**Modelos de Urna:
Um Estudo de Tempos de Espera
via Processo de Poisson**

Dario Nery

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**
Orientador: **Prof. Dr. Flávio Wagner Rodrigues**

—São Paulo, Junho de 1992—

À Danielle

À Elaine

Aos meus pais

À Tia Laide

AGRADECIMENTOS

A todos que colaboraram neste trabalho. Em especial

- Prof. Flávio Wagner Rodrigues - pela sugestão do tema e orientação.
- Prof. Sérgio Wechsler - pelas valiosas sugestões no decorrer do trabalho e grande amigo.
- Rinaldo Artes - pela amizade e incentivo desde os tempos de graduação.
- Fábio Prates Machado - grande amigo em todas as ocasiões.
- Aos colegas de mestrado.
- Aos colegas do Departamento de Estatística, em particular aos Profs. Adilson Simonis e Antonio Carlos Pedroso de Lima.

ABSTRACT

Some occupancy problems are studied by considering several ways by which balls may be distributed. The waiting time until a certain condition is met is then studied. A solution introduced by Holst (1986) changing the discrete waiting time to continuous time through embedding into a Poisson Process is constructed. Applications to Brazilian lotteries numbers are presented.

RESUMO

Neste trabalho estudamos alguns problemas de ocupação considerando a maneira como as bolas são distribuídas. O tempo de espera até que determinada condição esteja satisfeita também é estudado. É desenvolvida uma proposta de Holst (1986) transformando o problema de tempo discreto em contínuo, através de uma imersão em um Processo de Poisson. Aplicações às loterias de números Loto e Sena são apresentadas.

Conteúdo

1	O Problema Clássico da Ocupação.	1
1.1	Introdução	2
1.2	Modelo Parcialmente Aleatório para Bolas Idênticas.	7
1.2.1	Distribuição do número de urnas ocupadas e do número de urnas vazias	7
1.2.2	Momentos de M_0^r e de M_{oc}^r	9
1.2.3	Aplicação	11
1.3	Modelo Totalmente Aleatório.	16
1.3.1	Distribuição do número de urnas ocupadas e do número de urnas vazias	18
1.3.2	Momentos de M_0^r e de M_{oc}^r	19
1.3.3	Distribuição e esperança do número de urnas com exatamente k bolas .	20
2	O Problema das Comissões.	23

2.1	Introdução	24
2.2	Distribuição e Momentos do Número de Bolas que Faltam Sair	25
3	Problemas de Tempo de Espera.	28
3.1	Introdução	29
3.2	Tempo de Espera no Problema da Ocupação.	30
3.2.1	O Problema do Colecionador	30
3.2.2	Imersão em um Processo de Poisson	33
3.2.3	Aplicações	35
3.3	Tempo de Espera no Problema das Comissões.	39
3.3.1	Aplicação.	41
3.3.2	Conclusões e Comentários.	42
A	Operador Diferença e Números de Stirling.	43

Capítulo 1

O Problema Clássico da Ocupação.

1.1 Introdução

Considere N urnas numeradas de 1 a N e um conjunto de r bolas que serão distribuídas entre essas urnas. O problema clássico da ocupação consiste em determinar a distribuição de probabilidades do número de urnas ocupadas (ou do número de urnas vazias) após as r bolas terem sido distribuídas. Uma maneira alternativa de se ver esse problema é considerar uma urna contendo N bolas numeradas da qual retiramos r bolas com reposição. Neste caso, nosso interesse é a distribuição do número de bolas distintas na amostra (ou do número de bolas que não apareceram nenhuma vez). Dependendo da conveniência utilizaremos, ao longo deste trabalho, uma ou outra abordagem.

Johnson & Kotz (1977) e Feller (1968) tratam do problema considerando duas situações diferentes: bolas distintas e bolas idênticas. Porém essa distinção só faz sentido se levarmos em conta o processo de distribuição das bolas nas urnas.

Neste trabalho, duas maneiras de distribuir-se as bolas nas urnas serão consideradas.

Definição 1.1 Diremos que a distribuição é **Totalmente Aleatória** se para cada bola escolhermos independentemente e com igual probabilidade a urna onde deveremos colocá-la.

Definição 1.2 Chamamos **Configuração** a qualquer possível distribuição das r bolas nas N urnas.

Definição 1.3 Diremos que a distribuição é **Parcialmente Aleatória** quando escolhermos a configuração final das r bolas nas N urnas com igual probabilidade.

Desta maneira, temos 4 situações conforme esquematizamos abaixo:

Distribuição	Bolas	
	Distintas	Idênticas
Totalmente Aleatória	A	C
Parcialmente Aleatória	B	D

Exemplo 1.1 Para $r = 3$ e $N = 2$,

Figura 1 - Distribuição de 3 bolas distintas.

representam três configurações distintas nas situações A e B; enquanto que nas situações C e D, representam apenas a configuração seguinte

Figura 2 - Distribuição de 3 bolas idênticas.

Situação A: Bolas distintas e distribuição Totalmente Aleatória.

Seja B_j^i o evento bola i na urna j , $i = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, N$. Assim,

$$P(B_j^i) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Seja C uma configuração qualquer. C pode ser escrita em termos de B_j^i da seguinte forma:

$$C = B_{j_1}^1 \cap B_{j_2}^2 \cap \dots \cap B_{j_r}^r \quad \text{com} \quad j_i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}$$

Então,

$$P(C) = \prod_{k=1}^r P(B_{j_k}^k) = \left(\frac{1}{N}\right)^r = \frac{1}{N^r}$$

Como para cada bola temos N maneiras distintas de escolhermos uma urna, o número de configurações distintas é N^r . Portanto, na situação A temos N^r configurações equiprováveis.

Situação B: Bolas distintas e distribuição Parcialmente Aleatória.

Neste caso, também temos N^r configurações distintas que são, por definição, equiprováveis. Logo, a probabilidade de qualquer configuração C é:

$$P(C) = \frac{1}{N^r}$$

Situação C: Bolas idênticas e distribuição Totalmente Aleatória.

Neste caso, tudo se passa como se as bolas fossem numeradas porém sem que seus números sejam visíveis.

Seja x_j o número de bolas alocadas na urna j , $j = 1, 2, \dots, N$. Os números x_j são chamados números de ocupação.

Cada configuração é então especificada pelo vetor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e duas configurações são distintas se, e somente se, os vetores que as representam são distintos.

Como o número total de bolas a serem distribuídas é r , temos:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = r \quad (1.1)$$

Portanto, o número de configurações distintas é igual ao número de soluções inteiras e não negativas da equação 1.1

Teorema 1.1 *O número de maneiras distintas de se distribuir r bolas idênticas em N urnas é dado por:*

$$\binom{r + N - 1}{r} = \binom{r + N - 1}{N - 1} \quad (1.2)$$

Prova: Representemos as bolas por $*$ e as N urnas pelos N espaços entre $N + 1$ barras. Por exemplo, se tivermos $r = N = 7$, a configuração

$$| ** | \quad | * | * | \quad | \quad | *** |$$

equivale a $x_1 = 2$, $x_2 = x_5 = x_6 = 0$, $x_3 = x_4 = 1$ e $x_7 = 3$.

Para r bolas e N urnas temos então $r + N + 1$ símbolos. Como o primeiro e o último devem ser necessariamente barras restam $r + N - 1$ símbolos sendo $r *$ e $N - 1 |$ para serem alocados. Observe que a distribuição fica completamente determinada quando escolhemos os lugares dos $r *$ ou das $N - 1 |$. Consequentemente, o número total de distribuições distintas é dado por 1.2. $\square$

Como, cada bola pode ser colocada em qualquer uma das N urnas com probabilidade $\frac{1}{N}$ e independentemente das demais, o vetor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ possui distribuição Multinomial $(r, \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$.

Sendo cada configuração especificada pelo vetor $\vec{x}$, temos

$$P(C) = \binom{r}{x_1, x_2, \dots, x_N} \left(\frac{1}{N}\right)^r = \frac{\binom{r}{x_1, x_2, \dots, x_N}}{N^r} \quad (1.3)$$

Situação D: Bolas idênticas e distribuição Parcialmente Aleatória.

