**Aproximação do Equilíbrio e
Tempos Exponenciais para o
Passeio Aleatório no Hipercubo**

Cláudia Peixoto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**
Orientador: **Prof. Dr. Antonio Galves**

–SÃO PAULO, fevereiro de 1992–

Abstract

We study a random walk in a N dimensional hypercube and exhibit results about stopping times when N diverges.

The first theorem discuss the time in which two coupling processes spend to meet. A corollary provides a majorant for the velocity of convergence to equilibrium.

Other tree theorems treats, respectively, the time of first return to a point, the time of first return to a fix set and the time of first arrival in a random set. We prove that these times, under a suitable rescaling, converge in law to a mean one exponential random time.

Resumo

Nosso objeto de estudo é o passeio aleatório simples no hipercubo de dimensão N .

Todos os resultados obtidos referem-se a tempos de parada quando N diverge.

O primeiro teorema trata do tempo que dois passeios acoplados levam para se encontrar. Como corolário obtemos um majorante para a velocidade de convergência ao equilíbrio.

Os outros três teoremas tratam respectivamente do instante do primeiro retorno a um ponto já visitado, do instante de retorno a um conjunto fixado e do instante de encontro com um conjunto aleatório. Nestes casos demonstramos que esses tempos aleatórios, convenientemente normalizados, convergem em lei a uma exponencial de parâmetro 1.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Antonio Galves, pela objetividade com que conduzia nossos encontros, pela clareza com que tratava assuntos não triviais e pela oportunidade que me ofereceu de trabalhar com um grande pesquisador.

Agradeço ao professor Pierre Picco, que em visita ao departamento, colaborou em parte deste trabalho.

Ainda, meus agradecimentos a Fábio Prates Machado e Zaqueu Coelho, pela amizade, coleguismo e principalmente pelo exemplo profissional.

Ao meu professor, colega e marido Adilson Simonis, devo mais que duas palavras, mas aqui, meu muito obrigada.

Finalmente, meus agradecimentos à FAPESP pelo auxílio ao Projeto Temático *Transição de Fase Dinâmica*, do qual faço parte.

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Antonio Francisco e Neusa,
que me ensinaram a valorizar o conhecimento
pois este é a única riqueza de nossas vidas .*

I. Introdução:

Neste trabalho estudaremos tempos de parada para um passeio aleatório homogêneo em um hipercubo de dimensão N , obtendo resultados assintóticos.

A cada instante o processo assumirá uma configuração que será uma seqüência de N elementos pertencentes ao conjunto $\{-1, +1\}$. Teremos portanto 2^N configurações distintas que podem ser consideradas os vértices do hipercubo.

A evolução do processo dar-se-á em tempo discreto e pode ser descrita da seguinte maneira: a cada passo com probabilidade $\frac{1}{2}$ o passeio permanecerá no mesmo lugar e com probabilidade $\frac{1}{2}$ modificará um de seus elementos escolhido de maneira uniforme.

Em nosso primeiro teorema, exibiremos a escala de tempo em que dois passeios aleatórios acoplados se encontram quando N diverge. O mesmo teorema pode ser encontrado em [1], mas aqui, a demonstração está bastante simplificada.

O segundo teorema trata do instante do primeiro retorno a uma posição já visitada pelo passeio. Neste teorema caracterizaremos, com probabilidade 1, como será este primeiro retorno quando N diverge. Este resultado faz parte de um artigo de Ávila, Cassandro e Galves.

O terceiro teorema trata do tempo de retorno a um conjunto fixado. Este tempo, devidamente normalizado, converge em lei a uma exponencial de parâmetro 1 quando N diverge. O que foi feito neste teorema generaliza um resultado de Bellman e Harris [3], onde é tratado o tempo de retorno a uma única posição fixada. O artigo de Bellman e Harris estuda o modelo de Ehrenfest do qual o passeio aleatório no hipercubo é uma espécie de versão microscópica. A nossa demonstração aborda o problema de maneira análoga a de Cassandro, Galves, Olivieri e Vares em [2] juntamente com o segundo teorema.

Nosso quarto resultado refere-se ao instante de chegada do passeio a um conjunto aleatório $M \subset H_N$. Cada ponto do hipercubo pertencerá a M com probabilidade

$\frac{1}{N^\gamma}, \gamma > 0$, independentemente dos demais pontos e do passeio. Pontos em M serão chamados de pontos pretos.

Mostramos que o tempo necessário para o passeio alcançar M , normalizado pela densidade de pontos pretos, converge em lei a uma exponencial de parâmetro 1 quando N diverge.

O modelo descrito acima foi estudado por Cassandro, Galves e Picco em [1], o qual serviu de motivação geral para este trabalho. Nosso objetivo foi desenvolver e refinar alguns resultados que ali aparecem.

Na sequência apresentaremos a descrição do modelo e enunciaremos os quatro principais resultados. Após essa seção seguirão as respectivas demonstrações .

II. Notação, Definições e Principais Resultados

O Passeio Aleatório Homogêneo no Hipercubo

Denotaremos por $H_N = \{-1, +1\}^N$ o conjunto de configurações com N spins ± 1 (hipercubo).

Elementos de H_N serão representados por σ e ζ , ou seja, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ onde $\sigma_i \in \{+1, -1\}$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.

Dado $j \in \{1, \dots, N\}$ e $\sigma \in H_N$, a configuração obtida a partir de σ por uma troca de spin na posição j será dada por σ^j , isto é :

$$(\sigma^j)_i = \begin{cases} \sigma_i, & \text{se } i \neq j; \\ -(\sigma)_i, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Primeiramente definiremos o passeio aleatório homogêneo $\sigma(t)$ em H_N .

Tomaremos $\sigma(0) = \eta$, $\eta \in H_N$ e consideraremos a seguinte evolução estocástica em H_N : dada a configuração $\sigma(t)$ no tempo t escolhemos um índice $i \in \{1, \dots, N\}$ com probabilidade $\frac{1}{N}$ e tornaremos o spin $\sigma_i + 1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$.

Uma realização desta evolução estocástica pode ser obtida da seguinte maneira : introduzimos duas seqüências independentes de variáveis aleatórias $I(t)$ e $U(t)$ onde $t = 1, 2, \dots$. Estas são definidas em um novo espaço de probabilidade $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbb{P}_N)$.

As variáveis aleatórias $I(t)$ assumem valores no conjunto $\{1, \dots, N\}$, são independentes e identicamente distribuídas e para qualquer $k \in \{1, \dots, N\}$, $\mathbb{P}_N\{I(t) = k\} = \frac{1}{N}$.

As variáveis aleatórias $U(t)$ são independentes, identicamente distribuídas com distribuição uniforme em $[0, 1]$, isto é , $\mathbb{P}_N(U(t) < u) = u$ para $\forall u \in [0, 1]$.

