ESTIMAÇÃO DE MODELOS
COM TENDÊNCIAS COMUNS
PARA PROCESSOS ESTOCÁSTICOS
MULTIVARIADOS COM CO-INTEGRAÇÃO :
UMA APLICAÇÃO À PARIDADE DE PODER
DE COMPRA FRANCO FRANCÊS-DÓLAR

Maria Laura Hartpence

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração : Estatística
Orientador : Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira

- São Paulo, Julho de 1994 -

A

Marc

e

a meus filhos

Alexandre, Caroline e Paola

Agradecimentos

Quero agradecer a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, em particular :

- ao Prof. Pedro Valls Pereira, meu orientador, pelas muitas horas a que ele se dedicou para me esclarecer e transmitir seus conhecimentos;

- aos Profs. Pedro Morettin e Fernando de Holanda Barbosa pelos seus valiosos comentários e sugestões com relação a este trabalho;

- a todos os professores do IME, pela sua enorme contribuição à minha formação na área da Estatística;

- a Maria Angélica Longo e Monalisa Guarda, pela sua ajuda na edição deste trabalho em português;

- a meu marido Marc, pela sua paciência e incentivo nestes anos de estudo.

Resumo

Este trabalho apresenta um procedimento (desenvolvido por King et alli., 1991 e Melander et alli., 1992) que permite a estimação da representação de Tendências Comuns de um processo estocástico multivariado, com vetores co-integrados. A função de Respostas de Impulso neste contexto é também obtida, o que permitirá investigar como o sistema é afetado por inovações nas tendências.

Um processo estocástico com co-integração pode admitir as seguintes representações : 1) Modelo Autoregressivo Vetorial (VAR); 2) Mecanismo de Correção de Erro (MCE); 3) VAR Restrito; 4) Wold, e finalmente, 5) Tendências Comuns.

Será mostrado como a partir da estimação da representação do MCE, os parâmetros da representação VAR e VAR Restrito, podem ser obtidos. O conhecimento dos parâmetros do VAR restrito permitem o cálculo dos parâmetros da representação de Wold. Finalmente os parâmetros da representação de Tendências Comuns são identificados usando : 1) as relações que existem entre os parâmetros das representações de Wold e de Tendências, 2) as restrições impostas pela presença de co-integração e 3) restrições adicionais na matriz de variância-covariância do processo, e em alguns casos, outras restrições, que devemos impor para que o sistema seja exatamente identificado.

Usando as técnicas descritas, é feita uma aplicação para um vetor de dimensão 5 compreendendo as seguintes variáveis : preços e taxas de juros na França e nos EUA, e a taxa de câmbio FFr/US\$.

Summary

This work describes a technique (developed by King *et alli.*, 1991 and Melander *et alli.*, 1992) which allows the estimation of the Common Trend representation for a multivariate stochastic process, with cointegration. Impulse Response Functions are also calculated in this context, so that the response of the system to innovations to the trends can be investigated.

A process of this kind can have the following representations : 1) Vector Auto-regressive (VAR); 2) Error Correction Model (ECM); 3) Restricted VAR; 4) Wold representation and finally, 5) Common Trend representation.

It will be shown how the VAR and the Restricted VAR parameters can be obtained taking the ECM estimated parameters as a point of departure. Parameters from the Restricted VAR representation will allow for the obtention of the Wold representation parameters. Finally, the parameters of the Common Trend representation are identified using : 1) the relationships between the Wold and the Common Trend representation, 2) the restrictions imposed by co-integration and 3) additional restrictions in the covariance matrix of the process, and, in some cases, other restrictions which have to be imposed for the system to be exactly identified.

An application of the techniques described above is done on a 5-dimensional vector with the following variables : prices and interest rates in France and the USA, and the exchange rate FF./US\$.

Índice

Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 Modelando Flutuações Macroeconômicas através da Decomposição de Séries em Componentes	1
1.1.1 Modelos de Tendência Estacionária (TE) versus Modelos de Diferença Estacionária (DE)	2
1.1.2 Representação Estocástica do Componente Permanente.....	4
1.2 A Estimação de Modelos de Componente Permanente Estocástico com Tendências Comuns	5
Capítulo 2 - As Representações de Modelo Autoregressivo Vetorial (VAR) e de Mecanismo de Correção de Erro (MCE)	9
2.1 A Representação VAR - Modelo Auto- regressivo Vetorial.....	9
2.1.1 Características Gerais	9
2.1.2 Modelos VAR(p) Estacionários ...	10
2.1.3 Estimação de Modelos VAR(p) Estáveis	16
2.1.3.1 Estimação de Mínimos Quadrados Multivariada	16
2.1.3.2 Outras Técnicas de Estimação	18
2.1.4 Modelos VARMA e Modelos MA de Ordem Finita	18
2.2 A Representação MCE - Mecanismo de Correção de Erro	20
2.2.1 Integração e Co-integração	20
2.2.2 A Representação MCE - Mecanismo de Correção de Erro	22
2.2.3 Estimação de Modelos MCE.....	25
2.3 Exemplo	26

Capítulo 3 - A Representação VAR "Restrita".....	29
3.1 A Representação VAR "Restrita".....	29
3.2 Calculando a Representação VAR a partir da Representação VAR Restrita	32
3.3 Exemplo	32
Capítulo 4 - As Representações de Wold e de Tendências Comuns	36
4.1 A Representação de Wold	36
4.2 A Representação de Tendências Comuns	38
4.3 Exemplo	42
Capítulo 5 - Identificação dos parâmetros da Representação de Tendências Comuns	43
5.1 Procedimento de Identificação	43
5.2 Exemplo	46
Capítulo 6 - Cálculo da Função Resposta de Impulso Associada à Representação de Tendências Comuns	51
6.1 Procedimento de Identificação	51
6.2 Exemplo	53
Capítulo 7 - Uma Aplicação da Metodologia a Séries Macroeconômicas da França e dos EUA	55
7.1 Uma Descrição das Teorias da Paridade do Poder de Compra e da Paridade de Taxas de Juros não Coberta.....	55
7.2 Resultados empíricos	58
7.2.1 Propriedades de Integração e Co-integração dos Dados	58
7.2.2 Estimação da Representação MCE..	62
7.2.3 Análise do Espaço de Co-integração	65
7.2.4 Alguns Testes sobre Restrições do Espaço de Co-integração	70
7.2.5 A Representação VAR Restrita ...	73
7.2.6 A Representação de Wold	75
7.2.7 Identificação dos Parâmetros da Representação de Tendências Comuns ...	76
7.2.8 Cálculo de Respostas de Impulsos Associados a Choques nos Componentes Permanente e Transitório	82

Anexo Capítulo 7 - Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial das 1 ^{as} Diferenças das Séries do Modelo e das Relações de Co-integração.....	89
Capítulo 8 - Conclusões	94
Apêndice A - Alguns Resultados de Algebra Matricial ...	97
Apêndice B - Somas Infinitas de Matrices e Convergência Estocástica	104
Apêndice C - Cálculo dos Coeficientes do Polinomio na Representação de MCE	108
Apêndice D - O Método de Johansen para estimar Processos AR com Co-integração	110
Apêndice E - Dados	116
Referências Bibliográficas	118

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho será a apresentação, no contexto multivariado, de um método de estimação de modelos de componentes permanente e transitório, onde ambos são estocásticos. A hipótese de trabalho será a presença de co-integração entre as séries que constituem o vetor estocástico em estudo, o que dá lugar ao chamados *modelos de Tendências Comuns*. Para a estimação destes modelos, partiremos da estimação de parâmetros em outros tipos de representações do processo estocástico.

Nesta introdução, explicaremos, na seção 1.1, o porquê da escolha de modelos de componente permanente estocástico em vez de usar modelos de componente permanente determinístico.

Na seção 1.2 serão definidas as principais características do modelo de Componente Permanente Estocástico com Tendências Comuns. Apresentaremos também o enfoque deste trabalho e a organização do mesmo.

1.1 Modelando Flutuações Macroeconômicas através da Decomposição de Séries em Componentes

A decomposição de uma série temporal em dois componentes: um componente secular, denominado também de crescimento ou permanente, e um componente cíclico ou transitório, têm constituído nos últimos anos uma das práticas mais usadas no tratamento de séries econômicas tais como produção, inflação, taxas de juros, investimentos, etc. entre outras.

O componente secular ou permanente é geralmente suposto ser não estacionário, no sentido de que o valor esperado do mesmo e/ou de sua variância e/ou função de autocovariância variam com o tempo. O componente transitório ou cíclico é assumido ser estacionário, i.e. média e variância são independentes do tempo, e as autocovariâncias dependem dos intervalos entre os tempos.

1.1.1 Modelos de Tendência Estacionária (TE) versus Modelos de Diferença Estacionária (DE)¹

Até inícios dos anos 80, a técnica comumente usada, dentro da prática de decomposição de uma série em componentes permanente e transitório, era o ajuste da série por uma tendência polinomial determinística, representando o componente secular ou permanente. Os resíduos eram interpretados como os ciclos ou componente transitório. Uma das versões mais populares dentro desta última técnica é a adoção de uma tendência linear determinística, ou seja, modelos, no caso univariado, do tipo :

$$\begin{aligned} z_t &= \alpha + \beta t + c_t \\ \phi(L)c_t &= \theta(L)u_t, u_t \approx \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde z_t é o logaritmo natural da variável em estudo, α e β são parâmetros fixos, L é o operador desfasagem e $\phi(L)$ e $\theta(L)$ são polinômios em L que satisfazem as condições de estacionariedade e invertibilidade, implicando que c_t é um processo estacionário.

O processo estocástico (1.1) é conhecido na literatura por Processo de Tendência Estacionária (TE). Note que (1.1) é um processo não estacionário, sendo que a média do processo varia com o tempo. O determinismo deste tipo de processo é capturado no fato de que embora a autocorrelação de c_t possa ser usada para projeções a curto prazo, as projeções a longo prazo estão dadas fundamentalmente pela média do processo ($\alpha + \beta t$) -componente permanente-, de modo que eventos passados não alteram expectativas a longo prazo.

Uma classe alternativa de processo estocástico não estacionário é a classe em que as diferenças de primeira ou maior ordem constituem processos ARMA estacionários e invertíveis. Estes processos são denominados, às vezes, na literatura, de Processos de Diferença Estacionária (DE). Um exemplo típico deste tipo de processos é o DE de primeira ordem, expresso em logaritmos naturais :

$$\begin{aligned} (1-L)z_t &= \beta + d_t \\ \delta(L)d_t &= \lambda(L)u_t, u_t \approx \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹Segundo Nelson & Plosser (1982)

onde $\delta(L)$ e $\lambda(L)$ são polinômios satisfazendo condições de estacionariedade e invertibilidade. Substituindo recursivamente em (1.2) permite escrever :

$$z_t = z_0 + \beta t + \sum_{j=1}^t d_t \quad (1.3)$$

As equações (1.1) e (1.3) indicam que os dois tipos de processos podem ser escritos como uma função linear do tempo mais um desvio desta função. Entretanto, o intercepto em (1.1) é um parâmetro fixo, enquanto que em (1.3) depende de eventos históricos. Por outro lado, os desvios da tendência em (1.1) constituem um processo estacionário, sendo que os mesmos em (1.3) conformam uma acumulação de erros que é não estacionária.

A diferença fundamental entre os dois processos pode ser observada também em termos das raízes dos polinômios Autoregressivos (AR) e de Média Móvel (MA). No modelo TE, a primeira diferença dá :

$$\phi(L) [(1-L)z_t] = \beta\phi(1) + (1-L)\theta(L)u_t \quad (1.4)$$

onde $\phi(1)$ é a constante obtida avaliando o polinômio $\phi(L)$ em 1.

Para o modelo DE, obtem-se :

$$\delta(L) (1-L)z_t = \beta\delta(1) + \lambda(L)u_t \quad (1.5)$$

A expressão (1.4) indica a presença de uma raiz unitária no polinômio MA do processo ARMA descrevendo a série $[(1-L)z_t]$; a expressão (1.5), por outro lado, envolve uma raiz unitária no polinômio AR, do processo ARMA para z_t .

A discussão precedente possibilita afirmar, em teoria, que se uma série é gerada por um processo TE, não poderemos rejeitar a hipótese nula de uma raiz unitária na parte MA da representação ARMA da série $[(1-L)z_t]$. Do mesmo modo, se a série for gerada por um processo DE da primeira ordem, não poderemos rejeitar a hipótese nula de uma raiz unitária na parte AR, da representação ARMA de z_t .

1.1.2 Representação Estocástica do Componente Permanente

Nelson e Plosser (1982), analisaram um grande número de séries econômicas para os EUA (médias anuais, começando em 1860-1909 até 1970), realizando testes que, usando alguns elementos teóricos mencionados na seção anterior, apresentam evidência consistente com a representação DE para séries não estacionárias.²

Em outras palavras, a análise de Nelson e Plosser sugere que as séries de tempo econômicas não contêm tendências determinísticas, mas tendências estocásticas, i.e. são processos da classe DE.

Prosseguindo com a idéia de que uma série de tempo econômica pode ser decomposta em dois componentes : um permanente, não estacionário e outro transitório, este último estacionário, e assumindo que a série pertence à classe DE, então o componente permanente deve também pertencer à classe DE. Esta decomposição da série pode ser expressa como :

$$\begin{aligned} y_t &= \bar{y}_t + c_t \\ &= (1-L)^{-1}\theta(L)u_t + \psi(L)u_t \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde :

$$\begin{aligned} \bar{y}_t &= (1-L)^{-1}\theta(L)u_t \quad \text{ou} \quad (1-L)\bar{y}_t = \theta(L)u_t \\ c_t &= \psi(L)u_t \end{aligned} \quad (1.7)$$

$\bar{y}_t$ e c_t são os componentes permanente e transitório respectivamente. Os polinômios $\theta(L)$ e $\psi(L)$ satisfazem as condições de estacionariedade e invertibilidade, v_t e u_t são variáveis aleatórias de média 0, variância constante, e sem autocorrelação serial. A equação (1.6) atribui não estacionariedade ao componente secular ou permanente através

²As autocorrelações amostrais das séries em níveis começam tipicamente com valores em torno de 0,96, decaindo lentamente. As primeiras diferenças apresentam autocorrelações positivas no primeiro lag, para logo cair rapidamente, característica de processos MA de primeira ordem. Na maior parte das séries, as primeiras diferenças não mostraram evidência de apresentar raízes unitárias nos termos MA. Mais formalmente, Nelson & Plosser realizaram os testes desenvolvidos por Dickey & Fuller para testar a hipótese nula DE contra a hipótese alternativa TE. Na maioria dos casos, a hipótese nula não foi rejeitada.

de $(1-L)^{-1}$ e fica claro que ele é estocástico, e não determinístico como em (1.1).

1.2 A Estimação de Modelos de Componente Permanente Estocástico com Tendências Comuns

A motivação do presente trabalho é a descrição de técnicas para estimar modelos do tipo da expressão (1.6) na versão multivariada, mais precisamente no contexto de presença de "co-integração" e "tendências comuns", idéias que serão discutidas brevemente a seguir.

Baseado em Melander (1992), são resumidas a seguir as hipóteses de trabalho :

1) As séries temporais podem ser decompostas em componentes permanente (secular) e transitório.

2) O componente permanente, representado por uma tendência, será tratado como um processo estocástico, e não determinístico.

3) Assume-se de que o número de tendências é **relativamente baixo** quando comparado ao número de variáveis macroeconômicas do vetor em estudo.

Formalizando, podemos formular o mecanismo estatístico gerador (MEG) das séries em estudo como :

$$\chi_t = \chi_0 + K\tau_t + \Phi(L)v_t \quad (1.8)$$

onde χ_t é um vetor n-dimensional de séries, χ_0 é o vetor constante contendo os valores iniciais de χ . Os componentes não estacionários (permanentes) e estacionários (transitórios) de χ_t estão capturados por $K\tau_t$ e $\Phi(L)v_t$ respectivamente. K é uma matriz de dimensão $n \times k$, onde $0 < k < n$ é o número de tendências do processo. τ_t é a variável de tendência, vetor de dimensão $k \times 1$. A sequência n-dimensional v_t é um ruído branco com $E(v_t) = 0$ e $E(v_t v_t') = I_n$, matriz identidade de ordem n. Assumimos que $v_s = 0$ para todo $s \leq 0$. Para que $\Phi(L)v_t$ seja estacionário, o polinômio :

$$\Phi(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i L^i$$

deve ser absolutamente somável (no capítulo 2 explicaremos com mais detalhe o conceito de estacionariedade).

Se a tendência é linearmente determinística, então $\tau_t = \mu t$, ou seja, $\tau_t - \tau_{t-1} = \mu$, onde μ é um vetor k -dimensional de constantes, com $0 < k < n$. A idéia de tendência linear estocástica pode ser operacionalizada como um vetor de passeio aleatório com desvio do tipo :

$$\tau_t = \mu + \tau_{t-1} + \varphi_t \quad (1.9)$$

onde $\{\varphi_t\}$ é um ruído branco com $E(\varphi_t) = 0$ e $E(\varphi_t \varphi'_t) = I_k$. Se $K \neq 0$, então, φ_t é um vetor k -dimensional de choques estruturais (independentes), com efeitos permanentes em χ_t . Deve ser enfatizado que estes choques permanentes podem dar lugar a flutuações transitórias em torno da tendência, isto é, v_t pode conter elementos de φ_t .

Devemos notar que a hipótese de tendências estocásticas pode ser rejeitada se permitirmos translações em tendências determinísticas para tempos turbulentos. Para permitir translações, tanto em tendências estocásticas como em tendências determinísticas, podemos reformular o modelo em (1.8) e (1.9) da seguinte forma :

$$\chi_t = \chi_0 + K\tau_t + \Phi(L)(v_t + \Psi D_t) \quad (1.10)$$

e

$$\tau_t = \mu + \mu^* D_t + \tau_{t-1} + \varphi_t \quad (1.11)$$

Aqui D_t é um vetor d -dimensional de 0-1 variáveis dummy.

Até aqui assumimos que a dimensão de K é menor que n , o que parece uma hipótese razoável, e equivale a dizer que existe um número de tendências comuns. Stock e Watson (1988) demonstram que isto resulta em $n-k$ combinações lineares de elementos de χ_t que são estacionários, mesmo que os elementos tomados independentes sejam não estacionários. Dizemos neste caso que existem $n-k$ vetores co-integrados. A demonstração mais detalhada deste fatos será apresentada no capítulo 4.

Modelos tais como (1.10) e (1.11) não são estimados com facilidade, sendo que eles são formulados em função de variáveis não observadas. O objetivo deste trabalho é

justamente apresentar um método que permita a estimação dos parâmetros em (1.10) e (1.11), não diretamente mas mediante a estimação dos parâmetros de representações alternativas do processo estocástico x_t e logo calculando os parâmetros do modelo (1.10)-(1.11) mediante a identificação das relações existentes entre estes parâmetros e os parâmetros das representações alternativas.

Temos cinco possíveis formas de representar um processo estocástico multivariado não estacionário, com co-integração : 1) Modelo Autoregressivo Vetorial (VAR); 2) Mecanismo de Correção de Erro (MCE); 3) VAR Restrito; 4) Wold, e finalmente, 5) Tendências Comuns.

Essencialmente, o método proposto para estimar o modelo (1.10)-(1.11), consiste em estimar os parâmetros no modelo MCE e partir destas estimativas para obter sequencialmente os parâmetros do modelo VAR restrito, da representação de Wold e, finalmente, da representação de Tendências Comuns.

No capítulo 2, abordamos os conceitos de modelo Autoregressivo Vetorial (VAR), Médias Móveis (MA) e Autoregressivo-Médias Móveis (ARMA) Vetoriais, para logo introduzir o conceito de co-integração e de modelo de Mecanismo de Correção de Erro. São apresentados também os métodos de estimação para estas representações.

No capítulo 3 apresentamos a representação VAR restrita e o procedimento de identificação dos parâmetros da representação VAR a partir dos parâmetros da representação VAR restrita.

O capítulo 4 trata da representação de Wold e como, a partir desta, podemos obter a representação de Tendências Comuns.

O capítulo 5 explica detalhadamente o processo de cálculo dos parâmetros do modelo de Tendências Comuns a partir dos parâmetros que já dispomos em representações anteriores.

O capítulo 6 mostra como calcular as funções de Resposta de Impulsos para aquela representação.

Finalmente, o capítulo 7 desenvolve um exemplo de aplicação da metodologia descrita nos capítulos anteriores para um vetor compreendendo as seguintes variáveis : preços e taxas de juros na França e nos EUA, e a taxa de câmbio FFr/US\$.

Adicionalmente, são apresentados 5 apêndices com alguns resultados de álgebra matricial e probabilidade frequentemente usados neste trabalho (apêndices A e B), o cálculo do polinômio em L na representação do MCE (apêndice C), a metodologia de Johansen & Juselius para a estimação de modelos de MCE (apêndice D) e os dados usados no exemplo desenvolvido no capítulo 7 (apêndice E).

Capítulo 2

As Representações de Modelo Autoregressivo Vetorial (VAR) e de Mecanismo de Correção de Erro (MCE)

Neste capítulo abordamos, rapidamente, as principais características do Modelo Autoregressivo Vetorial (VAR) de ordem finita, que constitui a primeira representação, para uma série temporal, mencionada no capítulo 1. São apresentadas as propriedades dos processos VAR estacionários e o método de estimação destes modelos. Adicionalmente, agregam-se as definições, em um contexto mais geral, dos modelos Autoregressivos-Médias Móveis (VARMA) e Médias Móveis (MA) vetoriais. Estes temas são tratados na seção 2.1.

