Crescimento de Superfícies Aleatórias

Eduardo da Silva Ramos Mauro

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**
Orientador: **Prof. Dr. Pablo A. Ferrari**

—São Paulo, Agosto de 1992—

Agradecimentos

A Pablo Ferrari, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, pelo incentivo e pela paciência exibida durante a elaboração e, acima de tudo, pela amizade desde os tempos da iniciação científica.

A Antonio Galves, por um dia, durante uma aula, ter feito a classe simular um modelo usando dados, com intuito de mostrar que o que ele dizia era verdade, e por me incentivar a fazer iniciação científica.

A Adilson Simonis, por ler a tese, encontrar erros e dar sugestões para a melhoria do texto.

Dedico este trabalho àqueles que sempre me apoiaram ou me serviram de exemplo nos momentos difíceis: meus pais, Bettina, José Pinus e Carlos Alberto Lacaz.

ÍNDICE

Introdução	1
Capítulo 1. Descrição do processo	4
Capítulo 2. O caso totalmente assimétrico	8
Capítulo 3. Reversibilidade dinâmica	18
Capítulo 4. Lei dos grandes números	25
Capítulo 5. Teoremas do limite central	29
Capítulo 6. O caso simétrico	43
Apêndice. Passeios aleatórios	47
Referências	54

Abstract

We consider the S.O.S. model in one and two dimensions. We study several growing dynamics and for them we show ergodic theorems and law of large numbers. We also show that the displacement of the position of the interface converges, when conveniently centered and renormalized, to a Gaussian random variable. The proof uses the renewal process induced by the times when the process returns to the flat configuration. The difficulty consists in proving that interrenewal time have finite second moment. To show that the return time to a given state has a finite second moment, we extend Foster's sufficient condition for the existence of the first moment.

Resumo

Neste trabalho nós consideramos o modelo S.O.S. em uma e duas dimensões. Nós estudamos diversas taxas de crescimento e para elas mostramos teoremas ergódicos e lei dos grandes números. Mostramos também que o deslocamento da posição da interface converge, quando convenientemente centrada e renormalizada, para uma variável aleatória de distribuição normal. A prova usa um processo de renovação induzido pelo tempos de retorno do processo à superfície plana. A dificuldade consiste em mostrar que os tempos entre renovações tem o segundo momento finito. Para mostrar que o tempo de retorno a um estado qualquer tem o segundo momento finito, nós extendemos a condição suficiente de Foster para a existência do primeiro momento.

Introdução

O crescimento de superfícies aleatórias tem sido estudado recentemente por vários autores. O objetivo é compreender a maneira que dois materiais diferentes interagem na sua fronteira. Em sistemas de partículas foram propostos diferentes modelos para esta interação. Alguns dos modelos, como o modelo de Ising, apresentam transição de fase. Isto quer dizer que há duas medidas invariantes que são mutuamente singulares. O problema é estudar o que acontece se inicialmente o sistema está distribuído de maneira tal que uma região do espaço tem uma fase e a região complementar a outra fase. Gallavotti [11] provou que sob determinadas condições a divisão do espaço se mantém com duas fases. A fronteira entre as duas fases é uma superfície aleatória de dimensão menor que a dimensão do processo. Outros modelos propostos foram: o processo de contacto, o modelo do votante viesado, o processo de interação com as partículas mais próximas, etc. Estes modelos foram estudados apenas em uma dimensão e, portanto, a interface sendo um ponto.

Um dos modelos que foram introduzidos como uma aproximação do modelo de Ising é o chamado modelo de sólido sobre sólido. O modelo é de simples definição: temos um reticulado G de tamanho finito, contido em $\mathbb{Z}^2$, onde cada uma das posições temos pilhas de cubos. A configuração η do processo é dada pelas alturas das pilhas, que podem perder ou ganhar cubos segundo processos pontuais de Poisson, com taxas que dependem de alguma maneira das alturas das pilhas vizinhas. Estamos interessados na superfície gerada pelas faces expostas dos cubos de cada uma das pilhas.

Mais tarde foram propostas dinâmicas que têm como medida invariante e reversível a medida S.O.S.. Estas dinâmicas são naturais, basta que

satisfaçam o chamado balanço detalhado:

$$\mu(\eta)q(\eta, \eta') = \mu(\eta')q(\eta', \eta).$$

Isto é, a dinâmica é a mesma para a configuração η e $-\eta$. Neste sentido são simétricas. Para estas dinâmicas foram provadas leis dos grandes números e teoremas de limite central. Veja, por exemplo, Ferrari [4].

Gates e Wescott em [8 e 10] propuseram o problema inverso. Consideremos uma dinâmica totalmente assimétrica, ou seja, as pilhas só podem ganhar cubos. O problema que se coloca aqui é o de dar condições suficientes sobre as taxas para obter a ergodicidade da dinâmica. Isto implica num crescimento estável da superfície. Como nosso espaço de estados é enumerável, estamos tentando provar que determinada cadeia de Markov é recorrente positiva. Isto tem se mostrado particularmente difícil de provar, pois os argumentos de dominação, que são os mais naturais, não funcionam. Para dimensão 2, Gates e Wescott [10] propuseram a utilização de um versão mais geral de um teorema de Pakes [15], que diz essencialmente o seguinte: se for possível achar um N e uma função positiva y do espaço de estados no conjunto de números reais tal que $E(y(n+1)|y(n)) \leq y(n) - 1$, para qualquer $n \geq N$, então a cadeia é ergódica. Isto é uma condição mais forte que a de supermartingal.

Neste trabalho usamos uma generalização do resultado acima com algumas funções y , escolhidas ad hoc, para provar em dimensão 2, que se as taxas de crescimento são crescentes em função do número de faces verticais da superfície, então o processo é ergódico.

Gates e Wescott [8 e 10] também se utilizam do conceito de reversibilidade dinâmica para poder determinar a medida invariante dos processos estudados por eles. Este conceito diz essencialmente que podemos tornar a lei de η^t a mesma que a lei de $\xi^t = \eta^{\tau-t}$, onde τ é uma constante positiva qualquer, sob a medida invariante, rearrajando de alguma maneira a matriz Q de taxas do processo ξ^t , de tal maneira que a soma das taxas de um estado qualquer (menos a dele ficar nele mesmo), não se altere. Neste trabalho, provou-se que, usando a reordenação das taxas sugerida por Gates e Wescott, processos com as taxas descritas acima não exibem esta propriedade.

Neste trabalho, também provamos uma lei dos grandes números para a pilha mais alta da superfície, usando o teorema subaditivo ergódico. Isto foi

possível devido aos modelos terem taxas crescentes, o que torna o processo atrativo.

O problema que se coloca a continuação é o de provar um teorema de limite central para a posição da interface. Como já provamos que o processo é recorrente positivo para algumas dinâmicas, bastaria provar que o tempo de volta a configuração inicial também tem o segundo momento. A partir daí o teorema segue de resultados clássicos de teoria de renovação. Para provar que o segundo momento é finito nos valem da generalização do teorema de Pakes [15] e de um resultado de Ferrari, Martinez e Picco [5], que diz que o segundo momento pode ser expresso em função do primeiro momento mas saindo não de um estado fixo, mas de um estado aleatório, distribuído de acordo com a medida invariante do processo. Isto, mais o conhecimento explícito da medida invariante (que é uma medida de Gibbs) nos permite terminar a prova. Este resultado, que acreditamos ser novo, serve para generalizar um teorema de Ferrari [4].

Capítulo 1

DESCRIÇÃO DO PROCESSO

Imaginemos um reticulado G em $\mathbb{Z}^2$ de tamanho M por N , onde em cada uma das posições (i, j) de G temos pilhas de cubos de igual tamanho. Chamamos de configuração, denotada por η , a função que dá a altura de todas as pilhas de G , onde $\eta(i, j)$ dá a altura da pilha da posição (i, j) . De agora em diante, quando quisermos nos referir a posição (i, j) diremos somente (i, j) . Vamos assumir para o modelo condições de fronteira periódicas, ou seja, que:

$$\eta(i + M, j + N) = \eta(i, j) \quad \forall (i, j) \in G,$$

portanto as pilhas estão sobre uma superfície toroidal. Dizemos que (i_1, j_1) e (i_2, j_2) são vizinhas se

$$|i_2 - i_1| + |j_2 - j_1| = 1.$$

Temos, pelas condições acima descritas, que para qualquer sequência fechada s de posições vizinhas de η , $s = \{(i_0, j_0), \dots, (i_n, j_n)\}$, onde $(i_n, j_n) = (i_0, j_0)$ que

$$\sum_{m=1}^n \eta(i_m, j_m) - \eta(i_{m-1}, j_{m-1}) = 0.$$

Uma configuração η determina uma superfície, formada por todas as faces livres dos cubos. Seja S o conjunto de todas as possíveis configurações. Vamos definir uma dinâmica de crescimento destas superfícies através de um processo de Markov $\{\eta^t, t \geq 0\}$ que terá S como conjunto de estados. Uma transição de uma configuração η para η' será o acréscimo ou a perda

de um cubo em uma das pilhas de G , ou seja $\eta'(i, j) = \eta(i, j) \pm 1$, mantendo as outras pilhas inalteradas, portanto, podemos dizer que uma transição é da forma $\eta \rightarrow \eta_{i,j}^+$ ou $\eta \rightarrow \eta_{i,j}^-$ onde

$$\eta_{i,j}^+(m, n) = \begin{cases} \eta(m, n) & \text{se } (m, n) \neq (i, j), \\ \eta(i, j) + 1 & \text{se } (m, n) = (i, j), \end{cases}$$

e

$$\eta_{i,j}^-(m, n) = \begin{cases} \eta(m, n) & \text{se } (m, n) \neq (i, j), \\ \eta(i, j) - 1 & \text{se } (m, n) = (i, j). \end{cases}$$

pois a nova configuração que resulta da transição é a mesma a menos de (i, j) onde temos um cubo a mais ou a menos, respectivamente. A função de probabilidade de transição do processo η^t é dada por

$$P(\eta^{t+\delta} = \eta' | \eta^t = \eta) = \delta q(\eta, \eta') + o(\delta)$$

onde $q(\eta, \eta') \neq 0$ somente se $\eta' = \eta_{i,j}^+$ ou $\eta' = \eta_{i,j}^-$ para algum (i, j) . A função $q(., .)$, que dá a taxa da pilha em (i, j) de ganhar ou perder um cubo, tanto pode ser local, dependendo somente dos vizinhos da pilha em questão, ou global, dependendo de toda a configuração η . Ao longo deste texto só serão estudados processos irreduzíveis com taxas locais.

Quando o processo tem taxas tais que $q(\eta, \eta') = q(-\eta, -\eta')$, para todo $\eta, \eta' \in S$, ele é dito simétrico, pois uma pilha perde ou ganha um cubo com taxas iguais. O processo é dito totalmente assimétrico se ou $q(\eta, \eta_{i,j}^-) = 0$ ou $q(\eta, \eta_{i,j}^+) = 0$, para qualquer $\eta \in S$ e qualquer $(i, j) \in G$, pois as pilhas que compoem a superfície só podem se mover em uma direção.

Vamos definir

$$\begin{aligned} \max(\eta^t) &= \max\{\eta^t(i, j), 1 \leq i \leq M \text{ e } 1 \leq j \leq N\} \\ \min(\eta^t) &= \min\{\eta^t(i, j), 1 \leq i \leq M \text{ e } 1 \leq j \leq N\}, \end{aligned}$$

ou seja, a altura da pilha mais alta e mais baixa da superfície no instante t , respectivamente.

Dizemos que duas configurações η_1 e η_2 tem superfícies equivalentes se elas somente diferem pela altura absoluta, ou seja, se

$$\exists d \in \mathbb{N} \mid \eta_1(i, j) = \eta_2(i, j) + d, \quad \forall (i, j) \in G.$$

Portanto para cada d temos um conjunto de configurações equivalentes. Seja $\bar{S}$ a classe de todos esses conjuntos. Podemos então definir o processo de Markov $\{\bar{\eta}^t, t \geq 0\}$ com espaço de estados $\bar{S}$ tal que tenha a mesma função de probabilidades de transição que η^t . Para representar a classe de equivalência vamos usar superfícies $\bar{\eta}$ tais que $\min(\bar{\eta}) = 0$.

Antes de darmos alguns exemplos de taxas, definiremos algumas quantidades que serão necessárias ao longo do texto, todas elas relativas a uma configuração η fixada. As funções

$$\begin{aligned} g_\eta(i, j) &= \eta(i+1, j) - \eta(i, j) \\ h_\eta(i, j) &= \eta(i, j+1) - \eta(i, j) \end{aligned}$$

dão as diferenças de altura de (i, j) e seus vizinhos do lado direito e de cima do reticulado, respectivamente. Podemos definir então o número de faces livres que (i, j) “enxerga” para cima como

$$f_\eta(i, j) = g_\eta^+(i, j) + h_\eta^+(i, j) + g_\eta^-(i-1, j) + h_\eta^-(i, j-1),$$

e para baixo

$$\bar{f}_\eta(i, j) = g_\eta^-(i, j) + h_\eta^-(i, j) + g_\eta^+(i-1, j) + h_\eta^+(i, j-1),$$

onde

$$\begin{aligned} h_\eta^+(i, j) &= \max(h_\eta(i, j), 0) \\ h_\eta^-(i, j) &= \min(h_\eta(i, j), 0), \end{aligned}$$

analogamente para a função g . Temos que o número total de faces livres de η é

$$H(\eta) = \sum_{i,j} (|g_\eta(i, j)| + |h_\eta(i, j)|) = \sum_{i,j} f_\eta(i, j) = \sum_{i,j} \bar{f}_\eta(i, j).$$

O número de paredes que (i, j) “enxerga” ao seu redor, ou seja, o número de vizinhos que têm altura maior que $\eta(i, j)$ é dado pela função

$$l_\eta(i, j) = I_{\{g_\eta(i, j) > 0\}} + I_{\{h_\eta(i, j) > 0\}} + I_{\{g_\eta(i-1, j) < 0\}} + I_{\{h_\eta(i, j-1) < 0\}}, \quad (1.1)$$

que assume somente valores em $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. L denota o número total de sítios de G , $L = MN$. A taxa total de uma configuração é dada por

$$q(\eta) = \sum_{\eta' \neq \eta} q(\eta, \eta'). \quad (1.2)$$

Como $\bar{\eta}$ pode ter mais de uma pilha com altura $\max(\bar{\eta})$, definimos a função $n_{\max}(\bar{\eta})$, que dá o número de pilhas de altura igual ao máximo.

