\mathcal{H})$ (por definição). Isto, juntamente com (2) completa a prova. $\square$

2.6 Extensões dos Resultados para $d > 2$

Enunciamos agora algumas generalizações dos resultados obtidos até agora. Maiores detalhes podem ser encontrados em Barsky, Grimmett & Newman (1991).

Sejam

$$\mathcal{H} = \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}_+, \quad \mathcal{S}_L = \mathbb{Z}^{d-1} \times \{0, \dots, L\} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_L = \{-L, \dots, L\}^{d-2} \times \mathbb{Z}_+^2.$$

Os limites das densidades críticas destes conjuntos são:

$$p_c(\mathcal{S}) = \lim_{L \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{S}_L) \quad \text{e} \quad p_c(\mathcal{Q}) = \lim_{L \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{Q}_L).$$

A versão do Teorema 1.1 agora (veja pág. 114 da referência acima) é a seguinte:

Teorema 2.6.1 *Suponhamos $d \geq 2$. Então*

$$\theta_H(p_c(\mathbb{H})) = 0.$$

Para $d \geq 3$ temos

$$p_c(\mathbb{H}) = p_c(\mathbb{Q}).$$

Devido à relação

$$\mathbb{H} = \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}_+ \supseteq \mathbb{Z}^{d-2} \times \mathbb{Z}_+^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{Z}_+^d \supseteq \mathbb{S}_L \supseteq \mathbb{Q}_L$$

temos uma consequência imediata do Teorema 2.6.1:

Corolário 2.6.1 *Suponhamos $d \geq 3$. Então*

$$p_c(\mathbb{H}) = p_c(\mathbb{Z}^{d-2} \times \mathbb{Z}_+^2) = \cdots = p_c(\mathbb{Z}_+^d) = p_c(\mathbb{S}) = p_c(\mathbb{Q})$$

e

$$\theta(p_c(\mathbb{H})) = \theta(p_c(\mathbb{Z}^{d-2} \times \mathbb{Z}_+^2)) = \cdots = \theta(p_c(\mathbb{Z}_+^d)).$$

Para provar o Teorema 2.6.1 é suficiente provar o seguinte resultado:

Teorema 2.6.2 (i) *Se $\theta_H(p) > 0$ então existe $\delta > 0$ e $L \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\theta_{\mathbb{Q}_L}(p - \delta) > 0$.*

(ii) *Mais geralmente, sejam*

$$\mathbb{L} = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \mathbb{Z}^{d-e-f} \times \mathbb{Z}_+^e \text{ e } \mathbb{L}' = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L', \dots, L'\}^{d-f-2} \times \mathbb{Z}_+^2,$$

com $e \geq 1$ e $d - f \geq 2$, então existe $\delta > 0$ e $L' \in \mathbb{Z}_+$ tal que se $\theta_{\mathbb{L}}(p) > 0$ então $\theta_{\mathbb{L}'}(p - \delta) > 0$.

Para provar a parte (i) do Teorema 2.6.2 procedemos de forma análoga ao caso bidimensional. Começamos por definir os tipos de blocos:

$$B_N(L, H) = \{-L, \dots, L\}^{d-1} \times \{0, \dots, H\},$$

$$B_S(L, H) = \{-L, \dots, L\}^{d-1} \times \{-H, \dots, 0\},$$

$$B_L(L, H) = \{-L, \dots, L\}^{d-2} \times \{0, \dots, H\} \times \{-L, \dots, L\},$$

$$B_O(L, H) = \{-L, \dots, L\}^{d-2} \times \{-H, \dots, 0\} \times \{-L, \dots, L\}.$$

O bloco $B_N(L, H)$ pode ser dividido em

$$\begin{aligned} T_1(L, H) &= \{0, \dots, L\}^{d-1} \times \{H\} \\ T_2(L, H) &= \{0, \dots, L\}^{d-2} \times \{-L, \dots, 0\} \times \{H\} \\ &\vdots \\ T_t(L, H) &= \{-L, \dots, 0\}^{d-1} \times \{H\}, \quad t = 2^{d-1}, \\ \\ S_1(L, H) &= \{L\} \times \{0, \dots, L\}^{d-2} \times \{0, \dots, H\}, \\ S_2(L, H) &= \{-L\} \times \{0, \dots, L\}^{d-3} \times \{-L, \dots, 0\} \times \{0, \dots, H\}, \\ &\vdots \\ S_s(L, H) &= \{-L, \dots, 0\}^{d-2} \times \{-L\} \times \{0, \dots, H\}, \quad s = (d-1)2^{d-1}. \end{aligned}$$

O topo e a região lateral do bloco são, respectivamente

$$T = T(L, H) = \bigcup_{i=1}^t T_i(L, H) \quad \text{e} \quad S = S(L, H) = \bigcup_{j=1}^s S_j(L, H).$$

A base do cubo será $D = \{-L, \dots, L\}^{d-1} \times \{0\}$.

Os hiperblocos serão

$$b_m(k) = \{-k, \dots, k\}^{d-m} \times \{0\} \times \{-k, \dots, k\}^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, d.$$

Com estas definições temos o resultado análogo à Proposição 2.3.2. Agora particionamos $\mathcal{Q}_{2L}$ em “cubos” da seguinte forma: Para cada $(x, y) \in \mathbb{Z}_+^2$ seja

$$C(x, y) = \{-2L, \dots, 2L\}^{d-2} \times \{2xK, \dots, 2(x+1)K\} \times \{2yK, \dots, 2(y+1)K\}.$$

Para a construção do cruzamento em cada destes cubos, novamente fazemos uma redução ao caso bidimensional. Dizemos que $C(0, 0)$ está bom se a origem está conectada aos hiperblocos

$$h_1 = \{-k, \dots, k\}^{d-2} \times \{K - k, \dots, K + k\} \times \{2K\}$$

e

$$h_2 = \{-k, \dots, k\}^{d-2} \times \{2K\} \times \{K - k, \dots, K + k\}$$

usando apenas os abertos da região

$$A_{Or} = \{-2L, \dots, 2L\}^{d-2} \times \left(\{0, \dots, K + k\}^2 \cup \{K - k, \dots, K + k\} \times \{K + k, \dots, 2K\} \right. \\ \left. \cup \{K + k, \dots, 2K\} \times \{K - k, \dots, K + k\} \right)$$

Com isso obtemos que

$$P_{p-\delta}(\text{percolação de cubos bons em } \mathcal{Q}_{2L}) > 0.$$

Isto prova que se $\theta_H(p) > 0$ então podemos encontrar $L \in \mathbb{Z}_+$ e $\delta > 0$ tq $\theta_{\mathcal{Q}_L}(p - \delta) > 0$.

Para provar a parte (ii) do Teorema 2.6.1 usamos

$$B_N(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L, \dots, L\}^{d-f-1} \times \{0, \dots, H\},$$

$$B_S(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L, \dots, L\}^{d-f-1} \times \{-H, \dots, 0\},$$

$$B_L(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L, \dots, L\}^{d-f-2} \times \{0, \dots, H\} \times \{-L, \dots, L\},$$

$$B_O(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L, \dots, L\}^{d-f-2} \times \{-H, \dots, 0\} \times \{-L, \dots, L\}.$$

O bloco $B_N(L, H)$ pode ser dividido em

$$T_1(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{0, \dots, L\}^{d-f-1} \times \{H\},$$

$$T_2(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{0, \dots, L\}^{d-f-2} \times \{-L, \dots, 0\} \times \{H\},$$

$$\vdots$$

$$T_t(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L, \dots, 0\}^{d-f-1} \times \{H\}.$$

$$S_1(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{L\} \times \{0, \dots, L\}^{d-f-2} \times \{0, \dots, H\},$$

$$S_2(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L\} \times \{0, \dots, L\}^{d-f-3} \times \{-L, \dots, 0\} \times \{0, \dots, H\},$$

$$\vdots$$

$$S_s(L, H) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L, \dots, 0\}^{d-f-2} \times \{-L\} \times \{0, \dots, H\}.$$

$$\text{A base do cubo será } D = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-L, \dots, L\}^{d-f-1} \times \{0\}.$$

Os hiperblocos serão

$$b_m(k) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-k, \dots, k\}^{m-1} \times \{0\} \times \{-k, \dots, k\}^{d-f-m}, \quad m \in \{1, 2, \dots, f\}.$$

Precisamos agora escolher os sítios de ligação. Para que estes não dependam das f primeiras coordenadas tomaremos o conjunto de sítios tendo estas coordenadas nulas e escolheremos o sítio central desta região para ser nosso sítio de ligação. Agora novamente “esquecemos” as $d-2$ primeiras coordenadas e trabalhamos apenas com as duas últimas. Daqui pra frente todo o procedimento é idêntico ao caso (i).

Com estas definições temos o resultado análogo à Proposição 2.3.2. Agora particionamos $\mathcal{Q}_{2L}$ em “cubos” da seguinte forma: Para cada $(x, y) \in \mathbb{Z}_+^2$ seja

$$C(x, y) = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-2L, \dots, 2L\}^{d-f-2} \times \{2xK, \dots, 2(x+1)K\} \times \{2yK, \dots, 2(y+1)K\}.$$

Para a construção do cruzamento em cada destes cubos fazemos uma redução ao caso bidimensional; isto é feito considerando-se apenas as duas últimas coordenadas. Feito isto, podemos aproveitar os resultados obtidos para $d = 2$. Para decidir se o cubo $C(0, 0)$ está bom procedemos de forma análoga ao caso bidimensional: dizemos que $C(0, 0)$ está bom se a origem está conectada aos hiperblocos

$$h_1 = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-k, \dots, k\}^{d-f-2} \times \{K - k, \dots, K + k\} \times \{2K\}$$

e

$$h_2 = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-k, \dots, k\}^{d-f-2} \times \{2K\} \times \{K - k, \dots, K + k\}$$

usando apenaselos abertos da região

$$A_{Or} = \left(\prod_{i=1}^f \{0, \dots, h_i\} \right) \times \{-2L, \dots, 2L\}^{d-f-2} \times \left(\{0, \dots, K+k\}^2 \right. \\ \left. \cup \{K-k, \dots, K+k\} \times \{K+k, \dots, 2K\} \cup \{K+k, \dots, 2K\} \times \{K-k, \dots, K+k\} \right)$$

Com isso obtemos que

$$P_{p-\delta}(\text{percolação de cubos bons em } \mathbb{L}') > 0.$$

Isto prova que se $\theta_H(p) > 0$ então podemos encontrar $L' \in \mathbb{Z}_+$ e $\delta > 0$ tq $\theta_{\mathbb{L}'}(p - \delta) > 0$.

Capítulo 3

CONTINUIDADE DA DENSIDADE CRÍTICA EM PERCOLAÇÃO REGULAR

3.1 Introdução

Neste capítulo será provado um resultado geral relacionado às probabilidades críticas de subconjuntos de um reticulado $\mathbb{L}$. Como consequência deste resultado temos que a probabilidade crítica de um processo de percolação em $\mathbb{L}$ é igual ao limite da probabilidade crítica de uma faixa de $\mathbb{L}$ quando a espessura desta faixa tende ao infinito.

No capítulo anterior trabalhamos com percolação de elos, agora trabalharemos com percolação de sítios, onde cada sítio $x \in \mathbb{Z}^d$ pode estar *aberto* com probabilidade p ou *fechado* com probabilidade $1 - p$, independentemente dos demais.

Se temos um conjunto infinito conveniente $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ (os A 's de nosso interesse estão na página seguinte), então (veja, por exemplo, Grimmett, 1989 pág. 120) existe um valor crítico

$p_c(A)$ tal que quase certamente (q.c.) existe um conglomerado aberto infinito se $p > p_c(A)$ e q.c. não existe se $p < p_c(A)$. Em particular usaremos a notação $p_c = p_c(\mathbb{Z}^d)$. Nosso maior interesse está no caso em que o conjunto A assume uma das seguintes formas :

(a) Uma faixa de espessura k dada por

$$\mathbb{S}(k) = \{x \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq x_j \leq k, j > 2\} = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \dots, k\}^{d-2}, \quad k \in \mathbb{N}^* = \{0, 1, \dots\}$$

(b) Um semi-espço dado por

$$\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{Z}^d : x_d \geq 0\} = \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}_+$$

Portanto temos que $\mathbb{S}(k) \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{Z}^d, \forall d, k$, e daí, por acoplamento podemos mostrar que

$$p_c \leq p_c(\mathbb{H}) \leq p_c(\mathbb{S}(k)).$$

Como $p_c(\mathbb{S}(k))$ é uma função decrescente em k e não negativa, podemos denotar

$$p_c(\mathbb{S}) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathbb{S}(k)).$$

Muitos dos resultados conhecidos na literatura foram obtidos apenas para $p > p_c(\mathbb{S})$ e não para $p > p_c$ (na última seção deste capítulo falaremos destes resultados). O Teorema 1.3, que estabelece que $p_c = p_c(\mathbb{S})$, permite-nos fazer esta extensão. Este teorema é o principal resultado deste capítulo.

Como consequência do Teorema 1.3, temos que $p_c = p_c(\mathbb{H})$, que também é válido para $d = 2$, como vimos na introdução deste trabalho. O caso $d = 2$ também pode ser encontrado em Grimmett (1981 e 1983).

O Teorema 1.3 será deduzido de um teorema mais geral, que será enunciado e provado na Seção 3.4. Na Seção 3.5 serão vistas algumas das suas principais consequências.

Nosso objetivo principal será mostrar que se $\theta(p) > 0$ e $\eta > 0$, então $p + \eta > p_c(\mathbb{S}(k))$ para algum $k = k(\eta)$.

Observação 3.1 *Neste capítulo, tudo será feito para percolação regular de sítios em $\mathbb{Z}^d$, mas pode ser estendido a outros modelos de percolação de sítios e de elos em $d \geq 3$.*

3.2 Definições e Notações Iniciais

Esta seção contém as principais definições e notações usadas neste capítulo, porém algumas serão deixadas para a seção posterior.

A distância entre $x = (x_1, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$ é dada por

$$\|x - y\| = \max_j |x_j - y_j|$$

Se $\sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1$ então $\{x, y\}$ é um *elo* e neste caso escreveremos $x \sim y$ e diremos que x é *adjacente* a y .

O sítio *unitário* é dado por

$$i_j = (\delta_1^{(j)}, \delta_2^{(j)}, \dots, \delta_d^{(j)}), \text{ onde } \delta_r^{(j)} = \begin{cases} 1 & \text{se } r = j \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo 3.2.1 Para $d = 2$, $i_1 = (1, 0)$ e $i_2 = (0, 1)$.

Para $A \subseteq \mathbb{Z}^d$, a *borda interna* de A é dada por

$$\partial A = \{x \in A : \exists y \in \mathbb{Z}^d \setminus A \text{ tq } x \sim y\}$$

e a *borda externa* de A é dada por

$$\Delta A = \{x \in \mathbb{Z}^d \setminus A : \exists y \in A \text{ tq } x \sim y\} = \partial(\mathbb{Z}^d \setminus A).$$

O conjunto das realizações (ou configurações) é

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$$

e $\omega = \{\omega(x) : x \in \mathbb{Z}^d\} \in \Omega$ representa a realização em que x é aberto se $\omega(x) = 1$ e fechado se $\omega(x) = 0$. Seja $\mathcal{F}$ a σ -álgebra usual. Com isto denotaremos por P_p a medida relevante de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$.

Seja $(f(x) : x \in \mathbb{Z}^d)$ uma família de *v.a.i.i.d.* com distribuição uniforme em $[0, 1]$ e denotamos

$$\Omega^* = [0, 1]^{\mathbb{Z}^d}.$$

Representando por $\mathcal{F}^*$ a σ -álgebra em Ω^* , denotaremos por P a medida relevante de probabilidade produto em $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$. Para cada $\rho \in [0, 1]$ e $x \in \mathbb{Z}^d$, diremos que x está ρ -aberto se $f(x) < \rho$ e ρ -fechado se $f(x) \geq \rho$. Assim

$$P(x \text{ ser } \rho\text{-aberto}) = \rho \quad \text{e} \quad P(x \text{ ser } \rho\text{-fechado}) = 1 - \rho.$$

Quando $\rho = p$, identificaremos p -aberto com *aberto* e p -fechado com *fechado*.

Diremos que o conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ está *aberto* se x está aberto, $\forall x \in A$, e diremos que $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ está *fechado* se x está fechado, $\forall x \in A$. Similarmente, definiremos A estar ρ -*aberto* e ρ -*fechado*.

Um *caminho* em $\mathbb{Z}^d$ é uma seqüência finita $x(0), x(1), \dots, x(n)$ ou uma seqüência infinita $x(0), x(1), \dots$ de sítios distintos de $\mathbb{Z}^d$ tal que $x(i) \sim (i+1)$.

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ será dito *conectado* se cada par $x, y \in A$ pertence a um mesmo caminho contido em A .

Diremos que um *caminho* está *aberto* se todos os seus sítios estiverem abertos.

Escreveremos $A \leftrightarrow B$ se existirem sítios $a \in A$ e $b \in B$ tal que a e b pertencem a um mesmo caminho aberto e $A \leftrightarrow B$ em D se existe tal caminho contido em D .

Escreveremos $A \leftrightarrow \infty$ se há algum caminho aberto infinito contendo algum $a \in A$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, o bloco $B(n)$ é o conjunto

$$B(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\| \leq n\}.$$

Seja ainda

$$T(n) = \{x \in \partial B(n) : x_1 = n, 0 \leq x_j \leq n, j \geq 2\}$$

que é um subconjunto especial de uma face de $B(n)$.

Para inteiros positivos m e n , seja

$$T(m, n) = \bigcup_{j=1}^{2m+1} \{ji_1 + T(n)\}, \quad \text{onde } i_1 = (1, 0, \dots, 0).$$

Figura 3.1: Representação Gráfica de $B(n)$, $T(n)$, $T(m, n)$ e $K(m, n)$ em $d = 2$.

Para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, denominaremos um bloco aberto (ié, que tem todos os seus sítios abertos) $x + B(m)$ por “ m -bloco”, que é apenas uma translação de $B(m)$.

Se $2m < n$, consideremos

$$K(m, n) = \{x \in T(n) : x + i_1 \text{ pertence a algum } m\text{-bloco em } T(m, n)\}.$$

Assim, $K(m, n)$ é um subconjunto (aleatório) de $T(n)$ que é adjacente à união de todos os m -blocos que estão em $T(m, n)$.

Com estas definições já estamos prontos para começar a construção probabilística que vai nos permitir provar o Teorema 1.3.

3.3 Construção Probabilística

Nesta seção serão enunciados e provados seis lemas que irão nos permitir desenvolver a técnica a ser utilizada na prova do Teorema 1.3. Os Lemas 3.3.2 a 3.3.5 são auxiliares ao Lema 3.3.6, que será usado juntamente com o Lema 3.3.1 na Seção 3.4 para a prova do Teorema 3.4.1. O Teorema 1.3 é uma consequência imediata do Teorema 3.4.1. A prova do Teorema 3.4.1 faz uso de um *argumento de renormalização dinâmica*, onde consideramos uma *rede* de blocos em $\mathbb{Z}^d$ (que serão sítios renormalizados) e definiremos qualquer destes blocos como aberto se existirem certos caminhos longos abertos dentro e próximos a ele. Desejamos mostrar que com probabilidade positiva existe um “caminho” infinito formado por blocos abertos, cada um destes blocos sendo adjacente ao próximo. Desta forma estaremos trabalhando com percolação em $k\mathbb{Z}^d$, para algum k grande, ou mais precisamente, estaremos trabalhando em um subconjunto conectado de $k\mathbb{Z}^d$.

Para fazermos uso do Lema 3.3.1, consideraremos percolação em um conjunto conectado $F \subseteq \mathbb{Z}^d$. De especial importância será o caso em que $F = \mathbb{Z}^2$. Seja então F um subconjunto conectado infinito de $\mathbb{Z}^d$ contendo a origem. Fixamos uma ordem $e(1), e(2), \dots$ para os elos de F . Consideremos $g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1\}$ fixada, onde para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, x estará aberto se $g(x) = 1$ e fechado se $g(x) = 0$. Surge então uma sequência (S_n) de pares ordenados de subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$, definida por indução:

$$\begin{aligned} S_0 &= (\emptyset, \emptyset) \\ S_1 &= \begin{cases} (\{x_1\}, \emptyset) & \text{se } g(x_1) = 1 \\ (\emptyset, \{x_1\}) & \text{se } g(x_1) = 0, \text{ onde } x_1 = \mathbf{O}. \end{cases} \end{aligned}$$

Tendo definido $S_r = (A_r, B_r)$ para $r = 0, 1, \dots, t$, definimos S_{t+1} por:

Caso 1: Se possível, fazemos e_t denotar o menor elo na ordem fixada com um dos extremos pertencentes a A_t e o outro, digamos x_{t+1} , pertencente a $(A_t \cup B_t)^c$. Escrevemos então

$$S_{t+1} = \begin{cases} (A_t \cup \{x_{t+1}\}, B_t) & \text{se } g(x_{t+1}) = 1 \\ (A_t, B_t \cup \{x_{t+1}\}) & \text{se } g(x_{t+1}) = 0. \end{cases}$$

Caso 2: Se x_{t+1} não existir, então fazemos $S_{t+1} = S_t$.

No limite $t \rightarrow \infty$, definimos $S = (A, B)$, onde $A = \bigcup_{t=1}^{\infty} A_t$ e $B = \bigcup_{t=1}^{\infty} B_t$. Desta forma poderemos examinar os sítios de F um a um e se a origem estiver aberta, então estaremos construindo o conglomerado aberto A contendo a origem e contido em F . Temos ainda que B é a borda externa de A , ié, ΔA .

A rotina acima resulta em uma seqüência infinita $\mathcal{J} = (S_0, S_1, \dots)$ formada examinando-se os valores $g(x_1), g(x_2), \dots$. Podemos estender esta rotina para o caso em que as $g(x)$ são variáveis aleatórias em $\{0, 1\}$ e o resultado $\mathcal{J}$ será então uma seqüência aleatória. Vamos definir para $t = 0, 1, \dots$

$$\rho(\mathcal{J}, t) = \begin{cases} \mu(g(x_{t+1}) = 1 | S_0, S_1, \dots, S_t) & \text{se } x_{t+1} \text{ existe} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde μ é a medida de probabilidade associada à seqüência de variáveis aleatórias $g(x_1), g(x_2), \dots$.