Neste caso, o número de configurações distintas é ainda dado por 1.2 porém elas são, por definição, equiprováveis. Portanto, temos $\binom{r+N-1}{r}$ configurações com probabilidade $\frac{1}{\binom{r+N-1}{r}} = \frac{1}{\binom{r+N-1}{N-1}}$.

Observações:

1. Como podemos observar no caso de bolas distintas, os modelos Totalmente Aleatório e Parcialmente Aleatório (situações A e B respectivamente) são iguais. O mesmo não ocorre no caso de bolas idênticas (situações C e D).

2. No caso de bolas idênticas e distribuição Totalmente Aleatória (situação C), o denominador da expressão 1.3 é N^r , como no caso de bolas distintas (situações A e B). O numerador por sua vez pode ser obtido através da soma de configurações distintas nas situações A e B, conforme visto nas figuras 1 e 2.

Nos problemas de ocupação estamos interessados nos números de ocupação x_j de cada urna e não nos elementos que as compõem. Desta forma, o fato das bolas serem ou não distinguíveis será irrelevante no caso de distribuição Totalmente Aleatória, e no caso de bolas distintas as duas formas de distribuição resultam em modelos iguais. Desta forma, para o objetivo deste trabalho podemos considerar apenas dois casos: um que engloba as situações A, B e C que chamaremos simplesmente de **Modelo Totalmente Aleatório**, e outro relativo a situação D que chamaremos de **Modelo Parcialmente Aleatório para Bolas Idênticas**.

1.2 Modelo Parcialmente Aleatório para Bolas Idênticas.

Conforme vimos na situação D, no modelo parcialmente aleatório para bolas idênticas as $\binom{r+N-1}{r}$ configurações são equiprováveis. Assim, para qualquer configuração C temos,

$$P(C) = \frac{1}{\binom{r+N-1}{r}}$$

Este modelo é conhecido na física como Estatística de Bose-Einstein e é utilizado para descrever o comportamento de fótons, núcleos e átomos que contenham um número par de partículas elementares (Margenau, H. & Murphy, G. M. (1943)).

Sendo as configurações equiprováveis, a probabilidade de um evento A qualquer é dada por

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\binom{r+N-1}{r}}$$

onde $\#(A)$ representa o número de configurações que satisfazem o evento A .

1.2.1 Distribuição do número de urnas ocupadas e do número de urnas vazias

Teorema 1.2 *O número de maneiras distintas de se alocar r bolas idênticas em N urnas de modo que nenhuma fique vazia é dado por:*

$$\binom{r-1}{N-1} \tag{1.4}$$

Prova: Como as bolas são idênticas e queremos que todas as urnas tenham pelo menos uma bola cada, colocamos arbitrariamente uma bola em cada urna. Sobram então $r - N$ bolas para serem alocadas em N urnas. Assim, por 1.2 o número de maneiras distintas é dado por

$$\binom{r - N + N - 1}{N - 1} = \binom{r - 1}{N - 1} \quad \square$$

Lema 1.1 *Seja M_j^r o número de urnas com exatamente j bolas, após as r bolas terem sido alocadas, $j = 0, 1, 2, \dots, r$ e M_{oc}^r o número de urnas ocupadas. Então*

$$P(M_{oc}^r = k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{r - 1}{k - 1}}{\binom{r + N - 1}{r}}, \quad k = 1, 2, \dots, \min(N, r) \quad (1.5)$$

$$P(M_0^r = k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{r - 1}{N - k - 1}}{\binom{r + N - 1}{r}}, \quad k = \max(0, N - r), \dots, N - 1 \quad (1.6)$$

Prova: Observe que,

$$\begin{aligned} M_0^r + M_1^r + M_2^r + \dots + M_r^r &= N \\ M_{oc}^r = M_1^r + M_2^r + \dots + M_r^r &= N - M_0^r \end{aligned} \quad (1.7)$$

Para determinarmos a distribuição de M_{oc}^r , observemos que $M_{oc}^r = k$ se e somente se todas as r bolas forem colocadas em exatamente k urnas, com a restrição de que nenhuma dessas k urnas fiquem vazias.

Como as k urnas podem ser escolhidas de $\binom{N}{k}$ maneiras distintas e por 1.4 o número de

maneiras de se distribuir r bolas em k urnas de modo que nenhuma fique vazia é $\binom{r-1}{k-1}$, temos

$$P(M_{oc}^r = k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{r-1}{k-1}}{\binom{r+N-1}{r}}$$

e consequentemente por 1.7 e 1.5

$$P(M_0^r = k) = P(M_{oc}^r = N - k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{r-1}{N-k-1}}{\binom{r+N-1}{r}}$$

□

1.2.2 Momentos de M_0^r e de M_{oc}^r

Lema 1.2 *Seja $\mu_{M_0^r}^{(i)}$ o i -ésimo momento fatorial de M_0^r , isto é,*

$$\mu_{M_0^r}^{(i)} = \mathbf{E}(M_0^{r(i)}) = \mathbf{E}[M_0^r(M_0^r - 1) \cdots (M_0^r - i + 1)]$$

Então, para $i \leq N - 1$

$$\mu_{M_0^r}^{(i)} = \frac{N^{(i)} \binom{r+N-i-1}{r}}{\binom{r+N-1}{r}} \quad (1.8)$$

Prova: Para $i \leq N - 1$, temos

$$\begin{aligned}
 \mu_{M_0^r}^{(i)} &= \mathbf{E}(M_0^{r(i)}) = \sum_{k=0}^{N-1} k^{(i)} P(M_0^r = k) = \sum_{k=0}^{N-1} k^{(i)} \frac{\binom{N}{k} \binom{r-1}{N-k-1}}{\binom{r+N-1}{r}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} k(k-1)\dots(k-i+1) \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{\binom{r-1}{N-k-1}}{\binom{r+N-1}{r}} \\
 &= \sum_{k=i}^{N-1} \frac{N!}{(k-i)!(N-k)!} \frac{\binom{r-1}{N-k-1}}{\binom{r+N-1}{r}} \\
 &= N^{(i)} \sum_{k=i}^{N-1} \binom{N-i}{k-i} \frac{\binom{r-1}{N-k-1}}{\binom{r+N-1}{r}} \\
 &= N^{(i)} \frac{\sum_{j=0}^{N-i-1} \binom{N-i}{j} \binom{r-1}{N-i-j-1}}{\binom{r+N-1}{r}} \tag{1.9}
 \end{aligned}$$

Mas o numerador de 1.9 é

$$\sum_{j=0}^{N-i-1} \binom{N-i}{j} \binom{r-1}{N-i-j-1} = \binom{r+N-i-1}{r}$$

o que conclui a prova. $\square$

Lema 1.3 *A esperança e a variância de M_0^r e de M_{oc}^r são dadas por:*

$$\mathbf{E}(M_0^r) = \frac{N(N-1)}{r+N-1} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{Var}(M_0^r) = \frac{Nr(N-1)(r-1)}{(r+N-1)^2(r+N-2)} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{E}(M_{oc}^r) = N - \mathbf{E}(M_0^r) = N - \frac{N(N-1)}{r+N-1} = \frac{Nr}{r+N-1} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{Var}(M_{oc}^r) = \mathbf{Var}(M_0^r) = \frac{Nr(N-1)(r-1)}{(r+N-1)^2(r+N-2)} \quad (1.13)$$

Prova: Para provar 1.10 e 1.11 basta ver que $\mathbf{E}(M_0^r) = \mu_{M_0^r}^{(1)}$ e $\mathbf{Var}(M_0^r) = \mu_{M_0^r}^{(2)} + \mu_{M_0^r}^{(1)} - \left[\mu_{M_0^r}^{(1)} \right]^2$ e aplicar 1.8.

No caso de 1.12 e de 1.13, temos por 1.7 que $M_{oc}^r = N - M_0^r$. Logo por 1.10 e 1.11 temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_{oc}^r) &= N - \mathbf{E}(M_0^r) \\ \mathbf{Var}(M_{oc}^r) &= \mathbf{Var}(M_0^r) \end{aligned}$$

□

1.2.3 Aplicação

Apesar de, na prática, não conseguirmos uma maneira de distribuímos r bolas em N urnas que nos resulte no modelo visto acima, este pode ser útil na resolução de certos problemas. Apresentaremos aqui um problema que pode ser facilmente resolvido através do Modelo Parcialmente Aleatório.

