**Filtragens em Filas $M/M^u/1/N$
com “Feedback”**

Maria Cristina Catarino Werkema

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau de mestre
em
Estatística

Área de Concentração: **Probabilidades**
Orientador: **Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka**

- São Paulo, Fevereiro de 1991 -

*Em memória de Geraldo Werkema
e do Prof. Arthur Oscar de Azevedo,
a quem devo minha conversão à Estatística.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho. Em especial, estou agradecida a:

- Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka, sem o qual esta dissertação não teria sido realizada, pela orientação segura e paciente e pela acolhida amiga e estimuladora que me proporcionou.
- Emília Catarina Werkema, minha mãe, por **TUDO**.
- Departamento de Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, pela licença concedida.
- CAPES/PICD/UFGM, pelo financiamento parcial deste trabalho.

Resumo

Na fila $M/M^{ij}/1/N$ os tempos de serviço têm distribuição exponencial com parâmetro μ_{ij} que depende do tipo do freguês anterior (i) e do tipo do freguês atual (j). A partir do procedimento de filtragem desenvolvido por Çinlar (1969) é possível estender os resultados de Hunter (1983 I, 1983 II, 1984), mostrando que os processos que caracterizam o comprimento da fila $M/M^{ij}/1/N$ com "feedback" são Processos de Renovação Markovianos. As distribuições estacionárias das (sub)-Cadeias de Markov irredutíveis associadas a cada Processo de Renovação Markoviano e os Processos Semi-Markovianos imersos também são estendidos.

Abstract

The service time in the $M/M^{ij}/1/N$ queue is exponential with parameter μ_{ij} depending on the previous job type (i) and the current job type (j). We apply the filtering procedure developed by Çinlar (1969) to the $M/M^{ij}/1/N$ queue with feedback to show that the embedded queue-length processes are Markov renewal processes, extending results in Hunter (1983 I, 1983 II, 1984). The stationary distributions for the embedded (sub)-Markov chains and the embedded semi-Markov processes are also extended.

Índice

Capítulo 1

Introdução	1
------------------	---

Capítulo 2

Processos de Renovação Markovianos em Filas $M/M^{ij}/1/N$ com “Feedback”	6
2.1 Descrição do Modelo	6
2.2 Os Processos de Renovação Markovianos Imersos	10
2.3 As Cadeias de Markov Imersas	16
2.4 A Distribuição Estacionária da Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n)\}$	29
2.5 As Distribuições Estacionárias das Cadeias de Markov Imersas Irredutíveis	33
2.6 Relações entre as Distribuições Estacionárias	45

Capítulo 3

Processos Semi-Markovianos em Filas $M/M^{ij}/1/N$	54
3.1 Descrição do modelo	54
3.2 Os Processos de Renovação Markovianos Imersos em Filas $M/M^{ij}/1/N$ sem “Feedback”	57

3.3 As Cadeias de Markov Imersas em Filas $M/M^{ij}/1/N$ sem "Feedback"	64
3.4 Os Processos Semi-Markovianos Imersos em Filas $M/M^{ij}/1/N$ sem "Feedback"	70
3.5 Os Processos Semi-Markovianos Imersos em Filas $M/M^{ij}/1/N$ com "Feedback"	87
Comentário Final	101
Apêndice A	102
Bibliografia	105

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho faremos o estudo de um tipo especial de filas cujos processos envolvidos podem ser formulados como Processos de Renovação Markovianos. Os tipos de transições considerados são: chegadas (que ocorrem individualmente), partidas (também ocorrendo individualmente), “feedbacks” (onde um freguês já servido é readmitido instantaneamente no sistema), entradas (chegadas e “feedbacks”), saídas (partidas e “feedbacks”) e transições externas (chegadas e partidas).

As filas com “feedback” têm sido extensamente estudadas conforme podemos constatar na literatura (veja Disney[8]). Vamos nos concentrar aqui no trabalho desenvolvido por Hunter [13], [14], [15], [16] que utiliza a técnica de filtragem desenvolvida por Çinlar [4], [5], [6]. Neste estudo foi demonstrado que os processos que caracterizam o tamanho da fila quando observados em épocas de chegadas, partidas, “feedbacks”, entradas, saídas ou transições externas são Processos de Renovação Markovianos. Além disso, foram obtidas as distribuições estacionárias para as Cadeias de Markov imersas correspondentes e também foram examinadas as propriedades dos processos semi-Markovianos associados a cada Processo de Renovação Markoviano.

As filas $M/M^{ij}/1/N$ cujos tempos de serviço não formam uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas foram estudadas por Çinlar [3], Magalhães e Disney [17], McNickle [18], Neuts[19], [20], [21] e Ramaswami[23], entre outros. Em muitos destes trabalhos o tempo de serviço foi considerado exponencialmente distribuído com parâmetro μ_{ij} dependente dos tipos dos fregueses atual e anterior.

As filas $M/M^{ij}/1/N$ podem ser utilizadas para modelar situações onde os serviços dos fregueses exigem rearranjos nas unidades de atendimento, tanto do servidor quanto do material utilizado. Em muitos sistemas reais, além desse rearranjo, pode haver a demanda por mais serviço por parte de um freguês que acabou de ser atendido. Nesse caso ele retorna à fila esperando por novo atendimento. No nosso estudo faremos então uma associação dos dois modelos mencionados, ou seja, examinaremos as filas $M/M^{ij}/1/N$ com “feedback”.

No sistema que consideraremos as chegadas são governadas por um Processo de Poisson com taxa λ , há um único servidor, e os tempos de serviço tem distribuição exponencial com parâmetro μ_{ij} que depende do tipo do freguês anterior (i) e do tipo do freguês atual (j). Claro que essa dependência não pode ser muito forte sem que corramos o risco de termos um modelo intratável. Por isso faremos a suposição de que imediatamente antes de um cliente entrar em serviço, seu tipo é escolhido através de uma Cadeia de Markov, suposta irreduzível, aperiódica e finita, com matriz de transição R . Isto é, se o freguês anterior é do tipo i , o próximo freguês será do tipo j com probabilidade $r(i, j) = r_{ij}$, sendo que $i, j \in E = \{1, 2, \dots, m\}$, $m < \infty$. Aliás esse é exatamente o mecanismo considerado em filas $M/M^{ij}/1/N$ citadas anteriormente.

Cada freguês, após ter sido atendido, é instantaneamente readmitido no sistema com probabilidade p ($0 \leq p < 1$) ou abandona o sistema com probabilidade $q = 1 - p$. Além disso, estamos considerando que o sistema tem a capacidade para N clientes e os fregueses que chegam quando o sistema está cheio são recusados. A disciplina é definida pelo serviço seguir a ordem de chegada (PCPS). Uma descrição esquemática de nosso sistema é apresentada na Figura 1.

Figura 1

No desenvolvimento deste trabalho assumiremos, em geral, que N é finito. Os resultados, em sua maioria, podem ser estendidos para o caso em que o compartimento de espera tem capacidade ilimitada, quando $N = \infty$. Apresentaremos uma discussão da generalização apropriada ao final de cada seção do estudo.

Na nossa modelagem da fila $M/M^{ij}/1/N$ com “feedback” definimos as seguintes variáveis:

$X(t)$	=	número de fregueses no sistema no instante t .
$Z(t)$	=	tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes ou exatamente no instante t .
$T_n^{(a)}$	=	tempo de ocorrência da n -ésima chegada ao sistema.
$T_n^{(d)}$	=	tempo de ocorrência da n -ésima partida do sistema.
$T_n^{(f)}$	=	tempo de ocorrência do n -ésimo “feedback” no sistema.
$T_n^{(i)}$	=	tempo de ocorrência da n -ésima entrada no sistema: $\{T_n^{(i)}\} = \{T_n^{(a)}\} \cup \{T_n^{(f)}\}$.
$T_n^{(o)}$	=	tempo de ocorrência da n -ésima saída do sistema: $\{T_n^{(o)}\} = \{T_n^{(d)}\} \cup \{T_n^{(f)}\}$.
$T_n^{(e)}$	=	tempo de ocorrência da n -ésima transição externa no sistema: $\{T_n^{(e)}\} = \{T_n^{(a)}\} \cup \{T_n^{(d)}\}$.
T_n	=	tempo de ocorrência da n -ésima transição no sistema: $\{T_n\} = \{T_n^{(a)}\} \cup \{T_n^{(d)}\} \cup \{T_n^{(f)}\}$.
$X_n = X(T_n)$	=	número de clientes no sistema imediatamente após a n -ésima transição.
$X_n^{(\theta)} = X(T_n^{(\theta)})$	=	número de clientes no sistema imediatamente após a n -ésima transição do tipo θ , $\theta = a, d, f, i, o, e$.
$Z_n = Z(T_n)$	=	tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de T_n ou exatamente em T_n .
$Z_n^{(\theta)} = Z(T_n^{(\theta)})$	=	tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de $T_n^{(\theta)}$ ou exatamente em $T_n^{(\theta)}$, $\theta = a, d, f, i, o, e$.

Devemos observar que o cliente não chega ao sistema com seu tipo já definido. Cada tipo é escolhido imediatamente antes do cliente entrar em serviço. Isto também é válido para os fregueses que retornam por mais serviço. A identificação do tipo do cliente ocorre na saída, após o término do serviço, conforme as definições de Z_n e $Z_n^{(\theta)}$.

No capítulo 2 de nosso trabalho apresentaremos a estrutura do núcleo do Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n, Z_n, T_n), n \in \mathcal{N}\}$ e demonstraremos que o processo do comprimento da fila quando observado em instantes

de chegadas, partidas, “feedbacks”, entradas, saídas e transições externas é um Processo de Renovação Markoviano. A estrutura do núcleo de cada um desses processos será obtida. Também estudaremos as distribuições estacionárias das sub-cadeias de Markov irredutíveis associadas a cada Processo de Renovação Markoviano.

No capítulo 3 serão inicialmente estudados os processos semi-Markovianos associados a cada Processo de Renovação Markoviano imerso em uma fila $M/M^{ij}/1/N$ sem “feedback”. Esta fila é um caso particular da fila com “feedback”, obtida quando fazemos $p = 0$. A seguir complementaremos nosso estudo tratando dos processos semi-Markovianos imersos em uma fila $M/M^{ij}/1/N$ com “feedback”.

Ao longo de todo o trabalho faremos comparações entre os nossos resultados e os resultados obtidos por Hunter [13], [14], [15] em seu estudo das filas com “feedback” e clientes de um único tipo.

Capítulo 2

Processos de Renovação Markovianos em Filas $M/M^{ij}/1/N$ com “Feedback”

2.1 Descrição do Modelo

De acordo com a caracterização do sistema e das variáveis envolvidas apresentada na introdução, temos que $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo $Q(t)$, cujo $((i, w), (j, z))$ -ésimo elemento é dado por:

$$\begin{aligned} Q((i, w), (j, z), t) = \\ P\{X_{n+1} = j, Z_{n+1} = z, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, X_1, \dots, X_n = i, \\ Z_0, Z_1, \dots, Z_n = w, T_0, T_1, \dots, T_n\} = \\ P\{X_{n+1} = j, Z_{n+1} = z, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n = i, Z_n = w\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Chamamos a atenção para o abuso de linguagem cometido na equação (2.1).

Observe que a propriedade de falta de memória do Processo de Poisson e da distribuição exponencial que regem, respectivamente, as chegadas e os

tempos de serviço do sistema, justifica a veracidade da equação (2.1). Ressaltamos que a existência de diferentes tipos de clientes e taxas de serviço não destrói a propriedade semi-Markoviana porque, de acordo com as suposições feitas na introdução, o tipo de cada cliente que vai entrar em serviço é escolhido a partir de uma Cadeia de Markov e a taxa de atendimento depende apenas do tipo do último freguês servido e do tipo do freguês em serviço. De acordo com essa argumentação, é fácil ver que o sistema se move de um estado para outro com tempos exponenciais de permanência em cada estado, os sucessivos estados visitados formam uma Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n), n \in \mathcal{N}\}$ e o tempo de permanência em um dado estado tem uma distribuição que depende desse estado e também do próximo estado a ser visitado. Portanto, $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é um Processo de Renovação Markoviano.

Como estamos considerando que cada chegada corresponde à admissão de um único freguês no sistema e que no máximo um freguês pode sair do sistema em qualquer instante de tempo, como uma partida ou um "feedback", os únicos elementos do núcleo diferentes de zero são:

$$\begin{aligned} Q((i, w), (i + 1, z), t), & \quad 0 \leq i \leq N - 1; w = z \in E; \\ Q((i, w), (i, z), t), & \quad 1 \leq i \leq N; w, z \in E; \\ Q((i, w), (i - 1, z), t), & \quad 1 \leq i \leq N; w, z \in E. \end{aligned}$$

Portanto, o núcleo do processo $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é uma matriz $m(N + 1) \times m(N + 1)$ dada por:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & C(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ D(t) & F(t) & G(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D(t) & F(t) & G(t) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & F(t) & G(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D(t) & F(t) & G(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K(t) & L(t) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde 0 é a matriz nula $m \times m$ e $C(t)$, $D(t)$, $F(t)$, $G(t)$, $K(t)$ e $L(t)$ são

matrizes $m \times m$ definidas por:

$$C(t) = (1 - e^{-\lambda t})I, \quad (2.3)$$

sendo I a matriz identidade;

$$D(t) = qA(t) \text{ e}$$

$$F(t) = pA(t), \text{ onde}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} r_{11}v_{11}H_{11}(t) & r_{12}v_{12}H_{12}(t) & \dots & r_{1m}v_{1m}H_{1m}(t) \\ r_{21}v_{21}H_{21}(t) & r_{22}v_{22}H_{22}(t) & \dots & r_{2m}v_{2m}H_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}v_{m1}H_{m1}(t) & r_{m2}v_{m2}H_{m2}(t) & \dots & r_{mm}v_{mm}H_{mm}(t) \end{bmatrix};$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} \sum_{z \in E} r_{1z}u_{1z}H_{1z}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{z \in E} r_{2z}u_{2z}H_{2z}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{z \in E} r_{wz}u_{wz}H_{wz}(t) \end{bmatrix};$$

$$K(t) = qB(t) \text{ e}$$

$$L(t) = pB(t), \text{ onde}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} r_{11}J_{11}(t) & r_{12}J_{12}(t) & \dots & r_{1m}J_{1m}(t) \\ r_{21}J_{21}(t) & r_{22}J_{22}(t) & \dots & r_{2m}J_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}J_{m1}(t) & r_{m2}J_{m2}(t) & \dots & r_{mm}J_{mm}(t) \end{bmatrix};$$

sendo v_{wz} , u_{wz} , $H_{wz}(t)$ e $J_{wz}(t)$ dados por:

$$v_{wz} = \frac{\mu_{wz}}{\lambda + \mu_{wz}}, \quad w, z \in E; \quad (2.4)$$

$$u_{wz} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_{wz}}, \quad w, z \in E; \quad (2.5)$$

$$H_{wz}(t) = 1 - \exp[-(\lambda + \mu_{wz})t], \quad w, z \in E \quad (2.6)$$

e

$$J_{wz}(t) = 1 - \exp(-\mu_{wz}t), \quad w, z \in E. \quad (2.7)$$

Em nosso estudo utilizaremos a seguinte notação simplificada para representar as matrizes $D(t)$, $F(t)$, $G(t)$, $K(t)$ e $L(t)$:

$$D(t) = [qr_{wz}v_{wz}H_{wz}(t)], \quad w, z \in E; \quad (2.8)$$

$$F(t) = [pr_{wz}v_{wz}H_{wz}(t)], \quad w, z \in E; \quad (2.9)$$

$$G(t) = \text{Diag} \left[\sum_{z \in E} r_{wz}u_{wz}H_{wz}(t) \right], \quad w \in E; \quad (2.10)$$

$$K(t) = [qr_{wz}J_{wz}(t)], \quad w, z \in E; \quad (2.11)$$

$$L(t) = [pr_{wz}J_{wz}(t)], \quad w, z \in E. \quad (2.12)$$

Note que se $N = \infty$ as matrizes $K(t)$ e $L(t)$ não aparecem na estrutura de $Q(t)$.

É importante ressaltar que se $N < \infty$, a Cadeia de Markov imersa $\{(X_n, Z_n)\}$ é irredutível, aperiódica e recorrente positiva, o que garante automaticamente que $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é irredutível e recorrente positivo. Analisando as expressões para $Q((i, w), (j, z), t)$ concluímos que

$\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ também é aperiódico. Se $N = \infty$ estamos supondo que a condição para que $\{(X_n, Z_n)\}$ seja recorrente positiva está satisfeita.

Para concluir esta seção gostaríamos de observar que se ocorrer um “feedback” e não houver mudança no tipo de cliente atendido essa transição é identificada devido ao modo como T_n , X_n e Z_n foram definidos. A variável aleatória T_n , definida como o tempo de ocorrência da n -ésima transição no sistema (chegada, partida ou “feedback”) detecta todos os tipos de transições que podem ocorrer, e essa propriedade se reflete nas variáveis X_n e Z_n . Consequentemente, se houver um “feedback” sem mudança no tipo do cliente atendido essa transição será considerada e o tempo de serviço não será tomado como a soma de duas variáveis aleatórias exponenciais, o que aconteceria se a transição não fosse detectada e destruiria a propriedade semi-Markoviana do sistema. Note que uma transição desse tipo é identificada pelos elementos da diagonal da matriz $F(t)$ do núcleo de $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$.

2.2 Os Processos de Renovação Markovianos Imersos

Os resultados desta seção são idênticos aos obtidos por Hunter [13], mas serão apresentados porque representam a base dos estudos subsequentes e também contribuem para a auto-suficiência deste trabalho.

O núcleo do processo $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é tal que $Q((i, w), (j, z), t) = 0$ para $j \neq i-1, i, i+1$. Portanto, $Q(t)$ pode ser dividido em três componentes $Q_A(t)$, $Q_F(t)$ e $Q_D(t)$, que governam, respectivamente, as chegadas, os “feedbacks” e as partidas. Então,

$$Q(t) = Q_A(t) + Q_F(t) + Q_D(t), \quad (2.13)$$

onde

$$Q_A(t) = [Q_A((i, w), (j, z), t)], \text{ com} \quad (2.14)$$

$$Q_A((i, w), (j, z), t) = \begin{cases} Q((i, w), (i+1, z), t), & \text{se } j = i+1, w = z \in E, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$Q_F(t) = [Q_F((i, w), (j, z), t)], \text{ com} \quad (2.15)$$

$$Q_F((i, w), (j, z), t) = \begin{cases} Q((i, w), (i, z), t), & \text{se } j = i, w, z \in E, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$Q_D(t) = [Q_D((i, w), (j, z), t)], \text{ com} \quad (2.16)$$

$$Q_D((i, w), (j, z), t) = \begin{cases} Q((i, w), (i-1, z), t), & \text{se } j = i-1, w, z \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja

$$W_n = \begin{cases} 1 & \text{se } T_n \in \{T_k^{(a)}\}, \\ 0 & \text{se } T_n \in \{T_k^{(f)}\}, \\ -1 & \text{se } T_n \in \{T_k^{(d)}\}, \end{cases} \quad (2.17)$$

de modo que $X_{n+1} = X_n + W_{n+1}$.

Esta nova variável aleatória identifica as transições básicas, ou seja, as chegadas, as partidas e os “feedbacks”, segundo a nomenclatura de Hunter[13]. As saídas, entradas e transições externas também podem ser identificadas através de funções de W_n . Definimos,

$$A_n = \frac{1}{2}(W_{n+1} + |W_n|) = \begin{cases} 0 & \text{se } T_n \in \{T_k^{(f)}\} \cup \{T_k^{(d)}\} = \{T_k^{(o)}\}, \\ 1 & \text{se } T_n \in \{T_k^{(a)}\}; \end{cases} \quad (2.18)$$

$$B_n = \frac{1}{2}(W_n - |W_n|) = \begin{cases} 0 & \text{se } T_n \in \{T_k^{(a)}\} \cup \{T_k^{(f)}\} = \{T_k^{(i)}\}, \\ -1 & \text{se } T_n \in \{T_k^{(d)}\}; \end{cases} \quad (2.19)$$

$$C_n = |W_n| = \begin{cases} 1 & \text{se } T_n \in \{T_k^{(a)}\} \cup \{T_k^{(d)}\} = \{T_k^{(e)}\}, \\ 0 & \text{se } T_n \in \{T_k^{(f)}\}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Sejam,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{-1} &= \mathcal{LXEX}\{-1\}, \\ \mathcal{H}_0 &= \mathcal{LXEX}\{0\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \mathcal{LXEX}\{1\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde $\mathcal{L} = \{0, 1, \dots, N\}$ e $E = \{1, 2, \dots, m\}$.

Aumentando o Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ com essas variáveis aleatórias obtemos o teorema a seguir.

Teorema 2.1 (a) $\{(X_n, Z_n, A_n, T_n)\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com espaço de estados $\mathcal{LXEX}\{0, 1\}$ e núcleo dado por

$$Q_{X,Z,A} = \begin{matrix} & \mathcal{H}_1 & \mathcal{H}_0 \\ \begin{bmatrix} Q_A & Q_F + Q_D \\ Q_A & Q_F + Q_D \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_0 \end{matrix} \end{matrix}.$$

(b) $\{(X_n, Z_n, B_n, T_n)\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com espaço de estados $\mathcal{LXEX}\{-1, 0\}$ e núcleo dado por

$$Q_{X,Z,B} = \begin{matrix} & \mathcal{H}_{-1} & \mathcal{H}_0 \\ \begin{bmatrix} Q_D & Q_A + Q_F \\ Q_D & Q_A + Q_F \end{bmatrix} & \begin{matrix} \mathcal{H}_{-1} \\ \mathcal{H}_0 \end{matrix} \end{matrix}.$$

(c) $\{(X_n, Z_n, C_n, T_n)\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com espaço de estados $\mathcal{LXEX}\{0, 1\}$ e núcleo dado por

$$Q_{X,Z,C} = \begin{bmatrix} Q_F & Q_A + Q_D \\ Q_F & Q_A + Q_D \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{H}_1 \end{matrix}.$$

Os núcleos do Teorema 2.1 estão particionados de forma adequada para a aplicação da técnica de filtragem desenvolvida por Çinlar [4] e [6]. Um resumo desta técnica é apresentada no Apêndice A.