Assim,

$$\sigma_i(t, \omega) = \begin{cases} \sigma_i(t-1, \omega) & \text{se } I(t, \omega) \neq i; \\ +1 & \text{se } I(t, \omega) = i; \quad U(t, \omega) < \frac{1}{2}; \\ -1 & \text{se } I(t, \omega) = i; \quad U(t, \omega) \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

O passeio aleatório homogêneo pode ser construído a partir de um outro passeio aleatório $\xi(t)$. Tomamos $\xi(0) = \eta, \eta \in H_N$ e definimos $\xi(t), t \in \mathbb{N}$, como um passeio aleatório em H_N , definido no espaço de probabilidade $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)$ com probabilidade de transição dada por:

$$\mathbb{P}_0(\xi(k+1) = \eta^i | \xi(k) = \eta) = \frac{1}{N}, \text{ para todo } k \geq 0, i \in \{1, \dots, N\} \text{ e } \eta \in H_N.$$

Observamos que $\mathbb{P}_0(\xi(k+1) = \eta | \xi(k) = \eta) = 0$.

Introduziremos agora um meio aleatório em nosso espaço de configurações.

Seja M um subconjunto aleatório de H_N , definido no espaço de probabilidade $(\overline{\Omega}_N, \overline{\mathcal{F}}_N, \overline{\mathbb{P}}_N)$. Cada ponto do hipercubo pertencerá a M com probabilidade $\frac{1}{N^\gamma}, \gamma > 0$, independentemente dos outros pontos, ou seja, terá distribuição de Bernoulli.

Assim para qualquer $F \subset H_N$,

$$\overline{\mathbb{P}}(M \cap F = \emptyset) = \left(1 - \frac{1}{N^\gamma}\right)^{|F|}.$$

onde $|F|$ é o cardinal de F .

A partir de agora, se nenhuma ambiguidade ocorrer, omitiremos os índices dos espaços de probabilidades.

Notação:

ξ^- : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\xi^-(0) = (-1, \dots, -1)$.

ξ^+ : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\xi^+(0) = (+1, \dots, +1)$.

ξ^η : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\eta \in H_N$.

σ^- : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\sigma^-(0) = (-1, \dots, -1)$.

σ^+ : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\sigma^+(0) = (+1, \dots, +1)$.

σ^η : passeio aleatório homogêneo com configuração inicial $\eta \in H_N$.

$t_N^- = \inf(t > 0 : \sigma^+(t) = \sigma^-(t))$.

$t_N^{\eta, \zeta} = \inf(t > 0 : \sigma^\eta(t) = \sigma^\zeta(t))$.

$V[0, N^\gamma] = \{\sigma^+(0), \dots, \sigma^+(N^\gamma)\}$.

Obs.: A diferença entre $\xi(t)$ e $\sigma(t)$ é que $\xi(t)$ salta a cada passo com probabilidade 1, enquanto que $\sigma(t)$ tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de não saltar.

Resultados Principais

Considere dois passeios homogêneos $\sigma^+(t)$ e $\sigma^-(t)$ construídos simultaneamente com o auxílio das variáveis aleatórias $I(t)$ e $U(t)$.

O teorema I, a seguir, mostrará que o número de passos necessários para os dois passeios acima se encontrarem será da ordem de $N \log N$ quando N diverge.

Este resultado, será muito utilizado em outras demonstrações.

Teorema I: Seja $t_N^- = \inf(t > 0 : \sigma^+(t) = \sigma^-(t))$. Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{t_N^-}{N \log N} - 1\right| > \delta\right) = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

O teorema II, a seguir, prova que o primeiro retorno do passeio $\xi(t)$ a uma posição já visitada será, com probabilidade 1, do tipo $\xi(j) \neq \xi(i) \forall i, j \leq k+1, \xi(k+2) = \xi(k)$.

Teorema II: Sejam $S_N = \inf(k > 0 : \xi(k) \in \{\xi(0), \dots, \xi(k-1)\})$ e $\Gamma_1 = \inf(k > 0 : I(k) = I(k-1))$. Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_N = \Gamma_1) = 1.$$

O terceiro teorema trata do tempo que $\sigma^+(t)$ gasta para retornar a um conjunto fixado. Este tempo, convenientemente normalizado, tem lei exponencial de parâmetro 1 quando N diverge.

Teorema III: Sejam $R_N = \inf(k > 0 : \sigma^+(k) \in V[0, N^\gamma])$ e $\beta_N = \min(n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(R_N \geq n) \leq e^{-1})$. Então, para $0 < \gamma < 1$ temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_N > \beta_N t) = e^{-t}$$

O próximo resultado refere-se ao tempo gasto, pelo passeio homogêneo $\xi(t)$, para alcançar um ponto do conjunto M .

Teorema IV: Seja $\Theta = \inf(t > 0 : \xi(t) \in M)$. Para $0 < \gamma < 1$ e $\delta > 0$ temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}}\left(\left|\mathbb{P}(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}\right| > \delta\right) = 0.$$

A demonstração do último teorema utilizará fortemente o fato de que as posições ocupadas pelo processo serão distintas a cada passo em um tempo da ordem de N^γ quando N diverge.

Os teoremas II e IV foram enunciados para o passeio $\xi(t)$, suas extensões para o passeio homogêneo $\sigma(t)$ são imediatas.

Por convenção $N^\gamma t = [N^\gamma t]$.

III. Resultados

III.1 Demonstração do Teorema I

A seguir verificaremos que dois passeios homogêneos acoplados com configurações iniciais tais que sua distância seja máxima, encontrar-se-ão em um tempo de ordem $N \log N$ com probabilidade 1 quando N diverge.

Teorema I:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t_N^-}{N \log N} = 1 \quad \text{em probabilidade.}$$

Demonstração :

Como mencionamos, $\sigma^+(t)$ e $\sigma^-(t)$ serão construídos usando o mesmo ω , isto é, a mesma escolha de índices $I(t, \omega)$ e a mesma escolha de $U(t, \omega)$ da seguinte maneira:

dados $\sigma^+(t)$, $\sigma^-(t)$ e $I(t+1) = i$,

se $U(t+1) < \frac{1}{2}$ então $\sigma^+(t+1) = +1$, $\sigma^-(t+1) = +1$;

se $U(t+1) > \frac{1}{2}$ então $\sigma^+(t+1) = -1$, $\sigma^-(t+1) = -1$.

Chamo $D_N(n) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |\sigma_i^+(n) - \sigma_i^-(n)|$, a distância no instante n entre os dois passeios.

Pela evolução de $\sigma(t)$ temos que $D_N(n)$ é uma Cadeia de Markov em $\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, com probabilidade de transição dada por:

$$IP(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } y = x; \\ x, & \text{se } y = x - \frac{1}{N}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Primeiramente notamos que :

$$t_N^- = \sum_{k=1}^N \lambda_k ,$$

onde $\lambda_1 = 1$ e λ_k para $k = 2, \dots, N$ são variáveis aleatórias independentes, geométricas de parâmetro $p_k = 1 - \frac{(k-1)}{N}$.

O tempo λ_k é exatamente o número de passos que o processo $D_N(n)$ gasta para ir de $1 - \frac{k-1}{N}$ a $1 - \frac{k}{N}$.