Podemos agora enunciar o primeiro lema:

Lema 3.3.1 *Usando a notação definida anteriormente, suponhamos que existe γ tal que $\gamma > p_c(F)$ e*

$$\rho(\mathcal{J}, t) \geq \gamma \quad \forall \mathcal{J} \text{ e } t$$

então

$$\mu(|A| = \infty) > 0.$$

PROVA: Seja $(f(x) : x \in \mathbb{Z}^d)$ uma família de *v.a.i.i.d.* com distribuição Uniforme em $[0, 1]$ e consideremos o seguinte processo de crescimento do conglomerado $\mathcal{I}$ com medida produto associada P como definido na Seção 3.2. Declaramos a origem ser *verde* se $f(\mathbf{O}) \leq \mu(g(\mathbf{O}) = 1)$ e *vermelho* em caso contrário. Se a origem for vermelha o processo termina. Se a origem for verde, então achamos o elo de menor ordem incidente na origem e declaramos o outro sítio extremo x_2 ser verde se $f(x_2) \leq \mu(g(x_2) = 1 | S_1 = \sigma_1)$, onde $\sigma_1 = (A_1, B_1)$ com $A_1 = \{\mathbf{O}\}$ e $B_1 = \emptyset$. Iteramos este processo, onde o passo geral é declarar x_{t+1} (se ele existir) ser verde se

$$f(x_{i+1}) \leq \mu(g(x_{i+1}) = 1 | S_i = \sigma_i, 0 \leq i \leq t)$$

e vermelho em caso contrário, onde $\sigma_i = (A_i, B_i)$ é o vetor contendo o conjunto A_i de sítios verdes e o conjunto B_i de sítios vermelhos após termos examinado x_i .

Seja A o conglomerado limite dos sítios verdes, com borda externa B em F . Cada sítio verde x_i entrou em A com probabilidade $\rho(\mathcal{J}, t)$. Como $\gamma \leq \rho(\mathcal{J}, t) \forall \mathcal{J}, t$ então podemos obter (por acoplamento) um subconjunto de A , digamos C_γ , de sítios γ -abertos da origem e como $\gamma > p_c(F)$, então há uma probabilidade positiva de que $|C_\gamma|$ seja infinito, ié,

$$P(|C_\gamma| = \infty) > 0.$$

Com esta construção teremos que o processo $\mathcal{I}$ tem a mesma distribuição que o processo $\mathcal{J}$. Como

$$\{|A| = \infty\} \supseteq \{|C_\gamma| = \infty\}$$

teremos que $\mu(|A| = \infty) > 0$. $\square$

O Lema 3.3.2 é baseado na idéia de que se dois conjuntos R e K estão ligados um ao outro por um caminho aberto com probabilidade alta, então existirão muitos destes caminhos com probabilidade alta.

Lema 3.3.2 *Seja R e $K \subseteq B \subseteq \mathbb{Z}^d$ com $(R \cup \Delta R) \cap K = \emptyset$ e*

$$U = \{x \in \Delta R \cap B : \exists y \in B \text{ tq } x \sim y \text{ e } y \leftrightarrow K \text{ em } B \setminus (R \cup \Delta R)\}.$$

Então para cada inteiro positivo t , temos

$$P_p(|U| \leq t) \leq (1 - p)^{-t} P_p(\Delta R \not\leftrightarrow K \text{ em } B \setminus R).$$

PROVA: Notemos que o evento $\{\Delta R \not\leftrightarrow K \text{ em } B \setminus R\}$ ocorre se e somente se o conjunto U for vazio (e neste caso ele é fechado), então

$$\begin{aligned}
P_p(\Delta R \not\leftrightarrow K \text{ em } B \setminus R) &= P_p(U \text{ ser fechado}) \\
&\geq P_p(|U| \leq t, U \text{ ser fechado}) \\
&= \sum_{\substack{A \subseteq (\Delta R \cap B) \\ |A| \leq t}} P_p(U \text{ ser fechado} | U = A) P_p(U = A)
\end{aligned}$$

Mas $\{U \text{ ser fechado} | U = A\}$ ocorre se todos os sítios de U estiverem fechados. Fazendo a substituição $(U = A)$ teremos que o evento $\{U = A\}$ é independente do estado dos sítios em A , daí

$$P_p(U \text{ ser fechado} | U = A) = (1 - p)^{|A|}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
P_p(\Delta R \not\leftrightarrow K \text{ em } B \setminus R) &\geq \sum_{\substack{A \subseteq (\Delta R \cap B) \\ |A| \leq t}} (1 - p)^{|A|} P_p(U = A) \geq \sum_{\substack{A \subseteq (\Delta R \cap B) \\ |A| \leq t}} (1 - p)^t P_p(U = A) \\
&= (1 - p)^t \sum_{\substack{A \subseteq (\Delta R \cap B) \\ |A| \leq t}} P_p(U = A) = (1 - p)^t P_p(|U| \leq t)
\end{aligned}$$

isto é,

$$P_p(\Delta R \not\leftrightarrow K \text{ em } B \setminus R) \geq (1 - p)^t P_p(|U| \leq t). \quad \square$$

Agora, é claro que se $B(m) \leftrightarrow \infty$ para um dado valor de m , então $\forall n \geq m \exists x \in \partial B(n)$ tal que $B(m) \leftrightarrow x$ em $B(n)$. O próximo lema nos diz que existirão muitos sítios x com esta propriedade.

Lema 3.3.3 *Para quaisquer inteiros positivos k e m , temos que*

$$\sum_{n=m}^{\infty} P_p(|U_n| < k, B(m) \leftrightarrow \infty) < (1 - p)^{-dk}$$

onde

$$U_n = \{x \in \partial B(n) : B(m) \leftrightarrow x \text{ em } B(n)\}.$$

Figura 3.2: Ilustração do evento que muitos sítios de $B(m)$ estão conectados a $\partial B(n)$

PROVA: Para $n \geq m$, temos

$$(1-p)^{dk} P_p(|U_n| < k, B(m) \leftrightarrow \infty) \leq (1-p)^{dk} P_p(1 \leq |U_n| < k)$$

Excluimos o zero na probabilidade da direita porque $\{B(m) \leftrightarrow \infty\}$. Agora

$$(1-p)^{dk} < P_p(U_{n+1} = \emptyset \mid 1 \leq |U_n| < k),$$

pois estamos fechando mais sítios do que o necessário para a ocorrência deste evento, daí

$$\begin{aligned} (1-p)^{dk} P_p(|U_n| < k, B(m) \leftrightarrow \infty) &< P_p(U_{n+1} = \emptyset \mid 1 \leq |U_n| < k) P_p(1 \leq |U_n| < k) \\ &= P_p(U_{n+1} = \emptyset, 1 \leq |U_n| < k) = P_p(E_n) \end{aligned}$$

Podemos notar que, para cada k fixado, este evento ocorre apenas para um valor de n , portanto os eventos E_n são disjuntos. Daí

$$\sum_{n=m}^{\infty} (1-p)^{dk} P_p(|U_n| < k, B(m) \leftrightarrow \infty) < \sum_{n=m}^{\infty} P_p(E_n) = 1.$$

Basta agora multiplicar ambos os membros por $(1-p)^{-dk}$ para obter o resultado. $\square$

O próximo lema segue do Lema 3.3.3 usando *simetria* e a desigualdade FKG.

Lema 3.3.4 Para quaisquer inteiros positivos l e m , temos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_p(|U_n^{(1)}| \geq l) \geq 1 - [P_p(B(m) \not\leftrightarrow \infty)]^{1/w}$$

onde $w = d2^d$ e

$$U_n^{(1)} = \{x \in T(n) : B(m) \leftrightarrow x \text{ em } B(n)\}.$$

PROVA: Podemos fazer rotações e translações de $T(n)$, que denotaremos por $T_i(n)$, de forma a cobrir toda a borda interna de $B(n)$. O número destes $T_i(n)$ é $w = (2d)2^{d-1}$ (pois para cada uma das $2d$ faces do cubo $B(n)$ podemos permutar os sinais $\{+, -\}$ das outras $d-1$ coordenadas, de forma que teremos 2^{d-1} permutações). Portanto

$$\bigcup_{i=1}^w T_i(n) = \partial B(n).$$

Como $U_n = \{x \in \partial B(n) : B(m) \leftrightarrow x \text{ em } B(n)\}$, segue que

$$\{|U_n| < wl\} \supseteq \bigcap_{i=1}^w \{|U_n^{(i)}| < l\},$$

onde $U_n^{(i)} = \{x \in T_i(n) : B(m) \leftrightarrow x \text{ em } B(n)\}$, $i = 1, \dots, w$; pois se em cada $T_i(n)$ tivermos menos que l sítios x ligados a $B(m)$, então no total $(\partial B(n))$ teremos menos que wl destes sítios x . Podemos notar que os eventos $\{|U_n^{(i)}| < l\}$ são decrescentes, pois aumentando a densidade p não decresce o número de sítios x de $B(n)$ conectados a $B(m)$. Usando FKG, temos que

$$P_p(|U_n| < wl) \geq P_p\left(\bigcap_{i=1}^w \{|U_n^{(i)}| < l\}\right) \geq \prod_{i=1}^w P_p(|U_n^{(i)}| < l) = [P_p(|U_n^{(1)}| < l)]^w,$$

onde a última igualdade ocorre porque as $U_n^{(i)}$ são identicamente distribuídas. Com isto temos

$$[P_p(|U_n| < wl)]^{1/w} \geq P_p(|U_n^{(1)}| < l),$$

ou equivalentemente

$$P_p(|U_n^{(1)}| \geq l) \geq 1 - [P_p(|U_n| < wl)]^{1/w}. \quad (3.1)$$

Fazendo $k = wl$ no Lema 3.3.3, temos que

$$\sum_{n=m}^{\infty} P_p(|U_n| < wl, B(m) \leftrightarrow \infty) < (1-p)^{-dwl} = (1-p)^{-d^2 2^d l}.$$

Esta soma é convergente; daí

$$P_p(|U_n| < wl, B(m) \leftrightarrow \infty) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Com isto temos que

$$\begin{aligned} P_p(|U_n| < wl) &= P_p(|U_n| < wl, B(m) \leftrightarrow \infty) + P_p(|U_n| < wl, B(m) \not\leftrightarrow \infty) \\ &\leq P_p(|U_n| < wl, B(m) \leftrightarrow \infty) + P_p(B(m) \not\leftrightarrow \infty) \\ &\downarrow P_p(B(m) \not\leftrightarrow \infty) \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_p(|U_n| < wl) \leq P_p(B(m) \not\leftrightarrow \infty).$$

Com isto, temos de (3.1) que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_p(|U_n^{(1)}| \geq l) \geq 1 - \limsup_{n \rightarrow \infty} [P_p(|U_n| < wl)]^{1/w} \geq 1 - [P_p(B(m) \not\leftrightarrow \infty)]^{1/w}. \quad \square$$

Agora iremos deduzir do Lema 3.3.4 que se m e n forem suficientemente grandes, então $B(m)$ estará conectado, com probabilidade alta, a algum m -bloco em $T(m, n)$.

Lema 3.3.5 *Se $\theta(p) > 0$, então para cada $\eta > 0$ existem inteiros positivos $m = m(d, p, \eta)$ e $n = n(d, p, \eta)$ tal que $2m < n$ e*

$$P_p(B(m) \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n)) > 1 - \eta.$$

PROVA: Como $\theta(p) > 0$ então existe $m = m(d, p, \eta)$ tal que

$$P_p(B(m) \leftrightarrow \infty) > 1 - \left(\frac{1}{2}\eta\right)^w, \text{ para } w = d2^d. \quad (3.2)$$

A prova deste fato é similar à prova de (2.3) do Capítulo 2. Notemos agora que existe um $M = M(d, p, \eta)$ tal que

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^M \mathcal{E}_i \right) > 1 - \frac{1}{2}\eta, \quad (3.3)$$

onde $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \dots, M$, são eventos independentes em algum espaço de probabilidade, cada destes tendo medida de probabilidade μ dada por

$$\mu(\mathcal{E}_i) = P_p(B(m) \text{ estar aberto}); \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Lembremos agora que definimos $B(m)$ estar aberto se todos os seus sítios estiverem abertos; logo

$$1 - \mu(\mathcal{E}_i) = 1 - P_p(B(m) \text{ estar aberto}) = 1 - p^{(2m+1)^d}.$$

Com isso

$$1 - \frac{1}{2}\eta < \mu \left(\bigcup_{i=1}^M \mathcal{E}_i \right) = 1 - \mu \left(\bigcap_{i=1}^M \mathcal{E}_i^c \right) = 1 - [1 - \mu(\mathcal{E}_1)]^M = 1 - \left(1 - p^{(2m+1)^d}\right)^M.$$

onde a penúltima igualdade segue por independência. Portanto, M deve satisfazer

$$\left(1 - p^{(2m+1)^d}\right)^M < \frac{1}{2}\eta.$$

Fazendo $l = (2m + 1)^{d-1}M$, temos, pelo Lema 3.3.4 e por (3.2), que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_p(|U_n^{(1)}| \geq l) \geq 1 - [1 - P_p(B(m) \leftrightarrow \infty)]^{1/w} > 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\eta\right)^w\right]^{1/w} = 1 - \frac{1}{2}\eta.$$

Logo, podemos escolher $n = n(d, p, \eta)$ tal que

$$P_p(|U_n^{(1)}| \geq l) > 1 - \frac{1}{2}\eta.$$

A escolha de m e n pode ser feita de modo que a razão entre $n + 1$ e $2m + 1$ esteja o mais próximo possível, sobrando uma quantidade pequena, do inteiro M . Com isso teremos pelo menos M caixas $(d - 1)$ -dimensionais disjuntas com lados de tamanho $2m$ em $T(n)$.

Notemos agora que $l = (2m+1)^{d-1}M$ é o número de sítios de M destas caixas; logo, $|U_n^{(1)}| \geq l$ implica que $B(m)$ está ligado (em $B(n)$) a pelo menos M destas caixas. Considerando os eventos

$\mathcal{E}_i$: a i -ésima destas caixas é paralela a algum m -bloco em $T(m, n)$

para alguma ordem fixada das caixas, temos que os $\mathcal{E}_i$ são independentes, pois as caixas são disjuntas. Por (3.3) temos que, com probabilidade alta, pelo menos uma destas caixas é adjacente a algum m -bloco em $T(m, n)$ e estas caixas (ié, todos os sítios delas) estão em $K(m, n)$. Com isso, vemos que o evento $\{|U_n^{(1)}| \geq l\}$ para $l = (2m+1)^{d-1}M$ está contido em $\{B(m) \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n)\}$, daí

$$P(B(m) \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n)) \geq P(|U_n^{(1)}| \geq l) > 1 - \eta/2 > 1 - \eta. \quad \square$$

Na prova do Teorema 3.4.1 da Seção 3.4, deveremos mostrar que com probabilidade positiva podemos construir um sequência conveniente de m -blocos $B_1, B_2, \dots$, todos conectados a B_1 por caminhos abertos. Essencialmente, isso deveria ser feito pelo Lema 3.3.5, mas a falta de independência de alguns eventos relevantes nos impedem de usá-lo. Esta dificuldade é contornada de maneira inteligente no Lema 3.3.6.

Lema 3.3.6 *Suponhamos $\theta(p) > 0$. Então para cada $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ existem inteiros positivos $m = m(d, p, \varepsilon, \delta)$ e $n = n(d, p, \varepsilon, \delta)$ tais que $2m < n$ e com a seguinte propriedade: para cada conjunto R tal que*

$$B(m) \subseteq R \subseteq B(n) \quad \text{e} \quad (R \cup \Delta R) \cap T(n) = \emptyset$$

e cada função

$$\beta : \Delta R \cap B(n) \longrightarrow [0, 1 - \delta],$$

temos

$$P(G|H) > 1 - \varepsilon,$$

onde

$G = \{\text{existe um caminho em } B(n) \setminus R \text{ de } \Delta R \cap B(n) \text{ até } K(m, n) \text{ com este caminho sendo } p\text{-aberto fora de } \Delta R \cap B(n) \text{ e } (\beta + \delta)\text{-aberto em seu único sítio } u \in \Delta R \cap B(n)\}$

e

$H = \{x \text{ é } \beta(x)\text{-fechado } \forall x \in \Delta R \cap B(n)\}.$

Observação 3.2 Este lema nos permite estender um conjunto conectado C' a um conjunto conectado $C'' \supseteq C'$ que contém o próximo m -bloco. Após translações de coordenadas podemos pensar em R como sendo $C' \cap B(n)$. Para podermos estender C' em $B(n)$ devemos ter um caminho que comece em algum ponto de ΔR com cada $x \in \Delta R$ sendo $\beta(x)$ -aberto; contudo há uma boa “chance” de que algum destes x seja $(\beta(x) + \delta)$ -aberto. Isto é parte da idéia para a prova do Lema 3.3.6.

PROVA: Suponhamos que $\theta(p) > 0$ e seja $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Escolhemos um inteiro positivo t que satisfaça

$$(1 - \delta)^t < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Agora escolhemos $\eta > 0$ tal que

$$\eta < \frac{1}{2}\varepsilon(1 - p)^t.$$

Com η e t fixados podemos, pelo Lema 3.3.5, escolher inteiros positivos $m = m(d, p, \varepsilon, \delta)$ e $n = n(d, p, \varepsilon, \delta)$ tal que $2m < n$ satisfazendo

$$P(B(m) \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n)) > 1 - \eta.$$

Suponhamos que $B(m) \subseteq R \subseteq B(n)$, $(R \cup \Delta R) \cap T(n) = \emptyset$ e $\beta : \Delta R \cap B(n) \longrightarrow [0, 1 - \delta]$.

Como $K(m, n) \subseteq T(n)$, temos que

$$\{B(m) \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n)\} \subseteq \{\Delta R \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n) \setminus R\},$$

pois se ocorre o evento da esquerda então existe um $x \in \Delta R$ tal que $B(m) \leftrightarrow x$ e $x \leftrightarrow K(m, n)$.

Com isso

$$P_p(\Delta R \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n) \setminus R) \geq P_p(B(m) \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n)) > 1 - \eta. \quad (3.4)$$

Para todo $K \subseteq T(n)$, se denotarmos

$$U(K) = \{x \in \Delta R \cap B(n) : \exists y \in B(n) \text{ tq } x \sim y \text{ e } y \leftrightarrow K \text{ em } B(n) \setminus (R \cup \Delta R)\},$$

temos que o evento $\{K(m, n) = K\}$ é independente do estado de ocupação dos sítios de K , logo os eventos $\{|U(K)| \leq t\}$ e $\{K(m, n) = K\}$ são independentes. Com isto e o fato que $(R \cup \Delta R) \cap T(n) = \emptyset$, segue do Lema 3.3.2 que

$$\begin{aligned} P_p(|U(K(m, n))| \leq t) &= \sum_{K \subseteq T(n)} P_p(|U(K(m, n))| \leq t | K(m, n) = K) P_p(K(m, n) = K) \\ &= \sum_{K \subseteq T(n)} P_p(|U(K)| \leq t) P_p(K(m, n) = K) \\ &\leq \sum_{K \subseteq T(n)} (1 - p)^{-t} P_p(\Delta R \not\leftrightarrow K \text{ em } B(n) \setminus R) P_p(K(m, n) = K) \\ &= (1 - p)^{-t} \sum_{K \subseteq T(n)} P_p(\Delta R \not\leftrightarrow K \text{ em } B(n) \setminus R) P_p(K(m, n) = K) \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue pela independência e a primeira desigualdade segue pelo Lema 3.3.2. Novamente por independência temos que

$$\begin{aligned} P_p(|U(K(m, n))| \leq t) &\leq (1 - p)^{-t} \sum_{K \subseteq T(n)} P_p(\Delta R \not\leftrightarrow K \text{ em } B(n) \setminus R, K(m, n) = K) \\ &= (1 - p)^{-t} P_p(\Delta R \not\leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n) \setminus R) < (1 - p)^{-t} \eta \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue por (3.4). Com isso temos que

$$P_p(|U(K(m, n))| > t) \geq 1 - (1 - p)^{-t} \eta. \quad (3.5)$$

Denotando por P^H a medida de probabilidade $P_p(\cdot|H)$, temos que

$$\begin{aligned}
& P^H(x \text{ ser } (\beta(x) + \delta)\text{-fechado } \forall x \in U(K(m, n)), |U(K(m, n))| > t) \\
&= \sum_{\substack{U \subseteq (\Delta R \cap B(n)) \\ |U| > t}} P^H(x \text{ ser } (\beta(x) + \delta)\text{-fechado } \forall x \in U(K(m, n)), \\
&\quad |U(K(m, n))| > t \mid U(K(m, n)) = U) P^H(U(K(m, n)) = U) \\
&= \sum_{\substack{U \subseteq (\Delta R \cap B(n)) \\ |U| > t}} P^H(x \text{ ser } (\beta(x) + \delta)\text{-fechado } \forall x \in U) P^H(U(K(m, n)) = U) \\
&= \sum_{\substack{U \subseteq (\Delta R \cap B(n)) \\ |U| > t}} \prod_{x \in U} P^H(x \text{ ser } (\beta(x) + \delta)\text{-fechado}) P^H(U(K(m, n)) = U) \\
&= \sum_{\substack{U \subseteq (\Delta R \cap B(n)) \\ |U| > t}} \prod_{x \in U} (1 - \beta(x) - \delta) P^H(U(K(m, n)) = U) \\
&\leq \sum_{\substack{U \subseteq (\Delta R \cap B(n)) \\ |U| > t}} \prod_{x \in U} (1 - \delta) P^H(U(K(m, n)) = U) \\
&= \sum_{\substack{U \subseteq (\Delta R \cap B(n)) \\ |U| > t}} (1 - \delta)^{|U|} P^H(U(K(m, n)) = U) \\
&\leq (1 - \delta)^t \sum_{\substack{U \subseteq (\Delta R \cap B(n)) \\ |U| > t}} P^H(U(K(m, n)) = U) \leq (1 - \delta)^t.
\end{aligned}$$

Portanto

$$P^H(x \text{ ser } (\beta(x) + \delta)\text{-fechado } \forall x \in U(K(m, n)), |U(K(m, n))| > t) \leq (1 - \delta)^t. \quad (3.6)$$

Com isso temos que

$P^H(\text{ existe algum sítio } u \in U(K(m, n)) \text{ que é } (\beta(u) + \delta)\text{-aberto})$

$$\begin{aligned}
&\geq P^H(\text{ existe algum sítio } u \in U(K(m, n)) \text{ que é } (\beta(u) + \delta)\text{-aberto}, |U(K(m, n))| > t) \\
&= P^H(|U(K(m, n))| > t) - P^H(x \text{ ser } (\beta(x) + \delta)\text{-fechado } \forall x \in U(K(m, n)), |U(K(m, n))| > t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq P^H(|U(K(m, n))| > t) - (1 - \delta)^t \\
&= P_p(|U(K(m, n))| > t) - (1 - \delta)^t \geq 1 - (1 - p)^{-t}\eta - (1 - \delta)^t \\
&> 1 - (1 - p)^{-t}\frac{1}{2}\varepsilon(1 - p)^t - \frac{1}{2}\varepsilon = 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade segue por (3.6), a segunda igualdade por independência com relação a H , a terceira desigualdade por (3.5) e a penúltima pelas escolhas de t e η . Assim, temos que

$$P(G|H) = P^H(G) > 1 - \varepsilon. \quad \square$$

3.4 Construção Gráfica

Nesta seção enunciaremos e provaremos o teorema que tem como consequência o Teorema 1.3.