A loteria de números Loto consiste de 100 dezenas numeradas de 00 a 99 das quais 5 são sorteadas a cada concurso. Muitas pessoas se surpreendem ao verem que em vários concursos são sorteadas dezenas consecutivas. Apesar de parecer, a primeira vista, estranho, este fato pode ser facilmente estudado através do Modelo Parcialmente Aleatório.

Cada um dos possíveis resultados da Loto pode ser representado por uma sequência de 100 bolinhas, cada uma associada a uma dezena, sendo 5 bolinhas pretas (dezenas sorteadas) e 95 brancas (dezenas não sorteadas). Assim, se tivermos sorteadas as dezenas 04, 10, 16, 63 e 64 teremos a seguinte representação:

Consideremos então cada bola preta (dezena sorteada) como sendo delimitador de uma urna. Assim, os espaços entre as 5 bolas pretas constituem 6 urnas e temos 95 bolas para serem distribuídas entre elas.

Como esses resultados são equiprováveis, temos o Modelo Parcialmente Aleatório com $N = 6$ urnas e $r = 95$ bolas. Por 1.2 o número de possíveis resultados para um concurso da Loto é $\binom{95 + 6 - 1}{6 - 1} = \binom{100}{5}$ (como era de se esperar).

Ordenando-se as dezenas sorteadas em ordem crescente, seja D_i a diferença entre a i -ésima e a $(i + 1)$ -ésima dezenas sorteadas, $i = 1, 2, 3, 4$ e seja $D = \min(D_1, D_2, D_3, D_4)$.

Então,

$$D \geq y \Leftrightarrow (D_1 \geq y, D_2 \geq y, D_3 \geq y, D_4 \geq y)$$

Mas $D_i \geq y$ se, e somente se, tivermos pelo menos $y - 1$ bolas na urna $i + 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Restam então $95 - 4(y - 1)$ bolas para serem distribuídas entre as 6 urnas. Novamente por 1.2, isso pode ser feito de $\binom{99 - 4y + 6 - 1}{6 - 1} = \binom{104 - 4y}{5}$ maneiras distintas. Logo,

$$P(D \geq y) = \frac{\binom{104 - 4y}{5}}{\binom{100}{5}} \quad (1.14)$$

Como $P(D = y) = P(D \geq y) - P(D \geq y + 1)$, temos por 1.14 que:

$$P(D = y) = \frac{\binom{104 - 4y}{5} - \binom{100 - 4y}{5}}{\binom{100}{5}}, \quad 1 \leq y \leq 24 \quad (1.15)$$

A tabela abaixo apresenta esta distribuição.

Tabela 1.1 - Distribuição de Probabilidades da Diferença Mínima D entre os números sorteados na Loto.

D	Probabilidade	D	Probabilidade
1	0.1881	13	0.0118
2	0.1587	14	0.0083
3	0.1328	15	0.0057
4	0.1103	16	0.0037
5	0.0907	17	0.0023
6	0.0739	18	0.0014
7	0.0595	19	0.0007
8	0.0474	20	0.0004
9	0.0372	21	0.0001
10	0.0287	22	0.0000
11	0.0218	23	0.0000
12	0.0162	24	0.0000

Como podemos observar, a moda dessa distribuição é 1, o que justifica o fato de ocorrer com certa frequência dezenas consecutivas nas extrações da Loto.

Aplicando-se o mesmo raciocínio para a Sena, obtemos:

$$P(D = y) = \frac{\binom{55 - 5y}{6} - \binom{50 - 5y}{6}}{\binom{50}{6}}, \quad 1 \leq y \leq 9 \quad (1.16)$$

cujos valores encontram-se na tabela abaixo.

Tabela 1.2 - Distribuição de Probabilidades da Diferença Mínima D entre os números sorteados na Sena.

D	Probabilidade	D	Probabilidade
1	0.48743	6	0.00871
2	0.27102	7	0.00212
3	0.13940	8	0.00030
4	0.06478	9	0.00001
5	0.02622	TOTAL	1.00000

Aqui também verificamos que a moda é 1. Neste caso a diferença para as demais probabilidades é ainda maior.

Com os dados da tabela 1.2 podemos testar a aleatoriedade dos sorteios das dezenas da Sena. Observando-se os resultados até o concurso número 172, obtemos a seguinte distribuição de frequências (na última coluna estão os valores esperados obtidos, sob a hipótese de aleatoriedade, a partir da tabela 1.2):

Tabela 1.3 - Frequências Esperadas e Observadas para a Diferença Mínima entre os números sorteados na Sena após 172 concursos.

Diferença Mínima	Frequência Observada O_i	Frequência Esperada E_i
1	88	83.84
2	46	46.62
3	22	23.98
4	11	11.14
5	4	4.51
6	0	1.50
7	1	0.36
8	0	0.05
9	0	0.00
TOTAL	172	172

Utilizando-se o teste de Qui-Quadrado para aderência de modelos (Mood & Graybill & Boes (1974)), para testarmos

$$H_0 : P(D = y) \quad \text{está de acordo com 1.16}$$

vs

$$H_1 : P(D = y) \quad \text{Não está de acordo com 1.16}$$

obtemos:

$$\chi_{obs}^2 = \sum_{i=1}^9 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 3.096$$

Calculando-se o nível descritivo, obtemos $\hat{\alpha} = P_{H_0} \chi_{obs}^2 \geq 3.096 = P(\chi_8^2 \geq 3.096) = 0.928189$.

Portanto, não rejeitamos a hipótese de que os sorteios sejam aleatórios.

1.3 Modelo Totalmente Aleatório.

Consideremos a situação anterior onde temos N urnas numeradas de 1 a N e r bolas agora distintas, por exemplo numeradas de 1 a r . Como as bolas são distintas não podemos mais utilizar o artifício de colocarmos arbitrariamente bolas nas urnas de acordo com nossas conveniências. Assim, necessitamos de outros argumentos, como veremos a seguir, para estudarmos o problema clássico da ocupação.

Teorema 1.3 - Princípio da Inclusão-Exclusão

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_N$ eventos de um mesmo espaço amostral.

Sejam $p_i = P(A_i)$, $p_{ij} = P(A_i \cap A_j)$, $p_{ijk} = P(A_i \cap A_j \cap A_k), \dots$

Defina $S_0 = 1$, $S_1 = \sum_i p_i$, $S_2 = \sum_{i,j} p_{ij}$ e assim sucessivamente.

Então, a probabilidade $P_{[m]}$ de que exatamente m dos N eventos ocorram simultaneamente é dada por:

$$P_{[m]} = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} - \dots + (-1)^{N-m} \binom{N}{m} S_N \quad (1.17)$$

Prova: Seja E um ponto amostral pertencente a exatamente n dentre os N eventos. Então $P(E)$ contribui para $P_{[m]}$ se e somente se $n = m$. Observe que $P(E)$ aparece em $S_1, S_2, \dots, S_n$ mas não aparece em $S_{n+1}, S_{n+2}, \dots, S_N$.

Logo, se $n < m$ $P(E)$ não contribui para o termo à direita de 1.17.

Se $n = m$, $P(E)$ aparece uma e apenas uma vez em S_m .