Antes de introduzirmos o Teorema 2.2, que é o resultado da aplicação do procedimento de filtragem, relembremos as convenções usuais para a representação de convoluções:

$$A^{(0)}(t) = I; \quad (2.22)$$

$$A^{(k+1)}(t) = A^{(k)} * A(t), \quad k \geq 0; \quad (2.23)$$

$$A^{(k+1)}(i, j, t) = \sum_{l \in E} \int_0^t A(i, l, ds) A^{(k)}(l, j, t - s); \quad (2.24)$$

$$M * N(i, j, t) = \sum_{l \in E} \int_0^t M(i, l, ds) N(l, j, t - s). \quad (2.25)$$

Teorema 2.2 (a) $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)}, T_n^{(a)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo

$$Q^{(a)} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (Q_F + Q_D)^{(k)} \right] * Q_A.$$

(b) $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)}, T_n^{(d)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo

$$Q^{(d)} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (Q_A + Q_F)^{(k)} \right] * Q_D.$$

(c) $\{(X_n^{(f)}, Z_n^{(f)}, T_n^{(f)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo

$$Q^{(f)} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (Q_A + Q_D)^{(k)} \right] * Q_F.$$

(d) $\{(X_n^{(o)}, Z_n^{(o)}, T_n^{(o)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo

$$Q^{(o)} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} Q_A^{(k)} \right] * (Q_F + Q_D).$$

(e) $\{(X_n^{(i)}, Z_n^{(i)}, T_n^{(i)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo

$$Q^{(i)} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} Q_D^{(k)} \right] * (Q_A + Q_F).$$

(f) $\{(X_n^{(e)}, Z_n^{(e)}, T_n^{(e)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo

$$Q^{(e)} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} Q_F^{(k)} \right] * (Q_A + Q_D).$$

Prova:

(a) e (d) resultam da aplicação do Teorema A.1 do Apêndice A e do Teorema 2.1(a).

Sejam $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{L}XEX\{1\}$, L_n o número do passo que leva à n -ésima visita a um estado de $\mathcal{H}$, U_n o tempo desse salto e Y_n o estado em $\mathcal{H}$ que está sendo visitado. Então, $Y_n = (X_{L_n}, Z_{L_n}, A_{L_n}) = (X_n^{(a)}, Z_n^{(a)}, 1)$ e $U_n = T_{L_n} = T_n^{(a)}$.

Consequentemente, $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)}, 1, T_n^{(a)})\}$ ou, o que é equivalente, $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)}, T_n^{(a)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo dado por

$$Q^{(a)} = Q_A + (Q_D + Q_F) * \left[\sum_{k=0}^{\infty} (Q_D + Q_F)^{(k)} \right] * Q_A = \\ \left[\sum_{k=0}^{\infty} (Q_F + Q_D)^{(k)} \right] * Q_A,$$

que é o resultado em (a).

Se, para o mesmo processo, fizermos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$, então $Y_n = (X_n^{(o)}, Z_n^{(o)}, 0)$, $U_n = T_n^{(o)}$ e obteremos o resultado apresentado em (d).

(b) e (e) resultam da filtragem do processo $\{(X_n, Z_n, B_n, T_n)\}$ com $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{-1}$, respectivamente.

(c) e (f) resultam da filtragem do processo $\{(X_n, Z_n, C_n, T_n)\}$ com $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$, respectivamente. $\square$

É importante observar que no nosso problema o núcleo de $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ tem o mesmo tipo de estrutura do núcleo do processo $\{(X_n, T_n)\}$ apresentado por Hunter [13]. Por esse motivo os Teoremas 1 e 2 de Hunter e os Teoremas 2.1 e 2.2 que acabamos de apresentar são absolutamente análogos. A diferença está nos elementos das partições $Q_A(t)$, $Q_F(t)$ e $Q_D(t)$ dos dois núcleos. Observe que os Teoremas 2.1 e 2.2 também são válidos para $N = \infty$.

Cada um dos Processos de Renovação Markovianos imersos apresentados no Teorema 2.2 tem o mesmo espaço de estados $\mathcal{L}XE$. Quando $N < \infty$, em

alguns desses processos o estado $(0, w)$ ou o estado (N, w) , $w \in E$, nunca é visitado a não ser que X_0 seja igual a 0 ou igual a N , situação em que o processo abandona esse estado e nunca mais retorna a ele. Então, tal estado será transiente para o processo imerso considerado. Como o Processo de Renovação Markoviano básico é irreduzível concluímos que cada processo imerso possui sub-espacos irreduzíveis que podem ou não incluir os estados $(0, w)$ ou (N, w) , $w \in E$. De acordo com as características do problema, concluímos que os sub-espacos irreduzíveis para os Processos de Renovação Markovianos imersos e suas respectivas Cadeias de Markov são:

$$\mathcal{L}^{(a)}XE = \mathcal{L}^{(f)}XE = \mathcal{L}^{(i)}XE = \{1, 2, \dots, N\}XE;$$

$$\mathcal{L}^{(d)}XE = \{0, 1, \dots, N-1\}XE;$$

$$\mathcal{L}^{(o)}XE = \mathcal{L}^{(e)}XE = \mathcal{L}XE = \{0, 1, \dots, N\}XE.$$

Quando $N = \infty$, temos:

$$\mathcal{L}^{(a)}XE = \mathcal{L}^{(f)}XE = \mathcal{L}^{(i)}XE = \{1, 2, \dots\}XE;$$

$$\mathcal{L}^{(d)}XE = \mathcal{L}^{(o)}XE = \mathcal{L}^{(e)}XE = \mathcal{L}XE = \{0, 1, 2, \dots\}XE.$$

2.3 As Cadeias de Markov Imersas

A matriz de transição da Cadeia de Markov associada ao Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é dada por $P = [Q((i, w), (j, z), \infty)] = Q(\infty)$. Definindo $P_A = Q_A(\infty)$, $P_F = Q_F(\infty)$ e $P_D = Q_D(\infty)$ a matriz P pode ser expressa como $P = P_A + P_D + P_F$. Esta decomposição possibilita a determinação de expressões para as matrizes de transição das Cadeias de Markov associadas aos Processos de Renovação Markovianos imersos apresentados na seção anterior.

Teorema 2.3 Se $P^{(a)}, P^{(d)}, P^{(f)}, P^{(o)}, P^{(i)}$ e $P^{(e)}$ são, respectivamente, as matrizes de transição das Cadeias de Markov $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)})\}$, $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)})\}$, $\{(X_n^{(f)}, Z_n^{(f)})\}$, $\{(X_n^{(o)}, Z_n^{(o)})\}$, $\{(X_n^{(i)}, Z_n^{(i)})\}$, $\{(X_n^{(e)}, Z_n^{(e)})\}$, então:

(a)

$$P^{(a)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (P_F + P_D)^n \right\} P_A = (I - P_F - P_D)^{-1} P_A,$$

(b)

$$P^{(d)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (P_A + P_F)^n \right\} P_D = (I - P_A - P_F)^{-1} P_D,$$

(c)

$$P^{(f)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (P_A + P_D)^n \right\} P_F = (I - P_A - P_D)^{-1} P_F,$$

(d)

$$P^{(o)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_A^n \right\} (P_F + P_D) = (I - P_A)^{-1} (P_F + P_D),$$

(e)

$$P^{(i)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_D^n \right\} (P_A + P_F) = (I - P_D)^{-1} (P_A + P_F),$$

(f)

$$P^{(e)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_F^n \right\} (P_A + P_D) = (I - P_F)^{-1} (P_A + P_D).$$

Prova:

Idêntica à prova do Teorema 3 de Hunter [13], mas será apresentada aqui porque contribui para que nosso trabalho seja autocontido.

Para toda convolução $A^{(k)}(t)$, temos que $A^{(k)}(\infty) = [A(\infty)]^k$, para $k \geq 1$, com $A^{(0)}(\infty) = I$. Para matrizes finitas, se todos os autovalores de A são

menores que 1 em módulo, então $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$. Como P é uma matriz irredutível não-negativa, a partir da teoria de Perron-Frobenius concluímos que essa condição é satisfeita para todo A tal que $0 \leq A \leq P$ com $A \neq P$. $\square$

A seguir iremos estudar as estruturas das matrizes P_A , P_D e P_F com o objetivo de estabelecer as expressões para as matrizes de transição das Cadeias de Markov imersas restritas aos sub-espacos irredutíveis. Será utilizada a seguinte notação para a representação dos elementos da matriz P :

$$C(\infty) = I; \quad (2.26)$$

$$D(\infty) = D = [qr_{wz}v_{wz}] = [d_{wz}], \quad w, z \in E; \quad (2.27)$$

$$F(\infty) = F = [pr_{wz}v_{wz}] = [f_{wz}], \quad w, z \in E; \quad (2.28)$$

$$G(\infty) = G = \text{Diag} \left[\sum_{z \in E} r_{wz}u_{wz} \right] = [g_{ww}], \quad w \in E; \quad (2.29)$$

$$K(\infty) = K = [qr_{wz}] = [k_{wz}], \quad w, z \in E; \quad (2.30)$$

$$L(\infty) = L = [pr_{wz}] = [l_{wz}], \quad w, z \in E; \quad (2.31)$$

onde v_{wz} e u_{wz} são definidos na página 9.

Portanto, a matriz de transição da Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n)\}$ é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ D & F & G & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & F & G & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D & F & G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K & L \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Se $N = \infty$ as matrizes K e L não aparecem na estrutura de P .

A partir da estrutura da matriz P podemos estabelecer as seguintes expressões para as matrizes P_A , P_D e P_F :

$$P_A = \begin{bmatrix} 0 & T' \\ \underline{0} & \overline{P}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{P}}_A & V \\ \underline{0}' & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

onde

$\underline{0}$ é a matriz nula $m \times m$ e $\underline{0}'$, T' e V' são matrizes $m \times mN$ com

$$\underline{0}' = [0 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$T' = [I \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$V' = [0 \ 0 \ \dots \ G],$$

e $\overline{P}_A$ e $\overline{\overline{P}}_A$ são matrizes $mN \times mN$ tais que

$$\overline{P}_A = \begin{bmatrix} 0 & G & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & G \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{P}}_A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & G \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$P_D = \begin{bmatrix} 0 & \underline{0}' \\ Z & \overline{P}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{P}}_D & \underline{0} \\ U' & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

onde Z' e U' são matrizes $m \times mN$ com

$$Z' = [D \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$U' = [0 \ 0 \ \dots \ K],$$

e $\overline{P}_D$ e $\overline{\overline{P}}_D$ são matrizes $mN \times mN$ tais que

$$\overline{P}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{P}}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D & 0 \end{bmatrix}.$$

$$P_F = \begin{bmatrix} 0 & \underline{0}' \\ \underline{0} & \overline{P}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{P}}_F & \underline{0} \\ \underline{0}' & L \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

onde $\overline{P}_F$ e $\overline{\overline{P}}_F$ são matrizes $mN \times mN$ tais que

$$\overline{P}_F = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{P}}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & F \end{bmatrix}.$$

Observamos que se $N = \infty$ a linha de zeros, a matriz K e a matriz L não aparecem nas estruturas de $\overline{P}_A$, $\overline{P}_D$ e $\overline{P}_F$, respectivamente. A segunda forma de cada matriz P_A , P_D e P_F só é de interesse quando $N < \infty$.

Teorema 2.4 (a) *Processo de chegada*

$$P^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & T' \\ 0 & \overline{P}^{(a)} \end{bmatrix},$$

onde $\overline{P}^{(a)}$ é a matriz de transição de $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)})\}$ no sub-espço irredutível $\mathcal{L}^{(a)}XE$ e é dada por:

$$\overline{P}^{(a)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{P}_F + \overline{P}_D)^n \right\} (\overline{P}_A + ZT'), \quad N \leq \infty;$$

$$\overline{P}^{(a)} = (I - \overline{P}_F - \overline{P}_D)^{-1} (\overline{P}_A + ZT'), \quad N < \infty.$$

(b) *Processo de partida*

Quando $N < \infty$:

$$P^{(d)} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{P}}^{(d)} & \underline{0} \\ (I - L)^{-1}U' & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\bar{\bar{P}}^{(d)}$ é a matriz de transição de $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)})\}$ no sub-espaço irredutível $\mathcal{L}^{(d)}XE$ e é dada por:

$$\bar{\bar{P}}^{(d)} = (I - \bar{\bar{P}}_A - \bar{\bar{P}}_F)^{-1}(\bar{\bar{P}}_D + V(I - L)^{-1}U').$$

Quando $N = \infty$, $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)})\}$ é irredutível em $\mathcal{L}^{(d)}XE = \mathcal{L}XE$ com matriz de transição $P^{(d)}$ dada pelo Teorema 2.3(b).

(c) *Processo de "feedback"*

$$P^{(f)} = \begin{bmatrix} 0 & T'\bar{P}^{(f)} \\ \underline{0} & \bar{P}^{(f)} \end{bmatrix},$$

onde $\bar{P}^{(f)}$ é a matriz de transição de $\{(X_n^{(f)}, Z_n^{(f)})\}$ no sub-espaço irredutível $\mathcal{L}^{(f)}XE$ e é dada por:

$$\bar{P}^{(f)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{P}_A + \bar{P}_D + ZT')^n \right\} \bar{P}_F, \quad N \leq \infty;$$

$$\bar{P}^{(f)} = (I - \bar{P}_A - \bar{P}_D - ZT')^{-1}\bar{P}_F, \quad N < \infty.$$

(d) *Processo de saída*

Para $N \leq \infty$, $\{(X_n^{(o)}, Z_n^{(o)})\}$ é irredutível em $\mathcal{L}^{(o)}XE = \mathcal{L}XE$ com matriz de transição $P^{(o)}$ dada pelo Teorema 2.3(d).

(e) *Processo de entrada*

$$P^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & T' \\ \underline{0} & \overline{P}^{(i)} \end{bmatrix},$$

onde $\overline{P}^{(i)}$ é a matriz de transição de $\{(X_n^{(i)}, Z_n^{(i)})\}$ no sub-espço irreduzível $\mathcal{L}^{(i)}XE$ e é dada por:

$$\overline{P}^{(i)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \overline{P}_D^n \right\} (\overline{P}_A + \overline{P}_F + ZT'), \quad N \leq \infty;$$

$$\overline{P}^{(i)} = (I - \overline{P}_D)^{-1} (\overline{P}_A + \overline{P}_F + ZT'), \quad N < \infty.$$

(f) *Processo externo*

Para $N \leq \infty$, $\{(X_n^{(e)}, Z_n^{(e)})\}$ é irreduzível em $\mathcal{L}^{(e)}XE = \mathcal{L}XE$ com matriz de transição $P^{(e)}$ dada pelo Teorema 2.3(f).

Prova:

(a) É fácil verificar que

$$P_F + P_D = \begin{bmatrix} 0 & \underline{0}' \\ Z & \overline{P}_F + \overline{P}_D \end{bmatrix},$$

$$(P_F + P_D)^n = \begin{bmatrix} 0 & \underline{0}' \\ (\overline{P}_F + \overline{P}_D)^{n-1} Z & (\overline{P}_F + \overline{P}_D)^n \end{bmatrix}$$

e

$$(P_F + P_D)^n P_A = \begin{bmatrix} 0 & \underline{0}' \\ \underline{0} & (\overline{P}_F + \overline{P}_D)^{n-1} ZT' + (\overline{P}_F + \overline{P}_D)^n \overline{P}_A \end{bmatrix},$$

para $n \geq 1$.

Aplicando o Teorema 2.3(a), vem:

$$P^{(a)} = P_A + \sum_{n=1}^{\infty} (P_F + P_D)^n P_A =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & T' \\ \underline{0} & \bar{P}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \underline{0}' \\ \underline{0} & \sum_{n=1}^{\infty} [(\bar{P}_F + \bar{P}_D)^{n-1} ZT' + (\bar{P}_F + \bar{P}_D)^n \bar{P}_A] \end{bmatrix}.$$

Mas,

$$\bar{P}_A + \sum_{n=1}^{\infty} [(\bar{P}_F + \bar{P}_D)^{n-1} ZT' + (\bar{P}_F + \bar{P}_D)^n \bar{P}_A] =$$

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{P}_F + \bar{P}_D)^n \right\} (\bar{P}_A + ZT') = \bar{P}^{(a)}, \text{ para } N \leq \infty,$$

que é o resultado desejado.

(b)

$$(P_A + P_F)^n = \begin{bmatrix} (\bar{\bar{P}}_A + \bar{\bar{P}}_F)^n & \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{\bar{P}}_A + \bar{\bar{P}}_F)^{n-k-1} V L^k \\ \underline{0}' & L^n \end{bmatrix}$$

e

$$(P_A + P_F)^n P_D = \begin{bmatrix} (\bar{\bar{P}}_A + \bar{\bar{P}}_F)^n \bar{\bar{P}}_D + \left[\sum_{k=0}^{n-1} (\bar{\bar{P}}_A + \bar{\bar{P}}_F)^{n-k-1} V L^k \right] U' & \underline{0}' \\ L^n U' & 0 \end{bmatrix},$$

para $n \geq 1$.

Aplicando o Teorema 2.3(b), para $N < \infty$, vem:

$$P^{(d)} = P_D + \sum_{n=1}^{\infty} (P_A + P_F)^n P_D =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_D & 0 \\ U' & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\bar{P}_A + \bar{P}_F)^n \bar{P}_D + \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\bar{P}_A + \bar{P}_F)^{n-k-1} V L^k \right) U' \right\} & 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} L^n U' & 0 \end{bmatrix}.$$

Mas,

$$\bar{P}_D + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\bar{P}_A + \bar{P}_F)^n \bar{P}_D + \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\bar{P}_A + \bar{P}_F)^{n-k-1} V L^k \right) U' \right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\bar{P}_A + \bar{P}_F)^n \bar{P}_D + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} (\bar{P}_A + \bar{P}_F)^{n-k-1} V L^k U' =$$

$$(I - \bar{P}_A - \bar{P}_F)^{-1} \bar{P}_D + \sum_{k=0}^{\infty} (I - \bar{P}_A - \bar{P}_F)^{-1} V L^k U' =$$

$$(I - \bar{P}_A - \bar{P}_F)^{-1} (\bar{P}_D + V(I - L)^{-1} U').$$

(c) Podemos mostrar por indução que, para $n \leq 0$:

$$(P_A + P_D)^{n+1} P_F = \begin{bmatrix} 0 & T' F_{n+1} \bar{P}_F \\ 0 & (Z T' F_n + (\bar{P}_A + \bar{P}_D) F_{n+1}) \bar{P}_F \end{bmatrix},$$

onde F_n e F_{n+1} são matrizes $mN \times mN$ tais que

$$F_{n+2} = Z T' F_n + (\bar{P}_A + \bar{P}_D) F_{n+1},$$

com $F_0 = 0$ e $F_1 = I$.

Aplicando o Teorema 2.3(c), vem:

$$P^{(f)} = P_F + \sum_{n=0}^{\infty} (P_A + P_D)^{n+1} P_F =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & T' S \bar{P}_F \\ \underline{0} & \bar{P}_F + \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} \right) \bar{P}_F \end{bmatrix},$$

onde $S = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}$.

Mas,

$$\bar{P}_F + \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} \right) \bar{P}_F = \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n+1} \right) \bar{P}_F = S \bar{P}_F$$

e portanto,

$$P^{(f)} = \begin{bmatrix} 0 & T' S \bar{P}_F \\ \underline{0} & S \bar{P}_F \end{bmatrix}.$$

Sejam $X_1 = \bar{P}_A + \bar{P}_D$ e $X_2 = ZT'$. Então,

$$F_{n+2} = X_2 F_n + X_1 F_{n+1}.$$

Definindo

$$Y_n^{(l)} = \sum_{i_1 + \dots + i_l = n, 1 \leq i_j \leq 2, j=1, \dots, l} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_l},$$

podemos verificar que F_{n+1} é da forma:

$$F_{n+1} = \sum_{l=[(n+1)/2]}^n Y_n^{(l)},$$

onde $[a]$ é o maior inteiro menor ou igual a a .

Logo,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=[(n+1)/2]}^n Y_n^{(l)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=l}^{2l} Y_n^{(l)}.$$

Mas,

$$(X_1 + X_2)^n = \sum_{k=n}^{2n} \sum_{i_1+\dots+i_n=k, 1 \leq i_j \leq 2, j=1,\dots,n} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_n} = \sum_{k=n}^{2n} Y_k^{(n)},$$

e portanto,

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} (X_1 + X_2)^l = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{P}_A + \bar{P}_D + ZT')^n.$$

Concluimos então que

$$P^{(f)} = \begin{bmatrix} 0 & T' \bar{P}^{(f)} \\ \underline{0} & \bar{P}^{(f)} \end{bmatrix},$$

onde

$$\bar{P}^{(f)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{P}_A + \bar{P}_D + ZT')^n \right\} \bar{P}_F, \quad N \leq \infty.$$

(e) É fácil mostrar por indução que, para $n \geq 1$:

$$P_D^n (P_A + P_F) = \begin{bmatrix} 0 & \underline{0}' \\ \underline{0} & \bar{P}_D^{n-1} ZT' + \bar{P}_D^n (\bar{P}_A + \bar{P}_F) \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Teorema 2.3(e):

$$P^{(i)} = (P_A + P_F) + \sum_{n=1}^{\infty} P_D^n (P_A + P_F).$$

Observando que

$$\begin{aligned} (\bar{P}_A + \bar{P}_F) + \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{P}_D^{n-1} ZT' + \bar{P}_D^n (\bar{P}_A + \bar{P}_F)] = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_D^n ZT' + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_D^n (\bar{P}_A + \bar{P}_F) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_D^n (ZT' + \bar{P}_A + \bar{P}_F), \end{aligned}$$

obtemos,

$$P^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & T' \\ 0 & \bar{P}^{(i)} \end{bmatrix},$$

onde

$$\bar{P}^{(i)} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_D^n \right\} (\bar{P}_A + \bar{P}_F + ZT'), \quad N \leq \infty.$$

Observamos que os resultados para $N < \infty$ são obtidos como no Teorema 2.3. $\square$

O Teorema 3 obtido por Hunter [13] e o Teorema 2.3 de nosso estudo são equivalentes, já que os núcleos dos Processos de Renovação Markovianos correspondentes a cada situação apresentam o mesmo tipo de estrutura, como já foi observado anteriormente.