Teorema 3.4.1 *Seja F um subconjunto conectado de $\mathbb{Z}^d$ com $p_c(F) < 1$. Então para cada $\eta > 0$ existe um inteiro positivo $k = k(\eta)$ tal que*

$$p_c(2kF + B(k)) \leq p_c + \eta.$$

Observação 3.3 *O Teorema 1.3 segue deste teorema pela escolha $F = \mathbb{Z}^2$, pois neste caso $2kF + B(k) = \mathbb{Z}^2 \times \{-k, \dots, k\}^{d-2}$ é apenas uma translação de $\mathbb{S}(2k) = \mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, 2k\}^{d-2}$.*

PROVA: Nosso objetivo será alcançado descrevendo-se um procedimento para a construção de um conglomerado $(p_c + \eta)$ -aberto e finalmente aplicando o Lema 3.3.1.

Seja $0 < \eta < p_c$. Nesta seção usaremos

$$p = p_c + \frac{1}{2}\eta, \quad \delta = \frac{\eta}{4d} \quad e \quad \varepsilon = \frac{1 - p_c(F)}{8d}.$$

Como $p > p_c$, temos $\theta(p) > 0$. Naturalmente $\delta > 0$ e como $p_c(F) < 1$ temos $\varepsilon > 0$. Com as hipóteses satisfeitas podemos aplicar o Lema 3.3.6 e então existem $m = m(d, \eta, \varepsilon, \delta)$ e $n = n(d, \eta, \varepsilon, \delta)$ satisfazendo tal lema. Com estas escolhas de m e n vamos usar

$$N = n + m + 1.$$

Mostraremos que o Teorema 3.4.1 é válido para $k = 2N$. Para isto, consideremos o conjunto de sítios renormalizado $\{4Nx : x \in \mathbb{Z}^d\} = \{2kx : x \in \mathbb{Z}^d\}$. Nosso interesse especial está nas caixas $\{4Nx + B(N) : x \in \mathbb{Z}^d\}$, que chamaremos de *super-sítios*. Um par de super-sítios será chamado de *adjacente* se estes estão centrados em sítios adjacentes da rede renormalizada. Para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que exatamente uma coordenada de x não é divisível por 4, denominaremos $Nx + B(N)$ por *super-elo*. Quando tal coordenada for par denominaremos este super-elo por *super-elo-central*. Desta forma um super-elo-central está exatamente entre dois super-sítios.

Figura 3.3: Estrutura da rede renormalizada

Examinaremos cada super-sítio declarado-o *ocupado* ou *vazio* de acordo com a realização de um evento especial. Isto será feito da maneira descrita na Seção 3.1. Para isto, seja $e(1), e(2), \dots$ uma ordem fixada dos elos de F . Começamos examinando o super-sítio $B(N)$ correspondente à origem de F . Se $B(N)$ estiver vazia, terminamos o processo; se estiver ocupada encontramos o elo de menor ordem $e(1)$ incidente na origem com, digamos, x_2 sendo o outro sítio extremo, e consideramos o super-sítio $4Nx_2 + B(N)$. Se este super-sítio estiver ocupado, adicionamos x_2 ao *conglomerado ocupado da origem*. Em qualquer caso, nunca examinaremos o mesmo super-sítio duas vezes. Este processo continua de forma análoga, onde a cada estágio encontramos o elo de menor ordem em que um dos seus extremos está no

conglomerado ocupado da origem e o outro sítio extremo corresponde a um super-sítio que ainda não foi examinado.

A maior parte do trabalho está em especificar o estado de ocupação do super-sítio correspondente à origem renormalizada. Após isto, o procedimento é similar para os outros super-sítios. O evento de ocupação da origem está ilustrada na Figura 3.4.

Figura 3.4: Ilustração do evento de ocupação da origem renormalizada

Nosso objetivo principal será definir, para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, um par de sequências $\beta_t(x)$ e $\gamma_t(x)$, $t \geq 1$, satisfazendo

$$0 \leq \beta_t(x) \leq \beta_{t+1}(x) \leq f(x) < \gamma_{t+1}(x) \leq \gamma_t(x) \leq 1; \forall x \in \mathbb{Z}^d, t = 1, 2, \dots$$

Serão formadas sequências de conjuntos $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ e $B_n^2, B_n^3, \dots$ de forma que

$$\beta_t(x) \leq f(x) < \gamma_t(x); \forall x \in \mathbb{Z}^d, t \geq 1$$

e

$$\beta_t(x) = 0 \text{ e } \gamma_t(x) = 1; \forall x \notin (C_t \cup \Delta C_t).$$

Com isto, deveremos garantir que

$$\beta_t(x) \leq \gamma_t(x) \leq p_c + \eta; \forall x \in C_t, t \geq 1.$$

Para colocar tudo isso em detalhes, consideremos o super-sítio $B(N)$ e notemos que $B(m) \subset B(N)$. Diremos que o *primeiro passo é bem sucedido* se $B(m)$ for p -aberto. Se o primeiro passo não for bem sucedido, terminamos o processo. Como

$$P_p(B(m) \text{ ser } p\text{-aberto}) > 0,$$

assumiremos daqui em diante que $B(m)$ é p -aberto.

Denotemos $C_1 = B(m)$ e definamos, para cada $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= \begin{cases} p & \text{se } x \in C_1 \\ 1 & \text{c.c.} \end{cases} \\ \beta_1(x) &= 0, \forall x \in \mathbb{Z}^d.\end{aligned}$$

Como assumimos que $B(m)$ é p -aberto, então temos $f(x) < p$, $\forall x \in C_1$ e como todo sítio é 1-aberto e 0-fechado, temos que cada sítio $x \in \mathbb{Z}^d$ é $\gamma_1(x)$ -aberto e $\beta_1(x)$ -fechado. Com isso, está satisfeita a relação $\beta_1(x) \leq f(x) < \gamma_1(x)$; $\forall x \in \mathbb{Z}^d$.

Lembremos que $T(n)$ (e consequentemente $T(m, n)$ e $K(m, n)$) foi definido em apenas uma das $2d$ faces de $B(n)$, mas no que segue precisamos definir para cada face uma região análoga. Isto é feito através de $2d$ rotações L_j de $B(n)$ de forma que $T_j(m, n) = L_j(T(m, n))$ é a região correspondente à j -ésima face da caixa $B(n)$, para alguma ordem fixada das faces. Assumiremos que $L_1(U) = U$, onde U pode ser $T(n)$, $T(m, n)$ ou $K(m, n)$. Analogamente a $K(m, n)$, definimos $K_j(m, n)$; $j = 2, \dots, 2d$ por

$$K_j(m, n) = \{x \in L_j(T(n)) : x + L_j(i_1) \text{ pertence a algum } m\text{-bloco em } L_j(T(m, n))\}.$$

Agora precisamos estender o conjunto C_1 até um conjunto C_2 , contendo um conjunto de m -blocos. Consideremos então $B_n^2 = B(n) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{2d} T_j(m, n) \right)$,
 $E_1 = \{x \in \Delta C_1 : x \text{ é } (\beta_1(x) + \delta) - \text{aberto}\}$

e

$F_1 = \{y \in B_n^2 : y \leftrightarrow \Delta C_1 \text{ por um caminho que é } p\text{-aberto fora de } \Delta C_1 \text{ e } (\beta_1(u) + \delta)\text{-aberto no seu único sítio } u \in \Delta C_1\}.$

Definimos $C_2 = C_1 \cup E_1 \cup F_1$.

Observação 3.4 É importante ressaltar que os conjuntos E_t e F_t são formados de forma a podermos aplicar o Lema 3.3.6.

Para que uma parte da construção para a definição do estado de ocupação da origem renormalizada esteja completa, é necessário que C_2 contenha pelo menos um sítio em cada região $K_j(m, n), j = 1, \dots, 2d$. Diremos que o *passo 2* é bem sucedido se este evento ocorre. Se este passo não for bem sucedido, terminamos o processo.

Figura 3.5: Ilustração do evento definido no passo 2

Precisamos agora calcular a probabilidade de que o passo 2 seja bem sucedido, condicionado ao sucesso do passo anterior. Para isso, consideremos

$G = \{\exists \text{ um caminho em } B(n) \setminus B(m) \text{ de } \Delta B(m) \text{ até } K(m, n), \text{ este caminho sendo } p\text{-aberto fora de } \Delta B(m) \text{ e } (\beta_1(u) + \delta)\text{-aberto em seu único sítio } u \in \Delta B(m)\}$

e G_j o correspondente evento com $K(m, n)$ substituído por $K_j(m, n)$. Podemos agora aplicar o Lema 3.3.6 com $R = B(m)$ e $\beta = \beta_1$ restrito à $\Delta R \cap B(n)$, daí

$$P(G_j | B(m) \text{ é } p\text{-aberto}) > 1 - \varepsilon, \quad j = 1, \dots, 2d.$$

Com isso, temos que

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{2d} G_j \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberto}\right) \geq \left(\prod_{j=2}^{2d} P(G_j | G_{j-1})\right) P(G_1 | B(m) \text{ é } p\text{-aberto}) > (1-\varepsilon)^{2d} \geq 1-2d\varepsilon.$$

onde a primeira desigualdade é verdadeira porque, dado que ocorreu G_{j-1} , temos mais sítios (que em $\partial B(m)$) para formar os caminhos para a ocorrência de G_j . Esta probabilidade pode ser tomada tão alta quanto queiramos, por uma escolha apropriada de ε . Vamos assumir então que o passo 2 é bem sucedido.

Tendo definido C_2 , vamos continuar o processo atualizando os novos valores de γ_t e β_t para $t = 2$: para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, sejam

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} \gamma_1(x) & \text{se } x \in C_1 \\ \beta_1(x) + \delta & \text{se } x \in E_1 \\ p & \text{se } x \in F_1 \\ 1 & \text{se } x \in C_2 \end{cases}$$

$$\beta_2(x) = \begin{cases} \beta_1(x) & \text{se } x \notin B_n^2 \\ \beta_1(x) + \delta & \text{se } x \in E_1^c \cap B_n^2 \\ p & \text{se } x \in \Delta F_1 \cap B_n^2 \\ 0 & \text{se } x \notin (C_2 \cup \Delta C_2) \end{cases}$$

Com isto, estamos garantindo a relação $\beta_2(x) \leq f(x) < \gamma_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}^d$.

Nos próximos $2d$ passos, vamos ligar cada m -bloco em $T_j(m, n)$, para cada $j = 1, \dots, 2d$, ao respectivo super-elo-central $2NL_j(i_1) + B(N)$. Vamos começar usando $L_j(i_1) = i_1$. Seja B_2 o m -bloco de menor ordem (para alguma ordem fixada dos m -blocos em $C_2 \cap T(m, n)$). Vamos estender C_2 até alcançar um terceiro m -bloco, digamos B_3 , que esteja inteiramente no super-elo-central $2Ni_1 + B(N)$.

Escrevendo $B_2 = b_2 + B(m)$, temos que todas as coordenadas de b_2 serão positivas (pois $B_2 \subset T(m, n)$) e consequentemente $b_2 + T(m, n)$ não será um subconjunto de $2Ni_1 + B(N)$ – veja Figura 3.6). Estes sítios fora deste super-elo provavelmente causariam problemas de falta de independência; por este motivo precisaremos de uma *ação de direcionamento*: vamos procurar um m -bloco em uma região alvo conveniente que não é $b_2 + T(n)$, mas sim $b_2 + T^*(m, n)$, onde U^* é a imagem do conjunto U sob a simetria

$$x_1 \rightarrow x_1^* \quad \text{e} \quad x_j \rightarrow -x_j^*; \text{ para } j = 2, \dots, d.$$

Figura 3.6: Representação gráfica da região $T^*(m, n)$

Analogamente a $K(m, n)$, definimos $K^*(m, n)$ por

$$K^*(m, n) = \{x \in b_2 + T^*(n) : x + i_1 \text{ pertence a algum } m\text{-bloco em } b_2 + T^*(m, n)\}.$$

Consideremos

$$E_2 = \{x \in \Delta C_2 \cap (b_2 + B(n)) : x \text{ é } (\beta_2(x) + \delta) - \text{aberto}\}$$

e

$$F_2 = \{y \in B_n^3 = b_2 + (B(n) \cup T^*(m, n)) : y \leftrightarrow \Delta C_2 \text{ por um caminho que é } p\text{-aberto} \\ \text{fora de } \Delta C_2 \text{ e } (\beta_2(u) + \delta)\text{-aberto no único sítio } u \in \Delta C_2\}.$$

Seja

$$C_3 = C_2 \cup E_2 \cup F_2.$$

Diremos que o *passo 3* é bem sucedido se C_3 contém algum m -bloco, digamos, B_3 em $K^*(m, n)$. Se este passo não for bem sucedido, terminamos o processo.

Figura 3.7: Ilustração do evento definido no passo 3

Para estimar a probabilidade que o passo 3 seja bem sucedido (condicionado ao sucesso dos anteriores) usamos o Lema 3.3.6 com $B(m)$ e $K(m, n)$ substituídos, respectivamente, por $b_2 + B(m, n)$ e $K^*(m, n)$, $R = C_2 \cap (b_2 + B(n))$ e $\beta = \beta_2$ restrito a $\Delta R \cap (b_2 + B(n))$. Com isso teremos que a probabilidade desejada excede $1 - \varepsilon$. Daqui em diante assumiremos que o passo 3 é bem sucedido.

Após a definição de C_3 , precisamos atualizar as funções γ e β . Sejam então para cada $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\gamma_3(x) = \begin{cases} \gamma_2(x) & \text{se } x \in C_2 \\ \beta_2(x) + \delta & \text{se } x \in E_2 \\ p & \text{se } x \in F_2 \\ 1 & \text{se } x \in C_2 \end{cases}$$

$$\beta_3(x) = \begin{cases} \beta_2(x) & \text{se } x \notin B_n^3 \\ \beta_2(x) + \delta & \text{se } x \in E_2^c \cap B_n^3 \\ p & \text{se } x \in \Delta F_2 \cap B_n^3 \\ 0 & \text{se } x \notin (C_2 \cup \Delta C_2) \end{cases}$$

Como assumimos que o passo 3 é bem sucedido, então concluímos a ligação de $B(N)$ com o super-elo-central $2Ni_1 + B(N)$. Agora precisamos ligar $B(N)$ com o super-elo-central $2Ni_2 + B(N)$, que será feita de maneira similar à ligação com $2Ni_1 + B(N)$. Para isto, lembremos que no passo 2 já ligamos $B(m)$ a um m -bloco em $T_2(m, n)$. Seja então $B_2^{(2)} = b_2^{(2)} + B(m)$ o m -bloco de menor ordem em $C_3 \cap T_2(m, n)$. Definimos

$$E_3 = \{x \in \Delta C_3 \cap (b_2^{(2)} + B(n)) : x \text{ é } (\beta_3(x) + \delta)\text{-aberto}\}$$

e

$$F_3 = \{y \in B_n^3 = b_2^{(2)} + (B(n) \cup L_2(T^*(m, n))) : y \leftrightarrow \Delta C_3 \text{ por um caminho que é } p\text{-aberto} \\ \text{fora de } \Delta C_3 \text{ e } (\beta_3(u) + \delta)\text{-aberto no único sítio } u \in \Delta C_3\}.$$

Seja

$$C_4 = C_3 \cup E_3 \cup F_3.$$

Diremos que este passo é bem sucedido se C_4 contém algum m -bloco, digamos, B_4 em

$$K_2^*(m, n) = \{x \in L_2(b_2 + T^*(n)) : x + L_2(i_1) \text{ pertence a algum } m\text{-bloco em } L_2(b_2 + T^*(m, n))\}.$$

Se o passo 4 não for bem sucedido, terminamos o processo.

Podemos notar que os sítios de $C_3 \cup \Delta C_3$ e os sítios de $b_2^{(2)} + T_2^*(m, n)$ estão a uma distância de pelo menos N , logo

$$(C_3 \cup \Delta C_3) \cap \{b_2^{(2)} + T_2^*(m, n)\} = \emptyset.$$

Portanto, a distribuição conjunta de $f(x)$ para x em B_4 condicional à C_3 , é a medida produto P devido à independência entre os sítios dos dois conjuntos. Com isso, podemos aplicar o Lema 3.3.6 para mostrar que o passo 4 será bem sucedido com probabilidade superior a $1 - \varepsilon$. Assumindo que o passo 4 é bem sucedido, definimos γ_4 e β_4 de forma análoga às anteriores.

De maneira similar aos passos 3 e 4 tentamos fazer as outras $2d - 2$ ligações com os outros $2d - 2$ super-elos-centrais adjacentes a $B(N)$. Assim, estaremos estendendo o conjunto C_t até alcançar algum m -bloco B_t , $t = 2, \dots, 2d + 2$. Ao final, teremos feito $2d + 2$ passos. Iremos

declarar a origem $\mathbf{O}$ da rede renormalizada estar *ocupada* se a construção inteira for bem sucedida, isto é, quando todos os passos forem bem sucedidos. Definindo

$$S_k = \{ \text{o passo } k \text{ é bem sucedido} \}; \quad k = 1, 2, \dots, 2d+2,$$

temos que

$$\begin{aligned} P(\mathbf{O} \text{ está ocupada} \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberto}) &= P\left(\bigcap_{k=2}^{2d+2} S_k \mid S_1\right) \\ &= P(S_{2d+2} \mid S_{2d+1}) P(S_{2d+1} \mid S_{2d}) \cdots P(S_3 \mid S_2) P(S_2 \mid S_1) = [P(S_3 \mid S_2)]^{2d} P(S_2 \mid S_1) \\ &> (1 - \varepsilon)^{2d} (1 - 2d\varepsilon) \geq (1 - 2d\varepsilon)^2 \geq 1 - 4d\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + p_c(F)) > p_c(F). \end{aligned}$$

Se a origem não estiver ocupada, terminamos o processo.

A forma das funções γ_t e β_t são iguais para $t \geq 2$. Iremos agora encontrar limitantes superiores para γ_t . Lembremos que em C_2 todos os sítios eram p -abertos (pois entraram em F_1). Em C_3 incluímos alguns sítios $(p + \delta)$ -abertos (pois entraram em E_2). Em C_4 incluímos alguns sítios $(p + 2\delta)$ -abertos. Desta forma, podemos perceber que em C_{2d+2} incluímos alguns sítios $(p + 2d\delta)$ -abertos. Estes são os maiores valores possíveis de γ_t , $\forall t$. Com isto, temos que

$$\beta_t(x) \leq \gamma_t(x) \leq p + 2d\delta = p_c + \eta, \quad \forall x \in C_t. \quad (3.7)$$

Completamos aqui boa parte do trabalho. Continuamos agora considerando a origem renormalizada ocupada. Procuramos o elo de menor ordem incidente na origem de F e o denotemos por e_1 . Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $e_1 = i_1$ e voltamos nossa atenção para o super-sítio $4i_1 + B(N)$ correspondente a i_1 . Para determinar se este super-sítio está ocupado procedemos de forma similar à origem, com uma ligeira diferença: o passo inicial será fazer a ligação com este super-sítio, partindo do super-elo-central $2Ni_1 + B(N)$. Para isto, primeiro ligamos com um m -bloco, digamos, B_{2d+3} em $3Ni_1 + B(N)$ e depois com outro m -bloco B_{2d+4} em $4Ni_1 + B(N)$. Para ter certeza de que os m -blocos estão nos seus respectivos super-elos, vamos continuar com a ação de direcionamento, porém agora com um sentido mais

geral: no lugar de usar a simetria $T^*(m, n)$, usaremos a imagem de $T(m, n)$ sob uma simetria apropriada

$$x_1 \rightarrow x_1^* \quad \text{e} \quad x_j \rightarrow \begin{cases} -x_j^* & \text{se } b(1) \geq 0 \\ x_j^* & \text{se } b(1) < 0 \end{cases}, j = 2, \dots, d,$$

onde $b = (b(1), \dots, b(d))$ é o centro do m -bloco a partir do qual vamos começar a ligação.