Temos então que suas esperanças e variâncias valem respectivamente :

$$E(\lambda_k) = \frac{1}{p_k} = \frac{N}{N-k+1},$$

$$V(\lambda_k) = \frac{q_k}{p_k^2} = \frac{N(k-1)}{(N-k+1)^2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} E(t_N^-) &= \sum_{k=1}^N E(\lambda_k) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{N}{N-k+1} \\ &= N \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Como $\int_1^N \frac{1}{x} = \log N$, temos:

$$N \log(N+1) \leq E(t_N^-) \leq N(1 + \log N).$$

Assim para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|t_N^- - E(t_N^-)| > \epsilon E(t_N^-)\right) &\leq \frac{V(t_N^-)}{\epsilon^2 [E(t_N^-)]^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^N \frac{N(k-1)}{(N-k+1)^2}}{\epsilon^2 \left[\sum_{k=1}^N \frac{N}{N-k+1}\right]^2} \\ &= \frac{N \sum_{k=1}^N \frac{(k-1)}{(N-k+1)^2}}{\epsilon^2 N^2 \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{(N-k+1)}\right]^2} \\ &\leq \frac{N(N-1) \left[\frac{1}{(N-1)^2} + \dots + 1\right]}{\epsilon^2 N^2 \log^2 N} \\ &= \frac{N(N-1) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2}}{\epsilon^2 N^2 \log^2 N} \\ &\leq \frac{N(N-1) \left[1 + \sum_{k=2}^N \frac{1}{(k^2-1)}\right]}{\epsilon^2 N^2 \log^2 N} \\ &= \frac{N(N-1) \left[1 + \frac{3}{4} - \frac{(2N+1)}{2N(N+1)}\right]}{\epsilon^2 N^2 \log^2 N}. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando N diverge temos que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{t_N^-}{E(t_N^-)} - 1\right| > \epsilon\right) = 0. \quad \leq \quad *$$

■

Corolário I: Sejam σ^η e σ^ζ passeios homogêneos em H_N construídos simultaneamente, com configurações iniciais η, ζ . Suponha que $D_N(0) = \frac{\lfloor Nf \rfloor}{N}$, onde $0 \leq f \leq 1$. Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sigma^\eta(t(N)) \neq \sigma^\zeta(t(N))\right) = 0,$$

para qualquer $t(N)$ que satisfaça $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t(N)}{N \log N} = \infty$.

Demonstração: Primeiro notamos que:

$$t_N^- = \inf\{t > 0 : \{I(1), \dots, I(t)\} = \{1, \dots, N\}\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sigma^\eta(t(N)) \neq \sigma^\zeta(t(N))\right) &\leq \mathbb{P}(t_N^- > t(N)) \\ &\leq \frac{N(\log N + 1)}{t(N)}. \end{aligned}$$

Portanto por hipótese temos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sigma^\eta(t(N)) \neq \sigma^\zeta(t(N))\right) = 0.$$

■

O próximo corolário nos fornecerá um majorante para a velocidade de convergência ao equilíbrio.

Corolário II: Seja $t(N)$ tal que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t(N)}{N \log N} = \infty$. Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbb{P}(\sigma^+(t(N)) = \zeta) - \frac{1}{2^N} \right| = 0,$$

onde $\zeta \in H_N$.

Demonstração:

Seja $\nu(\eta) = \frac{1}{2^N}$ a medida uniforme em H_N . Esta medida é invariante com respeito à evolução do passeio homogêneo, ou seja,

$$\nu(\zeta) = \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}(\sigma^\eta(t(N)) = \zeta).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{P}(\sigma^+(t(N)) = \zeta) - \frac{1}{2^N} \right| &= \left| \mathbb{P}(\sigma^+(t(N)) = \zeta) - \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}(\sigma^\eta(t(N)) = \zeta) \right| \\ &\leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \left| \mathbb{P}(\sigma^+(t(N)) = \zeta) - \mathbb{P}(\sigma^\eta(t(N)) = \zeta) \right| \\ &\leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sup_{\eta} \mathbb{P}(\sigma^+(t(N)) \neq \sigma^\eta(t(N))) \end{aligned}$$

Passando ao limite em N e utilizando o corolário I a expressão acima vai a zero e portanto temos o resultado. ■

Nota: O processo $\xi(t)$ é periódico, além disso, para qualquer acoplamento, dois processos com configurações iniciais que diferem em um número ímpar de posições nunca poderão se encontrar, sendo que a distância mínima entre eles será a equivalente a uma posição diferente. Do teorema I, temos que a distância em um tempo da ordem $N \log N$ entre dois passeios acoplados $\xi^\eta(t)$ e $\xi^\zeta(t)$ será menor ou igual a $\frac{1}{N}$ quando N diverge.

III.2 Demonstração do Teorema II

Considere os seguintes eventos:

$$J_1 = \{(i_1, i_2) \in \{1, \dots, N\}^2 : i_1 = i_2\}$$

$$J_l = \left\{ (i_1, \dots, i_{2l}) \in \{1, \dots, N\}^{2l} : \sum_{k=1}^{2l} \mathbf{1}_{\{i=i_k\}} \in \{0, 2, \dots, 2l\} \forall i \in \{1, \dots, N\} \right. \\ \left. \text{e } (i_k, \dots, i_{k+2m-1}) \notin J_m, \forall m \in \{1, \dots, l-1\}, k \geq 1 \text{ e } k+2m-1 \leq 2l. \right.$$

Lema I: Para $l \geq 3$ temos:

$$IP\left(\{I(1), \dots, I(2l)\} \in J_l\right) \leq \frac{8}{N^3}.$$

Demonstração:

$$IP\left(\{I(1), \dots, I(2l)\} \in J_l\right) = \frac{|J_l|}{N^{2l}}.$$

Primeiramente notamos que $|J_l| \leq 2N^{2l-2}$ pois nas duas últimas posições os índices estão fixados a menos de uma permutação.

Agora dividiremos o conjunto J_l em dois conjuntos disjuntos: aqueles em que as três últimas posições são ocupadas por índices distintos entre si e aqueles em que nas três últimas posições aparecem apenas dois índices distintos entre si.

Denotaremos esses conjuntos por J'_l e J''_l respectivamente.

Temos então que: $|J_l| = |J'_l| + |J''_l|$.