O processo η^t serve para modelar diversos tipos de fenômenos físicos, entre eles o de crescimento de cristais, onde o cubo é interpretado como um átomo. Gates [7] e Gates e Westcott [8, 9 e 10] estudaram diversos modelos com esse enfoque, alguns com um tipo distinto de reticulado, utilizando-se de taxas do tipo

$$q(\eta, \eta_{i,j}^+) = \beta(l_{\eta}(i, j)), \quad (1.3)$$

onde β é uma função positiva e finita. A taxa depende diretamente do número de paredes que a posição (i, j) enxerga a seu redor. Analogamente, eles definiram uma taxa de perda de átomos.

Uma outra possível classe de taxas é

$$q(\eta, \eta_{i,j}^+) = \alpha T_{\eta}(i, j) + \beta,$$

onde T é uma função qualquer. Nos capítulos seguintes veremos qual o comportamento do processo para alguns tipos de taxas.

Capítulo 2

O CASO TOTALMENTE ASSIMÉTRICO

Nesse capítulo vamos analisar o caso totalmente assimétrico quando $q(\eta, \eta_{i,j}^-) = 0$ para qualquer $\eta \in S$ e qualquer $(i, j) \in G$, ou seja, quando a superfície pode apenas ganhar cubos. Todos os resultados obtidos podem ser facilmente derivados para o caso de $q(\eta, \eta_{i,j}^+) = 0$, fazendo pequenos ajustes nas provas.

Vamos estudar o processo $\bar{\eta}^t$, isto é, o processo visto a partir da pilha de menor altura. Vamos assumir que inicialmente temos a superfície plana, que denotamos por $\bar{\eta}_0$. Estaremos interessados em determinar o tempo médio de retorno a $\bar{\eta}_0$, para assim podermos caracterizar o comportamento de $\bar{\eta}^t$. Mais especificamente, queremos saber quando este tempo médio é finito, isto é, quando o processo $\bar{\eta}^t$ é recorrente positivo. Veremos que em alguns casos poderemos afirmar mais do que isso, poderemos dizer que o processo é ergódico, ou seja, que converge para uma única medida invariante, não importando em que estado o processo se encontra quando $t = 0$.

Se $L = 2$ a análise é trivial. Observe que a diferença de altura entre as duas pilhas é um passeio aleatório sobre os números naturais. Chamemos de d^t esta diferença de altura no instante t , α a taxa com que d^t aumenta de uma unidade (quando a pilha mais alta ganha um cubo), e β o máximo de todas as taxas com que d^t diminui de uma unidade. Podemos acoplar um passeio aleatório $\{\xi^t, t \geq 0\}$ com

$$q(x, x+1) = \alpha, \quad q(x, x-1) = \beta,$$

as taxas de saltar a direita e a esquerda respectivamente, de tal maneira que toda vez que há uma transição do processo $\bar{\eta}^t$ há um salto do passeio ξ^t . Do modo que foram definidas as taxas temos que $d^t \leq \xi^t$ para todo t . Então, da teoria dos passeios aleatórios, para que o processo $\bar{\eta}^t$ seja ergódico basta que $\alpha < \beta$.

Para obtermos os próximos resultados desse capítulo, bastará analisar a cadeia de Markov imersa do processo. Esta cadeia tem probabilidades de transição dadas por

$$p(\bar{\eta}, \bar{\eta}') = \frac{q(\bar{\eta}, \bar{\eta}')}{q(\bar{\eta})},$$

onde $q(\bar{\eta})$ é a função definida em (1.2). Se todas as taxas $q(.,.)$ forem maiores que zero e finitas, temos que a cadeia imersa é irredutível e exibe o mesmo tipo de comportamento que o processo, pois o processo é regular, ou seja, unicamente determinado pelas suas taxas. No caso do processo não ser regular, a seguinte proposição nos dá uma condição suficiente para que, sendo a cadeia imersa recorrente positiva, termos que o processo tenha o mesmo tipo de comportamento.

Proposição 2.1. *Se a cadeia imersa for recorrente positiva e as taxas forem uniformemente limitadas inferiormente então o processo também é recorrente positivo.*

Prova: Seja a variável aleatória T , o número de transições que a cadeia imersa leva para voltar a primeira vez a $\bar{\eta}_0$. Como, por hipótese, a cadeia é recorrente positiva, $\mathbb{E}T < \infty$. Seja R o esqueleto do processo $\bar{\eta}^t$, ou seja, uma possível sequência de estados que o processo $\bar{\eta}^t$ pode assumir ao longo de sua evolução, onde $R(i)$, $i \geq 0$, dá o i -ésimo estado desta sequência. Sejam as variáveis aleatórias exponenciais X_i , que dão o tempo da i -ésima transição do processo $\bar{\eta}^t$, que são independentes entre si e de parâmetros dados por $q(R(i-1), R(i))$. Além disso, seja X uma variável aleatória exponencial que tem como parâmetro o mínimo de todas as taxas $q(.,.)$ do processo. Temos que X é estocasticamente maior que qualquer X_i e, portanto, $\mathbb{E}X \geq \mathbb{E}X_i$. Seja τ o tempo do primeiro retorno de $\bar{\eta}^t$ a $\bar{\eta}_0$. Sendo a variável X independente de R e T , obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tau) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^T X_i | R\right)\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^T X | R\right)\right) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(T|R)\mathbb{E}(X|R)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(T|R)) \mathbb{E}X \\
&= \mathbb{E}T \mathbb{E}X.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, as taxas são limitadas inferiormente, temos $\mathbb{E}X < \infty$ e, portanto, $\mathbb{E}(\tau) < \infty$. Então o processo também é recorrente positivo. ■

Em primeiro lugar vamos analisar o caso quando q é uma constante positiva qualquer β . Nesse caso cada uma das pilhas cresce segundo um processo pontual de Poisson de taxa β , independente das demais. Tanto o processo $\bar{\eta}^t$ como a sua cadeia imersa são irredutíveis. Na cadeia imersa, cada vez que há o acréscimo de um cubo, a probabilidade de que seja em uma dada posição é $1/L$. Podemos então calcular qual a probabilidade da cadeia imersa partindo da superfície plana voltar a ela em um certo número de passos. Note que só podemos voltar em instantes múltiplos de L , pois todas as pilhas tem que ter ganho o mesmo número de cubos, portanto a probabilidade desse evento é dada por

$$\begin{aligned}
p(n) &= \Pr\{\text{todas as pilhas tem } n \text{ cubos no instante } nL\} \\
&= \frac{(nL)!}{(n!)^L} \left(\frac{1}{L}\right)^{nL} \\
&\sim \frac{(nL)^{nL+1/2} e^{-nL} (2\pi)^{1/2}}{(n^{n+1/2} e^{-n} (2\pi)^{1/2})^L} \left(\frac{1}{L}\right)^{nL} \\
&= \sqrt{L(2\pi n)^{(1-L)}},
\end{aligned}$$

usando a aproximação de Stirling.

Uma condição necessária e suficiente para um estado i de uma cadeia ser recorrente nulo dada por Feller [2] (pag. 389), é que a soma de p_{ii}^n , a probabilidade de voltar no n -ésimo passo a i partindo de i , diverja e que $p_{ii}^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Para $L < 4$ temos que $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = \infty$, e portanto, ambas as condições estão satisfeitas para o estado $\bar{\eta}_0$. Do fato da cadeia imersa ser irredutível, temos que ela é recorrente nula. Como $\bar{\eta}^t$ é um processo regular, $\bar{\eta}^t$ também é recorrente nulo.

Ainda segundo o mesmo teorema de Feller, para que o estado i seja transitório é necessário e suficiente que a soma de p_{ii}^n seja finita. Para $L \geq 4$ esta condição está satisfeita e, portanto, $\bar{\eta}^t$ é transitório pelo raciocínio acima. Este argumento está exposto no Teorema 4 de Gates e Wescott [10].

Para melhor analisar a cadeia imersa no caso geral, vamos usar uma versão mais geral, que provaremos a seguir, do Teorema 1 de Pakes [15], que é uma generalização do Teorema 2 de Foster [6]. Uma versão mais completa deste resultado pode ser encontrada em Tweedie [18].

Teorema 2.1. *Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov irredutível, com espaço de estados os números inteiros não negativos. Seja $[P_{i,j}]$ $i, j = 0, 1, \dots$ a matriz de probabilidades de transição da cadeia. A cadeia é ergódica se $\exists K \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ tal que as desigualdades*

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j} y_j \leq y_i - \epsilon, \quad i = K, K+1, \dots \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j} y_j < \infty, \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2.2)$$

têm uma solução não negativa finita.

Prova: Da hipótese sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,j}^n = \pi_j$ existe e não depende de i . Além disso, ou todos os π_j são nulos ou positivos. Vamos mostrar que pelo menos um deles é positivo, e então pela cadeia ser irredutível todos serão positivos e, portanto, a cadeia é ergódica. Seja a sequência para $i \geq 0$ e $n = 1, 2, \dots$:

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}^n y_j, \quad y_i^{(1)} = y_i.$$

Vamos definir também

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j} y_j, \quad i = 0, \dots, K-1.$$

Temos que

$$\begin{aligned} y_i^{(n+2)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}^n P_{k,j} y_j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}^n \sum_{j=0}^{\infty} P_{k,j} y_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}^n y_k^{(2)} \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} P_{i,k}^n \lambda_k + \sum_{k=K}^{\infty} P_{i,k}^n y_k^{(2)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{K-1} P_{i,k}^n \lambda_k + \sum_{k=K}^{\infty} P_{i,k}^n (y_k - \epsilon) \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} P_{i,k}^n \lambda_k + \sum_{k=K}^{\infty} P_{i,k}^n y_k - \epsilon \left(1 - \sum_{k=0}^{K-1} P_{i,k}^n\right) \\
&\leq y_i^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{K-1} P_{i,k}^n (\lambda_k + \epsilon) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $y_i^{(1)} < \infty$ para todo i e $\lambda_k < \infty$, da desigualdade acima obtemos que $y_i^{(n)} < \infty$ para todo i e n . Iterando obtemos

$$0 \leq y_i^{(n+2)} \leq y_i^{(2)} + \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda_k + \epsilon) \sum_{l=1}^n P_{i,k}^l - n\epsilon. \quad (2.3)$$

Dividindo (2.3) por n e tomando o limite de $n \rightarrow \infty$, temos

$$0 \leq \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda_k + \epsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \frac{P_{i,k}^l}{n} - \epsilon = \sum_{k=0}^{K-1} (\lambda_k + \epsilon) \pi_k - \epsilon.$$

A desigualdade acima implica que pelo menos um dos π_k é positivo. Portanto a cadeia é ergódica. ■

Da posse deste resultado, podemos enunciar dois teoremas que dão condições para que o processo com certas classes de taxas seja ergódico. Em ambos os teoremas as taxas com que uma posição (i, j) ganha um cubo dependem do número de cubos vizinhos que ela “enxerga” para cima. É razoável esperar que o processo seja recorrente positivo, pois quanto mais cubos acima, maior a taxa com que a pilha tende a crescer, e por conseguinte, maior a tendência da superfície se aplainar.

Teorema 2.2. Se o processo $\{\bar{\eta}^t, t \geq 0\}$ tem taxas

$$q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^+) = \alpha T(f_{\bar{\eta}}(i, j)) + \beta, \quad (2.4)$$

onde $0 < \alpha, \beta < \infty$, e T é uma função positiva não decrescente tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) = \infty$, então o processo é ergódico.