Se $n > m$, a contribuição de $P(E)$ no termo à direita de 1.17 é nula pois $P(E)$ aparece em S_k , para $m \leq k \leq n$, com coeficiente $\binom{n}{k}$ (E pertence a n eventos dos quais queremos

escolher k para compor S_k). Assim, sua contribuição para o termo à direita de 1.17 é:

$$\begin{aligned}
 & \binom{m}{m} \binom{n}{m} - \binom{m+1}{m} \binom{n}{m+1} + \cdots \pm \binom{n}{m} \binom{n}{n} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{m+k}{m} \binom{n}{m+k} \\
 &= \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} \\
 &= \binom{n}{m} (1-1)^{n-m} = 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

Teorema 1.4 *Seja X o número de eventos que ocorreram dentre os N eventos. Então o k -ésimo momento fatorial de X , $\mu_X^{(k)}$, é dado por:*

$$\mu_X^{(k)} = k! S_k \quad (1.18)$$

Prova: Para $i = 1, 2, \dots, N$, seja

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{se } A_i \text{ ocorre} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então

$$X = \sum_{i=1}^N I_i \implies \binom{I_1 + I_2 + \cdots + I_N}{k} = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq N} I_{i_1} I_{i_2} \cdots I_{i_k}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \left[\binom{X}{k} \right] &= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \mathbf{E}(I_{i_1} I_{i_2} \cdots I_{i_k}) = \\
 &= \sum P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = S_k \\
 \implies \mu_X^{(k)} &= \mathbf{E} [X^{(k)}] = k! \mathbf{E} \left[\binom{X}{k} \right] = k! S_k \quad \square
 \end{aligned}$$

Corolário 1.5 A esperança e a variância de X são dadas por:

$$\mathbf{E}(X) = S_1 \quad (1.19)$$

$$\mathbf{Var}(X) = 2S_2 + S_1 - S_1^2 \quad (1.20)$$

1.3.1 Distribuição do número de urnas ocupadas e do número de urnas vazias

Lema 1.4 No caso de distribuição totalmente aleatória, as distribuições de M_0^r e de M_{oc}^r são dadas por:

$$\begin{aligned} P(M_0^r = k) &= N^{-r} \binom{N}{k} \Delta^{N-k} \mathbf{O}^r \\ &= N^{-r} \frac{N!}{k!} \varphi_r^{(N-k)}, \quad k = \max(0, N-r), \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$P(M_{oc}^r = k) = N^{-r} \frac{N!}{(N-k)!} \varphi_r^{(k)}, \quad k = 1, \dots, \min(N, r) \quad (1.22)$$

onde $\varphi_r^{(k)}$ são os números de Stirling de segunda ordem (ver apêndice A)

Prova: Considere os eventos $A_1, A_2, \dots, A_N$ definidos da seguinte maneira: A_i = A urna i está vazia, $i = 1, 2, \dots, N$, e seja p_j a probabilidade de uma bola ocupar a urna j , $j = 1, 2, \dots, N$, com $0 \leq p_j \leq 1$ e $\sum_{j=1}^N p_j = 1$.

Se todas as urnas são igualmente prováveis, $p_j = \frac{1}{N}$, $j = 1, 2, \dots, N$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^r \\ P(A_i \cap A_j) &= \left(1 - \frac{2}{N}\right)^r \\ &\vdots \\ P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) &= \left(1 - \frac{k}{N}\right)^r \end{aligned}$$

$$\text{e } S_k = \binom{N}{k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \binom{N}{k} \left(\frac{N-k}{N}\right)^r.$$

Então por 1.17

$$\begin{aligned}
 P(M_0^r = k) &= P_{[k]} = S_k - \binom{k+1}{k} S_{k+1} + \cdots (-1)^{N-k} \binom{N}{k} S_N \\
 &= \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} S_{k+i} \\
 &= \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} \binom{N}{k+i} \left(\frac{N-k-i}{N} \right)^r \\
 &= N^{-r} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} \binom{N}{k+i} (N-k-i)^r
 \end{aligned}$$

Mas $\binom{k+i}{k} \binom{N}{k+i} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{i}$. Logo,

$$\begin{aligned}
 P(M_0^r = k) &= N^{-r} \binom{N}{k} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} (N-k-i)^r \\
 &= N^{-r} \binom{N}{k} \Delta^{N-k} \mathbf{O}^r \\
 &= N^{-r} \frac{N!}{k!} \varphi_r^{(N-k)}
 \end{aligned}$$

Como $M_{oc}^r = N - M_0^r$ temos que

$$P(M_{oc}^r = k) = P(M_0^r = N - k) = N^{-r} \frac{N!}{(N-k)!} \varphi_r^{(k)} \square$$

1.3.2 Momentos de M_0^r e de M_{oc}^r

Lema 1.5 *A esperança e a variância de M_0^r são dadas por:*

$$\mathbf{E}(M_0^r) = \mu_{M_0^r}^{(1)} = N^{-r} N(N-1)^r = N^{-(r-1)}(N-1)^r \quad (1.23)$$

$$\mathbf{Var}(M_0^r) = N^{-(r-1)} \left[(N-1)^r + (N-1)(N-2)^r - N^{-(r-1)}(N-1)^{2r} \right] \quad (1.24)$$

Prova: Pelo teorema 1.4, o i -ésimo momento fatorial de M_0^r é dado por:

$$\mu_{M_0^r}^{(i)} = i! S_i = i! \binom{N}{i} \left(\frac{N-i}{N} \right)^r = N^{-r} i! \binom{N}{i} (N-i)^r$$

Portanto,

$$\mathbf{E}(M_0^r) = \mu_{M_0^r}^{(1)} = N^{-r} N(N-1)^r = N^{-(r-1)}(N-1)^r$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(M_0^r) &= \mu_{M_0^r}^{(2)} + \mu_{M_0^r}^{(1)} - [\mu_{M_0^r}^{(1)}]^2 \\ &= N^{-r} 2 \binom{N}{2} (N-2)^r + N^{-(r-1)}(N-1)^r - [N^{-(r-1)}(N-1)^r]^2 \\ &= N^{-r} n(N-1)(N-2)^r + N^{-(r-1)}(N-1)^r - N^{-2(r-1)}(N-1)^{2r} \\ &= N^{-(r-1)} [(N-1)^r + (N-1)(N-2)^r - N^{-(r-1)}(N-1)^{2r}] \square \end{aligned}$$

Lema 1.6 A esperança e a variância de M_{oc}^r são dadas por:

$$\mathbf{E}(M_{oc}^r) = \frac{N^r - (N-1)^r}{N^{r-1}} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{Var}(M_{oc}^r) = \mathbf{Var}(M_0^r) \quad \text{dado por 1.24} \quad (1.26)$$

Prova: Para obtermos a esperança e a variância do número de urnas ocupadas, basta lembrar que $M_{oc}^r = N - M_0^r$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_{oc}^r) &= N - \mathbf{E}(M_0^r) = N - \frac{(N-1)^r}{N^{r-1}} = \frac{N^r - (N-1)^r}{N^{r-1}} \\ \mathbf{Var}(M_{oc}^r) &= \mathbf{Var}(M_0^r) \square \end{aligned}$$

1.3.3 Distribuição e esperança do número de urnas com exatamente k bolas

Lema 1.7 Seja M_k^r o número de urnas com exatamente k bolas. Então,

$$P(M_k^r = j) = N^{-r} \binom{N}{j} \frac{r!}{(k!)^j} \sum_{i=0}^{N-j} (-1)^i \binom{N-j}{i} \frac{(N-j-i)^{r-(j+i)k}}{(k!)^i (r-(j+i)k)!} \quad (1.27)$$

$$\mathbf{E}(M_k^r) = N^{-(r-1)} \binom{r}{k} (N-1)^{r-k} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{Var}(M_k^r) = (N-1)N^{-(r-1)} \binom{r}{k} \left[\binom{r-k}{k} (N-2)^{r-2k} \right. \quad (1.29)$$

$$\left. + (N-1)^{r-k-1} + N \binom{r}{k} (N-1)^{2(r-k)-1} \right] \quad (1.30)$$