Note que:

a) $|J_l'| \leq 3! N^{2l-3}$, pois as três últimas posições devem estar fixadas, a menos de uma permutação, para que ocorra retorno.

b) $|J_l''| \leq N |J_{l-1}|$, pois eliminando o par que aparece nas três últimas posições temos exatamente um retorno do tipo J_{l-1} ; além disso, o algoritmo repetido pode assumir no máximo N valores.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{|J_l|}{N^{2l}} &\leq \frac{3! N^{2l-3}}{N^{2l}} + \frac{N |J_{l-1}|}{N^{2l}} \\ &\leq \frac{3! N^{2l-3}}{N^{2l}} + \frac{N 2N^{2l-4}}{N^{2l}} \\ &\leq \frac{8}{N^3}. \end{aligned}$$

■

Introduziremos agora as seguintes variáveis aleatórias:

$$S_N = \inf(k \geq 2 : \xi(k) \in V[0, k-1]), \text{ onde } V[0, k-1] = \{\xi(0), \dots, \xi(k-1)\};$$

$$\Gamma_1 = \inf(k \geq 2 : I(k) = I(k-1)),$$

$$\Gamma_l = \inf(k \geq 2l : (I(k-2l+1), \dots, I(k)) \in J_l).$$

Lema II : Para $l \geq 3$ temos:

$$\mathbb{P}(\Gamma_l \leq n) \leq n \frac{8}{N^3}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Gamma_l \leq n) &= \sum_{k=2l}^n \mathbb{P}(\Gamma_l = k) \\
&= \sum_{k=2l}^n \mathbb{P}\left((I(j-2l+1), \dots, I(j)) \notin J_l, j < k; \right. \\
&\quad \left. (I(k-2l+1), \dots, I(k)) \in J_l\right) \\
&\leq \sum_{k=2l}^n \mathbb{P}\left((I(k-2l+1), \dots, I(k)) \in J_l\right) \\
&= (n-2l)\mathbb{P}\left((I(1), \dots, I(2l)) \in J_l\right)
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando o resultado do lema I temos:

$$\mathbb{P}(\Gamma_l \leq n) \leq \frac{8n}{N^3}.$$

■

Teorema II: Para S_N e Γ_1 como definidos anteriormente temos,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_N = \Gamma_1) = 1.$$

Demonstração: Inicialmente observamos que $S_N = \min_{l \geq 1} \Gamma_l$.

Para provarmos este teorema é suficiente mostrar que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Gamma_1 < N^{1+\delta} < \min_{\frac{N^{1+\delta}}{2} \leq l \leq 2} \Gamma_l) = 1, \text{ para algum } \delta > 0.$$

Primeiro notamos que :

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Gamma_1 < N^{1+\delta}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} 1 - \mathbb{P}(\Gamma_1 > N^{1+\delta}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N^{1+\delta}} = 1\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathbb{P}(N^{1+\delta} < \min_{\frac{N^{1+\delta}}{2} \geq l \geq 2} \Gamma_l) \geq 1 - \frac{2N^{1+\delta}}{N^2} - \sum_{l \geq 3} \frac{8N^{1+\delta}}{N^3}.$$

Se tomarmos $0 < \delta < \frac{1}{2}$ a última expressão vai a 1 quando N diverge. Isto conclui a demonstração do teorema. ■

Corolário III: Para $0 < \gamma < 1$ temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|\{\xi(0), \dots, \xi(N^\gamma t)\}| = N^\gamma t + 1\right) = 1.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|\{\xi(0), \dots, \xi(N^\gamma t)\}| = N^\gamma t + 1\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(S_N > N^\gamma t\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\Gamma_1 > N^\gamma t\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N^\gamma t} = 1.\end{aligned}$$
■

Corolário IV: A variável aleatória $N^{-1}S_N$ converge em lei para a distribuição exponencial de parâmetro 1 .

Demonstração: Basta provarmos que para qualquer $t > 0$, temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP(S_N > tN) = e^{-t}.$$

Agora,

$$|IP(S_N > tN) - IP(\Gamma_1 > tN)| \leq IP(\Gamma_1 \neq S_N).$$

Pelo teorema III, $\lim_{N \rightarrow \infty} IP(\Gamma_1 \neq S_N) = 0$.

Por outro lado,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP(\Gamma_1 > tN) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{Nt} = e^{-t}.$$

Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP(S_N > tN) = e^{-t}.$$

■

III.3 Demonstração do Teorema III

Obteremos agora resultados sobre o tempo de retorno do processo $\sigma^+(t)$ ao conjunto $V[0, N^\gamma]$. A partir de agora $V[0, N^\gamma]$ será denotado por F .

Considere

$$R_N = \inf(t > N^\gamma : \sigma^+(t) \in F), \text{ e}$$

$$R_N^\eta = \inf(t > 0 : \sigma^\eta(t) \in F).$$

Proposição I : Para $0 < \gamma < 1$ e $0 < \delta < \frac{1}{2}$, temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP(R_N > N^{1+\delta}) = 1.$$

Demonstração:

Do teorema II temos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP(\cup_{l \geq 2} \Gamma_l < N^{1+\delta}) = 0.$$

Sendo assim,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP(R_N \leq N^{1+\delta}) = \lim_{N \rightarrow \infty} IP(\sigma^+(N^\gamma + 1) = \sigma^+(N^\gamma))$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^\gamma}{N}.$$

Como por hipótese $0 < \gamma < 1$ o limite acima é zero.

Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP(R_N > N^{1+\delta}) = 1.$$

■

Proposição II : Seja F um conjunto fixado de cardinal $N^\gamma, 0 < \gamma < 1$. Para δ tal que $\gamma + \delta < 1, \forall \eta \notin F$ fixado temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP(R_N^\eta > N^{1+\delta}) = 1.$$

tempo de encontro de $\sqrt{E_0, N^{1+\delta}}$

Demonstração: Sem perda de generalidade a demonstração será feita para o processo ξ^η . Primeiramente mostraremos que para uma configuração fixada em F , o processo ξ^η gastará um tempo maior que $N^{1+\delta}$ para encontrá-la quando N diverge.

Fixe $\zeta \in F$. Defina $d(n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |\xi_i^\eta(n) - \zeta_i|$ a distância do passeio ξ^η a ζ no instante n . Por hipótese, $d(0) \geq 1$ pois $\emptyset \notin F$.

Observe que $d(n)$ evolue como o modelo de Ehrenfest; ou seja, uma cadeia de Markov com espaço de estados $\{0, 1, \dots, N\}$ e probabilidades de transição dadas por:

$$IP_{i,j} = \begin{cases} \frac{N-i}{N}, & \text{se } j = i + 1; \\ \frac{i}{N}, & \text{se } j = i - 1. \end{cases}$$

Sejam

$$n_1 = \inf(n > 1 : d(n) = 2),$$

$$n_2 = \inf(n > n_1 : d(n) = 2), \text{ e assim sucessivamente.}$$

A cada retorno ao ponto "2", a probabilidade de em seguida visitar o ponto "0" antes de voltar ao "2" é $\frac{2}{N^2}$.

Seja $K = \inf(k \geq 1 : d(n_k + 2) = 0)$, então o tempo para ξ^η alcançar ζ é maior ou igual a K .

significa encontrar, idiota!