O Teorema 2.4 de nosso trabalho envolve sub-matrizes mais complexas que o equivalente de Hunter [13], mas ambos possuem formas similares.

Note que fazendo $m = 1$ podemos escrever:

$$I = 1;$$

$$D = p_{i,i-1}, F = p_{i,i}, G = p_{i,i+1} \text{ para } 1 \leq i \leq N-1;$$

$$K = p_{N,N-1};$$

$$L = p_{N,N}.$$

Portanto, é fácil verificar que para $m = 1$ recaímos no caso de Hunter, como se deveria esperar.

2.4 A Distribuição Estacionária da Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n)\}$

Como o Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n)\}$ é finita, irredutível e aperiódica, podemos garantir a existência e unicidade da distribuição estacionária. Se $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$ é a distribuição estacionária de $\{(X_n, Z_n)\}$, onde para cada $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $\pi_k = (\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{km})$, as seguintes equações devem ser satisfeitas (veja Çinlar [6] p.152):

$$\pi P = \pi, \tag{2.36}$$

$$\pi e = 1, \tag{2.37}$$

onde e é o vetor unitário $m(N+1) \times 1$.

A equação (2.36) é equivalente a:

$$\pi_0 - \pi_1 D = 0; \tag{2.38}$$

$$\pi_0 + \pi_1(F - I) + \pi_2 D = 0; \tag{2.39}$$

$$\pi_{i-1} G + \pi_i(F - I) + \pi_{i+1} D = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-2; \tag{2.40}$$

$$\pi_{N-2} G + \pi_{N-1}(F - I) + \pi_N K = 0; \tag{2.41}$$

$$\pi_{N-1} G + \pi_N(L - I) = 0; \tag{2.42}$$

onde as matrizes D, F, G, I, K, L são definidas na página 18 e 0 é o vetor nulo $1 \times m$.

Portanto, o nosso problema consiste em resolver (2.40), sujeita às condições de contorno (2.38), (2.39), (2.41) e (2.42) e à condição (2.37).

Devido à estrutura das matrizes D, F, G, K e L e à existência de quatro condições de contorno, o sistema (2.36) – (2.37) é bastante complexo. Não se conhece, até o momento, uma solução analítica geral para sistemas desse tipo. Nas situações práticas o sistema pode ser resolvido através de métodos numéricos, que fornecem uma solução aproximada.

Soluções analíticas encontradas na literatura para esse problema ocorrem quando o sistema apresenta alguma estrutura especial que facilita sua manipulação. Por exemplo, nos “quase processos de nascimento e morte” a equação $\pi P = \pi$, ou $\pi \Lambda = 0$, pode ser substituída por uma equação de diferenças da forma $\pi_k A + \pi_{k+1} B + \pi_{k+2} C = 0$, $k = 0, 1, \dots, M-2$ com condições de contorno $\pi_0 R + \pi_1 S = 0$, $\pi_{M-1} U + \pi_M V = 0$, onde A, B, C, R, S, U , e V são matrizes (Veja Neuts[22], os trabalhos citados nele e Disney[7]).

Se $N = \infty$ o problema é ainda mais difícil, pois nesse caso a distribuição estacionária nem sempre existe e portanto é necessário verificar uma condição que garanta a existência e unicidade dessa distribuição. De acordo com Çinlar [6] p.152, para encontrar tal condição e a forma da distribuição estacionária devemos considerar o sistema de equações lineares formado pelas expressões (2.37) a (2.39) e pela equação

$$\pi_{i-1} G + \pi_i (F - I) + \pi_{i+1} D = 0, \quad i = 2, 3, \dots \quad (2.43)$$

Se existir uma solução π para esse sistema, então π é a única distribuição estacionária de $\{(X_n, Z_n)\}$. A obtenção dessa solução é ainda mais complicada do que no caso em que N é finito.

No entanto, por analogia à fila $M/M/1$, podemos considerar que uma condição suficiente para a existência da distribuição estacionária é:

$$\lambda < q\mu_{ij}, \quad \forall i, j \in E$$

ou seja, a taxa de chegadas deve ser inferior à taxa efetiva de saídas, pois caso contrário, ou o servidor não será capaz de atender a todas as chegadas e o tamanho da fila irá crescer infinitamente (quando todos os estados são transientes), ou então os intervalos de tempo entre os retornos ao estado de zero indivíduos no sistema terão esperança infinita e todos os estados serão recorrentes nulos.

Na próxima seção determinaremos expressões para os vetores de probabilidades estacionárias dos diversos processos imersos quando restritos a seus sub-espacos irredutíveis. Essas expressões serão expressas como funções das formas particionadas de π , a distribuição estacionária da Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n)\}$, apesar de não conhecermos os elementos de π . Lembramos que em cada caso particular do sistema os elementos de π podem ser determinados através de métodos numéricos.

Para obter as formas particionadas de π , devemos em primeiro lugar examinar as partições da matriz de transição da Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n)\}$. É fácil verificar que podemos escrever:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & T' \\ Z & \bar{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{P}} & V \\ U' & L \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

onde 0 , T' , Z , V e U' são definidas nas páginas 19 e 20 e $\bar{P}$ e $\bar{\bar{P}}$ são matrizes $mN \times mN$ dadas por

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} F & G & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ D & F & G & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & F & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D & F & G \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K & L \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

e

$$\overline{\overline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ D & F & G & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & F & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D & F & G \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & D & F \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Observamos que se $N = \infty$ as matrizes K e L não aparecem na estrutura de $\overline{P}$. A segunda forma da matriz P só é de interesse quando $N < \infty$.

Teorema 2.5 *Seja $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1}, \pi_N)$ a única distribuição estacionária da Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n)\}$, onde para cada $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $\pi_k = (\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{km})$. Sejam $\pi = (\pi_0, \underline{\pi}_1)$, onde $\underline{\pi}_1 = (\pi_1, \dots, \pi_{N-1}, \pi_N)$ e $\pi = (\underline{\pi}_{N-1}, \pi_N)$, onde $\underline{\pi}_{N-1} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{N-1})$. Então,*

(a) $\underline{\pi}_1$ é o único vetor tal que

$$\underline{\pi}_1(I - \overline{P} - ZT') = \underline{0}^*,$$

com

$$\underline{\pi}_1(e_2 + Ze_1) = 1,$$

onde e_1 é o vetor unitário $m \times 1$, e_2 é o vetor unitário $mN \times 1$ e $\underline{0}^*$ o vetor nulo $mN \times 1$. Além disso,

$$\pi_0 e_1 = 1 - \underline{\pi}_1 e_2 = \underline{\pi}_1 Z e_1.$$

(b) $\underline{\pi}_{N-1}$ é o único vetor tal que

$$\underline{\pi}_{N-1}(I - \overline{P} - V(I - L)^{-1}U') = \underline{0}^*,$$

com

$$\underline{\pi}_{N-1}(e_2 + V(I - L)^{-1}e_1) = 1.$$

Além disso,

$$\pi_N e_1 = \underline{\pi}_{N-1} V(I - L)^{-1} e_1 = 1 - \underline{\pi}_{N-1} e_2.$$

Prova:

(a) Tomando P como a primeira forma particionada e substituindo na equação $\pi P = \pi$, obtemos

$$[\pi_1 Z \quad \pi_0 T' + \pi_1 \bar{P}] = [\pi_0 \quad \pi_1]. \quad (2.47)$$

A partir desse sistema de igualdades concluímos que

$$\pi_1 [I - \bar{P} - ZT'] = 0'.$$

A unicidade de π_1 é estabelecida a partir da condição que $\pi e = 1$, que é equivalente a

$$\pi_0 e_1 + \pi_1 e_2 = 1. \quad (2.48)$$

Utilizando as equações (2.47) e (2.48) obtemos os demais resultados.

(b) A demonstração é análoga ao item anterior, devendo-se trabalhar agora com a segunda forma particionada de P e tomar $\pi = [\pi_{N-1} \quad \pi_N]$. $\square$

Observamos que para $m = 1$ o Teorema 2.5 se transforma no Teorema 6 de Hunter[13].

No caso em que $N = \infty$ apenas o resultado do Teorema 2.5(a) é de interesse, sendo válido quando os estados são recorrentes positivos.

2.5 As Distribuições Estacionárias das Cadeias de Markov Imersas Irredutíveis

Nesta seção utilizaremos as expressões para as matrizes de transição dos diversos processos imersos, que são apresentadas no Teorema 2.4, juntamente com o Teorema 2.5, para determinar as distribuições estacionárias dos processos imersos quando restritos a seus sub-espacos irredutíveis.

Teorema 2.6 (a) *Processo de chegada*

Se $\pi^{(a)}$ é a distribuição estacionária do processo $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)})\}$ no sub-espaço irredutível $\mathcal{L}^{(a)}XE$, então

$$\pi^{(a)} = (\pi_1^{(a)}, \dots, \pi_N^{(a)}) = \frac{1}{\alpha_a} \pi_1 (\bar{P}_A + ZT') = \frac{1}{\alpha_a} \pi_1 (I - \bar{P}_F - \bar{P}_D),$$

onde

$$\pi_k^{(a)} = (\pi_{k1}^{(a)}, \dots, \pi_{km}^{(a)})$$

e

$$\alpha_a = \pi_0 e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i G e_1.$$

(b) *Processo de partida*

Se $\pi^{(d)}$ é a distribuição estacionária do processo $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)})\}$ no sub-espaço irredutível $\mathcal{L}^{(d)}XE$, então

$$\begin{aligned} \pi^{(d)} = (\pi_0^{(d)}, \dots, \pi_{N-1}^{(d)}) &= \frac{1}{\alpha_d} \pi_{N-1} (\bar{\bar{P}}_D + V(I - L)^{-1}U') = \\ &= \frac{1}{\alpha_d} \pi_{N-1} (I - \bar{\bar{P}}_A - \bar{\bar{P}}_F), \end{aligned}$$

onde

$$\pi_k^{(d)} = (\pi_{k1}^{(d)}, \dots, \pi_{km}^{(d)})$$

e

$$\alpha_d = \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i D e_1 + \pi_N K e_1.$$

(c) *Processo de "feedback"*

Se $\pi^{(f)}$ é a distribuição estacionária do processo $\{(X_n^{(f)}, Z_n^{(f)})\}$ no sub-espaço irredutível $\mathcal{L}^{(f)}XE$, então

$$\pi^{(f)} = (\pi_1^{(f)}, \dots, \pi_N^{(f)}) = \frac{1}{\alpha_f} \pi_1 \bar{P}_F = \frac{1}{\alpha_f} \pi_1 (I - \bar{P}_A - \bar{P}_D - ZT'),$$

onde

$$\pi_k^{(f)} = (\pi_{k1}^{(f)}, \dots, \pi_{km}^{(f)})$$

e

$$\alpha_f = \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i F e_1 + \pi_N L e_1.$$

(d) *Processo de saída*

Se $\pi^{(o)}$ é a distribuição estacionária do processo $\{(X_n^{(o)}, Z_n^{(o)})\}$ no espaço irredutível $\mathcal{L}^{(o)} X E = \mathcal{L} X E$, então

$$\pi^{(o)} = (\pi_0^{(o)}, \dots, \pi_N^{(o)}) = \frac{1}{\alpha_o} \pi (P_F + P_D) = \frac{1}{\alpha_o} \pi (I - P_A),$$

onde

$$\pi_k^{(o)} = (\pi_{k1}^{(o)}, \dots, \pi_{km}^{(o)})$$

e

$$\alpha_o = \alpha_f + \alpha_d.$$

(e) *Processo de entrada*

Se $\pi^{(i)}$ é a distribuição estacionária do processo $\{(X_n^{(i)}, Z_n^{(i)})\}$ no sub-espaço irredutível $\mathcal{L}^{(i)} X E$, então

$$\pi^{(i)} = (\pi_1^{(i)}, \dots, \pi_N^{(i)}) = \frac{1}{\alpha_i} \pi_1 (I - \bar{P}_D),$$

onde

$$\pi_k^{(i)} = (\pi_{k1}^{(i)}, \dots, \pi_{km}^{(i)})$$

e

$$\alpha_i = \alpha_a + \alpha_f.$$

(f) *Processo externo*

Se $\pi^{(e)}$ é a distribuição estacionária do processo $\{(X_n^{(e)}, Z_n^{(e)})\}$ no espaço irredutível $\mathcal{L}^{(e)} X E = \mathcal{L} X E$, então

$$\pi^{(e)} = (\pi_0^{(e)}, \dots, \pi_N^{(e)}) = \frac{1}{\alpha_e} \pi (P_A + P_D) = \frac{1}{\alpha_e} \pi (I - P_F),$$

onde

$$\pi_k^{(e)} = (\pi_{k1}^{(e)}, \dots, \pi_{km}^{(e)})$$

e

$$\alpha_e = \alpha_a + \alpha_d.$$

Prova:

(a) A partir do Teorema 2.4(a) temos que $\pi^{(a)}$ é o único vetor de probabilidades tal que

$$\pi^{(a)}(I - \bar{P}^{(a)}) = \underline{0}^* \quad (2.49)$$

e

$$\pi^{(a)}e = 1, \quad (2.50)$$

onde

$$I - \bar{P}^{(a)} = (I - \bar{P}_F - \bar{P}_D)^{-1}(I - \bar{P}_F - \bar{P}_D - \bar{P}_A - ZT').$$

Mas, analisando a primeira forma particionada da matriz P concluímos que

$$\bar{P} = \bar{P}_A + \bar{P}_D + \bar{P}_F \quad (2.51)$$

e então também podemos escrever

$$I - \bar{P}^{(a)} = (I - \bar{P}_F - \bar{P}_D)^{-1}(I - \bar{P} - ZT').$$

Substituindo em (2.49):

$$\pi^{(a)}(I - \bar{P}_F - \bar{P}_D)^{-1}(I - \bar{P} - ZT') = \underline{0}^*.$$

Mas, como no Teorema 2.5(a) obtivemos que π_1 é o único vetor tal que

$$\pi_1(I - \bar{P} - ZT') = \underline{0}^*, \quad (2.52)$$

com $\pi_1(e_2 + Ze_1) = 1$, podemos concluir que

$$\alpha_a \pi^{(a)}(I - \bar{P}_F - \bar{P}_D)^{-1} = \pi_1,$$

ou

$$\pi^{(a)} = \frac{1}{\alpha_a} \pi_1 (I - \bar{P}_F - \bar{P}_D),$$

onde α_a é uma constante.

Notando que a partir de (2.51) e (2.52) é possível escrever

$$\pi_1(I - \bar{P}) = \pi_1 ZT' \quad \text{e} \quad \bar{P}_F + \bar{P}_D = \bar{P} - \bar{P}_A,$$

obtemos o resultado

$$\pi^{(a)} = \frac{1}{\alpha_a} \pi_1 (I - \bar{P} + \bar{P}_A) = \frac{1}{\alpha_a} \pi_1 (ZT' + \bar{P}_A).$$

α_a é determinada a a partir da equação (2.50):

$$\alpha_a = \pi_1(\bar{P}_A + ZT')e, \quad \text{ou seja,}$$

$$\alpha_a = \pi_1(De_1 + Ge_1) + \pi_2 Ge_1 + \cdots + \pi_{N-1} Ge_1.$$

Utilizando a expressão (2.38) obtemos a igualdade desejada:

$$\alpha_a = \pi_0 e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i Ge_1.$$

(b) Do Teorema 2.4(b), após simplificações e utilização da igualdade $\bar{\bar{P}} = \bar{\bar{P}}_A + \bar{\bar{P}}_F + \bar{\bar{P}}_D$, obtemos

$$(I - \bar{\bar{P}}^{(d)}) = (I - \bar{\bar{P}}_A - \bar{\bar{P}}_F)^{-1} (I - \bar{\bar{P}} - V(I - L)^{-1}U').$$

Como $\pi^{(d)}$ é o único vetor de probabilidades tal que

$$\pi^{(d)}(I - \bar{\bar{P}}^{(d)}) = \underline{0}^{*'} \quad \text{e} \quad \pi^{(d)}e = 1$$

e do Teorema 2.5(b) resulta que π_{N-1} é o único vetor tal que

$$\pi_{N-1}(I - \bar{\bar{P}} - V(I - L)^{-1}U') = \underline{0}^{*'}, \quad \text{com} \quad \pi_{N-1}(e_2 + V(I - L)^{-1}e_1) = 1,$$

concluimos a partir da expressão para $I - \overline{\overline{P}}^{(d)}$ que

$$\alpha_d \pi^{(d)} (I - \overline{\overline{P}}_A - \overline{\overline{P}}_F)^{-1} = \pi_{N-1},$$

ou seja,

$$\pi^{(d)} = \frac{1}{\alpha_d} \pi_{N-1} (I - \overline{\overline{P}}_A - \overline{\overline{P}}_F),$$

onde α_d é uma constante.

Observando que a partir das equações anteriores é possível escrever

$$I - \overline{\overline{P}}_A - \overline{\overline{P}}_F = I - \overline{\overline{P}} + \overline{\overline{P}}_D$$

e

$$\pi_{N-1} (I - \overline{\overline{P}}) = \pi_{N-1} V (I - L)^{-1} U',$$

obtemos

$$\pi^{(d)} = \frac{1}{\alpha_d} \pi_{N-1} (V (I - L)^{-1} U' + \overline{\overline{P}}_D).$$

A determinação da constante α_d é feita a partir da equação $\pi^{(d)} e = 1$:

$$\alpha_d = \pi_{N-1} (\overline{\overline{P}}_D + V (I - L)^{-1} U') e,$$

equivalente a

$$\alpha_d = \pi_1 D e_1 + \pi_2 D e_1 + \cdots + \pi_{N-1} [D e_1 + G (I - L)^{-1} K e_1].$$

Utilizando a equação (2.42) obtemos:

$$\alpha_d = \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i D e_1 + \pi_N K e_1.$$

(c) A partir do Teorema 2.4(c) obtemos

$$I - \overline{P}^{(f)} = (I - \overline{P}_A - \overline{P}_D - ZT')^{-1} (I - \overline{P} - ZT').$$

Utilizando o resultado que $\pi^{(f)}$ é o único vetor de probabilidades tal que

$$\pi^{(f)}(I - \bar{P}^{(f)}) = \underline{0}^* \quad \text{e} \quad \pi^{(f)}e = 1,$$

e o Teorema 2.5(a), temos:

$$\alpha_f \pi^{(f)}(I - \bar{P}_A - \bar{P}_D - ZT')^{-1} = \pi_1,$$

ou seja,

$$\pi^{(f)} = \frac{1}{\alpha_f} \pi_1 (I - \bar{P}_A - \bar{P}_D - ZT') = \frac{1}{\alpha_f} \pi_1 \bar{P}_F.$$

Utilizando a igualdade $\pi^{(f)}e = 1$, temos

$$\alpha_f = \pi_1 \bar{P}_F e = \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i F e_1 + \pi_N L e_1.$$

(d) A partir dos Teoremas 2.3(d) e 2.4(d) obtemos:

$$\pi^{(o)}(I - P^{(o)}) = \underline{0}^*, \quad \text{ou,}$$

$$\pi^{(o)}(I - P_A)^{-1}(I - P) = \underline{0}^*.$$

Como π é o único vetor de probabilidades tal que $\pi(I - P) = \underline{0}^*$ e $\pi e = 1$, vem:

$$\alpha_o \pi^{(o)}(I - P_A)^{-1} = \pi, \quad \text{ou,}$$

$$\pi_o = \frac{1}{\alpha_o} \pi(I - P_A) = \frac{1}{\alpha_o} \pi(P_D + P_F).$$

α_o é determinada a partir de $\pi^{(o)}e = 1$:

$$\alpha_o = \pi(P_D + P_F)e =$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \pi_i D e_1 + \pi_N K e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i F e_1 + \pi_N L e_1 =$$

$$\alpha_d + \alpha_f.$$

(e) Do Teorema 2.4(e):

$$I - \overline{P}^{(i)} = (I - \overline{P}_D)^{-1}(I - \overline{P} - ZT').$$

Já que $\pi^{(i)}$ é o único vetor tal que $\pi^{(i)}(I - \overline{P}^{(i)}) = \underline{0}^*$ e $\pi^{(i)}e = 1$, a partir do Teorema 2.5(a) obtemos:

$$\alpha_i \pi^{(i)}(I - \overline{P}_D)^{-1} = \underline{1}_1,$$

ou seja,

$$\pi^{(i)} = \frac{1}{\alpha_i} \underline{1}_1(I - \overline{P}_D).$$

Da equação $\pi^{(i)}e = 1$, resulta:

$$\alpha_i = \underline{1}_1(I - \overline{P}_D)e,$$

ou,

$$\alpha_i = \pi_1 e_1 + \pi_2(I - D)e_1 + \cdots + \pi_{N-1}(I - D)e_1 + \pi_N(I - K)e_1.$$

Portanto,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^N \pi_j e_1 - \sum_{j=2}^{N-1} \pi_j D e_1 - \pi_N K e_1. \quad (2.53)$$

A partir das equações (2.39), (2.40), (2.41) e (2.42) podemos escrever, respectivamente,

$$\pi_2 D e_1 = \pi_1 e_1 - \pi_0 e_1 - \pi_1 F e_1; \quad (2.54)$$

$$\pi_i D e_1 = \pi_{i-1} e_1 - \pi_{i-2} G e_1 - \pi_{i-1} F e_1, \quad 3 \leq i \leq N-1; \quad (2.55)$$

$$\pi_N K e_1 = \pi_{N-1} e_1 - \pi_{N-2} G e_1 - \pi_{N-1} F e_1; \quad (2.56)$$

$$\pi_N L e_1 = \pi_N e_1 - \pi_{N-1} G e_1. \quad (2.57)$$

Substituindo as equações (2.54) a (2.57) em (2.53) obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha_i = & \pi_1 e_1 + \sum_{j=2}^{N-1} \pi_j e_1 + \pi_N L e_1 + \pi_{N-1} G e_1 - \pi_1 e_1 + \\ & \pi_0 e_1 + \pi_1 F e_1 - \sum_{j=3}^{N-1} \pi_{j-1} e_1 + \sum_{j=3}^{N-1} \pi_{j-2} G e_1 + \\ & \sum_{j=3}^{N-1} \pi_{j-1} F e_1 - \pi_{N-1} e_1 + \pi_{N-2} G e_1 + \pi_{N-1} F e_1, \end{aligned}$$

ou,

$$\alpha_i = \pi_0 e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i G e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i F e_1 + \pi_N L e_1,$$

ou seja,

$$\alpha_i = \alpha_a + \alpha_f.$$

(f) Dos Teoremas 2.3(f) e 2.4(f):

$$\pi^{(e)}(I - P^{(e)}) = \underline{0}^{'},$$

ou,

$$\pi^{(e)}(I - P_F)^{-1}(I - P) = \underline{0}^{'}$$

Aplicando as equações $\pi(I - P) = \underline{0}^{'}$ e $\pi e = 1$:

$$\alpha_e \pi^{(e)}(I - P_F)^{-1} = \pi,$$

ou seja,

$$\pi^{(e)} = \frac{1}{\alpha_e} \pi(I - P_F) = \frac{1}{\alpha_e} \pi(P_A + P_D),$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \pi(P_A + P_D)e = \\ &= \pi_0 e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i G e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i D e_1 + \pi_N K e_1 = \\ &= \alpha_a + \alpha_d. \end{aligned}$$

□

Observe que fazendo $m = 1$ obtemos a equivalência entre o Teorema 2.6 e o Teorema 7 de Hunter [13].