Prova: Como α e β são positivos então o processo e a cadeia imersa são irredutíveis. Vamos aplicar o Teorema 2.1 usando a seguinte função:

$$y(\bar{\eta}) = \sum_{i,j} (\max(\bar{\eta}) - \bar{\eta}(i, j)). \quad (2.5)$$

Se $\bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta}_{i,j}^+$ aumenta um cubo em uma das pilhas que tem altura máxima então $y(\bar{\eta}_{i,j}^+) = y(\bar{\eta}) + L - 1$, caso contrário $y(\bar{\eta}_{i,j}^+) = y(\bar{\eta}) - 1$. Temos que a taxa total de $\bar{\eta}$ é

$$q(\bar{\eta}) = L\beta + \alpha \sum_{i,j} T(f_{\bar{\eta}}(i, j)).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\eta}' \in \bar{S}} p(\bar{\eta}, \bar{\eta}') y(\bar{\eta}') &= q^{-1}(\bar{\eta}) \sum_{i,j} q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^+) y(\bar{\eta}_{i,j}^+) \\ &= q^{-1}(\bar{\eta}) \left(\beta n_{\max}(\bar{\eta}) (y(\bar{\eta}) + L - 1) + \right. \\ &\quad \left. (y(\bar{\eta}) - 1) \left(\beta (L - n_{\max}(\bar{\eta})) + \sum_{i,j} T(f_{\bar{\eta}}(i, j)) \right) \right) \\ &= q^{-1}(\bar{\eta}) \left((y(\bar{\eta}) - 1) (L\beta + \alpha \sum_{i,j} T(f_{\bar{\eta}}(i, j))) + \right. \\ &\quad \left. L\beta n_{\max}(\bar{\eta}) \right) \\ &\leq q^{-1}(\bar{\eta}) (L^2\beta + (y(\bar{\eta}) - 1) q(\bar{\eta})) \\ &= y(\bar{\eta}) - 1 + \frac{L^2\beta}{q(\bar{\eta})}. \end{aligned}$$

Para que a desigualdade acima satisfaça a desigualdade (2.1) é necessário que, a menos de um número finito de configurações, $q(\bar{\eta}) > L^2\beta$, ou seja,

$$\sum_{i,j} T(f_{\bar{\eta}}(i,j)) > \frac{L(L-1)\beta}{\alpha}.$$

Podemos ordenar o conjunto $\bar{S}$ de acordo com a soma do lado esquerdo da desigualdade acima. Como $T \rightarrow \infty$ e $\bar{S}$ é um conjunto enumerável, existe somente um número finito de configurações em $\bar{S}$ que não satisfazem a desigualdade acima, e para todas essas, a desigualdade (2.2) está satisfeita. Portanto a cadeia imersa é ergódica. Como as taxas são limitadas inferiormente temos pela Proposição 2.1 que o processo $\bar{\eta}^t$ também é ergódico. ■

Podemos relaxar o teorema acima fixando o tamanho do reticulado G , obtendo o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *Se $q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^+) = \alpha T(f_{\bar{\eta}}(i,j)) + \beta$, onde $0 < \alpha, \beta < \infty$, e T é uma função positiva tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) > \frac{L(L-1)\beta}{\alpha}$, então o processo é ergódico.*

Prova: Basta observar que ordenando S da mesma maneira descrita acima, teremos apenas um número finito de configurações que não satisfazem (2.1) e satisfazem (2.2). ■

Teorema 2.3. *Se o processo $\{\bar{\eta}^t, t \geq 0\}$ tem taxas*

$$q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^+) = T(\alpha f_{\bar{\eta}}(i,j) + \beta), \quad (2.6)$$

onde $0 < \alpha, \beta < \infty$, e T é uma função positiva não decrescente tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) = \infty$, então o processo é ergódico.

Prova: É semelhante a do Teorema 2.2. Aplicando o Teorema 2.1 a função (2.5), temos

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\eta}' \in \bar{S}} p(\bar{\eta}, \bar{\eta}') y(\bar{\eta}') &= \\ &= q^{-1}(\bar{\eta}) \left((y(\bar{\eta}) - 1) \sum_{i,j} T(\alpha f_{\bar{\eta}}(i,j) + \beta) + L n_{\max}(\bar{\eta}) T(\beta) \right) \\ &\leq y(\bar{\eta}) - 1 + \frac{L^2 T(\beta)}{q(\bar{\eta})}, \end{aligned}$$

onde

$$q(\bar{\eta}) = \sum_{i,j} T(\alpha f_{\bar{\eta}}(i,j) + \beta).$$

Por raciocínio análogo, temos que

$$\sum_{i,j} T(\alpha f_{\bar{\eta}}(i,j) + \beta) > L^2 T(\beta)$$

a menos de um número finito de configurações e, portanto, as desigualdades (2.1) e (2.2) estão satisfeitas. Usando então a Proposição 2.1 temos que o processo é ergódico. ■

Vamos mostrar agora alguns resultados para taxas como da forma equação (1.3). Para uma dimensão ($M = 1$) elas foram estudadas por Gates [7] e Gates e Wescott [8 e 9], e em duas dimensões por Gates e Wescott [10]. Nesse último artigo é conjecturado que se temos taxas tal que

$$\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 \tag{2.7}$$

então o processo é ergódico. O argumento usado por eles é que taxas desta forma favorecem mais as transições que removem um maior número de faces aparentes da superfície, favorecendo a volta à superfície plana. Algumas simulações feitas com reticulados pequenos parecem indicar que é este o caso.

Ainda nesse artigo eles mostram que a condição (2.7) é verdadeira quando temos $M = N = 2$. Mas observem que neste caso, devido as condições de fronteira, só podemos ter transições com taxas β_0 , β_2 e β_4 , portanto o processo tem o mesmo comportamento quando o reticulado é de tamanho $M = 1$ e $N = 4$, ou seja, apenas uma dimensão. Na verdade, podemos provar que (2.7) vale para qualquer tamanho de reticulado em uma dimensão.

Teorema 2.4. *Se $M = 1$ e $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2$ então o processo é ergódico.*

Prova: Os casos quando $N = 1$ e 2 são triviais. Para $N > 3$ temos que as taxas são positivas e finitas, então o processo é regular e tanto ele como

a cadeia imersa são irredutíveis. Vamos outra vez aplicar o Teorema 2.1 usando a função

$$y(\bar{\eta}) = \sum_{i=1}^N g_{\bar{\eta}}^2(i). \quad (2.8)$$

Quando temos uma transição $\bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta}_i^+$, a menos das posições i e $i-1$, todas as demais diferenças de altura entre pilhas vizinhas se mantêm. Temos que

$$\begin{aligned} y(\bar{\eta}_i) &= g_{\bar{\eta}_i}^2(1) + \cdots + g_{\bar{\eta}_i}^2(i-1) + g_{\bar{\eta}_i}^2(i) + \cdots + g_{\bar{\eta}_i}^2(N) \\ &= g_{\bar{\eta}}^2(1) + \cdots + (g_{\bar{\eta}}(i-1) + 1)^2 + (g_{\bar{\eta}}(i) - 1)^2 + \cdots + g_{\bar{\eta}}^2(N) \\ &= y(\bar{\eta}) + 2 + 2(g_{\bar{\eta}}(i-1) - g_{\bar{\eta}}(i)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\eta}' \in \bar{S}} p(\bar{\eta}, \bar{\eta}') y(\bar{\eta}') &= q^{-1}(\bar{\eta}) \sum_{i=1}^N q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+) y(\bar{\eta}_i^+) \\ &= q^{-1}(\bar{\eta}) \sum_{i=1}^N q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+) (y(\bar{\eta}) + 2 + 2(g_{\bar{\eta}}(i-1) - g_{\bar{\eta}}(i))) \\ &= y(\bar{\eta}) + 2 + 2q^{-1}(\bar{\eta}) \sum_{i=1}^N q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+) (g_{\bar{\eta}}(i-1) - g_{\bar{\eta}}(i)) \\ &= y(\bar{\eta}) + 2 + 2q^{-1}(\bar{\eta}) B(\bar{\eta}), \end{aligned}$$

onde

$$B(\bar{\eta}) = \sum_{i=1}^N g_{\bar{\eta}}(i) (q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i+1}^+) - q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+)). \quad (2.10)$$

Suponhamos que $g_{\bar{\eta}}(i) > 0$. Então na posição i só podemos ter transições com taxas β_1 e β_2 , e em $i+1$ só β_0 e β_1 . Portanto, pela hipótese, em cada um dos 4 possíveis casos temos que

$$q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i+1}^+) \leq q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+). \quad (2.11)$$

Se tivermos que $g_{\bar{\eta}}(i) < 0$, por raciocínio análogo temos que

$$q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i+1}^+) \geq q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+). \quad (2.12)$$

Assim

$$B(\bar{\eta}) < 0$$

para qualquer configuração $\bar{\eta}$ diferente de $\bar{\eta}_0$, pois para qualquer uma delas existem pelo menos duas posições vizinhas com taxas (β_0, β_1) , (β_0, β_2) ou (β_1, β_1) .

Podemos ordenar todas as configurações segundo o valor da função B . Então existe somente um número finito de $\bar{\eta}$ tais que $B(\bar{\eta}) < 3$, que claramente satisfazem a condição (2.1). Portanto, descartando essas últimas, a condição (2.2) também está satisfeita. Então a cadeia é ergódica, e do fato do processo ser regular segue que o processo $\bar{\eta}^t$ também é . ■

A prova acima é semelhante a da segunda parte do Teorema 1 de Gates e Wescott [10]. O mesmo tipo de prova não pode ser aplicado quando temos duas dimensões, pois neste caso não é possível obter desigualdades análogas à (2.11) e à (2.12). Também não é possível relaxar a condição do Teorema 2.4, trocando por $\beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2$ por exemplo, pois não mais poderíamos afirmar que há somente um número finito de configurações tais que $B(\bar{\eta}) < 3$.

Na primeira parte do teorema acima citado é apresentada a condição

$$(L - 1)^2 \beta_0 < \min(2K\beta_1, 4\beta_2, 2\beta_3, \beta_4),$$

onde $K = \min(M, N)$, que garante a ergodicidade do processo. A prova, como no Teorema 2.2, baseia-se na aplicação do Teorema 2.1 com a função (2.5). Este não é um resultado muito interessante, dado que a condição depende do tamanho do grafo G .

Capítulo 3

REVERSIBILIDADE DINÂMICA

Os modelos descritos nos Teoremas 2.2 e 2.3 não são reversíveis. Também não são os modelos assimétricos estudados por Gates e Wescott, mas em seus artigos eles estudam quando os modelos são reversíveis dinamicamente, pois se o forem, é possível determinar a medida invariante do processo de maneira análoga a quando o modelo é reversível.

O conceito de reversibilidade dinâmica foi introduzido por Whittle [19], como forma de generalizar o conceito de reversibilidade. Suponhamos que um processo de Markov $\{X^t, t \geq 0\}$ é estacionário, com um conjunto de estados A . Para todo estado $i \in A$ definimos um estado conjugado $i^* \in A$ de tal maneira que $(i^*)^* = i$. Dizemos que o processo é reversível dinamicamente se X^t é estatisticamente indistinguível de $(X^{\tau-t})^*$ para todo τ e t , ou seja, se $(X^{t_1}, X^{t_2}, \dots, X^{t_n})$ tem a mesma distribuição que $((X^{\tau-t_1})^*, (X^{\tau-t_2})^*, \dots, (X^{\tau-t_n})^*)$ para todos $t_1, t_2, \dots, t_n$. A idéia é que muitas vezes o processo reverso $X^{\tau-t}$ não é estatisticamente indistinguível, mas se trocarmos alguns estados por outros de A , podemos tornar $X^{\tau-t}$ indistinguível de X^t .

Em Kelly [12] temos o seguinte teorema que dá uma condição necessária e suficiente para X^t ser dinamicamente reversível.

Teorema 3.1. *Seja X^t um processo de Markov estacionário tal que exista uma função $i \rightarrow i^*$ tal que*

$$q(i) = q(i^*), \quad i \in A. \quad (3.1)$$

X^t é dinamicamente reversível se e somente se existe uma coleção de números positivos $\mu(i)$, $i \in A$, que somam 1 e satisfazem

$$\mu(i) = \mu(i^*) \quad (3.2)$$

$$\mu(i)q(i, j) = \mu(j^*)q(j^*, i^*) \quad (3.3)$$

onde $i, j \in A$. Se existe tal coleção de números, então $\mu(i)$, $i \in A$, é a medida invariante do processo.

Prova: Suponhamos que o processo é dinamicamente reversível. Tomemos $\mu(i) = P(X^t = i)$. Como X^t é estatisticamente indistinguível de $(X^{\tau-t})^*$ para todo τ e t segue que $\mu(i) = \mu(i^*)$. Além disso temos que

$$P(X^t = i, X^{(t+\tau)} = j) = P((X^{(\tau-t)})^* = i^*, (X^{-t})^* = j^*)$$

então

$$\mu(i) \frac{P(X^{(t+\tau)} = j | X^t = i)}{\tau} = \mu(j^*) \frac{P((X^{(\tau-t)})^* = i^* | (X^{-t})^* = j^*)}{\tau}$$

Fazendo com que $\tau \rightarrow \infty$ obtemos a relação (3.3). Suponhamos agora que as relações (3.2) e (3.3) são válidas. Tomando $q'(i, j) = q(i^*, j^*)$ temos

$$q'(j, i) = \frac{\mu(i)q(i, j)}{\mu(j^*)} = \frac{\mu(i)q(i, j)}{\mu(j)},$$

e

$$q'(i) = \sum_{j \in A} q'(i, j) = \sum_{j \in A} q(i^*, j^*) = q(i).$$

Das duas equações acima obtemos que μ é a medida invariante para o processo X^t e para o processo reverso $X^{\tau-t}$, que tem taxas $q'(i, j)$ e é também estacionário e, portanto, estatisticamente indistinguível de X^t . Como $q'(i, j) = q(i^*, j^*)$, segue que X^t é dinamicamente reversível. ■

A partir do teorema acima podemos obter um análogo do critério de Kolmogorov para reversibilidade, que é o seguinte:

Critério. Seja X^t como definido no Teorema 3.1. X^t é dinamicamente reversível se e somente se as taxas de transição satisfazem

$$q(i_1, i_2)q(i_2, i_3) \cdots q(i_n, i_1) = q(i_1^*, i_n^*)q(i_n^*, i_{n-1}^*) \cdots q(i_2^*, i_1^*). \quad (3.4)$$

para toda sequência fechada de estados $i_1, i_2, \dots, i_n, i_1 \in A$.

Portanto para determinarmos se um processo é dinamicamente reversível basta verificar se as taxas satisfazem as condições (3.1) e (3.4).

Se obtivermos uma resposta afirmativa, podemos determinar a medida invariante usando a expressão

$$\mu(i) = \mu(i_0) \frac{q(i_0, i_1)q(i_1, i_2) \cdots q(i_n, i)}{q(i^*, i_n^*)q(i_{n-1}^*, i_{n-2}^*) \cdots q(i_1^*, i_0^*)}, \quad (3.5)$$

que é um análogo da expressão usada quando o processo é reversível.