Partindo do m -bloco B_{2d+4} , fazemos a conexão com as outras $2d - 1$ faces de $4Ni_1 + B(N)$ (esta etapa é denominada *ramificação*). Contudo, um importante cuidado precisa ser tomado: quando estendemos o conjunto C_{2d+4} até alcançar $B_{2d+5} = b_{2d+5} + B(m)$ usamos sítios que poderiam ser usados nos m -blocos da ramificação (veja Figura 3.8). Para contornar este problema vamos exigir que os m -blocos da ramificação estejam na “parte superior” do bloco $b_{2d+5} + B(n)$ (no sentido de que qualquer destes m -blocos tenha a primeira coordenada maior que $4N$). Isto garante que tais m -blocos não contenham sítios x para os quais a $f(x)$ já foi analisada.

Figura 3.8: Ligação de $B(N)$ com $4Ni_1 + B(N)$

Após fazermos a ramificação em $4Ni_1 + B(N)$ precisaremos ligar cada m -bloco com seu respectivo super-elo-central. Assim, o número de m - blocos para se decidir se i_1 está ocupado não excede

$$2 + (2d - 1) + (2d - 1) = 4d,$$

que equivale aos passos $2d + 3, \dots, 2d + 4d + 4$. Com isso

$$\begin{aligned} P(i_1 \text{ estar ocupado} \mid O \text{ está ocupada}) &= P\left(\bigcap_{j=2d+3}^{6d+4} G_j \mid O \text{ está ocupada}\right) \\ &> (1 - \varepsilon)^{4d} \geq 1 - 4d\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + p_c(F)) > p_c(F). \end{aligned}$$

Se i_1 estiver vazia (ié, não ocupada) então procuramos outro elo incidente na origem, em que o outro sítio extremo corresponda a um sítio-caixa que ainda não foi testado.

Seguindo o procedimento descrito previamente ao Lema 3.3.1, vamos examinando os super-sítios relevantes um a um, como descrito para o super-sítio $4Ni_1 + B(N)$. Assim, primeiro fazemos a ligação a partir de um super-elocentral até um novo super-sítio. Depois fazemos a ramificação aos super-elos adjacentes. Se todos os super-sítios adjacentes a um determinado super-sítio já tiverem sido examinados, podemos decarar tal super-sítio vazio e então procuramos um novo super-sítio para examinar.

Com o procedimento descrito acima, temos do Lema 3.3.1, usando $\mu = P$ e $g(x_{t+1}) = 1$ se e somente se o super-sítio correspondente ao $(t + 1)$ -ésimo sítio x_{t+1} estiver ocupado, que

$$\rho(\mathcal{J}, t) > \frac{1}{2}(1 + p_c(F)) > p_c(F), \text{ para } t \geq 1.$$

Logo existe um γ tal que

$$\rho(\mathcal{J}, t) \geq \gamma > p_c(F), \forall t \geq 1.$$

Com as hipóteses do Lema 3.3.1 satisfeitas, podemos aplicá-lo para concluir que, condicional ao evento $\{B(m) \text{ é } p\text{-aberto}\}$, há uma probabilidade estritamente positiva de que o conglomerado A de super-sítios ocupados seja infinito, ou seja

$$P(|A| = \infty) = P(|A| = \infty \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberto}) P(B(m) \text{ é } p\text{-aberto}) > 0.$$

Se A for infinito, então existe um conglomerado conectado de $4NF + B(2N)$ contendo a origem, onde por (3.7), cada sítio é $(p_c + \eta)$ -aberto. Portanto

$$p_c + \eta \geq p_c(4NF + B(2N)),$$

que conclui a prova. $\square$

Nesta seção citamos algumas consequências do Teorema 3.4.1 e da técnica utilizada para sua prova. A primeira consequência é a seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{\log(x)} = \infty$$
$$\mathcal{I}(k) = \{x \in \mathbb{Z}^d : x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq h(x_1), |x_j| \leq k \text{ para } j > 2\}$$
$$p_c(\mathcal{I}(k)) < p_c + \varepsilon.$$

PROVA: O argumento para se chegar a este resultado é o seguinte: por Grimmett (1981,1983) temos que se $h : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{\log(x)} = \infty$ e consideramos a região

$$\mathbb{Z}^2(h) = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq h(x_1)\}$$

então

$$p_c(\mathbb{Z}^2(h)) = p_c(\mathbb{Z}^2).$$

Com este resultado podemos usar $F = \mathbb{Z}^2(h)$ na prova do Teorema 3.4.1 e assim teremos que para cada $\varepsilon > 0$ existe um inteiro k tal que

$$p_c(2k\mathbb{Z}^2(h) + B(k)) \leq p_c + \varepsilon.$$

Notemos agora que na prova do Teorema 3.4.1 tínhamos

$$2k\mathbb{Z}^2 + B(k) = \{x \in \mathbb{Z}^d : -k \leq x_j \leq k, j > 2\} = \mathbb{Z}^2 \times \{-k, \dots, k\}^{d-2}$$

que é uma translação de $\mathbb{S}(2k) = \mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, 2k\}^{d-2}$. Agora temos

$$2k\mathbb{Z}^2(h) + B(k) \neq \{x \in \mathbb{Z}^d : x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq h(x_1), |x_j| \leq k, j > 2\}.$$

Precisamos portanto fazer uma adaptação para este caso: consideremos $h'(x) = h(x)/3$. Com esta função temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h'(x)}{\log(x)} = \infty$ e portanto vale que

$$p_c(2k\mathbb{Z}^2(h') + B(k)) < p_c + \eta$$

para algum $k = k(\eta)$. Podemos agora aplicar um operador de translação Γ de forma que $\Gamma(2k\mathbb{Z}^2(h') + B(k)) \subseteq \mathbb{L}$. Como $p_c(A) = p_c(\Gamma(A)) \forall A \subseteq \mathbb{Z}^d$, temos que

$$p_c(\mathbb{L}(k)) \leq p_c(2k\mathbb{Z}^2(h') + B(k)) \leq p_c + \eta$$

para algum $k = k(\eta)$. $\square$

Consequência (b) A segunda consequência é a seguinte: se $p_c < p < 1$, então

$$P_p(\mathbf{O} \leftrightarrow ni_1, |C| < \infty) \leq e^{-m(p)n}$$

para algum $m(p)$ satisfazendo $0 < m(p) < \infty$.

Este resultado foi provado por Chayes, Chayes & Newman (1987) para $p > p_c(\mathbb{S})$. Agora este resultado pode ser estendido para $p \in (p_c, 1)$ devido à identidade $p_c = p_c(\mathbb{S})$.

PROVA: O argumento é o seguinte: no trabalho de Chayes, Chayes & Newman (1987) foram definidos $\mathcal{IH}(k) = \mathbb{Z}^{d-1} \times \{0, \dots, k\}$ com valor crítico $p_c(\mathcal{IH}(k))$. Também foi definido

$$p_c(\mathcal{IH}) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{IH}(k)).$$

O Teorema 1 de Chayes Chayes & Newman (1987) afirma que para $d > 2$ e $p > p_c(\mathcal{IH})$ existe $m(p) > 0$ tal que

$$P_p(\mathbf{O} \leftrightarrow ni_1, |C| < \infty) \leq e^{-m(p)n}.$$

Portanto, para estendermos este resultado para $p \in (p_c, 1)$ basta que tenhamos $p_c = p_c(\mathcal{IH})$, que é verdade pois $\mathcal{IH}(k) \supseteq \mathbb{S}(k)$; logo

$$p_c \leq p_c(\mathcal{IH}) \leq p_c(\mathbb{S})$$

Como $p_c = p_c(\mathbb{S})$ concluímos que $p_c = p_c(\mathcal{IH})$ $\square$.

Consequência (c) Aplicando o Teorema 3.4.1 a um resultado de Kesten & Zhang (1990), temos que se $p > p_c$ então

$$P_p(n \leq |C| < \infty) \leq (C_1 n^{\frac{d-1}{d}} + C_2) e^{-\beta n^{\frac{d-1}{d}}},$$

onde $C_1 = C_1(p)$, $C_2 = C_2(p)$ e $\beta = \beta(p)$ são constantes positivas.

PROVA: No trabalho de Kesten & Zhang (1990) temos que

$$P_p(|C| = n) \leq e^{-\beta n^{\frac{d-1}{d}}},$$

para $p > \hat{p}_{c,2}^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathbb{Z}_+^2 \times \{0, \dots, k\}^{d-2})$ e algum $\beta \in (0, \infty)$. Portanto teremos

$$P_p(n \leq |C| < \infty) = \sum_{k=n}^{\infty} P_p(|C| = k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\beta k^b} \quad \text{onde } b = \frac{d-1}{d} \in [1/2, 1).$$

Aproximando esta soma por uma integral e fazendo $y = x^b$, teremos

$$P_p(n \leq |C| < \infty) \leq \int_{n-1}^{\infty} e^{-\beta x^b} dx \leq \int_{(n-1)^b}^{\infty} e^{-\beta y} \frac{1}{b} y^{\frac{1}{b}-1} dy.$$

Agora, $1/b - 1 \in (0, 1]$, logo $y^{1/b-1} \leq y$. Daí

$$\begin{aligned} P_p(n \leq |C| < \infty) &\leq \frac{1}{b} \int_{(n-1)^b}^{\infty} y e^{-\beta y} dy \\ &= \frac{1}{\beta b} (n-1)^b e^{-\beta(n-1)^b} + \frac{1}{\beta^2 b} e^{-\beta(n-1)^b} \\ &\leq \left(\frac{1}{\beta b} n^b + \frac{1}{\beta^2 b} \right) e^{-\beta n^b + \beta} = (C_1 n^{\frac{d-1}{d}} + C_2) e^{-\beta n^{\frac{d-1}{d}}} \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é válida porque $(n-1)^b \geq n^b - 1$, $\forall b \in (0, 1)$ e $\forall n \geq 1$ $\square$.

Consequência (d) Seja Π_n o número de caminhos disjuntos formados por elos abertos que cruzam um n -cubo de uma face até a face oposta. Se $p > p_c$ existem constantes $\beta(p) > 0$ e $\gamma(p) > 0$ tal que

$$P_p(\Pi_n \geq \beta(p)n^{d-1}) \geq 1 - e^{-\gamma(p)n^{d-1}}.$$

Este resultado segue de Chayes & Chayes (1986), que assumiram $p > p_c(\mathbb{S})$, logo, pelo Teorema 1.3, vale para todo $p > p_c$.

Uma maneira alternativa, porém que resulta em um resultado mais fraco, de resolver este problema levando em conta o Teorema 3.4.1 é a seguinte: consideremos N e λ inteiros positivos

e fazemos $n = N\lambda$. Dividimos o $(n-1)$ -cubo $D(n-1) = \{0, 1, \dots, n-1\}^d$ em λ^{d-2} fatias da forma

$$D_k(n-1) = \{x \in D(n-1) : (k_i - 1)N \leq x_i < k_i N; 1 \leq i \leq d-2\}$$

Figura 3.10: Divisão do n -cubo em fatias $D_k(n-1)$

para $k = (k_1, k_2, \dots, k_{d-2}) \in \{1, \dots, \lambda\}^{d-2}$. Agora particionamos cada fatia $D_k(n-1)$ em $(N-1)$ -cubos. Se $p > p_c$ e $N = N(p)$ for suficientemente grande, poderemos pensar nestes $(N-1)$ -cubos dentro de $D_k(n-1)$ como sendo super-sítios de um processo de percolação supercrítica. Tal processo contém pelo menos $\delta\lambda$ cruzamentos entre duas faces fixadas de $D_k(n-1)$ com probabilidade $\geq 1 - e^{\eta(p)n}$, para algum $\delta(p) > 0$ e algum $\eta(p) > 0$ (isto pode ser feito como em Chayes & Chayes (1986) ou Grimmett & Kesten (1984)). Devido a construção usada na prova do Teorema 3.4.1, estes $\delta\lambda$ cruzamentos no processo renormalizado correspondem a pelo menos $\delta\lambda$ cruzamentos no processo original em $D_k(n-1)$ para cada k . Denotando por X_k o número de cruzamentos em $D_k(n-1)$, pelo argumento acima, que

$$P(X_k \geq \delta n) \geq 1 - e^{\eta(p)n}.$$

Como $\{\Pi_n \geq \beta n^{d-1}\} \supseteq \bigcap_{k=1}^{\lambda^{d-2}} \{X_k \geq \frac{\beta n^{d-1}}{\lambda^{d-2}}\}$, então

$$\begin{aligned}
P_p(\Pi_n \geq \beta(p)n^{d-1}) &\geq P_p\left(\bigcap_{k=1}^{\lambda^{d-2}} \{X_k \geq \beta'n\}\right) = \prod_{k=1}^{\lambda^{d-2}} P_p(X_k \geq \beta'n) \geq (1 - e^{-\eta'n})^{\lambda^{d-2}} \geq 1 - \lambda^{d-2}e^{-\eta'n} \\
&= 1 - C(p)n^{d-2}e^{-\eta'n},
\end{aligned}$$

onde $\beta'(p) = \beta(p)/N(p)$ e $C(p) = \frac{1}{N(p)}$.

Consequência (e) Em um reticulado elétrico contendo uma proporção p de condutores e $1-p$ de isolantes, a resistência efetiva R_n entre as faces opostas de um n -cubo satisfaz

$$P_p(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{n^{d-2}R_n\} < \infty) = 1, \text{ se } p > p_c.$$

Este resultado já foi estabelecido em Kesten (1982) para $d = 2$. Para d geral, ele é uma consequência imediata do Teorema 1.3 deste trabalho e do Teorema 3.6 do trabalho de Chayes & Chayes (1986), em que foram definidos $\mathbb{S}(k) = \mathbb{Z}_+^2 \times \{0, 1, \dots, k\}^{d-2}$ com densidade crítica $p_c^{(k)}$ e $p_c^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} p_c^{(k)}$. O conteúdo deste teorema é o seguinte: se $p > p_c^\infty$, então existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{n^{d-2}R_n\} \leq \frac{d}{\lambda_1^2} \text{ com probabilidade 1.}$$

A extensão deste resultado para $p > p_c$ é válida porque $p_c = p_c^\infty$, que é um resultado devido a Grimmett & Marstrand (1991) e Barsky, Grimmett & Newman (1991). $\square$

Consequência (f) Para $x \in \mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ e $M \geq 1$, seja $D(x, M)$ o menor cubo da forma $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ contendo $B(M)$ e $x + B(M)$. Com isto, se $p > p_c$ então existem $C(p) > 0$ e $\alpha(p) > 0$ tal que

$$P_p \{O \leftrightarrow \infty, x \leftrightarrow \infty, O \not\leftrightarrow x \text{ em } D(x, M)\} \leq C(p)e^{-\alpha(p)M} \quad \forall M.$$

PROVA: Seja $p > p_c$ e $N = N(p)$ um inteiro positivo suficientemente grande de forma que o processo renormalizado da prova do Teorema 3.4.1 seja supercrítico (no Teorema 3.4.1 usamos $N = n + m + 1$). Fazemos $R = 2N + 1$. Agora seja

$$A_M = \{\mathbf{O} \leftrightarrow \infty, x \leftrightarrow \infty, \mathbf{O} \not\leftrightarrow x \text{ em } D(x, M)\}.$$

Notemos que $A_{M+1} \subseteq A_M$, pois se $\mathbf{O} \not\leftrightarrow x$ em $D(x, M+1)$ então teremos que $\mathbf{O} \not\leftrightarrow x$ em uma caixa menor que $D(x, M+1)$. Notemos ainda que

$$P_p(A_{R(J+1)}|A_{RJ}) \leq \max_{u,v \in \Delta D(x, RJ)} \{P_p(u \not\leftrightarrow v \text{ em } D(x, R(J+1)) \setminus D(x, RJ))\}.$$

Para vermos isto, notemos que se A_{RJ} ocorre, então existe algum par $u, v \in \Delta D(x, RJ)$ de “menor ordem” tal que u está ligado a $\mathbf{O}$ e v está ligado a x por caminhos abertos contidos (exceto seus sítios extremos u e v) em $D(x, RJ)$. Se, além disso, $A_{R(J+1)}$ ocorre, então teremos que $u \not\leftrightarrow v$ em $D(x, R(J+1)) \setminus D(x, RJ)$.

Figura 3.11: Para que ocorra $A_{R(J+1)}$, dado que ocorreu A_{RJ} não pode ocorrer nenhum caminho, como o que está pontilhado

Se “desentortarmos” a região $D(x, R(J+1)) \setminus D(x, RJ)$, poderemos vê-la como uma parte de $\mathbb{Z}^{d-1} \times \{RJ+1, \dots, R(J+1)\}$. Usando a construção de blocos da prova do Teorema 3.4.1 nesta região, teremos que existe $\gamma(p) > 0$ tal que

$$P_p \{u \leftrightarrow v \text{ em } D(x, R(J+1)) \setminus D(x, RJ)\} \geq \gamma(p) \quad (3.8)$$

uniformemente em u, v, J e x .

Para determinar uma estimativa para $\gamma(p)$, podemos considerar o sítio u conectado a um m -bloco e então aplicamos o Lema 3.3.6 para fazer a conexão com outro m -bloco que está

em algum $x + T_j(m, R)$. Este evento ocorre com probabilidade $\geq (1 - \varepsilon)$. A partir daí vamos aplicando o Lema 3.3.6 sucessivamente até alcançarmos o sítio v . Como o número de aplicações pode ser majorado por uma constante finita $r(p)$ que é função de $R(p)$, então a probabilidade em (3.8) pode ser majorada por $\gamma(p) = (1 - \varepsilon)^{r(p)}$. Com isto temos que

Figura 3.12: Uso da construção de blocos

$$P_p(A_{R(J+1)}|A_{RJ}) \leq \max_{\forall u, v \in \Delta D(x, RJ)} \{P_p(u \not\leftrightarrow v \text{ em } D(x, R(J+1)) \setminus D(x, RJ))\} \leq 1 - \gamma(p).$$

Portanto

$$\begin{aligned} P_p(A_{RJ}) &= P_p(A_{RJ}|A_{R(J-1)})P_p(A_{R(J-1)}) + P_p(A_{RJ}|A_{R(J-1)}^c)P_p(A_{R(J-1)}^c) \\ &= P_p(A_{RJ}|A_{R(J-1)})P_p(A_{R(J-1)}) \\ &= P_p(A_{RJ}|A_{R(J-1)})P_p(A_{R(J-1)}|A_{R(J-2)}) \cdots P_p(A_R|A_0)P_p(A_0) \\ &\leq (1 - \gamma(p))^J P_p(A_0) \leq (1 - \gamma(p))^J, \quad J = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Para estender este resultado a todo $M \geq 0$, consideremos $\lceil x \rceil$ o menor inteiro maior ou igual a x . Com isto e a relação $A_{M+1} \subseteq A_M$, poderemos reescrever a probabilidade acima como

$$P_p(A_M) \leq (1 - \gamma(p))^{\lceil \frac{M}{R} \rceil - 1} \leq (1 - \gamma(p))^{\frac{M}{R} - 1} = C(p)e^{-\alpha(p)M},$$

onde $C(p) = (1 - \gamma(p))^{-1}$ e $\alpha(p) = -\log_e(1 - \gamma(p))^{\frac{1}{R(p)}}$. $\square$

Consequência (g) A última observação diz respeito ao tamanho do menor caminho aberto entre dois sítios distantes. Seja $L(x, y)$ o número de elos no menor caminho ligando x e y ; com

a convenção que $L(x, y) = \infty$ se $x \not\leftrightarrow y$. Devido ao fato desta variável poder assumir o “valor” ∞ , é mais conveniente trabalhar com a variável $L'(x, y)$ definida da seguinte forma: para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, seja $i(x)$ o sítio mais próximo de x que esteja no conglomerado aberto infinito, ou seja, $i(x)$ satisfaz

$$\|x - i(x)\| = \min_z \{\|x - z\| : z \leftrightarrow \infty\}.$$

Consideremos então $L'(x, y) = L(i(x), i(y))$. Pela unicidade do conglomerado infinito (veja Aizenman, Kesten & Newman(1987) ou Burton & Keane(1989)), temos que $L'(x, y) < \infty$ quase certamente.

Suponhamos que $p > p_c$ e $d \geq 3$. As variáveis $L'(x, y)$ são invariantes por translação, ou seja, $\{L'(x, y); x, y \in \mathbb{Z}^d\}$ e $\{L'(x+t, y+t); x, y \in \mathbb{Z}^d\}$, para cada $t \in \mathbb{Z}^d$ fixado, são famílias de v.a. identicamente distribuídas. Além disso, se forçarmos o caminho entre $i(x)$ e $i(y)$ a passar por outro ponto $i(z)$ estaremos aumentando o tamanho do caminho. Assim

$$L'(x, y) \leq L'(x, z) + L'(z, y) \text{ para } x, y, z \in \mathbb{Z}^d.$$

Com isso, temos que L' satisfaz a desigualdade subaditiva. Após verificarmos a hipótese

$$E(L'(x, y)) < \infty, \forall x, y \in \mathbb{Z}^d$$

teremos, como consequência do Teorema Subaditivo Ergódico de Kingman (veja Kingman(1976) ou Liggett(1985b)), que quando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} L'(0, nx) \longrightarrow \lambda(x) \text{ quase certamente e em } L^1$$

para algum real $\lambda(x)$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^d |x_i| \leq \lambda(x) < \infty.$$

Como consequência desta convergência temos que quando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} (L(0, nx) - \lambda(x)) I_{\{\mathbf{O} \leftrightarrow \infty\}} I_{\{x \leftrightarrow \infty\}} \longrightarrow 0 \text{ quase certamente,}$$

onde I_A é a função indicadora do evento A . (Notemos nesta expressão que como $x \leftrightarrow \infty$, então $L(0, nx) = L'(0, nx)$.)

Precisamos apenas provar que $E(L'(x, y)) < \infty$. Consideremos M e N inteiros positivos.