Prova: Seja E_j o evento "a urna j contém exatamente k bolas" e seja X_j o número de bolas na urna j , $j = 1, 2, \dots, N$. Então,

$$\begin{aligned} X_j &\sim \text{binomial}\left(r; \frac{1}{N}\right) \\ (X_i, X_j) &\sim \text{Multinomial}\left(r; \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \frac{N-2}{N}\right) \\ &\vdots \\ (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_j}) &\sim \text{Multinomial}\left(r; \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}, \frac{N-j}{N}\right) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(E_j) &= P(X_j = k) = \binom{r}{k} \left[\frac{1}{N}\right]^k \left[\frac{N-1}{N}\right]^{r-k} = N^{-r} \binom{r}{k} (N-1)^{r-k} \\ P(E_i \cap E_j) &= P(X_i = k \cap X_j = k) = N^{-r} \frac{r!}{(k!)^2 (r-2k)!} (N-2)^{r-2k} \\ &\vdots \\ P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_j}) &= P(X_{i_1} = k \cap X_{i_2} = k \cap \dots \cap X_{i_j} = k) \\ &= N^{-r} \frac{r!}{(k!)^j (r-kj)!} (N-j)^{r-kj} \end{aligned} \tag{1.31}$$

e utilizando o teorema 1.3 com S_j dado por 1.31 temos:

$$\begin{aligned} P(M_k^r = j) &= S_j - \binom{j+1}{j} S_{j+1} + \binom{j+2}{j} S_{j+2} - \dots \pm \binom{N}{j} S_N \\ &= \sum_{i=0}^{N-j} (-1)^i \binom{j+i}{j} S_{j+i} \\ &= \sum_{i=0}^{N-j} (-1)^i \binom{j+i}{j} N^{-r} \binom{N}{j+i} \frac{r! (N-(j+i))^{r-(j+i)k}}{(k!)^{j+i} (r-(j+i)k)!} \\ &= \frac{N^{-r} r!}{(k!)^j} \sum_{i=0}^{N-j} (-1)^i \binom{j+i}{j} \binom{N}{j+i} \frac{(N-j-i)^{r-(j+i)k}}{(k!)^i (r-(j+i)k)!} \\ &= N^{-r} \binom{N}{j} \frac{r!}{(k!)^j} \sum_{i=0}^{N-j} (-1)^i \binom{N-j}{i} \frac{(N-j-i)^{r-(j+i)k}}{(k!)^i (r-(j+i)k)!} \end{aligned}$$

Pelo teorema 1.4, temos que:

$$\mu_{M_k^r}^{(j)} = j! S_j = N^{-r} j! \binom{N}{j} \frac{r!}{(k!)^j (r-kj)!} (N-j)^{r-kj}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(M_k^r) &= S_1 = N \binom{r}{k} \left[\frac{1}{N} \right]^k \left[\frac{N-1}{N} \right]^{r-k} = N^{-(r-1)} \binom{r}{k} (N-1)^{r-k} \\ \mathbf{Var}(M_k^r) &= (N-1)N^{-(r-1)} \binom{r}{k} \left[\binom{r-k}{k} (N-2)^{r-2k} \right. \\ &\quad \left. + (N-1)^{r-k-1} + N \binom{r}{k} (N-1)^{2(r-k)-1} \right] \square\end{aligned}$$

Capítulo 2

O Problema das Comissões.

2.1 Introdução

No capítulo 1 estudamos a distribuição de r bolas em N urnas que, conforme dito anteriormente, é equivalente a retirarmos r bolas, uma a uma e com reposição, de uma urna contendo N bolas numeradas de 1 a N . Neste capítulo generalizaremos os resultados do capítulo 1, para o caso em que a cada retirada escolhemos n bolas, $1 \leq n \leq N$, sem reposição dentre as N bolas disponíveis.

Na literatura este caso é conhecido como Problema das Comissões (Committe Problems), que consiste no seguinte: de um grupo de N pessoas devemos formar r comissões de n membros cada. Qual a probabilidade de que exatamente k pessoas estejam envolvidas em comissões?

Se $n = 1$, estamos no problema clássico da ocupação, visto no capítulo 1.

Duas situações reais onde podemos aplicar os resultados deste capítulo são as loterias de números Loto e Sena. No caso da Sena temos $N = 50$ e $n = 6$, enquanto que para a Loto temos $N = 100$ e $n = 5$.

2.2 Distribuição e Momentos do Número de Bolas que Faltam Sair

Lema 2.1 *Seja X_r o número de bolas que ainda não foram sorteadas nenhuma vez, após r retiradas. Então, a distribuição de probabilidades de X_r é dada por:*

$$P(X_r = k) = \binom{N}{k} \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^{N-k-j} \binom{N-k}{j} \frac{\binom{j}{n}^r}{\left(\binom{N}{n}\right)^r}, \quad k = \max(0, N - nr), \dots, N - n \quad (2.1)$$

Prova: Inicialmente observemos que a cada retirada temos $\binom{N}{n}$ maneiras diferentes de escolhermos as n bolas. Assim, o número de maneiras diferentes de realizarmos r retiradas de n bolas cada é $\left(\binom{N}{n}\right)^r$.

Considere então os eventos $A_1^r, A_2^r, \dots, A_N^r$ assim definidos:

$A_i^r =$ a bola de número i não foi retirada nenhuma vez, $i = 1, 2, \dots, N$.

Para determinarmos a probabilidade $P(A_i^r)$ desses eventos, basta observar que para que a bola i nunca seja retirada devemos escolher as bolas dentre as $N - 1$ bolas que restam quando excluímos a bola de número i da urna. Como isto pode ser feito de $\left(\binom{N-1}{n}\right)^r$ maneiras diferentes, temos que

$$P(A_i^r) = \frac{\left[\binom{N-1}{n}\right]^r}{\left[\binom{N}{n}\right]^r} \quad (2.2)$$

Do mesmo modo obtemos

$$\begin{aligned}
P(A_i^r \cap A_j^r) &= \left[\frac{\binom{N-2}{n}}{\binom{N}{n}} \right]^r \\
&\vdots \\
P(A_{i_1}^r \cap A_{i_2}^r \cap \cdots \cap A_{i_j}^r) &= \left[\frac{\binom{N-j}{n}}{\binom{N}{n}} \right]^r
\end{aligned}$$

Deste modo, para obtermos a probabilidade de que $N - m$ bolas não sejam sorteadas nenhuma vez basta aplicar o teorema 1.3 com

$$S_j = \binom{N}{j} \left[\frac{\binom{N-j}{n}}{\binom{N}{n}} \right]^r \quad (2.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P_{[N-m]} &= \sum_{i=0}^{N-(N-m)} (-1)^i \binom{N-m+i}{i} S_{N-m+i} \\
&= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{N-m+i}{i} \binom{N}{N-m+i} \frac{\left(\frac{\binom{N-(N-m+i)}{n}}{\binom{N}{n}} \right)^r}{\left(\frac{N}{n} \right)^r} \\
&= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{N-m+i}{i} \binom{N}{N-m+i} \frac{\left(\frac{\binom{m-i}{n}}{\binom{N}{n}} \right)^r}{\left(\frac{N}{n} \right)^r} \\
&= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{N}{N-m} \binom{m}{i} \frac{\left(\frac{\binom{m-i}{n}}{\binom{N}{n}} \right)^r}{\left(\frac{N}{n} \right)^r}
\end{aligned}$$

$$= \binom{N}{N-m} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \frac{\binom{j}{n}^r}{\left(\frac{N}{n}\right)^r} \quad (2.4)$$

Logo por 2.4 temos que

$$P(X_r = k) = P_{[k]} = \binom{N}{k} \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^{N-k-j} \binom{N-k}{j} \frac{\binom{j}{n}^r}{\left(\frac{N}{n}\right)^r}$$

□

Pelo corolário 1.5, temos que:

Lema 2.2 *A esperança e a variância do número de bolas que faltam sair são respectivamente*

$$\mathbf{E}(X_r) = N \left(1 - \frac{n}{N}\right)^r \quad (2.5)$$

$$\mathbf{Var}(X_r) = 2S_2 + S_1 - S_1^2 \quad \text{onde } S_1 \text{ e } S_2 \text{ são dados por 2.3} \quad (2.6)$$

Lema 2.3 *Seja Y_r o número de bolas que já saíram pelo menos uma vez. Então,*

$$P(Y_r = k) = P(X_r = N - k) = \binom{N}{k} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{\binom{j}{n}^r}{\left(\frac{N}{n}\right)^r}, \quad (2.7)$$

$k = n, \dots, \min(N, nr)$

$$\mathbf{E}(Y_r) = N - \mathbf{E}(X_r) = N \left[1 - \left(1 - \frac{n}{N}\right)^r\right] \quad (2.8)$$

$$\mathbf{Var}(Y_r) = \mathbf{Var}(X_r) \quad (2.9)$$

Prova: Como $X_r + Y_r = N$ utilizando-se 2.1 e 2.6 chegamos facilmente ao resultado. □

Capítulo 3

Problemas de Tempo de Espera.