É importante ressaltar que o Teorema 2.6 é válido apenas para $N < \infty$, quando é possível somar as séries de matrizes como nos Teoremas 2.3 e 2.4.

A seguir vamos mostrar que $\alpha_a = \alpha_d$. Para isso devemos, em primeiro lugar, reescrever as equações equivalentes à equação (2.36):

$$\begin{aligned}\pi_0 - \pi_1 D &= 0, \\ \pi_0 + \pi_1(F - I) + \pi_2 D &= 0, \\ \pi_1 G + \pi_2(F - I) + \pi_3 D &= 0, \\ \dots \\ \pi_{i-1} G + \pi_i(F - I) + \pi_{i+1} D &= 0, \\ \dots \\ \pi_{N-2} G + \pi_{N-1}(F - I) + \pi_N K &= 0, \\ \pi_{N-1} G + \pi_N(L - I) &= 0.\end{aligned}$$

Lembrando que $(D + F + G)e_1 = e_1$, somamos as primeiras $i + 1$ equações e a seguir multiplicamos por e_1 para obter:

$$\pi_i G e_1 = \pi_{i+1} D e_1, \quad i \leq N - 2. \quad (2.58)$$

Somando as N primeiras equações e também multiplicando por e_1 , obtemos:

$$\pi_{N-1} G e_1 = \pi_N K e_1. \quad (2.59)$$

Mas, de acordo com o Teorema 2.6(a):

$$\begin{aligned}\alpha_a &= \pi_0 e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i G e_1 = \\ &= \pi_0 e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i D e_1 + \pi_N K e_1,\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é resultante da aplicação das equações (2.58) e (2.59). O resultado desejado é consequência do emprego da equação $\pi_0 - \pi_1 D = 0$ ou, o que é equivalente, $\pi_0 e_1 = \pi_1 D e_1$.

Mantendo a mesma notação utilizada por Hunter [13], vamos definir $\tau \equiv \alpha_a \equiv \alpha_d$ e $\sigma \equiv \alpha_f$. Como $\alpha_a + \alpha_f + \alpha_d = 1$, é fácil verificar que $\alpha_o = \alpha_i = \sigma + \tau = 1 - \tau$ e $\alpha_e = 2\tau = 1 - \sigma$. Na próxima seção apresentaremos uma interpretação para os parâmetros τ e σ .

Introduziremos agora um teorema que apresenta expressões para as formas das distribuições estacionárias imersas em termos da distribuição $\{\pi_i\}$.

Teorema 2.7 (a) *Processo de chegada*

$$\pi^{(a)} = \frac{1}{\tau} [\pi_1 D \ \pi_1 G \ \pi_2 G \ \dots \ \pi_{N-1} G];$$

$$\pi_i^{(a)} e_1 = \frac{1}{\tau} \pi_i D e_1, \ 1 \leq i \leq N-1;$$

$$\pi_N^{(a)} e_1 = \frac{1}{\tau} \pi_N K e_1.$$

(b) *Processo de partida*

$$\pi^{(d)} = \frac{1}{\tau} [\pi_1 D \ \pi_2 D \ \dots \ \pi_{N-1} D \ \pi_{N-1} G (I - L)^{-1} K];$$

$$\pi_0^{(d)} e_1 = \frac{1}{\tau} \pi_0 e_1;$$

$$\pi_i^{(d)} e_1 = \frac{1}{\tau} \pi_i G e_1, \ 1 \leq i \leq N-1.$$

(c) *Processo de "feedback"*

$$\pi^{(f)} = \frac{1}{\sigma} [\pi_1 F \ \pi_2 F \ \dots \ \pi_{N-1} F \ \pi_N L];$$

$$\pi_i^{(f)} e_1 = \frac{1}{\sigma} \pi_i F e_1, \ 1 \leq i \leq N-1;$$

$$\pi_N^{(f)} e_1 = \frac{1}{\sigma} \pi_N L e_1.$$

(d) *Processo de saída*

$$\pi^{(o)} = \frac{1}{1 - \tau} [\pi_1 D \ \pi_1 F + \pi_2 D \ \pi_2 F + \pi_3 D \ \dots \ \pi_{N-1} F + \pi_N K \ \pi_N L];$$

$$\begin{aligned}\pi_0^{(o)} e_1 &= \frac{1}{1-\tau} \pi_0 e_1; \\ \pi_i^{(o)} e_1 &= \frac{1}{1-\tau} \pi_i (I - D) e_1, \quad 1 \leq i \leq N-1; \\ \pi_N^{(o)} e_1 &= \frac{1}{1-\tau} \pi_N (I - K) e_1.\end{aligned}$$

(e) *Processo de entrada*

$$\begin{aligned}\pi^{(i)} &= \frac{1}{1-\tau} [\pi_1 - \pi_2 D \pi_2 - \pi_3 D \dots \pi_{N-1} - \pi_N K \pi_N]; \\ \pi_i^{(i)} e_1 &= \frac{1}{1-\tau} \pi_i (I - G) e_1, \quad 1 \leq i \leq N-1; \\ \pi_N^{(i)} e_1 &= \frac{1}{1-\tau} \pi_N e_1.\end{aligned}$$

(f) *Processo externo*

$$\begin{aligned}\pi^{(e)} &= \frac{1}{2\tau} [\pi_1 D \pi_0 + \pi_2 D \pi_1 G + \pi_3 D \dots \pi_{N-2} G + \pi_N K \pi_{N-1} G]; \\ \pi_0^{(e)} e_1 &= \frac{1}{2\tau} \pi_0 e_1; \\ \pi_i^{(e)} e_1 &= \frac{1}{2\tau} \pi_i (I - F) e_1, \quad 1 \leq i \leq N-1; \\ \pi_N^{(e)} e_1 &= \frac{1}{2\tau} \pi_N (I - L) e_1.\end{aligned}$$

Prova:

A demonstração do Teorema 2.7 é simples. Basta substituir as expressões para cada matriz que aparece no Teorema 2.6 e realizar as operações necessárias para obter os resultados para $\pi^{(\theta)}$, $\theta = a, d, f, o, i, e$. As expressões para $\pi_i^{(\theta)} e_1$ resultam do emprego das equações (2.38) a (2.42). $\square$

Como o Teorema 2.7 é uma consequência do Teorema 2.6 seus resultados também são válidos apenas para $N < \infty$.

2.6 Relações entre as Distribuições Estacionárias

Nesta seção obteremos, em primeiro lugar, uma interpretação para os parâmetros σ e τ . Para isso devemos observar que, se o sistema está operando sob condições estacionárias, π_{ij} representa a proporção do tempo em que $\{(X_n, Z_n)\}$ está no estado (i, j) imediatamente após uma transição básica (chegada, partida, ou “feedback”) e, portanto, imediatamente antes da próxima transição, para $i \in \mathcal{L}$ e $j \in E$.

Se $\{(X_n, Z_n)\} = (i, j)$, com probabilidade π_{ij} , a próxima transição será uma chegada com probabilidade g_{jj} , um “feedback” com probabilidade $\sum_{x=1}^m f_{jx}$ ou uma partida com probabilidade $\sum_{x=1}^m d_{jx}$, para $1 \leq i \leq N-1$. Se $i = 0$, a próxima transição será uma chegada com probabilidade 1. Se $i = N$, a próxima transição será um “feedback” com probabilidade $\sum_{x=1}^m l_{jx}$ ou uma partida com probabilidade $\sum_{x=1}^m k_{jx}$. Note que foi utilizada a notação introduzida na página 18.

Então, as proporções das vezes em que ocorre uma chegada, um “feedback” ou uma partida são, respectivamente:

$$\sum_{j=1}^m \pi_{0j} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N-1} \pi_{ij} g_{jj} = \pi_0 e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i G e_1 = \alpha_a = \tau; \quad (2.60)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N-1} \pi_{ij} \sum_{x=1}^m f_{jx} + \sum_{j=1}^m \pi_{Nj} \sum_{x=1}^m l_{jx} = \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i F e_1 + \pi_N L e_1 = \alpha_f = \sigma; \quad (2.61)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N-1} \pi_{ij} \sum_{x=1}^m d_{jx} + \sum_{j=1}^m \pi_{Nj} \sum_{x=1}^m k_{jx} = \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i D e_1 + \pi_N K e_1 = \alpha_d = \tau. \quad (2.62)$$

Obtivemos então uma interpretação para os parâmetros τ e σ . Portanto, as proporções das vezes em que ocorre uma saída, uma entrada, uma transição observável externamente ou uma transição básica são, respectivamente,

$$\alpha_o = \alpha_f + \alpha_d = \sigma + \tau ; \alpha_i = \alpha_f + \alpha_a = \sigma + \tau ; \alpha_e = \alpha_a + \alpha_d = 2\tau \text{ e}$$

$$\alpha_a + \alpha_d + \alpha_f = 2\tau + \sigma = 1.$$

Estes resultados são idênticos aos obtidos por Hunter [13], como já era esperado, já que aqui nos preocupamos apenas com as alterações relacionadas ao tamanho da fila e não discriminamos os tipos dos clientes. Os Teoremas 2.8 e 2.9 que apresentaremos a seguir representam uma continuação desse tipo de abordagem ao sistema e conseqüentemente são análogos aos Teoremas 9 e 10 de Hunter [13].

Teorema 2.8

$$\pi_i e_1 = (\tau \pi_i^{(a)} + \sigma \pi_i^{(f)} + \tau \pi_i^{(d)}) e_1.$$

Observe que neste Teorema estamos incluindo somente aquelas probabilidades que são definidas para cada valor particular de i : π_i é definido para $0 \leq i \leq N$, $\pi_i^{(a)}$ e $\pi_i^{(f)}$ para $1 \leq i \leq N$ e $\pi_i^{(d)}$ para $0 \leq i \leq N - 1$.

Prova:

O resultado é obtido a partir do Teorema 2.7(a), (b), (c), analisando-se separadamente os três casos: $i = 0$, $1 \leq i \leq N - 1$ e $i = N$.

Por exemplo, para $1 \leq i \leq N - 1$, podemos escrever:

$$\tau \pi_i^{(a)} e_1 = \pi_i D e_1;$$

$$\tau \pi_i^{(d)} e_1 = \pi_i G e_1;$$

$$\sigma \pi_i^{(f)} e_1 = \pi_i F e_1.$$

Somando as três últimas equações obtemos o resultado desejado:

$$[\tau\pi_i^{(a)} + \tau\pi_i^{(d)} + \sigma\pi_i^{(f)}]e_1 = \pi_i[D + G + F]e_1 = \pi_i e_1.$$

□

Lembrando das interpretações para τ e σ , verificamos que o Teorema 2.8 nos diz que a proporção das vezes em que o sistema tem i clientes imediatamente após uma transição básica é igual à média ponderada das proporções dos instantes em que há i clientes no sistema imediatamente após uma transição do tipo θ , $\theta = a, f, d$.

Teorema 2.9 (a)

$$\pi_i^{(i)} e_1 = \left[\frac{\tau}{\sigma + \tau} \pi_i^{(a)} + \frac{\sigma}{\sigma + \tau} \pi_i^{(f)} \right] e_1.$$

(b)

$$\pi_i^{(o)} e_1 = \left[\frac{\tau}{\sigma + \tau} \pi_i^{(d)} + \frac{\sigma}{\sigma + \tau} \pi_i^{(f)} \right] e_1.$$

(c)

$$\pi_i^{(e)} e_1 = \frac{1}{2} [\pi_i^{(a)} + \pi_i^{(d)}] e_1.$$

Prova:

Este Teorema pode ser facilmente provado a partir dos Teoremas 2.7 e 2.8 e da igualdade $1 - \tau = \sigma + \tau$, novamente analisando-se separadamente os casos em que $i = 0$, $1 \leq i \leq N - 1$ e $i = N$, com o cuidado de incluir apenas as probabilidades que são definidas para cada valor considerado de i . □

Observamos que o Teorema 2.9 é imediato, a partir das interpretações para α_θ e $\pi_i^{(\theta)}$, $\theta = i, o, e$.

Em muitos casos estamos interessados em observar o processo do comprimento da fila imediatamente antes de uma transição. Definimos então as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned}
X_n^{(-)} &= \text{número de clientes no sistema imediatamente antes da} \\
&\quad \text{n-ésima transição.} \\
X_n^{(\theta-)} &= \text{número de clientes no sistema imediatamente antes da} \\
&\quad \text{n-ésima transição do tipo } \theta, \theta = a, d, f, i, o, e. \\
Z_n^{(-)} &= \text{tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de } T_n. \\
Z_n^{(\theta-)} &= \text{tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de} \\
&\quad T_n^{(\theta)}, \theta = a, d, f, i, o, e.
\end{aligned}$$

Portanto, desejamos estudar os processos $\{(X_n^{(-)}, Z_n^{(-)}, T_n)\}$ e $\{(X_n^{(\theta-)}, Z_n^{(\theta-)}, T_n^{(\theta)})\}$, $\theta = a, d, f, i, o, e$.

É fácil verificar que é possível estabelecer as seguintes relações entre os estados de cada processo imerso imediatamente antes e imediatamente após as transições:

- Processo de Chegada:

$$(X_n^{(a-)}, Z_n^{(a-)}) = (X_n^{(a)} - 1, Z_n^{(a)}), \quad (2.63)$$

ou,

$$(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)}) = (X_n^{(a-)} + 1, Z_n^{(a-)}). \quad (2.64)$$

Note que para obtermos o número de clientes no sistema imediatamente antes da n-ésima chegada devemos subtrair o cliente que chega em $T_n^{(a)}$ do número de clientes presentes no sistema após a n-ésima chegada. Como em $T_n^{(a)}$ não ocorre término de serviço, o tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes ou exatamente em $T_n^{(a)}$ coincide com o tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de $T_n^{(a)}$.

- Processo de Partida:

$$(X_n^{(d-)}, Z_n^{(d-)}) = (X_n^{(d)} + 1, l), \text{ com probabilidade } r(l, Z_n^{(d)}), \quad (2.65)$$

ou,

$$(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)}) = (X_n^{(d-)} - 1, l), \text{ com probabilidade } r(Z_n^{(d-)}, l). \quad (2.66)$$

Na equação (2.65), para obtermos o número de clientes no sistema imediatamente antes da n -ésima partida, devemos somar o cliente que parte em $T_n^{(d)}$ ao número de clientes presentes no sistema após a n -ésima partida. Em $T_n^{(d)}$ ocorre um término de serviço e então, se o último cliente cujo serviço foi completado antes de $T_n^{(d)}$ é do tipo l , para que o tipo do cliente cujo serviço é completado exatamente em $T_n^{(d)}$ seja dado por $Z_n^{(d)}$, deve ter ocorrido um atendimento de freguês do tipo $Z_n^{(d)}$ após um freguês do tipo l . Em nosso modelo esse evento ocorre com probabilidade $r(l, Z_n^{(d)})$. A equação (2.66) é obtida a partir de uma argumentação análoga.

- Processo de “Feedback”:

$$(X_n^{(f-)}, Z_n^{(f-)}) = (X_n^{(f)}, l), \text{ com probabilidade } r(l, Z_n^{(f)}), \quad (2.67)$$

ou,

$$(X_n^{(f)}, Z_n^{(f)}) = (X_n^{(f-)}, l), \text{ com probabilidade } r(Z_n^{(f-)}, l). \quad (2.68)$$

Já que a ocorrência de um “feedback” não altera o número de clientes no sistema, podemos escrever $X_n^{(f-)} = X_n^{(f)}$. Na equação (2.68) a relação entre $Z_n^{(f)}$ e $Z_n^{(f-)}$ resulta da observação de que em $T_n^{(f)}$ ocorre um término de atendimento. Então, se o cliente cujo serviço é completado exatamente em $T_n^{(f)}$ é do tipo l , para que o tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de $T_n^{(f)}$ seja dado por $Z_n^{(f-)}$, deve ter ocorrido um atendimento de freguês do tipo l após um freguês do tipo $Z_n^{(f-)}$. Em nosso modelo este evento tem probabilidade $r(Z_n^{(f-)}, l)$. A relação entre $Z_n^{(f-)}$ e $Z_n^{(f)}$ apresentada na equação (2.67) é o resultado de uma análise similar.

• Processo de Entrada:

$$(X_n^{(i-)}, Z_n^{(i-)}) = \begin{cases} (X_n^{(i)} - 1, Z_n^{(i)}), & \text{se } T_n^{(i)} \in \{T_k^{(a)}\}, \\ (X_n^{(i)}, l), & \text{com probabilidade } r(l, Z_n^{(i)}) \\ & \text{se } T_n^{(i)} \in \{T_k^{(f)}\}, \end{cases} \quad (2.69)$$

ou,

$$(X_n^{(i)}, Z_n^{(i)}) = \begin{cases} (X_n^{(i-)} + 1, Z_n^{(i-)}), & \text{se } T_n^{(i)} \in \{T_k^{(a)}\}, \\ (X_n^{(i-)}, l), & \text{com probabilidade } r(Z_n^{(i-)}, l) \\ & \text{se } T_n^{(i)} \in \{T_k^{(f)}\}. \end{cases} \quad (2.70)$$

No caso do processo de entrada devemos analisar separadamente as situações em que a n -ésima entrada corresponde a uma chegada ou a um “feedback”. Procedendo deste modo, as relações entre $(X_n^{(i)}, Z_n^{(i)})$ e $(X_n^{(i-)}, Z_n^{(i-)})$ são uma consequência imediata dos resultados já apresentados para os processos de chegada e de “feedback”.

• Processo de Saída:

$$(X_n^{(o-)}, Z_n^{(o-)}) = \begin{cases} (X_n^{(o)} + 1, l), & \text{com probabilidade } r(l, Z_n^{(o)}) \\ & \text{se } T_n^{(o)} \in \{T_k^{(d)}\}, \\ (X_n^{(o)}, l), & \text{com probabilidade } r(l, Z_n^{(o)}) \\ & \text{se } T_n^{(o)} \in \{T_k^{(f)}\}, \end{cases} \quad (2.71)$$

ou,

$$(X_n^{(o)}, Z_n^{(o)}) = \begin{cases} (X_n^{(o-)} - 1, l), & \text{com probabilidade } r(Z_n^{(o-)}, l) \\ & \text{se } T_n^{(o)} \in \{T_k^{(d)}\}, \\ (X_n^{(o-)}, l), & \text{com probabilidade } r(Z_n^{(o-)}, l) \\ & \text{se } T_n^{(o)} \in \{T_k^{(f)}\}. \end{cases} \quad (2.72)$$

Para o processo de saída devemos considerar separadamente os casos em que a n -ésima saída corresponde a uma partida ou a um "feedback" e estabelecer as relações entre $(X_n^{(o)}, Z_n^{(o)})$ e $(X_n^{(o-)}, Z_n^{(o-)})$ a partir das equações (2.65) a (2.68).

• Processo Externo:

$$(X_n^{(e-)}, Z_n^{(e-)}) = \begin{cases} (X_n^{(e)} - 1, Z_n^{(e)}), & \text{se } T_n^{(e)} \in \{T_k^{(a)}\}, \\ (X_n^{(e)} + 1, l), & \text{com probabilidade } r(l, Z_n^{(e)}) \\ & \text{se } T_n^{(e)} \in \{T_k^{(d)}\}, \end{cases} \quad (2.73)$$

ou,

$$(X_n^{(e)}, Z_n^{(e)}) = \begin{cases} (X_n^{(e-)} + 1, Z_n^{(e-)}), & \text{se } T_n^{(e)} \in \{T_k^{(a)}\}, \\ (X_n^{(e-)} - 1, l), & \text{com probabilidade } r(Z_n^{(e-)}, l) \\ & \text{se } T_n^{(e)} \in \{T_k^{(d)}\}. \end{cases} \quad (2.74)$$

Novamente, devemos considerar separadamente as situações em que a n -ésima transição externa corresponde a uma chegada ou a uma partida e estabelecer as relações entre $(X_n^{(e)}, Z_n^{(e)})$ e $(X_n^{(e-)}, Z_n^{(e-)})$ a partir das equações (2.63) a (2.66).