Então

$$P_p(L'(x, y) \geq M)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u, v \in \mathbb{Z}^d} P_p(L(u, v) \geq M, i(x) = u, i(y) = v) \\
&\leq \sum_{\substack{u, v: \\ \|u - x\| < N \\ \|v - y\| < N}} P_p(L(u, v) \geq M, i(x) = u, i(y) = v) \\
&\quad + \sum_{u, v: \|u - x\| \geq N} P_p(L(u, v) \geq M, i(x) = u, i(y) = v) + \sum_{u, v: \|v - y\| \geq N} P_p(L(u, v) \geq M, i(x) = u, i(y) = v) \\
&\leq \sum_{\substack{u, v: \\ \|u - x\| < N \\ \|v - y\| < N}} P_p(L(u, v) \geq M, i(x) = u, i(y) = v) + P_p(\|i(x) - x\| \geq N) + P_p(\|i(y) - y\| \geq N) \\
&= \sum_{\substack{u, v: \\ \|u - x\| < N \\ \|v - y\| < N}} P_p(L(u, v) \geq M, u \leftrightarrow \infty, v \leftrightarrow \infty) + 2P_p(\|i(z) - z\| \geq N) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Precisamos agora de estimativas para estas probabilidades. Vamos procurar inicialmente um majorante para $P(\|i(z) - z\| \geq N)$. Vimos no Teorema 3.4.1 que $p > p_c$ implica que $p > p_c(\mathbb{S}(k))$ para algum k . Com esta escolha de k , a probabilidade de que nenhum sítio em $\{z + ji_1 : 0 \leq j \leq N\}$ esteja no conglomerado infinito é, pelo menos, $\exp(-A(p)[N/(k+1)])$ para algum $A(p) > 0$. Para vermos isto, consideremos os sítios renormalizados de $\mathbb{S}(k)$ de tamanho k . Para que os $N+1$ sítios de $\{z + ji_1 : 0 \leq j \leq N\}$ não estejam no conglomerado infinito renormalizado, é necessário que $[N/(k+1)]$ dos sítios renormalizados não estejam no conglomerado infinito renormalizado. Considerando $\exp(-A(p))$ a probabilidade de que um particular sítio renormalizado não esteja no conglomerado, então a probabilidade de que $[N/(k+1)]$ sítios renormalizados não estejam no conglomerado renormalizado é $\exp(-A(p)[N/(k+1)]) \leq \exp(-A(p)N/(k+1))$. Tomando $a(p) = A(p)/(k+1)$ e lembrando que se os N vizinhos mais próximos não estão no conglomerado, então teremos $\|i(z) - z\| \geq N$, daí vale que

$$P_p(\|i(z) - z\| \geq N) \leq e^{-a(p)N} \text{ para algum } a(p) \in (0, \infty).$$

Segue pelo item (f) que existe $\alpha(p) > 0$ tal que

$$P_p \{u \leftrightarrow \infty, v \leftrightarrow \infty, u \not\leftrightarrow v \text{ em } D(v - u, N)\} \leq e^{-\alpha(p)N}. \quad (3.10)$$

O número de elos em $D(v - u, N)$ é, no máximo, $(\|v - u\| + 2N + 1)^d$, que é no máximo $(4N + \|x - y\|)^d$ se $\|u - x\| < N$ e $\|v - y\| < N$. Portanto para $M \geq (4N + \|x - y\|)^d$, $\|u - x\| < N$ e $\|v - y\| < N$, temos

$$P_p(L(u, v) \geq M, u \leftrightarrow \infty, v \leftrightarrow \infty) \leq P_p(u \leftrightarrow \infty, v \leftrightarrow \infty, u \not\leftrightarrow v \text{ em } D(v - u, N)). \quad (3.11)$$

Como no primeiro evento de (3.11) temos que $L(u, v) \geq M$, então podemos encontrar uma caixa da forma $D(v - u, N)$ na qual ocorra o segundo evento, mas evidentemente M deve ser bem maior que N , pois em caso contrário não conseguiremos garantir a desigualdade em (3.11). Tomemos então $N = \lfloor \frac{1}{5}M^{1/d} \rfloor$ (onde $\lfloor x \rfloor$ = maior inteiro menor ou igual a x). Para verificar que este valor satisfaz a condição $M \geq (4N + \|x - y\|)^d$, notemos que

$$(4N + \|x - y\|)^d = (4\lfloor \frac{1}{5}M^{1/d} \rfloor + \|x - y\|)^d \leq (\frac{4}{5}M^{1/d} + \|x - y\|)^d = M(\frac{4}{5} + \frac{\|x - y\|}{M^{1/d}})^d \leq M$$

para M satisfazendo $\frac{\|x - y\|}{M^{1/d}} \leq \frac{1}{5}$.

Falta agora majorar o número de elementos na soma em (3.9); este número pode ser majorado por N^{2d} . Com isto, temos que

$$\begin{aligned} P_p(L'(x, y) \geq M) &\leq N^{2d}e^{-\alpha(p)N} + 2e^{-a(p)N} \\ &\leq N^{2d}e^{-\alpha(p)N} + N^{2d}e^{-a(p)N} \leq CM^2e^{-\beta(p)M^{1/d}} \end{aligned}$$

para algum M grande, uma constante C e $0 < \beta(p) = \min\{\alpha(p), a(p)\}$. Portanto

$$\begin{aligned} E(L'(x, y)) &= \sum_{M=1}^{\infty} P(L'(x, y) \geq M) \leq \sum_{M=1}^{\infty} CM^2e^{-\beta M^{1/d}} \leq C \int_0^{\infty} x^2 e^{-\beta x^a} dx \\ &= C' \int_0^{\infty} y^{3d-1} e^{-\beta y} dy < \infty, \text{ onde } a = \frac{1}{d}. \quad \square \end{aligned}$$

Capítulo 4

TEOREMAS DA FORMA E CONVERGÊNCIA COMPLETA PARA O PROCESSO DE CONTATO

Nosso objetivo neste capítulo será provar dois teoremas relacionados ao Processo de Contato denominados *Teorema da Forma* (TF) e *Teorema da Convergência Completa* (TCC), que foram enunciados no Capítulo 1. Inicialmente provamos o Teorema 1.4 usando o Lema 1.1, que também foram enunciados no Capítulo 1. A técnica utilizada na prova do Teorema 1.4 servirá para provar o TF e o TCC. Começaremos definindo o modelo que vai nos permitir provar o Lema 1.1

4.1 Associação com o Modelo de Percolação Orientada de Sítios

O primeiro passo para provar o Lema 1.1 é definir o modelo de percolação orientada de sítios independentes: sejam $\mathbb{L} = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m + n \text{ é par}\}$ e $\{\eta(z), z \in \mathbb{L}\}$ variáveis aleatórias independentes, com

$$P(\eta(z) = 1) = p \quad \text{e} \quad P(\eta(z) = 0) = 1 - p.$$

Dizemos que z está aberto quando $\eta(z) = 1$ e fechado em caso contrário. Cada $(m, n) \in \mathbb{L}$ está conectado a dois outros sítios: $(m-1, n+1)$ e $(m+1, n+1)$. Seja C_0 o conglomerado da origem, isto é, $C_0 = \{z : 0 \leftrightarrow z\}$ onde 0 representa a origem de $\mathbb{Z}^2$ e $x \leftrightarrow y$ significa que há um caminho de sítios abertos conectando x a y . Seja $\Lambda_\infty = \{|C_0| = \infty\}$ o evento *percolação ocorre* em $\mathbb{L}$. É conhecido (veja Durrett, 1984) que

Lema 4.1.1 *Se $p > 80/81$ então $P(\Lambda_\infty) > 0$.*

Para resolver problemas em $\mathbb{Z}^d$ usando fatos conhecidos em $\mathbb{L}$ deveremos fazer uma bijeção entre cada sítio de $\mathbb{L}$ e alguma região de $\mathbb{Z}^d$ (aqui estaremos usando $\mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$). Estas regiões serão consideradas como sítios renormalizados. Para definir tais sítios renormalizados, consideremos constantes L e T (a serem escolhidas posteriormente) e sejam

$$B_0 = [-2L, 2L]^d \times [0, T] \quad \text{e} \quad B_{m,n} = (4Lm, 50Tn) + B_0$$

para cada $(m, n) \in \mathbb{L}$. Seja J uma constante (a ser escolhida posteriormente) e $I = [-J, J]^d$.

Definição 4.1.1 *Diremos que um sítio $(m, n) \in \mathbb{L}$ está molhado se $\xi_t^I \supset x + I$ para algum $(x, t) \in B_{m,n}$ (ou seja, se $B_{m,n}$ conter alguma cópia infectada de I).*

Com estas definições podemos enunciar o resultado que será a ferramenta principal para a prova do Lema 1.1.

Proposição 4.1.1 *Suponhamos $P_\lambda(\Omega_\infty) > 0$. Se $\varepsilon > 0$ então poderemos escolher constantes J , L e T (funções de ε) tal que se $(0, 0) \in \mathbb{L}$ está molhado então $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ estarão molhados com probabilidade $> 1 - \varepsilon$ cada.*

Figura 4.1: Construção de um caminho de $B_{0,0}$ até $B_{1,1}$

Para provar a Proposição 4.1.1 usaremos o processo ξ_t^{4L} no qual não são permitidos nascimentos (infecções) fora de $[-4L, 4L]^d$. O motivo para isto é que as regiões $(4Lm, 50Tn) + [-4L, 4L]^d \times \mathbb{R}$, $m \in 2\mathbb{Z} - n$, são disjuntas e daí os eventos definidos nas representações gráficas destas regiões serão independentes.

Após provarmos o Lema 1.1 usaremos indução para definir um modelo de percolação orientada de sítios independentes e com isto veremos que o conjunto dos sítios molhados domina o conglomerado do modelo de percolação orientada com $p = 1 - \varepsilon$. Com isto poderemos provar o Teorema 1.4.

Na próxima seção desenvolveremos a ferramenta probabilística necessária para a construção gráfica que vai nos permitir construir caminhos de $B_{0,0}$ a $B_{-1,1}$ e $B_{1,1}$.

4.2 Construção Probabilística

O objetivo principal desta seção será provar a Proposição 4.2.1. Para enunciá-la, consideremos $\xi_t^{I,K}$ o Processo de Contato com $\xi_0^{I,K} = I$ no qual não são permitidos nascimentos fora de $H = [-K, K]^d$, onde K é uma constante a ser escolhida posteriormente. Seja ∂H a borda interna de H e

$$\mu_U = \int_0^U |\xi_t^{I,K} \cap \partial H| dt,$$

ou seja, μ_U é o número de sítios na borda de H infectados até o tempo U .

Nesta seção estaremos supondo que $P_\lambda(\Omega_\infty) > 0$. Seja $\gamma \in (0, 1)$ fixado e $\delta = \gamma^2/3$.

Proposição 4.2.1 *Fixados M e N finitos, podemos escolher K e U tais que*

$$P(|\xi_U^{I,K}| \geq M) \geq 1 - \gamma \quad e \quad P(\mu_U \geq N) \geq 1 - \gamma.$$

A prova desta Proposição está dividida em vários lemas. A idéia aqui será montar uma caixa $[-K, K]^d \times [0, U]$ de forma que tenhamos pelo menos M sítios infectados no topo da caixa e pelo menos N sítios infectados na lateral da caixa com uma probabilidade alta. A escolha de M e N será feita de modo que quando os eventos da Proposição 4.2.1 ocorrerem, então com probabilidade alta teremos que

- (i) Existirá um $x \in \xi_V^{I,K}$ tal que $x + I \subset \xi_{V+1}^{I,K+J}$, ou seja, haverá pelo menos uma cópia infectada de I no topo da caixa.
- (ii) Existirá alguma cópia infectada de I do processo $\xi_t^{I,K+2J}$ na região $(\overline{H} - H) \times [0, U]$, onde $\overline{H} = [-K - 2J, K + 2J]^d$, isto é, na lateral da caixa.

O primeiro passo será a escolha de J . Este é o conteúdo do lema a seguir.

Lema 4.2.1 *Seja $P_\lambda(\Omega_\infty) > 0$. Para cada $\delta > 0$ existe um $J_0 = J_0(\delta)$ tal que se $I = [-J, J]^d$ então $\forall J \geq J_0$*

$$P(\xi_t^I \neq \emptyset \forall t) \geq 1 - \delta.$$

Já provamos um resultado análogo no Capítulo 2. Apresentamos agora uma prova alternativa.

PROVA: Seja $\tau^A = \inf\{t : \xi_t^A = \emptyset\}$. Escolhemos um valor de t tal que

$$\frac{P(t < \tau^0 < \infty)}{P(t < \tau^0)} \leq \delta.$$

(Esta escolha é possível porque o numerador converge para zero e o denominador converge para $P(\tau^0 = \infty) = P(\Omega_\infty) > 0$, quando $t \rightarrow \infty$.) Para t fixado temos que $P(|\xi_t^0| < \infty) = 1$, pois o número de nascimentos em um tempo finito t é finito. Com isso temos que

$$\begin{aligned} P(t < \tau^0 < \infty) &= E[1_{\{t < \tau^0 < \infty\}}] = E[1_{\{\tau^0 > t\}} \cdot 1_{\{\tau^0 < \infty\}}] \\ &= E\{E[1_{\{\tau^0 > t\}} \cdot 1_{\{\tau^0 < \infty\}} \mid \mathcal{F}_t]\} = E\{1_{\{\tau^0 > t\}} E[1_{\{\tau^0 < \infty\}} \mid \mathcal{F}_t]\} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}_t$ é a σ -álgebra até o tempo t ($= \sigma(\xi_s^0, 0 \leq s \leq t)$). Pela Propriedade Markoviana

$$P(t < \tau^0 < \infty) = E\{1_{\{\tau^0 > t\}} E[1_{\{\tau^0 < \infty\}} \mid \mathcal{F}_t]\} = E[1_{\{\tau^0 < \infty\}}] \cdot E\{1_{\{\tau^0 > t\}}\} = P(\tau^0 < \infty) \cdot P(\tau^0 > t).$$

Logo, pela escolha de t , $P(\tau^0 < \infty) \leq \delta$. Mas $|\xi_t^0| < \infty$, daí

$$\begin{aligned} \delta \geq P(\tau^0 < \infty) &= \sum_{A: |A| < \infty} P(\tau^0 < \infty \mid \xi_t^0 = A) P(\xi_t^0 = A) \\ &= \sum_{A: |A| < \infty} P(\tau^A < \infty \mid \xi_t^0 = A) P(\xi_t^0 = A) \\ &= \sum_{A: |A| < \infty} P(\tau^A < \infty) P(\xi_t^0 = A) \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue por independência. Concluimos que deve existir um conjunto finito A tal que $P(\tau^A < \infty) \leq \delta$, pois se não existisse teríamos $P(\tau^A < \infty) > \delta, \forall A$ e daí

$$\delta \geq \sum_{A: |A| < \infty} P(\tau^A < \infty) P(\xi_t^0 = A) > \delta \sum_{A: |A| < \infty} P(\xi_t^0 = A) = \delta$$

que é um absurdo.

Resta agora apenas escolher um J suficientemente grande tal que $I = [-J, J]^d \supset A$ e daí

$$P(\xi_t^I \neq \emptyset, \forall t) = P(\tau^I = \infty) = 1 - P(\tau^I < \infty) \geq 1 - P(\tau^A < \infty) \geq 1 - \delta. \square$$

O lema seguinte mostra (i) da página anterior.

Lema 4.2.2 *Para cada $\delta > 0$ existe um $M_0(\delta)$ tal que se $M \geq M_0(\delta)$ e $|\xi_U^I| \geq M$, com U fixado, teremos*

$$P(\xi_{U+1}^I \supset x + I \text{ para algum } x \in \xi_U^I) \geq 1 - \gamma.$$

PROVA: Como $|\xi_U^I| \geq M$ então podemos achar um conjunto $S_1 \subset \xi_U^I$ (dividindo o espaço em blocos disjuntos que sejam translações de I) de modo que $|S_1| \geq \lfloor \frac{M}{|I|} \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x . Deste modo teremos que os $x + I$, $x \in S_1$, são disjuntos. Seja ξ_t^x o Processo (construído na representação gráfica original) com $\xi_0^x = x$ e sem nascimentos fora de $x + I$ para cada $x \in S_1$. Basta notar agora que existe $\beta > 0$ tal que $P(\xi_{U+1}^x \supset x + I) = \beta$ e para diferentes $x \in S_1$ teremos que os eventos $\{\xi_{U+1}^x \supset x + I\}$ serão independentes. Com isso podemos usar a distribuição Binomial(M, β) para escolher um valor de M tal que

$$P(\xi_{U+1}^I \supset x + I \text{ para algum } x \in \xi_U^I) = P(\text{Bin}(M, \beta) \geq 1) = 1 - (1 - \beta)^M \geq 1 - \gamma. \square$$

Mostraremos agora (ii) da página 103. Para isto, seja $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Lema 4.2.3 *Para cada $\delta > 0$ existe um $N_0(\delta)$ tal que se $N \geq N_0$ e S é um subconjunto de $\{K\} \times \mathbb{Z}^{d-1} \times [0, \infty)$, com K fixado e $|S| \geq N/2d$ e ainda*

$$E = \{ \exists \text{ uma seta de algum } (x, t) \in S \text{ para } (x + e_1, t) \text{ e o processo começando com } x + e_1 \text{ infectado ao tempo } t \text{ e sem nascimento fora de } I' = x + (J, 0, \dots, 0) + I, \text{ contém } I' \text{ ao tempo } t + 1 \},$$

então

$$P(E) \geq 1 - \gamma.$$

Observação 4.1 *Notemos que neste lema estamos nos referindo apenas a uma face da caixa. A extensão às outras faces é direta.*

PROVA: Estaremos agora trabalhando na lateral da caixa e para obter regiões disjuntas usaremos subconjuntos da escala de tempo $(\mathbb{R}_+)$ e do espaço $(\{K\} \times \mathbb{Z}^{d-1})$. Seja então

$$T^* = [0, 1) \cup [2, 3) \cup \dots = \bigcup_{k \text{ par}} [k, k + 1)$$

$$\text{e } S_2 \subset \{K\} \times 2J\mathbb{Z}^{d-1} \times T^* \text{ com } |S| \geq N' = \lfloor \frac{N/2d}{2(2J)} \rfloor^d$$

Notemos agora que a probabilidade de que ocorra pelo menos uma chegada Poisson(λ) (representada por uma seta) no intervalo $[0, 1)$ é

$$1 - e^{-\lambda} = \int_0^\lambda e^{-x} dx \geq \int_0^\lambda e^{-\lambda} dx = \lambda e^{-\lambda}.$$

Seja, para cada $z \in \{K\} \times 2J\mathbb{Z}^{d-1}$,

$$X(z, k) = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma seta de algum } (x, t) \in \{z\} \times [k, k+1) \text{ para } (x + e_1, t) \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Definidos desta forma os $X(z, k)$ são independentes, pois usam intervalos disjuntos do tempo e tem distribuição Bernoulli(p) com $p \geq \lambda e^{-\lambda}$. Logo,

$$E(X(z, k)) \geq \text{Var}(X(z, k)).$$

Fazendo $W = \sum_{z,k} X(z, k)$ temos que $EW \geq \text{Var } W$ e pela desigualdade de Tchebyshev

$$\begin{aligned} P(W < EW/2) &= P(W - EW < -\frac{1}{2}EW) \leq P(|W - EW| > \frac{1}{2}EW) \\ &\leq \frac{\text{Var } W}{(EW/2)^2} \leq \frac{EW}{(EW)^2/4} = \frac{4}{EW} \leq \frac{4}{N' \lambda e^{-\lambda}}. \end{aligned}$$

Com isso podemos escolher N' (e consequentemente N) grande o suficiente de modo que existam muitos intervalos com setas na direção e_1 (i.e., $X(z, K) = 1$) e cada destas setas (ou seja, pontos infectados) estará apta a dar origem (independentemente) a uma cópia infectada de I no instante $t + 1$ com probabilidade $\beta > 0$, para algum β . Portanto, podemos novamente usar a distribuição Binomial para escolher N' que satisfaça

$$P(E) = P(\text{Bin}(N', \beta) \geq 1) \geq 1 - \gamma. \square$$

Concluimos agora a escolha de J , M e N . O lema seguinte é auxiliar a um dos dois outros lemas que virão e que serão usados para provar a Proposição 4.2.1.

Lema 4.2.4 *Se A é tal que $|A| \leq M$, então*

$$P(\tau^A < \infty) \geq (2d\lambda + 1)^{-M}.$$

PROVA:

$$\begin{aligned} P(\tau^A < \infty) &\geq P(\text{todos os } |A| \text{ pontos infectados tornem-se sadios antes de} \\ &\quad \text{infectarem outros pontos}) \\ &= (P(\text{Ocorrência de um Poisson}(1) \text{ antes de um Poisson}(2d\lambda)))^{|A|} \\ &= \left(\frac{1}{2d\lambda + 1}\right)^{|A|} \geq \left(\frac{1}{2d\lambda + 1}\right)^M, \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade segue por independência. $\square$

Para a prova do próximo lema vamos escolher V tal que

$$P(V < \tau^I < \infty) \leq \delta(2d\lambda + 1)^{-M} e^{-\lambda N},$$

onde δ é um valor fixado. Esta escolha é possível porque a probabilidade em questão converge para zero, quando V tende a infinito.

Lema 4.2.5 *Para J , M e V definidos anteriormente, temos*

$$P(|\xi_V^I| \geq M) \geq 1 - 2\delta.$$

PROVA:

$$\begin{aligned} P(V < \tau^I < \infty) &\geq P(V < \tau^I < \infty \mid 0 < |\xi_V^I| \leq M) P(0 < |\xi_V^I| \leq M) \\ &= P(\tau^{\xi_V^I} < \infty \mid 0 < |\xi_V^I| \leq M) P(0 < |\xi_V^I| \leq M) \end{aligned}$$

Logo,

$$P(0 < |\xi_V^I| \leq M) \leq \frac{P(V < \tau^I < \infty)}{P(\tau^{\xi_V^I} < \infty \mid 0 < |\xi_V^I| \leq M)} \leq \frac{\delta(2d\lambda + 1)^{-M} e^{-\lambda N}}{(2d\lambda + 1)^{-M}} = \delta e^{-\lambda N} < \delta < 2\delta$$

onde a segunda desigualdade é consequência do Lema 4.2.4 e da escolha de V . Agora,

$$P(|\xi_V^I| \geq M) \geq P(|\xi_V^I| \geq M + 1) = 1 - P(|\xi_V^I| \leq M) \geq 1 - 2\delta. \square$$

O próximo lema nos diz que o processo ξ_t^I até o tempo V fica restrito à caixa $H = [-K, K]^d$ com probabilidade $\geq 1 - \delta$.