3.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, estudamos a composição das urnas após um número fixo r de ensaios terem sido realizados. Porém, em muitas situações de interesse o número de ensaios a serem realizados não é necessariamente conhecido a priori, isto é, os ensaios são realizados até que determinada condição pré-estabelecida ocorra. Nestes casos, interessamo-nos pela distribuição do número de ensaios necessários para ocorrência de tal condição. Estes problemas são chamados **Problemas de Tempo de Espera** (Waiting Time Problems).

A seção 3.2 trata do problema de tempo de espera quando em cada ensaio apenas uma bola é alocada. É desenvolvida uma solução proposta por Holst (1986), baseada em uma imersão do problema em um Processo de Poisson.

Na seção 3.3 o problema é tratado no caso em que a cada ensaio n bolas são alocadas. Exemplo numérico aplicado à loteria de números Sena é apresentado no final da seção.

3.2 Tempo de Espera no Problema da Ocupação.

3.2.1 O Problema do Colecionador

Considere uma urna com N bolas numeradas de 1 a N , que são retiradas, uma por vez, com reposição. O problema do colecionador é determinar a distribuição do número mínimo de retiradas necessárias para se obter k bolas distintas.

Lema 3.1 *Seja W_k^N , $k \leq N$, o número mínimo de retiradas necessárias para se obter k bolas distintas. Então,*

$$P(W_k^N = r) = N^{-r} N_{(k)} \varphi_{r-1}^{(k-1)}, \quad r = k, k+1, \dots \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E}(W_N^N) = N \sum_{j=1}^N j^{-1} \quad (3.2)$$

$$\text{Var}(W_N^N) = N \sum_{j=1}^N (N-j)j^{-2} \quad (3.3)$$

Prova: $W_k^N \leq r$ se e somente se após r retiradas tivermos pelo menos k bolas distintas, isto é, $M_{oc}^r \geq k$.

Além disso, $W_k^N = r$ se e somente se nas $r-1$ retiradas anteriores tivermos $k-1$ bolas distintas e na r -ésima retirada sair uma bola distinta das $k-1$ já retiradas. Portanto, utilizando 1.5, obtemos:

$$\begin{aligned} P(W_k^N = r) &= P(M_{oc}^{r-1} = k-1) P(\text{sair bola distinta das } k-1 \text{ na } r\text{-ésima retirada}) \\ &= N^{-(r-1)} \binom{N}{k-1} \Delta^{k-1} \mathbf{O}^{r-1} \frac{N-k+1}{N} \\ &= N^{-r} N_{(k)} \frac{\Delta^{k-1} \mathbf{O}^{r-1}}{(k-1)!} \\ &= N^{-r} N_{(k)} \varphi_{r-1}^{(k-1)} \end{aligned}$$

Para mostrar 3.2 e 3.3 defina Y_j = número de retiradas entre a j -ésima e a $(j + 1)$ -ésima (inclusive) bola distinta, $j = 0, 1, 2, \dots$. Deste modo,

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1 \\ Y_j &\sim \text{Geométrica} \left(1 - \frac{j}{N}\right) \quad \text{independentes.} \end{aligned}$$

Assim,

$$W_k^N = \sum_{j=0}^{k-1} Y_j \quad (3.4)$$

Utilizando a expressão 3.4 acima, obtemos facilmente a esperança e a variância de W_k^N :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W_k^N) &= N \sum_{j=0}^{k-1} (N - j)^{-1} \\ \mathbf{Var}(W_k^N) &= N \sum_{j=0}^{k-1} j(N - j)^{-2} \end{aligned}$$

□

Corolário 3.1 *Em particular, para o tempo de espera W_N^N para que todas as bolas saiam pelo menos uma vez, temos:*

$$\mathbf{E}(W_N^N) = N \sum_{j=1}^N j^{-1} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{Var}(W_N^N) = N \sum_{j=1}^N (N - j)j^{-2} \quad (3.6)$$

A partir de 3.4, temos também

$$\mathbf{E}[(1-t)^{-W_k^N}] = \mathbf{E}[(1-t)^{-\sum_{j=0}^{k-1} Y_j}] = \prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}[(1-t)^{-Y_j}] \quad (3.7)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(1-t)^{-Y_j}] &= \sum_{i=1}^{\infty} (1-t)^{-i} \left(1 - \frac{j}{N}\right) \left(\frac{j}{N}\right)^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (1-t)^{-i} \frac{(N-j)j^{i-1}}{N^i} \\ &= \frac{N-j}{j} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{j}{N(1-t)}\right)^i \\ &= \left(1 - \frac{Nt}{N-j}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Substituindo-se 3.8 em 3.7, obtemos:

$$\mathbf{E}[(1-t)^{-W_k^N}] = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{Nt}{N-j}\right)^{-1} \quad (3.9)$$

A expressão 3.9 acima nos permite obter os momentos fatoriais ascendentes de W_k^N , pois

$$\frac{d^v \mathbf{E}[(1-t)^{-W_k^N}]}{dt^v} \Big|_{t=0} = \mathbf{E}[W_k^N (W_k^N + 1) \dots (W_k^N + v - 1)]$$

3.2.2 Imersão em um Processo de Poisson

Os problemas de tempo de espera relacionados com o problema clássico da ocupação, podem ser estudados via uma imersão em um Processo de Poisson, da seguinte forma: toda vez que ocorrer um evento no processo, retira-se uma bola da urna e marca-se esse evento com o número da bola selecionada. Demonstra-se que com isso, obtêm-se um conjunto de Processos de Poisson independentes (Ross (1985)), cada um associado ao número da bola correspondente. Deste modo, o número de retiradas necessárias para que determinadas condições se verifiquem coincide com os tempos de espera para a ocorrência de eventos nos Processos de Poisson correspondentes.

Teorema 3.2 *Sejam $T_1, T_2, \dots, T_N$ variáveis aleatórias independentes com $T_j \sim \Gamma(m_j; p_j)$ e $T_1^N, T_2^N, \dots, T_N^N$ suas estatísticas de ordem. Para ensaios multinomiais com probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_N$ e quotas $m_1, m_2, \dots, m_N$. seja W_k^N o número de ensaios até que k quotas estejam satisfeitas. Então, para $t < \min(p_j)$.*

$$\mathbf{E}[(1-t)^{-W_k^N}] = \mathbf{E}[e^{tT_k^N}] \quad (3.10)$$

$$\mathbf{E}[W_k^N(W_k^N + 1) \dots (W_k^N + v - 1)] = \mathbf{E}[(T_k^N)^v] \quad (3.11)$$

Prova: Seja $\mathcal{P}$ um processo de Poisson com intensidade $\lambda = 1$ e sejam $Z_1, Z_2, \dots$ os tempos entre as ocorrências. Então $Z_1, Z_2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de parâmetro 1.

Para cada ocorrência no processo $\mathcal{P}$, associamos uma marca I de modo que as marcas sejam independentes e identicamente distribuídas, com $P(I = j) = p_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, e sejam independentes dos tempos entre as ocorrências. Deste modo, as ocorrências marcadas com $I = j$ definem um processo de Poisson $\mathcal{P}_j$ com intensidade p_j e os processos resultantes $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_N$ são independentes.

Definição 3.1 *Diremos que o processo $\mathcal{P}_j$ completou sua quota, quando tivermos pelo menos m_j ocorrências em $\mathcal{P}_j$. O número m_j será chamado quota do processo $\mathcal{P}_j$.*

Seja T_j o tempo necessário para o processo $\mathcal{P}_j$ completar sua quota. Então $T_j \sim \Gamma(m_j; p_j)$, isto é,

$$f_{T_j}(t) = \frac{p_j^{m_j}}{\Gamma(m_j)} t^{m_j-1} e^{-p_j t} = \frac{p_j^{m_j}}{(m_j - 1)!} t^{m_j-1} e^{-p_j t}, \quad t \geq 0$$

Assim, o tempo de espera T_k^N até que k processos completem suas quotas é a k -ésima estatística de ordem de $T_1, T_2, \dots, T_N$.