Gates [7] e Gates e Wescott [8 e 10] escolheram como conjugado $-\bar{\eta}$, ou seja, multiplicar por -1 a altura de cada uma das pilhas de $\bar{\eta}$, o que dá o efeito de refletir a superfície em relação a pilha de altura mínima. Poderia ter sido escolhido um outro conjugado, mas eles afirmam ser este o mais natural para o problema, portanto, ao longo do texto, sempre estaremos nos referindo a esta e apenas esta definição de conjugado.

Vejamos o que acontece quando temos processos com taxas como as usadas por eles, primeiro no caso do Teorema 2.4, ou seja, em uma dimensão ($M = 1$). Para qualquer sequência fechada de configurações de $\bar{\eta}^t$, o produto das taxas é igual a $\beta_0^a \beta_1^b \beta_2^c$, onde a , b e c são os números de transições com cada uma das taxas. Como o ciclo termina onde começa, o número de transições que removem duas faces verticais expostas (taxa β_2) é igual a das que expõem duas faces (taxa β_0). Então o produto das taxas é da forma $\beta_1^b (\beta_0 \beta_2)^a$.

Observe que se $\bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta}'$ com taxa β_l , temos que l faces verticais expostas são cobertas, então no processo reverso a transição $-\bar{\eta}' \rightarrow -\bar{\eta}$ tem taxa β_{2-l} , pois as l faces tem que ser descobertas. Portanto o produto das taxas no processo reverso é também $\beta_1^b (\beta_0 \beta_2)^a$, então a condição (3.4) está satisfeita.

Para que a condição (3.1) também esteja satisfeita, é necessário que

$$\beta_l = \alpha + l\gamma, \quad (3.6)$$

onde $\alpha \geq 0$ e $\gamma > 0$. Vimos que se $\gamma = 0$ o processo $\bar{\eta}^t$ é ou recorrente nulo ou transitório. Portanto, não pode ser reversível dinamicamente. Assumimos, então, $\gamma > 0$. A condição (3.6) é equivalente a

$$\beta_0 + \beta_2 = 2\beta_1.$$

Para mostrar que a condição (3.1) é verdadeira observe que

$$q(\bar{\eta}) = L\alpha + r(\bar{\eta})\gamma$$

onde

$$r(\bar{\eta}) = \sum_{i=1}^N I_{\{g_{\bar{\eta}_i} > 0\}},$$

ou seja, o número de paredes da superfície. Mas pela definição de estado conjugado temos que $r(-\bar{\eta}) = r(\bar{\eta})$, e portanto, $q(\bar{\eta}) = q(-\bar{\eta})$.

Podemos agora calcular a medida invariante usando a expressão (3.5). Partindo de $\bar{\eta}_0$ podemos atingir qualquer configuração $\bar{\eta}$ apenas com transições que tenham taxas β_0 e β_1 . Assim, no processo reverso podemos ir de $-\bar{\eta}$ até $\bar{\eta}_0$ com taxas β_1 e β_2 . Temos então que

$$\mu(\bar{\eta}) = \mu(\bar{\eta}_0) \left(\frac{\beta_0}{\beta_2} \right)^j \quad (3.7)$$

onde j é o número de transições com taxa β_0 . Mas como cada transição desse tipo aumenta em 2 o número de faces verticais livres, podemos reescrever (3.7) da forma

$$\mu(\bar{\eta}) = \mu(\bar{\eta}_0) \left(\frac{\beta_0}{\beta_2} \right)^{H(\bar{\eta})/2}. \quad (3.8)$$

Se chamarmos

$$a = -\log \left(\frac{\beta_0}{\beta_2} \right)^{1/2},$$

temos que

$$\mu(\bar{\eta}) = \frac{e^{-aH(\bar{\eta})}}{K}, \quad (3.9)$$

onde K é uma constante renormalizadora. Esta é a chamada medida de Gibbs, com temperatura $1/a$, onde $H(\bar{\eta})$ é chamado de energia.

Podemos nos perguntar se (3.9) não é a medida invariante para os processos com taxas definidas como no Teorema 2.4, e não apenas quando temos o caso particular do processo ser dinamicamente reversível. A resposta a esta pergunta é negativa. Se fosse verdade, a medida teria que satisfazer a equação de equilíbrio

$$\mu(\bar{\eta}) \sum_{\bar{\eta}' \in \bar{S}} q(\bar{\eta}, \bar{\eta}') = \sum_{\bar{\eta}' \in \bar{S}} \mu(\bar{\eta}') q(\bar{\eta}', \bar{\eta}).$$

Se substituirmos a equação (3.8) na acima, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \mu(\bar{\eta}_0) \left(\frac{\beta_0}{\beta_2} \right)^{H(\bar{\eta})/2} q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+) &= \sum_{j=1}^N \mu(\bar{\eta}_0) \left(\frac{\beta_0}{\beta_2} \right)^{H(\bar{\eta}_j)/2} q(\bar{\eta}_j^-, \bar{\eta}) \\
\left(\frac{\beta_0}{\beta_2} \right)^{H(\bar{\eta})/2} \sum_{i=1}^N q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+) &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\beta_0}{\beta_2} \right)^{(H(\bar{\eta})-l_j)/2} q(\bar{\eta}_j^-, \bar{\eta}) \\
q(\bar{\eta}) &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\beta_0}{\beta_2} \right)^{-l_j/2} q(\bar{\eta}_j^-, \bar{\eta}), \quad (3.10)
\end{aligned}$$

onde l_j é o número de faces que a transição $\bar{\eta}_j^- \rightarrow \bar{\eta}$ acrescenta ou remove da superfície. Observe que se $q(\bar{\eta}_j^-, \bar{\eta}) = \beta_l$ então o j -ésimo termo da soma a direita de (3.10) será β_{2-l} , que é a taxa da transição $-\bar{\eta} \rightarrow -\bar{\eta}_j^+$, portanto a soma a direita de (3.10) resulta ser $q(-\bar{\eta})$. Assim a equação estará satisfeita se $q(\bar{\eta}) = q(-\bar{\eta})$, que pelo que já foi visto acima, só ocorre se o processo for dinamicamente reversível.

Vejamos agora o que acontece quando o processo é em duas dimensões. Da mesma maneira que em uma dimensão, se $\bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta}'$ com taxa β_l , então no processo reverso a transição $-\bar{\eta}' \rightarrow -\bar{\eta}$ tem taxa β_{4-l} , portanto se temos um ciclo fechado de estados tais que o produto das taxas é

$$A = \beta_0^a \beta_1^b \beta_2^c \beta_3^d \beta_4^e,$$

no processo reverso teremos o produto será

$$B = \beta_0^e \beta_1^d \beta_2^c \beta_3^b \beta_4^a.$$

Para que a condição (3.4) esteja satisfeita, $A = B$, necessitamos que $a = e$ e $b = d$. É fácil construir uma sequência fechada de configurações tal que estas duas igualdades não estejam satisfeitas. Vamos representar um configuração do processo $\bar{\eta}'$ por uma matriz, de maneira que cada posição (i, j) da matriz de a altura da pilha correspondente na configuração. Para $M = 2$ e $N = 3$ uma sequência seria:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calculando (3.1) para a sequência acima temos

$$\begin{aligned} A &= \beta_0^2 \beta_2 \beta_3^2 \beta_4, \\ B &= \beta_0 \beta_1^2 \beta_2 \beta_4^2, \end{aligned}$$

e, portanto, a igualdade não se verifica. Para outros tamanhos de reticulado podemos obter uma sequência que não verifica (3.4) completando a sequência acima de maneira ordenada. Portanto, quaisquer que sejam as taxas escolhidas, em duas dimensões não temos processos dinamicamente reversíveis.

A seguinte proposição mostra que o mesmo acontece com os processos como definidos nos Teoremas 2.2 e 2.3.

Proposição 3.1. *Não há nenhum processo $\bar{\eta}^t$ reversível dinamicamente com taxas como nos Teoremas 2.2 e 2.3 para $L > 2$.*

Prova: O processo reverso tem a seguinte propriedade

$$f_{-\bar{\eta}}(i, j) = \bar{f}_{\bar{\eta}}(i, j).$$

Para que a condição (3.1) esteja satisfeita para $\bar{\eta}$ com taxas da forma (2.4) necessitamos que

$$L\beta + \alpha \sum_{i,j} T(f_{\bar{\eta}}(i, j)) = L\beta + \alpha \sum_{i,j} T(\bar{f}_{\bar{\eta}}(i, j)).$$

Para processos com taxas da forma (2.6) necessitamos

$$\sum_{i,j} T(\alpha f_{\bar{\eta}}(i, j) + \beta) = \sum_{i,j} T(\alpha \bar{f}_{\bar{\eta}}(i, j) + \beta).$$

O único tipo de função que satisfaz ambas igualdades acima é a linear, o que reduz o problema a taxas da forma $q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^+) = \alpha f_{\bar{\eta}}(i, j) + \beta$. Basta agora mostrar que com estas taxas, para cada tamanho de reticulado existe pelo menos uma sequência de transições que não satisfaz a condição (3.4). Para $L = 3$ temos a seguinte a sequência de configurações:

$$\begin{aligned} (0 \ 0 \ 0) &\rightarrow (0 \ 1 \ 0) \rightarrow (0 \ 2 \ 0) \rightarrow (1 \ 2 \ 0) \rightarrow (1 \ 3 \ 0) \rightarrow \\ (1 \ 4 \ 0) &\rightarrow (2 \ 4 \ 0) \rightarrow (3 \ 4 \ 0) \rightarrow (4 \ 4 \ 0) \rightarrow (3 \ 3 \ 0) \rightarrow \\ (2 \ 2 \ 0) &\rightarrow (1 \ 1 \ 0) \rightarrow (0 \ 0 \ 0) \end{aligned}$$

Se calcularmos o termo à esquerda e à direita de (3.4) obtemos respectivamente

$$A = \beta^4(\beta + \alpha)(\beta + 2\alpha)^3(\beta + 3\alpha)(\beta + 4\alpha)(\beta + 6\alpha)(\beta + 8\alpha), \quad (3.11)$$

$$B = \beta^5(\beta + \alpha)(\beta + 2\alpha)(\beta + 3\alpha)(\beta + 4\alpha)^2(\beta + 5\alpha)(\beta + 7\alpha). \quad (3.12)$$

Só podemos ter (3.11) igual a (3.12) se $\alpha = 0$, mas como já vimos, neste caso o processo não é ergódico, e portanto não pode ser reversível dinamicamente. Para $L > 3$ podemos construir uma sequência completando a sequência acima colocando nas posições restantes quatro cubos de maneira ordenada. Em primeiro lugar completamos as posições $(1, 1), \dots, (1, 3)$ com a sequência acima, depois colocamos quatro cubos nas posições $(1, 4), \dots, (1, N), (2, 1), \dots, (2, N), \dots, (M, 1), \dots, (M, N)$ nesta ordem. ■

Capítulo 4

LEI DOS GRANDES NÚMEROS

Neste capítulo vamos mostrar uma lei dos grandes números quando olhamos o processo η^t da pilha mais alta. Para mostrar o resultado vamos usar o teorema ergódico subaditivo (Liggett [14]).

Teorema 4.1. *Suponha que $X_{m,n}, m \leq n$ sejam variáveis aleatórias que satisfazem as seguintes propriedades:*

- (a) $X_{0,0} = 0, X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$ para $0 \leq m \leq n$.
- (b) $\{X_{(n-1)k,nk}, n \geq 1\}$ é um processo estacionário para todo $k \geq 1$.
- (c) $\{X_{m,m+k}, k \geq 0\} = \{X_{m+1,m+k+1}, k \geq 0\}$ em distribuição para cada m .
- (d) $\mathbb{E}X_{0,1}^+ < \infty$

Seja $\alpha_n = \mathbb{E}X_{0,n} < \infty$, que está bem definido por (a), (b) e (d). Então

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} = \inf_{n \leq 1} \frac{\alpha_n}{n} \in [-\infty, \infty), \text{ e} \quad (4.1)$$

$$X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n} \text{ existe q.c., } -\infty \leq X_\infty < \infty. \quad (4.2)$$

Mais ainda $\mathbb{E}X_\infty = \alpha$. Se $\alpha > -\infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \frac{X_{0,n}}{n} - X_\infty \right| = 0.$$

Se o processo estacionário em (b) for ergódico, então $X_\infty = \alpha$ q.c..

Em primeiro lugar vamos considerar os processos η^t com taxas (2.4). Tudo que vai ser feito a seguir pode ser feito para processos com taxas

(2.6). Vamos definir um novo processo $\{\xi_m^t, t \geq 0\}$ sobre o mesmo espaço de probabilidades, como um cópia do processo η^t de tal maneira que

$$\xi_m^0(i, j) = \max(\eta^m)$$

para todo (i, j) , m inteiro positivo. Ou seja, no instante m completamos todas as pilhas e começamos uma nova cópia do processo. Podemos então definir as variáveis

$$X_{m,n} = \max(\xi_m^{n-m}) - \max(\eta^m),$$

se $n \geq m$, m e n números inteiros positivos, 0 caso contrário. Decorre da definição que

$$X_{0,n} = \max(\eta^n),$$

que dá a altura máxima da superfície até o instante n .

Vamos construir o processo η^t da seguinte maneira: para cada (i, j) de g vamos definir uma sequência de processos pontuais de Poisson $R^k(i, j)$ com taxas $\gamma(k)$ dadas por

$$\gamma(k) = \begin{cases} \alpha(T(k) - T(k-1)), & \text{se } k > 0, \\ \alpha T(0) + \beta, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Quando (i, j) “enxerga” k cubos ao seu redor, ela vai usar a primeira marca dos processos $0, \dots, k$, ou seja, o mínimo dos tempos até a primeira marca de cada um dos processos, portanto, a taxa de (i, j) é dada pela soma das taxas de $R^k(i, j)$, que dá a taxa que definimos, $\alpha T(f_\eta(i, j)) + \beta$. Isto pode ser feito porque T é uma função não decrescente.