• Processo Básico:

$$(X_n^{(-)}, Z_n^{(-)}) = (X_{n-1}, Z_{n-1}). \quad (2.75)$$

Para o processo básico devemos observar que não ocorre nenhuma transição entre os instantes T_{n-1} e T_n e portanto podemos escrever $X_n^{(-)} = X_{n-1}$ e $Z_n^{(-)} = Z_{n-1}$.

A partir dessas relações é possível determinar facilmente as distribuições estacionárias das cadeias $\{(X_n^{(a-)}, Z_n^{(a-)})\}$, $\{(X_n^{(d-)}, Z_n^{(d-)})\}$, $\{(X_n^{(f-)}, Z_n^{(f-)})\}$ e $\{(X_n^{(-)}, Z_n^{(-)})\}$. Temos o seguinte Teorema.

Teorema 2.10 (a) *Processo de Chegada:*

$$\pi^{(a-)}(i, j) = \pi^{(a)}(i + 1, j), \quad 0 \leq i \leq N - 1; \quad j \in E;$$

ou,

$$\pi^{(a)}(i, j) = \pi^{(a-)}(i - 1, j), \quad 1 \leq i \leq N; \quad j \in E.$$

(b) *Processo de Partida:*

$$\pi^{(d-)}(i, j) = \sum_{l \in E} \pi^{(d)}(i - 1, l) r(j, l), \quad 1 \leq i \leq N; \quad j \in E;$$

ou,

$$\pi^{(d)}(i, j) = \sum_{l \in E} \pi^{(d-)}(i + 1, l) r(l, j), \quad 0 \leq i \leq N - 1; \quad j \in E.$$

(c) *Processo de "Feedback":*

$$\pi^{(f-)}(i, j) = \sum_{l \in E} \pi^{(f)}(i, l) r(j, l), \quad 1 \leq i \leq N; \quad j \in E;$$

ou,

$$\pi^{(f)}(i, j) = \sum_{l \in E} \pi^{(f-)}(i, l) r(l, j), \quad 1 \leq i \leq N; \quad j \in E.$$

(d) *Processo Básico:*

$$\pi^{(-)}(i, j) = \pi(i, j).$$

Note que não é possível estabelecer uma relação entre $\pi^{(\theta)}(i, j)$ e $\pi^{(\theta-)}(i, j)$ para $\theta = i, o, e$ porque a dependência entre $\{(X_n^{(\theta)}, Z_n^{(\theta)})\}$ e $\{(X_n^{(\theta-)}, Z_n^{(\theta-)})\}$ envolve o tipo da transição básica (a, d ou f) que ocorre em $T_n^{(\theta)}$, que é desconhecido.

O Teorema 2.10 também é válido para $N = \infty$, desde que a cadeia imersa seja recorrente positiva.

Teorema 2.11

$$\pi_i^{(a-)} e_1 = \pi_i^{(d)} e_1, \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

Prova:

A partir dos Teoremas 2.10(a), 2.7(a) e (b) e da equação (2.44) obtemos:

$$\pi_0^{(a-)} e_1 = \pi_1^{(a)} e_1 = \frac{1}{\tau} \pi_1 D e_1 = \frac{1}{\tau} \pi_0 e_1 = \pi_0^{(d)} e_1$$

e, para $1 \leq i \leq N-1$,

$$\pi_i^{(a-)} e_1 = \pi_{i+1}^{(a)} e_1 = \frac{1}{\tau} \pi_i G e_1 = \pi_i^{(d)} e_1.$$

□

Portanto, a distribuição limite do comprimento da fila vista por um cliente que chega é a mesma deixada por um cliente que parte, que é o mesmo resultado obtido por Hunter [13].

Capítulo 3

Processos Semi-Markovianos em Filas $M/M^{ij}/1/N$

3.1 Descrição do Modelo

Neste capítulo estudaremos, em primeiro lugar, as propriedades dos Processos Semi-Markovianos associados a cada Processo de Renovação Markoviano imerso em uma fila $M/M^{ij}/1/N$ sem “feedback”. Esta fila corresponde a um caso particular do modelo descrito no capítulo 2, obtido quando fazemos $p = 0$. A seguir, na seção 3.5, trataremos da fila com “feedback”.

No caso da fila sem “feedback” os tipos de transições envolvidas são apenas chegadas e partidas e as variáveis de interesse são:

$X(t)$	=	número de fregueses no sistema no instante t .
$Z(t)$	=	tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes ou exatamente no instante t .
$T_n^{(a)}$	=	tempo de ocorrência da n -ésima chegada ao sistema.
$T_n^{(d)}$	=	tempo de ocorrência da n -ésima partida do sistema.
T_n	=	tempo de ocorrência da n -ésima transição no sistema: $\{T_n\} = \{T_n^{(a)}\} \cup \{T_n^{(d)}\}$.
$X_n = X(T_n)$	=	número de clientes no sistema imediatamente após a n -ésima transição.
$X_n^{(\theta)} = X(T_n^{(\theta)})$	=	número de clientes no sistema imediatamente após a n -ésima transição do tipo θ , $\theta = a, d$.
$Z_n = Z(T_n)$	=	tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de T_n ou exatamente em T_n .
$Z_n^{(\theta)} = Z(T_n^{(\theta)})$	=	tipo do último cliente cujo serviço foi completado antes de $T_n^{(\theta)}$ ou exatamente em $T_n^{(\theta)}$, $\theta = a, d$.

De acordo com a caracterização do sistema e das variáveis envolvidas e também a partir da argumentação apresentada nas páginas 6 e 7, concluímos que $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com espaço de estados $\mathcal{LXE} = \{0, 1, \dots, N\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ e núcleo $Q_X(t)$, cujo $((i, w), (j, z))$ -ésimo elemento é dado por:

$$\begin{aligned}
Q((i, w), (j, z), t) = & \\
& P\{X_{n+1} = j, Z_{n+1} = z, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, X_1, \dots, X_n = i, \\
& Z_0, Z_1, \dots, Z_n = w, T_0, T_1, \dots, T_n\} = \\
& P\{X_{n+1} = j, Z_{n+1} = z, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n = i, Z_n = w\}. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Como estamos supondo que cada chegada corresponde à incorporação de um único freguês ao sistema e que no máximo um freguês pode sair do

sistema em qualquer instante de tempo, os únicos elementos do núcleo diferentes de zero são:

$$\begin{aligned} Q((i, w), (i + 1, z), t), & \quad 0 \leq i \leq N - 1; \quad w = z \in E; \\ Q((i, w), (i - 1, z), t), & \quad 1 \leq i \leq N; \quad w, z \in E. \end{aligned}$$

Portanto, o núcleo do processo $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é uma matriz $m(N + 1) \times m(N + 1)$ definida por:

$$Q_X(t) = \begin{bmatrix} 0 & C(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ D^*(t) & 0 & G(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^*(t) & 0 & G(t) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & G(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D^*(t) & 0 & G(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K^*(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde 0 é a matriz nula $m \times m$, $C(t)$ e $G(t)$ são definidas na página 8 e $D^*(t)$ e $K^*(t)$ são matrizes $m \times m$ dadas por:

$$D^*(t) = D(t) + F(t) = [r_{wz} v_{wz} H_{wz}(t)], \quad w, z \in E; \quad (3.3)$$

$$K^*(t) = K(t) + L(t) = [r_{wz} J_{wz}(t)], \quad w, z \in E; \quad (3.4)$$

sendo v_{wz} , $H_{wz}(t)$ e $J_{wz}(t)$ definidas na página 9.

Se $N = \infty$ a matriz $K^*(t)$ não aparece na estrutura de $Q_X(t)$.

Novamente destacamos que se $N < \infty$ a Cadeia de Markov imersa $\{(X_n, Z_n)\}$ é irreduzível, aperiódica e recorrente positiva, o que garante automaticamente que $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é irreduzível e recorrente positivo. A partir da análise das expressões para $Q((i, w), (j, z), t)$ é possível concluir que

$\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ também é aperiódico. Se $N = \infty$ estamos considerando que a condição para que $\{(X_n, Z_n)\}$ seja recorrente positiva está satisfeita.

Antes de tratarmos dos Processos Semi-Markovianos apresentaremos alguns resultados referentes aos Processos de Renovação Markovianos e Cadeias de Markov imersos na fila $M/M^{ij}/1/N$ sem “feedback”.

3.2 Os Processos de Renovação Markovianos Imersos em Filas $M/M^{ij}/1/N$ sem “Feedback”

Observando que o núcleo do processo $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é tal que $Q((i, w), (j, z), t) = 0$ para $j \neq i - 1, i + 1$ é fácil ver que $Q_X(t)$ pode ser representado sob a forma

$$Q_X(t) = Q_A(t) + Q_D(t),$$

onde

$$Q_A(t) = [Q_A((i, w), (j, z), t)], \text{ com} \quad (3.5)$$

$$Q_A((i, w), (j, z), t) = \begin{cases} Q((i, w), (i + 1, z), t), & \text{se } j = i + 1, w = z \in E; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$Q_D(t) = [Q_D((i, w), (j, z), t)], \text{ com} \quad (3.6)$$

$$Q_D((i, w), (j, z), t) = \begin{cases} Q((i, w), (i-1, z), t), & \text{se } j = i-1, w, z \in E; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $Q_X(t)$ tem a mesma forma de $Q(t)$, o núcleo do Processo de Renovação Markoviano estudado no Capítulo 2, mas com $Q_F = 0$, podemos utilizar os resultados do processo de filtragem apresentados naquele capítulo.

O Teorema que introduziremos a seguir é um caso particular do Teorema 2.2, obtido quando fazemos $p = 0$. Mesmo assim consideramos importante sua apresentação neste capítulo porque a ausência de “feedback” permite a obtenção de expressões mais explícitas para as matrizes $Q^{(a)}$ e $Q^{(d)}$.

Teorema 3.1 *Se $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com espaço de estados $\mathcal{LXE}$, $\mathcal{L} = \{0, 1, \dots, N\}$, $E = \{1, 2, \dots, m\}$ e núcleo $Q_X(t)$, então:*

(a) $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)}, T_n^{(a)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com espaço de estados $\mathcal{LXE}$ e núcleo

$$Q^{(a)}(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} Q_D^{(k)} \right] * Q_A(t) = [Q^{(a)}((i, w), (j, z), t)],$$

onde

$$\begin{aligned}
& Q^{(a)}((i, w), (j, z), t) = \\
& = \left\{ \begin{array}{ll}
(a) \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} D^*(w, q_1) * D^*(q_1, q_2) * \dots * D^*(q_{i-j}, z) * C(z, z, t), \\
\quad 2 \leq i \leq N-1; j=1; w, z \in E; \\
(b) \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} K^*(w, q_1) * D^*(q_1, q_2) * \dots * D^*(q_{i-j}, z) * C(z, z, t), \\
\quad i=N; j=1; w, z \in E; \\
(c) \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} D^*(w, q_1) * D^*(q_1, q_2) * \dots * D^*(q_{i-j}, z) * G(z, z, t), \\
\quad 3 \leq i \leq N-1; 2 \leq j < i; w, z \in E; \\
(d) \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} K^*(w, q_1) * D^*(q_1, q_2) * \dots * D^*(q_{i-j}, z) * G(z, z, t), \\
\quad i=N; 2 \leq j < N; w, z \in E; \\
(e) D^*(w, z) * C(z, z, t), \\
\quad i=1; j=1; w, z \in E; \\
(f) D^*(w, z) * G(z, z, t), \\
\quad 2 \leq i \leq N-1; j=i; w, z \in E; \\
(g) K^*(w, z) * G(z, z, t), \\
\quad i=N; j=N; w, z \in E; \\
(h) C(z, z, t), \\
\quad i=0; j=1; w=z \in E; \\
(i) G(z, z, t), \\
\quad 1 \leq i \leq N-1; j=i+1; w=z \in E; \\
(j) 0, \text{ caso contrário.}
\end{array} \right.
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

(b) $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)}, T_n^{(d)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com espaço de estados $\mathcal{LXE}$ e núcleo

$$Q^{(d)}(t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} Q_A^{(k)} \right] * Q_D(t) = [Q^{(d)}((i, w), (j, z), t)],$$

onde

$$Q^{(d)}((i, w), (j, z), t) = \begin{cases} (a) & D^*(w, z, t), \\ & 1 \leq i \leq N-1; j = i-1; w, z \in E; \\ (b) & K^*(w, z, t), \\ & i = N; j = N-1; w, z \in E; \\ (c) & C(w, w) * G^{(j-i)}(w, w) * D^*(w, z, t), \\ & i = 0; 0 \leq j \leq N-2; w, z \in E; \\ (d) & G^{(j-i+1)}(w, w) * D^*(w, z, t), \\ & 1 \leq i \leq N-2; i \leq j \leq N-2; w, z \in E; \\ (e) & C(w, w) * G^{(j-i)}(w, w) * K^*(w, z, t), \\ & i = 0; j = N-1; w, z \in E; \\ (f) & G^{(j-i+1)}(w, w) * K^*(w, z, t), \\ & 1 \leq i \leq N-1; j = N-1; w, z \in E; \\ (g) & 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (3.8)$$

O leitor deve observar que na equação (3.7)(a), t é argumento da convolução e não de $C(z, z, t)$. Esta convenção foi utilizada nas demais equações e será mantida ao longo de nosso trabalho. É importante notar também que no item (b) utilizamos a notação $G^{(k)}(w, w, t) = G(w, w) * \dots * G(w, w, t)$ para representar a convolução de k funções idênticas.

Prova:

A estrutura dos núcleos resulta dos Teoremas 2.2(a) e 2.2(b) apresentados nas páginas 13 e 14, quando fazemos $Q_F = 0$.

As equações (3.7) e (3.8) são o resultado de uma análise dos caminhos amostrais.

Para obtermos a equação (3.7)(c), por exemplo, devemos observar que, para $\{X_{n+1}^{(a)} = j, Z_{n+1}^{(a)} = z, T_{n+1}^{(a)} - T_n^{(a)} \leq t\}$ ocorrer, dado que $\{X_n^{(a)} = i, Z_n^{(a)} = w\}$, com $2 \leq j < i$ e $3 \leq i \leq N - 1$, devem ocorrer $i - j + 1$ partidas no intervalo $[T_n^{(a)}, T_{n+1}^{(a)})$ e a seguir uma chegada no instante $T_{n+1}^{(a)} (\leq t)$. Temos então a seguinte representação esquemática:

Figura 2

onde os índices que acompanham os instantes de partidas simbolizados por X representam os tipos dos clientes que deixam o sistema em cada instante e as indicações acima da reta representam o número de clientes no sistema imediatamente após cada transição.

Lembrando da definição de convolução e de que os intervalos de tempo entre as transições são variáveis aleatórias independentes obtemos a equação (3.7)(c).

Já para a equação (3.8)(d) devemos notar que, para $\{X_{n+1}^{(d)} = j, Z_{n+1}^{(d)} = z, T_{n+1}^{(d)} - T_n^{(d)} \leq t\}$ ocorrer, dado que $\{X_n^{(d)} = i, Z_n^{(d)} = w\}$, com $i \leq j \leq N - 2$ e $1 \leq i \leq N - 2$, devem acontecer $j - i + 1$ chegadas

no intervalo $[T_n^{(d)}, T_{n+1}^{(d)})$ e a seguir uma partida no instante $T_{n+1}^{(d)} (\leq t)$. É possível construir a seguinte representação esquemática:

Figura 3

onde as chegadas são simbolizadas por X e as indicações acima da reta também representam o número de clientes no sistema imediatamente após cada transição.

As demais equações são obtidas de modo análogo, tomando-se cuidado nos casos limites, quando devemos trabalhar com as matrizes $C(t)$ e/ou $K^*(t)$.

Ressaltamos que o Teorema 3.1 de nosso trabalho é bem mais complexo que o teorema equivalente apresentado por Hunter[14] para o caso escalar (Teorema 1), porque no nosso caso a existência dos diversos tipos de clientes faz com que os caminhos amostrais sejam bem mais complicados. No entanto, é fácil ver que para $m = 1$ obtemos o mesmo resultado de Hunter[14], já que nesse caso é possível escrever $C(t) = G(t) = Q_{i,i+1}$, $0 \leq i \leq N - 1$ e $D^*(t) = K^*(t) = Q_{i,i-1}$, $1 \leq i \leq N$.

No Corolário que apresentaremos a seguir será utilizada a mesma notação introduzida no Capítulo 2 para identificar o processo do comprimento da fila imediatamente antes de uma chegada.

Corolário 3.1 (a) Se $X_0 \neq 0$ ou, o que é equivalente, $X_0^{(a)} \neq 0$, $\{(X_n^{(a-)}, Z_n^{(a-)}, T_n^{(a)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano irredutível recorrente positivo com espaço de estados

$\mathcal{L}^{(a-)}XE = \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ e núcleo

$$Q^{(a-)} = [Q^{(a-)}((i, w), (j, z), t)],$$

onde

$$Q^{(a-)}((i, w), (j, z), t) = Q^{(a)}((i+1, w), (j+1, z), t), \quad 0 \leq i, j \leq N-1; \quad w, z \in E. \quad (3.9)$$

(b) Se $X_0 \neq N$ ou, o que é equivalente, $X_0^{(d)} \neq N$, $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)}, T_n^{(d)})\}$ é um Processo de Renovação Markoviano irreduzível recorrente positivo com espaço de estados $\mathcal{L}^{(d)}XE = \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ e núcleo $Q^{(d)} = [Q^{(d)}((i, w), (j, z), t)], (i, w), (j, z) \in \mathcal{L}^{(d)}XE$.

Prova:

O item (a) é resultado das igualdades $X_n^{(a-)} = X_n^{(a)} - 1$ e $Z_n^{(a-)} = Z_n^{(a)}$ e do fato de que no processo de chegada o estado $(0, w), w \in E$ é transiente e os estados $\{(1, w), (2, w), \dots, (N, w)\}, w \in E$ formam um conjunto irreduzível e recorrente positivo, já que estamos considerando $N < \infty$.

O item (b) é obtido quando observamos que no processo de partida o estado $(N, w), w \in E$ é transiente. $\square$

Se $N = \infty$ os resultados do Teorema 3.1 ainda são válidos, após a eliminação das expressões (3.7)(b), (3.7)(d), (3.7)(g), (3.8)(b), (3.8)(e) e (3.8)(f), onde aparece a matriz $K^*(t)$. Já o Corolário 3.1 não é imediato. No processo $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)}, T_n^{(a)})\}$ o estado $(0, w), w \in E$ ainda é transiente, mas não existem mais estados transientes no processo $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)}, T_n^{(d)})\}$. A propriedade de irreduzibilidade ainda é válida, mas agora a classificação dos estados está relacionada à existência de soluções para o sistema de equações lineares utilizado para determinar a distribuição estacionária da Cadeia de Markov imersa associada a cada processo. As Cadeias de Markov imersas serão estudadas na próxima seção.

3.3 As Cadeias de Markov Imersas em Filas $M/M^{ij}/1/N$ sem “Feedback”

Nesta seção trataremos da existência das distribuições estacionárias das Cadeias de Markov imersas $\{(X_n, Z_n)\}$, $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)})\}$ e $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)})\}$, cujas matrizes de transição são dadas por $P_X = [Q((i, w), (j, z), \infty)] \equiv [P((i, w), (j, z))]$, $P^{(a)} = [P^{(a)}((i, w), (j, z))]$ e $P^{(d)} = [P^{(d)}((i, w), (j, z))]$.

Para representar os elementos da matriz P_X será utilizada a mesma notação introduzida na página 18:

$$C(\infty) = I; \quad (3.10)$$

$$D^*(\infty) = D^* = [r_{wz}v_{wz}] = [d_{wz}^*], \quad w, z \in E; \quad (3.11)$$

$$G(\infty) = G = \text{Diag} \left[\sum_{z \in E} r_{wz}u_{wz} \right] = [g_{ww}], \quad w \in E; \quad (3.12)$$

$$K^*(\infty) = K^* = [r_{wz}] = [k_{wz}^*], \quad w, z \in E. \quad (3.13)$$

É claro que a partir dos resultados do Teorema 3.1 podemos escrever:

$$\begin{aligned}
& P^{(a)}((i, w), (j, z)) = \\
& = \left\{ \begin{array}{ll}
(a) \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} D^*(w, q_1) D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{i-j}, z) C(z, z), \\
\quad 2 \leq i \leq N-1; j=1; w, z \in E; \\
(b) \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} K^*(w, q_1) D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{i-j}, z) C(z, z), \\
\quad i=N; j=1; w, z \in E; \\
(c) \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} D^*(w, q_1) D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{i-j}, z) G(z, z), \\
\quad 3 \leq i \leq N-1; 2 \leq j < i; w, z \in E; \\
(d) \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} K^*(w, q_1) D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{i-j}, z) G(z, z), \\
\quad i=N; 2 \leq j < N; w, z \in E; \\
(e) D^*(w, z) C(z, z), \\
\quad i=1; j=1; w, z \in E; \\
(f) D^*(w, z) G(z, z), \\
\quad 2 \leq i \leq N-1; j=i; w, z \in E; \\
(g) K^*(w, z) G(z, z), \\
\quad i=N; j=N; w, z \in E; \\
(h) C(z, z), \\
\quad i=0; j=1; w=z \in E; \\
(i) G(z, z), \\
\quad 1 \leq i \leq N-1; j=i+1; w=z \in E; \\
(j) 0, \text{ caso contrário.}
\end{array} \right. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P^{(d)}((i, w), (j, z)) = \\
& = \left\{ \begin{array}{ll}
(a) & D^*(w, z), \\
& 1 \leq i \leq N-1; j = i-1; w, z \in E; \\
(b) & K^*(w, z), \\
& i = N; j = N-1; w, z \in E; \\
(c) & C(w, w)G^{(j-i)}(w, w)D^*(w, z), \\
& i = 0; 0 \leq j \leq N-2; w, z \in E; \\
(d) & G^{(j-i+1)}(w, w)D^*(w, z), \\
& 1 \leq i \leq N-2; i \leq j \leq N-2; w, z \in E; \\
(e) & C(w, w)G^{(j-i)}(w, w)K^*(w, z), \\
& i = 0; j = N-1; w, z \in E; \\
(f) & G^{(j-i+1)}(w, w)K^*(w, z), \\
& 1 \leq i \leq N-1; j = N-1; w, z \in E; \\
(g) & 0, \text{ caso contrário.}
\end{array} \right. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

O leitor deve observar que nas equações (3.15)(c) a (3.15)(f) estamos utilizando a notação $G^{(k)}(w, w)$ para representar o w -ésimo elemento da diagonal da k -ésima potência da matriz G .