Seja W_k^N o número total de ocorrências no processo $\mathcal{P}$ no instante T_k^N . Então,

$$T_k^N = \sum_{i=1}^{W_k^N} Z_i$$

Logo, para $t < \min(p_j)$ temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{tT_k^N}) &= \mathbf{E}(e^{t \sum_{i=1}^{W_k^N} Z_i}) \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}(e^{t \sum_{i=1}^{W_k^N} Z_i} \mid W_k^N)] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}(\prod_{i=1}^{W_k^N} e^{tZ_i} \mid W_k^N)] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}((e^{tZ_1})^{W_k^N} \mid W_k^N)] \\ &= \mathbf{E}[(1 - t)^{-W_k^N}] \end{aligned}$$

Da expressão acima, segue que os momentos fatoriais ascendentes de W_k^N satisfaz:

$$\mathbf{E}[W_k^N (W_k^N + 1) \dots (W_k^N + v - 1)] = \mathbf{E}[(T_k^N)^v]$$

o que completa a prova do teorema. $\square$

3.2.3 Aplicações

1- "The Dixie Cup Problem"

Quantas retiradas são necessárias para que todas as N bolas sejam obtidas pelo menos m vezes cada?

Neste caso, as quotas de cada bola são todas iguais a m , isto é, $m_1 = m_2 = \dots = m_N = m$ e sendo as bolas igualmente prováveis de serem obtidas, $p_1 = p_2 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$, de modo que os correspondentes processos de Poisson tem todos intensidade $\frac{1}{N}$ e quotas m .

O tempo de espera T_j para que o processo $\mathcal{P}_j$ complete suas m ocorrências, tem distribuição $\Gamma(m; \frac{1}{N}) = N \Gamma(m; 1)$. Logo,

$$T_j = N S_j \text{ onde } S_j \sim \Gamma(m; 1)$$

Deste modo, o tempo de espera T_k^N até que, pela primeira vez, todos os processos tenham ocorrido pelo menos m vezes cada será:

$$\begin{aligned} T_N^N &= \max(T_1, T_2, \dots, T_N) \\ &= \max(N S_1, N S_2, \dots, N S_N) \\ &= N \max(S_1, S_2, \dots, S_N) \\ &= N S_N^N \end{aligned}$$

Seja W_N^N o número total de ocorrências, isto é, o número de retiradas. Então,

$$T_N^N = N S_N^N = \sum_{i=1}^{W_N^N} Z_i \text{ onde } Z_i \sim \text{Exponencial}(1)$$

Assim, pelo teorema 3.2 temos para. $t < \frac{1}{N}$

$$\mathbf{E}[(1-t)^{-W_N^N}] = \mathbf{E}(e^{tNS_N^N}) \quad (3.12)$$

e

$$\mathbf{E}[W_N^N(W_N^N + 1) \dots (W_N^N + v - 1)] = N^v \mathbf{E}[(S_N^N)^v] \quad (3.13)$$

Em 3.13 fazendo $v = 1$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W_N^N) &= N \mathbf{E}(S_N^N) \\ &= N \int_0^\infty P(S_N^N > t) dt \\ &= N \int_0^\infty [1 - P(S_N^N \leq t)] dt \\ &= N \int_0^\infty [1 - (P(S_1 \leq t))^N] dt \\ &= N \int_0^\infty [1 - (1 - P(S_1 > t))^N] dt \\ &= N \int_0^\infty [1 - (1 - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{e^{-t} t^j}{j!})^N] dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

No caso particular em que $m = 1$ (seção 3.2.1).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W_N^N) &= N \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-t})^N] dt \\ &= N \int_0^\infty [1 - \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} e^{-kt}] dt \\ &= N \int_0^\infty [1 - 1 - \sum_{k=1}^N (-1)^k \binom{N}{k} e^{-kt}] dt \\ &= N \int_0^\infty \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{N}{k} e^{-kt} dt \\ &= N \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{N}{k} \int_0^\infty e^{-kt} dt \\ &= N \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{N}{k} k^{-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por indução em N é fácil mostrar que 3.15 é igual a 3.5 obtida anteriormente.

2- O Problema dos Aniversários

Quantas pessoas são necessárias para que m aniversariem no mesmo dia?

Aqui também o tempo de espera T_j para que o processo $\mathcal{P}_j$ complete sua quota (m ocorrências) tem distribuição $\Gamma(m; \frac{1}{N}) = N\Gamma(m; 1)$. Estamos porém interessados na distribuição de T_1^N .

$$T_1^N = \min(T_1, T_2, \dots, T_N) = N \min(S_1, S_2, \dots, S_N) = NS_1^N \text{ onde } S_j \sim \Gamma(m; 1)$$

Pelo teorema 3.2, sendo W_1^N o número de ocorrências no instante T_1^N , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W_1^N) &= N\mathbf{E}(S_1^N) \\ &= N \int_0^\infty P(S_1^N > t) dt \\ &= N \int_0^\infty (P(S_1 > t))^N dt \\ &= N \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{e^{-t} t^k}{k!} \right]^N dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

No caso $m = 2$, isto é, quantas pessoas são necessárias para que duas aniversariem no mesmo dia, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W_1^N) &= N \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^1 \frac{e^{-t} t^k}{k!} \right)^N dt \\ &= N \int_0^\infty (e^{-t} + te^{-t})^N dt \\ &= N \int_0^\infty (t+1)^N e^{-Nt} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N \int_1^{\infty} x^N e^{-N(x-1)} dx \\
&= N e^N \int_1^{\infty} x^N e^{-Nx} dx \\
&= N e^N \left[\frac{e^{-N}}{N} \sum_{k=0}^N \frac{N_{(k)}}{N^k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^N \frac{N_{(k)}}{N^k}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Considerando o ano com $N = 365$ dias, temos

$$E(W_1^{365}) = \sum_{k=0}^{365} \frac{(365)_k}{(365)^k} = 24,6166$$

Portanto, em média são necessárias 24,6166 pessoas para que duas façam aniversário no mesmo dia.

3.3 Tempo de Espera no Problema das Comissões.

Lema 3.2 *Seja T_j o número de retiradas até que j números específicos saiam pelo menos uma vez cada. Então,*

$$P(T_j = r) = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} P_k^{r-1} (1 - p_k), \quad r = \left\lceil \frac{j}{n} \right\rceil + 1, \dots \quad (3.18)$$

$$\mathbf{E}(T_j) = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} (1 - p_k)^{-1} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{E}(T_j^2) = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} \frac{1 + p_k}{(1 - p_k)^2} \quad (3.20)$$

onde $[k]$ indica o maior inteiro contido em k .

Prova: Considere os eventos $A_1^r, A_2^r, \dots, A_N^r$ como definidos na seção 2.2, isto é,

$A_i^r =$ a bola de número i não foi retirada nenhuma vez nas r primeiras retiradas.

Então,

$$\begin{aligned} P(A_i^r) &= \left[\frac{\binom{N-1}{n}}{\binom{N}{n}} \right]^r = p_1^r \\ P(A_i^r \cap A_j^r) &= \left[\frac{\binom{N-2}{n}}{\binom{N}{n}} \right]^r = p_2^r \\ &\vdots \\ P(A_{i_1}^r \cap A_{i_2}^r \cap \dots \cap A_{i_j}^r) &= \left[\frac{\binom{N-j}{n}}{\binom{N}{n}} \right]^r = p_j^r \end{aligned}$$

Observe que $\{T_j > r\} \iff \{ \text{pelo menos um dos } j \text{ números específicos não sair nenhuma vez após } r \text{ retiradas sucessivas} \}$, isto é,

$$\{T_j > r\} = \bigcup_{k=1}^j A_{i_k}^r$$

Logo,

$$P(T_j > r) = P\left(\bigcup_{k=1}^j A_{i_k}^r\right) = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} p_k^r \quad (3.21)$$

Para obtermos a distribuição de T_j , basta lembrar que

$$P(T_j = r) = P(T_j > r - 1) - P(T_j > r)$$

Substituindo-se 3.21 na expressão acima, obtemos:

$$P(T_j = r) = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} P_k^{r-1} (1 - p_k)$$

Observe que a distribuição de T_j é uma combinação linear de j distribuições geométricas. Com isso, podemos obter os momentos de T_j através dos momentos de distribuições geométricas. Logo,

$$\mathbf{E}(e^{sT_j}) = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} \frac{(1 - p_k)e^s}{1 - p_k e^s} \quad (3.22)$$

De 3.22 obtemos:

$$\mathbf{E}(T_j) = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} (1 - p_k)^{-1}$$

$$\mathbf{E}(T_j^2) = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} \frac{1 + p_k}{(1 - p_k)^2}$$

□

3.3.1 Aplicação.

No caso da Sena, temos $N = 50$ dezenas das quais a Caixa Econômica Federal sorteia semanalmente $n = 6$ dezenas. A tabela 3.1 abaixo apresenta a média e o desvio-padrão de T_j .