Tendo construído o processo desta maneira, vamos verificar que as condições do Teorema 4.1 estão satisfeitas para as variáveis $X_{m,n}$. A condição (a) é verdadeira, pois da construção temos que quando o processo ξ_m^t ganha um cubo o processo η^t ganha um cubo na mesma posição, o que implica em

$$\max(\xi_m^{n-m}) \geq \max(\eta^n)$$

para todo $n > m$. Das propriedades dos processos de Poisson usados na construção do processo η^t , decorre que, fixado um k inteiro positivo, as variáveis $\{X_{(n-1)k,nk}, n \geq 1\}$ são independentes entre si e identicamente

distribuídas, que claramente formam um processo estacionário, o que satisfaz a condição (b) do teorema. Mais ainda, como este processo é composto de variáveis independentes ele é ergódico. A condição (c) também é verdadeira pois da construção observamos que a distribuição de $X_{m,n}$ somente depende da diferença $n - m$. Finalmente, a taxa máxima que o máximo aumenta de uma posição é dada por $L\gamma(0)$, assim podemos dominar $X_{0,n}$ por um processo pontual de Poisson R de taxa $L\gamma(0)$ e, portanto, a condição (d) está satisfeita.

Podemos agora determinar um limitante superior para o valor de α em (4.1). Como $X_{0,n}$ é estocasticamente menor que R temos que

$$\alpha_n = \mathbb{E}X_{0,n} \leq \mathbb{E}R = nL\gamma(0),$$

assim $\alpha \leq L\gamma(0)$, portanto, segue do teorema que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max(\eta^n)}{n} \leq L\gamma(0) \quad (4.3)$$

quase certamente.

Vamos passar agora para convergência em tempos reais. Fixado um ϵ qualquer positivo, temos que

$$P\left(\max_{n \leq t \leq n+1} (X_{0,t} - X_{0,n}) \geq \epsilon n\right) \leq P(R(1) \geq \epsilon n), \quad (4.4)$$

$$P\left(\max_{n-1 \leq t \leq n} (X_{0,n} - X_{0,t}) \geq \epsilon n\right) \leq P(R(1) \geq \epsilon n). \quad (4.5)$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(R(1) \geq \epsilon n) < \infty,$$

para qualquer ϵ positivo, pelo Lema de Borel–Cantelli temos que a probabilidade dos eventos descritos nos termos à esquerda de (4.4) e (4.5) ocorrerem um número infinito de vezes é 0. Portanto, com probabilidade 1, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um n^* tal que para qualquer $n \geq n^*$

$$\left(\frac{\max_{n \leq t \leq n+1} X_{0,t}}{n} - \frac{X_{0,n}}{n} \right) < \epsilon,$$

e

$$\left(\frac{X_{0,n}}{n} - \frac{\max_{n \leq t \leq n+1} X_{0,t}}{n} \right) < \epsilon.$$

Assim temos que

$$\frac{X_{0,n}}{n} - \epsilon < \frac{\max_{n \leq t \leq n+1} X_{0,t}}{n} < \frac{X_{0,n}}{n} + \epsilon,$$

para $n \geq n^*$, quase certamente. Tomando o limite da expressão acima quando $n \rightarrow \infty$, obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_{0,t}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\max(\eta^t)}{t} \leq L\gamma(0).$$

O mesmo podemos fazer para taxas do tipo (2.7). Basta construirmos o processo η^t definindo para cada posição de G cinco processos pontuais de Poisson $R^k(i, j)$ com taxas

$$\gamma(k) = \begin{cases} \beta_k - \beta_{k-1}, & \text{se } k > 0, \\ \beta_0, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Pelo mesmo raciocínio obtemos o resultado (4.3).

Capítulo 5

TEOREMAS DO LIMITE CENTRAL

Nesse capítulo estabeleceremos teoremas de limite central para alguns modelos utilizando-se de resultados da teoria da renovação.

Dizemos que ocorre uma renovação no instante t se $\bar{\eta}^t = \bar{\eta}_0$, onde $\bar{\eta}^0 = \bar{\eta}_0$. Seja U_i o tempo entre a $i - 1$ e a i -ésima renovação, $U_0 = 0$. Seja também V_i a diferença de altura entre as superfícies da $i - 1$ e i -ésima renovação, $V_0 = 0$. Pela definição de $\bar{\eta}^t$, as variáveis U_i são independentes e identicamente distribuídas à variável U , o tempo do primeiro retorno. Também o são as variáveis V_i , que são identicamente distribuídas à variável V , mas V_i não é independente de U_i . Portanto, podemos definir o processo de renovação

$$N(t) = \max\{n : \sum_{i=0}^n U_i \leq t\}. \quad (5.1)$$

Seja

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} V_i, \quad (5.2)$$

o deslocamento efetivo da superfície até o instante t . Se pensarmos em V_i como a recompensa obtida da i -ésima renovação, $S(t)$ é a recompensa total obtida até o instante t .

Nesse capítulo estaremos interessados em saber o que ocorre com a quantia

$$\frac{S(t) - \mathbb{E}(S(t))}{\sqrt{t}} \quad (5.3)$$

quando $t \rightarrow \infty$. O fato que (5.3) converge para uma normal quando $S(t)$ tem os dois primeiros momentos finitos é bem conhecido (veja Ross [16],

por exemplo). Assim, nosso problema vai ser mostrar quando $\mathbb{E}S(t) < \infty$ e $\mathbb{E}(S(t)^2) < \infty$.

Inicialmente vamos estudar os processos $\{\bar{\eta}^t, t \geq 0\}$ com taxas definidas como nos Teoremas 2.2 e 2.3. Para mostramos o que acontece com (5.3) vamos necessitar de alguns resultados. O primeiro deles diz respeito ao tempo entre renovações do processo.

Proposição 5.1. *Seja o processo $\{\bar{\eta}^t, t \geq 0\}$ com taxas (2.4) ou (2.6). Então $\mathbb{E}_{\bar{\eta}}(U^n) < \infty$ para todo $n > 0$.*

Prova: Vamos definir um novo processo $\{\xi^t, t \geq 0\}$, que é não-Markoviano, a partir de $\{\bar{\eta}^t, t \geq 0\}$ da seguinte maneira

$$\xi^t = \sum_{i,j} (\max(\bar{\eta}^t) - \bar{\eta}^t(i, j)) .$$

Este novo processo nada mais é que a aplicação da função (2.5), usada na prova dos Teoremas 2.2 e 2.3, sobre $\bar{\eta}^t$, portanto o que foi já foi dito sobre ela se aplica aqui sem modificações. Esse processo tem as seguintes probabilidades de transição

$$\begin{aligned} P(\xi^{t+\delta} = n - 1 | \xi^t = n) &= \delta q'(\bar{\eta}^t) + o(\delta) \\ P(\xi^{t+\delta} = n + L - 1 | \xi^t = n) &= \delta \beta n \max(\bar{\eta}^t) + o(\delta) \end{aligned}$$

onde

$$q'(\bar{\eta}) = q(\bar{\eta}) - \beta n \max(\bar{\eta}),$$

ou seja a taxa total de todas as posições de G com altura inferior a altura máxima.

Este processo pode ser visto como um passeio aleatório que quando ocorre um salto, ele salta à direita $L - 1$ posições e à esquerda apenas uma posição. No apêndice estudamos algumas propriedades deste tipo de passeio, só que da forma como as probabilidades de transição foram definidas não podemos usar os resultados obtidos no apêndice para o processo ξ^t . Isto se deve ao fato que distintas configurações η podem gerar um mesmo valor da função (2.5). Vamos então dominar este processo por outro, este sim um processo de Markov, que chamaremos de $\bar{\xi}^t$, com taxas adequadas

de forma podermos usar o que sabemos do passeio. As probabilidades de transição do processo $\bar{\xi}^t$ são

$$\begin{aligned} P(\bar{\xi}^{t+\delta} = n-1 | \bar{\xi}^t = n) &= \delta\alpha_n + o(\delta) \\ P(\bar{\xi}^{t+\delta} = n+L-1 | \bar{\xi}^t = n) &= \delta L\beta + o(\delta) \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_n = \min\{q'(\bar{\eta}) \mid y(\bar{\eta}) = n\}, \quad n > 0. \quad (5.4)$$

A sequência definida acima é monótona crescente e, portanto, tem a seguinte propriedade

$$\exists K \mid \alpha_i > L\beta, \quad \forall i \geq K.$$

Vamos considerar que $\bar{\xi}^t$ só tenha os estados $i, i+1, \dots$, onde $i \geq K$, e que no instante $t=0$ temos $\bar{\xi}^0 = i$. Chamemos de R_i o instante do primeiro retorno do processo ao ponto de partida. Então $\mathbb{E}_{\bar{\xi}}(R_i^n) < \infty$ para todo $i \geq K$ e $n > 0$. Para justificar tal afirmação basta definirmos um passeio $\{X^t, t \geq 0\}$ sobre o mesmo espaço de probabilidades com taxas

$$q(x, x+L-1) = L\beta, \quad q(x, x-1) = \alpha_K,$$

de tal maneira que toda vez que ocorre uma transição do processo X^t ocorre também em $\bar{\xi}^t$. Este passeio é o do tipo estudado no apêndice e tem todas as propriedades ali exibidas. Temos então que X^t é estocasticamente maior que $\bar{\xi}^t$, e portanto, $\mathbb{E}_{\bar{\xi}}(R_i^n) \leq \mathbb{E}_X(R^n) < \infty$.

Para terminar a prova, procedemos por indução. Suponhamos agora que $\bar{\xi}^t$ tenha os estados $K-1, K, \dots$. Estando no estado $K-1$ no instante $t=0$ o processo espera um tempo exponencial de parâmetro α_{K-1} para saltar à direita para o estado $K+L-2$. Chamemos de Y o tempo que o processo leva para atingir deste estado o estado K . Pelo que já vimos acima, $\mathbb{E}_{\bar{\xi}}(Y^n) < \infty$ para qualquer $n > 0$. Estando em K , ou o processo salta para $K-1$ ou salta à direita. Seja a variável aleatória Z , o número de vezes que o processo passa por K antes de voltar a $K-1$. Z tem distribuição geométrica de parâmetro $\alpha_K/(\alpha_K + L\beta)$. Então podemos expressar o tempo de volta a $K-1$ por

$$R_{K-1} = Y + W + \sum_{i=0}^Z R_K, \quad (5.5)$$

onde W é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro α_{K-1} . Como todas as variáveis envolvidas na soma à direita de (5.5) tem todos os momentos finitos e são independentes entre si, temos que $\mathbb{E}_{\bar{\xi}}(R_{K-1}^n) < \infty$.

Podemos repetir o raciocínio acima para $K-2, \dots, 0$. Portanto temos que $\mathbb{E}_{\bar{\xi}}(R_i^n) < \infty$ para todo $i > 0$ e $n > 0$. Como $\bar{\xi}^t$ domina ξ^t , concluímos que para o processo ξ^t , $\mathbb{E}_{\xi}(R_i^n) < \infty$. Mas $\mathbb{E}_{\xi}(R_0^n) < \infty$ implica que $\mathbb{E}_{\bar{\eta}}(U^n) < \infty$. ■

Esta proposição que acabamos de provar serve de prova alternativa para os Teoremas 2.2 e 2.3. Note que as provas não são equivalentes, pois não é verdade que se o Teorema 2.1 vale para um processo então podemos dominá-lo por um passeio aleatório com as características acima. Como exemplo desta afirmação tomemos o processo $\{X^t, t \geq 0\}$, com espaço de estados dado pelo conjunto dos naturais, de taxas

$$q(x, 0) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\epsilon}, \quad q(x, x+1) = 1 - q(x, 0).$$

Claramente não podemos dominar X^t por um passeio aleatório, mas tomando a função $y_j = j$ podemos mostrar que vale o Teorema 2.1. Para qualquer x temos que $q(x) = 1$, então

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j} y_j &= q^{-1}(i) (0q(i, 0) + (i+1)q(i, i+1)) \\ &= (i+1) \left(1 - \frac{1}{i} - \frac{1}{\epsilon}\right). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Para que a condição (2.1) fique satisfeita, necessitamos que a soma (5.6) seja menor ou igual a $i - \epsilon$. a menos de um número finito de estados, ou seja

$$\frac{1}{\epsilon}(i+1) + \frac{1}{i} \geq \epsilon.$$

Portanto, dado um ϵ qualquer positivo, para $i > \epsilon^2$, a condição (2.1) está satisfeita. Para $i \leq \epsilon^2$ a soma (5.6) é sempre finita, o que implica que a condição (2.2) também é verdadeira. Vale então o Teorema 2.1 para o processo $\{X^t, t \geq 0\}$, sem que ele possa ser dominado por um passeio aleatório recorrente positivo.

Proposição 5.2. *As variáveis (U_i, V_i) tem todos os momentos e são independentes entre si.*

Prova: Já vimos que (U_i, V_i) são independentes. Que as variáveis U_i tem todos os momentos vem da Proposição 5.1 e do fato delas serem independentes e identicamente distribuídas.