A representação do Mecanismo de Correção de Erro (MCE) é tratada logo após, na seção 2.2, introduzindo o conceito de co-integração, assim como o método de estimação daquela representação.

Por último, na seção 2.3, exibimos um exemplo para esclarecer os conceitos discutidos.

2.1 A Representação VAR - Modelo Autoregressivo Vetorial

2.1.1 Características Gerais

Definição 2.1 O modelo ou representação da forma :

$$\chi_t = \rho + A_1\chi_{t-1} + A_2\chi_{t-2} + \dots + A_p\chi_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

onde

(i) $\chi_t = (\chi_{1t}, \dots, \chi_{nt})'$ é um vetor estocástico de dimensão $n \times 1$,

(ii) as A_i são as matrizes dos coeficientes de dimensão $n \times n$,

(iii) $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)'$ é um vetor fixo $n \times 1$ contendo os termos de intercepto, permitindo que a média de χ_t seja diferente de 0,

(iv) $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{nt})'$ é um ruído branco ou seja, $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t \varepsilon'_t) = \Sigma$ é uma matriz não singular e $E(\varepsilon_t \varepsilon'_s) = 0$ para $s \neq t$. Alternativamente $\{\varepsilon_t\}$ pode ser um processo de inovação n -dimensional, ou seja, com $E(\varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ e $E(\varepsilon_t \varepsilon'_t) = \Sigma$.

é denominado por modelo VAR(p) (Modelo Autoregressivo Vetorial de ordem p).

A expressão (2.1) pode ser escrita igualmente como :

$$A(L)\chi_t = \rho + \varepsilon_t \quad (2.2)$$

onde $A(L)$ é :

$$A(L) = I_n - A_1 L - \dots - A_p L^p \quad (2.3)$$

2.1.2 Modelos VAR(p) Estacionários

Definição 2.2 Seja $\{\chi_t\}$ um processo estocástico de dimensão n . O processo χ_t é fracamente estacionário ou estacionário de segunda ordem se :

- (i) $E(\chi_t) = \mu < \infty$ para todo t ,
- (ii) $E[(\chi_t - \mu)(\chi_t - \mu)'] = \Sigma_\chi < \infty$ para todo t ,
- (iii) $E[(\chi_t - \mu)(\chi_{t-h} - \mu)'] = \Gamma_\chi(h) < \infty$ para todo t e h ,

onde μ é um vetor n -dimensional das médias, Σ_χ é a matriz de covariância de dimensão $n \times n$ e $\Gamma_\chi(h)$ é a matriz de autocovariância de dimensão $n \times n$, com $\Gamma_\chi(0) = \Sigma_\chi$.

No futuro, quando falarmos de processos estacionários, estaremos nos referindo a modelos fracamente estacionários, também chamados de estacionários em sentido restrito.

Para estudar as condições de estacionariedade na representação VAR(p), defina o operador :

$$\Phi(L) := \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i L^i \quad \text{tal que} \quad (2.4)$$

$$\Phi(L)A(L) = I_n$$

O operador $\Phi(L)$, se existir, é o inverso de $A(L)$, e é denotado às vezes por $A(L)^{-1}$. Se $\Phi(L)$ existe, o operador $A(L)$ é chamado de invertível.

Definição 2.3 Seja o processo VAR(p) definido em (2.1) um processo estacionário. Este processo é chamado de causal (ou mais especificamente ser uma função causal de ε_t) se existe uma sequência de constantes $\{\Phi_i\}$ tal que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Phi_i| < \infty \quad \text{e} \quad x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.5)$$

Proposição 2.1 Seja $A(L)$ uma matriz polinomial. Se $|A(z)| \neq 0$ para $|z| \leq 1$, (ou seja, as raízes de $|A(z)|$ estão todas fora do círculo unitário), então $A(L)^{-1} = \Phi(L)$ onde :

$$\Phi(L) := \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i L^i \quad (2.6)$$

existe, e os coeficientes matriciais de $\Phi(L) = A(L)^{-1}$ são absolutamente somáveis.

Demonstração. Se $|A(z)| \neq 0$ para $|z| \leq 1$, então $A(z)$ é não singular para $|z| \leq 1$, e a matriz $A(z)^{-1} = \Phi(z) = \text{Adj}[A(z)]/|A(z)|$ existe para $|z| \leq 1$. Notando que cada um dos elementos de $\Phi(z)$ é uma função racional de z , sem singularidades para $|z| \leq 1$, podemos então fazer uma expansão em séries de potências convergente para $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i z^i \quad , \quad |z| \leq 1 \quad (2.7)$$

Consequentemente $\Phi_i z^i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Em particular, para $z=1$, $\Phi_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$, o que resulta em que :

$$\Phi(l) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i < \infty, \quad (2.8)$$

os coeficientes matriciais de $\Phi(L)$ são absolutamente somáveis. ■

Proposição 2.2 Seja um processo VAR(p) :

$$A(L)\chi_t = \rho + \varepsilon_t \quad (2.9)$$

onde χ_t é um vetor n-dimensional, ε_t é um ruído branco n-dimensional de média 0 e matriz de covariância Σ_ε , ρ é uma matriz de constantes n-dimensional e $A(L)$ é uma matriz polinomial. O processo (2.9) é estacionário causal se e somente se $A(L)$ é uma matriz polinomial com as raízes fora do círculo unitário.

Demonstração.

⇒ O processo (2.9) é estacionário causal.

Primeiro, mostraremos para $p=1$. Para $p=1$, o processo (2.9) fica :

$$(I_n - A_1 L)\chi_t = \rho + \varepsilon_t \quad (2.10)$$

que, por substituição recursiva, pode ser escrito como :

$$\chi_t = (I_n + A_1 + \dots + A_1^j)\rho + A_1^j \chi_{t-j} + \sum_{i=0}^j A_1^i \varepsilon_{t-i} \quad (2.11)$$

Aplicando esperança em (2.11) obtem-se :

$$E(\chi_t) = (I_n + A_1 + \dots + A_1^j)\rho + A_1^j E(\chi_{t-j}) + \sum_{i=0}^j A_1^i E(\varepsilon_{t-i}) \quad (2.12)$$

Como $\{\chi_t\}$ é estacionário, deve verificar-se que, na expressão (2.12) (ver apêndice B, seção B.2), para $j \rightarrow \infty$,

(i) a expressão $\sum_{i=0}^{\infty} A_1^i$ convirja e,

(ii) A_1^j tenda a 0.

Assumindo que a matriz A_1 tem n autovalores diferentes λ_i , ela pode ser escrita como (ver apêndice A, seção A.3) :

$$A_1 = P\Lambda P^{-1} \quad (2.13)$$

onde P é uma matriz não singular de dimensão $n \times n$, e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Assim, tem-se :

$$A_1^j = P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1} \dots P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^j P^{-1} \quad (2.14)$$

Ora,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A_1^j = \lim_{j \rightarrow \infty} P\Lambda^j P^{-1} = P \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \Lambda^j \right) P^{-1} = 0 \quad (2.15)$$

se $|\lambda_i| < 1$ para $i=1, \dots, n$. Por outro lado, se isto é verdade, a sequência de matrizes em (i) é convergente :

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_1^j = (I_n - A_1)^{-1} \quad (2.16)$$

Então, se o processo (2.11) é estacionário, $|\lambda_i| < 1$ para $i=1, \dots, n$. Isto é equivalente a dizer, pela definição de autovalores (ver apêndice A, seção A.2), que as raízes do polinômio característico de A_1 , $|\lambda I_n - A_1|$, estão todas dentro do círculo unitário. É fácil ver que se isto é verdade, as raízes de $|I_n - A_1 z|$ estão fora do círculo unitário.

Para $p > 1$, o processo (2.9) pode ser escrito como um processo VAR(1) de dimensão np :

$$Y_t = u + AY_{t-1} + U_t \quad (2.17)$$

onde :

$$Y_t = \begin{bmatrix} \chi_t \\ \chi_{t-1} \\ \vdots \\ \chi_{t-p+1} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad U_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$(np \times 1) \quad \quad (np \times 1) \quad \quad (np \times np) \quad \quad (np \times 1)$

Se o processo (2.17) é estacionário causal, então pela discussão acima :

$$|I_{np} - Az| \neq 0 \text{ para } |z| \leq 1 \quad (2.19)$$

É fácil mostrar que :

$$|I_{np} - Az| = |I_n - A_1 z - \dots - A_p z| \quad (2.20)$$

Assim, se (2.17) é um processo estacionário causal, por (2.19) e (2.20), temos :

$$|I_{np} - Az| = |I_n - A_1 z - \dots - A_p z| \neq 0 \text{ para } |z| \leq 1 \quad (2.21)$$

$\Leftarrow$ As raízes de polinômio $A(L)$ em (2.9) estão todas fora do círculo unitário.

$A(L)$ é invertível pela proposição 2.1, portanto fazendo $A(L)^{-1} = \Phi(L)$, e pre-multiplicando (2.8) por $\Phi(L)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \chi_t &= \Phi(L)\rho + \Phi(L)\varepsilon_t \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \right) \rho + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \varepsilon_{t-i} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$\Phi(L)$ é absolutamente somável pela proposição 2.1, e ε_t é uma variável aleatória de média e variância finitas. Como resultado os momentos de primeira e segunda ordens de ambos os termos de (2.9) são definidos (ver apêndice B, seção B.2), sendo então definidas a média e variância de χ_t .

A média de χ_t é :

$$\begin{aligned} E(\chi_t) &= E(\Phi(L)\rho) + E(\Phi(L)\varepsilon_t) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \right) \rho + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i E(\varepsilon_{t-i}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \right) \rho = \mu_{\infty} \end{aligned} \quad (2.23)$$

o que verifica (i) na definição 2.2.

A autocovariância de χ_t com relação a χ_{t-h} , é também finita e depende só de h , verificando (iii) na definição 2.2 :

$$\begin{aligned}\Gamma_x(h) &= E(\chi_t - \mu)(\chi_{t-h} - \mu)' \\ &= \left(\sum_{i=0}^{h-1} \Phi_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{h+i} \varepsilon_{t-h-i} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j E(\varepsilon_{t-h-j}) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{h+i} \Sigma_{\varepsilon} \Phi_i' \langle \infty\end{aligned}\quad (2.24)$$

Também, por (2.11), verificamos (ii) na definição 2.2 :

$$\begin{aligned}\Sigma_x &= \Gamma_x(0) = E(\chi_t - \mu)(\chi_t - \mu)' \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \Sigma_{\varepsilon} \Phi_i' \langle \infty\end{aligned}\quad (2.25)$$

Assim, fica provada a proposição ■

Observações :

1) A forma (2.22) é chamada *Representação de Média Móvel (MA)*, onde χ_t é expressado em termos dos valores passados e presentes do vetor ε_t e sua média μ .

2) No futuro, quando falaremos de processos VAR(p) estacionários, estaremos nos referindo a processos estacionários causais. A seguir desenvolvemos um exemplo de processo "estacionário" não causal. Seja um AR(1), univariado :

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.26)$$

onde $|a_1| > 1$, ou seja, a raiz do polinômio $|1 - a_1 z|$ está dentro do círculo unitário, e onde naturalmente, não se

verifica que $\sum_{j=0}^{\infty} a_1^j$ é um polinômio absolutamente somável. O processo (2.26) pode ser escrito como :

$$y_t = a_1^{-1} y_{t-1} - a_1^{-1} \varepsilon_{t-1} \quad (2.27)$$

que, após substituição recursiva, dá :

$$y_t = - \sum_{i=1}^{\infty} a_1^{-i} \varepsilon_{t-i} \quad (2.28)$$

Esta forma de representação, que é definida matematicamente, é usualmente considerada como inaceitável. Típicamente, $\{x_t\}$ é considerado como função de $\{\varepsilon_t, s \leq t\}$.

3) Os coeficientes Φ_i em (2.6) são facilmente obtidos a partir de (2.4), identificando os coeficientes dos termos da mesma potência em :

$$\begin{aligned} I_n &= (\Phi_0 + \Phi_1 L + \dots) (I_n - A_1 L - \dots - A_p L^p) \\ &= \Phi_0 + (\Phi_1 - \Phi_0 A_1) L + (\Phi_2 - \Phi_1 A_1 - \Phi_0 A_2) L^2 + \dots + (\Phi_i - \sum_{j=1}^i \Phi_{i-j} A_j) L^i + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $A_j = 0$ para $j > p$. Assim, Φ_i pode ser obtido recursivamente usando-se :

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= I_n \\ \Phi_i &= \sum_{j=1}^i \Phi_{i-j} A_j \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.1.3 Estimação de Modelos VAR(p) Estáveis

2.1.3.1 Estimação de Mínimos Quadrados Multivariada

Seja dada uma série de tempo $x_1, \dots, x_T$, ou seja, a disponibilidade de uma amostra de tamanho T, para cada uma das n variáveis. Além disso, suponha que existem p valores pré-amostrais para cada variável $x_{-p+1}, \dots, x_0$. Particionando a série de tempo em valores amostrais e pré-amostrais de maneira conveniente, definimos :

$$X := [x_1, \dots, x_T] \quad n \times T$$

$$B := [\rho, A_1, \dots, A_p] \quad n \times (np+1)$$

$$z_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \chi_t \\ \chi_{t-p} \end{bmatrix} \quad (np+1) \times 1 \quad (2.31)$$

$$Z := [z_0, \dots, z_{T-1}] \quad (np+1) \times T$$

$$E := [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T] \quad n \times T$$

Usando esta notação para $t=1, \dots, T$, o modelo (2.8) pode ser escrito de maneira compacta como :

$$X = BZ + E \quad (2.32)$$

Pode-se demonstrar (Lutkepohl, 1993, págs.63-65) que o estimador de mínimos quadrados ordinários de B é dado por :

$$\hat{B} = XZ'(ZZ')^{-1} \quad (2.33)$$

onde a matriz de covariância de $\hat{B}$ estimada está dada por:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{B}) &= (ZZ')^{-1} \otimes \hat{\Sigma}_\varepsilon, \\ \hat{\Sigma}_\varepsilon &= \frac{1}{T - np - 1} X(I_T - Z'(ZZ')^{-1}Z)X' \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pode-se demonstrar que os estimadores (2.33) e (2.34) são não viesados e consistentes (Lutkepohl, 1993, págs.65-69).

É interessante notar o seguinte. O estimador de Mínimos Quadrados pode ser escrito de uma forma alternativa :

$$\hat{b} = \text{vec}(\hat{B}') = (I_n \otimes (ZZ')^{-1}Z) \text{vec}(X') \quad (2.35)$$

onde vec denota o operador vetorização. Nesta notação é fácil ver que na verdade o estimador (2.33) equivale a

calcular mínimos quadrados ordinários para cada uma das n equações separadamente.

2.1.3.2 Outras Técnicas de Estimação

O Estimador de Verossimilhança para B dá idênticos resultados aos de Mínimos Quadrados Ordinários Multivariado, portanto, possui as mesmas propriedades de ser não tendencioso e consistente, além de possuir distribuição normal assintoticamente.

Uma técnica interessante consiste na aplicação de Mínimos Quadrados Recursivos, que permite ver o comportamento do estimador de B ao longo do tempo. Para mais detalhes sobre esta técnica ver Harvey (1990, págs. 52-56).

2.1.4 Modelos VARMA e Modelos MA de Ordem Finita

O modelo VAR faz parte da versão mais geral do denominado modelo VARMA (Modelo Autoregressivo-Médias Móveis Vetorial). No modelos VARMA, ε_t em (2.1) e (2.2) já não é mais um ruído branco ou inovação, mas apresenta uma estrutura de autocorrelação que em sua versão mais simples faz com que ε_t tenha uma representação do tipo média móvel finita :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= u_t + M_1 u_{t-1} + \dots + M_q u_{t-q} \\ \text{ou} \\ \varepsilon_t &= M(L)u_t \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde :

u_t é um ruído branco, com $E(u_t)=0$, $E(u_t u_t')=\Sigma$ e $E(u_t u_s')=0$ para $t \neq s$, e $M(L)$ é definida como :

$$M(L) = I_n + M_1 L + \dots + M_q L^q \tag{2.37}$$

Assim, temos a seguinte definição :

Definição 2.4 O modelo representado pela expressão :

$$A(L)\chi_t = \rho + M(L)u_t \tag{2.38}$$

onde $A(L)$ e $M(L)$ são definidas como em (2.3) e (2.37), é denominado modelo VARMA(p, q), ou Modelo Autoregressivo-Médias Móveis Vetorial.

Note que no Modelo VAR(p), no contexto do modelo VARMA definido acima, $M(L)$ é simplesmente uma matriz identidade.

Proposição 2.3 Seja o processo estocástico VARMA(p,q) definido na expressão (2.38). Se todas as raízes do polinômio matricial $A(L)$ estão fora do círculo unitário, $A(L)$ é invertível, o que implica que o processo é estacionário.

Demonstração. Ver Brockwell & Davis (1991, pág. 408), e a demonstração da proposição 2.2. ■

A partir de (2.38), multiplicando a direita por $A(L)^{-1} =: \Phi(L)$ (se $A(L)$ é invertível), pode ser obtida uma representação puramente MA de ordem infinita :

$$\begin{aligned} A(L)\chi_t &= \rho + M(L)\varepsilon_t \\ \chi_t &= \Phi(L)\rho + \Phi(L)M(L)\varepsilon_t \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \right) \rho + \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i \varepsilon_{t-i} \\ &= \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i \varepsilon_{t-i} \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $\Phi(L)M(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i \varepsilon_{t-i}$, sendo que esta última expressão converge.

Definição 2.5 Seja o processo VARMA(p,q) definido na expressão (2.38). Se todas as raízes do polinômio matricial $M(L)$ estão fora do círculo unitário, $M(L)$ tem inversa, e o processo é chamado de invertível.

Se um processo VARMA(p,q) é invertível, pode ser escrito como um processo VAR de ordem infinita :

$$\begin{aligned} A(L)\chi_t &= \rho + M(L)\varepsilon_t \\ M(L)^{-1}A(L)\chi_t &= M(L)^{-1}\rho + \varepsilon_t \\ \Pi(L)\chi_t &= M(L)^{-1}\rho + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde

$$M(L)^{-1}A(L) = \Pi(L) = I_n - \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i \quad (2.41)$$

é uma sequência de matrizes convergente.

Quando $A(L)$ em (2.38) é uma matriz identidade, obtemos o denominado Modelo MA ou Modelo de Média Móvel Vetorial.

Definição 2.6 O modelo representado pela expressão :

$$\chi_t = \rho + M(L)u_t \quad (2.42)$$

onde $M(L)$ corresponde à definição dada em (2.37), é denominado Modelo MA(q) ou Modelo de Média Móvel Vetorial de ordem q.

Se as raízes do polinômio $M(L)$ estão todas fora do círculo unitário, então temos a presença de um processo MA invertível, que pode ser escrito como um processo VAR de ordem infinita.

2.2 A Representação MCE - Mecanismo de Correção de Erro

2.2.1 Integração e Co-integração

Seja $\{\chi_t\}$ um processo AR(p) do tipo da expressão (2.2), não estacionário, onde χ_t é um vetor $n \times 1$. Sendo que o processo é não estacionário, existem algumas raízes do polinômio matricial $A(L)$ que estão sobre o círculo unitário, assumindo que todas as outras raízes estão fora do círculo unitário (não consideramos o caso onde o polinômio $A(L)$ tem raízes dentro do círculo unitário, que corresponde ao caso explosivo). Suponha que existem d raízes unitárias. Multiplicando à direita pela matriz adjunta de $A(L)$, este processo pode ser escrito como :

$$\begin{aligned} A(L)\chi_t &= \rho + \varepsilon_t \\ |A(L)|\chi_t &= A(L)^* \rho + A(L)^* \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde $A(L)^*$ é a matriz adjunta de $A(L)$.

O i -ésimo componente de χ_t tem a representação :

$$|A(L)|\chi_{it} = \bar{r}_i + \bar{m}_i(L)v_{it} \quad (2.44)$$

onde v_{it} é um ruído branco.

Se $|A(L)|$ tem d raízes unitárias, sendo que as outras estão fora do círculo unitário, a expressão (2.44) pode ser escrita como :

$$\alpha(L)(1-L)^d\chi_{it} = \alpha(L)\Delta^d\chi_{it} = \bar{r}_i + \bar{m}_i(L)v_{it} \quad (2.45)$$

onde $\alpha(L)$ é um operador invertível. Consequentemente, $\Delta^d\chi_{it}$ é um processo estacionário. Em outras palavras, se o processo VAR(p) é não estacionário, cada um dos componentes do vetor χ_t pode se tornar estacionário após ter sido diferenciado d vezes. Note, no entanto, que quando o vetor é considerado conjuntamente, pode não ser necessário diferenciar d vezes devido a cancelamentos. Para ilustrar esse ponto considere o processo :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L \right) \begin{bmatrix} \chi_{1t} \\ \chi_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Em (2.46) temos que :

$$|A(L)| = \begin{bmatrix} 1-L & 0 \\ 0 & 1-L \end{bmatrix} = (1-L)^2 \quad (2.47)$$

tem duas raízes unitárias. No entanto, é óbvio que o vetor χ_t torna-se estacionário após uma diferenciação.

Os comentários feitos nas linhas anteriores podem facilmente ser estendidos para os processos ARMA(p,q) não estacionários, os quais podem ser transformados em processos estacionários após um número conveniente de diferenciações. Assim temos a seguinte definição :

Definição 2.7 (Granger, 1981): Uma série sem componente determinístico com uma representação ARMA estacionária e invertível, após ter sido diferenciada d vezes, é dita integrada de ordem d , denotada por $y_t \sim I(d)$.

Nesta definição e notação, por exemplo, uma série qualquer dita $I(0)$ é estacionária; se a série é $I(1)$, isto significa que a primeira diferença será estacionária.