Tabela 3.1 - Média e Desvio-padrão de T_j

j	Média	Desvio-padrão	j	Média	Desvio-padrão
1	8.3333	7.8174	26	30.8912	9.7706
2	12.2760	8.7319	27	31.1841	9.7725
3	14.9117	9.0966	28	31.4664	9.7741
4	16.8883	9.2911	29	31.7391	9.7756
5	18.4696	9.4107	30	32.0026	9.7769
6	19.7873	9.4909	31	32.2577	9.7780
7	20.9168	9.5480	32	32.5047	9.7791
8	21.9051	9.5904	33	32.7443	9.7800
9	22.7836	9.6230	34	32.9769	9.7807
10	23.5742	9.6486	35	33.2028	9.7814
11	24.2930	9.6691	36	33.4224	9.7820
12	24.9519	9.6858	37	33.6361	9.7825
13	25.5600	9.6997	38	33.8441	9.7830
14	26.1248	9.7113	39	34.0469	9.7833
15	26.6519	9.7210	40	34.2446	9.7835
16	27.1460	9.7293	41	34.4374	9.7839
17	27.6111	9.7365	42	34.6256	9.7840
18	28.0504	9.7426	43	34.8095	9.7841
19	28.4665	9.7479	44	34.9896	9.7828
20	28.8618	9.7526	45	35.1644	9.7863
21	29.2383	9.7566	46	35.3363	9.7862
22	29.5977	9.7602	47	35.5061	9.7806
23	29.9414	9.7633	48	35.6709	9.7801
24	30.2709	9.7660	49	35.8304	9.7874
25	30.5871	9.7684	50	35.9812	9.8131

Observando-se os resultados da Sena até o concurso 176, e reiniciando-se a contagem toda vez que todas as 50 dezenas ocorram, verificamos que isso aconteceu três vezes, nos concursos de números 29, 69 e 129. Logo, tivemos três observações de T_{50} , a saber, 29, 40 e 60. Para essas observações, o número médio de concursos foi de 43, pouco superior (cerca de 0,7 desvios-padrão) à média de T_{50} , que é de 35,98 concursos.

É interessante observar que após o concurso 176, estava faltando sair apenas a dezena 50 (cuja última ocorrência tinha sido no concurso 126), para que tivéssemos nova observação de T_{50} .

3.3.2 Conclusões e Comentários.

A técnica de imersão de problemas de tempo de espera em um Processo de Poisson permite a obtenção dos momentos do número mínimo de retiradas necessárias para que uma determinada condição esteja satisfeita. A sua utilização no entanto está limitada ao caso em que a cada retirada uma única bola é selecionada. Quando em cada retirada mais de uma bola é selecionada, os processos $\mathcal{P}_j$ não são mais independentes. Um problema interessante que poderia ser considerado é a procura de uma técnica que permitisse o tratamento do problema para retiradas múltiplas.

O tempo de espera até que determinada condição ocorra, decresce a medida que aumentamos o número de bolas selecionadas a cada retirada, isto é, quanto maior o número de bolas selecionadas, menor o tempo de espera. Se supormos que o custo de cada retirada é uma função do número de bolas selecionadas, um outro problema a ser considerado é a determinação da "estratégia ótima", no sentido de determinar o número de bolas a serem selecionadas a cada retirada que propicie o menor custo com tempo de espera limitado.

As distribuições exatas das variáveis estudadas neste trabalho não são apresentadas sob a forma de expressões fechadas. Uma alternativa possível seria considerar aproximações para essas distribuições, especialmente no caso em que o número de bolas e urnas for grande, quando distribuições assintóticas fornecem resultados bastante satisfatórios.

Apêndice A

Operador Diferença e Números de Stirling.

Definição A.1 Dada uma função f , chama-se *Translação de ordem n de f à função*

$$E^n f(x) = f(x + n)$$

Definição A.2 Dada uma função f , chama-se *diferença primeira de f , à função*

$$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x) = (E - 1)f(x)$$

Se n é um inteiro positivo, então a diferença de ordem n de f é a função

$$\Delta^n f(x) = (E - 1)f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x + n - j)$$

Fazendo-se $f(x) = x^s$ na expressão acima obtemos:

$$\Delta^n x^s = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (x + n - j)^s$$

Definição A.3 Chamamos *Diferença de Zero ao valor*

$$\Delta^n \mathbf{O}^s = \Delta^n x^s \big|_{x=0} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n - j)^s$$

Definição A.4 Chama-se *Número de Stirling de segunda ordem ao valor*

$$\varphi_s^{(n)} = \frac{\Delta^n \mathbf{O}^s}{n!}$$

As diferença de Zero e os números de Stirling de segunda ordem apresentam as seguintes propriedades:

$$(i) \Delta^n \mathbf{O}^{s+1} = n\{\Delta^n \mathbf{O}^s + \Delta^{n-1} \mathbf{O}^s\}$$

$$(ii) \varphi_s^{(n)} = 0 \quad \text{se } n > s$$

$$(iii) \varphi_s^{(1)} = \varphi_s^{(s)} = 1$$

$$(iv) \varphi_{s+1}^{(n)} = n\varphi_s^{(n)} + \varphi_s^{(n-1)}$$

Tabela A.1 - Números de Stirling de Segunda Ordem $\varphi_s^{(n)}$.

s	n							
	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1							
3	3	1						
4	7	6	1					
5	15	25	10	1				
6	31	90	65	15	1			
7	63	301	350	140	21	1		
8	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1
10	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45

Bibliografia

- [1] Feller, William (1968) - An Introduction to Probability Theory and its Applications - Vol. I, 3rd. edition - John Wiley & Sons, New York.
- [2] Gittelsohn, Alan M. (1969) - An Occupancy Problem - The American Statistician, April, 11-12.
- [3] Holst, Lars (1986) - On Birthday, Collectors', Occupancy and Other Classical Urn Problems - International Statistical Review, **54**,1,15-27.
- [4] Johnson, Norman L. & Kotz, Samuel (1977) - Urn Models and Their Application. An Approach to Modern Discrete Probability Theory - John Wiley & Sons, New York.
- [5] Leite, J. G. & Pereira, C. A. B. & Rodrigues, F. W. (1991) - Waiting Times to Exhaust Lottery Number - Relatório Técnico RT-MAE-9120 (IME-USP).
- [6] Mantel, Nathan & Pasternack, Bernard S. (1968) - A Class of Occupancy Problems - The American Statistician, April, 23-24.
- [7] Margenau, H. & Murphy, G. M. (1943) - The Mathematics of Physics and Chemistry - Van Nostrand, New York.
- [8] Mood, Alexander M. & Graybill, Franklin A. & Boes, Duane C. (1974) - Introduction to the Theory of Statistics, 3rd. edition - Mc Graw Hill, New York.
- [9] Rodrigues, F. W. & Wechsler, S. (1982) - A Distância Mínima Entre Números Sorteados ao Acaso - Comunicação apresentada no V-SINAPE Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- [10] Ross, Sheldon M. (1985) - Introduction to Probability Models - Academic Press, New York
- [11] Sprott, D. A. (1969) - A Note on A Class of Occupancy Problems - The American Statistician, April, 12-13.
- [12] White, Colin (1971) - The Committee Problem - The American Statistician, October, 25-26.