Observe que se $U_i = t$ e $V_i = a$, temos que durante este tempo t a superfície ganhou aL cubos. Então, a relação entre U e V é dada por

$$U_i = \sum_{j=1}^{LV_i} A_j,$$

onde A_j são variáveis aleatórias independentes, com distribuição exponencial onde os parâmetros são dados pela sequência de transições do esqueleto discreto do processo. Seja então a variável aleatória exponencial A de parâmetro dado pelo máximo das taxas de A_n . Portanto, A é estocasticamente menor que qualquer A_n . Como

$$\mathbb{E}U_i^2 \geq L^2 \mathbb{E}V_i^2 + L \mathbb{E}V_i(\mathbb{E}A^2 - \mathbb{E}^2 A),$$

temos que

$$\mathbb{E}V_i^2 \leq \frac{\mathbb{E}U_i^2}{L} < \infty,$$

pois U_i tem todos os momentos finitos. Para mostrar que os outros momentos de V_i também são finitos, basta utilizar outras desigualdades como a usada acima. Para o que se segue, basta mostrar que o segundo é finito. O raciocínio é análogo para processos com taxas da forma (2.6). ■

Vamos chamar de $\mu_U = \mathbb{E}U$, $\mu_V = \mathbb{E}V$, $\sigma_U^2 = \text{Var}(U)$ e $\sigma_V^2 = \text{Var}(V)$. Podemos enumerar agora os seguintes resultados sobre $N(t)$:

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu_U} \quad q.c. \quad (5.7)$$

$$\mathbb{E}N(t) - \frac{t}{\mu_U} \rightarrow \frac{\mathbb{E}U^2}{2\mu_U^2} - 1 \quad q.c. \quad (5.8)$$

$$\mathbb{E}V_{N(t)+1} \rightarrow \frac{\mathbb{E}(VU)}{\mu_U} \quad (5.9)$$

quando $t \rightarrow \infty$. Todos eles podem ser encontrados com todos os detalhes no capítulo 3 do livro do Ross [16].

O seguinte resultado de Billingsley [1] sobre somas parciais será necessário no que vem a seguir.

Lema 5.1. *Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes com $\mathbb{E}(X_i) = 0$ e $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$, $i = 1, 2, \dots$. Seja $m(t)$ uma variável aleatória positiva que só assume valores inteiros tal que $m(t)/t$ converge em probabilidade para uma constante $c > 0$. Então quando $t \rightarrow \infty$*

$$\frac{(\sum_{i=1}^{m(t)} X_i - \sum_{i=1}^{\lfloor ct \rfloor} X_i)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0.$$

Podemos agora enunciar o teorema que diz o que acontece com (5.3) quando o processo tem taxas como (2.4) e (2.6).

Teorema 5.1. *Se $\{\bar{\eta}^t, t \geq 0\}$ é um processo com taxas (2.4) ou (2.6), então*

$$\frac{S(t) - \mathbb{E}S(t)}{\sqrt{t}} \rightarrow N(0, \frac{1}{\mu_U^3} \mathbb{E}(\mu_U V - \mu_V U)^2)$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Prova: Temos que

$$\begin{aligned} S(t) - \mathbb{E}S(t) &= \sum_{i=0}^{N(t)} V_i - \sum_{i=0}^{N(t)+1} \mathbb{E}V_i + \mathbb{E}V_{N(t)+1} - \frac{\mu_V}{\mu_U} \sum_{i=0}^{N(t)+1} (U_i - \mu_U) \\ &\quad + \frac{\mu_V}{\mu_U} \sum_{i=0}^{N(t)+1} (U_i - \mu_U) \\ &= \sum_{i=0}^{N(t)} V_i - \mathbb{E}(N(t) + 1)\mu_V + \mathbb{E}V_{N(t)+1} - \frac{\mu_V}{\mu_U} \sum_{i=0}^{N(t)+1} (U_i - \mu_U) \\ &\quad + \frac{\mu_V}{\mu_U} \sum_{i=0}^{N(t)+1} U_i - (N(t) + 1)\mu_V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{N(t)} (V_i - \mu_V) - \frac{\mu_V}{\mu_U} \sum_{i=0}^{N(t)} (U_i - \mu_U) + \mathbb{E}V_{N(t)+1} \\
&\quad - \mu_V \left(\mathbb{E}(N(t) + 1) - \frac{1}{\mu_U} \sum_{i=0}^{N(t)+1} U_i \right) - \frac{\mu_V}{\mu_U} U_{N(t)+1}.
\end{aligned}$$

A justificativa para a passagem da linha 1 para 2 é que $N(t)+1$ é um tempo de parada para $U_1, U_2, \dots$ e para $V_1, V_2, \dots$. De fato

$$N(t) + 1 = n \leftrightarrow U_1 + \dots + U_{n-1} \leq t, \quad U_1 + \dots + U_n > t.$$

Observe que como $t \leq \sum_{i=1}^{N(t)+1} U_i$ temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\mathbb{E}(N(t) + 1) - \frac{1}{\mu_U} \sum_{i=0}^{N(t)+1} U_i \right)}{\sqrt{t}} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\mathbb{E}(N(t) + 1) - \frac{t}{\mu_U} \right)}{\sqrt{t}} = 0,$$

devido a (5.8). De (5.9) obtemos

$$\frac{\mathbb{E}V_{N(t)+1}}{\sqrt{t}} \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$. Portanto

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t) - \mathbb{E}S(t)}{\sqrt{t}} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\sum_{i=0}^{N(t)} (V_i - \mu_V) - \frac{\mu_V}{\mu_U} \sum_{i=0}^{N(t)} (U_i - \mu_U) \right) \\
&= \frac{1}{\mu_U} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\mu_U \sum_{i=0}^{\lfloor t/\mu_U \rfloor} (V_i - \mu_V) - \mu_V \sum_{i=0}^{\lfloor t/\mu_U \rfloor} (U_i - \mu_U) \right) \\
&= \frac{1}{\mu_U \sqrt{\mu_U}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t/\mu_U}} \left(\mu_U \sum_{i=0}^{\lfloor t/\mu_U \rfloor} (V_i - \mu_V) - \mu_V \sum_{i=0}^{\lfloor t/\mu_U \rfloor} (U_i - \mu_U) \right)
\end{aligned}$$

devido a (5.7) e o Lema 5.1. Vamos usar agora o raciocínio usado por Siegmund [17]. Da Proposição 5.2 sabemos que os pares $(U_i - \mu_U, V_i - \mu_V)$

são independentes entre si, e tem uma matriz de covariância finita, portanto segundo o teorema do limite central multivariado (Feller [3]) convergem para uma normal bivariada com que tem o vetor de médias todo nulo e a mesma matriz de covariância. Sabendo-se que, se X, Y tem distribuição normal bivariada então a diferença $X - Y$ tem distribuição normal, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t/\mu_U}} \left(\mu_U \sum_{i=0}^{[t/\mu_U]} (V_i - \mu_V) - \mu_V \sum_{i=0}^{[t/\mu_U]} (U_i - \mu_U) \right)$$

converge para uma normal de média zero e variância dada por $\mathbb{E}(\mu_V U - \mu_U V)^2$. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t) - \mathbb{E}S(t)}{\sqrt{t}} = N(0, \frac{1}{\mu_U^3} \mathbb{E}(\mu_U V - \mu_V U)^2).$$

Observe que a variância da normal acima não é nula, pois U e V não são proporcionais. De fato, fixado um t qualquer, basta tomar o evento $\{U = t, V = v\}$ e observar que para qualquer v inteiro positivo, ele tem uma probabilidade positiva de ocorrer. ■

Podemos mostrar o mesmo resultado para os processos como definidos no Teorema 2.4 quando são dinamicamente reversíveis. Observe que neste caso a Proposição 5.1 não pode ser usada para mostrar que U_i tem todos os momentos, pois não é possível dominar o processo pelo mesmo tipo de passeio; mas já sabemos, do Teorema 2.4, que μ_U é finita. Necessitamos apenas mostrar que o segundo momento também é finito, para obtermos o resultado desejado. O próximo teorema nos dá uma condição para termos o segundo momento, mas antes de prova-lo necessitamos de alguns fatos.

Na teoria da renovação a quantia

$$Res(t) = S(N(t) + 1) - t$$

é chamada de resíduo no instante t . Ela dá o tempo que falta até a ocorrência da próxima renovação. Em Ross [16] encontramos o seguinte resultado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}Res(t) = \frac{\mathbb{E}(U^2)}{2\mu_U}, \quad (5.10)$$

se $\mathbb{E}(U^2) < \infty$. Chamemos de tempo residual, denotado por Res_∞ , o limite em distribuição de $Res(t)$. Assim, a distribuição do tempo residual é dada por

$$P(Res_\infty > s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(S(N(t) + 1) - t > s). \quad (5.11)$$

Pensemos no caso geral em que $\{X^t, t \geq 0\}$ é um processo de Markov irreduzível e regular, com espaço de estados enumerável A , $X^0 = x_0$, onde x_0 é um estado qualquer de A . Vamos considerar U_i o tempo da i -ésima volta do processo a x_0 e $N(t)$ o processo de renovação induzido por estas variáveis.

Seja μ a medida invariante de X^t . Vamos acoplar a X^t um processo X_μ^t , tal que $P(X_\mu^0 = x) = \mu(x)$. O acoplamento é feito da seguinte maneira: os dois processos são independentes até o momento que se encontram, a partir deste instante passam a ter sempre a mesma configuração. Sejam as variáveis aleatórias U_i^μ , o tempo da i -ésima volta do processo X_μ^t a x_0 , em particular, U_0^μ , o tempo do primeiro retorno a x_0 . Note que U_0^μ não tem a mesma distribuição de U_i^μ , $i \geq 1$, e que U_i têm a mesma distribuição de U_i^μ , para $i \geq 1$. Assim, podemos pensar que U_i^μ induz um processo de renovação atrasado (Delayed Renewal Process) $N_\mu(t)$.

Lema 5.2. Se $\mathbb{E}U < \infty$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X^s \neq X_\mu^s, \text{ para todo } s \leq t) = 0$.

Prova: Da teoria da renovação sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_\mu(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}U},$$

onde $\mathbb{E}U < \infty$, por hipótese. Temos ainda que ambos os processos tem a mesma medida invariante. Vamos mostrar que o resultado vale para processos a tempo discreto aperiódicos. Seja o evento R_n , as duas cadeias se encontram no mesmo estado após o n -ésimo salto. Seja $P(i, j)$, $i, j \in A$, as probabilidades de transição das cadeias, portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P^n(x, y)}{n} = \mu(y), \quad (5.12)$$

para qualquer $x \in A$. Temos que o número médio de encontros é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}R &= \sum_{m=1}^{\infty} P(R_m) \\
&\geq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{x \in A} P^m(x_0, x) \sum_{y \in A} \mu(y) P^m(y, x) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{x \in A} P^m(x_0, x) \mu(x) \\
&\geq \sum_{m=1}^{\infty} P^m(x_0, x_0) \mu(x_0)
\end{aligned}$$

Como $\mu(x_0)$ é positivo e de (5.12) sabemos que existe um m tal que $P^n(x_0, x_0) > 0$, para todo $n > m$, temos que $\mathbb{E}R = \infty$. Assim, com probabilidade 1 as duas cadeias a tempo discreto se encontram após um número finito de saltos. Para provar o resultado para cadeias a tempo contínuo, considere as cadeias de Markov a tempo discreto $\bar{X}^n$ e $\bar{X}_\mu^n$, $n \in \mathbb{N}$, os processos observados em instantes inteiros. Observe que ambas as cadeias são aperiódicas. Como estas cadeias são recorrentes positivas, elas se encontram em um número finito de passos com probabilidade 1, o que implica que X^t e X_μ^t também o fazem em um tempo finito com probabilidade 1. ■

Podemos provar agora o seguinte lema, devido a Ferrari, Martinez e Picco [5].

Lema 5.3. *Se $\mathbb{E}U < \infty$ então $Res_\infty = U_\mu$ em distribuição.*

Prova: Temos que

$$P(Res_\infty < s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{x \in A} P(X^t = x) P(U_x < s), \quad (5.13)$$

onde U_x é o tempo que o processo leva, partindo de x , para atingir x_0 . Como μ é a medida invariante de η^t , temos $P(X_\mu^t = x) = \mu(x)$, assim

$$\begin{aligned}
P(U_\mu < s) &= \sum_{x \in A} P(X_\mu^0 = x) P(U_x < s) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{x \in A} P(X_\mu^t = x) P(U_x < s). \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Então, de (5.13) e (5.14) temos

$$\begin{aligned}
& |P(Res_\infty < s) - P(U_\mu < s)| \\
& \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{x \in A} |P(X^t = x) - P(X_\mu^t = x)| P(U_x < s) \\
& \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{x \in A} \mathbb{E} |1\{X^t = x\} - 1\{X_\mu^t = x\}| P(U_x < s) \\
& \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sum_{x \in A} |1\{X^t = x\} - 1\{X_\mu^t = x\}| \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} 2\mathbb{E} 1\{X^t \neq X_\mu^t\} \\
& \leq \lim_{t \rightarrow \infty} 2P(X^s \neq X_\mu^s, \text{ para todo } s \leq t).
\end{aligned}$$

A passagem da linha 3 para 4 se justifica observando que só dois termos da soma podem ser diferentes de zero, justamente quando os processos exibem superfícies diferentes. Devido ao acoplamento, isto é equivalente a dizer que até aquele instante os dois processos sempre foram distintos. Como por hipótese a cadeia é recorrente positiva, do Lema 5.2 temos que

$$|P(Res_\infty < s) - P(U_\mu < s)| = 0,$$

portanto $Res_\infty = U_\mu$ em distribuição. ■

O seguinte teorema nos dá uma condição suficiente para a existência do segundo momento em processos de Markov recorrentes positivos.

Teorema 5.2. *Seja $\{X^t, t \geq 0\}$ um processo de Markov tal que exista uma função $y(x)$ que satisfaça as condições do Teorema 2.1 para a cadeia imersa de X^t . Se*

$$\sum_{x \in A} \mu(x) y(x) < \infty, \quad (5.15)$$

onde $\mu(x)$ é a medida invariante do processo X^t , então $\mathbb{E}U^2 < \infty$.

Prova: Seja o processo ξ^t , tal que

$$q_\xi(x, x') = \begin{cases} \mu(x'), & \text{se } x = x_0, \\ q_X(x, x'), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este novo processo tem todas as taxas, a menos das de x_0 , iguais as do processo X^t . Tomando a cadeia imersa de ξ^t , decorre das condições da hipótese que o Teorema 2.1 também vale para a cadeia imersa de ξ^t . Pela Proposição 2.1 temos que ξ^t é recorrente positivo. Isto implica que $\mathbb{E}U_\mu < \infty$.