Como P_X é a matriz de transição de uma Cadeia de Markov iredutível, recorrente positiva ($N < \infty$) e periódica com período 2, podemos garantir a existência e unicidade da distribuição estacionária. No entanto, devido à periodicidade, não existe uma distribuição limite $\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i, Z_n = w) \right\}$.

Para encontrar $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$, a distribuição estacionária de $\{(X_n, Z_n)\}$, onde para cada $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $\pi_k = (\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{km})$, devemos resolver as equações (2.36) e (2.37) quando $p = 0$. Portanto, a argumentação apresentada na seção 2.4 também é válida para o caso da fila sem

“feedback” e concluimos que a solução do sistema de equações só pode ser obtida através de métodos numéricos, em cada situação prática.

Já que $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)})\}$ e $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)})\}$ não são Cadeias de Markov irreduzíveis devemos restringir nossa atenção às sub-cadeias irreduzíveis com espaços de estados $\mathcal{L}^{(a)}XE = \{1, 2, \dots, N\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ e $\mathcal{L}^{(d)}XE = \{0, 1, \dots, N-1\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ e matrizes de transição $\bar{P}^{(a)}$ e $\bar{P}^{(d)}$. Observamos que as matrizes $\bar{P}^{(a)}$ e $\bar{P}^{(d)}$ são dadas nos itens (a) e (b) do Teorema 2.4, com $\bar{P}_F = \bar{\bar{P}}_F = 0$, $L = 0$ e D e K substituídas por D^* e K^* , respectivamente.

O Teorema sobre as distribuições estacionárias $\{\pi_i^{(a)}\}$ e $\{\pi_i^{(d)}\}$ que introduziremos a seguir resulta do Teorema 2.7, quando fazemos $D = D^*$, $K = K^*$ e $L = 0$. Note que a partir dos itens (a) e (b) do Teorema 2.6 e da igualdade $\alpha_a = \alpha_d$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} \alpha_a^* = \alpha_d^* = \tau^* &= \pi_0 e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i G e_1 = \\ &= \pi_N K^* e_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \pi_i D^* e_1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

A equação (3.16) é a expressão para o cálculo da proporção das vezes em que ocorre uma chegada ou partida na fila sem “feedback” em regime estacionário.

Teorema 3.2 (a) Processo de chegada

A distribuição estacionária da sub-cadeia de Markov irreduzível $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)})\}$ com espaço de estados $\mathcal{L}^{(a)}XE$ é dada por

$$\pi^{(a)} = \frac{1}{\tau^*} [\pi_1 D^* \pi_1 G \pi_2 G \dots \pi_{N-1} G],$$

$$\pi_i^{(a)} e_1 = \frac{1}{\tau^*} \pi_i D^* e_1, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

e

$$\pi_N^{(a)} e_1 = \frac{1}{\tau^*} \pi_N K^* e_1.$$

(b) *Processo de partida*

A distribuição estacionária da sub-cadeia de Markov irredutível $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)})\}$ com espaço de estados $\mathcal{L}^{(d)} XE$ é dada por

$$\pi^{(d)} = \frac{1}{\tau^*} [\pi_1 D^* \pi_2 D^* \dots \pi_{N-1} D^* \pi_{N-1} G K^*],$$

$$\pi_0^{(d)} e_1 = \frac{1}{\tau^*} \pi_0 e_1$$

e

$$\pi_i^{(d)} e_1 = \frac{1}{\tau^*} \pi_i G e_1, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Ressaltamos que como $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)})\}$ e $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)})\}$ são Cadeias de Markov aperiódicas, $\pi^{(a)}$ e $\pi^{(d)}$ são distribuições limite.

O Teorema 3.2 é válido apenas para $N < \infty$, de modo análogo ao Teorema 2.7.

Corolário 3.2 *As distribuições limite das sub-cadeias de Markov $\{X_n^{(a-)}\}$ e $\{X_n^{(d)}\}$ são iguais, com*

$$\pi_0^{(a-)} e_1 = \pi_0^{(d)} e_1 = \frac{1}{\tau^*} \pi_0 e_1$$

e

$$\pi_i^{(a-)} e_1 = \pi_i^{(d)} e_1 = \frac{1}{\tau^*} \pi_i G e_1, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Prova:

Este resultado é consequência da igualdade

$$\pi^{(a-)}(i, j) = \pi^{(a)}(i + 1, j), \quad 0 \leq i \leq N - 1; \quad j \in E;$$

do Teorema 3.2 e da equação (2.38) com D substituída por D^* . $\square$

O leitor deve observar que o Corolário 3.2 é um caso particular do Teorema 2.11.

Corolário 3.3 *Se π é a distribuição estacionária de $\{(X_n, Z_n)\}$ e $\pi^{(a)}$ e $\pi^{(d)}$ são dadas pelo Teorema 3.2, então*

$$\pi_i e_1 = (\pi_i^{(a)} + \pi_i^{(d)}) e_1 / 2, \quad 0 \leq i \leq N,$$

com

$$\pi_0^{(a)} e_1 = \pi_N^{(d)} e_1 = 0.$$

Prova:

O Corolário resulta do Teorema 2.8, com $\pi_i^{(f)} = 0$ e do fato de que $\alpha_a^* + \alpha_d^* = 2\tau^* = 1$. $\square$

O Corolário 3.3 é muito intuitivo porque, em regime estacionário, deve haver um número igual de chegadas e partidas.

3.4 Os Processos Semi-Markovianos Imer- sos em Filas $M/M^{ij}/1/N$ sem “Feedback”

Como $\sup_n T_n = \infty$ temos, de acordo com Çinlar [6], que

$$X(t) = X_n, \quad T_n \leq t < T_{n+1}$$

e

$$Z(t) = Z_n, \quad T_n \leq t < T_{n+1},$$

implicando que $\{(X(t), Z(t)), t \geq 0\}$ é o Processo Semi-Markoviano mínimo associado ao Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$. Também podemos escrever:

$$\begin{aligned} X^{(a)}(t) &= X_n^{(a)}, \quad T_n^{(a)} \leq t < T_{n+1}^{(a)}, \\ Z^{(a)}(t) &= Z_n^{(a)}, \quad T_n^{(a)} \leq t < T_{n+1}^{(a)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X^{(d)}(t) &= X_n^{(d)}, \quad T_n^{(d)} \leq t < T_{n+1}^{(d)}, \\ Z^{(d)}(t) &= Z_n^{(d)}, \quad T_n^{(d)} \leq t < T_{n+1}^{(d)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\{(X^{(a)}(t), Z^{(a)}(t)), t \geq 0\}$ e $\{(X^{(d)}(t), Z^{(d)}(t)), t \geq 0\}$ são os Processos Semi-Markovianos mínimos associados aos Processos de Renovação Markovianos $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)}, T_n^{(a)})\}$ e $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)}, T_n^{(d)})\}$, respectivamente.

Já que Hunter [14] estuda o processo $\{X^{(a-)}(t), t \geq 0\}$ em lugar de $\{X^{(a)}(t), t \geq 0\}$ vamos preferir estudar o processo equivalente em nosso trabalho a fim de podermos comparar os resultados. Ou seja, examinaremos nesta seção o processo $\{(X^{(a-)}(t), Z^{(a-)}(t)), t \geq 0\}$, onde

$$X^{(a-)}(t) = X^{(a)}(t) - 1 \text{ e } Z^{(a-)}(t) = Z^{(a)}(t),$$

que é o Processo Semi-Markoviano associado à $\{(X_n^{(a-)}, Z_n^{(a-)}, T_n^{(a)})\}$.

Sabemos que o processo $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é irredutível e recorrente positivo e $Q((i, w), (j, z), t)$ não são funções escada. Portanto, podemos concluir, a partir de Çinlar [6] p.342 e Ross [24] p.104, que $\{(X(t), Z(t))\}$ tem uma distribuição estacionária $\{p_{iw}\}$, $(i, w) \in \mathcal{L}XE$, que também é a distribuição limite. Também é possível concluir que $\{(X^{(a-)}(t), Z^{(a-)}(t))\}$ e $\{(X^{(d)}(t), Z^{(d)}(t))\}$ têm distribuições limites $\{p_{iw}^{(a-)}\}$, $(i, w) \in \mathcal{L}^{(a-)}XE$ e $\{p_{iw}^{(d)}\}$, $(i, w) \in \mathcal{L}^{(d)}XE$, respectivamente. A seguir apresentaremos expressões para o cálculo dessas distribuições, mas antes introduziremos a notação que será utilizada.

Representaremos por $p = (p_0, p_1, \dots, p_N)$ a distribuição estacionária do processo $\{(X(t), Z(t))\}$, onde para cada $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $p_k = (p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{km})$. De modo análogo, $p^{(\theta)} = (p_0^{(\theta)}, p_1^{(\theta)}, \dots, p_{N-1}^{(\theta)})$ é a distribuição estacionária do processo $\{(X^{(\theta)}(t), Z^{(\theta)}(t))\}$, onde para cada $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $p_k^{(\theta)} = (p_{k1}^{(\theta)}, p_{k2}^{(\theta)}, \dots, p_{km}^{(\theta)})$ e $\theta = a -$ ou d .

A função de distribuição condicional de $T_{n+1} - T_n$, dado $(X_n = i, Z_n = w)$ e $(X_{n+1} = j, Z_{n+1} = z)$, é representada por:

$$F((i, w), (j, z), t) = \frac{Q((i, w), (j, z), t)}{P((i, w), (j, z))} =$$

$$P\{T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n = i, Z_n = w, X_{n+1} = j, Z_{n+1} = z\} \quad (3.17)$$

para aqueles estados $((i, w), (j, z))$ tais que $P((i, w), (j, z)) > 0$.

De acordo com Hunter [14] p.382, o tempo esperado gasto em (i, w) durante cada visita, dado que o próximo estado a ser visitado é (j, z) é dado por:

$$m((i, w), (j, z)) = \int_0^\infty t F((i, w), (j, z), dt) = \frac{\eta((i, w), (j, z))}{P((i, w), (j, z))}, \quad (3.18)$$

onde

$$\eta((i, w), (j, z)) = \int_0^\infty t Q((i, w), (j, z), dt). \quad (3.19)$$

Observamos que a partir da estrutura de $Q_X(t)$ apresentada na página 56 e das equações (3.10) a (3.13) que representam os elementos da matriz $P_X = [P((i, w), (j, z))]$, é possível escrever:

$$F((i, w), (i-1, z)) = \begin{cases} \frac{D^*(w, z, t)}{D^*(w, z)} = H_{wz}(t), & 1 \leq i \leq N-1; w, z \in E; \\ \frac{K^*(w, z, t)}{K^*(w, z)} = J_{wz}(t), & i = N; w, z \in E; \end{cases} \quad (3.20)$$

$$F((i, w), (i+1, z)) = \begin{cases} \frac{G(w, z, t)}{G(w, z)} = \frac{\sum_{z \in E} r_{wz} u_{wz} H_{wz}(t)}{\sum_{z \in E} r_{wz} u_{wz}}, & 1 \leq i \leq N-1; \\ & w = z \in E; \\ C(w, z, t) = 1 - e^{-\lambda t}, & i = 0, w = z \in E; \\ 0, & 0 \leq i \leq N-1; \\ & w \neq z; w, z \in E; \end{cases} \quad (3.21)$$

$$F((i, w), (j, z)) = 0, \quad j \neq i-1, i+1; w, z \in E;$$

onde foi utilizada a notação $A(w, z, t)$ e $A(z, w)$ para representar o (w, z) -ésimo elemento das matrizes $A(t)$ e A , respectivamente, com $A = D^*, K^*, G$ e C . Lembramos ainda que

$$H_{wz}(t) = 1 - \exp[-(\lambda + \mu_{wz})t],$$

$$J_{wz}(t) = 1 - \exp(-\mu_{wz}t)$$

e

$$u_{wz} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_{wz}}.$$

A seguir, aplicando as equações (3.18) e (3.20) para $1 \leq i \leq N-1$ e $w, z \in E$ obtemos a seguinte expressão para $m((i, w), (i-1, z))$:

$$m((i, w), (i - 1, z)) = m_d(w, z) = \int_0^\infty t(\lambda + \mu_{wz}) \exp[-(\lambda + \mu_{wz})t] dt = \frac{1}{\lambda + \mu_{wz}}. \quad (3.22)$$

Procedendo de modo semelhante, obtemos os demais resultados para $m((i, w), (j, z))$:

$$m((i, w), (i - 1, z)) = m_k(w, z) = \frac{1}{\mu_{wz}}, \quad i = N; \quad w, z \in E; \quad (3.23)$$

$$m((i, w), (i + 1, z)) = m_g(w, z) = \frac{\sum_{z \in E} r_{wz} / (\lambda + \mu_{wz})^2}{\sum_{z \in E} r_{wz} / (\lambda + \mu_{wz})}, \quad (3.24)$$

$$1 \leq i \leq N - 1; \quad w = z \in E;$$

$$m((i, w), (i + 1, z)) = m_c(w, z) = \frac{1}{\lambda}, \quad i = 0; \quad w = z \in E; \quad (3.25)$$

$$m((i, w), (i + 1, z)) = 0, \quad 0 \leq i \leq N - 1; \quad w \neq z; \quad w, z \in E; \quad (3.26)$$

e

$$m((i, w), (j, z)) = 0, \quad j \neq i - 1, i + 1; \quad w, z \in E. \quad (3.27)$$

Note que fazendo $m = 1$ obtemos as seguintes expressões a partir das equações (3.22) a (3.26):

$$m_d = m_g = \frac{1}{\lambda + \mu},$$

$$m_k = \frac{1}{\mu},$$

$$m_c = \frac{1}{\lambda}.$$

Estes são exatamente os resultados esperados, já que para $m = 1$ o nosso modelo se reduz à fila $M/M/1/N$.

Ressaltamos também que a maior complexidade de nosso modelo em relação à fila $M/M/1/N$ se faz notar claramente na equação (3.24), onde o resultado obtido não é uma consequência imediata da interpretação dos parâmetros do modelo e da definição de $m((i, w), (j, z))$, como acontece nas demais equações.

Resta ainda definir o tempo médio de permanência em (i, w) durante cada visita:

$$\begin{aligned} \eta(i, w) &= \eta_{iw} = E\{T_{n+1} - T_n \mid X_n = i, Z_n = w\} = \\ &= \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}} E\{T_{n+1} - T_n \mid X_n = i, Z_n = w, X_{n+1} = j, Z_{n+1} = z\} P((i, w), (j, z)) = \\ &= \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}} m((i, w), (j, z)) P((i, w), (j, z)) = \\ &= \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}} \eta((i, w), (j, z)), \end{aligned} \tag{3.28}$$

ou seja, a média dos tempos levados para saindo de (i, w) ir para (j, z) .

Após estas considerações, podemos apresentar o Teorema que permite o cálculo das distribuições estacionárias dos Processos Semi-Markovianos $\{(X(t), Z(t))\}$, $\{(X^{(a-)}(t), Z^{(a-)}(t))\}$ e $\{(X^{(d)}(t), Z^{(d)}(t))\}$.

Teorema 3.3 (a)

$$p_{iw} = \frac{\pi_{iw}\eta_{iw}}{\sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}} \pi_{jz}\eta_{jz}}, \quad i \in \mathcal{L}, \quad w \in E;$$

onde $\{\pi_{iw}\}$ é a distribuição estacionária da Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n)\}$ que deve ser calculada através de métodos numéricos a partir das equações (2.37) a (2.42), com $D = D^*$, $K = K^*$ e $F = 0$. η_{iw} são dados por:

$$\eta_{iw} = \begin{cases} (a) & m_c(w, w) = \frac{1}{\lambda}, \\ & i = 0; \quad w \in E; \\ (b) & \sum_{z \in E} [m_d(w, z)D^*(w, z)] + m_g(w, w)G(w, w) = \\ & \sum_{z \in E} \frac{r_{wz}}{\lambda + \mu_{wz}}, \\ & 1 \leq i \leq N-1; \quad w \in E; \\ (c) & \sum_{z \in E} m_k(w, z)K^*(w, z) = \sum_{z \in E} \frac{r_{wz}}{\mu_{wz}}, \\ & i = N; \quad w \in E. \end{cases} \quad (3.29)$$

(b)

$$p_{iw}^{(a-)} = \frac{\pi_{iw}^{(a-)}\eta_{iw}^{(a-)}}{\sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}^{(a-)}} \pi_{jz}^{(a-)}\eta_{jz}^{(a-)}}, \quad i \in \mathcal{L}^{(a-)}, \quad w \in E;$$

onde $\{\pi_{iw}^{(a-)}\}$ é obtida a partir do Teorema 3.2(a) e da igualdade $\pi^{(a-)}(i, w) = \pi^{(a)}(i+1, w)$, $0 \leq i \leq N-1$; $w \in E$ e $\eta_{iw}^{(a-)}$ são dados por:

$$\begin{aligned}
& \eta_{iw}^{(a-)} = \\
= & \left\{ \begin{aligned}
& (a) \sum_{z \in E} \{D^*(w, z)[m_d(w, z) + m_c(z, z)]\} + G(w, w)m_g(w, w) = \\
& \sum_{z \in E} \frac{r_{wz}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \\
& i = 0; w \in E; \\
& (b) \sum_{z \in E} \{D^*(w, z)G(z, z)[m_d(w, z) + m_g(z, z)]\} + G(w, w)m_g(w, w) + \\
& \sum_{z \in E} \sum_{q_1 \in E} D^*(w, q_1)D^*(q_1, z)[m_d(w, q_1) + m_d(q_1, z) + m_c(z, z)], \\
& i = 1; w \in E; \\
& (c) \sum_{z \in E} \{D^*(w, z)G(z, z)[m_d(w, z) + m_g(z, z)]\} + G(w, w)m_g(w, w) + \\
& \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{z \in E} \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} D^*(w, q_1)D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{i-j}, z)G(z, z) \times \\
& [m_d(w, q_1) + m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_{i-j}, z) + m_g(z, z)] + \\
& \sum_{z \in E} \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_i \in E} D^*(w, q_1)D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_i, z) \times \\
& [m_d(w, q_1) + m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_i, z) + m_c(z, z)], \\
& 2 \leq i \leq N-2; w \in E; \\
& (d) \sum_{z \in E} K^*(w, z)G(z, z)[m_k(w, z) + m_g(z, z)] + \\
& \sum_{i=N-2}^{N-1} \sum_{z \in E} \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{N-1-j} \in E} K^*(w, q_1)D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{N-1-j}, z)G(z, z) \times \\
& [m_k(w, q_1) + m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_{N-1-j}, z) + m_g(z, z)] + \\
& \sum_{z \in E} \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{N-1} \in E} K^*(w, q_1)D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{N-1}, z) \times \\
& [m_k(w, q_1) + m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_{N-1}, z) + m_c(z, z)], \\
& i = N-1; w \in E.
\end{aligned} \right.
\end{aligned}
\tag{3.30}$$

(c)

$$p_{iw}^{(d)} = \frac{\pi_{iw}^{(d)} \eta_{iw}^{(d)}}{\sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}^{(d)}} \pi_{jz}^{(d)} \eta_{jz}^{(d)}}, \quad i \in \mathcal{L}^{(d)}, \quad w \in E;$$

onde $\{\pi_{iw}^{(d)}\}$ é obtida a partir do Teorema 3.2(b) e $\eta_{iw}^{(d)}$ são dados por:

$$\eta_{iw}^{(d)} = \left\{ \begin{array}{ll} (a) & \sum_{j=0}^{N-2} \sum_{z \in E} G^{(j)}(w, w) D^*(w, z) [m_c(w, w) + j m_g(w, w) + m_d(w, z)] + \\ & \sum_{z \in E} G^{(N-1)}(w, w) K^*(w, z) [m_c(w, w) + (N-1) m_g(w, w) + m_k(w, z)], \\ & i = 0; \quad w \in E; \\ (b) & \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{z \in E} G^{(j-i+1)}(w, w) D^*(w, z) [(j-i+1) m_g(w, w) + m_d(w, z)] + \\ & \sum_{z \in E} \{G^{(N-i)}(w, w) K^*(w, z) [(N-i) m_g(w, w) + m_k(w, z)] + \\ & D^*(w, z) m_d(w, z)\}, \\ & 1 \leq i \leq N-2; \quad w \in E; \\ (c) & \sum_{z \in E} \{G(w, w) K^*(w, z) [m_g(w, w) + m_k(w, z)] + D^*(w, z) m_d(w, z)\}, \\ & i = N-1; \quad w \in E; \\ (d) & \sum_{z \in E} K^*(w, z) m_k(w, z) = \sum_{z \in E} \frac{r_{wz}}{\mu_{wz}}, \\ & i = N; \quad w \in E. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Prova :

Vamos considerar um intervalo de tempo começando com uma entrada no estado (i, w) e terminando com a próxima entrada em (i, w) . Este ciclo é iniciado com um intervalo de comprimento médio η_{iw} na visita a (i, w) e a seguir há outros intervalos de tempo em estados $(j, z) \neq (i, w)$. O número esperado de visitas a (j, z) entre duas visitas a (i, w) é π_{jz}/π_{iw} e cada visita a (j, z) dura um tempo médio de η_{jz} unidades. Portanto, o comprimento médio do ciclo considerado é:

$$\eta_{iw} + \sum_{(j,z) \neq (i,w)} \sum \frac{\pi_{jz}}{\pi_{iw}} \eta_{jz} = \frac{1}{\pi_{iw}} \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}} \pi_{jz} \eta_{jz}.$$

Então, a razão entre o tempo médio de permanência em (i, w) e o comprimento total do ciclo é:

$$\frac{\eta_{iw}}{\frac{1}{\pi_{iw}} \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}} \pi_{jz} \eta_{jz}} = \frac{\pi_{iw} \eta_{iw}}{\sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}} \pi_{jz} \eta_{jz}} =$$

proporção do tempo que o processo $\{(X(t), Z(t))\}$ permanece em $(i, w) =$

probabilidade de que o processo esteja no estado (i, w) no regime estacionário =

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = i, Z(t) = w\} = p_{iw}.$$

Note que a terceira igualdade é válida porque a Cadeia de Markov $\{(X_n, Z_n)\}$ é ergódica.