A definição 2.7 pode ser estendida a uma série temporal vetorial, ou seja, podemos trabalhar com um vetor x_t cujos componentes sejam todos $I(d)$, e dizemos que $x_t \sim I(d)$.

Agora, um vetor x_t n -dimensional, embora tendo todos os seus componentes $I(d)$ com $d > 0$, ou seja, não estacionários, pode apresentar combinações lineares de seus componentes que sejam estacionários. Introduzimos agora a definição de co-integração.

Definição 2.8 (Engle and Granger, 1987; Johansen, 1988) : Os componentes do vetor x_t são ditos co-integrados de ordem d, b , denotado por $x_t \sim CI(d, b)$, se

(i) todos os componentes de x_t são $I(d)$;

(ii) existe uma matriz α ($\neq 0$) de dimensão $n \times r$ tal que $z_t = \alpha' x_t \sim I(d-b)$, $b > 0$. Os vetores que compoem α são chamados de vetores co-integrados.

Por exemplo, para um vetor $x_t \sim I(1, 1)$ de dimensão $n \times 1$, a definição 2.8 implica que $\{x_t\}$ não é estacionário, mas $\{x_t - x_{t-1}\}$ é estacionário. No entanto, existem combinações lineares dos componentes de x_t que são estacionários. Considere, por exemplo um vetor cujos componentes são Renda (y_t) e Consumo (c_t) no Brasil para um período de 20 anos, expressados em logaritmos. Tipicamente, estas séries são não estacionárias. No entanto, hipoteticamente, o consumo pode guardar uma relação fixa com a renda, por exemplo $C_t/Y_t = e^k$, com o qual $\ln(C_t) - \ln(y_t) = c_t - y_t = k$. Aqui $\alpha = [1 \ -1]$.

2.2.2 A Representação MCE - Mecanismo de Correção de Erro

Seja x_t um vetor $I(1)$, de dimensão $n \times 1$, cujos componentes são $CI \sim (1, 1)$ com r vetores co-integrados, representado por um modelo VAR(p) de ordem finita :

$$A(L)x_t = \rho + \rho^* D_t + \varepsilon_t \quad (2.48)$$

onde :

$$A(L) = I_n - \sum_{j=1}^p A_j L^j, \quad (2.49)$$

ρ e ρ^* são vetores $n \times 1$ de constantes, D_t é um escalar que representa uma variável dummy e $\{\varepsilon_t\}$ é um ruído branco com $E\{\varepsilon_t\}=0$ e $E\{\varepsilon_t \varepsilon_t'\}=\Sigma$, uma matriz positiva definida.

Defina $A(L)$ como :

$$A(L) = A^*(L)(1-L) + A(1)L \quad (2.50)$$

onde

$$A(1) = I_n - \sum_{j=1}^p A_j \quad (2.51)$$

Pode ser demonstrado (ver apêndice C) que :

$$A^*(L) = I_n - \sum_{i=1}^{p-1} A_i^* L^i \quad \text{onde} \quad A_i^* = - \sum_{j=i+1}^p A_j \quad (2.52)$$

Substituindo (2.50) em (2.48) temos :

$$\begin{aligned} [A^*(L)(1-L) + A(1)L]\chi_t &= \rho + \rho^* D_t + \varepsilon_t \\ A^*(L)\Delta\chi_t + A(1)\chi_{t-1} &= \rho + \rho^* D_t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

o que permite reescrever (2.48) como :

$$A^*(L)\Delta\chi_t = \rho + \rho^* D_t - A(1)\chi_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.53)$$

onde $\Delta:=1-L$ é o operador de primeira diferença.

Como χ_t é integrada de ordem um, $|A(L)|$ possui n raízes unitárias. Portanto $|A(1)|=0$, implicando que a matriz

polinomial n -dimensional $A(1)$, tem posto inferior a n . Suponha que :

$$\text{posto}[A(1)] = r, \quad 0 < r < n \quad (2.54)$$

Então a matriz $A(1)$ pode ser escrita como o produto de duas matrizes γ e α de dimensão $n \times r$ ¹:

$$A(1) = \gamma\alpha' \quad (2.55)$$

Por outro lado, segue de (2.53) que $[A(1)\chi_{t-1}]$ deve ser estacionário, sendo que o lado esquerdo da equação (2.53) denota um vetor estacionário. Então, pode ser escrito como função linear de um vetor estacionário. Por (2.55) temos :

$$A(1)\chi_{t-1} = \gamma\alpha'\chi_{t-1} = \gamma z_{t-1} \quad (2.56)$$

Portanto $\alpha'\chi_t = z_t$ é estacionário, e α , conforme a definição 2.6, é a matriz dos vetores co-integrados, representando r relações de co-integração. Assim, $\chi_t \sim C(1,1)$, com r vetores co-integrados.

Note que se $\text{posto}[A(1)] = 0$, não temos vetores co-integrados, e a expressão (2.53) se reduz a um modelo de primeiras diferenças AR com desvio ("drift"), isto é, a representação válida é VAR em diferenças. Por outro lado se $\text{posto}[A(1)] = n$, não há co-integração, mas todas as variáveis são estacionárias; a representação válida é a de VAR(p) em níveis.

Substituindo (2.56) em (2.53), obtemos a chamada representação de Mecanismo de Correção de Erro (MCE) :

$$\begin{aligned} A^*(L)\Delta\chi_t &= \rho + \rho^*D_t - \gamma\alpha'\chi_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \rho + \rho^*D_t - \gamma z_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.57)$$

que consiste simplesmente em ressaltar a restrição que colocamos em $A(1)$, com relação ao posto desta matriz. Nesta representação, as variáveis explicativas são o passado de $\Delta\chi_t$, que representa os efeitos de curto prazo², e o

¹ Note que, para $r > 1$, as matrizes α e γ não são únicas. Se $r=1$, α é único a menos de sinal.

² No caso de exogeneidade fraca de alguma/algumas variáveis do sistema, o presente de $\Delta\chi_t$ também pode se tornar variável explicativa no sistema. Ver Ericsson, N. R., 1992

desequilíbrio entre componentes do vetor χ_t no período anterior, considerando a relação de equilíbrio existente no longo prazo (Engle and Granger, 1987).

Como $A(1)$ é uma matriz singular, técnicas padrões para inverter a forma (2.53) não podem ser utilizadas para obter a representação de Wold, que é um passo necessário para a obtenção da representação de Tendências Comuns, como veremos mais adiante³. No entanto, a partir da estimação dos parâmetros da representação MCE, podemos obter uma representação alternativa, denominada VAR "restrita", que nos permitirá obter com maior facilidade a representação de Wold, como será explicado mais detalhadamente nos próximos capítulos.

2.2.3 Estimação de Modelos MCE

Para estimar (2.53), o método de Johansen (1988, 1989, 1991), baseado na função de verossimilhança da amostra, pode ser usado. Este método calcula $A(1)$ - e permite testar sobre o posto de $A(1)$ -, os vetores α e γ , de onde derivaremos os parâmetros da polinomial $A^*(L)$ e o resto dos parâmetros. Basicamente, o método calcula a matriz α , considerando os quadrados das correlações canônicas de R_{1t} com relação a R_{0t} , onde R_{0t} são os resíduos da regressão de $\Delta\chi_t$ sobre as diferenças desfasadas $\Delta\chi_{t-1}, \dots, \Delta\chi_{t-p+1}$, e R_{1t} são os da regressão de χ_{t-1} sobre as diferenças $\Delta\chi_{t-1}, \dots, \Delta\chi_{t-p+1}$. Os vetores de α são as r maiores variáveis canônicas. Para testar sobre a dimensão do espaço de co-integração, i.e. o posto da matriz $A(1)$, são calculadas a estatística Lambdamax e a estatística do Traço. Estas estatísticas são usadas para testar sequencialmente $H_0 : \text{Posto}[A(1)] = r_0$ vs $H_a : \text{Posto}[A(1)] = r_1 > r_0$.

Os estimadores dos coeficientes do polinômio $A^*(L)$, das constantes, dos coeficientes das variáveis exógenas e de $\gamma\alpha'$ tem as propriedades assintóticas usuais, se χ_t é um processo VAR(p) Gaussiano. A estimação consistente de γ e α separadamente requer restrições adicionais, sendo que existe um problema de identificação (lembre que γ e α podem assumir diferentes valores, dependendo da normalização realizada). O método de Johansen é discutido com mais detalhes no apêndice D.

Engle & Granger (1987) propuseram um estimador em dois passos, quando existe um só vetor de co-integração. No

³Um algoritmo para obter a representação de Wold partindo da representação do MCE é descrita em Lutkepohl & Reimers (1992).

primeiro passo, os componentes do vetor α são estimados, fazendo uma regressão em níveis das variáveis. No segundo passo, estes parâmetros são usados na representação de MCE (2.41), e o resto dos parâmetros é estimado. Nos dois passos, mínimos quadrados ordinários são usados. Note que as estimativas dos parâmetros no primeiro passo convergem a suas probabilidades limite à taxa T (são super-consistentes), sendo que os parâmetros no segundo passo convergem à taxa assintótica usual $T^{1/2}$. Existem dois problemas com a estimação do vetor co-integrado neste método : a) a forte possibilidade de não independência entre os erros e os regressores; b) forte possibilidade de regressões espúreas. O primeiro problema tende a diminuir assintoticamente, e o segundo problema também, se os componentes do vetor são realmente co-integrados. No entanto, para pequenas amostras, as estimativas podem ser viesadas (ver Davidson e Mac Kinnon, pág. 719).

De acordo com um teorema demonstrado por Engle & Granger (1987), o estimador em dois passos de uma equação dentro de um sistema de Correção de Erro com um só vetor de co-integração, obtido a partir de uma estimativa de α em uma regressão estática das variáveis do sistema, em vez do valor verdadeiro de α , terá a mesma distribuição limite que o estimador de máxima versosimilhança usando o valor verdadeiro de α .

Alternativamente, em vez de estimar α , podemos fazer restrições, a priori, sobre todos ou alguns vetores de α , de acordo com a teoria econômica. Se o espaço de co-integração (a matriz α) é conhecido, podemos então estimar o resto dos parâmetros usando mínimos quadrados ordinários.

2.3 Exemplo

A seguir, apresentamos um exemplo com o objetivo de esclarecer os conceitos e mecanismos introduzidos nas seções 2.1 e 2.2 deste capítulo.

Seja x_t um vetor, de dimensão 3×1 , tal que $x_t \sim CI(1,1)$, e $r=1$, ou seja, existe uma matriz α , de dimensão $n \times 1$ (um vetor co-integrado), tal que $\alpha'x_t \sim I(0)$. Suponha que x_t segue um processo VAR(2), e que D_t é uma variável dummy escalar que assume os valores 0 ou 1. A representação de x_t na representação AR(2) será :

$$[I_3 - A_1 L - A_2 L^2] \begin{bmatrix} \chi_{1t} \\ \chi_{2t} \\ \chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} D_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

onde :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} & a_{13,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} & a_{23,1} \\ a_{31,1} & a_{32,1} & a_{33,1} \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11,2} & a_{12,2} & a_{13,2} \\ a_{21,2} & a_{22,2} & a_{23,2} \\ a_{31,2} & a_{32,2} & a_{33,2} \end{bmatrix}$$

Agora: *

$$A^*(L) = I_3 - \sum_{i=1}^1 (-\sum_{j=1}^2 A_j) L^i = I_3 + A_2 L$$

e

$$A(l) = I_3 - A_1 - A_2 \quad (2.59)$$

Então , a representação baseada em (2.57) do processo (2.58) está dada por:

$$[I_3 + A_2 L] \begin{bmatrix} \Delta \chi_{1t} \\ \Delta \chi_{2t} \\ \Delta \chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} D_t - (I_3 - A_1 - A_2) \begin{bmatrix} \chi_{1t-1} \\ \chi_{2t-1} \\ \chi_{3t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix}$$

ou:

$$\begin{bmatrix} \Delta\chi_{1t} \\ \Delta\chi_{2t} \\ \Delta\chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} D_t - A_2 \begin{bmatrix} \Delta\chi_{1t-1} \\ \Delta\chi_{2t-1} \\ \Delta\chi_{3t-1} \end{bmatrix} - [I_3 - A_1 - A_2] \begin{bmatrix} \chi_{1t-1} \\ \chi_{2t-1} \\ \chi_{3t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Como $\Delta\chi_t$ é estacionária, $A(1)\chi_{t-1}$ também deve ser estacionária, em consequência, função linear de $\alpha\chi_{t-1}$. Sendo que $r=1$, temos que $A(1)=\gamma\alpha'$, onde γ e α' são vetores 3×1 :

$$A(1) = I_3 - A_1 - A_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Note que o conhecimento de (2.61) implica em restrições em A_1 e A_2 na representação (2.58).

A representação de MCE fica :

$$(I_3 + A_2 L) \begin{bmatrix} \Delta\chi_{1t} \\ \Delta\chi_{2t} \\ \Delta\chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} D_t - \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} [\alpha_{11}\chi_{1t-1} + \alpha_{21}\chi_{2t-1} + \alpha_{31}\chi_{3t-1}] + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Capítulo 3

A Representação VAR "Restrita"

Neste capítulo abordamos a chamada representação VAR "restrita", no sentido de que colocaremos certas restrições nos componentes de um modelo VAR a ser estimado (o VAR restrito), derivados da co-integração existente nos componentes do vetor estocástico em estudo. A representação VAR restrita pode ser obtida a partir das estimativas dos parâmetros no MCE, ou por técnicas padrões para a estimação de um VAR estacionário, se os vetores co-integrados (a matriz α) são conhecidos. As estimativas obtidas permitirão obter estimativas dos parâmetros na representação de Wold, que será tratada no capítulo seguinte. Estes itens são tratados na seção 3.1.

No final de capítulo, na seção 3.2, um exemplo é apresentado para esclarecer a aplicação dos procedimentos.

3.1 A Representação VAR "Restrita"

Campbell e Shiller (1988) demonstram como de modo direto a representação MCE pode ser reescrita como uma representação VAR restrita quando $n=2$ e $r=1$. O teorema 1 em Warne (1991) mostra que este resultado pode ser generalizado.

Proposição 3.1

(i) Seja $\{\chi_t\}$ um processo AR(p) não estacionário :

$$A(L)\chi_t = \rho + \rho^* D_t + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

onde χ_t é um vetor $n \times 1$, ρ e ρ^* são vetores $n \times 1$ de constantes, D_t é um escalar que representa uma variável dummy e $\{\varepsilon_t\}$ é um ruído branco com $E\{\varepsilon_t\}=0$ e $E\{\varepsilon_t \varepsilon_t'\}=\Sigma$, uma matriz positiva definida.

(ii) Assuma que χ_t possui r vetores co-integrados, tendo então a representação MCE :

$$A^*(L)\Delta\chi_t = \rho + \rho^* D_t - \gamma\alpha'\chi_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.2)$$

onde α e γ são matrizes de dimensão $n \times r$, e $A^*(L)$ é um polinômio matricial onde

$$A^*(L) = I_n - \sum_{i=1}^{p-1} A_i^* L^i \text{ onde } A_i^* = - \sum_{j=i+1}^p A_j$$

(iii) Defina as seguintes matrizes :

(iii.1) $M = [S_k' \alpha]'$, uma matriz não singular de dimensão $n \times n$, onde S_k é de dimensão $k \times n$, com $k = n - r$;

(iii.2) $\gamma^* = [0 \ \gamma]$, uma matriz , de dimensão $n \times n$;

(iii.3) $D(L)$ e $D_1(L)$, matrizes polinomiais , de dimensão $n \times n$, dadas por :

$$D(L) = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & (I-L)I_r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_1(L) = \begin{bmatrix} (I-L)I_k & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

observando que $D(L)D_1(L) = D_1(L)D(L) = I_n(1-L)$.

O processo $\{\chi_t\} \sim CI(1,1)$, com r vetores co-integrados se e somente se existe uma representação VAR restrita, da forma :

$$B(L)y_t = \theta + \theta^* D_t + \eta_t \quad (3.4)$$

onde :

$$B(L) = M[A^*(L)M^{-1}D(L) + \gamma^*L] \quad (3.5)$$

$$y_t = D_1(L)M\chi_t \quad (3.6)$$

e

$$\theta = M\rho, \quad \theta^* = M\rho^*, \quad \eta_t = M\varepsilon_t \quad (3.7)$$

de modo que $\{y_t\}$ é um processo VAR(p) estacionário. Os últimos r elementos de y_t são dados pelas r relações de co-integração.

Demonstração. Ver Warne (1991), para uma demonstração formal. A seguir demonstraremos informalmente a proposição anterior.

Partindo de (3.1), pre-multiplique esta expressão pela matriz M , e pre-multiplique χ_t no primeiro membro de (3.1) por MM^{-1} , obtendo :

$$MA(L)M^{-1}M\chi_t = M\rho + M\rho^*D_t + M\varepsilon_t \quad (3.8)$$

Como $A(L) = A(L)^*(1-L) + A(l)L$, o primeiro membro da equação (3.8) fica :

$$\begin{aligned} MA(L)M^{-1}M\chi_t &= M[A(L)^*(1-L) + A(l)L]M^{-1}M\chi_t \\ &= M[A(L)^*M^{-1}(1-L) + A(l)M^{-1}L]M\chi_t \end{aligned} \quad (3.9)$$

Observe que :

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \gamma^*D_{\perp}(L) , \\ A(l) &= \gamma\alpha' = [0_{n \times k} \quad \gamma] [S_k' \quad \alpha']' = \gamma^*M = \gamma^*D_{\perp}(L)M \text{ e} \\ I_n(1-L) &= D(L)D_{\perp}(L) . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Assim, substituindo (3.10) em (3.9), obtemos :

$$\begin{aligned} MA(L)M^{-1}M\chi_t &= M[A(L)^*M^{-1}D(L)D_{\perp}(L) + \gamma^*D_{\perp}(L)MM^{-1}L]M\chi_t \\ &= M[A(L)^*M^{-1}D(L) + \gamma^*L]D_{\perp}(L)M\chi_t \\ &= B(L)Y_t \end{aligned} \quad (3.11)$$

Note que pela definição de Y_t , os primeiros k componentes deste vetor são combinações lineares das primeiras diferenças dos componentes de χ_t , em consequência estacionários. Os r componentes restantes são os r vetores co-integrados, também estacionários. Assim Y_t é estacionário.

Finalmente, por (3.8), denominando $\theta = M\rho$, $\theta^* = M\rho^*$ e $\eta_t = M\varepsilon_t$, fica provada a proposição. ■

Para a escolha dos k primeiros elementos de Y_t , ou seja, para a escolha de S_k , temos duas alternativas :

- 1) deixar $S_k = \alpha'_{\perp}$, onde $\alpha'_{\perp}\alpha = 0$. Isto garante que M seja não singular (ver apêndice A, seção A.1).

2) Normalizar α de tal modo que $\alpha' = [\alpha^* \ I_r]$, e deixando $S_k = [I_k \ 0]$, o que determina que os primeiros k elementos de y_t sejam dados pelas primeiras diferenças dos primeiros k elementos de x_t . Note que $S_k = [I_k \ 0]$ somente é permissível se as últimas r linhas de α compõem uma matriz não singular. Se α é conhecida, sempre podemos arrumar os elementos de x_t de forma tal que a matriz α tenha essa propriedade.

3.2 Calculando a Representação VAR a partir da Representação VAR Restrita

O modelo (3.4) pode ser estimado com Mínimos Quadrados Multivariados, método que foi descrito no capítulo 2. A partir da estimação da expressão (3.4), podemos calcular os parâmetros da Representação VAR, na expressão (3.1). As relações entre o VAR e o VAR restrito, são obtidas facilmente :

$$\rho = M^{-1}\theta, \quad \rho^* = M^{-1}\theta^*, \quad \varepsilon_t = M^{-1}\eta_t, \quad A(L) = M^{-1}B(L)D_1(L)M \quad (3.12)$$

Sendo que a) $\det[B(L)] = 0$ tem todas as soluções fora do círculo unitário (porque $\{y_t\}$ é um processo estacionário) $\Rightarrow \det[B(1)] \neq 0 \Rightarrow \text{posto}[B(1)] = n$, b) $D_1(1)$ tem posto r e c) M tem posto n , é claro que $A(1)$ tem posto r .

Alternativamente, sendo que α, γ conjuntamente com $A^*(L)$ foram estimados pelo método de Johansen, estas estimativas podem ser usadas para calcular os coeficientes de $B(L)$, para logo calcular os coeficientes de $A(L)$.

3.3 Exemplo

Continuamos aqui com o exemplo desenvolvido no capítulo 2, ou seja, um processo VAR(2) não estacionário 3-dimensional, onde os componentes são CI(1,1) :

$$[I_3 - A_1L - A_2L^2] \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ x_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} D_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

com $r=1$, ou seja $k=2$, levando a uma representação MCE :

$$(\mathbf{I}_3 + \mathbf{A}_2\mathbf{L}) \begin{bmatrix} \Delta\chi_{1t} \\ \Delta\chi_{2t} \\ \Delta\chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} \mathbf{D}_t - \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{1,t-1} \\ \chi_{2,t-1} \\ \chi_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Calcule a matriz $\mathbf{M}$ com o vetor α normalizado, e $\mathbf{S}_k = \mathbf{I}_k$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

(OBS : esta representação de $\mathbf{M}$ requer que a matriz formada pelas últimas r linhas de α seja não singular, no exemplo, de fato é o escalar α_{31}).