Lema 4.2.6 Para cada $\delta > 0$ existe um $K_0(\delta)$ tal que se $K \geq K_0$, então

$$P(\xi_t^I \subset H, \forall t \leq V) \geq 1 - \delta.$$

PROVA: Seja ζ_t^I o Processo de Contato sem mortes com infecção inicial I . Comparando com o Processo de ramificação contínuo R_t^I temos que

$$E|\zeta_V^I| \leq ER_V^I = |I|2^{2d\lambda V} < |I|e^{2d\lambda V}.$$

Como

$$\{\xi_t^I \subset [-K, K]^d, \forall t \leq V\} \supset \{\zeta_t^I \subset [-K, K]^d, \forall t \leq V\} = \{\zeta_V^I \subset [-K, K]^d\} \supset \{|\zeta_V^I| \leq K\}$$

onde a última relação segue porque o processo ζ_t^I não tem mortes, logo o evento $\{|\zeta_V^I| \leq K\}$ implica que ainda não há nenhuma infecção fora de $[-K, K]^d$. Com isso e a desigualdade de Markov, temos

$$\begin{aligned} P(\xi_t^I \subset [-K, K]^d, \forall t \leq V) &\geq P(|\zeta_V^I| \leq K) = 1 - P(|\zeta_V^I| > K) \\ &\geq 1 - \frac{E|\zeta_V^I|}{K} > 1 - \frac{|I|e^{2d\lambda V}}{K}. \end{aligned}$$

Assim, podemos tomar K grande o suficiente de modo que $|I|e^{2d\lambda V}/K \leq \delta$, que dá o resultado que queremos. $\square$

Agora estamos prontos para provar a Proposição 4.2.1. Temos que

$$\begin{aligned} P(|\xi_V^{I,K}| \geq M) &\geq P(|\xi_V^I| \geq M, \xi_t^I \subset [-K, K]^d, \forall t \leq V) \\ &= P(|\xi_V^I| \geq M) - P(|\xi_V^I| \geq M, \xi_t^I \not\subset [-K, K]^d \text{ para algum } t \leq V) \\ &\geq P(|\xi_V^I| \geq M) - P(\xi_t^I \not\subset [-K, K]^d \text{ para algum } t \leq V) \\ &= P(|\xi_V^I| \geq M) + P(\xi_t^I \subset [-K, K]^d \forall t \leq V) - 1 \\ &\geq 1 - 2\delta + 1 - \delta - 1 = 1 - 3\delta = 1 - \gamma^2 > 1 - \gamma. \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade segue dos Lemas 4.2.5 e 4.2.6. Com isso provamos a primeira parte da Proposição 4.2.1. Notemos agora que em uma região finita o processo vai morrer em

algum instante finito, isto é, $P(|\xi_t^{I,K}| > 0, \forall t) = 0$. Além disso, $P(|\xi_t^{I,K}| > M)$ é uma função contínua em t . Com isso podemos escolher $U \geq V$ tal que

$$P(|\xi_U^{I,K}| > M) = 1 - \gamma.$$

Isto será usado na prova da segunda parte da Proposição 4.2.1. Notemos agora que quando $\mu_U = \int_0^U |\xi_t^{I,K} \cap \partial H| dt \leq N$, a probabilidade de que não haja nenhum nascimento fora de H é $\geq (\frac{1}{\lambda+1})^N \geq e^{-\lambda N}$ (queremos que Poissons(1) ocorram antes de Poissons(λ)). Combinando este fato com o Lema 4.2.4 teremos que

$$\begin{aligned} & P(V < \tau^I < \infty \mid |\xi_V^{I,K}| > 0, |\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) \\ &= P(\tau^I < \infty \mid |\xi_V^{I,K}| > 0, |\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) \\ &\geq P(\text{Nenhum nascimento fora de } H, \tau_{\xi_U^{I,K}} < \infty \mid |\xi_V^{I,K}| > 0, |\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) \\ &\geq e^{-\lambda N} (2d\lambda + 1)^{-M}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} P(V < \tau^I < \infty) &\geq P(V < \tau^I < \infty \mid |\xi_V^{I,K}| > 0, |\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) \\ &\quad \times P(|\xi_V^{I,K}| > 0, |\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N), \end{aligned}$$

segue da escolha de V que

$$\delta(2d\lambda + 1)^{-M} e^{-\lambda N} \geq (2d\lambda + 1)^{-M} e^{-\lambda N} P(|\xi_V^{I,K}| > 0, |\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N),$$

que implica

$$P(|\xi_V^{I,K}| > 0, |\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) \leq \delta.$$

Pelos Lemas 4.2.1 e 4.2.6 temos

$$\begin{aligned} P(|\xi_V^{I,K}| > 0) &\geq P(|\xi_V^{I,K}| > 0 \mid \xi_t^I \subset [-K, K]^d, \forall t \leq V) P(\xi_t^I \subset [-K, K]^d, \forall t \leq V) \\ &= P(|\xi_V^I| > 0 \mid \xi_t^I \subset [-K, K]^d, \forall t \leq V) P(\xi_t^I \subset [-K, K]^d, \forall t \leq V) \\ &= P(|\xi_V^I| > 0) P(\xi_t^I \subset [-K, K]^d, \forall t \leq V) \\ &\geq (1 - \delta)(1 - \delta) = 1 - 2\delta + \delta^2 > 1 - 2\delta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(|\xi_V^{I,K}| = 0) \leq 2\delta.$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned} \delta &\geq P(|\xi_V^{I,K}| > 0, |\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) \\ &= P(|\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) - P(|\xi_V^{I,K}| = 0, |\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) \\ &\geq P(|\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) - P(|\xi_V^{I,K}| = 0) \\ &\geq P(|\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) - 2\delta. \end{aligned}$$

Logo, $P(|\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) \leq 3\delta$.

Usando isto e a desigualdade FKG, teremos

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= 3\delta \geq P(|\xi_U^{I,K}| \leq M, \mu_U \leq N) \geq P(|\xi_U^{I,K}| \leq M)P(\mu_U \leq N) \\ &= \gamma P(\mu_U \leq N). \end{aligned}$$

Logo, $P(\mu_U \leq N) \leq \gamma$. Daí

$$P(\mu_U \geq N) \geq P(\mu_U \geq N+1) = 1 - P(\mu_U \leq N) \geq 1 - \gamma,$$

que conclui a prova da segunda parte da Proposição 4.2.1. $\square$

4.3 Construção Gráfica

Nosso objetivo nesta seção será montar um caminho de caixas que nos permita provar a Proposição 4.1.1. Usando a Proposição 4.2.1 juntamente com os Lemas 4.2.2 e 4.2.3 temos que, dada uma cópia de I infectada, poderemos conseguir pelo menos um cubo $x + I$ no topo da caixa $H \times [0, U]$ e pelo menos uma cópia de I na lateral da caixa com uma probabilidade alta. Agora vamos querer encontrar cópias de I em determinadas subregiões do topo e da lateral da caixa e para isto usamos uma generalização do *truque da raiz quadrada*.

Lema 4.3.1 Suponha que A_i , $i \in C$, sejam eventos crescentes e equiprováveis e $|C|$ o número de eventos. Então,

$$P(A_i) \geq 1 - [1 - P(\bigcup_i A_i)]^{1/|C|}.$$

PROVA: Usando FKG temos

$$1 - P(\bigcup_i A_i) = P(\bigcap_i A_i^c) \geq \prod_i P(A_i^c) = [1 - P(A_1)]^{|C|}. \square$$

Combinando isto com a Proposição 4.2.1 temos:

Lema 4.3.2 Seja $D = 2^d d$. Se $M, N < \infty$ então K e U podem ser escolhidos tais que

$$|\xi_U^{I,K} \cap \{x_i \geq 0, \forall i\}| \geq \frac{M}{2^d}$$

e

$$\frac{N}{D} \leq \bar{\mu}_U = \int_0^U |\xi_t^{I,K} \cap \partial H \cap \{x_1 = K, x_i \geq 0, i > 1\}| dt ,$$

cada destes com probabilidade $\geq 1 - \gamma^{1/D}$.

PROVA: Seja $\nu \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$ e $O_\nu = \{x_i \geq 0, i \in \nu \text{ e } x_j \leq 0, j \notin \nu\}$ a região definida por ν . Como para cada coordenada podemos ter 2 sinais, teremos que há $|C| = 2^d$ regiões O_ν e com isso definimos os eventos $A_\nu = \{|\xi_U^{I,K} \cap O_\nu| \geq M/2^d\}$, $\nu \subseteq \{1, 2, \dots, d\}$. Notemos agora que se $|\xi_U^{I,K}| \geq M$, então ocorreu pelo menos um A_ν , logo

$$1 - \gamma = P(|\xi_U^{I,K}| \geq M) \leq P(\bigcup_\nu A_\nu).$$

Usando o Lema 4.3.1 teremos

$$P(|\xi_U^{I,K} \cap \{x_i \geq 0, \forall i\}| \geq M/2^d) \geq 1 - [1 - P(\bigcup_\nu A_\nu)]^{1/|C|} \geq 1 - \gamma^{1/|C|} \geq 1 - \gamma^{1/D}.$$

Para provar a outra parte fazemos a mesma coisa, mas agora temos $|C| = d2^d$ eventos (pois para cada coordenada temos $x_j = \pm K$ e 2^{d-1} escolhas de sinais para as outras coordenadas e assim $d \cdot 2 \cdot 2^{d-1}$ regiões)

$$A_{\nu,i}^{\oplus} = \{\bar{\mu}_U^{\nu} = \int_0^U |\xi_t^{I,K} \cap \partial H \cap \{x_i = \oplus K; x_j \geq 0, j \in \nu; x_K \leq 0, K \notin \nu\}| dt \geq \frac{N}{D}\}$$

onde $\oplus \in \{-, +\}$. Notemos que se $\mu_U \geq N$ então ocorreu algum $A_{\nu,i}^{\oplus}$, logo

$$1 - \gamma \leq P(\mu_U \geq N) \leq P\left(\bigcup_{i,\nu,\oplus} A_{\nu,i}^{\oplus}\right)$$

e pelo Lema 4.3.1

$$P(\bar{\mu}_U \geq \frac{N}{D}) \geq 1 - [1 - P(\bigcup_{i,\nu,\oplus} A_{\nu,i}^{\oplus})]^{1/D} \geq 1 - \gamma^{1/D}. \square$$

O Lema 4.3.2 nos permite ter cópias infectadas de I no topo ou lado de $H \times [0, U]$ em qualquer ortante que desejarmos e com isso temos o lema seguinte que conclui a construção do elemento básico que usaremos para construir caminhos.

Lema 4.3.3 *Seja $G = [K + J, 2K + J] \times [0, 2K]^{d-1} \times [U + 1, 2(U + 1)]$, então*

$$P(\xi_t^{I,2K+2J} \supset x + I \text{ para algum } (x, t) \in G) \geq 1 - 4\gamma^{1/D}.$$

PROVA: Seja $\sigma = \inf\{t : \xi_t^{I,K+2J} \supset y + I \text{ para algum } y \text{ com } y_1 = K + J \text{ e } y_j \geq 0, j > 1\}$. Pelos Lemas 4.2.2 e 4.3.2 temos que $P(\sigma \leq U + 1) \geq 1 - 2\gamma^{1/D}$. Para vermos isto consideremos E o evento do Lema 4.2.2 (isto é, algum ponto y da lateral da caixa dá origem a uma cópia infectada de I em $y + e_1$) e F o evento do Lema 4.3.2 (isto é, em uma determinada face da lateral da caixa há muitos sítios infectados). Temos, portanto, $P(E) \geq 1 - \gamma$ e $P(F) \geq 1 - \gamma^{1/D}$. Daí

$$\begin{aligned} P(\sigma \leq U + 1) &\geq P(E \cap F) = P(F) - P(E^c \cap F) \geq P(F) - P(E^c) \\ &\geq 1 - \gamma^{1/D} - \gamma \geq 1 - 2\gamma^{1/D}. \end{aligned}$$

Agora aplicamos os Lemas 4.2.1 e 4.3.2 ao processo que começa com $y + I$ infectado no tempo σ e sem nascimentos fora de $y + [-K, K]^d$ e assim teremos

Figura 4.2: Ilustração do evento no Lema 4.3.3 em $d = 1$

$$\begin{aligned}
& P(\xi_t^{I, 2K+2J} \supset x + I \text{ para algum } (x, t) \in G) \\
& \geq P(\sigma \leq U + 1, |\xi_{U+\sigma}^{y+I, K}| \geq M, \xi_{U+\sigma+1}^{y+I, K} \supset x + I \text{ para algum } (x, t) \in G) \\
& = P(\sigma \leq U + 1)P(|\xi_{U+\sigma}^{y+I, K}| \geq M \mid \sigma \leq U + 1) \\
& \quad P(\xi_{U+\sigma+1}^{y+I, K} \supset x + I \text{ para algum } (x, t) \in G \mid \sigma \leq U + 1, |\xi_{U+\sigma}^{y+I, K}| \geq M) \\
& \geq (1 - 2\gamma^{1/D})(1 - \gamma)(1 - \gamma) \geq (1 - 2\gamma^{1/D})(1 - 2\gamma) \geq (1 - 2\gamma^{1/D})^2 \\
& \geq 1 - 4\gamma^{1/D}. \square
\end{aligned}$$

Notemos que no Lema 4.3.3 a região G é adjacente a uma determinada região da caixa. A extensão às outras regiões é direta.

Nossa construção nos permite colocar uma caixa na lateral de outra caixa, formando uma caixa-conjunta. Esta será nosso elemento básico na construção que se segue, a cada passo vamos colocando um elemento básico sobre o outro.

Com a extensão do Lema 4.3.3 a outras regiões G , o elemento básico toma várias formas e isto nos possibilitará construir caminhos formados por elementos básicos seguindo para a direção que desejarmos. Isto é o que precisamos para a prova da Proposição 4.1.1.

4.4 Prova da Proposição 4.1.1

Consideremos $L = 8K$ e $T = 2(U + 1)$. Notemos que T é a altura máxima que nosso elemento básico pode alcançar. A altura mínima é $T/2$. Consideremos $(3L, 0, \dots, 0)$ como nosso *alvo* e o usamos para escolher a próxima direção para nos movermos. Por exemplo, se o centro do cubo (da base do elemento básico) está em x com $x_1 < 3L$, $x_2 > 0$ e $x_3 < 0$, nós escolhemos pôr o centro do próximo elemento básico em $\bar{x} \in x + [K + J, 2K + J] \times [-2K, 0] \times [0, 2K]$. Se $x_1 < 3L$ então colocamos o centro em $x + [-2K - J, -K - J] \times [-2K, 0] \times [0, 2K]$. Como $J \leq K$ então $[K + J, 2K + J] \subset [K, 3K]$. Assim, cada movimento muda x_1 por uma quantidade em $[K, 3K]$ e, como dito acima, usa entre $T/2$ e T unidades do tempo. Como, por hipótese, $(0, 0)$ está molhado então temos que $x_1 \in [-2L, 2L] = [-16K, 16K]$ (em algum tempo $\leq T$) e assim para chegarmos a $x_1 = 3L = 24K$ precisamos andar no máximo $16K + 24K = 40K$. Como em cada passo andamos pelo menos K , então após no máximo 40 passos chegamos ao alvo. Como a cada passo gastamos no máximo um tempo T então ao tempo $40T$ estaremos em $x_1 \geq 3L$.

No início da construção o centro do cubo tem $|x_i| \leq 2L = 16K$ para $i \geq 2$. Se $x_i \geq 0$ então o próximo centro terá $x_i \geq \bar{x}_i \geq -2K = -0.25L > -2L$, e se $x_i < 0$ teremos $\bar{x}_i \leq 2L$, logo sempre teremos $|x_i| \leq 2L$ para $i \geq 2$. Para a primeira coordenada do centro temos que ela é não decrescente até alcançar $3L$ e neste tempo teremos $3L \leq x_1 \leq 3L + 3K$ e, portanto, $|x_1 - 3L| \leq 3K$. Com isso temos que após x_1 alcançar $3L$ estaremos na região $[3L - 3K, 3L + 3K] \times [-2L, 2L]^d$. Como a construção ao início tem o centro em $[-2L, 2L]^d$, então em todo tempo antes de alcançar $3L$ teremos o centro em $[-2L, 3L] \times [-2L, 2L]^{d-1}$.

Para ver porque escolhemos $L = 8K$, observamos que quando o centro do cubo está em x , nenhum nascimento é permitido fora de $x + [-(2K + 2J), 2K + 2J]^d$, mas $J \leq K$ assim antes de x_1 alcançar $3L$ não poderemos ter nascimentos fora de

$$\begin{aligned} & [3L - 3K - (2K + 2J), 3L + 3K + (2K + 2J)] \times [-2L - (2K + 2J), 2L + (2K + 2J)]^{d-1} \\ & \subset [3L - 7K, 3L + 7K] \times [-4L, 4L]^{d-1} \subset [3L - 8K, 3L + 8K] \times [-4L, 4L]^{d-1} \\ & = [2L, 4L] \times [-4L, 4L]^{d-1}, \end{aligned}$$

onde esta última igualdade é possível pela escolha de L . Após x_1 alcançar $3L$ não poderemos ter nascimentos fora de

$$\begin{aligned} & [-2L - (2K + 2J), 3L + (2K + 2J)] \times [-2L - (2K + 2J), 2L + (2K + 2J)]^{d-1} \\ & \subset [-2L - 4K, 3L + 4K] \times [-4L, 4L]^{d-1}. \end{aligned}$$

Com os argumentos acima temos a segurança de que nossa construção só depende dos nascimentos em $[-4L, 4L]^d$ e, portanto, podemos desconsiderar nascimentos fora desta região. Como x_1 alcança $3L$ no máximo ao tempo $40T$, então podemos manter o centro do cubo na região

$$R_{0,0} = ([-4L, 4L]^d \times [0, 50T]) \cup (\{[-4L, -2L] \cup [2L, 4L]\} \times [-4L, 4L]^{d-1} \times [50T, 51T]).$$

Isso significa que vamos parar a construção quando chegarmos a $50T$ (lembramos que alcançaremos $3L$ no máximo em $40T$). Como em cada passo andamos no mínimo um tempo $T/2$ então para chegar ao tempo $50T$ precisaremos de, no máximo, 100 passos. Com isso, se γ for escolhido suficientemente pequeno então com probabilidade muito alta conseguiremos montar os caminhos necessários para provar que $(-1,1)$ e $(1,1) \in \mathcal{I}$ estarão molhados. Pelo Lema 4.3.3 temos que, dada uma cópia de I , a probabilidade de que um elemento básico seja bem sucedido (i.e., contenha uma cópia de I no topo) é $\geq 1 - 4\gamma^{1/D}$. Como precisamos de no máximo 100 elementos básicos, a probabilidade de que $(1,1)$ esteja molhado é $\geq (1 - 4\gamma^{1/D})^{100}$ e usando $4\gamma^{1/D} = \frac{\varepsilon}{100}$ temos que $(1 - 4\gamma^{1/D})^{100} = (1 - \frac{\varepsilon}{100})^{100} > 1 - \varepsilon$. $\square$

Nosso próximo objetivo será usar o conjunto de sítios molhados para definir os sítios do modelo de percolação orientada.

Proposição 4.4.1 *Dizemos que um sítio $(m,n) \in \mathcal{I}$ está molhado se $\xi_t^I \supset x + I$ para algum $(x,t) \in B_{m,n}$. Podemos definir variáveis aleatórias independentes $\eta(z)$ com $P(\eta(z) = 1) = 1 - \varepsilon$ e tal que o conjunto dos sítios molhados contém o conglomerado da origem C_0 do processo de percolação orientada gerada por η .*

PROVA:

Seja ζ o processo dos sítios molhados definidos pelos $B_{m,n}$, isto é, $\zeta(m,n) = 1$ se $B_{m,n}$ está molhado. Lembremos agora que em percolação orientada temos apenas os sítios de $\mathbb{L}^* = \{(m,n) : |m| \leq n\}$ e por este motivo precisamos definir apenas os $\eta(m,n)$ para $(m,n) \in \mathbb{L}^*$. A prova é feita por indução. Consideremos que $\zeta(0,0) = \eta(0,0) = 1$ e suponhamos que $\eta(m,n)$ já tenha sido definida para $k < n$; então para estes sítios temos que $\zeta(m,n) \geq \eta(m,n)$. Se nenhum dos sítios $(m-1, n-1)$ e $(m+1, n-1)$ estiverem molhados (e portanto não estarão em C_0) então lançamos uma moeda com probabilidade de sucesso igual a $1 - \varepsilon$ para definir $\tilde{\eta}(m,n)$ (este caso não é de grande interesse, mas precisa ser definido). Se um dos sítios $(m-1, n-1)$ ou $(m+1, n-1)$ estiver molhado, digamos $(m-1, n-1)$, então haverá pelo menos uma cópia de I em $B_{m-1, n-1}$ que poderemos usar como ponto de partida para a construção em $R_{j,k} = (4Lj, 50Tk) + R_{0,0}$; $j = m-1, k = n-1$. Se ambos $(m-1, n-1)$ e $(m+1, n-1)$ estiverem molhados, escolheremos a cópia de I que ocorrer por último na escala de tempo. Seja $\tilde{\eta}(m,n) = 1$ se a construção for bem sucedida começando com o cubo $x + I$ escolhido.

A região escura deve ser excluída de $[-4L, 4L]^d \times [0, 51T]$.