Como $\mu_U < \infty$ de Ross [16] temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\text{Res}(t) \leq x) = \int_0^x \frac{P(U > y)}{\mu_U} dy.$$

Então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\text{Res}_\infty &= \int_0^\infty \lim_{t \rightarrow \infty} P(\text{Res}(t) \leq x) dx \\ &= \frac{1}{\mu_U} \int_0^\infty \int_x^\infty P(U > y) dy dx \\ &= \frac{1}{\mu_U} \int_0^\infty \int_x^\infty y dF_U(y) dx \\ &= \frac{1}{\mu_U} \int_0^\infty \int_0^y x dx dF_U(y) \\ &= \frac{1}{2\mu_U} \int_0^\infty y^2 dF_U(y) \\ &= \frac{\mathbb{E}(U^2)}{2\mu_U} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Do Lema 5.3 temos que $\mathbb{E}\text{Res}_\infty < \infty$. Então de (5.16) obtemos que $\mathbb{E}(U^2) < \infty$. ■

Podemos enunciar agora o seguinte teorema.

Teorema 5.3. *Seja $\{\bar{\eta}^t, t \geq 0\}$ um processo com taxas como definidas no Teorema 2.4. Se $\bar{\eta}^t$ for dinamicamente reversível então*

$$\frac{S(t) - \mathbb{E}S(t)}{\sqrt{t}} \rightarrow N(0, \frac{1}{\mu_U^3} \mathbb{E}(\mu_U V - \mu_V U)^2),$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Prova: Em primeiro lugar, usando a função (2.8) e a expressão (3.8), vamos verificar se a condição (5.15) do Teorema 5.2 está satisfeita para o processo $\bar{\eta}^t$. Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\bar{\eta} \in \bar{S}} \mu(\bar{\eta}) y(\bar{\eta}) &= \sum_{\bar{\eta} \in \bar{S}} \frac{e^{-aH(\bar{\eta})}}{K^*} \sum_{i=1}^N g_{\bar{\eta}}^2(i) \\
&= \frac{1}{K^*} \sum_{\bar{\eta} \in \bar{S}} \sum_{i=1}^N \frac{g_{\bar{\eta}}^2(i)}{e^{aH(\bar{\eta})}} \\
&< \frac{N}{K^*} \sum_{\bar{\eta} \in \bar{S}} \frac{\max\{g_{\bar{\eta}}^2(i), i = 1, \dots, N\}}{e^{aH(\bar{\eta})}} \\
&\leq \frac{N}{4K^*} \sum_{\bar{\eta} \in \bar{S}} \frac{H(\bar{\eta})^2}{e^{aH(\bar{\eta})}}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

A passagem da linha 3 para 4 se justifica observando que

$$H(\bar{\eta}) \geq 2 \max\{g_{\bar{\eta}}(i), i = 1, \dots, N\},$$

para qualquer $\bar{\eta} \in \bar{S}$. Como $\bar{S}$ é um conjunto enumerável, podemos ordená-lo segundo o número de faces livres da superfície. Seja s_i , $i = 0, 1, \dots$, o i -ésimo elemento de $\bar{S}$, segundo a ordenação. Então

$$H(s_i) \leq 2i. \tag{5.18}$$

Portanto, de (5.17) e (5.18) temos

$$\sum_{\bar{\eta} \in \bar{S}} \mu(\bar{\eta}) y(\bar{\eta}) < \frac{N}{K^*} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{e^{aH(s_i)}}. \tag{5.19}$$

Chamando

$$a_i = \frac{i^2}{e^{aH(s_i)}},$$

temos que

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{(i+1)^2 e^{aH(s_i)}}{i^2 e^{aH(s_{i+1})}} \leq \frac{(i+1)^2}{i^2},$$

já que $H(s_i) \leq H(s_{i+1})$. Como a soma de $1/i^2$ converge, temos que (5.19) é finito, e a condição (5.15) está satisfeita. Portanto, do Teorema 5.2 temos que σ_U^2 é finita.

Utilizando o mesmo raciocínio usado na prova da Proposição 5.2 obtemos que os dois primeiros momentos de V são também finitos. Para obtermos o resultado desejado basta repetir a prova do Teorema 5.1. ■

Capítulo 6

O CASO SIMÉTRICO

Vamos estudar agora o modelo quando a superfície tanto pode ganhar como perder cubos. De novo, queremos encontrar condições para as taxas de forma que o processo $\bar{\eta}^t$ seja recorrente positivo. Como agora as pilhas podem ganhar e perder cubos, é natural perguntar se o processo pode ser reversível, ou seja, se satisfaz as relações

$$\mu(\bar{\eta})q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^+) = \mu(\bar{\eta}_{i,j}^+)q(\bar{\eta}_{i,j}^+, \bar{\eta}) \quad (6.1)$$

$$\mu(\bar{\eta})q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^-) = \mu(\bar{\eta}_{i,j}^-)q(\bar{\eta}_{i,j}^-, \bar{\eta}) \quad (6.2)$$

onde μ é a medida invariante do processo. Se tivermos taxas da forma

$$q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^+) = \frac{\mu(\bar{\eta}_{i,j}^+)}{\mu(\bar{\eta}_{i,j}^+) + \mu(\bar{\eta})} \quad (6.3)$$

a relação (6.1) estará satisfeita. Analogamente

$$q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^-) = \frac{\mu(\bar{\eta}_{i,j}^-)}{\mu(\bar{\eta}_{i,j}^-) + \mu(\bar{\eta})} \quad (6.4)$$

para a relação (6.2). Uma possível medida é a de Gibbs

$$\mu(\bar{\eta}) = \frac{\exp\{-a \sum_{\langle x,y \rangle} |\bar{\eta}(x) - \bar{\eta}(y)|\}}{K} = \frac{e^{-aH(\bar{\eta})}}{K}, \quad (6.5)$$

onde $\langle x, y \rangle$ são os pares (x, y) tais que x e y são vizinhos, como definido no capítulo 1, e K é uma constante renormalizadora. Ela dá um peso pequeno para aquelas configurações muito rugosas, e um peso grande para

aquelas mais lisas. De fato esta é uma medida invariante e reversível para as taxas (6.3) e (6.4). Quando temos uma transição $\bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta}_{i,j}^+$,

$$H(\bar{\eta}_{i,j}^+) = H(\bar{\eta}) + n_{\bar{\eta}}(i, j),$$

onde

$$n_{\bar{\eta}}(i, j) = 2(2 - l_{\bar{\eta}}(i, j))$$

é o número de faces que são acrescentadas a superfície pelo ganho de um cubo em (i, j) , $n \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$. Temos então que a taxa é dada por

$$q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^+) = \frac{e^{-a(H(\bar{\eta}) + n_{\bar{\eta}}(i, j))}}{e^{-aH(\bar{\eta})} + e^{-a(H(\bar{\eta}) + n_{\bar{\eta}}(i, j))}} = \frac{e^{-an_{\bar{\eta}}(i, j)}}{1 + e^{-an_{\bar{\eta}}(i, j)}}. \quad (6.6)$$

Analogamente, quando temos a perda de um cubo,

$$H(\bar{\eta}_{i,j}^-) = H(\bar{\eta}) - n_{\bar{\eta}}(i, j)$$

e, portanto,

$$q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i,j}^-) = \frac{e^{an_{\bar{\eta}}(i, j)}}{1 + e^{an_{\bar{\eta}}(i, j)}}. \quad (6.7)$$

Algumas observações são necessárias a respeito destas taxas. Em primeiro lugar, elas tornam o processo simétrico, ou seja, $q(\eta, \eta') = q(-\eta, -\eta')$ para todo $\eta, \eta' \in S$. Em segundo lugar, observe que as taxas só dependem do número de paredes que a posição (i, j) “enxerga” para cima (6.6) e para baixo (6.7). Assim, vamos chamar de β_i^+ a taxa com que uma pilha ganha um cubo quando ela “enxerga” i paredes acima, e β_i^- quando a pilha perde um cubo quando existem i paredes abaixo.

Quando $M = 1$, temos que β_i^+ e β_i^- são lineares em i . Neste caso, o seguinte resultado foi provado por Ferrari [4] usando martingais. Aqui o extendemos para o caso geral.

Teorema 6.1. *Seja $M = 1$ e $\{\eta', t \geq 0\}$ um processo com taxas*

$$\beta_0^+ < \beta_1^+ < \beta_2^+ \quad \text{e} \quad \beta_0^- < \beta_1^- < \beta_2^-,$$

onde $\beta_i^+ = \beta_i^-$ para todo i . Então o processo é reversível e tem medida invariante (6.5) onde

$$a = -\log \left(\frac{\beta_0^+}{\beta_2^+} \right)^{1/2}. \quad (6.8)$$

Além disso,

$$\frac{S(t) - \mathbb{E}S(t)}{\sqrt{t}} \rightarrow N\left(0, \frac{1}{\mu_U^3} \mathbb{E}(\mu_U V - \mu_V U)^2\right), \quad (6.9)$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Prova: Em primeiro lugar vamos mostrar que a cadeia imersa do processo $\bar{\eta}^t$ também satisfaz as condições do Teorema 2.1, fazendo uma prova semelhante a do Teorema 2.4. Usando-se as funções (2.8) e (2.9) obtemos

$$\begin{aligned} y(\bar{\eta}_i^+) &= y(\bar{\eta}) + 2 + 2(g_{\bar{\eta}}(i-1) - g_{\bar{\eta}}(i)), \\ y(\bar{\eta}_i^-) &= y(\bar{\eta}) + 2 + 2(g_{\bar{\eta}}(i) - g_{\bar{\eta}}(i-1)). \end{aligned}$$

Então temos a soma

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\eta} \in \bar{S}} p(\bar{\eta}, \bar{\eta}') y(\bar{\eta}') &= q^{-1}(\bar{\eta}) \sum_{i=1}^N (q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+) y(\bar{\eta}_i^+) + q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^-) y(\bar{\eta}_i^-)) \\ &= y(\bar{\eta}) + 2 + 2q^{-1}(\bar{\eta}) B(\bar{\eta}), \end{aligned}$$

onde

$$B(\bar{\eta}) = \sum_{i=1}^N g_{\bar{\eta}}(i) (q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i+1}^+) - q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^+) + q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_i^-) - q(\bar{\eta}, \bar{\eta}_{i+1}^-)). \quad (6.10)$$

Suponhamos que $g_{\bar{\eta}}(i) > 0$. Então na posição i só podemos ter transições de taxas: β_1^+ , β_2^+ , β_0^- e β_1^- . Em $i+1$ só podemos ter: β_0^+ , β_1^+ , β_1^- e β_2^- . Portanto, para qualquer umas das combinações possíveis de taxas que o i -ésimo termo da soma (6.10) pode ter, temos que ele é negativo. Da mesma maneira se $g_{\bar{\eta}}(i) < 0$, as possíveis taxas para as posições i e $i+1$ são as mesmas mostradas acima, só que trocadas. Então o i -ésimo termo também é negativo. Portanto, $B(\bar{\eta}) < 0$ se $\bar{\eta}$ for diferente de $\bar{\eta}_0$. Pelo mesmo raciocínio usado no Teorema 2.4 temos que as condições do Teorema 2.1 estão satisfeitas.

Mostremos agora que (6.5) satisfaz as equações (6.1) e (6.2). Suponhamos que a transição $\bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta}_j^+$ tenha taxa β_i^+ . Então de (6.1) temos que

$$e^{-aH(\bar{\eta})} \beta_i^+ = e^{-aH(\bar{\eta}_j^+)} \beta_{2-i}^-.$$

Substituindo (6.8) e usando a hipótese que $\beta_i^+ = \beta_i^-$, obtemos

$$\left(\frac{\beta_0^+}{\beta_2^+}\right)^{\frac{H(\bar{\eta})}{2}} \beta_i^+ = \left(\frac{\beta_0^+}{\beta_2^+}\right)^{\frac{(H(\bar{\eta})+2(i-1))}{2}} \beta_{2-i}^+.$$

Observe que, para qualquer que seja o valor de i , a desigualdade acima é verdadeira. Pelo mesmo raciocínio obtemos que a equação (6.2) também é satisfeita. Portanto, (6.5) é a medida invariante e reversível do processo. Para terminar a prova, basta repetir a prova do Teorema 5.3 e obtemos (6.9). ■

Não podemos obter o mesmo resultado para o caso em duas dimensões pela mesma razão que não pudemos provar o Teorema 2.4 quando $M > 1$.

Outros tipos de taxas podem levar o sistema a ser reversível e ter (6.5) como a medida invariante. Por exemplo, se tormarmos

$$q(\bar{\eta}, \bar{\eta}') = \mu(\bar{\eta}'),$$

isto acontece.

Apêndice

PASSEIOS ALEATÓRIOS

Vamos mostrar aqui alguns resultados sobre passeio aleatórios usados ao longo do texto. Vamos estudar o passeio sobre os naturais com as seguintes taxas

$$q(x, x + L) = \lambda, \quad q(x, x - 1) = \mu,$$

respectivamente a taxa para saltar à direita L posições e à esquerda uma posição. Este passeio pode ser visto como uma fila onde a entrada de clientes no sistema é feita em grupos de tamanho fixo L (bulk arrival), e o atendente atende apenas um por vez.