As demais matrizes a calcular, para construir o VAR Restrito, são :

$$\mathbf{D}(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mathbf{L}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_\perp(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} (1-\mathbf{L}) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mathbf{L}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Assim, $\mathbf{y}_t$ fica :

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} (1-\mathbf{L}) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mathbf{L}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{1t} \\ \chi_{2t} \\ \chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\chi_{1t} \\ \Delta\chi_{2t} \\ \alpha_{11}^*\chi_{1t} + \alpha_{21}^*\chi_{2t} + \chi_{3t} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

onde claramente é observado que $\{\mathbf{y}_t\}$ é um processo estacionário, sendo que cada um dos componentes é estacionário.

O modelo $\mathbf{B}(\mathbf{L})\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^*\mathbf{D}_t + \boldsymbol{\eta}_t$, onde $\mathbf{y}_t$ é definido como em (3.17), $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta}^*$ são vetores de 3-dimensionais de constantes e $\boldsymbol{\eta}_t$ é o vetor 3-dimensional de resíduos, é um VAR(2)

estacionário 3-dimensional, e pode então ser estimado pelo procedimento usual para estimar modelos VAR estacionários. Como já foi comentado, pode ser feito através da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados Ordinários Multivariado, que de fato se resume a aplicação de Mínimos Quadrados Ordinários a cada uma das n equações separadamente, se a matriz de covariância dos resíduos possui a estrutura apropriada.

As relações entre o VAR e VAR restrito de nosso exemplo ficam, neste caso:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_{11}^* & -\alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ -\alpha_{11}^* \theta_1 - \alpha_{21}^* \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_{11}^* & -\alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ -\alpha_{11}^* \theta_1^* - \alpha_{21}^* \theta_2^* + \theta_3^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \\ \eta_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_{11}^* & -\alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \\ \eta_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \\ -\alpha_{11}^* \eta_{1t} - \alpha_{21}^* \eta_{2t} + \eta_{3t} \end{bmatrix}$$

e

$$(\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}_1 \mathbf{L} - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_{11}^* & -\alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}_1 \mathbf{L} - \mathbf{B}_2 \mathbf{L}^2) \begin{bmatrix} (1-\mathbf{L}) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\mathbf{L}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix}$$

(3.18)

onde :

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11,1} & b_{12,1} & b_{13,1} \\ b_{21,1} & b_{22,1} & b_{23,1} \\ b_{31,1} & b_{32,1} & b_{33,1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_{11,2} & b_{12,2} & b_{13,2} \\ b_{21,2} & b_{22,2} & b_{23,2} \\ b_{31,2} & b_{32,2} & b_{33,2} \end{bmatrix}$$

Capítulo 4

As Representações de Wold e de Tendências Comuns

Neste capítulo explicaremos como obter a representação de Wold para um processo $\{\chi_t\}$ tal que $\chi_t \sim CI(1,1)$, após transformar as variáveis desse vetor usando o operador diferença. Partindo da representação VAR(p), e usando as estimativas dos parâmetros e polinômios matriciais nas representações do MCE e do VAR restrito discutidas nos capítulos anteriores, a representação de Wold é facilmente obtida. Estes itens serão tratados na seção 4.1.

Na seção 4.2 introduziremos o conceito de representação de Tendências Comuns, e como esta pode ser obtida a partir da representação de Wold.

Na seção 4.3 apresentaremos um exemplo para esclarecer os procedimentos apresentados.

4.1 A Representação de Wold

Seja $\{\chi_t\}$ um processo VAR(p) não estacionário :

$$A(L)\chi_t = \rho + \rho^* D_t + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

co-integrado de ordem (1,1), com r vetores co-integrados, tendo então a representação MCE :

$$A^*(L)\Delta\chi_t = \rho + \rho^* D_t - \gamma\alpha'\chi_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.2)$$

e a representação VAR restrita :

$$B(L)y_t = \theta + \theta^* D_t + \eta_t \quad (4.3)$$

onde χ_t é um vetor $n \times 1$, ρ , ρ^* , D_t , ε_t , $A^*(L)$, α , γ , $B(L)$, θ , θ^* e η_t possuem as especificações feitas em capítulos anteriores.

A expressão (4.2) representa um processo estacionário. Pelo teorema de Wold , todo processo estacionário pode ser

escrito como a soma de dois processos não correlacionados, um deles determinístico cuja previsão pode ser perfeitamente inferida de seu próprio passado, e o outro tendo uma representação MA de ordem infinita. Como já foi dito no capítulo 2, inverter a expressão (4.2) resulta computacionalmente difícil pois a matriz $A(1)=\gamma\alpha'$ é não invertível. No entanto, a representação de Wold é facilmente obtida a partir de (4.1) usando a estimativa de $B(L)$ em (4.3), que por sua vez foi calculada através da estimação prévia dos vetores α e γ em (4.2) :

1) Substitua o polinômio $A(L)$ em (4.1) pela expressão apresentada em (3.12) :

$$A(L)\chi_t = [M^{-1}B(L)D_1(L)M]\chi_t = \rho + \rho^*D_t + \varepsilon_t \quad (4.4)$$

2) Pré-multiplique (4.4) pela expressão $M^{-1}D(L)B(L)^{-1}M$:

$$[M^{-1}D(L)B(L)^{-1}M][M^{-1}B(L)D_1(L)M]\chi_t = [M^{-1}D(L)B(L)^{-1}M]\rho + [M^{-1}D(L)B(L)^{-1}M](\varepsilon_t + \rho^*D_t)$$

obtendo a representação de Wold :

$$\Delta\chi_t = \delta + C(L)[\varepsilon_t + \rho^*D_t] \quad (4.5)$$

onde

$$C(L) = M^{-1}D(L)B(L)^{-1}M = \sum_{i=0}^{\infty} C_i L^i, \quad \delta = C(1)\rho \quad (4.6)$$

Note que $C(L)$ é um polinômio matricial absolutamente somável, pois é função de $B(L)^{-1}$, que é absolutamente somável.

A representação de Wold (4.5) permite calcular a chamada *função Resposta de Impulsos*, que mostra como o vetor χ_t é afetado por choques inesperados em algum/todos os componentes do vetor dos resíduos.

4.2 A Representação de Tendências Comuns

A seguir, mostraremos como obter a representação de Tendências Comuns, cujo conceito já foi introduzido no Capítulo 1.

Substituindo recursivamente em (4.5):

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \chi_0 + \delta + C(L)[\varepsilon_1 + \rho^* D_1] \\ \chi_2 &= \chi_1 + \delta + C(L)[\varepsilon_2 + \rho^* D_2] = \chi_0 + \delta 2 + C(L)[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \rho^* D_1 + \rho^* D_2] \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

obtemos :

$$\chi_t = \chi_0 + \delta t + C(L)(1 + L + L^2 + \dots + L^t)[\varepsilon_t + \rho^* D_t] \quad (4.7)$$

Defina $C(L)$ como sendo:

$$\begin{aligned}C(L) &= C^0(L) + C(L) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} C_i^0 L^i + \sum_{i=0}^{\infty} C_i L^i\end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{onde } C^0(L) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^0 L^i$$

Por (4.8), e igualando os coeficientes das potências em ambos os membros, temos que :

$$C_0 = C_0^0 + \sum_{i=0}^{\infty} C_i \Rightarrow C_0^0 = -\sum_{i=1}^{\infty} C_i$$

$$\text{e para } i > 0, \text{ temos que } C_i^0 = C_i. \quad (4.9)$$

Defina agora $C^*(L) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^* L^i$ como sendo:

$$C^*(L) = C^0(L) \sum_{t=0}^{\infty} L^t \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{j=1}^{\infty} C_j + \sum_{j=1}^{\infty} C_j L^1 - \sum_{j=1}^{\infty} C_j L + \sum_{j=1}^{\infty} C_j L^{j-1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} C_j L^2 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j L^{j-2} + \dots - \sum_{j=1}^{\infty} C_j L^t + \sum_{j=1}^{\infty} C_j L^{j-t} + \dots \end{aligned}$$

Para calcular os coeficientes do polinômio $C^*(L)$, igualando os coeficientes das potências em (4.10), observe que:

$$\begin{aligned} C_0^* &= -\sum_{j=1}^{\infty} C_j \\ C_1^* &= C_1 - \sum_{j=1}^{\infty} C_j = \sum_{j=2}^{\infty} C_j \\ C_2^* &= C_1 + C_2 - \sum_{j=1}^{\infty} C_j = \sum_{j=3}^{\infty} C_j \\ &\vdots \\ C_i^* &= -\sum_{j=i+1}^{\infty} C_j \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por (4.10) e (4.11), sendo que $\delta = C(1)\rho$ por (4.6), e para t assumindo valores muito grandes ($t \rightarrow \infty$), a expressão (4.7) pode ser re-escrita como :

$$\begin{aligned} \chi_t &= \chi_0 + \delta t + [C^0(L) + C(L)] \sum_{j=0}^t L^j (\varepsilon_t + \rho^* D_t) \\ &= \chi_0 + C(L) [\rho t + \sum_{j=0}^t L^j (\varepsilon_t + \rho^* D_t)] + [C^0(L) \sum_{j=0}^t L^j] (\varepsilon_t + \rho^* D_t) \\ &= \chi_0 + C(L) [\rho t + \sum_{j=0}^t L^j (\varepsilon_t + \rho^* D_t)] + C^*(L) (\varepsilon_t + \rho^* D_t) \end{aligned}$$

$$= \chi_0 + C(1)\xi_t + C^*(L)(\varepsilon_t + \rho^*D_t) \quad (4.12)$$

onde :

$$\xi_t = \rho t + \sum_{i=0}^t L^i(\varepsilon_t + \rho^*D_t) \quad (4.13)$$

O vetor n-dimensional ξ_t é um passeio aleatório com desvio ("drift"), o que pode ser observado substituindo recursivamente em (4.13), e fazendo a suposição convencional de que $\xi_s = 0$ para $s < 0$:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \varepsilon_0 \\ \xi_1 &= \rho + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \rho^*D_1 = \rho + \rho^*D_1 + \xi_0 + \varepsilon_1 \\ \xi_2 &= \rho 2 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \rho^*D_1 + \rho^*D_2 = \rho + \rho^*D_2 + \xi_1 + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ \xi_t &= \rho + \rho^*D_t + \xi_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (4.14)$$

O comportamento de longo prazo de χ_t está dominado pelo componente não estacionário $C(1)\xi_t$, (que foi acumulando todos os choques e efeitos das variáveis exógenas no passado). No entanto, lembrando que $z_t = \alpha'\chi_t$, onde $\{z_t\}$ é estacionário e o componente $C(1)\xi_t$ é não estacionário, pré-multiplicando (4.12) por α' , temos que :

(1) $\alpha'C(1)=0$, o que implica que $C(1)$ não é de posto completo [ver apêndice A, seção A.1], sendo de posto igual a $n-r=k$. Assim, obtem-se :

$$z_t = \alpha'\chi_t = \alpha'\chi_0 + \alpha'C^*(L)\varepsilon_t \quad (4.15)$$

(2) Adicionalmente, $C^*(L)$ deve ser absolutamente somável, o que deriva da suposição de que $C(L)$ é 1-somável.

Stock & Watson (1988) mostram como a partir de (4.12) pode ser obtida a representação de tendências comuns. Considere :

(i) $C(1)$ tem posto $n-r=k < n$ pois $\alpha' C(1)=0$, e o posto $(\alpha)=r$. Portanto, existe uma matriz H_1 , de dimensão $n \times r$, e de posto r tal que $C(1)H_1=0$.

(ii) Se H_2 é uma matriz de dimensão $n \times k$, com posto k , com colunas ortogonais às colunas de H_1 , então $K=:C(1)H_2$ tem posto k (note que $C(1)'$ e H_2 estão no mesmo subespaço).

(iii) A matriz $H=(H_1 \ H_2)$ de dimensão $n \times n$ é não singular, e $C(1)H=(0 \ K)=KS_k$, onde S_k é a matriz de seleção de dimensão $k \times n$. Ou seja $S_k=[0_{k \times (n-k)} \ I_k]$, onde $0_{k \times (n-k)}$ é uma matriz de zeros de dimensão $k \times (n-k)$.

(ver apêndice A, seção A.1, para justificar (i), (ii) e (iii))

Então, partindo de (4.12) e por (iii), obtemos :

$$\begin{aligned}\chi_t &= \chi_0 + C(1)HH^{-1}\xi_t + C^*(L)[\varepsilon_t + \rho^*D_t] \\ &= \chi_0 + KS_kH^{-1}\xi_t + C^*(L)[\varepsilon_t + \rho^*D_t] \\ &= \chi_0 + K\tau_t + \Phi(L)[v_t + \Psi D_t]\end{aligned}\tag{4.16}$$

sendo que :

$$\tau_t = \mu + \mu^*D_t + \tau_{t1} + \varphi_t\tag{4.17}$$

onde

$$\tau_t = S_k H^{-1} \xi_t, \quad \Phi(L) = C^*(L) F^{-1}, \quad v_t = F \varepsilon_t,\tag{4.18}$$

$$\Psi_t = F \rho^*, \quad F := [F_k' \ F_r'].$$

Por (4.14), temos que $\mu = S_k H^{-1} \rho$, $\mu^* = S_k H^{-1} \rho^*$, e $\varphi_t = S_k H^{-1} \varepsilon_t$. Note que τ_t é um vetor $k \times 1$, tendo tantos elementos como tendências são observadas, o fato de τ_t ser k -dimensional deriva do fato do modelo ser co-integrado de ordem $r=n-k$. A representação de Tendências Comuns expressa o vetor χ_t como uma combinação linear de k passeios aleatórios com drift $\mu + \mu^* D_t$.

4.3 Exemplo

Prosseguindo com nosso exemplo desenvolvido nos capítulos anteriores, ou seja, um processo 3-dimensional não estacionário AR(2), co-integrado com $r=1$, implicando $k=2$ (número de tendências) e variável dummy D_t 1-dimensional, a representação de Wold deste processo fica :

$$\begin{bmatrix} \Delta\chi_{1t} \\ \Delta\chi_{2t} \\ \Delta\chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} + C(L) \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} D_t \right\} \quad (4.19)$$

onde $C(L)$ pode ser calculado a partir do conhecimento dos parâmetros na representação de MCE e/ou da estimativa do polinômio matricial $B(L)$ na representação VAR Restrita, de acordo com a expressão (4.6).

A representação de Tendências Comuns para este processo fica :

$$\begin{bmatrix} \chi_{1t} \\ \chi_{2t} \\ \chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{10} \\ \chi_{20} \\ \chi_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{1t} \\ \tau_{2t} \end{bmatrix} + \Phi(L) \left\{ \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_1 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} D_t \right\} \quad (4.20)$$

onde $\Phi(L)$ é um polinômio matricial 3-dimensional absolutamente somável e :

$$\begin{bmatrix} \tau_{1t} \\ \tau_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1^* \\ \mu_2^* \end{bmatrix} D_t + \begin{bmatrix} \tau_{1,t-1} \\ \tau_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{1t} \\ \phi_{2t} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Capítulo 5

Identificação dos Parâmetros da Representação de Tendências Comuns

Neste capítulo, na seção 5.1, mostraremos como identificar os parâmetros da representação de Tendências Comuns, partindo do conhecimento dos parâmetros das Representações discutidas nos capítulos anteriores. Adicionalmente, na seção 5.2, será apresentado um exemplo para esclarecer o procedimento.

5.1 Procedimento de Identificação

Repetimos a seguir as especificações da representação de Tendências Comuns discutida na introdução e no capítulo 4, com a finalidade de deixar claro quais são os supostos usados que justificarão o procedimento de identificação dos parâmetros.

Seja um processo $\{\chi_t\}$ n-dimensional, co-integrado (1,1) com r vetores co-integrados, implicando que o número de tendências é igual a $k=n-r$ e cuja representação de Tendências Comuns está dado por :

$$\chi_t = \chi_0 + K\tau_t + \Phi(L)[v_t + \Psi D_t], \quad (5.1)$$

$$\tau_t = \mu + \mu^* D_t + \tau_{t-1} + \phi_t \quad (5.2)$$

onde :

(i) χ_0 é o vetor constante contendo os valores iniciais de χ_t .

(ii) Os componentes não estacionários (permanentes) e estacionários (transitórios) de χ_t estão capturados por $K\tau_t$ e $\Phi(L)v_t$ respectivamente.

(iii) K é uma matriz de constantes de dimensão $n \times k$, onde k representa o número de tendências. τ_t é um vetor de dimensão $k \times 1$, a variável de tendência. A sequência n-dimensional $\{v_t\}$ é um ruído branco com $E(v_t)=0$ e

$E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t') = \mathbf{I}_n$, a $n \times n$ matriz identidade. Assumimos que $\mathbf{v}_s = 0$ para todo $s \leq 0$, e que $\Phi(L)$ é um polinômio absolutamente somável. $\mathbf{D}_t$ é um vetor d -dimensional de variáveis dummy.

(iv) $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\mu}^*$ são vetores k -dimensionais de constantes. $\{\boldsymbol{\varphi}_t\}$ é uma sequência ruído branco com $E(\boldsymbol{\varphi}_t) = 0$ e $E(\boldsymbol{\varphi}_t \boldsymbol{\varphi}_t') = \mathbf{I}_k$

Para calcular os parâmetros do modelo (5.1)-(5.2) proceda da seguinte maneira :

(1) Considere as restrições derivadas da existência de co-integração. Para que o processo $\{z_t\}$ onde $z_t = \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\chi}_t$ seja estacionário, sendo que $\boldsymbol{\tau}_t$ é não estacionário, os nk componentes da matriz $\mathbf{K}$ na expressão (5.1) devem satisfazer as seguintes restrições :

$$\boldsymbol{\alpha}' \mathbf{K} = 0 \quad (5.3)$$

Dado $\boldsymbol{\alpha}$, as restrições de co-integração fornecem então $rk = (n-k)k$ equações que podem ser usadas para determinar alguns dos nk componentes de $\mathbf{K}$.

(2) Após ter obtido rk restrições em (1), precisamos de $nk - rk$ restrições adicionais para obter os restantes coeficientes de $\mathbf{K}$.

Substituindo (5.2) em (5.1) temos que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_t &= \boldsymbol{\chi}_0 + \mathbf{K}(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^* \mathbf{D}_t + \boldsymbol{\tau}_{t-1} + \boldsymbol{\varphi}_t) + \Phi(L) [\mathbf{v}_t + \Psi \mathbf{D}_t] \\ &= \boldsymbol{\chi}_0 + \mathbf{K}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{K}\boldsymbol{\mu}^* \mathbf{D}_t + \mathbf{K}\boldsymbol{\tau}_{t-1} + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_t + \Phi(L) [\mathbf{v}_t + \Psi \mathbf{D}_t] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Por outro lado, substituindo (4.14) em (4.12) e lembrando que $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\rho}$, temos que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_t &= \boldsymbol{\chi}_0 + \mathbf{C}(1) (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}^* \mathbf{D}_t + \boldsymbol{\xi}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t) + \mathbf{C}^*(L) [\boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\rho}^* \mathbf{D}_t] \\ &= \boldsymbol{\chi}_0 + \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\rho} + \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\rho}^* \mathbf{D}_t + \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\xi}_{t-1} + \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{C}^*(L) [\boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\rho}^* \mathbf{D}_t] \\ &= \boldsymbol{\chi}_0 + \boldsymbol{\delta} + \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\rho}^* \mathbf{D}_t + \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\xi}_{t-1} + \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{C}^*(L) [\boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\rho}^* \mathbf{D}_t] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Comparando as expressões (5.4) e (5.5) temos que :

$$\delta = K\mu, \quad C(1)\rho^* = K\mu^* \text{ e } C(1)\varepsilon_t = K\varphi_t \text{ para todo } t \quad (5.6)$$

As igualdades (5.6) na verdade já foram mostradas em (4.18) quando derivamos a representação de Tendências Comuns a partir da representação de Wold.

Lembrando que $E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Sigma$ e $E[\varphi_t \varphi_t'] = I_k$, e por (5.6), segue que:

$$\begin{aligned} E(K\varphi_t \varphi_t' K') &= E(C(1)\varepsilon_t \varepsilon_t' C(1)') \\ KE(\varphi_t \varphi_t')K' &= C(1)E(\varepsilon_t \varepsilon_t')C(1)' \\ KK' &= C(1)\Sigma C(1)' \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dado $C(1)$, que é de posto k , e Σ , a equação (5.7) fornece $k(k+1)/2$ restrições sobre K , sendo que o segundo membro de (5.7) é uma matriz simétrica.

Lembre que, por (4.6), podemos obter uma estimativa de $C(1)$, a partir das estimativas dos parâmetros nas representações de MCE e de VAR restrito :

$$C(1) = M^{-1}D(1)B(1)^{-1}M \quad (5.8)$$

onde $C(1)$ é de dimensão $n \times n$. Uma estimativa de Σ é obtida a partir da matriz de covariância estimada no VAR restrito, usando (3.12).

(3) Para finalizarmos a identificação de todos os componentes de K , precisamos impor $nk - (n-k)k - k(k+1)/2 = k(k-1)/2$ restrições adicionais, que devem ser escolhidas pelo analista com base em critérios adequados.