Figura 4.3: Ilustração das regiões $R_{j,k}$

Como as regiões $(4Lm, 50Tn) + [-4L, 4L]^d \times \mathbb{R}_+$ são disjuntas, então condicionando em tudo o que aconteceu em $R_{j,k}$ até o aparecimento do cubo $x + I$ escolhido, temos que $\tilde{\eta}$ é (condicionalmente) independente dos anteriores. Notemos que para conseguir esta independência precisamos usar $R_{0,0}$ e não $[-4L, 4L]^d \times [0, 51T]$, pois a região $(-2L, 2L)^d \times (50T, 51T]$ pode ser usada para a construção em $R_{-1,1}$ e $R_{1,1}$; por isso precisamos excluí-la de $[-4L, 4L]^d \times [0, 51T]$.

Isso nos dá que $P(\tilde{\eta}(z) = 1) \geq 1 - \varepsilon$ para $z \in C_0$ e $P(\tilde{\eta}(z) = 1) = 1 - \varepsilon$ para $z \notin C_0$. Agora definimos $\eta(z)$, $z \in \mathbb{Z}^*$ fazendo lançamentos independentes de uma moeda de forma que $P(\eta(z) = 1) = 1 - \varepsilon$. Assim, fazendo um acoplamento entre $\tilde{\eta}$ e η , teremos

$$\zeta(z) \geq \tilde{\eta}(z) \geq \eta(z), \quad \text{para } z \in C_0. \square$$

4.5 Consequências da Construção

Na seção anterior provamos a Proposição 4.4.1 que nos garante o Lema 1.1. Com isso estamos prontos para provar o Teorema 1.4.

PROVA DO TEOREMA 1.4: Suponha que $P_\lambda(\Omega_\infty) > 0$ com $\lambda < \lambda_c$. Seja $\varepsilon = 0.01$ e escolhamos J , L e T (funções de ε) de forma que a Proposição 4.1.1 esteja satisfeita. Construamos a representação gráfica para a taxa λ escolhendo as setas que devem permanecer com probabilidade λ/λ_c . Se λ for suficientemente próximo de λ_c ainda teremos que o evento da Proposição 4.1.1 terá probabilidade $> 80/81$ pois o número de setas na região $[-4L, 4L]^d \times [0, 51T]$ é finito e portanto a probabilidade na Proposição 4.1.1 é uma função contínua de λ . Deste modo teremos $P(\Lambda_\infty) > 0$. Por construção temos que o Processo de Contato com parâmetro λ domina percolação orientada com $P(\Lambda_\infty) > 0$, logo $P_\lambda(\Omega_\infty) > 0$ contradizendo o fato que $\lambda < \lambda_c$ e isto implica que $P_{\lambda_c}(\Omega_\infty) = 0$.

Uma outra consequência imediata da construção é o

Teorema 4.5.1

$$\lambda_c(\mathbb{Z}^d) = \lim_{M \rightarrow \infty} \lambda_c(\mathbb{Z} \times [-M, M]^{d-1}).$$

PROVA: Seja $\lambda_c^M = \lambda_c(\mathbb{Z} \times [-M, M]^{d-1})$ e $\lambda_c^\infty = \lim_{M \rightarrow \infty} \lambda_c^M$. A sequência λ_c^M é claramente decrescente, logo $\lambda_c(\mathbb{Z}^d) = \lambda_c \leq \lambda_c^\infty$. Para provar o outro lado fazemos $\lambda > \lambda_c$ e notamos que na construção inteira nenhum nascimento é permitido fora de $[-M, M]^d$ para $M = 4L$, portanto não é permitido fora de $\mathbb{Z} \times [-M, M]^{d-1}$. Escolhendo ε bem pequeno teremos que

$\lambda > \lambda_c^M$ e como $\lambda_c^M \geq \lambda_c^\infty$ teremos que $\lambda > \lambda_c^\infty$. Como $\lambda > \lambda_c$ temos que $\lambda_c^\infty \leq \lambda_c$, que conclui a prova. $\square$

Após usarmos a construção para provar

$$Ce^{-bt} \geq P(t < \tau^0 < \infty) = P(0 \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d}) - P(0 \in \xi_\infty^{\mathbb{Z}^d}),$$

podemos fazer uma adaptação à técnica de Durrett (1984-Seção 13) para obter o seguinte resultado:

Teorema 4.5.2 (*LEI FORTE DOS GRANDES NÚMEROS*). *Se $\lambda > \lambda_c$, então*

$$\frac{|\xi_t^0|}{t^d} \longrightarrow \rho |G| 1_{\Omega_\infty} \text{ quase certamente, quando } t \rightarrow \infty,$$

onde $\rho = P(0 \in \xi_\infty^{\mathbb{Z}^d})$ e para algum G , com $|G| = \text{volume de } G$.

4.6 Prova dos Teoremas da Forma e da Convergência Completa

Nesta seção, finalmente provaremos estes dois teoremas. A primeira coisa a fazer é identificar o que precisamos mostrar. Para o Teorema da Convergência Completa será suficiente usar um resultado de Griffeath (1978).

Lema 4.6.1 *Seja $\tilde{\xi}_t^B$ uma cópia independente do Processo de Contato ξ_t^A . Se*

$$(a) \ P(\xi_t^A \cap \tilde{\xi}_t^B = \emptyset, \xi_t^A \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty$$

então teremos a conclusão do Teorema da Convergência Completa:

$$P(\xi_{2t}^A \cap B \neq \emptyset) \longrightarrow P(\tau^A = \infty)P(\xi_\infty^{\mathbb{Z}^d} \cap B \neq \emptyset).$$

PROVA: Temos $\forall B \subset \mathbb{Z}^d$

$$P(\xi_t^A \cap B \neq \emptyset) = P(\tau^A < \infty)P(\xi_t^A \cap B \neq \emptyset \mid \tau^A < \infty) + P(\tau^A = \infty)P(\xi_t^A \cap B \neq \emptyset \mid \tau^A = \infty)$$

mas, sob $\{\tau^A < \infty\}$, temos que $\xi_t^A = \emptyset, \forall t > \tau^A$. Isso nos dá a primeira parte de (1.6). Quando $\{\tau^A = \infty\}$ temos que

$$\{\xi_{2t}^A \cap B \neq \emptyset\} = \{\xi_t^A \cap \hat{\xi}_t^{(B,2t)} \neq \emptyset\} \stackrel{d}{=} \{\xi_t^A \cap \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset\} \subset \{\xi_t^A \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset\},$$

onde a primeira igualdade é devida à dualidade, a segunda é equivalência em distribuição e $\hat{\xi}_t^{(B,2t)}$ representa o processo reverso (com relação à escala de tempo) começando no tempo $2t$ com infecção inicial B . Portanto,

$$\begin{aligned} P(\xi_{2t}^A \cap B \neq \emptyset) &= P(\xi_t^A \cap \hat{\xi}_t^{(B,2t)} \neq \emptyset) = P(\xi_t^A \cap \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset) \\ &= P(\xi_t^A \cap \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset, \xi_t^A \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset) \\ &= P(\xi_t^A \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset) - P(\xi_t^A \cap \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset, \xi_t^A \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset) \end{aligned}$$

mas, por independência

$$P(\xi_t^A \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset) = P(\xi_t^A \neq \emptyset)P(\tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset) = P(\tau^A > t)P(\tau^B > t).$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$ e observando a hipótese temos que

$$P(\xi_{2t}^A \cap B \neq \emptyset) \longrightarrow P(\tau^A = \infty)P(\tau^B = \infty) \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Agora se fizermos $A = \mathbb{Z}^d$ na relação $P(\xi_t^A \cap B \neq \emptyset) = P(\xi_t^B \cap A \neq \emptyset)$ teremos

$$P(\xi_t^{\mathbb{Z}^d} \cap B \neq \emptyset) = P(\xi_t^B \neq \emptyset) = P(\tau^B > t),$$

e no limite $t \rightarrow \infty$ obtemos $P(\tau^B = \infty) = P(\xi_\infty^{\mathbb{Z}^d} \cap B \neq \emptyset)$. Logo

$$P(\xi_{2t}^A \cap B \neq \emptyset) \longrightarrow P(\tau^A = \infty)P(\xi_\infty^{\mathbb{Z}^d} \cap B \neq \emptyset) \text{ quando } t \rightarrow \infty. \square$$

Observação 4.2 *Notemos que*

$$A' \supseteq A \Rightarrow \xi_{2t}^{A'} \supseteq \xi_{2t}^A \Rightarrow \xi_{2t}^{A'} \cap B \supseteq \xi_{2t}^A \cap B \Rightarrow \{\xi_{2t}^{A'} \cap B \neq \emptyset\} \supseteq \{\xi_{2t}^A \cap B \neq \emptyset\}.$$

Logo $P(\xi_{2t}^{A'} \cap B \neq \emptyset) \geq P(\xi_{2t}^A \cap B \neq \emptyset)$ e portanto $P(\xi_{2t}^A \cap B \neq \emptyset)$ é uma função crescente em A e limitada por $P(\xi_{2t}^{\mathbb{Z}^d} \cap B \neq \emptyset)$. Então é suficiente provar o Lema 4.6.1 (e portanto o Teorema da Convergência Completa) para conjuntos finitos A .

O Teorema da Forma será provado checando as hipóteses de Durrett & Griffeath (1982), que estão traduzidas no seguinte teorema:

Teorema 4.6.1 *Seja $t(x) = \inf\{t : x \in \xi_t^0\}$. Suponhamos que existam constantes a, b e $C \in (0, \infty)$ tais que*

$$(b) \ P(t < \tau^0 < \infty) \leq Ce^{-bt}$$

$$(c) \ P(t(x) > t, \tau^0 = \infty) \leq Ce^{-bt} \text{ para } x : \|x\| < at$$

então existe um conjunto convexo G tal que se $w \in \{\tau^0 = \infty\}$ e $\varepsilon > 0$ dado, teremos

$$(1 - \varepsilon)tG \subseteq \overline{H}_t \subseteq (1 + \varepsilon)tG \quad \forall t \geq t_0(\varepsilon, w).$$

Se adicionalmente tivermos

$$(d) \ P(x \notin \overline{K}_t, \tau^0 = \infty) \leq Ce^{-bt} \text{ para } x : \|x\| < at,$$

então para $w \in \{\tau^0 = \infty\}$ e $\varepsilon > 0$ dado teremos

$$(1 - \varepsilon)tG \subseteq \overline{H}_t \cap \overline{K}_t \subseteq (1 + \varepsilon)tG \quad \forall t \geq t_0(\varepsilon, w).$$

Portanto, para provarmos os Teoremas da Convergência Completa e da Forma é suficiente provar (a), (b), (c) e (d).

A razão de estarmos tratando os dois teoremas em paralelo é que (d) é implicado por $P(\xi_{t/2}^0 \cap \tilde{\xi}_{t/2}^x \neq \emptyset, \xi_{t/2}^0 \neq \emptyset, \tilde{\xi}_{t/2}^x \neq \emptyset) \leq Ce^{-bt}$ para $x : \|x\| < at$. Para ver isto basta provarmos que

$$\{x \notin \overline{K}_t, \tau^0 = \infty\} \subseteq \{\xi_{t/2}^0 \cap \tilde{\xi}_{t/2}^x = \emptyset, \xi_{t/2}^0 \neq \emptyset, \tilde{\xi}_{t/2}^x \neq \emptyset\}.$$

Mas, $\{x \notin \overline{K}_t, \tau^0 = \infty\} = \{x \notin \xi_t^0 \cup (\xi_t^{\mathbb{Z}^d})^c, \tau^0 = \infty\} = \{x \notin \xi_t^0, x \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d}, \tau^0 = \infty\}$. Usando dualidade temos que

$$\begin{aligned} \{x \notin \xi_t^0\} &\Rightarrow \{\xi_{t/2}^0 \cap \hat{\xi}_{t/2}^{(x,t)} = \emptyset\} \stackrel{d}{=} \{\xi_{t/2}^0 \cap \tilde{\xi}_{t/2}^x = \emptyset\}, \\ \{x \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d}\} &\Rightarrow \{\hat{\xi}_{t/2}^{(x,t)} \neq \emptyset\} \stackrel{d}{=} \{\tilde{\xi}_t^x \neq \emptyset\} \Rightarrow \{\tilde{\xi}_{t/2}^x \neq \emptyset\} \\ \{\tau^0 = \infty\} &\Rightarrow \{\xi_{t/2}^0 \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\{x \in \overline{K}_t, \tau^0 = \infty\} = \{x \notin \xi_t^0, x \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d}, \tau^0 = \infty\} \subseteq \{\xi_{t/2}^0 \cap \tilde{\xi}_{t/2}^x = \emptyset, \xi_{t/2}^0 \neq \emptyset, \tilde{\xi}_{t/2}^x \neq \emptyset\}. \square$$

Para provar que estas condições são satisfeitas no Processo de Contato será usada a estrutura de sítios independentes definida na Seção 4.4. A primeira condição a ser provada será a (b), seguida por (a), (d) e (c), respectivamente. Consideremos então o modelo de percolação orientada de sítios independentes de densidade p . Sejam, para $d = 1$ (dimensão espacial),

C_0 : Conglomerado da origem;

$$W_n = \{m : (m, n) \in C_0\};$$

$$\Lambda_\infty = \{|C_0| = \infty\} = \{W_n \neq \emptyset, \forall n\};$$

$\rho(p) = Pr(\Lambda_\infty)$, onde Pr é a medida de probabilidade associada a subconjuntos de $\mathbb{L}$;

$$l_n = \inf W_n;$$

$$r_n = \sup W_n.$$

Para este modelo temos [ver Durrett(1984), Seções 3 e 13] que

$$\frac{r_n}{n} \rightarrow \alpha(p), \quad \text{e} \quad \frac{l_n}{n} \rightarrow -\alpha(p) \quad (4.1)$$

e

$$|W_n|/n \rightarrow \alpha(p)\rho(p) \text{ quase certamente sob } \Omega_\infty. \quad (4.2)$$

Agora, escolhemos ε_0 pequeno o suficiente de forma que se $p > 1 - \varepsilon_0$ então teremos

$$\alpha(p) > 0.99 \text{ e } \rho(p) > 0.99 \quad (4.3)$$

(Isto é possível porque $\lim_{p \rightarrow 1} \alpha(p) = \lim_{p \rightarrow 1} \rho(p) = 1$ – veja Durrett[1984-Seção 3].) Com isto temos que para n grande

$$|W_n|/n > (0.99)^2 \text{ para } p > 1 - \varepsilon_0.$$

Isto significa que no “instante” n (n grande), a proporção de sítios ocupados é superior a $(0.99)^2$, ou seja, muito alta. É importante ressaltar que o tamanho do intervalo $[l_n, r_n]$, para n grande, é aproximadamente $2\alpha(p)n$, pois

$$r_n - l_n = \left(\frac{r_n}{n} - \frac{l_n}{n} \right) n \simeq [\alpha(p) - (-\alpha(p))]n = 2\alpha(p)n$$

mas, o número de pontos de W_n é a metade do tamanho do intervalo, pois estamos considerando apenas os pontos (m, n) tais que $m + n$ é par, logo este número de pontos é aproximadamente $\alpha(p)n$. Com isto temos que W_n preenche quase todo o intervalo $[l_n, r_n]$.

Lembremos agora que cada um dos dois “ramos” (caminhos para $B(-1, 1)$ e $B(1, 1)$) da construção em $R_{0,0}$ é bem sucedido com probabilidade $\geq 1 - \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ temos que a construção toda em $R_{0,0}$ será bem sucedida com probabilidade $\geq (1 - \varepsilon)^2 \geq 1 - \varepsilon_0$. Com isto, seja então $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ e escolho J, L e T tais que a Proposição 4.1.1 da Seção 4.1 esteja satisfeita. Precisamos agora achar uma cópia ocupada de I , digamos $y^* + I$ com $y^* \in \mathbb{Z}^d$, em que nossa construção da rede renormalizada transladada por y^* funcione, isto é, percole. Deste modo usaremos a Proposição 4.4.1 para obter o modelo de percolação orientada e então aplicaremos alguns resultados de Durrett (1984). Para isto, consideremos $I_z = 4Lz + I$ para cada $z \in \mathbb{Z}^d$. Existe um $\delta > 0$ tal que

$$P(\xi_1^x \supset I_z \text{ para algum } z) \geq \delta.$$

Primeiro vamos “olhar” o processo nos tempos $k = 1, 2, \dots$ para *tentar* encontrar um cópia infectada de I . Fixado um conjunto de infecção inicial A , diremos que houve um sucesso na k -ésima tentativa se “ $\xi_k^A = \emptyset$ ou $\xi_{k+1}^A \supset I_z$ para algum z ”. Então, como $\delta > 0$, após um número no máximo Geométrico (isto é, com distribuição Geométrica) de tentativas k teremos $\xi_k^A = \emptyset$ ou teremos encontrado um $I_z \subset \xi_{k+1}^A$. No primeiro caso, começamos novamente o processo com A infectado e olhamos o processo nos tempos $k + 1, k + 2, \dots$. No segundo caso teremos uma cópia ocupada de I e assim tentamos a construção começando por $z + I$ para obter a rede renormalizada. Se este processo percolar, então ξ^A sobrevive; se não percolar esperamos até $W_n = 0$ e repetimos tudo de novo, isto é, olhamos para uma nova cópia ocupada de I para tentar novamente. Em cada repetição (e na primeira vez também) há uma probabilidade positiva de dar certo, isto é, acharmos uma construção cuja rede renormalizada percola. Então, após um

número Geométrico de repetições nós teremos um processo de sítios que percola originado por algum I_{y^*} . Se denotarmos por σ_0 o tempo necessário para acharmos este I_{y^*} , então, fazendo exatamente o que foi feito em Durrett (1984) temos que

$$P(\sigma_0 > t) \leq C_1 e^{-b_1 t}. \quad (4.4)$$

Notemos agora que no instante σ_0 podemos ter

$$\xi_{\sigma_0}^A = \emptyset \Rightarrow \sigma_0 > \tau^A \quad \text{ou} \quad \tau^A = \infty. \quad (4.5)$$

O segundo caso ocorre quando o processo de sítios percola, que significa que o Processo de Contato sobrevive. Portanto,

$$\begin{aligned} P(t < \tau^A < \infty) &= P(t < \tau^A < \infty, \sigma_0 > t) + P(t < \tau^A < \infty, \sigma_0 \leq t) \\ &\leq P(\sigma_0 > t) + P(t < \tau^A < \infty, \sigma_0 \leq t) \\ &= P(\sigma_0 > t) \leq C_1 e^{-b_1 t} \end{aligned}$$

com constantes independentes de A e a segunda igualdade sendo justificada pelo fato que a segunda parcela da soma no lado direito da igualdade é igual a $P(\sigma_0 \leq t < \tau^A < \infty) = 0$, por (4.5). Com isso provamos (b).

Para ver que o ponto y^* não está muito longe da origem, consideremos ζ_t^A o Processo de Contato sem mortes começando com A infectado e

$$t(y^*) = \inf\{t : y^* \in \zeta_t^A\},$$

o primeiro instante em que y^* é infectado. Com isso podemos escolher um valor de a suficientemente grande de modo que

$$P(|y^*| > at) \leq P(t(y^*) > t) \leq P(\sigma_0 > t) \leq C_1 e^{-b_1 t}.$$

Notemos que um valor de a muito pequeno não satisfaz a primeira desigualdade. Podemos observar na Figura 4.3 que se $a = a_1$, a relação acima pode não ser satisfeita se $y^* = y_1$; com $a = a_2$ teremos mais segurança da validade de tal relação. Para tomarmos a conveniente,

Figura 4.4: Escolha do valor de a

consideremos a caixa $B_{0,0}$, que tem taxa de crescimento $2L/T$ e com bastante folga tomamos $a = 1000L/T$.

Após encontrarmos o ponto y^* a partir do qual o processo de sítios molhados percola, iremos estender nosso conglomerado de sítios molhados nas d dimensões (que identificaremos com *direções*), uma de cada vez, usando um certo intervalo de tempo para cada direção. Para isto, seja $\mathbb{I}_j$ a estrutura de percolação de sítios na j -ésima direção, $j = 1, \dots, d$

$$\mathbb{I}_j = \{x \in \mathbb{Z}^d : x_i = 0 \text{ para } i \neq j, x_j + n \text{ é par e } |x_j| \leq n, \forall n \in \mathbb{Z}_+\}$$

$$W_n^j = \{x \in \mathbb{I}_j : x \text{ está molhado ao tempo } n\}$$

Nosso objetivo principal nesta etapa será construir uma região onde os dois processos de sítios originados por ξ_t^A e $\tilde{\xi}_t^B$ se encontram.