Mas,

$$IP(K > t) = \sum_{j=1}^{\infty} IP(K = t+j)$$

usando a fórmula

$$\left(1 - \frac{2}{N^2}\right)^{N^{1+\delta}} > m > 0$$

então $\left(1 - \frac{2}{N^2}\right)^{N^{1+\delta}} > m > 0$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} IP(d(n_1+2) \neq 0, \dots, d(n_{t+j-1}+2) \neq 0, d(n_{t+j}+2) = 0)$$

para $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1+\delta}} = 1$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{N^2}\right)^{t+j-1} \frac{2}{N^2}$$

então como ambos
 os membros são iguais

mostramos que $\left(1 - \frac{2}{N^2}\right)^{N^{1+\delta}} > \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1+\delta}} = 1$

aproximada, lá é para lá!

$$P(K > N^{1+\delta}) = \left(1 - \frac{2}{N^2}\right)^{N^{1+\delta}}$$

converge para 1

Note que para $t = N^{1+\delta}$ o limite acima vai a zero quando N diverge.

Agora terminaremos a demonstração observando que:

prob. de chegar em F terminando $\bar{q}$ $N^{1+\delta}$

$$IP(\xi^\eta(u) \in F, \text{ para algum } u \leq N^{1+\delta}) =$$

$$P(R_N^\eta \leq N^{1+\delta})$$

equivalente

prob. de chegar nos vértices de F partindo de η com $\bar{q}$ $N^{1+\delta}$

$$\leq \sum_{\zeta \in F} IP(d(u) = 0, \text{ para algum } u \leq N^{1+\delta} \mid d(0) = d(\zeta, \eta))$$

$$\leq N^\gamma IP(d(u) = 0, \text{ para algum } u \leq N^{1+\delta} \mid d(0) = 1)$$

$\rightarrow \delta = 1 \rightarrow e^{-2}$
 $\rightarrow \delta > 1 \rightarrow 0$
 $\rightarrow \delta < 1 \rightarrow 1$

$$\leq N^\gamma \left(1 - \left(1 - \frac{2}{N^2}\right)^{N^{1+\delta}}\right)$$

$$= N^\gamma \left(1 - \exp\{N^{1+\delta} \log(1 - \frac{2}{N^2})\}\right)$$

$$= N^\gamma \left(1 - \exp\{N^{1+\delta} [-(\frac{2}{N^2} + \frac{4}{2N^4} + \dots)]\}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= N^\gamma \left(1 - \exp\{-2N^{\delta-1} - 2N^{\delta-3} - \frac{8}{3}N^{\delta-5} - \dots\} \right) \\
&= N^\gamma \left(1 - [1 - 2N^{\delta-1} + 2N^{2\delta-2} - \frac{8}{6}N^{3\delta-3} + 4N^{4\delta-4} - \dots] \right) + o(N) \\
&= N^\gamma 2N^{\delta-1} + o(N).
\end{aligned}$$

Portanto passando ao limite e utilizando a hipótese $\gamma + \delta < 1$ temos o resultado. ■

Proposição III : Para $0 < \gamma < 1$ e qualquer $t(N)$ tal que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t(N)N^\gamma}{2^N} = 0$ temos :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_N > t(N)) = 1.$$

inf (22) $\sigma^+(t) \in F$

*t(N) esta limitada
inf. por alguma seq. p.n.
2^N*

Demonstração :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_N \leq t(N)) &= \mathbb{P}(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } t \leq t(N)) \\
&\leq \mathbb{P}(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } t \leq N^{1+\delta}) + \\
&+ \mathbb{P}(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) \\
&= \mathbb{P}(R_N < N^{1+\delta}) + \mathbb{P}(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)).
\end{aligned}$$

Como pela proposição I $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_N \leq N^{1+\delta}) = 0$, temos:

$$\mathbb{P}(R_N \leq t(N)) \leq o(N) + \mathbb{P}(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N))$$

$$= o(N) + \mathbb{P}(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) -$$

$$- \mathbb{P}(\sigma^\eta(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) +$$

$$+ \mathbb{P}(\sigma^\eta(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N))$$

$$\leq o(N) + \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \left| \mathbb{P}(\sigma^+(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) - \right.$$

$$\left. - \mathbb{P}(\sigma^\eta(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N)) \right| +$$

$$+ \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}(\sigma^\eta(t) \in F, \text{ para algum } N^{1+\delta} < t \leq t(N))$$

$$\leq o(N) + \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sup_{\eta} \mathbb{P}(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})) +$$

$$+ \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sum_{u=N^{1+\delta}}^{t(N)} \mathbb{P}(\sigma^\eta(t) \in F)$$

$$\leq \frac{N^\gamma}{N} + \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sup_{\eta} \mathbb{P}(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})) +$$

$$+ \frac{(N^\gamma + 1)t(N)}{2^N}.$$

Passando ao limite em N , utilizando o teorema I e a hipótese, temos que a probabilidade acima vai a zero para algum $0 < \delta < 1$.

Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_N > t(N)) = 1.$$

■

Proposição IV : Para $\delta, \epsilon > 0$ e qualquer $t(N)$ tal que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t(N)^{1-\epsilon} \nu(F)}{N(\log N + 1)} = \infty$ temos :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_N \leq t(N)) = 1.$$

Demonstração: Considere os eventos $A_s = \{\sigma(s) \in F\}$ e defina Z uma variável aleatória positiva da seguinte maneira: $Z = \sum_{s=0}^{t(N)} \mathbf{1}_{\{A_s\}}$.

Note que $\{Z > 0\} = \{R_N^\eta \leq t(N)\}$.

Aplicando desigualdade de Cauchy-Schwarz ao produto $Z \mathbf{1}_{\{Z > 0\}}$ temos que:

$$\mathbb{P}(Z > 0) \geq \frac{[E(Z)]^2}{E(Z^2)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > 0) &= \mathbb{P}(R_N^\eta \leq t(N)) \\ &\geq \frac{[E(\sum_{s=N^{1+\delta}}^{t(N)} \mathbf{1}_{\{A_s\}})]^2}{[E(\sum_{s=N^{1+\delta}}^{t(N)} \mathbf{1}_{\{A_s\}})^2]} + o(N) \\ &= \frac{[\sum_{s=N^{1+\delta}}^{t(N)} \mathbb{P}(A_s)]^2}{E(\sum_{s=N^{1+\delta}}^{t(N)} \mathbf{1}_{\{A_s\}}^2 + \sum_{u \neq s} \mathbf{1}_{\{A_u\}} \mathbf{1}_{\{A_s\}})} + o(N) \\ &= \frac{(t(N) - N^{1+\delta})^2 \nu(F)^2}{(t(N) - N^{1+\delta}) \nu(F) + \sum_{u \neq s} \mathbb{P}(A_u \cap A_s)} + o(N) \\ &= \frac{(t(N) - N^{1+\delta})^2 \nu(F)^2}{(t(N) - N^{1+\delta}) \nu(F) + \sum_{|u-s| > N^{1+\delta}} \mathbb{P}(A_u \cap A_s) + \sum_{|u-s| \leq N^{1+\delta}} \mathbb{P}(A_u \cap A_s)} + o(N). \end{aligned}$$

Agora observe que:

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{|u-s| > N^{1+\delta}} IP(A_u \cap A_s) &= \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} (t(N) - k + 1) IP(\sigma(k) \in F, \sigma(0) \in F) \\
&= \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} (t(N) - k + 1) \sum_{\eta \in F} \nu(\eta) IP(\sigma(k) \in F | \sigma(0) = \eta) \\
&= \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} (t(N) - k + 1) \times \\
&\quad \times \left\{ \sum_{\eta \in F} \nu(\eta) \sum_{\xi \in H_N} \nu(\xi) \left[IP(\sigma^\eta(k) \in F | \sigma(0) = \eta) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - IP(\sigma^\xi(k) \in F | \sigma(0) = \xi) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\eta \in F} \nu(\eta) \sum_{\xi \in H_N} \nu(\xi) IP(\sigma(k) \in F | \sigma(0) = \xi) \right\} \\
&\leq \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} (t(N) - k + 1) \times \\
&\quad \times \left[\sum_{\eta \in F} \nu(\eta) \sum_{\xi \in H_N} \nu(\xi) IP(\sigma^\eta(k) \neq \sigma^\xi(k)) + \nu(F)^2 \right]
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Markov e a majoração que aparece no teorema I obtemos

que:

$$\begin{aligned}
\sum_{|u-s| > N^{1+\delta}} \mathbb{P}(A_u \cap A_s) &\leq \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} (t(N) - k + 1) \times \\
&\times \left[\sum_{\eta \in F} \nu(\eta) \sum_{\xi \in H_N} \nu(\xi) \frac{N(\log N + 1)}{k} + \nu(F)^2 \right] \\
&= \sum_{k=N^{1+\delta}}^{t(N)} (t(N) - k + 1) \left[\nu(F) \frac{N(\log N + 1)}{k} + \nu(F)^2 \right] \\
&\leq t(N) \log t(N) N(\log N + 1) \nu(F) + t(N)^2 \nu(F)^2 \\
&\leq t(N)^{1+\epsilon} N(\log N + 1) \nu(F) + t(N)^2 \nu(F)^2.
\end{aligned}$$

b)

$$\sum_{|u-s| < N^{1+\delta}} \mathbb{P}(A_u \cap A_s) \leq t(N) N^{1+\delta} \nu(F).$$

Passando ao limite em N temos por hipótese que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_N^\eta \leq t(N)) = 1.$$

Basta mostrarmos agora que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{P}(R_N^\eta > t(N)) - \mathbb{P}(R_N > t(N))| = 0.$$

Mas pelas proposições I e II temos que:

$$\begin{aligned} & |\mathbb{P}(R_N^\eta > t(N)) - \mathbb{P}(R_N > t(N))| \\ & \leq \sup_{\eta} \mathbb{P}(\sigma^\eta(N^{1+\delta}) \neq \sigma^+(N^{1+\delta})). \end{aligned}$$

Pelo teorema I a probabilidade acima vai a 0 quando N diverge.

agora
19/10/06

■

Obs.: As proposições III e IV nos fornecem limitantes para $E(R_N)$ quando N diverge.

Lema III: Considere $\beta_N = \min(n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(R_N \geq n) \leq e^{-1})$. Então ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N) = e^{-1}.$$

Demonstração:

Pela definição de β_N temos que:

$$\mathbb{P}(R_N \geq \beta_N) \leq e^{-1} < \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N - 1)$$

Como,

$$0 \leq \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N - 1) - \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N) \leq \mathbb{P}(\beta_N - 1 \leq R_N < \beta_N) ;$$

concluiremos a demonstração utilizando a propriedade de Markov.

$$\mathbb{P}(\beta_N - 1 \leq R_N < \beta_N) = \mathbb{P}(\beta_N - 1 \leq R_N < \beta_N \mid \sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) \times$$

$$\times \mathbb{P}(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F)$$

$$= \mathbb{P}(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F) \mathbb{P}(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F) \left[\mathbb{P}(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) - \right. \\
&\quad - \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}(\sigma^\eta(\beta_N - 1) \notin F) + \\
&\quad \left. + \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}(\sigma^\eta(\beta_N - 1) \notin F) \right] \\
&= \mathbb{P}(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F) \left[\mathbb{P}(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) - \right. \\
&\quad - \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}(\sigma^\eta(\beta_N - 1) \notin F) \left. \right] + \\
&\quad + \frac{2^N - |F|}{2^N} \mathbb{P}(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F) \\
&\leq \mathbb{P}(\sigma(1) \in F \mid \sigma(0) \notin F) \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \left[\mathbb{P}(\sigma^+(\beta_N - 1) \notin F) - \right. \\
&\quad - \mathbb{P}(\sigma^\eta(\beta_N - 1) \notin F) \left. \right] + \frac{2^N - |F|}{2^N} \frac{N^\gamma}{N} \\
&\leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sup_{\eta} \mathbb{P}(\sigma^+(\beta_N - 1) \neq \sigma^\eta(\beta_N - 1)) + \frac{2^N - |F|}{2^N} \frac{N^\gamma}{N} .
\end{aligned}$$

Passando ao limite quando N diverge temos que o primeiro termo vai a zero pelo teorema I e o segundo vai a zero pelo corolário III e pela hipótese.

Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N) = e^{-1}.$$

■

Notação: $\sigma(\beta_N) = \sigma([\beta_N])$.

Lema IV: Existe um número real α satisfazendo $e^{-1} \leq \alpha < 1$ tal que para N suficientemente grande e qualquer inteiro n temos:

$$\mathbb{P}(R_N \geq \beta_N n) \leq \alpha^n.$$

Demonstração: A verificação do resultado será feita por indução.

Para $n = 1$ o resultado é direto pois por definição

$$\beta_N = \min\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N) \leq e^{-1}\}.$$

Assumiremos agora que a desigualdade vale para o inteiro n . Provaremos para $n + 1$ usando a propriedade de Markov.

$$\mathbb{P}(R_N \geq \beta_N(n + 1)) = \sum_{\eta \notin F} \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N n, \sigma(\beta_N n) = \eta) \times$$

$$\mathbb{P}(R_N \geq \beta_N \mid \sigma(0) = \eta)$$

$$\leq \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N n) \sup_{\eta \notin F} \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N \mid \sigma(0) = \eta)$$

$$\leq \alpha^n \sup_{\eta \notin F} \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N \mid \sigma(0) = \eta)$$

Agora pela proposição I e II temos que:

$$|\mathbb{P}(R_N^\eta \geq \beta_N) - \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N)| =$$

$$|\mathbb{P}(R_N^\eta \geq \beta_N, \sigma^\eta(u) \notin F, u \leq N^{1+\delta}) -$$

$$- \mathbb{P}(R_N \geq \beta_N, \sigma^+(u) \notin F, u \leq N^{1+\delta})|$$

$$\leq \sup_{\eta} \mathbb{P}(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta}))$$

Pelo teorema I temos que a probabilidade acima converge a zero quando N diverge.