(4) Alternativamente, para a obtenção dos elementos de K , King et alli. (1987,1991) propõe escrever a matriz K como $K_0\pi$ onde K_0 é uma matriz $n \times k$ de posto k , com seus elementos escolhidos de tal forma que $\alpha'K_0 = 0$, e onde os parâmetros livres de K constituem uma matriz π de dimensão $k \times k$. Substituindo $K_0\pi$ em (5.7), pre-multiplicando por $[K_0'K_0]^{-1}K_0'$ e pos-multiplicando por $K_0[K_0'K_0]^{-1}$, temos que :

$$\begin{aligned} K_0\pi\pi'K_0' &= C(1)\Sigma C(1)' \\ [K_0'K_0]^{-1}K_0'K_0\pi\pi'K_0'K_0[K_0'K_0]^{-1} &= [K_0'K_0]^{-1}K_0'C(1)\Sigma C(1)'K_0[K_0'K_0]^{-1} \\ \pi\pi' &= [K_0'K_0]^{-1}K_0'C(1)\Sigma C(1)'K_0[K_0'K_0]^{-1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

O lado direito de (5.9) é uma matriz $k \times k$ positiva definida, com $k(k+1)/2$ únicos parâmetros. Em (5.9), podemos determinar $k(k+1)/2$ parâmetros de π , fazendo uma decomposição de Choleski (ver apêndice A, seção A.3) de $\pi\pi'$, implicando uma matriz π triangular inferior. Dada esta estimativa de π , podemos calcular então K :

$$K = K_0\pi \quad (5.10)$$

(5) Para o cálculo dos outros parâmetros da representação de Tendências Comuns, por (5.6) e (3.12) temos que :

$$\begin{aligned} K\mu &= \delta = c(l)\rho = c(l)M^{-1}\theta \\ \mu &= (K'K)^{-1}K'c(l)M^{-1}\theta \\ K\mu^* &= c(l)\rho^* = c(l)M^{-1}\theta^* \\ \mu^* &= (K'K)^{-1}Kc(l)M^{-1}\theta^* \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.2. Exemplo

Prosseguimos com o exemplo desenvolvido em capítulos anteriores, ou seja um processo não estacionário 3-dimensional, co-integrado com $r=1$, implicando $k=2$, cuja representação em Tendências Comuns, como já vimos, é dado por :

$$\begin{bmatrix} \chi_{1t} \\ \chi_{2t} \\ \chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{10} \\ \chi_{20} \\ \chi_{30} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{1t} \\ \tau_{2t} \end{bmatrix} + \Phi(L) \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_1 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} D_t, \quad (5.12)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{1t} \\ \tau_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1^* \\ \mu_2^* \end{bmatrix} D_t + \begin{bmatrix} \tau_{1,t-1} \\ \tau_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{1t} \\ \phi_{2t} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

A seguir, mostramos como identificar os parâmetros deste processo, seguindo os procedimentos (1), (2), (3) e (4) descritos na seção anterior.

(1) Pela restrição (5.3) temos :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* \kappa_{11} + \alpha_{21}^* \kappa_{21} + \kappa_{31} \\ \alpha_{11}^* \kappa_{12} + \alpha_{21}^* \kappa_{22} + \kappa_{32} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}' \quad (5.14)$$

Em (5.14) foram obtidas duas ($rk=1 \times 2=2$) equações para determinar 6 ($nk=3 \times 2$) incógnitas (κ_{ij} , $i=1,2,3$, $j=1,2$).

(2) Calcule agora, o segundo membro na expressão (5.7) e defina :

$$C(l)\Sigma C(l)' = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

de dimensão 3×3 , simétrica, e de posto 2, pois $k=2$. A expressão (5.15) fornece $2(2+1)/2=3$ restrições sobre K .

Logo, por (5.7), temos que :

$$KK' = \begin{bmatrix} \kappa_{11}^2 + \kappa_{12}^2 & \kappa_{11}\kappa_{21} + \kappa_{12}\kappa_{22} & \kappa_{11}\kappa_{31} + \kappa_{12}\kappa_{32} \\ \kappa_{21}\kappa_{11} + \kappa_{22}\kappa_{12} & \kappa_{21}^2 + \kappa_{22}^2 & \kappa_{21}\kappa_{31} + \kappa_{22}\kappa_{32} \\ \kappa_{31}\kappa_{11} + \kappa_{32}\kappa_{12} & \kappa_{31}\kappa_{21} + \kappa_{32}\kappa_{22} & \kappa_{31}^2 + \kappa_{32}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Sendo que a matriz definida em (5.15) é de posto 2, por operações elementares de matrizes, em (5.16), temos:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11}^2 + \kappa_{12}^2 & \kappa_{11}\kappa_{21} + \kappa_{12}\kappa_{22} & 0 \\ \kappa_{21}\kappa_{11} + \kappa_{22}\kappa_{12} & \kappa_{21}^2 + \kappa_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Assim, por (5.14) e (5.17), ficamos com o seguinte sistema de equações, para calcular os elementos da matriz K :

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^* \kappa_{11} + \alpha_{21}^* \kappa_{21} + \kappa_{31} &= 0 \\
\alpha_{11}^* \kappa_{12} + \alpha_{21}^* \kappa_{22} + \kappa_{32} &= 0 \\
\kappa_{11}^2 + \kappa_{12}^2 &= r_{11} \\
\kappa_{11} \kappa_{21} + \kappa_{12} \kappa_{22} &= r_{12} \\
\kappa_{21}^2 + \kappa_{22}^2 &= r_{22}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

(3) No nosso exemplo, foi possível determinar $(n-k)k+k(k+1)/2=5$ restrições para determinar os $nk=6$ componentes da matriz K . Faltam determinar então $nk-(n-k)k+k(k+1)/2=k(k-1)/2=1$ restrição, para que o sistema seja exatamente identificado.

(4) Alternativamente a (1), (2) e (3), podemos usar o seguinte procedimento: Escolha os componentes de uma matriz K_0 de modo que $\alpha'K_0=0$ onde K_0 é de dimensão 3×2 . É necessário escolher 4 componentes, sendo que os outros dois são determinados pelo sistema:

$$\alpha'K_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11\rho} & \kappa_{12\rho} \\ \kappa_{21\rho} & \kappa_{22\rho} \\ \kappa_{31\rho} & \kappa_{32\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* \kappa_{11\rho} + \alpha_{21}^* \kappa_{21\rho} + \kappa_{31\rho} \\ \alpha_{11}^* \kappa_{12\rho} + \alpha_{21}^* \kappa_{22\rho} + \kappa_{32\rho} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}' \tag{5.19}$$

Para determinar os valores de K_0 , tome cuidado de que a escolha de componentes derive na constituição de uma matriz K_0 com vetores linearmente independentes. Escolha, por exemplo:

$$\kappa_{11,0}=\kappa_{31,0}=\kappa_{32,0}=1, \quad \kappa_{12,0}=0$$

Assim, o sistema de equações em (5.19) fica:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^* + \alpha_{21}^* \kappa_{21\rho} + 1 &= 0 \\
\alpha_{21}^* \kappa_{22\rho} + 1 &= 0
\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \kappa_{21\rho} &= -\frac{(1+\alpha_{11}^*)}{\alpha_{21}^*} \\ \kappa_{22\rho} &= -\frac{1}{\alpha_{21}^*} \end{aligned}$$

A matriz K_0 fica:

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1+\alpha_{11}^*)}{\alpha_{21}^*} & -\frac{1}{\alpha_{21}^*} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Calcule e defina $(K_0'K_0)^{-1}K_0'$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{(1+\alpha_{11}^*)}{\alpha_{21}^*} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{21}^*} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1+\alpha_{11}^*)}{\alpha_{21}^*} & -\frac{1}{\alpha_{21}^*} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{(1+\alpha_{11}^*)}{\alpha_{21}^*} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{21}^*} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11\rho} & k_{12\rho} & k_{13\rho} \\ k_{21\rho} & k_{22\rho} & k_{23\rho} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Assim podemos escrever, de acordo com a expressão (5.9) :

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} k_{11\rho} & k_{12\rho} & k_{13\rho} \\ k_{21\rho} & k_{22\rho} & k_{23\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11\rho} & k_{21\rho} \\ k_{12\rho} & k_{22\rho} \\ k_{13\rho} & k_{23\rho} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

e calcular os componentes da matriz π de acordo a uma decomposição de Choleski da matriz que é calculada no segundo membro de (5.22), sendo que é uma matriz positiva definida. Por fim, podemos calcular K :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \\ K_{31} & K_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11\rho} & K_{12\rho} \\ K_{21\rho} & K_{22\rho} \\ K_{31\rho} & K_{32\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

(5) Procedemos agora ao cálculo do resto dos parâmetros da representação de Tendências Comuns de nosso exemplo. Para facilitar a notação calcule e defina :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \\ K_{31} & K_{32} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \\ K_{31} & K_{32} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \\ K_{31} & K_{32} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$C(l) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Lembrando que :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_{11}^* & -\alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

calcule os outros parâmetros da representação de Tendências Comuns :

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_{11}^* & -\alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_1^* \\ \mu_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_{11}^* & -\alpha_{21}^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Capítulo 6

Cálculo da Função Resposta de Impulso Associada à Representação de Tendências Comuns

Com frequência estamos interessados no estudo de choques nas variáveis de um modelo. A chamada "função resposta de impulsos" é simplesmente uma tabela com os coeficientes da representação MA, dando a resposta da variável no sistema a um impulso não esperado de algum componente do vetor dos resíduos.

Neste capítulo, na seção 6.1 veremos como calcular a função resposta de impulsos associada à representação de Tendências Comuns. Em outras palavras, veremos como as variáveis do sistema são afetadas a partir de choques nos vetores dos resíduos naquela representação. Faremos isto usando o cálculo de parâmetros já feito em outras representações, porém deveremos impor restrições adicionais. Como vem sendo feito, após a explicação do procedimento, continuar-se-á com o desenvolvimento do exemplo apresentado em capítulos anteriores, na seção 6.2.

6.1 Procedimento de Identificação

Seja um processo $\{\chi_t\}$ n-dimensional não estacionário, co-integrado (1,1) com r vetores co-integrados, implicando que o número de tendências é igual $k=n-r$, cuja representação de Wold está dada por :

$$\Delta\chi_t = \delta + C(L)[\varepsilon_t + \rho^*D_t] \quad (6.1)$$

e a representação de Tendências Comuns é :

$$\chi_t = \chi_0 + K\tau_t + \Phi(L)[v_t + \Psi D_t], \quad (6.2)$$

$$\tau_t = \mu + \mu^*D_t + \tau_{t-1} + \varphi_t \quad (6.3)$$

onde as especificações dos parâmetros, variáveis e processos são idénticas às definidas em capítulos anteriores.

Para o cálculo da função de resposta de impulsos associada à representação de tendências comuns, temos que impor restrições adicionais ao modelo. Defina :

$$\mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \psi_t \end{bmatrix} = F \varepsilon_t \quad F = \begin{bmatrix} F_k \\ F_r \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \psi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k \\ F_r \end{bmatrix} \varepsilon_t \quad \text{e} \quad (6.4)$$

$$\Psi := F \rho^*$$

onde F é uma matriz não singular, F_k é uma matriz de dimensão $k \times n$ e F_r é uma matriz de dimensão $r \times n$.

Note que temos estabelecido que o componente estacionário em (6.2), $\Phi(L)(\mathbf{v}_t + \Psi D_t)$, é função, por um lado, dos choques que ocorrem no componente não estacionário τ_t ou seja φ_t e, por outro lado, de outros choques independentes, representados por ψ_t .

Por outra parte, $\mathbf{v}_t$ foi escrito como uma transformação linear F de ε_t , e Ψ como uma transformação linear F de ρ^* . Isto é consequência da própria derivação da representação de Tendências Comuns partindo da representação de Wold, como foi discutido no capítulo 4, seção 4.2.

Defina :

$$R(L) := C(L)F^{-1}, \quad (6.5)$$

Então, substituindo (6.4) e (6.5) em (6.1), obtemos :

$$\begin{aligned} \Delta \chi_t &= \delta + C(L)[\varepsilon_t + \rho^* D_t] \\ &= \delta + R(L)[\mathbf{v}_t + \Psi D_t] \end{aligned} \quad (6.6)$$

Resumindo, em (6.6) temos os resíduos $\mathbf{v}_t$, onde φ_t denota a inovação k -dimensional das tendências comuns, e o vetor r -dimensional ψ_t pode ser considerado como o vetor das inovações transitórias.

O cálculo da função de resposta de impulsos se resume a calcular $R(L)$ e Ψ . Sendo que já possuímos $C(L)$ e ρ^* , como foi mostrado em capítulos anteriores, precisamos agora calcular a matriz F .

Já sabemos, por (5.6) que $K\varphi_t = C(1)\varepsilon_t$, então :

$$\begin{aligned} K\varphi_t &= C(l)\varepsilon_t \\ (K'K)^{-1}K'K\varphi_t &= (K'K)^{-1}K'C(l)\varepsilon_t \\ \varphi_t &= (K'K)^{-1}K'C(l)\varepsilon_t \quad \therefore \quad F_k = (K'K)^{-1}K'C(l) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Para o cálculo de F_r , devemos impor uma segunda restrição adicional : a independência das inovações permanentes e transitórias. Então, levando em conta (6.7) :

$$E[\varphi_t \psi'_t] = E[(K'K)^{-1}K'C(l)\varepsilon_t \varepsilon'_t F'_r] = (K'K)^{-1}K'C(l)\Sigma F'_r = 0 \quad (6.8)$$

Por outro lado, como demonstrado por Engle e Granger (1987), $C(1)\gamma=0$. Então :

$$F_r = Q^{-1}\gamma\Sigma^{-1} \quad (6.9)$$

poderá satisfazer (6.8). A matriz Q , de dimensão $r \times r$ pode ser escolhida de modo que a matriz de covariâncias das inovações transitórias $E[\psi_t \psi'_t]$ seja diagonal, ou identidade. Neste último caso, teremos $E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}'_t) = I_n$.

6.2 Exemplo

Continuando com o exemplo desenvolvido nos capítulos anteriores, partindo da representação de Wold :

$$\begin{bmatrix} \Delta\chi_{1t} \\ \Delta\chi_{2t} \\ \Delta\chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} + C(L) \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} D_t \right\} \quad (6.10)$$

usando (6.4), (6.5) e (6.6) podemos escrever :

$$\begin{bmatrix} \Delta\chi_{1t} \\ \Delta\chi_{2t} \\ \Delta\chi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} + R(L) \left\{ \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} D_t \right\} \quad (6.11)$$

onde:

$$R(L) = C(L)F^{-1}, \quad \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ \rho_2^* \\ \rho_3^* \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Usando (6.4), podemos escrever :

$$\begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1t} \\ \varphi_{2t} \\ \varphi_{3t} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

onde definimos :

$$F_k = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} \text{ e } F_r = \begin{bmatrix} f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Usando (6.7), e as definições em (5.24), estimamos F_k :

$$F_k = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix} = (K'K)^{-1}K'C(l) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Para estimar F_r , escreva :

$$F_r = \begin{bmatrix} f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} = Q^{-1}\gamma\Sigma^{-1} = [q_1] \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad (6.16)$$

Neste caso, q_1 pode assumir qualquer valor, ou um valor que assegure que a matriz de covariância $E(v_t v_t')$ seja I_n .

Capítulo 7

Uma Aplicação da Metodologia a Séries Macroeconômicas da França e dos EUA

Neste capítulo proporcionamos um exemplo de aplicação das técnicas descritas nos capítulos anteriores para um vetor compreendendo as seguintes variáveis : preços e taxas de juros na França e nos EUA, e a taxa de câmbio FFr/US\$.

Na seção 7.1 falaremos brevemente das teorias econômicas que servirão de base para o modelo, em particular da teoria da Paridade de Poder de Compra e da Paridade das Taxas de Juros não Coberta.

Na seção 7.2, após uma análise preliminar dos dados, abordaremos a estimação de um modelo VAR(2), com as séries índice de preços por atacado e taxas de juros de curto prazo na França e nos EUA e tipo de câmbio FFr/US\$. As eventuais relações de co-integração das variáveis existentes serão analisadas e estimadas. A partir das características do espaço de co-integração hipotetizadas, serão calculadas as representações de MCE, VAR restrito, Wold e de Tendências Comuns. Finalmente, a função de respostas de impulsos no contexto do modelo de Tendências Comuns é analisada.

7.1 Uma descrição das Teorias da Paridade do Poder de Compra e da Paridade de Taxas de Juros não Coberta

O estudo das relações entre preços, taxas de juros e tipo de câmbio tem sido abordado na literatura econômica por vários modelos.

Um dos enfoques tradicionais tem sido a "teoria da paridade de poder de compra"(PPC), que basicamente relaciona as variações percentuais da taxa de câmbio da moeda do país A pela moeda do país B ao diferencial de inflação do país A com o país B:

$$\text{inf}_A - \text{inf}_B = \Delta TC \quad (7.1)$$

onde :

inf_A : taxa de inflação no país A

inf_B : taxa de inflação no país B

ΔTC : variação percentual da taxa de câmbio da moeda do país A pela moeda do país B

Deste modo, os termos de intercâmbio dos dois países mantém-se constantes. Muitos estudos tem tentado encontrar na teoria da PPC a explicação dos movimentos de curto prazo do tipo de câmbio, tendo funcionado de maneira satisfatória somente nos casos onde os diferenciais de inflação são realmente grandes, sendo que muitos outros fatores afetam muito mais rapidamente os tipos de câmbio no curto prazo. No longo prazo, no entanto, existem maiores evidências de que a PPC se verifica. Neste estudo testaremos se tal relação de longo prazo tem um papel significativo para a taxa de câmbio do franco francês com relação ao dólar norte-americano, assim como para as taxas de juros e preços na França e nos EUA.

Na relação taxa de câmbio com taxas de juros, será testada a teoria da "**paridade da taxa de juros não coberta**" (PJNC, Frankel, 1979), que assume que o diferencial da taxa de juros do país A com o país B é igual ao diferencial percentual entre a taxa de câmbio esperada e a taxa de câmbio observada da moeda do país A pela moeda do país B. Em outras palavras, um país onde as expectativas com relação à taxa de câmbio são de depreciação de sua moeda terá as taxas de juros acima do "normal", sendo que um país com expectativas de valorização de sua moeda, terá taxas de juros abaixo do "normal". Assumindo que a variação da taxa de câmbio está dada pela diferença percentual entre a taxa esperada é a observada, temos a seguinte relação :

$$r_A - r_B = \Delta TC \quad (7.2)$$

onde :

r_A : taxa de juros do país A

r_B : taxa de juros do país B

ΔTC : variação percentual da taxa de câmbio da moeda do país A pela moeda do país B

Novamente este último enfoque será testado em termos de relação de longo prazo para o desenvolvimento do modelo a ser estimado nas próximas seções deste capítulo.

As relações (7.1) e (7.2) sugerem, para um $\chi_t \sim CI(1,1)$, a formulação de um modelo de Mecanismo de Correção de Erro do tipo :

Preços :

$$\begin{aligned}\Delta p_{At} &= f_{pA}(\Delta \chi_t) + \gamma_1 (mce_{ppc})_{t-1} + \gamma_2 (mce_{pjnc})_{t-1} + \varepsilon_{pAt} \\ \Delta p_{Bt} &= f_{pB}(\Delta \chi_t) + \gamma_3 (mce_{ppc})_{t-1} + \gamma_4 (mce_{pjnc})_{t-1} + \varepsilon_{pBt}\end{aligned}\quad (7.3)$$

Taxas de câmbio :

$$\Delta e_{ABt} = f_e(\Delta \chi_t) + \gamma_5 (mce_{ppc})_{t-1} + \gamma_6 (mce_{pjnc})_{t-1} + \varepsilon_{ABt} \quad (7.4)$$

Taxas de Juros :

$$\begin{aligned}\Delta j_{At} &= f_{jA}(\Delta \chi_t) + \gamma_7 (mce_{ppc})_{t-1} + \gamma_8 (mce_{pjnc})_{t-1} + \varepsilon_{jAt} \\ \Delta j_{Bt} &= f_{jB}(\Delta \chi_t) + \gamma_9 (mce_{ppc})_{t-1} + \gamma_{10} (mce_{pjnc})_{t-1} + \varepsilon_{jBt}\end{aligned}\quad (7.5)$$

onde $\chi_t = [p_{At} \ p_{Bt} \ e_{ABt} \ j_{At} \ j_{Bt}]'$ é o vetor de variáveis endógenas nível de preços no país A e B em logaritmos, taxa de câmbio da moeda do país A pela moeda do país B, em logaritmos, e taxas de juros nos países A e B. Os vetores f_{it} representam as relações de curto prazo, sendo que os coeficientes γ_i representam os pesos das relações de longo prazo. As relações de longo prazo estão dadas por $\alpha'_i \chi_t = mce_i$, onde α'_i para $i=1,2$, são os vetores de co-integração. Temos :

$$\begin{aligned}mce_{ppc} &= \alpha_1' \chi_t = (p_{At} - p_{Bt} - e_{AB}) \\ mce_{pjnc} &= \alpha_2' \chi_t = (\Delta e_{ABt} - (j_{At} - j_{Bt}))\end{aligned}\quad (7.6)$$

Note que, na relação mce_{pjnc} em (7.6), na solução de longo prazo, $\Delta e_{ABt}=0$. Assim, as relações de longo prazo relevantes nas equações do sistema são a PPC e o diferencial das taxas de juros. Isto significa que os vetores de co-integração estão no espaço gerado por uma matriz do tipo :

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

7.2 Resultados empíricos

7.2.1 Propriedades de Integração e Co-integração dos Dados

Os dados¹ (apresentados no apêndice E) são observações trimestrais, definindo as variáveis endógenas do modelo da seguinte forma :

ipafr = índice de preços por atacado na França, 1985=100, em logaritmos;

ipaus = índice de preços por atacado nos USA, 1985=100, em logaritmos;

ffus = taxa de câmbio FFr/US\$ (francos por dólar), média do mês, em logaritmos;

jurfr = logaritmo(1+taxa de juros a curto prazo na França/100), onde a taxa de juros a curto prazo é a cotada no Euromercado, para bônus do tesouro francês, prazo 3 meses, média do mês;

tbill = logaritmo(1+taxa de juros a curto prazo nos USA/100), onde a taxa de juros a curto prazo corresponde ao rendimento dos "t-bills", bônus do governo do Tesouro norte-americano, prazo 3 meses, média do mês.