Precisamos determinar em primeiro lugar que condições são necessárias sobre μ e λ para que o passeio seja recorrente positivo. Temos as seguintes equações de balanço

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \tag{A.1}$$

$$(\lambda + \mu)p_n = \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-L}, \quad n > 0, \tag{A.2}$$

onde p_n é a probabilidade de termos n clientes no sistema quando em equilíbrio, $p_n = 0$ para $n < 0$. Multiplicando (A.2) por s^n e somando para todo $n > 1$ temos

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n &= \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} s^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-L} s^n \\ &= \frac{\mu}{s} \sum_{n=2}^{\infty} p_n s^n + \lambda s^L \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \end{aligned}$$

Chamando a transformada $\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ de $T(s)$ temos

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(T(s) - p_0) &= \frac{\mu}{s}(T(s) - p_0 - p_1 s) + \lambda s^L T(s) \\ T(s)(\lambda + \mu - \frac{\mu}{s} - \lambda s^L) &= p_0(\lambda + \mu) = \frac{\mu}{s} p_0 - \lambda p_0 \end{aligned}$$

Obtemos a seguinte expressão para a transformada

$$T(s) = \frac{p_0 \mu (1 - \frac{1}{s})}{\mu (1 - \frac{1}{s}) + \lambda (1 - s^L)} \quad |s| \leq 1 \quad (A.3)$$

Impondo a condição $T(1) = 1$, ou seja, que $\lim_{s \rightarrow 1} T(s) = 1$, podemos encontrar uma expressão para p_0 . Ao tomarmos o limite de (A.3) temos uma indeterminação, assim, aplicando a regra de L'Hospital obtemos

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda L}{\mu}.$$

Para que o passeio seja recorrente positivo é necessário que $p_0 > 0$ o que implica em

$$\mu > \lambda L. \quad (A.4)$$

Tendo agora uma condição para que o processo seja recorrente positivo, vamos obter algumas informações sobre a variável aleatória que dá o tempo necessário para, partindo da origem, voltar a ela pela primeira vez. Em particular expressões para os momentos de primeira e segunda ordem. Em linguagem da teoria das filas estamos interessados em obter a distribuição do período de tempo que o servidor estando vazio, ao receber um primeiro grupo de clientes, leva para outra vez ficar vazio, o que é chamado de período ocupado. Vamos resolver esse problema da maneira que foi exposta em Kleinrock [13].

Chamemos de Y a duração do período ocupado, e $G(y) = P(Y \leq y)$ sua função de distribuição de probabilidade. O tempo que o servidor leva para atender um grupo de clientes, que denotamos por X , é a soma de L exponenciais de parâmetro μ . ou seja, X tem distribuição Gama com parâmetros L e μ . Seja $H(x) = P(X \leq x)$ sua fdp e

$$H^*(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x) = \left(\frac{\mu}{\mu - s} \right)^L \quad (A.5)$$

a respectiva transformada de Laplace.

Vejamos qual o comportamento da fila examinando um caso particular descrito na figura acima. C_i denota o i -ésimo cliente que chega no sistema e x_i o seu respectivo tempo de atendimento, t_i é o instante em que ocorre a chegada de C_i .

O período ocupado começa quando estando o servidor livre chega C_1 , que requer um tempo de serviço x_1 do servidor. Durante o período x_1 , chegam mais clientes, C_2 e C_3 , que ficam aguardando a sua vez de serem atendidos. Ao término do atendimento de C_1 , C_2 passa a ser atendido por tempo x_2 , durante o qual chega C_4 . Terminado o serviço de C_2 , C_3 passa a receber serviço, chegando C_5 durante este atendimento. Após C_3 , C_4 , o cliente que entrou no sistema durante o atendimento de C_2 , passa a ser atendido por um período x_4 de tempo, durante o qual chega C_6 . Terminado o serviço de C_4 , C_5 é atendido e nenhum cliente entra na fila. Da mesma maneira, após serviço de C_5 , C_6 é atendido sem que nenhum novo cliente chegue. Ao fim do período de atendimento de C_6 o servidor fica desocupado, encerrando o período ocupado do sistema.

Uma primeira observação é que a duração do período ocupado não depende da ordem com que os clientes são atendidos. Para o caso acima descrito, tanto faz C_2 ser atendido antes ou depois de C_3 , a duração será a mesma. Portanto podemos reordenar a ordem de atendimento mudando a disciplina da fila, tornando-a LCFS (último a entrar é o primeiro a ser

servido). Assim, após C_1 , a ordem de atendimento seria a seguinte: C_3 , C_6 , C_2 , C_4 e C_5 .

Observe que com esta nova política de atendimento, após a saída de C_1 , o período que vai do início do atendimento de C_3 até o fim do atendimento de C_6 pode ser encarado como um novo período ocupado, com duração de $x_3 + x_6$, que chamamos U_3 . Após o fim desse sub-período, C_2 passa a ser atendido e forma um outro sub-período ocupado, independente do anterior, de duração U_2 . A propriedade interessante é que esses sub-períodos são estatisticamente iguais ao período todo.

Assim, se durante o atendimento de C_1 chegarem v novos clientes no sistema, teremos v sub-períodos ocupados, independentes entre si e independentes do tempo de atendimento de C_1 . Então a duração do período ocupado pode ser expressa como a soma de $v + 1$ variáveis aleatórias independentes,

$$Y = X_1 + U_2 + \cdots + U_v + U_{v+1}.$$

Vamos determinar a transformada de Laplace de $G(y)$ (função geradora de momentos), que é definida como

$$G^*(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dG(y) = \mathbb{E}(e^{-sY})$$

Condicionando a esperança acima a duração do atendimento de C_1 e ao número de clientes que chegam durante seu atendimento, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-sY} | X_1 = x, v = i) &= \mathbb{E}(e^{s(x+U_2+\cdots+U_v+U_{i+1})}) \\ &= \mathbb{E}(e^{-sx} e^{-sU_2} \cdots e^{-sU_{i+1}}) \\ &= e^{-sx} \mathbb{E}(e^{-sU_2}) \cdots \mathbb{E}(e^{-sU_{i+1}}) \end{aligned}$$

Como os sub-períodos são identicamente distribuídos a Y , temos

$$\mathbb{E}(e^{-sY} | X_1 = x, v = i) = e^{-sx} (G^*(s))^i$$

Sabendo que durante um intervalo de tempo x o número de clientes que chegam tem distribuição de Poisson de média λx , podemos remover um dos

condicionamentos, obtendo

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(e^{-sY} | x_1 = x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{-sY} | X_1 = x, v = i) P(v = i) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-sx} (G^*(s))^i e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \\
 &= e^{-x(s+\lambda-\lambda G^*(s))}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Para obter $G^*(s)$ removemos o condicionamento restante integrando (A.6) sobre a distribuição do tempo de serviço $H(x)$

$$\begin{aligned}
 G^*(s) &= \int_0^{\infty} e^{-x(s+\lambda-\lambda G^*(s))} dH(x) \\
 &= H^*(s + \lambda - \lambda G^*(s))
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$= \left(\frac{\mu}{\mu - s - \lambda + \lambda G^*(s)} \right)^L \tag{A.8}$$

A equação (A.8) não nos é útil pois é de difícil solução. Vamos utilizar a equação (A.7) para mostrar que existe uma solução que é efetivamente a transformada de uma função de distribuição de probabilidades. Para tanto necessitamos da definição de função completamente monótona e de alguns resultados relacionados a essa propriedade.

Definição A.1. Uma função ψ definida em $]0, \infty[$ e chamada completamente monótona se possui derivadas de todas as ordens e se

$$(-1)^n \psi^{(n)}(x) \geq 0, \quad x > 0.$$

Teorema A.1. Uma função ψ definida em $]0, \infty[$ é uma transformada de Laplace de uma distribuição de probabilidade F se e somente se é completamente monótona e $\psi(0) = 1$ (Feller [3], pg. 417).

Proposição A.1. Se ψ é completamente monótona e ρ é uma função positiva com derivada completamente monótona então $\psi(\rho)$ é completamente monótona.

Vamos considerar a equação

$$H^*(s + \lambda - \lambda x) - x = 0 \tag{A.9}$$

onde $0 \leq x \leq 1$ e s uma constante positiva fixada. Temos que a função é convexa, e como para $x = 0$ ela é positiva e para $x = 1$ ela é negativa, a equação acima tem pelo menos uma raiz e no máximo duas raízes. Vamos definir a sequência $\{a_n\}$ da seguinte maneira

$$a_0 = 0$$

$$a_{n+1} = H^*(s + \lambda - \lambda a_n)$$

Da definição acima temos que $a_0 \leq a_1 \leq 1$, mas como H^* é uma função decrescente obtemos por indução que $a_n \leq a_{n+1} \leq 1$, portanto a sequência é monótona e limitada superiormente. Podemos tomar o limite desta sequência, que chamamos de a , que é uma solução de (A.9). Observe que $a_1(s) = H^*(s + \lambda)$ é uma função completamente monótona pois pelo Teorema A.1 H^* o é, então usando a Proposição A.1 temos que $a_2, a_3, \dots$ também são funções completamente monótonas. Temos pelo Teorema da Continuidade que a , ou seja $G^*(s)$, também é uma função completamente monótona. Quando $s = 0$ a equação (A.9) tem $x = 1$ como uma raiz, então como $G^*(0) \leq 1$ temos que se houver mais de uma raiz no intervalo $[0, 1]$ a menor delas será $G^*(0)$. Se tivermos mais de uma raiz isso implicará em $G^*(0) < 1$, que significa que a distribuição G é defeituosa. Para que isto ocorra é necessário que a inclinação da tangente da função em $x = 1$ seja positiva, ou seja, que

$$\frac{d}{dx} (H^*(s + \lambda - \lambda x) - x) \Big|_{x=1} > 0$$

o que implica em $-\lambda H^*(0) > 1$, ou melhor, $L\lambda > \mu$, então da condição (A.4) temos que passeio não é recorrente positivo. Então só temos uma raiz quando a condição (A.4) é verdadeira e assim $G^*(0) = 1$. Pelo Teorema A.1 G^* é uma transformada de Laplace de uma distribuição de probabilidades.

Sabendo agora que G^* é uma função geradora de momentos, podemos obter os primeiros momentos de G usando a propriedade

$$\mathbb{E}(Y^n) = (-1)^n G^{*(n)}(0)$$

se o limite de $G^{*(n)}(x)$ quando $x \rightarrow 0$ existir e for finito. Temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= -G^{*'}(0) = -H^{*'}(0) \frac{d}{ds} (s + \lambda - \lambda G^*(s)) \Big|_{s=0} \\ &= -H^{*'}(0)(1 - \lambda G^{*'}(0)) \\ &= \frac{L}{\mu} (1 - \lambda \mathbb{E}(Y)), \end{aligned}$$

portanto a média do período ocupado é dada por

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{L}{\mu - \lambda L}.$$

Para o segundo momento

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= -G^{*''}(0) = -H^{*''}(0) \left(1 - \lambda G^{*'}(0)\right)^2 + H^{*'}(0) \left(-\lambda G^{*''}(0)\right) \\ &= \frac{L}{\mu^2} (1 - \mathbb{E}(Y))^2 + \mathbb{E}(Y) (-\lambda \mathbb{E}(Y^2))\end{aligned}$$

Resolvendo a equação obtemos

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{L\mu}{(\mu - \lambda L)^3}.$$

Na verdade nós mostramos não apenas que os dois primeiros momentos são finitos, mas sim que a distribuição G tem todos os momentos finitos. Basta ver como obtemos os dois primeiros. Todos os demais serão expressos como uma fração onde o denominador é uma potência de $(\mu - \lambda L)$, que é estritamente positiva.

Referências

- [1] Billingsley, P. (1968) Converge of probability measures, Wiley, New York.
- [2] Feller, W. (1968) An introduction to probability theory and its applications, vol I, 3rd edition, Wiley, New York.
- [3] Feller, W. (1966) An introduction to probability theory and its applications, vol II, Wiley, New York.
- [4] Ferrari, P.A. (1988) Invariance principle for a solid-on-solid interface model. *J. Stat. Phys.* **51**, 1077–1090.
- [5] Ferrari, P.A., Martinez, S. and Picco, P. (1991) Existence of quasi stationary distributions. A renewal dynamical approach. *Relatório técnico RT-MAE-9114*. IME-USP.
- [6] Foster, F.G. (1953) On the stochastic matrices associated with certain queueing processes. *Ann. Math. Stat.* **24**, 355–360.
- [7] Gates, D.J. (1988) Growth and decrease of two-dimensional crystals: a markov rate process. *J. Stat. Phys.* **52**, 245–257.
- [8] Gates, D.J. and Westcott, M. (1988) Kinetics of polymer crystallization. I. Discrete and continuum models. *Proc. R. Soc. Lond.* **A416**, 443–461.
- [9] Gates, D.J. and Westcott, M. (1988) Kinetics of polymer crystallization. II. Growth regimes. *Proc. R. Soc. Lond.* **A416**, 463–476.
- [10] Gates, D.J. and Westcott, M. (1990) On the stability of crystal growth. *J. Stat. Phys.* **59**, 73–101.
- [11] Gallavotti, G. (1972) The phase separation line in the two-dimensional Ising model. *Commun. Math. Phys.* **27**, 103–136.
- [12] Kelly, F.P. (1979) Reversibility and Stochastic Networks, Wiley, New York.
- [13] Kleinrock, L. (1975) Queueing Systems volume I: Theory, Wiley-

Interscience, Chichester.

- [14] Liggett, T.M. (1985) *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
- [15] Pakes, A.G. (1968) Some conditions for ergodicity and recurrence of markov chains. *Operations Res.* **17**, 1058–1061.
- [16] Ross, S. M. (1983) *Stochastic processes*, Wiley, New York.
- [17] Siegmund, D. (1975) The time until ruin in collective risk theory. *Mittel. Verein. Versich.* **2**, 157–165.
- [18] Tweedie, R.L. (1976) Criteria for classifying general Markov chains. *Adv. Appl. Prob.* **8**, 737–771.
- [19] Whittle, P. (1975) Reversibility and acyclicity, em *Perspectives in Probability and Statistics*, J. Gani, ed. Academic Press, London.