Assim, para N suficientemente grande temos:

$$IP(R_N > \beta_N(n+1)) \leq \alpha^n e^{-1} \leq \alpha^{n+1}.$$

Teorema III: Para $0 < \gamma < 1$ temos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP\left(\frac{R_N}{\beta_N} > t\right) = e^{-t}.$$

$$IP\left(\frac{R_N}{\beta_N} > t\right) = f(t)$$

Demonstração: Para verificarmos que R_N normalizado por β_N tem lei exponencial de parâmetro 1 quando N diverge basta provarmos que :

a) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(R_N)}{\beta_N} = 1.$

b) $\lim_{N \rightarrow \infty} |IP(R_N > \beta_N(t+s)) - IP(R_N > \beta_N t) IP(R_N > \beta_N s)| = 0,$
para qualquer s, t fixados.

obs.: 1) O segundo item garante que se a lei de $\frac{R_N}{\beta_N}$ converge quando $N \rightarrow \infty$, o limite precisa ser uma lei exponencial (talvez degenerada). Por outro lado, o lema III juntamente com este item implicam que se t é um número racional positivo, então o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} IP(R_N \geq \beta_N t)$$

existe e é igual a e^{-t} . Como a lei exponencial é contínua, isto é suficiente para provar a convergência para todo t real, o que conclui a prova.

2) Esta técnica foi utilizada em [2] para a demonstração de outro resultado podendo servir como referência.

prova de a) :

$$\begin{aligned} \frac{E(R_N)}{\beta_N} &= \frac{1}{\beta_N} \int_0^\infty IP(R_N > t) dt \\ &= \int_0^\infty IP\left(\frac{R_N}{\beta_N} > t\right) dt. \end{aligned}$$

Passando ao limite em N e utilizando o lema IV podemos aplicar o teorema da convergência dominada de Lebesgue obtendo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\frac{R_N}{\beta_N} > t\right) dt = 1.$$

prova de b) : Primeiramente vamos mostrar o resultado para uma configuração inicial escolhida uniformemente em H_N .

Observe os seguintes fatos:

Fato 1:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\left(R_N^\eta > \beta_N(t+s)\right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\left(\sigma^\eta(u) \notin F, \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. \forall u \in \{1, \dots, \beta_N t\} \cup \{\beta_N t + N^{1+\delta}, \dots, \beta_N(t+s)\}\right) \right| \\ & \leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P}\left(\sigma^\eta(u) \in F, \right. \\ & \quad \left. \text{para algum } u \in \{\beta_N t + 1, \dots, \beta_N t + N^{1+\delta}\}\right) \\ & \leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sum_{u=\beta_N t}^{\beta_N t + N^{1+\delta}} \sum_{\zeta \in F} \mathbb{P}\left(\sigma^\eta(u) = \zeta\right) \\ & \leq \frac{N^{1+\delta}(N^\gamma + 1)}{2^N}. \end{aligned}$$

Assim a probabilidade acima vai a zero quando N diverge.

Fato 2:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P} \left(R_N^\eta > \beta_N s \right) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P} \left(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N s\} \right) \right| \\
& \leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P} \left(\sigma^\eta(u) \in F, \text{ para algum } u \in \{1, \dots, N^{1+\delta}\} \right) \\
& \leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sum_{u=1}^{N^{1+\delta}} \sum_{\zeta \in F} \mathbb{P} \left(\sigma^\eta = \zeta \right) \\
& \leq \frac{N^{1+\delta} (N^\gamma + 1)}{2^N}.
\end{aligned}$$

Novamente, quando N diverge a probabilidade acima vai a zero.

Fato 3: Considere a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P} \left(R_N^\eta > \beta_N (t + s) \right) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P} \left(R_N^\eta > \beta_N t \right) \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \mathbb{P} \left(R_N^\eta > \beta_N s \right) \right|.
\end{aligned}$$

Agora utilizando a propriedade de Markov, os fatos 1 e 2 a expressão acima é limitada por:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{\eta \in H_N} \sum_{\kappa \notin F} \nu(\eta) \mathbb{P} \left(R_N^\eta > \beta_N t, \sigma^\eta(\beta_N t) = \kappa \right) \right. \\
& \quad \times \left[\mathbb{P} \left(\sigma^\kappa(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N s\} \right) \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathbb{P} \left(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N s\} \right) \right] \right| \\
& \leq \sum_{\eta \in H_N} \nu(\eta) \sum_{\kappa \notin F} \sup_{\kappa \in H_N} \mathbb{P} \left(\sigma^\kappa(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta}) \right).
\end{aligned}$$

Assim, passando ao limite quando N diverge e utilizando o teorema I temos que a expressão acima vai a zero.

Resta-nos mostrar agora que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbb{P}(R_N > \beta_N t) - \mathbb{P}(R_N^\eta > \beta_N t) \right| = 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{P}(R_N > \beta_N t) - \mathbb{P}(\sigma^+(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}) \right| \\ & \leq \mathbb{P}(R_N < N^{1+\delta}). \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{P}(R_N^\eta > \beta_N t) - \mathbb{P}(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}) \right| \\ & \leq \mathbb{P}(R_N^\eta < N^{1+\delta}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{P}(R_N > \beta_N t) - \mathbb{P}(R_N^\eta > \beta_N t) \right| \\ & \leq \left| \mathbb{P}(\sigma^+(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}) \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{P}(\sigma^\eta(u) \notin F, \forall u \in \{N^{1+\delta}, \dots, \beta_N t\}) \right| \\ & \leq \sup_{\eta \in H_N} \mathbb{P}(\sigma^+(N^{1+\delta}) \neq \sigma^\eta(N^{1+\delta})). \end{aligned}$$

Agora passando ao limite quando N diverge e utilizando o teorema I temos o resultado. ■

Lema V : (Lema da Reflexão)

Para u, s fixados temos:

$$\mathbb{P}\left(V[0, s] \cap V[s+1, s+u] = \emptyset\right) = \mathbb{P}\left(V[0, u-1] \cap V[u, u+s] = \emptyset\right).$$

Demonstração :

Seja $\mathcal{C}$ a classe de conjuntos tal que:

$$\mathcal{C} = \left\{ (i_1, \dots, i_{2c}); c = 1, 2, \dots : \sum_{k=1}^{2c} \mathbf{1}_{\{i=i_k\}} \text{ é par para todo } i \in \{1, \dots, N\} \right\}.$$

Note que se $\sigma(k) = \eta^{i_1 \dots i_k} = \eta$ então $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{C}$.