Indagaremos o efeito da variável exógena preço do petróleo, definido da seguinte forma :

doilp = 1ª diferença do logaritmo do preço internacional do petróleo, média do mês.

O período de estudo é de 1970:01 até 1993:04.

No gráfico 1, são apresentados os dados correspondentes às variáveis endógenas, em níveis e em 1^{as} diferenças :

¹Fonte : OCDE

Gráfico 7.1

A análise univariada das séries mediante as funções de autocorrelação amostral sugerem que as séries são $I(1)$, ou seja, sendo que as séries em níveis não são estacionárias, o que já vimos claramente no gráfico 1, as primeiras diferenças são estacionárias (ver anexo deste capítulo). Os testes de Dickey Fuller aplicados sobre as primeiras diferenças das séries rejeitam a hipótese da existência de raízes unitárias ao 0,05 nível de significância (valor crítico para regressão com constante, sem tendência: -2,89; valor crítico para regressão com constante e tendência: -3,45), sugerindo que as 1^{as} diferenças são $I(0)$.

Quadro 7.1

Estatísticas de Dickey-Fuller para Testes de Raízes Unitárias nas 1^{as} diferenças das variáveis do vetor X_t

X_t	τ_1 (com constante)	τ_2 (com constante e tendência)
ipafr	-6,58	-7,03
ipaus	-4,80	-5,63
ffus	-6,86	-6,82
jurfr	-6,90	-6,88
tbill	-9,66	-9,66

No entanto, a análise gráfica sugere que estamos em um caso limite de estacionariedade. De fato, os gráficos sugerem não estacionariedade da variância, e não tanto da média (com a exceção tal vez de ipaus). Assim, diferenciar as séries uma segunda vez não seria um método adequado para remover a não estacionariedade. Foi seguido então o enfoque de Johansen & Juselius (1992) em sua análise da taxa de câmbio da Libra esterlina com relação a uma cesta de moedas. As variáveis foram condicionadas às mudanças do preço de petróleo, que foram consideradas como a origem da não estacionariedade da variância das séries. Adicionalmente, foram introduzidas variáveis dummy para períodos de grande instabilidade. Este procedimento, ajudou também, como veremos, a induzir normalidade nos resíduos.

Por fim, no gráfico 7.2 são apresentadas as relações de co-integração hipotetizadas :

Gráfico 7.2

Gráficamente, a 1ª relação ($ffus-ipafr+ipaus$) não apresenta uma tendência, mas ela fica longe da média no período 80-85, coincidindo com a era Volcker nos EUA, com aplicação de políticas monetárias fortemente restritivas naquele país, combinadas a um crescente déficit orçamentário, o que fez disparar o dólar. A 2ª relação ($jurfr-tbill$), apresenta uma ligeira tendência ascendente no final do período de estudo. No quadro 7.2 são apresentados os testes de Dickey Fuller para as relações de co-integração acima sugeridas. Agregamos igualmente os testes de raízes unitárias para outras relações possíveis, observadas nos mercados financeiros :

3ª relação : $ffus-tbill+jurfr$, que representa em certo sentido a tese contrária à teoria de PJNC, afirmando que o dólar tende a subir quando o diferencial das taxas de juros nos USA com relação às taxas de juros na França aumenta, devido ao incremento da procura do dólar;

4ª relação : $ffus-tbill+ipaus+jurfr-ipafr$, a mesma idéia que a apresentada na 3ª relação , mas em função das taxas de juros reais (taxas de juros nominais - inflação)

Nos testes de Dickey Fuller, a hipótese nula de presença de raiz unitária é rejeitada somente na 2ª relação (diferencial das taxas de juros), ao nível de significância de 0,05 (valor crítico para 100 observações, em uma regressão com constante, sem tendência : -2,89; na regressão com constante e tendência, a tendência não foi estatisticamente significativa). Nos outros casos, a hipótese nula de raízes unitárias não é rejeitada. No entanto, voltaremos a analisar mais tarde estas últimas relações, com os testes de Johansen

& Juselius. Em alguns casos, serão testadas hipóteses sobre a existência de outros tipos de combinações lineares estacionárias de jurfr , tbill e ffus .

O procedimento de Johansen, que estimará primeiro o espaço de co-integração de maneira irrestrita, permitirá realizar diferentes tipos de testes de restrições sobre os vetores de co-integração. Obteremos assim mais informação sobre os vetores geradores daquele espaço, e se estes são compatíveis com as teorias econômicas esboçadas acima.

Quadro 7.2

Estatísticas de Dickey-Fuller Aumentadas (5 lags) para Testes de Raízes Unitárias nas relações de co-integração

z_t	τ_1 (com constante)	τ_2 (com constante e tendência)
ffus-ipafr+ipaus	-2,53	-2,20
jurfr-tbill	-3,13	-3,26
ffus+jurfr-tbill	-1,81	-2,17
ffus-tbill+ipaus+jurfr-ipafr	-2,32	-2,58

7.2.2 Estimação da Representação MCE

O vetor em estudo :

$$\chi_t = \begin{bmatrix} \text{ipafr}_t \\ \text{ipaus}_t \\ \text{ffus}_t \\ \text{jurfr}_t \\ \text{tbill}_t \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

tem uma representação VAR(p) :

$$A(L)\chi_t = \rho + \rho_1^* D_{1t} + \rho_2^* D_{2t} + \rho_3^* D_{3t} + \sum_j \omega_j Z_{jt} + \varepsilon_t \quad (7.9)$$

onde ρ é um vetor de constantes, os ρ_i^* são vetores de parâmetros correspondentes às dummies sazonais D_{it} , os ω_j são vetores de parâmetros correspondentes às variáveis exógenas do modelo, e ε_t é o vetor dos erros. As variáveis exógenas do modelo são o preço de petróleo (1ª diferença do logaritmo, doilp), e variáveis dummy que tomam conta de períodos de grande instabilidade, em particular com relação às taxas de juros, para determinados trimestres em 74, 80, 81 (correspondentes aos choques dos preços do petróleo, e a aplicação de políticas monetárias altamente restritivas em USA) e 93 (correspondente à crise no Sistema Monetário Europeu).

Uma vez identificado o espaço de co-integração, será obtida a representação do Mecanismo de Correção de Erro para o processo estocástico $\{\chi_t\}$:

$$A^*(L)\Delta\chi_t = \rho + \rho_1^*D_{1t} + \rho_2^*D_{2t} + \rho_3^*D_{3t} - \gamma\alpha'\chi_{t-1} + \sum_j \omega_j Z_{jt} + \varepsilon_t \quad (7.10)$$

onde α é o vetor de co-integração, γ é o vetor dos pesos, $A^*(L)$ é um polinômio matricial tal que $A(L) = A^*(L)(1-L) + A(1)L$ com a especificação já descrita no capítulo 2.

Antes de obter as estimativas finais de (7.9) e (7.10), é preciso decidir a ordem do VAR(p). O quadro 7.3. apresenta os critérios de informação FPE (Final Prediction Error), AIC (Akaike's Information Criterion), HQ (Hannan-Quinn Criterion) e SC (Schwarz Criterion) para VAR estimados da ordem 1 até 4. Os critérios FPE e AIC escolhem $p=4$, enquanto que o critérios HQ escolhe $p=2$ e SC escolhem $p=1$.

Quadro 7.3

Seleção da Ordem do modelo VAR(p) irrestrito
Critérios de Informação

LAGS	1	2	3	4
FPE	0,143-E18	0,105E-18	0,986E-19	0,913E-19
AIC	-43,388	-43,705	-43,780	-43,880
HQ	-43,056	-43,097	-42,895	-42,719
SC	-42,566	-42,198	-41,857	-41,002

Os critérios FPE e AIC são praticamente equivalentes para pequenas e moderadas amostras. Por outro lado, estes dois critérios não são estimadores consistentes da verdadeira ordem do processo, e tendem a sobre-estimar o valor de p . O critério HQ é consistente e SC é super-consistente. Como o

tamanho da amostra é relativamente grande, escolhemos os critérios HQ e SC (ver Lutkepohl, págs. 130-131). Para escolher entre os dois lags 2 e 1, foi calculado o teste de verossimilhança para $H_0 : p=1$ vs $H_a : p=2$.

O teste λ_{MV} , que atinge um valor de 59,248, e que tem uma distribuição assintótica $\chi^2(25)$ sob a H_0 , rejeita a hipótese nula ao nível de significância de 0,05. Assim, foi escolhida a estimação de um VAR de ordem 2.

A equação (7.10) foi estimada diretamente usando o procedimento de Johansen, (descrito no apêndice D)², que é um estimador de máxima verossimilhança, baseado na hipótese de que $\{\varepsilon_t\}$ é um processo Gaussiano. O quadro 7.4 apresenta alguns resultados e testes com relação aos resíduos.

Os testes Q de Box & Pierce, para 21 lags, não rejeitam a hipótese nula de ausência de autocorrelação dos resíduos, ao 90% de significância, sendo que o valor dos testes são inferiores ao valor crítico $\chi_{0,90}(19)=27,2$, em todos os casos. Com relação à presença de heterocedasticidade, a H_0 de ausência de um processo ARCH de 2ª ordem não é rejeitada ao nível de significância de 0,10 para ipaus, ffus, jurfr e tbill, sendo que os testes são inferiores ao valor crítico $\chi_{0,90}(2)=4,61$. Com relação a ipafr, a hipótese nula de homocedasticidade também não é rejeitada, embora a um nível de significância menor ($\alpha=0,001$). No teste de normalidade de Jarque-Bera, a H_0 de que os resíduos seguem um processo gaussiano não é rejeitada para todas as equações, ao nível de significância de 0,10 para ipaus, ffus e jurfr, e de 0,01 para ipafr e tbill.

Quadro 7.4

Análise Residual Univariada

<i>Equação</i>	<i>Média</i>	<i>VAR.</i>	<i>MAX.</i>	<i>MIN.</i>	<i>SQR</i>
ipafr	0,00000000	0,00025384	0,04730328	-0,05417043	0,66366308
ipaus	0,00000000	0,00004308	0,01870319	-0,02167015	0,73658557
ffus	0,00000000	0,00178902	0,10428304	-0,10627323	0,34969683
jurfr	0,00000000	0,00005369	0,02100005	-0,1542256	0,52074102
tbill	0,00000000	0,00005944	0,01893760	-0,02760327	0,62446135

²O programa utilizado foi CATS (Cointegration Analysis for Time Series), elaborado por Johansen & Juselius, e funciona como um procedimento do programa "RATS".

Quadro 7.4 (continuação)**Análise Residual Univariada**

<i>Equação</i>	<i>B-P.Q (21)</i>	<i>ARCH (2)</i>	<i>asimetria</i>	<i>ex.curt.</i>	<i>J-B.Norm.</i>
ipafr	24,388	10,727	-0,093	1,840	13,394
ipaus	23,901	0,284	0,049	0,982	3,816
ffus	16,381	3,575	0,094	-0,024	0,140
jurfr	23,243	1,730	0,361	0,670	3,805
tbill	14.,75	4,587	-0,324	1,509	10,562

A normalidade e ausência de autocorrelação dos resíduos são hipóteses fundamentais no que tange aos testes que serão apresentados a seguir, todos eles baseados na verossimilhança da amostra, partindo da hipótese de que os erros possuem uma distribuição normal, independente e homocedástica.

A introdução das dummies que "tomam conta" dos períodos de instabilidade das variáveis era essencial para induzir normalidade nos resíduos. Com efeito, nas estimações preliminares do modelo, que não consideravam as variáveis dummies mencionadas, os testes rejeitaram normalidade dos resíduos (por excesso de curtose) e homocedasticidade, para ipafr, jurfr e tbill. Vendo os resultados do quadro 7.4, vemos que a performance dos testes para normalidade não é ainda muito satisfatória para ipafr e tbill.

Segundo Johansen (1992), a sensibilidade da análise à escolha da ordem do lag, e à distribuição dos resíduos podem ser investigados por experimentos Monte Carlo. De acordo com a análise assintótica (Johansen, 1988, 1991), os resultados limites valem se os resíduos admitem o Teorema Central do Limite, no sentido de que as somas acumuladas convergem à movimentos Brownianos.

7.2.3 Análise do Espaço de Co-integração

O quadro 7.5 apresenta a) as estimativas para os autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 \dots \lambda_5$ da expressão $S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}$ com relação a S_{11} , conceito discutido no Apêndice D (variáveis canônicas), b) a estatística Lambdamax e c) a estatística do Traço.

Quadro 7.5**AUTOVALORES, LAMBDAMAX E ESTATÍSTICA DO TRAÇO**

<i>Autovalores</i>	0,418	0,365	0.210	0.108	0.016
<i>Lambdamax</i>	50,826	42,674	22.100*	10.692	1.482
<i>Est. do Traço</i>	127,773	76,947	34.273*	12.173	1.482

Ao nível de significância de 0,05, ambos os testes (usando a distribuições calculadas por Johansen & Juselius, 1990) sugerem que os 3 primeiros autovalores são significativamente diferentes de 0, ou seja que o espaço de co-integração é de dimensão 3 ($r=3$). Assim, α e γ em (7.10) podem ser consideradas matrizes de dimensão 5×3 . As estimativas das matrizes α normalizada e γ , uma vez assumido que o espaço de co-integração é de dimensão 3, são apresentadas a seguir:

Quadro 7.6

α			γ		
α_1	α_2	α_3	γ_1	γ_2	γ_3
1,000	1,088	-0,034	0,039	0,122	0,117
-1,228	-1,109	0,019	-0,038	0,006	0,066
-0,601	-0,250	0,089	-0,134	0,087	0,177
3,114	1,000	1,000	0,022	-0,011	0,140
1,529	-2,537	-0,563	0,035	-0,002	0,078

O quadro 7.7 exibe a matriz $\gamma\alpha'$, e a matriz dos desvios padrão para $\gamma\alpha'$:

Quadro 7.7.

$\gamma\alpha'$					Desvios padrão para $\gamma\alpha'$				
0,167	-0,180	-0,043	0,359	-0,316	0,028	0,031	0,014	0,099	0,070
-0,034	0,041	0,027	-0,046	-0,111	0,011	0,013	0,006	0,040	0,029
-0,045	0,071	0,074	-0,153	-0,525	0,074	0,083	0,038	0,265	0,188
0,004	-0,011	0,002	0,196	-0,017	0,012	0,013	0,006	0,042	0,030
0,030	-0,039	-0,013	0,184	0,014	0,013	0,015	0,007	0,047	0,034

A análise a seguir será então baseada na hipótese de que a dimensão do espaço de co-integração é 3.

A interpretação do espaço de co-integração à luz das teorias discutidas na seção 7.1 é complexo. Podem ser feitos os seguintes comentários :

a) A primeira vista, a relação 1, a PPC, parece estar contida em α_1 sendo que a relação 2 de diferencial de taxas de juros esperada, implicada pela PJNC, estaria entrando em α_2 e α_3 .

b) As relações 3 (ffus-tbill+jurfr) e 4 (ffus-tbill+jurfr+ipaus-ipafr) podem estar entrando em α_3 .

c) A relação de PPC pode também estar entrando em α_3 . Nesse caso α_3 poderia estar contendo a relação 1 (PPC) e a relação 2 (diferencial das taxas de juros).

d) Os dois últimos valores do vetor α_1 (3,114 e 1,529) que representam uma média ponderada das taxas de juros, em vez de um diferencial, são de difícil interpretação econômica, resultado semelhante ao obtido por Johansen & Juselius em seu estudo sobre a taxa de câmbio Libra/US\$ (1992).

Com relação a γ , que representa os pesos das relações de co-integração em cada uma das equações, e considerando o cálculo de $\gamma\alpha'$ e os desvios padrões dessa matriz³ (com as estatísticas t implícitas), apresentados no quadro 7.7, são feitos os seguintes comentários :

e) Considerando as matrizes γ e $\gamma\alpha'$, as relações de co-integração possuem um peso maior para as variáveis *ffus* e *ipafr*, seguidas por *jurfr*, *tbill* e *ipaus*, nessa ordem, aproximadamente.

f) Considerando a matriz dos desvios padrão, é interessante observar que no que tange à taxa de câmbio, a relação de longo prazo de peso estatisticamente significativa é uma combinação linear entre a taxa de câmbio e a taxa de juros nos EUA .

g) Na equação da taxa de juros da França, somente o peso de γ_3 parece significativamente diferente de 0, e considerando a matriz $\gamma\alpha'$ e seus desvios padrão, só as taxas de juros parecem estar entrando na relação de longo prazo nas taxas de juros na França.

h) Para as taxas de juros nos Estados Unidos, os pesos de γ são baixos, embora estatisticamente significativos quando a matriz $\gamma\alpha'$ e seus desvios padrão são considerados. Não tem explicação econômica o fato de que, para a equação da taxa de juros nos EUA, a taxa de juros da França seja estatisticamente significativa, sendo que a dos EUA não é.

i) De modo geral, considerando $\gamma\alpha'$, a relação PPC parece estar presente em todas as equações, com exceção de *jurfr*. Em contraste, as taxas de juros não estão entrando nas equações do modo esperado. Na 2ª, 3ª e 5ª equações a média ponderada das taxas de juros, em vez dos diferenciais, parecem ser

³ Calculada pelo método Delta.

relevantes. Em particular o diferencial não entra na 3ª equação, que é a da taxa de câmbio.

Com relação as estimativas de curto prazo da equação (7.10), estas são apresentadas a seguir :

Quadro 7.8

ESTIMATIVAS DOS COEFICIENTES DE CURTO PRAZO DA EQUAÇÃO (7.10)

Matriz A_1^*					T-estatísticas				
(ipafr	ipaus	ffus	jurfr	tbill)					
0,212	0,289	-0,095	0,152	-0,073	2,6	1,3	2,3	0,8	0,4
-0,028	0,182	-0,011	0,117	-0,043	0,8	2,0	0,6	1,4	0,6
0,262	-1,559	0,243	-0,709	0,331	1,2	2,6	2,2	1,3	0,7
0,073	0,023	0,017	0,319	-0,024	2,1	0,2	1,0	3,7	0,3
0,054	0,279	-0,049	0,202	-0,114	1,4	2,6	2,5	2,1	1,4

Vetores ω_j						T-estatísticas					
(doilp	d74q1	d80q2	d80q4	d81q2	d93q2)						
0,028	0,168	-0,030	-0,020	-0,021	-0,003	1,7	7,0	1,6	1,1	1,1	0,2
0,041	-0,004	-0,005	-0,001	0,002	0,005	6,0	0,4	0,6	0,1	0,3	0,7
-0,075	0,130	-0,009	0,079	0,068	-0,009	1,7	2,0	0,2	1,6	1,3	0,2
0,009	0,004	0,003	-0,003	0,041	-0,031	1,3	0,4	0,3	0,4	4,8	3,9
0,010	0,013	-0,062	0,059	0,008	0,003	1,3	1,1	6,8	6,6	0,8	0,3

ρ_1^*	ρ_2^*	ρ_3^*	ρ	T-estatísticas			
(D1	D2	D3	constante)				
-0,010	0,004	-0,002	-0,149	1,8	0,8	0,4	3,2
-0,001	-0,001	-0,002	0,083	0,6	0,4	0,9	4,4
0,011	0,020	0,008	0,213	0,8	1,4	0,6	1,7
-0,001	-0,004	-0,000	-0,012	0,5	1,5	0,1	0,6
-0,001	0,002	0,002	-0,055	0,3	0,6	0,8	2,5

A matriz Σ estimada onde $\Sigma = E(\varepsilon_t \varepsilon_t')$ é apresentada no quadro 7.9 :

Quadro 7.9

Matriz Σ

```

0,3293663E-03
0,1739513E-06 0,4259602E-04
0,1789788E-03 -0,3831643E-04 0,1859411E-02
0,1271159E-04 -0,2928637E-05 -0,4366987E-05 0,5081584E-04
0,1922124E-04 0,9713201E-05 0,1887375E-04 0,1232639E-04 0,6009888E-04

```

O gráfico 7.3 apresenta as relações de co-integração estimadas. As relações de co-integração são apresentadas na

ordem dos autovalores do maior para o menor. Quanto maior o autovalor maior a correlação da relação de co-integração hipotetizada com as 1^{as} diferenças das variáveis do sistema. Se espera que as relações tenham aspecto de séries estacionárias, embora não sejam ruídos brancos. Os gráficos que apresentam $\alpha'R_{1t}$ (R_{1t} representa o resíduo da regressão de χ_t sobre $\Delta\chi_{t-1}, \dots, \Delta\chi_{t-k+1}$, ver apêndice sobre método de Johansen) devem ser mais satisfatórios neste sentido, uma vez que estes representam as relações de co-integração corrigidas dos efeitos de curto prazo.

Gráfico 7.3

Gráfico 7.3 (continuação)

7.2.4 Alguns Testes sobre Restrições do Espaço de Co-integração

Os comentários feitos na seção anterior sugerem a aplicação de uma série de testes, usando a metodologia de Johansen, que compara modelos restritos com modelos irrestritos através da estatística da razão de verossimilhança (ver apêndice D). Em geral o teste da razão de verossimilhança é da forma :

$$-2\ln Q(H_0|H_1) = T \ln \left\{ \frac{\prod_{i=1}^r (1 - \lambda_i^R)}{\prod_{i=1}^r (1 - \lambda_i^{IRR})} \right\} = T \left(\sum_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i^R) - \sum_{i=1}^r \ln(1 - \lambda_i^{IRR}) \right) \quad (7.11)$$

onde T é o número de observações e os λ_i^{RR} e λ_i^{IRR} correspondem aos autovalores dos modelos restrito e irrestrito, respectivamente. A estatística (7.11) é distribuída assintoticamente de modo aproximado como uma $\chi^2(q)$, onde q é o número de graus de liberdade que dependerá do número de restrições. Valores grandes da estatística rejeitam a hipótese nula de que o modelo restrito é o verdadeiro.