Seja $\nu = \lfloor t/((d+1)50T) \rfloor$ onde $\lfloor x \rfloor$ = maior inteiro par menor ou igual a x . Estamos tomando um tempo ν par porque nestes tempos o conjunto dos sítios molhados está contido em $2\mathbb{Z}$, e assim toda vez que formos recomeçar o processo em outra direção estaremos começando de sítios pares. Isto nos dá um certo controle sobre o processo. Para as direções 1 a $d-1$ desenvolveremos o processo de sítios por ν unidades de tempo e o fato de dividirmos por $d+1$ nos garante que estamos deixando uma quantidade de tempo “considerável” para desenvolvermos o processo na d -ésima direção. Tendo definido ν , desenvolveremos nosso processo de percolação de sítios na 1ª direção, isto é, em $y^* + \mathbb{I}_1$ por ν unidades de tempo,

e tomaremos cada sítio $x \in W_\nu^1$ como novas origens para começar um novo processo de percolação de sítios em $x + \mathbb{Z}_2$. No início do desenvolvimento na 1ª direção temos apenas um sítio. No final da 1ª direção (ié, em W_ν^1) teremos, por (4.2), pelo menos $\nu\alpha\rho > (0.99)^2\nu$ sítios molhados. Cada destes será uma origem bem sucedida (ié, que percola) com probabilidade ρ e portanto teremos pelo menos $(0.99)^2\nu \cdot 0.99 = (0.99)^3\nu$ origens bem sucedidas ao final da 1ª direção. Desenvolvemos agora os processos de percolação de sítios na segunda direção usando cada origem bem sucedida do final da primeira direção. De modo análogo à primeira direção, teremos pelo menos $(0.99)^3\nu \cdot (0.99)^2\nu$ sítios molhados ao final da segunda direção, dos quais pelo menos $(0.99)^5\nu^2\rho > (0.99)^6\nu^2$ serão origens bem sucedidas. Procedendo deste modo para as $d-1$ primeiras direções teremos pelo menos $(0.99)^{3(d-1)} \cdot \nu^{d-1}$ sítios bem sucedidos ao final da $(d-1)$ -ésima direção, que serão novas origens para o desenvolvimento na d -ésima direção. Fazendo $\sigma = (d-1)50T\nu$, vemos que ainda nos resta $t - \sigma_0 - \sigma$ para desenvolver o processo na última direção. Seja então

$$\nu_d = [(t - \sigma_0 - \sigma)/50T] - 2.$$

(Estamos subtraindo o 2 para garantir que ainda vai restar uma certa quantidade de tempo, que será usada adiante.) Finalmente desenvolvemos nossos processos de percolação na d -ésima direção por ν_d unidades de tempo e então teremos pelo menos $(0.99)^{3(d-1)} \cdot \nu^{d-1} \cdot \rho\alpha\nu_d > (0.99)^{3d} \cdot \nu^{d-1} \cdot \nu_d$ ao final do desenvolvimento na d -ésima direção. Para vermos que ν_d não gera uma região muito “estreita”, notemos que

$$\begin{aligned} P(\nu_d < \nu) &\simeq P\left(\left[\frac{t - \sigma_0 - \sigma}{50T}\right] < \left[\frac{t}{(d+1)50T}\right]\right) \leq P\left(\frac{t - \sigma_0 - \sigma}{50T} < \frac{t}{(d+1)50T}\right) \\ &= P\left(\sigma_0 > t - \frac{t}{d+1} - \sigma\right) \leq P\left(\sigma_0 > t - \frac{t}{d+1} - 50T(d-1)\frac{t}{(d+1)50T}\right) \\ &= P\left(\sigma_0 > \left(1 - \frac{1}{d+1} - \frac{d-1}{d+1}\right)t\right) = P\left(\sigma_0 > \frac{t}{d+1}\right) \leq C_1 e^{-b_2 t}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue por (4.4). Isto nos diz que $\nu_d \geq \nu$ com probabilidade alta.

Podemos agora construir nossa região de interesse. Seja

$$V = [-\nu/2, \nu/2]^{d-1} \times [-\nu_d/2, \nu_d/2]$$

Logo, podemos reescrever a probabilidade em (4.6) em termos de uma variável aleatória $X(M, \beta)$, onde $M = |W|$ e com $(X(M, \beta)|M = m)$ tendo distribuição *Binomial* (m, β) . Assim,

$$\begin{aligned}
P(|W^A \cap \tilde{W}^B| < C_3 t^d \mid \xi_t^A \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset) &= P(X(M, \beta) < C_3 t^d \mid M \geq C_2 t^d) \\
&= \frac{P(X(M, \beta) < C_3 t^d, M \geq C_2 t^d)}{P(M \geq C_2 t^d)} = \sum_{m \geq C_2 t^d} \frac{P(X(M, \beta) < C_3 t^d \mid M = m) P(M = m)}{P(M \geq C_2 t^d)} \\
&= \sum_{m \geq C_2 t^d} \frac{P(\text{Bin}(m, \beta) < C_3 t^d) P(M = m)}{P(M \geq C_2 t^d)} \simeq \sum_{m \geq C_2 t^d} P\left(N(0, 1) < \frac{C_3 t^d - \beta m}{\sqrt{\beta(1 - \beta)m}}\right) \frac{P(M = m)}{P(M \geq C_2 t^d)} \\
&\leq \sum_{m \geq C_2 t^d} P\left(N(0, 1) < \frac{C_3 t^d - \beta C_2 t^d}{\sqrt{\beta(1 - \beta)C_2 t^d}}\right) \frac{P(M = m)}{P(M \geq C_2 t^d)} \\
&= P\left(N(0, 1) < \frac{(C_3 - \beta C_2)t^d}{\sqrt{\beta(1 - \beta)C_2 t^d}}\right) \sum_{m \geq C_2 t^d} \frac{P(M = m)}{P(M \geq C_2 t^d)} = P\left(N(0, 1) < \frac{(C_3 - \beta C_2)t^d}{\sqrt{\beta(1 - \beta)C_2 t^d}}\right) \\
&= P(N(0, 1) < C' t^{d/2}).
\end{aligned}$$

Observemos que nosso interesse está em valores pequenos de C_3 e tais valores tornam C' negativo. Daí,

$$\begin{aligned}
P(N(0, 1) < C' t^{d/2}) &= P(N(0, 1) > -C' t^{d/2}) \leq (-C' t^{d/2})^{-1} e^{-(-C' t^{d/2})^2/2} \\
&= C_4 t^{-d/2} e^{-\frac{(C')^2}{2} t^d} = C_4 t^{-d/2} e^{-b_3 t^d} \\
&\leq C_4 e^{-b_3 t^d},
\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue de Durrett(1989-pág 9) e a última segue porque estamos tomando t grande.

Fazendo $\sigma_d = 50T\nu_d$ temos da definição de ν_d que $t - (\sigma_0 + \sigma + \sigma_d) \in (100T, 200T)$. Dividindo o espaço em blocos disjuntos e dizendo que houve um sucesso (com probabilidade $\theta > 0$) quando os dois processos de contato se encontraram dentro de um bloco fixado, poderemos usar uma variável aleatória $Y(M, \theta)$, onde $M = |W^A \cap \tilde{W}^B|$ e com $(Y(M, \theta)|M = m)$ tendo distribuição *Binomial* (m, θ) para concluir que

$$\begin{aligned}
P(\xi_t^A \cap \tilde{\xi}_t^B = \emptyset \mid |W^A \cap \tilde{W}^B| \geq C_3 t^d) &= P(Y(M, \theta) = 0 \mid M \geq C_3 t^d) \\
&= \frac{P(Y(M, \theta) = 0, M \geq C_3 t^d)}{P(M \geq C_3 t^d)} = \sum_{m \geq C_3 t^d} \frac{P(Y(M, \theta) = 0 \mid M = m) P(M = m)}{P(M \geq C_3 t^d)} \\
&= \sum_{m \geq C_3 t^d} \frac{P(\text{Bin}(m, \theta) = 0) P(M = m)}{P(M \geq C_3 t^d)} = \sum_{m \geq C_3 t^d} \frac{(1 - \theta)^m P(M = m)}{P(M \geq C_3 t^d)} \\
&\leq (1 - \theta)^{C_3 t^d} \sum_{m \geq C_3 t^d} \frac{P(M = m)}{P(M \geq C_3 t^d)} = (1 - \theta)^{C_3 t^d} = e^{-b_4 t^d}. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Denotando por $D = \{\xi_t^A \cap \tilde{\xi}_t^B = \emptyset\}$, $E = \{\xi_t^A \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset\}$ e $F = \{|W^A \cap \tilde{W}^B| < C_3 t^d\}$, temos que

$$\begin{aligned}
P(\xi_t^A \cap \tilde{\xi}_t^B = \emptyset, \xi_t^A \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^B \neq \emptyset) &= P(D, E) = P(D, E, F) + P(D, E, F^c) \\
&\leq P(E, F) + P(D, F^c) \leq P(F \mid E) + P(D \mid F^c) \\
&\leq C_4 e^{-b_3 t^d} + e^{-b_4 t^d} \leq C_5 e^{-b_5 t^d} \leq C_5 e^{-b_5 t}.
\end{aligned}$$

onde a terceira desigualdade segue por (4.6) e (4.7). Concluimos com isso a prova de (a). Para provar (d) basta notarmos que (a) vale para o caso em que $A = \{0\}$ e $B = \{x\}$ desde que x não esteja muito longe da origem. Para garantir isto tomemos x tal que $\|x\| < 2at$ para algum a conveniente (razoavelmente pequeno). Para escolhermos o valor de a consideremos novamente a caixa $B_{0,0}$ com taxa de crescimento $2L/T$ e com bastante folga tomamos $a = \frac{2L}{T}/2000 = \frac{L}{1000T}$.

Para a prova de (c) precisamos modificar o primeiro passo da construção do processo $\tilde{\xi}_t^x$ da seguinte forma: começamos com x infectado ao tempo $2t$ e procuramos uma cópia infectada de I a partir da qual o processo percole. Se o processo morrer, digamos, ao tempo $s_1 < 2t$, recomeçamos novamente com x infectado ao tempo $2t - s_1$. Deste modo após um número Geométrico de tentativas encontraremos uma cópia infectada de I a partir da qual o processo de sítios percola e (d) nos garante que, no máximo, ao tempo $2t$ os dois processos ξ_t^0 e $\tilde{\xi}_t^x$ terão se encontrado com uma probabilidade alta. Portanto

$$P(2t < t(x) < \infty) \leq P(2t < t(x)) \leq P(\xi_t^0 \cap \tilde{\xi}_t^x = \emptyset, \xi_t^0 \neq \emptyset, \tilde{\xi}_t^x \neq \emptyset) \leq C_5 e^{-b_5 t},$$

para x com $\|x\| < 2at$ e $a = L/1000T$. $\square$

Considerações Finais

Vamos concluir nosso trabalho comentando sobre a dificuldade em estender as técnicas utilizadas nos Capítulos 2 e 3 para resolver o grande problema: a continuidade da probabilidade de percolação em $\mathbb{Z}^d$ na densidade crítica. Começaremos explicando por que a técnica utilizada no Capítulo 2 (ou melhor, sua extensão para d geral) não pode ser aplicada e, a princípio, nem modificada para resolver o problema. Em seguida, falaremos onde a técnica utilizada no Capítulo 3 apresenta problemas com relação à prova da continuidade de θ em p_c .

Notemos inicialmente que percolação no semi-espaco $\mathbb{H}$ implica percolação em $\mathbb{Z}^d$. Com isso, para provar a continuidade de $\theta(p)$ em p_c , será necessário e suficiente (veja Barsky, Grimmett & Newman (1989)) provar que se há percolação em $\mathbb{Z}^d$ então também há em $\mathbb{H}$. Ocorre que as construções utilizadas são baseadas em algumas hipóteses básicas: em Barsky, Grimmett & Newman (1989) foi utilizada a hipótese $\theta_{\mathcal{D}}(p) > 0$, onde $\mathcal{D} = \mathbb{Z}_+^d$, para construir o elemento básico usado na construção para provar que $\theta_{\mathcal{D}}(p_c(\mathcal{D})) = 0$. Esta hipótese pôde ser estendida para $\theta_{\mathbb{H}}(p) > 0$ em Barsky, Grimmett & Newman (1991) para construir o elemento básico usado na construção feita para provar que $\theta_{\mathbb{H}}(p_c(\mathbb{H})) = 0$, porém as complicações geométricas neste caso já passaram a ser de magnitudes muito grandes, quando comparadas com a hipótese $\theta_{\mathcal{D}}(p) > 0$. Isto ocorre porque $\theta_{\mathbb{H}}(p) > 0$ não implica que $\theta_{\mathcal{D}}(p) > 0$. Por isso foram necessárias duas construções diferentes para as duas provas: continuidade de $\theta_{\mathcal{D}}$ e de $\theta_{\mathbb{H}}$.

A prova da continuidade na densidade crítica é feita por absurdo. Para resolvermos o problema em $\mathbb{H}$, precisamos partir da hipótese $\theta_{\mathbb{H}}(p_c) > 0$ e então mostrar que podemos construir

um elemento básico a partir do qual possamos construir um processo que percola em $\mathbb{H}$. Por continuidade obtemos um processo que percola em $\mathbb{H}$ para $p = p_c - \delta$ para algum $\delta > 0$. Com isso, chegamos ao absurdo. Naturalmente, não podemos aplicar a mesma construção feita em Barsky, Grimmett & Newman (1991) para resolver o problema em $\mathbb{Z}^d$, pois a hipótese $\theta(p) > 0$ não implica, em princípio, que $\theta_H(p) > 0$ e portanto a hipótese $\theta(p) > 0$ não possibilita fazer a construção do elemento básico que tenha probabilidade próxima de um de estar “ocupado”. O elemento básico sob a hipótese $\theta(p) > 0$ deve ter a forma de um n -cubo, como o que foi feito no Capítulo 3. Entretanto, a falta de orientação deste elemento básico e a própria construção do mesmo, nos traz grandes complicações geométricas e eventos dependentes difíceis de controlar na hora de montar os caminhos para formar o super-sítio.

Vale a pena ressaltar um outro ponto de vista que nos dificulta fazer a construção de um conglomerado no semi-espço, quando a hipótese é $\theta(p) > 0$. Considerando $\mathbb{H}_+ = \mathbb{Z}^{d-1} \times \{0, 1, \dots\}$ e $\mathbb{H}_- = \mathbb{Z}^{d-1} \times \{\dots, -1, 0\}$, podemos escrever $\mathbb{Z}^d = \mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-$. Para a prova da Conjectura 1.1, deveremos mostrar que podemos construir um conglomerado infinito renormalizado em $\mathbb{H}_+$ que não dependa de sítios de $\mathbb{H}_-$, no sentido de que os sítios de $\mathbb{H}_-$ não sejam vitais para o conglomerado de $\mathbb{H}_+$. Ocorre que a hipótese $\theta(p) > 0$ nos diz que o conglomerado da origem é infinito, mas que poder evoluir para qualquer direção e por isso fica bastante difícil provar que ele está confinado em $\mathbb{H}_+$.

Uma maneira de construir um conglomerado em $\mathbb{H}_+$ que não dependesse de sítios de $\mathbb{H}_-$ seria mostrando que deve haver um número pequeno de sítios do conglomerado em $\mathbb{H}_+$ que estão na sua base, ou seja, na região $B = \mathbb{H}_+ \cap \mathbb{H}_-$. Nesta situação haveria uma probabilidade positiva de que os sítios do conglomerado em $\mathbb{H}_+$ que estão em B não estivessem conectados a muitos sítios de $\mathbb{H}_-^* = \mathbb{H}_- \setminus B$. Infelizmente o resultado no Lema 2.3.1 do Capítulo 2 vai em direção oposta ao que precisamos, pois justamente ele garante a presença de muitos sítios ocupados em B sob a hipótese $\theta(p) > 0$.

Para vermos por que a construção feita no Capítulo 3 não serve para provar a continuidade de θ em p_c , notemos que nesta construção utilizamos $p = p_c + \frac{1}{2}\eta$, onde $\eta > 0$. Esta construção não poderia ser feita sem esta suposição. Lembremos agora que a prova que $\theta(p_c) = 0$ é feita começando com a hipótese $\theta(p_c) > 0$ e em $p = p_c$ a construção não funciona.

Bibliografia

- [1] Aizenman, M., Kesten, H., Newman, C.M. (1987): *Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation*. Comm. Math. Phys. **111**, 505-532.
- [2] Aizenman, M., Newman, C.M. (1986): *Discontinuity of percolation density in one dimensional $1/|x - y|^2$ percolation models*. Comm. Math. Phys. **107**, 611-647.
- [3] Barsky, D.J. (1987): *Critical points and critical exponents in percolation and Ising models*. Ph. dissertation, Rutgers University.
- [4] Barsky, D.J., Aizenman, M. (1991): *Percolation critical exponents under the triangle condition*. Ann. Prob. **19**, 1520-1536.
- [5] Barsky, D.J., Grimmett, G.R., Newman, C.M. (1989): *Dynamic renormalization and continuity of the percolation transition in orthants*. In: Alexander, K., Watkins, J. (eds.). Spatial stochastic process. Boston: Birkhäuser
- [6] Barsky, D.J., Grimmett, G.R., Newman, C.M. (1991): *Percolation in half-spaces: equality of critical densities and continuity of the percolation probability*. Prob. Theory and Rel. Fields **90**, 111-148.
- [7] van den Berg, J., Keane, M. (1984): *On the continuity of the percolation probability function*. In: Beals, R., Beck, A., Bellow, A. Hajian, A. (eds.). Conference in modern analysis and probability. Contemp. Math. **26**, 61-65.

- [8] Bezuidenhout, C.E., Grimmett, G.R. (1990): *The critical contact process dies out*. Ann. Prob. **18**, 1462-1482.
- [9] Breiman, L. (1968): *Probability*. Boston: Addison-Wesley.
- [10] Broadbent, S.R., Hammersley, J.M. (1957): *Percolation process I. Cristal and mazes*. Proc. Camb. Phil. Soc. **53**, 629-641.
- [11] Brower, R.C., Furman, M.A., Morshe, M. (1978): *Critical exponents for the Reggeon-quantum-spin model*. Phys. Lett. B **76**, 2113-2119.
- [12] Burton, R., Keane, M. (1989): *Density and uniqueness in percolation*. Comm. Math. Phys. **121**, 501-506.
- [13] Chayes, J.T., Chayes, L. (1986a): *Bulk transport properties and exponent inequalities for random resistor and flow networks*. Comm. Math. Phys. **105**, 133-152.
- [14] Chayes, J.T., Chayes, L. (1986b): *Critical points and intermediate phases on wedges of $\mathbb{Z}^d$* . J. Phys. A **19**, 3033-3048.
- [15] Chayes, J.T., Chayes, L., Newman, C.M. (1987): *Bernoulli percolation above threshold: an invasion percolation analysis*. Ann. Prob. **15**, 1272-1287.
- [16] Durrett, R. (1984): *Oriented percolation in two dimensions*. Ann. Probab. **12**, 999-1040.
- [17] Durrett, R. (1988): *Lectures notes on particle systems and percolation*. Monterey, CA.: Wadsworth and Brooks/Cole.
- [18] Durrett, R. (1991): *The contact process, 1974-1989*. Lectures in Applied Mathematics **27**, 1-18.
- [19] Durrett, R. (1991): *Probability: theory and examples*. Pacific Grove, CA.: Wadsworth & Brooks/Cole.

- [20] Durrett, R., Gray, L. (1986): *Some peculiar properties of a particle system with sexual reproduction*. In: Tautu, P. (ed.). Stochastic Spatial Process. New York: Springer-Verlag. Lectures notes in Math. **1212**, 106-111.
- [21] Durrett, R., Gray, L.: *Some peculiar properties of a particle system with sexual reproduction* (trabalho não publicado).
- [22] Durrett R., Griffeath, D. (1982): *Contact process is several dimensions*. Z. Wahr. Geb. **59**, 535-552.
- [23] Durrett R., Schonmann, R.H. (1987): *Stochastic growth models*. In: Kesten, H. (ed), IMA Volumes in Math. Appl., Vol 8. New York: Springer-Verlag.
- [24] Fortuin, C., Kasteleyn, P., Ginibre, J. (1971): *Correlation inequalities on some partially ordered sets*. Comm. Math. Phys. **22**, 89-103.
- [25] Gandolfi, A., Keane, M., Newman, C.M. (1991): *Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glasses*. Prob. Theory and Rel. Fields **92**, 511-528.
- [26] Grassberger, P., de la Torre, A. (1979): *Reggeon-field theory (Schlögls-second model) on a lattice: Monte Carlo calculations of critical behaviour*. Ann. Phys. **122**, 373-396.
- [27] Griffeath, D. (1981): *The basic contact process*. Stoch. Proc. Appl. **11**, 151-185.
- [28] Grimmett, G.R. (1989): *Percolation*. New York: Springer-Verlag.
- [29] Grimmett, G.R. (1981): *Critical sponge dimensions in percolation theory*. Adv. Appl. Prob. **13**, 314-324.
- [30] Grimmett, G.R. (1983): *Bond percolation in subsets of the square lattice and the threshold between one-dimensional and two-dimensional behaviour*. J. Phys. A **16**, 599-604.

- [31] Grimmett, G.R., Kesten, H. (1984): *First-passage percolation, network flow and electrical resistances*. Z. Wahr. Geb. **66**, 335-366.
- [32] Grimmett, G.R., Marstrand, J.M. (1990): *The supercritical phase of percolation is well behaved*. Proc. Royal. Soc. London. Ser. A **430**, 439-457.
- [33] Hara, T., Slade, G. (1989): *The mean field critical behavior of percolation in high dimension*. In: Simom, B., Truman, A., Davies, I.M. (eds.). IXth International Congress on Mathematical Physics. Bristol: Adam Hilger, 450-453.
- [34] Hara, T., Slade, G. (1990): *Mean field critical behavior of percolation in high dimension*. Comm. Math. Phys. **28**, 333-391.
- [35] Harris, T.E. (1960): *A lower bound for the critical probability in a certain percolation process*. Proc. Camb. Phil. Soc. **56**, 13-20.
- [36] Harris, T.E. (1974): *Contact interactions on a lattice*. Ann. Prob. **2**, 969-988.
- [37] Holley, R., Liggett, T. (1978): *The survival of contact process*. Ann. Prob. **6**, 198-206.
- [38] Kesten, H. (1980): *The critical probability of bond percolation on square lattice equal $\frac{1}{2}$* . Comm. Math. Phys. **74**, 41-59.
- [39] Kesten, H. (1982): *Percolation theory for mathematicians*. Boston: Birkhäuser.
- [40] Kesten, H., Zhang, Y. (1990): *The probability of a large finite cluster in supercritical Bernoulli percolation*. Ann. Prob. **18**, 537-555.
- [41] Kingman, J.F.C. (1973): *Subadditive Ergodic Theory*. Ann. Prob. **1**, 883-909.
- [42] Kingman, J.F.C. (1976): *Subadditive process*. Springer Lectures Notes in Mathematics **539**, 167-223.
- [43] Liggett, T.M. (1985a): *Interacting particle systems*. New York: Springer-Verlag.

- [44] Liggett, T.M. (1985b): *An improved subadditive ergodic theorem*. Ann. Prob. **13**, 1279-1285.
- [45] Russo, L. (1978): *A note on percolation*. Z. Warh. Geb. **43**, 39-48.
- [46] Russo, L. (1981): *On the critical percolation probabilities*. Z. Warh. Geb. **56**, 229-237.
- [47] Seymour, P.D., Welsh, D.J.A. (1978): *Percolation probabilities on the square lattice*. In: Bollobas, B. (ed.). Advances in Graph theory. Ann. Discrete Math. **3**, 227-245.