Primeiramente notamos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(V[0, s] \cap V[s+1, s+u] = \emptyset\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\eta \notin V[s+1, s+u], \dots, \sigma(s) \notin V[s+1, s+u]\right) \\ &= \mathbb{P}\left((i_1, \dots, i_{m_1}) \notin \mathcal{C}, \text{ para } s+1 \leq m_1 \leq s+u, \dots, \right. \\ &\quad \left. \dots (i_s, \dots, i_{m_s}) \notin \mathcal{C}, \text{ para } s+1 \leq m_s \leq s+u\right) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(V[0, u-1] \cap V[u, u+s] = \emptyset\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sigma(u) \notin V[0, u-1], \dots, \sigma(u+s) \notin V[0, u-1]\right) \\ &= \mathbb{P}\left((i_{m_1}, \dots, i_u) \notin \mathcal{C}, \text{ para } 1 \leq m_1 \leq u-1, \dots, \right. \\ &\quad \left. \dots (i_{m_s}, \dots, i_{u+s}) \notin \mathcal{C} \text{ para } 1 \leq m_s \leq u-1\right) \end{aligned}$$

Portanto temos a igualdade das probabilidades. ■

Corolário V :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(V[0, N^a] \cap V[N^a+1, N^a+N^\gamma+1] \neq \emptyset\right) = 0.$$

Demonstração :

Utilizando o lema IV temos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(V[0, N^a] \cap V[N^a + 1, N^a + N^\gamma + 1] = \emptyset\right) \\ &= \mathbb{P}\left(V[0, N^\gamma] \cap V[N^\gamma + 1, N^a + N^\gamma + 1] = \emptyset\right) \\ &= \mathbb{P}\left(R_N > N^a + N^\gamma + 1\right). \end{aligned}$$

Passando ao limite e utilizando a proposição IV temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(V[0, N^a] \cap V[N^a + 1, N^a + N^\gamma + 1] \neq \emptyset\right) = 0.$$

■

III.4 Demonstração do teorema IV

Seja $\Theta = \inf(t > 0; \xi(t) \in M)$; ou seja, o tempo que o processo $\xi(t)$ leva para alcançar o conjunto M .

Proposição V : Para $0 < \gamma < 1$, temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{E}(IP(\Theta > N^{\gamma}t)) = e^{-t}.$$

Demonstração : Notamos primeiro que para $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ fixado :

$$IP(\Theta > N^{\gamma}t) = \mathbf{1}_{\{\eta \notin M\}} \frac{1}{N} \sum_{i_1=1}^N \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1} \notin M\}} \cdots \frac{1}{N} \sum_{i_{N^{\gamma}t}=1}^N \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1 \dots i_{N^{\gamma}t}} \notin M\}}.$$

Denotaremos por

$$F_1(N) = \{(i_1, \dots, i_{N^{\gamma}t}) \in \{1, \dots, N\}^{N^{\gamma}t}, \forall l = 1, \dots, N^{\gamma}t, \eta^{i_1 \dots i_l} \notin \{\eta, \eta^{i_1}, \dots, \eta^{i_1 \dots i_{l-1}}\}\};$$

e por $F_2(N) = \{1, \dots, N\}^{N^{\gamma}t} \setminus F_1(N)$.

Seja $i' = (i_1, \dots, i_{N^{\gamma}t})$ então,

$$\begin{aligned} \bar{E}(IP(\Theta > N^{\gamma}t)) &= \frac{1}{N^{N^{\gamma}t}} \sum_{i' \in F_1(N)} \bar{E}(\mathbf{1}_{\{\eta \notin M\}} \cdots \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1 \dots i_{N^{\gamma}t}} \notin M\}}) \\ &+ \frac{1}{N^{N^{\gamma}t}} \sum_{i' \in F_2(N)} \bar{E}(\mathbf{1}_{\{\eta \notin M\}} \cdots \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1 \dots i_{N^{\gamma}t}} \notin M\}}) \\ &= \frac{|F_1(N)|}{N^{N^{\gamma}t}} \left(1 - \frac{1}{N^{\gamma}}\right)^{N^{\gamma}t+1} \\ &+ \frac{1}{N^{N^{\gamma}t}} \sum_{i' \in F_2(N)} \bar{E}(\mathbf{1}_{\{\eta \notin M\}} \cdots \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1 \dots i_{N^{\gamma}t}} \notin M\}}) \end{aligned}$$

Pelo corolário III,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|F_1(N)|}{N^{N^{\gamma}t}} = 1, \quad e$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|F_2(N)|}{N^{N^{\gamma}t}} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{E} \left(\mathbb{P}(\Theta > N^{\gamma}t) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N^{\gamma}t} \right)^{N^{\gamma}t+1} = e^{-t}.$$

■

Teorema IV : Para $0 < \gamma < 1$, e $\epsilon > 0$, temos :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}} \left(|\mathbb{P}(\Theta > N^{\gamma}t) - e^{-t}| > \epsilon \right) = 0.$$

Demonstração :

Utilizando a desigualdade clássica de Tchebyshev temos :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}} \left(|\mathbb{P}(\Theta > N^{\gamma}t) - e^{-t}| > \epsilon \right) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \overline{E} \left[\left(\mathbb{P}(\Theta > N^{\gamma}t) - e^{-t} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \left[\overline{E} \left[\left(\mathbb{P}(\Theta > N^{\gamma}t) \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2e^{-t} \overline{E} \left(\mathbb{P}(\Theta > N^{\gamma}t) \right) + \overline{E}(e^{-t})^2 \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \left[\overline{E} \left[\left(\mathbb{P}(\Theta > N^{\gamma}t) \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2e^{-t} \overline{E} \left(\mathbb{P}(\Theta > N^{\gamma}t) \right) + e^{-2t} \right]. \end{aligned}$$

Resta-nos calcular $\overline{E}\left[\left(\mathbb{P}(\Theta > N^\gamma t)\right)^2\right]$.

Para $\bar{\omega} \in \overline{\Omega}$ fixado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(\Theta > N^\gamma t)^2] &= \left\{ \mathbf{1}_{\{\eta \notin M\}} \frac{1}{N} \sum_{i_1=1}^N \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1} \notin M\}} \cdots \frac{1}{N} \sum_{i_{N^\gamma t}=1}^N \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1 \dots i_{N^\gamma t}} \notin M\}} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{1}_{\{\eta \notin M\}} \frac{1}{N} \sum_{i_1^*=1}^N \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1^*} \notin M\}} \cdots \frac{1}{N} \sum_{i_{N^\gamma t}^*=1}^N \mathbf{1}_{\{\eta^{i_1^* \dots i_{N^\gamma t}^*} \notin M\}} \right\} \end{aligned}$$

Agora considere $G^* = \{\eta^{i_1^*}, \dots, \eta^{i_1^* \dots i_{N^\gamma t}^*}\}$. Pelo corolário III,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |G^*| - N^\gamma t = 0.$$

Por outro lado, fixado $(i_1^*, \dots, i_{N^\gamma t}^*)$ temos pelo teorema III que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\{\eta, \dots, \eta^{i_1 \dots i_{N^\gamma t}}\} \cap \{\eta^{i_1^*}, \dots, \eta^{i_1^* \dots i_{N^\gamma t}^*}\} \neq \emptyset\right) = 0.$$

Assim,

$$\overline{E}[\mathbb{P}(\Theta > N^\gamma t)^2] = \left(1 - \frac{1}{N^\gamma}\right) \left(1 - \frac{1}{N^\gamma}\right)^{2|G^*|} + o(N).$$

Passando ao limite em N temos que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{E}\left[\left(\mathbb{P}(\Theta > N^\gamma t)\right)^2\right] = e^{-2t}.$$

Portanto, com o resultado da proposição V :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\mathbb{P}} \left[|\mathbb{P}(\Theta > N^\gamma t) - e^{-t}| > \epsilon \right] = 0.$$

■