Com relação ao espaço de co-integração, foram realizados os seguintes testes:

a) H_0 : O vetor $[a_i \ -a_i \ -a_i \ * \ *]$, pertence ao espaço de co-integração e entra em α_1, α_2 e α_3 , ou seja, a relação de PPC,

sem restrições sobre as taxas de juros, entra 3 vezes. A estatística obtida tem distribuição $\chi^2(6)$, e neste caso assume um valor de 43,53. É um valor alto, e a hipótese nula é rejeitada confortavelmente.

b) H_0 : O vetor $[1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0]$ pertence ao espaço de co-integração. A estatística obtida tem distribuição $\chi^2(2)$, e neste caso assume um valor de 3,03, com um p-value de 0,22. A hipótese nula não é rejeitada, à um nível de significância de 0,10. Em outras palavras, a hipótese de que a relação PPC é estacionária não é rejeitada. Neste teste, temos feito entrar a relação PPC uma vez e não 3 vezes com em a).

c) H_0 : O vetor $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1]$ pertence ao espaço de co-integração. A estatística obtida tem distribuição $\chi^2(2)$, e neste caso assume o valor de 8,93. A hipótese nula não é rejeitada ao nível de significância de 0,01. Em outras palavras, a hipótese de que a relação 2, o diferencial das taxas de juros (jurfr-tbill), é estacionária não é rejeitada, embora por escassa margem.

Note que se os vetores em b) e c) pertencem ao espaço de co-integração, a relação 4 (ipafr-ipaus-ffus-jurfr+tbill) também pertence ao espaço de co-integração.

Vale a pena lembrar que o resultado em c) já havia sido antecipado pelo teste de raízes unitárias de Dickey-Fuller na seção 7.2.1. Entretanto, a hipótese nula de raiz unitária para a PPC não tinha sido rejeitada. Isto pode ser explicado em parte pelo fato de que os testes de raízes unitárias feitas na seção 7.2.1 não levam em conta as outras variáveis do modelo, contrariamente aos testes de Johansen.

d) H_0 : O vetor $[0 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1]$ pertence ao espaço de co-integração. A estatística obtida tem distribuição $\chi^2(2)$, e neste caso assume o valor de 6,18. A hipótese nula não é rejeitada ao nível de significância de 0,05. Em outras palavras, o dólar guarda uma relação diretamente proporcional com o diferencial de taxas de juros EUA-França (relação 3, ffus+jurfr-tbill), e esta relação é estacionária, de acordo ao que sugere o resultado do teste (resultado diferente ao obtido pelo teste de Dickey Fuller). Neste caso, é interessante apresentar o α' estimado no modelo restrito.

Quadro 7.10

α		
α_1	α_2	α_3
0,000	0,404	-0,990
0,000	-0,486	0,946
1,000	-0,468	1,146
1,000	1,000	1,000
-1,000	0,532	2,146

Note como a relação PPC aparece na segunda e na terceira colunas de forma bem pronunciada.

Considerando alguns dos resultados no modelo de Tendências Comuns que serão tratados mais adiante, foram feitos dois testes adicionais.

e) H_0 : O vetor $[a \ 0 \ 0 \ -b \ 0]$ pertence ao espaço de co-integração. A estatística obtida tem distribuição $\chi^2(1)$, e neste caso assume o valor de 0,47. A hipótese nula não é rejeitada confortavelmente. Este resultado sugere a existência de uma relação de longo prazo entre as taxas de juros e os preços na França.

f) H_0 : O vetor $[0 \ 0 \ a \ 0 \ -b]$ pertence ao espaço de co-integração. A estatística obtida tem distribuição $\chi^2(1)$, e neste caso assume o valor de 2,86. A hipótese nula não é rejeitada confortavelmente. Este resultado sugere que o dólar aumenta (cai) quando aumentam (caem) as taxas de juros nos EUA, e que esta relação é estacionária.

g) Finalmente foi testada a exogeneidade fraca dos preços da França, das taxas de juros nos USA e da França. Os testes obtidos, que tem distribuição $\chi^2(5)$, foram respectivamente 40,1; 24,24 e 18,94. Exogeneidade fraca destas variáveis foi rejeitada confortavelmente.

Antes de continuar com o cálculo das outras representações, vale apresentar as seguintes observações. As hipóteses nulas de que os vetores $[1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0]$ (pela teoria da PPC) e $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1]$ (pelo diferencial das taxas de juros implicado pela teoria da PJNC) pertencem ao espaço de co-integração, não foram rejeitadas, embora por escassa margem. Os resultados relativos à PPC neste sentido (ausência de forte evidência estatística em favor a esta teoria) se assemelham aos resultados obtidos em outros estudos para taxa de câmbio de moedas européias com relação ao dólar para o mesmo período, que é (em sua maioria) a era pos-Bretton Woods. Hali J. Edison et alli. (1994) menciona uma série de causas sobre o porquê destes resultados :

(i) O período considerado (algo mais de 20 anos) é relativamente curto. Estudos feitos para períodos mais longos proporcionam evidência

mais robusta em favor da PPC (Edison & Klowland, 1987; Ardeni & Lubian, 1991 e Kim, 1990).

(ii) Os autores notam que muitos trabalhos clamam sobre que a relação PPC passa os testes de estacionariedade, mas de fato estes trabalhos falam sobre uma relação entre a taxa de câmbio e preços com os sinais apropriados para a PPC, mas não assumem a relação de proporcionalidade e simetria implicada, i.e. que o vetor de co-integração é exatamente $[1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0]$.

(iii) O trabalho dos autores documenta em particular sobre experimentos Montecarlo feitos para os testes de Johansen sobre co-integração. Nestes estudos, os testes revelam ter um baixo poder para amostras pequenas : em particular nos testes com as estatísticas do Traço e Λ max, o poder quando a hipótese nula é falsa é praticamente igual ao tamanho dos testes, i.e. a probabilidade de rejeitar não co-integração quando existe co-integração é praticamente a mesma que a probabilidade de rejeitar não co-integração quando não tem co-integração. Note que no presente trabalho, apesar disto, o teste de Johansen admitiu um espaço de co-integração de dimensão 3, dentro de um VAR de dimensão 5, que inclui não somente preços e taxa de câmbio, mas também taxas de juros e variáveis exógenas. Os autores se referem à fraca evidência em favor da PPC dentro de modelos que consideram somente preços e taxa de câmbio. Provavelmente o modelo VAR(5) que inclui também taxas de juros e variáveis exógenas, esteja mais perto do Mecanismo Estatístico Gerador Correto, o que ajuda a admitir o espaço de co-integração sugerido pela teoria.

(iv) Os autores falam também, para o caso dos testes de Johansen, sobre a obtenção de uma correção dos valores críticos levando em conta o tamanho da amostra e, mais importante, o tamanho do período considerado. Mesmo assim, eles documentam sobre o fraco poder dos testes (embora mais eficazes que os testes de Dickey-Fuller), sugerindo técnicas alternativas para testar co-integração.

Nas próximas seções serão calculadas⁴ as representações VAR Restrita e de Wold, para finalmente apresentar o Modelo de Tendências Comuns, baseados na hipótese de um espaço de co-integração de dimensão 3, o que implica a presença de duas tendências comuns.

7.2.5 A Representação VAR Restrita

Uma vez estimada a equação (7.10), e com a hipótese de que o espaço de co-integração é de dimensão 3 ($r=3$), implicando a existência de 2 tendências comuns ($k=2$) podemos calcular a representação VAR restrita, discutida no capítulo 3 :

$$B(L)y_t = \theta + \sum_i \theta_i^* D_{it} + \sum_j \theta_j^* Z_{jt} + \eta_t \quad (7.12)$$

⁴Os procedimentos a seguir foram realizados usando o programa elaborado por E. Melander, que funciona como um procedimento dentro do programa "RATS"

onde :

$$B(L) = M[A^*(L)M^{-1}D(L) + \gamma^*L] \quad (7.13)$$

$$Y_t = D_1(L)M\alpha_t \quad (7.14)$$

e

$$\theta = M\rho, \quad \theta_{i1}^* = M\rho_i^*, \quad \theta_{j2}^* = M\omega_j, \quad \eta_t = M\varepsilon_t \quad (7.15)$$

com a matriz de dimensão 5×5 $M = [S_2' \alpha]'$, sendo que S_2 é de dimensão 2×5 e é ortogonal a α . $\gamma^* = [0 \ \gamma]$ é uma matriz de dimensão 5×5 e $D(L)$ e $D_1(L)$ são matrizes polinomiais, de dimensão 5×5 :

$$D(L) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & (I-L)I_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_1(L) = \begin{bmatrix} (I-L)I_2 & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

A matriz M calculada, após o cálculo da matriz S_2 ortogonal a α é :

Quadro 7.11

Matriz M

0,4097404	0,6674019	-0,6195541	0,03269814	-0,04208298
0,6390460	0,2751794	0,7133930	-0,2234167E-15	0,08346860
1,000000	-1,228000	-0,6010000	3,114000	1,529000
1,088000	-1,109000	-0,2500000	1,0000000	-2,537000
-0,03400000	0,0190000	0,08900000	1,000000	-0,5630000

Usando (7.13), (7.15) e as estimativas de (7.10), são calculados os parâmetros da representação VAR Restrita. As matrizes B_1 e B_2 do polinômio $B(L)$ são apresentados a seguir :

Quadro 7.12

Matriz B₁

0,9091301	0,1084726	-0,2315630	-0,3042876	10,366805
-0,5234745	0,05825589	0,2314965	0,1394906	-10,326545
10,396040	0,4507312	0,6725006	-0,3461654	10,649657
-0,06675792	0,03929458	0,02420824	0,9476783	-0,2115357
-0,20938420	0,01569174	0,08512052	0,05555334	0,7586930

Quadro 7.12 (continuação)*Matriz B₁*

0,0000000	0,0000000	0,1586777	0,3044716	-1,350427
0,0000000	0,0000000	-0,1532893	-0,2810035	1,100834
0,0000000	0,0000000	0,039278360	0,3211324	-2,134454
0,0000000	0,0000000	-0,075487240	-0,046084350	0,2595697
0,0000000	0,0000000	-0,073441520	-0,049388340	0,1321920

As estimativas dos parâmetros da constante, e das variáveis sazonais são apresentados no Quadro 7.13 :

Quadro 7.13*Variáveis Sazonais e Constante*

θ_{11}^*	θ_{21}^*	θ_{31}^*	θ
-0,01157052	-0,01163448	-0,007194884	-0,1356998
0,001098215	0,01671580	0,004045631	0,07498398
-0,02002600	-0,01619000	-0,001294000	-0,5004000
-0,01098400	-0,00861300	-0,007032000	-0,1798740
0,00086300	-0,00350100	-0,000384000	0,04456500

As estimativas dos parâmetros correspondentes as outras variáveis exógenas são apresentadas no quadro 7.14 :

Quadro 7.14*Outras Variáveis Exógenas*

θ_{12}^*	θ_{22}^*	θ_{32}^*	θ_{42}^*	θ_{52}^*	θ_{62}^*
0,08517622	-0,04791540	-0,00459960	-0,00387980	-0,08395470	0,00438840
-0,02349415	0,2000852	-0,02142870	0,08226600	0,06308870	-0,00113720
0,06604300	0,1271150	-0,1039070	0,04618000	0,05582000	-0,05678000
-0,01262500	0,1257390	0,1354490	-0,1930840	-0,01362000	-0,05170000
-0,00347800	0,00630000	0,08030000	-0,08525000	0,03300000	-0,03293000

7.2.6 A Representação de Wold

A partir da representação VAR restrita podemos obter a representação de Wold, de acordo à descrição do procedimento no capítulo 4 :

$$\Delta \chi_t = \delta + C(L) \left[\rho_1^* D_{1t} + \rho_2^* D_{2t} + \rho_3^* D_{3t} + \sum_j \omega_j Z_{jt} + \varepsilon_t \right] \quad (7.17)$$

onde :

$$C(L) = M^{-1}D(L)B(L)^{-1}M = \sum_{i=0}^{\infty} C_i L^i \quad \text{e} \quad \delta = C(1)\rho \quad (7.18)$$

A seguir são apresentadas as estimativas de $C(1)$ e δ :

Quadro 7.15

Matriz $C(1)$

-0,05674773	2,896961	-0,3884676	-2,748742	3,449009
0,1803050	1,931980	-0,4724782	-0,7895033	0,5840096
-0,5124640	0,732450	0,2358164	-3,933088	5,827043
0,013635740	0,04558901	-0,02032631	0,02624912	-0,06001764
-0,04727947	0,2450942	0,008689451	-0,4357709	0,6259664

Vetor δ'

-0,1356998	0,07498398	-0,5004000	-0,1798740	0,04456500
------------	------------	------------	------------	------------

7.2.7 Identificação dos Parâmetros da Representação de Tendências Comuns

O processo em estudo admite a representação de Tendências Comuns :

$$\chi_t = \chi_0 + K\tau_t + \Phi(L) \left[v_t + \sum_i \Psi_i D_{it} + \sum_j \Psi_j Z_{jt} \right] \quad (7.19)$$

$$\tau_t = \mu + \sum_i \mu_i^* D_{it} + \sum_j \mu_j^* Z_{jt} + \tau_{t-1} + \varphi_t \quad (7.20)$$

onde :

(i) χ_0 é o vetor constante contendo os valores iniciais de χ_t .

(ii) K é uma matriz de constantes de dimensão 5×2 , sendo que 2 é o número de tendências, τ_t é um vetor de dimensão 2×1 , a variável de tendência. A sequência 5-dimensional $\{v_t\}$ é um ruído branco com $E(v_t) = 0$ e $E(v_t v_t') = I_5$, a matriz identidade 5×5 .

(iii) Os vetores de parâmetros Ψ_{i1} , Ψ_{j2} são de dimensão 5×1 ; os vetores de parâmetros μ , μ_{i1}^* e μ_{j2}^* são vetores de dimensão 2×1 . $\{\phi_t\}$ é uma sequência ruído branco com $E(\phi_t) = 0$ e $E(\phi_t \phi_t') = I_2$.

Cálculo dos parâmetros do componente permanente. Para o cálculo da matriz K , será usado o procedimento 4) descrito no capítulo 5, implicando o cálculo das matrizes K_0 e π . K_0 é uma matriz de dimensão 5×2 e posto 2, que exige a observação da restrição $\alpha' K_0 = 0$. π , de dimensão 2×2 , é tal que $K_0 \pi = K$, e é obtida usando a restrição $K_0 \pi \pi' K_0' = C(1) \Sigma C(1)'$, o que resulta em uma decomposição de Choleski da matriz $[K_0' K_0]^{-1} K_0' C(1) \Sigma C(1)' K_0 [K_0' K_0]^{-1}$. As matrizes K_0 e π são apresentadas a seguir :

Quadro 7.16

Matriz K_0

0,4097404	0,6390460
0,6674019	0,2751794
-0,6195541	0,7133930
0,03269814	-0,2234167E-15
-0,04208298	0,08346860

Matriz π

0,03164780	0,0000000
-0,007182451	0,06462318

Assim pode-se calcular a matriz 5×2 K em (7.19) :

Quadro 7.17*Matriz K*

0,008377468	0,04129718
0,01914534	0,01778297
-0,02473144	0,04610172
0,001034824	-0,1443790E-16
-0,001931343	0,005394006

Note que a matriz K não é única, pois π não é única, o que decorre da natureza da própria decomposição de Choleski.

Os outros parâmetros do componente permanente da representação de Tendências Comuns são obtidos usando as restrições :

$$\begin{aligned}\mu &= (K'K)^{-1} K'C(l)M^{-1}\theta \\ \mu_{1i}^* &= (K'K)^{-1} K'C(l)M^{-1}\theta_{1i}^* \\ \mu_{jj}^* &= (K'K)^{-1} K'C(l)M^{-1}\theta_j^*\end{aligned}\quad (7.21)$$

Os parâmetros estimados são :

Quadro 7.18*Coefficientes das Variáveis Sazonais e Constante no Componente Permanente*

μ_{11}^*	μ_{21}^*	μ_{31}^*	μ
-0,3588088	-0,6001886	-0,3872810	0,3848939
-0,1060638	0,2864037	0,03183866	0,1940285

Quadro 7.19*Coefficientes das Outras Variáveis Exógenas no Componente Permanente*

μ_{12}^*	μ_{22}^*	μ_{32}^*	μ_{42}^*	μ_{52}^*	μ_{62}^*
3,289636	-1,173347	3,228476	-5,352240	-0,9642828	-0,5910509
3,150522	-0,6574102	-6,261312	5,428084	-2,273984	2,833011

Cálculo dos parâmetros do componente transitório. Por último, serão calculados os parâmetros do componente transitório na equação (7.19), o que permite o estudo do efeito de choques nas variáveis do sistema na representação

de Tendências Comuns. Devemos partir da Representação de Wold em (7.17), escrita da seguinte forma :

$$\Delta \chi_t = \delta + C(L) F^{-1} \left[F \sum_i \rho_i^* D_{it} + F \sum_j \omega_j Z_{jt} + F \varepsilon_t \right] \quad (7.22)$$

onde F é uma matriz não singular tal que :

$$v_t = \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \psi_t \end{bmatrix} = F \varepsilon_t \quad F = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \psi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \varepsilon_t \quad (7.23)$$

Vale lembrar que v_t são os choques que se produzem no componente transitório dentro da representação de Tendências Comuns (7.19). Temos estabelecido a restrição de que v_t é função de φ_t , processo (de dimensão 2×1) que representa os choques no componente permanente, sendo que ψ_t (de dimensão 3×1) são choques no componente transitório independentes dos choques que se produzem no componente permanente. Assim, são obtidos os coeficientes das variáveis exógenas no componente transitório :

$$\Psi_i = F \rho_i^* \quad \Psi_j = F \omega_j \quad (7.24)$$

e definimos :

$$R(L) = C(L) F^{-1} \quad (7.25)$$

Obtemos assim a equação onde serão aplicadas as inovações :

$$\Delta \chi_t = \delta + R(L) \left[\sum_i \Psi_i D_{it} + \sum_j \Psi_j Z_{jt} + v_t \right] \quad (7.26)$$

F é obtida das equações:

$$\begin{aligned} F_2 &= (K'K)^{-1} K' C(l) \\ F_3 &= Q^{-1} \gamma \Sigma^{-1} \end{aligned} \quad (7.27)$$

onde a matriz Q , de dimensão $r \times r$, neste caso 3×3 , pode ser escolhida de modo que a matriz de covariâncias das inovações transitórias $E[\psi_t \psi_t']$ seja diagonal.

As matrizes Q e F estimadas são :

Quadro 7.20

Matriz Q

224,5646	0,000000	0,000000
59,77245	208,918900	0,000000
-19,10952	-3,136275	55,16565

Matriz F

13,15937	43,93476	-19,65642	24,98040	-57,92067
-3,992210	61,93153	-5,361871	-70,23232	95,30614
-6,387666	-7,281366	-2,521194	115,3315	55,44085
-5,307309	39,0924	12,65964	47,97481	-55,07968
54,88152	4,316706	-0,3679074	-4,922752	6,689059

As estimativas dos coeficientes das variáveis sazonais e das variáveis exógenas no componente transitório são :

Quadro 7.21

Coefficientes das Variáveis Sazonais no Componente Transitório

Ψ_{11}^*	Ψ_{21}^*	Ψ_{31}^*
-0,5490570	2,949772	0,1791749
1,92030	-1,955690	0,3739215
-0,6105757	-3,168733	-1,027257
-1,103924	3,922221	0,4808905
-0,503588	-0,7804599	-0,3709476

Quadro 7.22

Coefficientes das Outras Variáveis Exógenas no Componente Transitório

Ψ_{12}^*	Ψ_{22}^*	Ψ_{32}^*	Ψ_{42}^*	Ψ_{52}^*	Ψ_{62}^*
0,7564973	7,642800	-20,73953	14,68010	-29,15391	22,12933
-5,006970	5,559101	29,65422	-13,68300	49,75718	-32,27410
-4,176815	14,34460	39,76550	-39,94881	24,27923	-25,62262
-1,313570	34,03541	-22,69781	15,50693	-21,47984	16,18111
4,348951	-0,4401609	1,679227	-4,295735	0,8218711	-1,905240

A matriz polinomial infinita $R(L)$ não é apresentada aqui.

O gráfico 7.4 exibe as duas tendências (τ_t) estimadas. Nos gráficos 7.5 e 7.6 são apresentados os componentes permanente e transitório calculados das variáveis do modelo.

Gráfico 7.4

Tendências Comuns

A comparação dos gráficos 7.5 e 7.4 sugere que as variáveis *ipafr*, *ipaus* e *jurfr* estão dominadas pela 1ª tendência, sendo que *ffus* e *tbill* seguem predominantemente a 2ª tendência. Uma observação mais cuidadosa, no entanto, revela que *ipafr* recebe uma influência maior da 2ª tendência. No gráfico 7.5, chama a atenção, por um lado, a semelhança dos gráficos de *tbill* e *ffus*, e, por outro lado, o componente permanente de *jurfr*, com tendência marcadamente crescente, contrariamente a *tbill* (com base nestes gráficos foram feitos os testes adicionais de co-integração de *ipafr* com *jurfr*, e *ffus* com *tbill*, testes e) e f) na seção 7.2.3).

Em outras palavras, a análise gráfica sugere a presença de uma tendência que parece estar em relação com o crescimento secular dos preços, embora ela influencie também as taxas de juros na França. A outra tendência parece estar predominantemente associada ao mercado de câmbio e às taxas de juros nos EUA, embora ela influencie também os preços da França.