As expressões para $p_{iw}^{(a-)}$ e $p_{iw}^{(d)}$ são obtidas de modo análogo.

Na parte (a) os tempos médios de permanência no estado (i, w) são obtidos diretamente a partir das equações (3.22) a (3.28) e das expressões para os elementos da matriz $[P((i, w), (j, z))]$ apresentadas na página 64.

No item (b) devemos, em primeiro lugar, obter as expressões para

$\eta^{(a-)}((i, w), (j, z))$. Vamos analisar em detalhes o caso em que $2 \leq i \leq N-2$; $1 \leq j < i$ e $w, z \in E$.

A partir da equação (3.7)(c) podemos escrever:

$$Q^{(a)}((i, w), (j, z), t) = \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} Q((i, w), (i-1, q_1)) * Q((i-1, q_1), (i-2, q_2)) * \dots * Q((j, q_{i-j}), (j-1, z)) * Q((j-1, z), (j, z), t),$$

$$3 \leq i \leq N-1; 2 \leq j < i; w, z \in E.$$

Mas o Corolário 3.1(a) estabelece a igualdade

$$Q^{(a-)}((i, w), (j, z), t) = Q^{(a)}((i+1, w), (j+1, z), t),$$

$$0 \leq i, j \leq N-1; w, z \in E.$$

Portanto,

$$Q^{(a-)}((i, w), (j, z), t) = \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} Q((i+1, w), (i, q_1)) * Q((i, q_1), (i-1, q_2)) * \dots * Q((j+1, q_{i-j}), (j, z)) * Q((j, z), (j+1, z), t),$$

$$2 \leq i \leq N-2; 1 \leq j < i; w, z \in E.$$

De acordo com a equação (3.19), vem:

$$\begin{aligned} \eta^{(a-)}((i, w), (j, z)) &= \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} \int_0^\infty td[Q((i+1, w), (i, q_1)) * Q((i, q_1), (i-1, q_2)) * \dots * \\ &Q((j+1, q_{i-j}), (j, z)) * Q((j, z), (j+1, z), t)] = \\ &\sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} D^*(w, q_1) D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{i-j}, z) G(z, z) \times \\ &\int_0^\infty td[F((i+1, w), (i, q_1)) * F((i, q_1), (i-1, q_2)) * \dots * \\ &F((j+1, q_{i-j}), (j, z)) * F((j, z), (j+1, z), t)]. \end{aligned}$$

Observe que na integral acima temos a convolução de funções de distribuição de modo que a integral representa a média de uma soma de variáveis aleatórias, e então,

$$\begin{aligned} \eta^{(a-)}((i, w), (j, z)) = \\ \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} D^*(w, q_1) D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{i-j}, z) G(z, z) [m_d(w, q_1) + \\ m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_{i-j}, z) + m_g(z, z)], \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$2 \leq i \leq N - 2; \ 1 \leq j < i; \ w, z \in E.$$

A partir das demais equações do Teorema 3.1(a) e do Corolário 3.1(a) é possível obter as seguintes expressões, após um procedimento análogo ao que acabamos de descrever:

$$\begin{aligned}
& \eta^{(a-)}((i, w), (j, z)) = \\
= & \left\{ \begin{array}{ll}
(a) & D^*(w, z)[m_d(w, z) + m_c(z, z)], \\
& i = j = 0; \ w, z \in E; \\
(b) & G(w, w)m_g(w, w), \\
& 0 \leq i \leq N-2; \ j = i+1; \ w = z \in E; \\
(c) & \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_i \in E} D^*(w, q_1)D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_i, z)[m_d(w, q_1) + \\
& m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_i, z) + m_c(z, z)], \\
& 1 \leq i \leq N-2; \ j = 0; \ w, z \in E; \\
(d) & D^*(w, z)G(z, z)[m_d(w, z) + m_g(z, z)], \\
& 1 \leq i = j \leq N-2; \ w, z \in E; \\
(e) & \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} K^*(w, q_1)D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{i-j}, z)G(z, z)[m_k(w, q_1) + \\
& m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_{i-j}, z) + m_g(z, z)], \\
& i = N-1; \ 1 \leq j < N-1; \ w, z \in E; \\
(f) & \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{N-1} \in E} K^*(w, q_1)D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{N-1}, z)[m_k(w, q_1) + \\
& m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_{N-1}, z) + m_c(z, z)], \\
& i = N-1; \ j = 0; \ w, z \in E; \\
(g) & K^*(w, z)G(z, z)[m_k(w, z) + m_g(z, z)], \\
& i = j = N-1; \ w, z \in E.
\end{array} \right.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

O resultado desejado é obtido a partir da igualdade

$$\eta_{iw}^{(a-)} = \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}^{(a-)}} \eta^{(a-)}((i, w), (j, z)).$$

Por exemplo, para $2 \leq i \leq N-2$, temos:

$$\begin{aligned}
\eta_{iw}^{(a-)} &= G(w, w)m_g(w, w) + \\
&\sum_{z \in E} \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_i \in E} D^*(w, q_1)D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_i, z)[m_d(w, q_1) + \\
&m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_i, z) + m_c(z, z)] + \\
&\sum_{z \in E} D^*(w, z)G(z, z)[m_d(w, z) + m_g(z, z)] + \\
&\sum_{i=1}^{j-1} \sum_{z \in E} \sum_{q_1 \in E} \dots \sum_{q_{i-j} \in E} D^*(w, q_1)D^*(q_1, q_2) \dots D^*(q_{i-j}, z)G(z, z)[m_d(w, q_1) + \\
&m_d(q_1, q_2) + \dots + m_d(q_{i-j}, z) + m_g(z, z)].
\end{aligned}$$

A igualdade acima resulta das equações (3.32), (3.33)(b), (3.33)(c) e (3.33)(d).

No item (c) devem ser obtidas as expressões para $\eta^{(d)}((i, w), (j, z))$. No caso em que $1 \leq i \leq N-2$; $i \leq j \leq N-2$ e $w, z \in E$ é possível escrever, a partir da equação (3.8)(d):

$$\begin{aligned}
Q^{(d)}((i, w), (j, z), t) &= G^{(j-i+1)}(w, w) * D^*(w, z, t) = \\
&Q((i, w), (i+1, w)) * Q((i+1, w), (i+2, w)) * \dots * \\
&Q((j, w), (j+1, w)) * Q((j+1, w), (j, z), t).
\end{aligned}$$

De acordo com a equação (3.19), vem:

$$\begin{aligned}
\eta^{(d)}((i, w), (j, z)) &= \int_0^\infty td[G^{(j-i+1)}(w, w) * D^*(w, z, t)] = \\
&G^{(j-i+1)}(w, w)D^*(w, z) \times \\
&\int_0^\infty td[F((i, w), (i+1, w)) * \dots * F((j+1, w), (j, z), t)] = \\
&G^{(j-i+1)}(w, w)D^*(w, z)[m((i, w), (i+1, w)) + m((i+1, w), (i+2, w)) + \dots + \\
&m((j, w), (j+1, w)) + m((j+1, w), (j, z))].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\eta^{(d)}((i, w), (j, z)) = G^{(j-i+1)}(w, w)D^*(w, z)[(j-i+1)m_g(w, w) + m_d(w, z)],$$

$$i \leq j \leq N-2; 1 \leq i \leq N-2; w, z \in E. \quad (3.34)$$

Procedendo de modo análogo, com a utilização das equações do Teorema 3.1(b), obtemos as expressões abaixo:

$$\eta^{(d)}((i, w), (j, z)) =$$

$$= \begin{cases} (a) & G^{(j-i)}(w, w)D^*(w, z)[m_c(w, w) + (j-i)m_g(w, w) + m_d(w, z)], \\ & i = 0; 0 \leq j \leq N-2; w, z \in E; \\ (b) & G^{(j-i)}(w, w)K^*(w, z)[m_c(w, w) + (j-i)m_g(w, w) + m_k(w, z)], \\ & i = 0; j = N-1; w, z \in E; \\ (c) & G^{(j-i+1)}(w, w)K^*(w, z)[(j-i+1)m_g(w, w) + m_k(w, z)], \\ & 1 \leq i \leq N-1; j = N-1; w, z \in E; \\ (d) & D^*(w, z)m_d(w, z), \\ & 1 \leq i \leq N-1; j = i-1; w, z \in E; \\ (e) & K^*(w, z)m_k(w, z), \\ & i = N; j = i-1; w, z \in E. \end{cases} \quad (3.35)$$

As expressões para $\eta_{iw}^{(d)}$ são obtidas a partir de:

$$\eta_{iw}^{(d)} = \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}^{(d)}} \eta^{(d)}((i, w), (j, z)).$$

Se $1 \leq i \leq N-2$, de (3.34), (3.35)(c) e (3.35)(d) resulta:

$$\eta_{iw}^{(d)} = \sum_{j=i}^{N-2} \sum_{z \in E} G^{(j-i+1)}(w, w) D^*(w, z) [(j-i+1)m_g(w, w) + m_d(w, z)] + \sum_{z \in E} G^{(N-i)}(w, w) K^*(w, z) [(N-i)m_g(w, w) + m_k(w, z)] + \sum_{z \in E} D^*(w, z) m_d(w, z).$$

As equações (3.31)(a), (3.31)(c) e (3.31)(d) são obtidas de modo similar.

□

Em relação ao Teorema 3.3 destacamos que, no item (a), os resultados obtidos já eram esperados, devido à caracterização de nosso sistema. Nos itens (b) e (c) apenas para $i = 0$ e $i = N$, respectivamente, foram obtidos resultados intuitivos, que são facilmente confirmados pela interpretação dos parâmetros do modelo. Isto ocorre porque, para $i = 0$ no processo $\{(X^{(a-)}(t), Z^{(a-)}(t))\}$, a próxima transição será necessariamente uma chegada e essa transição é detectada pelo processo. Já para $i = N$ no processo $\{(X^{(d)}(t), Z^{(d)}(t))\}$, a próxima transição será uma partida, que pode ser de um cliente do tipo z com probabilidade r_{wz} se o último cliente servido foi do tipo w . Nos demais casos dos itens (b) e (c) as equações são muito mais complicadas, já que entre duas chegadas (partidas) pode ocorrer um número variável de partidas (chegadas), que depende do valor de i . Além disso, a expressão para $m_g(w, w)$ que aparece nessas equações dificulta a realização de simplificações. Lembre que

$$m_g(w, z) = \frac{\sum_{z \in E} r_{wz} / (\lambda + \mu_{wz})^2}{\sum_{z \in E} r_{wz} / (\lambda + \mu_{wz})}.$$

Portanto, a maior complexidade de nossos resultados em relação aos resultados equivalentes apresentados por Hunter [14] para o caso em que todos os clientes são do mesmo tipo (Teorema 4(b)(c)) já era esperada.

Com o objetivo de fazer uma pequena checagem de nossas equações para $\eta_{iw}^{(a-)}$ e $\eta_{iw}^{(d)}$ vamos considerar $m = 1$ e comparar as expressões resultantes com os resultados correspondentes para a fila $M/M/1/N$.

Sabemos que para a fila $M/M/1/N$:

$$\eta_i^{(a-)} = \frac{1}{\lambda}, \quad 0 \leq i \leq N-2$$

e

$$\eta_{N-1}^{(a-)} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda},$$

onde $\eta_i^{(a-)}$ representa o tempo médio de permanência no estado i para o processo $\{X^{(a-)}(t)\}$.

Este resultado é imediato, já que $1/\lambda$ é o tempo médio entre as chegadas e, se imediatamente antes de uma chegada há $N-1$ elementos no sistema, deve haver em primeiro lugar um término de serviço, cuja duração média é $1/\mu$, para que possa ocorrer a próxima chegada.

De modo análogo podemos escrever:

$$\eta_0^{(d)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

e

$$\eta_i^{(d)} = \frac{1}{\mu}, \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

onde $\eta_i^{(d)}$ representa o tempo médio de permanência no estado i para o processo $\{X^{(d)}(t)\}$.

Note que se imediatamente após uma partida não há elementos no sistema ($i=0$) deve, necessariamente, haver uma chegada antes que possa ocorrer a próxima partida.

Antes de analisarmos os resultados para a fila $M/M^{ij}/1/N$ no caso em que $m=1$ devemos observar que, se $m=1$:

$$D^*(w, z) = D^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$$

$$G(w, z) = G = \frac{\lambda}{\lambda + \mu};$$

$$K^*(w, z) = K^* = 1;$$

$$m_d(w, z) = m_d = m_g(w, z) = m_g = \frac{1}{\lambda + \mu};$$

$$m_k(w, z) = m_k = \frac{1}{\mu}$$

e

$$m_c(w, z) = m_c = \frac{1}{\lambda}.$$

Utilizando as igualdades acima obtemos os seguintes resultados, após fazer $m = 1$ nas equações (3.30):

$$\eta_0^{(a-)} = \frac{1}{\lambda};$$

$$\eta_1^{(a-)} = \frac{2\mu\lambda}{(\lambda + \mu)^3} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} + \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^2 \left(\frac{2}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda};$$

$$\eta_i^{(a-)} = \frac{2\mu\lambda}{(\lambda + \mu)^3} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} \sum_{j=1}^{i-1} (i - j + 2) \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{i-j+1} + \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{i+1} \left(\frac{i+1}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}, \quad 2 \leq i \leq N - 2;$$

$$\eta_{N-1}^{(a-)} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda + \mu}\right) + \sum_{j=1}^{N-2} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{N-1-j} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{N-j}{\lambda + \mu}\right) \right] + \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{N-1}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}.$$

Para o processo $\{(X^{(d)}(t), Z^{(d)}(t))\}$, após fazer $m = 1$ nas equações (3.31):

$$\eta_0^{(d)} = \sum_{j=0}^{N-2} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^j \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{j+1}{\lambda + \mu}\right) \right] + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N-1}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu};$$

$$\begin{aligned}
\eta_i^{(d)} &= \sum_{j=i}^{N-2} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{j-i+1} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{j-i+2}{\lambda + \mu} \right] + \\
&\quad \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{N-i} \left(\frac{N-i}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} = \frac{1}{\mu}, \quad 1 \leq i \leq N-2; \\
\eta_{N-1}^{(d)} &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(\frac{1}{\lambda + \mu} + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} = \frac{1}{\mu}; \\
\eta_N^{(d)} &= \frac{1}{\mu}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $m = 1$ na fila $M/M^{ij}/1/N$, as expressões para $\eta_{iw}^{(a-)}$ e $\eta_{iw}^{(d)}$ são iguais às expressões equivalentes para a fila $M/M/1/N$, como deveria ocorrer. Isto é um indicativo de que as equações (3.30) e (3.31) estão corretas.

A extensão do Teorema 3.3 para $N = \infty$ não é imediata, já que nesse caso nem sempre a cadeia imersa $\{(X_n, Z_n)\}$ é recorrente positiva, como já foi destacado na discussão apresentada na página 30. Note que de acordo com Cinlar [14] p.342 a extensão é válida se $\{(X_n, Z_n)\}$ for recorrente positiva.

3.5 Os Processos Semi-Markovianos Imer- sos em Filas $M/M^{ij}/1/N$ com “Feedback”

Para concluir nosso estudo trataremos agora dos Processos Semi-Markovianos associados a cada Processo de Renovação Markoviano imerso em uma fila $M/M^{ij}/1/N$ com “feedback”, ou seja, complementaremos os resultados apresentados na seção 3.4, os quais foram obtidos na ausência de “feedback”.

Consideraremos novamente o modelo e as variáveis descritas na seção 2.1. Como $\sup_n T_n = \infty$,

$$X(t) = X_n, \quad T_n \leq t < T_{n+1}$$

e

$$Z(t) = Z_n, \quad T_n \leq t < T_{n+1},$$

e então $\{(X(t), Z(t)), t \geq 0\}$ é o Processo Semi-Markoviano mínimo associado ao Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$. De modo similar temos

$$X^{(\theta)}(t) = X_n^{(\theta)}, \quad T_n^{(\theta)} \leq t < T_{n+1}^{(\theta)}$$

e

$$Z^{(\theta)}(t) = Z_n^{(\theta)}, \quad T_n^{(\theta)} \leq t < T_{n+1}^{(\theta)},$$

e portanto $\{(X^{(\theta)}(t), Z^{(\theta)}(t)), t \geq 0\}$ é o Processo Semi-Markoviano mínimo associado ao Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n^{(\theta)}, Z_n^{(\theta)}, T_n^{(\theta)})\}$, $\theta = a, d, f, i, o, e$.

Como já foi destacado no Capítulo 2, o processo $\{(X_n, Z_n, T_n)\}$ é irredutível e recorrente positivo e $Q((i, w), (j, z), t)$ não são funções escada. Portanto, do mesmo modo que foi feito para a fila sem “feedback”, podemos concluir que $\{(X(t), Z(t))\}$ tem uma única distribuição estacionária $\{p_{iw}\}$, $(i, w) \in \mathcal{L}XE$. De acordo com os resultados do Teorema 3.3 podemos escrever:

$$p_{iw} = \frac{\pi_{iw} \eta_{iw}}{\sum_{j \in \mathcal{L}} \sum_{z \in E} \pi_{jz} \eta_{jz}}, \quad i \in \mathcal{L}, \quad w \in E; \quad (3.36)$$

onde $\{\pi_{iw}\}$ é a distribuição estacionária da Cadeia de Markov imersa $\{(X_n, Z_n)\}$ e η_{iw} é o tempo médio de permanência no estado (i, w) .

Analogamente, concluímos que existe a distribuição limite de $\{(X^{(\theta)}(t), Z^{(\theta)}(t))\}$, que é dada por

$$p_{iw}^{(\theta)} = \frac{\pi_{iw}^{(\theta)} \eta_{iw}^{(\theta)}}{\sum_{j \in \mathcal{L}} \sum_{z \in E} \pi_{jz}^{(\theta)} \eta_{jz}^{(\theta)}}, \quad i \in \mathcal{L}^{(\theta)}, \quad w \in E, \quad \theta = a, d, f, i, o, e; \quad (3.37)$$

onde $\{\pi_{iw}^{(\theta)}\}$ é a distribuição estacionária da Cadeia de Markov imersa $\{(X_n^{(\theta)}, Z_n^{(\theta)})\}$ e $\eta_{iw}^{(\theta)}$ é o tempo médio de permanência no estado (i, w) no Processo de Renovação Markoviano $\{(X_n^{(\theta)}, Z_n^{(\theta)}, T_n^{(\theta)})\}$.

A distribuição estacionária $\pi = \{\pi_{iw}\}$, $i \in \mathcal{L}$, $w \in E$, pode ser calculada por meio de métodos numéricos a partir das equações (2.37) a (2.42), enquanto $\pi^{(\theta)} = \{\pi_{iw}^{(\theta)}\}$, $i \in \mathcal{L}^{(\theta)}$, $w \in E$, $\theta = a, d, f, i, o, e$, pode ser obtida a partir de π através da aplicação dos resultados do Teorema 2.7. Portanto, para que as equações (3.36) e (3.37) possam ser utilizadas é necessário que sejam estabelecidas expressões para η_{iw} e $\eta_{iw}^{(\theta)}$.

De acordo com as equações (3.19) e (3.28) podemos escrever:

$$\eta_{iw} = \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}} \eta((i, w), (j, z)), \quad (3.38)$$

onde

$$\eta((i, w), (j, z)) = \int_0^\infty t Q((i, w), (j, z), dt). \quad (3.39)$$

Por exemplo, se $1 \leq i \leq N - 1$ e $j = i - 1$, temos, a partir da expressão (2.8):

$$\begin{aligned} \eta((i, w), (i - 1, z)) &= \int_0^\infty t q r_{wz} v_{wz} d\{1 - \exp[-(\lambda + \mu_{wz})t]\} = \\ q r_{wz} \frac{\mu_{wz}}{\lambda + \mu_{wz}} \int_0^\infty t(\lambda + \mu_{wz}) \exp[-(\lambda + \mu_{wz})t] dt &= \\ \frac{q r_{wz} \mu_{wz}}{\lambda + \mu_{wz}} \frac{1}{\lambda + \mu_{wz}} &= \frac{q r_{wz} \mu_{wz}}{(\lambda + \mu_{wz})^2}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Procedendo de modo similar obtemos os seguintes resultados:

$$\eta((i, w), (i - 1, z)) = \frac{qr_{wz}}{\mu_{wz}}, \quad i = N; \quad w, z \in E; \quad (3.41)$$

$$\eta((i, w), (i, z)) = \frac{pr_{wz}\mu_{wz}}{(\lambda + \mu_{wz})^2}, \quad 1 \leq i \leq N - 1; \quad w, z \in E; \quad (3.42)$$

$$\eta((i, w), (i, z)) = \frac{pr_{wz}}{\mu_{wz}}, \quad i = N; \quad w, z \in E; \quad (3.43)$$

$$\eta((i, w), (i + 1, z)) = \lambda \sum_{z \in E} \frac{r_{wz}}{(\lambda + \mu_{wz})^2}, \quad 1 \leq i \leq N - 1; \quad w = z \in E; \quad (3.44)$$

$$\eta((i, w), (i + 1, z)) = \frac{1}{\lambda}, \quad i = 0; \quad w = z \in E; \quad (3.45)$$

$$\eta((i, w), (i + 1, z)) = 0, \quad 0 \leq i \leq N - 1; \quad w \neq z; \quad w, z \in E; \quad (3.46)$$

$$\eta((i, w), (j, z)) = 0, \quad j \neq i - 1, i, i + 1; \quad w, z \in E. \quad (3.47)$$

A seguir, utilizando a equação (3.38), obtemos as expressões para η_{iw} :

$$\eta_{0w} = \sum_{z \in E} \eta((o, w), (1, z)) = \eta((0, w), (1, w)) = \frac{1}{\lambda}, \quad w \in E. \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \eta_{iw} &= \sum_{z \in E} [\eta((i, w), (i - 1, z)) + \eta((i, w), (i, z))] + \\ &\eta((i, w), (i + 1, w)) = \sum_{z \in E} \frac{qr_{wz}\mu_{wz}}{(\lambda + \mu_{wz})^2} + \\ &\sum_{z \in E} \frac{pr_{wz}\mu_{wz}}{(\lambda + \mu_{wz})^2} + \lambda \sum_{z \in E} \frac{r_{wz}}{(\lambda + \mu_{wz})^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\eta_{iw} = \sum_{z \in E} \frac{r_{wz}}{\lambda + \mu_{wz}}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad w \in E; \quad (3.49)$$

e finalmente,

$$\eta_{Nw} = \sum_{z \in E} \left(\frac{qr_{wz}}{\mu_{wz}} + \frac{pr_{wz}}{\mu_{wz}} \right) = \sum_{z \in E} \frac{r_{wz}}{\mu_{wz}}, \quad w \in E. \quad (3.50)$$

Observe que fazendo $m = 1$ obtemos:

$$\eta_0 = \frac{1}{\lambda},$$

$$\eta_i = \frac{1}{\lambda + \mu}, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

e

$$\eta_N = \frac{1}{\mu}.$$

Mais uma vez vemos que as expressões coincidem com as em Hunter [15].

Resta agora estabelecer as expressões para $\eta_{iw}^{(\theta)}$. No caso da fila com “feedback” adotaremos uma abordagem diferente da utilizada na seção anterior para encontrar $\eta_{iw}^{(a-)}$ e $\eta_{iw}^{(d)}$. O leitor deve notar que na seção 3.4 $\eta_{iw}^{(a-)}$ e $\eta_{iw}^{(d)}$ foram obtidos a partir das expressões para $Q^{(a)}((i, w), (j, z), t)$ e $Q^{(d)}((i, w), (j, z), t)$, as quais foram explicitadas a partir de uma análise dos caminhos amostrais. No caso da fila com “feedback” essa análise é muito complicada e por essa razão adotaremos um procedimento alternativo para encontrar $\eta_{iw}^{(\theta)}$.

Teorema 3.4 *Se $N < \infty$, $\eta' = (\eta'_0, \eta'_1, \dots, \eta'_N)$, $\eta'_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{im})$ para $i = 0, 1, \dots, N$, $\eta^{(\theta)'} = (\eta_0^{(\theta)'}, \eta_1^{(\theta)'}, \dots, \eta_N^{(\theta)'})$ e $\eta_i^{(\theta)'} = (\eta_{i1}^{(\theta)'}, \eta_{i2}^{(\theta)'}, \dots, \eta_{im}^{(\theta)'})$ para $i = 0, 1, \dots, N$ então, para $\theta = a, d, f, i, o, e$,*

$$(I - P_\theta)\eta^{(\theta)} = \eta, \quad (3.51)$$

onde

$$P_a = P_F + P_D,$$

$$P_d = P_A + P_F,$$

$$P_f = P_A + P_D,$$

$$P_i = P_D,$$

$$P_o = P_A,$$

$$P_j = P_F.$$

Prova:

Em primeiro lugar, devemos notar que a partir do Teorema 2.2 é possível escrever

$$Q^{(\theta)} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} Q_{\theta}^{(k)} \right] * (Q - Q_{\theta}), \quad (3.52)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_a &= Q_F + Q_D, & Q_d &= Q_A + Q_F, & Q_f &= Q_A + Q_D, \\ Q_o &= Q_A, & Q_i &= Q_D, & Q_e &= Q_F. \end{aligned}$$

Seja $Q^{(\theta)*}((i, w), (j, z), s)$ a transformada de Laplace-Stieltjes (TLS) de $Q^{(\theta)}((i, w), (j, z), t)$. Se $\eta^{(\theta)}((i, w), (j, z))$ é finito,

$$\lim_{s \downarrow 0} Q^{(\theta)*'}((i, w), (j, z), s) = Q^{(\theta)*'}((i, w), (j, z), 0) = -\eta^{(\theta)}((i, w), (j, z)).$$

Se $Q^{(\theta)*} = [Q^{(\theta)*}((i, w), (j, z))]$ e $e' = (1, 1, \dots, 1)$, então

$$\eta_{iw}^{(\theta)} = - \sum_{z \in E} \sum_{j \in \mathcal{L}^{(\theta)}} Q^{(\theta)*'}((i, w), (j, z), 0),$$

ou seja,

$$\eta^{(\theta)} = -Q^{(\theta)*'}(0)e.$$

Tomando a transformada de Laplace-Stieltjes da equação (3.52) para $N < \infty$, obtemos, após pré-multiplicação por $[I - Q_\theta^*(s)]$:

$$[I - Q_\theta^*(s)]Q^{(\theta)*}(s) = Q^*(s) - Q_\theta^*(s).$$

Diferenciando em relação a s e tomando o limite para $s \downarrow 0$:

$$-Q_\theta^{*'}(0)Q^{(\theta)*}(0) + [I - Q_\theta^*(0)]Q^{(\theta)*'}(0) = Q^{*'}(0) - Q_\theta^{*'}(0).$$

Mas,

$$Q^{(\theta)*}(0) = P^{(\theta)}, \quad Q_\theta^*(0) = P_\theta, \quad P^{(\theta)}e = e$$

e então, após pós-multiplicação por e , é obtida a equação (3.51):

$$(I - P_\theta)\eta^{(\theta)} = \eta.$$

□

A seguir aplicaremos o Teorema 3.4 a cada um dos Processos Semi-Markovianos imersos.

- Processo de Chegada:

Substituindo $P_a = P_F + P_D$ na equação (3.51) obtemos:

$$(I - P_F - P_D)\eta^{(a)} = \eta. \tag{3.53}$$

A partir das equações (2.34) e (2.35) é possível escrever

$$I - P_F - P_D = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -D & I - F & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & I - F & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I - F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -D & I - F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -K & I - L \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

A expressão (3.53) é então equivalente ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\eta_0^{(a)} = \eta_0; \quad (3.55)$$

$$-D\eta_{i-1}^{(a)} + (I - F)\eta_i^{(a)} = \eta_i, \quad 1 \leq i \leq N - 1; \quad (3.56)$$

$$-K\eta_{N-1}^{(a)} + (I - L)\eta_N^{(a)} = \eta_N. \quad (3.57)$$

Note que, desde que existam $(I - F)^{-1}$ e $(I - L)^{-1}$, as equações (3.56) e (3.57) podem ser reescritas como:

$$\eta_i^{(a)} = (I - F)^{-1}(\eta_i + D\eta_{i-1}^{(a)}), \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad (3.58)$$

$$\eta_N^{(a)} = (I - L)^{-1}(\eta_N + K\eta_{N-1}^{(a)}). \quad (3.59)$$

Resolvendo o sistema por recorrência, até $i = 3$, obtemos:

$$\eta_0^{(a)} = \eta_0,$$

$$\eta_1^{(a)} = (I - F)^{-1}(\eta_1 + D\eta_0),$$

$$\eta_2^{(a)} = (I - F)^{-1}[\eta_2 + D(I - F)^{-1}(\eta_1 + D\eta_0)],$$

$$\eta_3^{(a)} = (I - F)^{-1} \{ \eta_3 + D(I - F)^{-1} [\eta_2 + D(I - F)^{-1} (\eta_1 + D\eta_0)] \}.$$

É fácil perceber que à medida que aumenta o valor de i na equação (3.58) são obtidas equações cada vez mais complicadas, não havendo uma expressão geral para representar $\eta_i^{(a)}$ somente como uma função de η_j , $j \leq i$ e das matrizes $(I - F)^{-1}$ e D , para $0 \leq i \leq N$. Este tipo de representação só é factível para valores baixos de N . Portanto, o método mais prático para a obtenção de $\eta_i^{(a)}$ consiste em resolver iterativamente o sistema de equações para cada caso numérico particular, utilizando o computador. Este comentário também é válido para os processos de partida, de entrada e de saída que apresentaremos a seguir.

- Processo de Partida:

Fazendo $\theta = d$ na equação (3.51) obtemos:

$$(I - P_A - P_F)\eta^{(d)} = \eta. \quad (3.60)$$

A matriz $I - P_A - P_F$ é obtida a partir das equações (2.33) e (2.35):

$$I - P_A - P_F = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I - F & -G & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I - F & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I - F & -G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I - F & -G \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I - L \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Portanto, a expressão (3.60) é equivalente ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\eta_0^{(d)} - \eta_1^{(d)} = \eta_0; \quad (3.62)$$

$$(I - F)\eta_i^{(d)} - G\eta_{i+1}^{(d)} = \eta_i, \quad 1 \leq i \leq N - 1; \quad (3.63)$$

$$(I - L)\eta_N^{(d)} = \eta_N; \quad (3.64)$$

ou seja,

$$\eta_N^{(d)} = (I - L)^{-1}\eta_N; \quad (3.65)$$

$$\eta_i^{(d)} = (I - F)^{-1}(\eta_i + G\eta_{i+1}^{(d)}), \quad 1 \leq i \leq N - 1; \quad (3.66)$$

$$\eta_0^{(d)} = \eta_0 + \eta_1^{(d)}. \quad (3.67)$$

O sistema pode ser resolvido iterativamente a partir da expressão para $\eta_N^{(d)}$.

- Processo de Entrada:

Com $P_i = P_D$ e $I - P_D$ dado por:

$$I - P_D = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -D & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -D & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -K & I \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

obtemos o seguinte sistema a partir da equação (3.51):

$$\eta_0^{(i)} = \eta_0; \quad (3.69)$$

$$-D\eta_{j-1}^{(i)} + \eta_j^{(i)} = \eta_j, \quad 1 \leq j \leq N - 1; \quad (3.70)$$

$$-K\eta_{N-1}^{(i)} + \eta_N^{(i)} = \eta_N; \quad (3.71)$$

onde as equações (3.70) e (3.71) são equivalentes a:

$$\eta_j^{(i)} = \eta_j + D\eta_{j-1}^{(i)}, \quad 1 \leq j \leq N-1; \quad (3.72)$$

$$\eta_N^{(i)} = \eta_N + K\eta_{N-1}^{(i)}. \quad (3.73)$$

- Processo de Saída

Para $\theta = o$, a matriz a ser utilizada na equação (3.51) é:

$$I - P_A = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -G & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & -G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & -G \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

É obtido então o seguinte sistema de equações lineares:

$$\eta_0^{(o)} - \eta_1^{(o)} = \eta_0; \quad (3.75)$$

$$\eta_i^{(o)} - G\eta_{i+1}^{(o)} = \eta_i, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad (3.76)$$

$$\eta_N^{(o)} = \eta_N; \quad (3.77)$$

onde as equações (3.75) e (3.76) podem ser reescritas como:

$$\eta_i^{(o)} = \eta_i + G\eta_{i+1}^{(o)}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad (3.78)$$

$$\eta_0^{(o)} = \eta_0 + \eta_1^{(o)}. \quad (3.79)$$

- Processo de “Feedback”:

Substituindo $P_f = P_A + P_D$ na equação (3.51) obtemos:

$$(I - P_A - P_D)\eta^{(f)} = \eta, \quad (3.80)$$

onde

$$I - P_A - P_D = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -D & I & -G & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & -G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -D & I & -G \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -K & I \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Portanto, a partir da equação (3.80) é possível obter o seguinte sistema de equações lineares:

$$\eta_0^{(f)} - \eta_1^{(f)} = \eta_0; \quad (3.82)$$

$$-D\eta_{i-1}^{(f)} + \eta_i^{(f)} - G\eta_{i+1}^{(f)} = \eta_i, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad (3.83)$$

$$-K\eta_{N-1}^{(f)} + \eta_N^{(f)} = \eta_N. \quad (3.84)$$

Observe que a estrutura do sistema não permite que ele seja resolvido através do processo iterativo mencionado na página 95. Nesse caso, sugerimos o método apresentado por Golub e Van Loan [12], p. 110.

- Processo Externo:

Fazendo $\theta = e$ na equação (3.51) obtemos:

$$(I - P_F)\eta^{(e)} = \eta, \quad (3.85)$$

onde

$$I - P_F = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I - F & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I - F & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I - F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I - F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I - L \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Portanto, devemos resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\eta_0^{(e)} = \eta_0; \quad (3.87)$$

$$(I - F)\eta_i^{(e)} = \eta_i, \quad 1 \leq i \leq N - 1; \quad (3.88)$$

$$(I - L)\eta_N^{(e)} = \eta_N. \quad (3.89)$$

Mas, se existem $(I - F)^{-1}$ e $(I - L)^{-1}$ a solução é imediata e podemos escrever:

$$\eta_0^{(e)} = \eta_0; \quad (3.90)$$

$$\eta_i^{(e)} = (I - F)^{-1}\eta_i, \quad 1 \leq i \leq N - 1; \quad (3.91)$$

$$\eta_N^{(e)} = (I - L)^{-1}\eta_N. \quad (3.92)$$

O leitor deve observar que já possuímos agora todos os elementos necessários à utilização das equações (3.36) e (3.37) para o cálculo das distribuições estacionárias dos Processos Semi-Markovianos $\{(X(t), Z(t))\}$ e $\{(X^{(\theta)}(t), Z^{(\theta)}(t))\}$, $\theta = a, d, f, i, o, e$. É importante notar também que a extensão para $N = \infty$ dos resultados apresentados não é imediata, já que nessa situação nem sempre a cadeia imersa $\{(X_n, Z_n)\}$ é recorrente positiva, como já foi dito anteriormente.

Comentário Final

Para concluir, podemos dizer que em nosso trabalho foi estudada parte da estrutura probabilística da fila $M/M^{ij}/1/N$ com “feedback”. Foi possível mostrar que os processos imersos $\{(X_n^{(a)}, Z_n^{(a)}, T_n^{(a)})\}$, $\{(X_n^{(d)}, Z_n^{(d)}, T_n^{(d)})\}$, $\{(X_n^{(f)}, Z_n^{(f)}, T_n^{(f)})\}$, $\{(X_n^{(o)}, Z_n^{(o)}, T_n^{(o)})\}$, $\{(X_n^{(i)}, Z_n^{(i)}, T_n^{(i)})\}$ e $\{(X_n^{(e)}, Z_n^{(e)}, T_n^{(e)})\}$ são Processos de Renovação Markovianos e também determinar a estrutura do núcleo de cada um desses processos. As distribuições estacionárias das Cadeias de Markov e Processos Semi-Markovianos associados a cada Processo de Renovação Markoviano também foram estudadas.

Uma possível continuação de nosso trabalho seria o estudo do tempo de permanência no sistema, ou seja, da distribuição do tempo que um cliente típico gasta no sistema antes de partir. Ressaltamos que a solução desse problema através do estudo dos Processos de Renovação Markovianos deve ser muito mais trabalhosa que nos casos feitos até agora, para sistemas com um único tipo de cliente (veja [1], [2], [9], [10], [11] e [25]). Os resultados apresentados em nosso trabalho sugerem que possivelmente seriam obtidas equações enormes e com muitas variáveis, o que talvez indicaria a necessidade de uma técnica alternativa. Este fato é consequência da maior complexidade introduzida no sistema pela existência de diferentes tipos de clientes.

Apêndice A

Apêndice A

Seja $\{X_n, T_n\}$ um Processo de Renovação Markoviano irreduzível recorrente com núcleo $A(t)$, onde $A(\infty)1 = 1$.

Seja $\mathcal{H}$ um subconjunto do espaço de estados $\mathcal{L}$ e $\mathcal{H}' = \mathcal{L} - \mathcal{H}$. Para cada $\omega \in \Omega$, com $X_0(\omega) \in \mathcal{H}$, definimos:

$$L_0(\omega) = 0;$$

$$L_{m+1}(\omega) = \inf\{n > L_m(\omega) : X_n(\omega) \in \mathcal{H}\}, \quad m \geq 0;$$

$$Y_m(\omega) = X_{L_m(\omega)}(\omega), \quad m \geq 0;$$

e

$$U_m(\omega) = T_{L_m(\omega)}(\omega), \quad m \geq 0.$$

Então, L_m é o número do passo que leva à m -ésima visita a um estado de $\mathcal{H}$, U_m é o tempo desse salto e Y_m é o estado em $\mathcal{H}$ que está sendo visitado.

É possível pensar no processo $\{Y_m, U_m\}$ como o processo obtido se somente os estados em $\mathcal{H}$ e os tempos de saltos para $\mathcal{H}$ fossem observáveis. O núcleo de A pode ser particionado como:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathcal{H} & \mathcal{H}' \end{array} \\ \begin{bmatrix} C & D \\ E & F \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathcal{H} \\ \mathcal{H}' \end{array} \end{array}$$

Teorema A.1 $\{Y_m, U_m\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com núcleo A' dado por:

$$A' = C + D * \left(\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)} \right) * E.$$

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada na referência [4], p.165-6.

Observe que o item (a) do Teorema 2.2 foi obtido a partir do Teorema A.1 quando fizemos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$, $A' = Q^{(a)}$, $C = E = Q_A$ e $D = F = Q_D + Q_F$. O Teorema 2.2(d) é obtido de modo análogo, com $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$, $A' = Q^{(o)}$, $C = E = Q_D + Q_F$ e $D = F = Q_A$.

Bibliografia

- [1] Berg, J.L. van den, Boxma, O.J. (1987) Sojourn times in feedback queues. Report OS-R8710, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam.
- [2] Berg, J.L. van den, Boxma, O.J., Groenendijk, W.P. (1989) Sojourn times in the $M/G/1$ queue with deterministic feedback. *Commun. Statist. Stochastic Models* **5**(1), 115-129.
- [3] Çinlar, E. (1967) Time dependence of queues with semi-Markovian service times. *J. Appl. Prob.* **4**, 356-364.
- [4] Çinlar, E. (1969) Markov renewal theory. *Adv. Appl. Prob.* **1**, 123-187.
- [5] Çinlar, E. (1975) Markov renewal theory: a survey. *Management Sci.* **21**, 727-752.
- [6] Çinlar, E. (1975) *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [7] Disney, R.L. (1972) A matrix solution for the two server queue with overflow. *Management Sci.* **19**, 254-265.
- [8] Disney, R.L. (1975) Random flow in queueing networks: A review and critique. *AIIE Transactions* **7**, 268-288.
- [9] Disney, R.L. (1981) A note on sojourn times in $M/G/1$ queues with instantaneous, Bernoulli feedback. *Naval Research Logistics Quarterly* **28**, 679-684.

- [10] Disney, R.L., König, D., Schmidt, V. (1984) Stationary queue-length and waiting-time distributions in single-server feedback queues. *Adv. Appl. Prob.* **16**, 437-446.
- [11] Doshi, B.T., Kaufman, J.S. (1987) Sojourn time in a $M/G/1$ queue with Bernoulli feedback. Report AT&T Bell Laboratories, Holmdel, New Jersey.
- [12] Golub, G.H., Loan, C.F. van (1983) *Matrix computations* The Johns Hopkins University Press, Baltimore, M.D.
- [13] Hunter, J.J. (1983) Filtering of Markov renewal queues, I: Feedback queues. *Adv. Appl. Prob.* **15**, 349-375.
- [14] Hunter, J.J. (1983) Filtering of Markov renewal queues, II: Birth-death queues. *Adv. Appl. Prob.* **15**, 376-391.
- [15] Hunter, J.J. (1984) Filtering of Markov renewal queues, III: Semi-Markov processes embedded in feedback queues. *Adv. Appl. Prob.* **16**, 422-436.
- [16] Hunter, J.J. (1985) Filtering of Markov renewal queues, IV: Flow processes in feedback queues. *Adv. Appl. Prob.* **17**, 386-407.
- [17] Magalhães, M.N., Disney, R.L. (1989) Departures from queues with changeover times. *Queueing System Theory & Appl.* **5**, 295-311.
- [18] McNickle, D.C. (1974) The number of departures from a semi-Markov queue. *J. Appl. Prob.* **11**, 825-828.
- [19] Neuts, M.F. (1966) The single server queue with Poisson input and semi-Markov service times. *J. Appl. Prob.* **3**, 202-230.
- [20] Neuts, M.F. (1977) Some explicit formulas for the steady-state behaviour of the queue with semi-Markov service times. *Adv. Appl. Prob.* **9**, 141-157.
- [21] Neuts, M.F. (1977) The $M/G/1$ queue with several types of customers and changeover times. *Adv. Appl. Prob.* **9**, 604-644.

- [22] Neuts, M.F. (1981) *Matrix-geometric solutions in stochastic models : An algorithmic approach*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, M.D.
- [23] Ramaswami, V. (1988) A stable recursion for the steady-state vector in Markov chains of $M/G/1$ type. *Commun. Statist. Stochastic Models* **4**, 183-188.
- [24] Ross, S.M. (1970) *Applied Probability Models with Optimization Applications*. Holden Day, San Francisco.
- [25] Takás, L. (1963) A single-server queue with feedback. *Bell System Tech. J.* **42**, 505-519.