O exame das tendências não é de fato muito conclusivo. Vale a pena mencionar de novo que a matriz $\mathbf{K}$ não é exatamente identificada, dentro do método que temos utilizado aqui. Assim, a tendência τ_t , que é calculada partindo do componente permanente $\mathbf{K}\tau_t$, também não é exatamente

identificada. Em outras palavras, uma outra matriz K teria-nos conduzido a tendências diferentes das expostas aqui.

7.2.8 Cálculo de Respostas de Impulsos Associados a Choques nos Componentes Permanente e Transitório

Foi efetuado o cálculo de respostas de impulsos para o sistema definido na equação (7.22) aplicando choques de um desvio padrão. Como a matriz de variância-covariância $E(v_t v_t')$ é uma matriz identidade, foram então aplicados choques de tamanho 1.

O gráfico 7.7 exibe respostas de impulsos em Δx_t , estimados para 20 trimestres avançados, para inovações no componente permanente. Tem dois quadros por variável, sendo que o número de tendências é dois : o efeito de um choque em cada uma das tendências sobre cada uma das variáveis é analisado. Por exemplo, os dois primeiros quadros do gráfico 7.7 apresentam a resposta da variável *ipafr* (índice de preços no atacado na França) a choques no componente permanente. Pode-se ver que ainda após 20 períodos, a variável *ipafr* não tem atingido seu equilíbrio de longo prazo. Um comportamento semelhante é observado em *ipaus* (índice de preços no atacado nos EUA). As variáveis *jurfr* e *tbill* (taxas de juros na França e nos EUA) e *ffus* (taxa de câmbio FFr/US\$) atingem mais rapidamente o equilíbrio, em torno de 10 trimestres.

O gráfico 7.8 exibe respostas de impulsos associados a inovações no componente transitório. Em geral, o equilíbrio é atingido mais rapidamente que no caso de choques no componente permanente.

Vale a pena aqui lembrar o seguinte. Normalmente na representação de médias móveis de um processo multivariado :

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i u_{t-i} \quad (7.28)$$

a matriz $\Sigma_u = E(u_t u_t')$ não é diagonal. Na análise de resposta de impulsos, que usualmente é feita sobre a representação de médias móveis, aplica-se uma inovação a uma variável, forçando às outras inovações a assumir o valor 0. Dada a natureza de Σ_u , choques a uma variável do sistema devem, pelo contrário, afetar às outras variáveis do sistema no mesmo instante, de modo que a análise de respostas de

impulsos no contexto de (7.28) de fato está obscurecendo a reação real do sistema.

Então, a análise de respostas de impulsos é feita numa representação alternativa :

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} R_i v_{t-i} \quad (7.29)$$

que é obtida fazendo a decomposição $\Sigma_u = PP'$ onde P é uma matriz triangular inferior. Assim, definimos $v_t = P^{-1}u_t$, de modo que $\Sigma_v = E(v_t v_t') = E(P^{-1}u_t u_t' P^{-1}) = I_n$, e $R_i = \Phi_i P$. Assim, uma mudança em um dos componentes de v_t não afetará os outros componentes de v_t .

O procedimento descrito no parágrafo acima é o que foi feito neste trabalho. Ora, a escolha da matriz P não é única e um diferente ordenamento das variáveis alterarão P , e, em consequência os coeficientes R_i , mudando o perfil da função de respostas de impulso. A extensão destas mudanças dependerá do grau de correlação existente entre os componentes de u_t .

Portanto, toda conclusão relativa às respostas de impulso do sistema deve ser feita levando em consideração a discussão no parágrafo acima.

Gráfico 7.5

Componentes Permanentes Estimados

Gráfico 7.6

Componentes Transitórios Estimados

Gráfico 7.7*Respostas de Impulsos Estimados de $\Delta\chi_t$ para Inovações no Componente Permanente*

Gráfico 7.7 (continuação)

Respostas de Impulsos Estimados de Δx_t para Inovações no Componente Permanente

Gráfico 7.8

Respostas de Impulsos Estimados de Δx_t para Inovações no Componente Transitório

Gráfico 7.8 (continuação)*Respostas de Impulsos Estimadas de Δx_t para Inovações no Componente Transitório*

Anexo Capítulo 7

Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial das 1^{as} Diferenças das Séries do Modelo e das Relações de Co-integração

1) Diff(IPAFR)

Dados trimestrais 95 períodos desde 1970:2 até 1993:4

Média 0,01 Desvio Padrão 0,03
Máximo 0,18 em 1974:1
Mínimo -0,07 em 1975:1

Correlograma(X) e Correlograma Parcial(*)

Lag	X	*	Lag	X	*	Lag	X	*
1	0,356	0,356	2	0,259	0,151	3	0,157	0,030
4	-0,176	-0,317	5	0,038	0,186	6	0,014	0,062
7	0,030	0,038	8	0,027	-0,147	9	0,032	0,110
10	0,047	0,048	11	0,058	0,057	12	0,069	-0,053
13	0,045	0,037	14	-0,023	-0,071	15	-0,040	0,001
16	-0,018	0,012	17	-0,041	-0,003	18	-0,012	-0,044
19	0,034	0,060	20	0,063	0,084			

2) Diff(IPAUS)

Dados trimestrais 95 períodos desde 1970:2 até 1993:4

Média 0,01 Desvio Padrão 0,01
Máximo 0,05 em 1974:1
Mínimo -0,01 em 1986:1

Correlograma(X) e Correlograma Parcial(*)

Lag	X	*	Lag	X	*	Lag	X	*
1	0,593	0,593	2	0,540	0,291	3	0,519	0,201
4	0,484	0,116	5	0,321	-0,164	6	0,386	0,141
7	0,208	-0,221	8	0,119	-0,134	9	0,097	0,000
10	0,093	0,022	11	0,005	0,031	12	-0,035	-0,095
13	0,037	0,197	14	0,030	0,082	15	-0,012	-0,056
16	0,033	0,038	17	0,050	-0,0319	18	0,009	-0,011
19	0,090	0,045	20	0,134	0,057			

3) Diff(FFUS)

Dados trimestrais 95 períodos desde 1970:2 até 1993:4

Média 0,00 Desvio Padrão 0,05

Máximo 0,12 em 1991:2

Mínimo -0,11 em 1979:3

Correlograma(X) e Correlograma Parcial(*)

Lag	X	*	Lag	X	*	Lag	X	*
1	0,323	0,323	2	0,053	-0,057	3	0,047	0,052
4	0,081	0,058	5	0,015	-0,034	6	0,008	0,016
7	0,095	0,095	8	0,020	-0,053	9	0,047	0,068
10	-0,048	-0,100	11	-0,024	0,013	12	-0,101	-0,109
13	-0,152	-0,102	14	-0,078	0,005	15	-0,014	0,015
16	-0,087	-0,102	17	-0,083	0,015	18	-0,069	-0,066
19	-0,025	0,046	20	0,064	-0,052			

4) Diff(JURFR)

Dados trimestrais 95 períodos desde 1970:2 até 1993:4

Média -0,00 Desvio Padrão 0,01

Máximo 0,04 em 1981:2

Mínimo -0,03 em 1993:2

Correlograma(X) e Correlograma Parcial(*)

Lag	X	*	Lag	X	*	Lag	X	*
1	0,315	0,315	2	-0,017	-0,129	3	-0,046	0,001
4	-0,015	-0,001	5	-0,219	-0,248	6	-0,146	0,010
7	0,015	0,043	8	0,004	-0,060	9	-0,116	-0,105
10	-0,123	-0,107	11	0,048	0,082	12	0,024	-0,035
13	0,033	0,046	14	0,031	-0,035	15	0,000	-0,086
16	-0,071	-0,027	17	-0,154	-0,138	18	-0,091	-0,018
19	-0,015	-0,019	20	-0,068	-0,132			

5) Diff(TBILL)

Dados trimestrais 95 períodos desde 1970:2 até 1993:4

Média -0,00 Desvio Padrão 0,01

Máximo 0,06 em 1980:4

Mínimo -0,06 em 1980:2

Correlograma(X) e Correlograma Parcial(*)

Lag	X	*	Lag	X	*	Lag	X	*
1	-0,007	-0,007	2	-0,310	-0,310	3	0,263	0,285
4	0,002	-0,134	5	0,021	0,249	6	0,104	-0,062
7	-0,232	-0,147	8	-0,106	-0,134	9	0,121	-0,017
10	0,010	0,067	11	-0,085	-0,039	12	-0,071	-0,033
13	-0,016	-0,036	14	0,089	0,058	15	-0,009	-0,068
16	-0,212	-0,184	17	-0,074	-0,087	18	0,093	-0,006
19	0,045	0,085	20	-0,013	0,031			

6) 1ª Relação de Co-integração : ffus - ipafr + ipaus

Dados trimestrais 96 períodos desde 1970:1 até 1993:4

Média 1,91 Desvio Padrão 0,163

Máximo 2,35 em 1985:1

Mínimo 1,62 em 1974:1

Correlograma(X) e Correlograma Parcial(*)

Lag	X	*	Lag	X	*	Lag	X	*
1	0,952	0,952	2	0,881	-0,254	3	0,813	0,031
4	0,738	-0,132	5	0,656	-0,082	6	0,573	-0,036
7	0,490	-0,063	8	0,398	-0,160	9	0,301	-0,059
10	0,207	-0,068	11	0,120	0,025	12	0,047	0,042
13	-0,013	0,051	14	-0,054	0,108	15	-0,092	-0,075
16	-0,131	-0,076	17	-0,159	0,052	18	-0,187	-0,136
19	-0,213	-0,024	20	-0,240	-0,115			

7) 2ª Relação de Co-integração : jurfr - tbill

Dados trimestrais 96 períodos desde 1970:1 até 1993:4

Média 0,02 Desvio Padrão 0,02

Máximo 0,08 em 1993:1

Mínimo -0,05 em 1980:4

Correlograma(X) e Correlograma Parcial(*)

Lag	X	*	Lag	X	*	Lag	X	*
1	0,798	0,798	2	0,571	-0,178	3	0,483	0,250
4	0,375	-0,194	5	0,230	-0,050	6	0,099	-0,126
7	0,013	0,006	8	0,005	0,128	9	-0,001	-0,032
10	-0,049	-0,055	11	-0,110	-0,127	12	-0,143	-0,037
13	-0,181	-0,110	14	-0,220	0,007	15	-0,309	-0,236
16	-0,413	-0,124	17	-0,416	0,058	18	-0,335	0,113
19	-0,262	0,102	20	-0,207	-0,006			

As funções de autocorrelação das primeiras diferenças das variáveis ipaus, ipafr, ffus, jurfr e tbill apresentam valores significativamente inferiores a 1, o que sugere que as 5 séries são integradas de ordem I(1).

Por outro lado, nas relações de co-integração, a fac da relação PPC sugere que nos encontramos num caso limite de estacionariedade. Já na 2ª relação, a fac pode ser assimilada a uma série estacionária.

Observação : os valores $\pm 1,96/\sqrt{n} = \pm 0,20$ são considerados como constituindo aproximadamente um intervalo de confiança para as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para uma sequência ruído branco. Para uma grande amostra, 95% das autocorrelações amostrais deveriam cair dentro destes limites, se o processo em estudo é um ruído branco. Valores fora destes limites dão indicações sobre a ordem (p,q) dos processos ARMA observados pelas séries. Podemos já observar que os valores das funções de autocorrelação parcial das primeiras diferenças das séries ipafr, ipaus, ffus, jurfr e tbill não são significativamente diferentes de 0 a partir de determinados valores (entre 1 e 3), sugerindo que as séries seguem processos AR(p).

Capítulo 8

Conclusões

O objetivo deste trabalho foi a apresentação de uma técnica que permitisse a estimação da representação de Tendências Comuns de um vetor estocástico x_t , com r vetores co-integrados, e da função de Respostas de Impulso no contexto desta representação.

Vimos que um vetor estocástico de tais características pode admitir as seguintes representações : 1) Modelo Autoregressivo Vetorial (VAR); 2) Mecanismo de Correção de Erro (MCE); 3) VAR Restrito; 4) Wold, e finalmente, 5) Tendências Comuns.

Foi mostrado como a partir da estimação da representação do MCE, os parâmetros das representações VAR e VAR Restrito, podem ser obtidos. O conhecimento dos parâmetros do VAR restrito permite o cálculo dos parâmetros da representação de Wold. Finalmente os parâmetros da representação de Tendências Comuns são identificados usando : 1) as relações que existem entre os parâmetros das representações de Wold e de Tendências, 2) as restrições impostas pela presença de co-integração e 3) restrições adicionais na matriz de variância-covariância do processo, e em alguns casos, outras restrições, que devemos impor para que o sistema seja exatamente identificado.

Usando as técnicas descritas, foi feita uma aplicação das mesmas para um vetor de dimensão 5 compreendendo as seguintes variáveis : preços e taxas de juros na França e nos EUA, e a taxa de câmbio FFr/US\$.

Com base em uma análise preliminar dos dados, foi admitido que o vetor era co-integrado de ordem 1,1, ou seja, seus componentes são $I(1)$, mas existem combinações lineares dos mesmos que são $I(0)$ i.e. estacionárias, que representam relações de longo prazo. Esta "análise preliminar" incluiu a análise gráfica e testes de Dickey Fuller de raízes unitárias, das séries em estudo e de séries associadas a determinadas relações (inspiradas pela teoria econômica) entre os componentes, supostamente estacionárias. Seguindo a linha de Johansen & Juselius (1992) em seu estudo sobre a taxa de câmbio da Libra Esterlina com relação a uma cesta de moedas, foram consideradas particularmente : 1) a teoria da Paridade de Poder de Compra (PPC) e 2) a Paridade das Taxas de Juros não Coberta (PJNC). Basicamente, estas relações de

longo prazo levavam a definição de dois vetores co-integrados : um compreendendo índices de preços e taxa de câmbio (em logaritmos) e outro contendo o diferencial das taxas de juros

Adicionalmente, foram consideradas outras possíveis relações de longo prazo, conhecidas nos mercados de capitais : 3) a taxa de câmbio FFr/US\$ guardando uma relação diretamente proporcional com o diferencial *taxas de juros nos EUA-taxas de juros na França* (o que é de certo modo contrário à PJNC) e 4) a taxa de câmbio FFr/US\$ guardando uma relação diretamente proporcional com o diferencial *taxas de juros reais nos EUA-taxas de juros reais na França*.

A estimação da representação de MCE do vetor em estudo foi feita usando o método de Johansen, que parte da função de verossimilhança da amostra. Os testes sobre o espaço de co-integração sugeriram a existência de 3 vetores co-integrados. Neste método, embora a matriz $\gamma\alpha'$ (γ é a matriz dos pesos dados, para cada uma das variáveis, às relações de co-integração, e α é a matriz que determina as relações de co-integração) é exatamente identificada, α e γ separadamente não são exatamente identificadas. O fato de que a dimensão de co-integração foi estimada em 3 tornou complexa a análise de dito espaço (qualquer vetor que é uma combinação linear das colunas de α pertence ao espaço).

Foram feitos uma série de testes considerando as relações discutidas acima. Estes testes sugeriram que definitivamente a relação PPC pertence ao espaço de co-integração, e entra no sistema como variável explicativa. Com efeito, a hipótese nula de estacionariedade da relação PPC não foi rejeitada, embora por escassa margem. O diferencial das taxas de juros, também pertence ao espaço de co-integração; no entanto quando γ e α são consideradas conjuntamente, i.e. a matriz $\gamma\alpha'$, os diferenciais das taxas de juros não entram nas equações do jeito que é de esperar segundo a PJNC, i.e. os sinais dos coeficientes não são os esperados. Faltava achar a base para o terceiro vetor co-integrado. Diferentes alternativas são possíveis. Uma é a relação 3 ($ffus-tbill+jurfr$); outra relação possível (que foi mais evidente com a análise gráfica dos componentes permanentes estimados das séries que foi feita a posteriori), é a relação das taxas de juros nos Estados Unidos com o tipo de câmbio.

Partindo das estimativas do MCE, foram estimados sucessivamente o VAR Restrito, a representação de Wold e a representação de Tendências Comuns. Como o número de vetores

co-integrados estimado foi 3, então o número de tendências comuns estimado é dois. Na análise gráfica das tendências, vemos uma primeira tendência pronunciadamente crescente, sendo que a segunda, embora crescente, tem um comportamento mais errático.

A análise gráfica dos componentes permanentes das variáveis sugerem que preços nos EUA, e taxas de juros na França seguem predominantemente a 1ª tendência. A 2ª tendência tem forte influência sobre a taxa de câmbio FFr/US\$ e taxas de juros nos EUA, e, em menor medida sobre os preços na França.

Em outras palavras, a análise gráfica sugere a presença de uma tendência que parece estar em relação com o crescimento secular dos preços, embora ela influencie também as taxas de juros na França, e uma outra tendência mais associada ao mercado de câmbio e às taxas de juros nos EUA.

Foi feita a advertência de que a técnica utilizada para obter as tendências passa pelo cálculo de uma matriz que não é única. Por tanto, elas não são exatamente identificadas, de modo que a tentativa de dar um "nome" a estas tendências requer certos cuidados.

Foi calculada a função de Respostas de Impulso, no contexto da representação das Tendências Comuns, i.e. que permitiu analisar a reação do sistema para inovações nos componentes permanente e transitório daquela representação. Sem deixar de chamar a atenção de que a função de Respostas de Impulso não é única, foi observado que, para inovações no componente permanente, após 20 períodos, as variáveis **preços por atacado na França e nos EUA** não atingiram seu equilíbrio de longo prazo. As variáveis **taxas de juros na França e nos EUA e taxa de câmbio FFr/US\$** chegam mais rapidamente ao equilíbrio, em torno de 10 trimestres. Em geral, para inovações no componente transitório, atinge-se o equilíbrio mais rapidamente.

Apêndice A

Alguns Resultados de Algebra Matricial

A.1 Algumas definições e resultados em Algebra de Espaços Vetoriais

Para mais detalhes sobre as definições e provas dos teoremas nesta seção, ver Graybill (1983, capítulos 1 e 5).

A.1.1 Complemento Ortogonal de um Subespaço Vetorial

Definição A.1 Subespaço de Vetores Ortogonais em E_n (Espaço Euclidiano). Sejam S_1 e S_2 dois subespaços em E_n . Se $x_1'x_2=0$ para cada vetor x_1 em S_1 e para cada vetor x_2 em S_2 , então S_1 e S_2 são definidos como subespaços ortogonais em E_n , e denotamos isto por $S_1 \perp S_2$.

Teorema A.1 Sejam $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ dois conjuntos de vetores em E_n tais que $a_i'b_j=0$ para todo i e j . O subespaço S_1 gerado por $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é ortogonal ao subespaço S_2 gerado por $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Definição A.2 Complemento Ortogonal de um Subespaço Vetorial em E_n . Seja S_1 um subespaço vetorial em E_n . O subespaço vetorial S_2 em E_n é definido como complemento ortogonal de S_1 em E_n se e somente se $S_1 \perp S_2$ e $S_1 \oplus S_2 = E_n$ (a soma direta dos subespaços S_1 e S_2 é igual a E_n). Algumas vezes, o complemento ortogonal de S_1 é denotado por $S_1^\perp$.

Teorema A.2 Para um determinado subespaço S_1 em E_n , o complemento ortogonal $S_1^\perp$ sempre existe e é único.

Teorema A.3 Seja S_1 um subespaço de E_n e seja y qualquer vetor em E_n ; então y pode ser escrito como a soma de dois vetores $y=x_1+x_2$, onde x_1 está em S_1 e x_2 está no complemento ortogonal de S_1 .

Corolario. x_1 e x_2 são vetores únicos para um y e S_1 dados.

A.1.2 Espaço de Colunas e Nulidade de uma matriz

Definição A.3 Espaço de Colunas de uma Matriz. Seja A uma matriz $n \times m$. Denote as m colunas de A como vetores em E_n , de

tal modo que $A=[a_1, \dots, a_m]$. O espaço vetorial gerado por estas m colunas de A são definidas como o espaço de colunas de A . A dimensão deste espaço é igual ao número de colunas linearmente independentes de A , ou seja, ao posto de A .

Teorema A.4 Seja A uma matriz $n \times n$ não singular. O espaço de colunas de A é E_n .

Definição A.4 Nulidade de uma Matriz. Seja A uma matriz $n \times m$. A nulidade da matriz A é definida como o conjunto de vetores S onde :

$$S=\{y: Ay=0; \quad y \in E_m\}$$

Teorema A.5 A nulidade de uma matriz A de dimensão $n \times m$ é um subespaço vetorial de E_m .

Teorema A.6 Seja A uma matriz de dimensão $n \times m$. O espaço nulo de A' e o complemento ortogonal do espaço de colunas de A é o mesmo.

Teorema A.7 Seja A uma matriz de dimensão $n \times m$ e B uma matriz de dimensão $m \times k$. O espaço das colunas de AB é um subespaço do espaço das colunas de A .

Teorema A.8 Sejam A e B matrizes de dimensão $n \times m$. Existe uma matriz não singular C , de dimensão $m \times m$ tal que $AC=B$ se e somente se A e B tem o mesmo espaço de colunas.

Teorema A.9 Sejam A e B matrizes de dimensão $n \times m$. A condição necessária e suficiente para que exista uma matriz C de dimensão $m \times m$ tal que $AC=B$ é de que o espaço das colunas de B seja um subespaço do espaço das colunas de A .

Teorema A.10 Sejam A uma matriz de dimensão $m \times n$ de posto r e X uma matriz de dimensão $n \times p$, e o produto destas duas matrizes a matriz nula, ou seja :

$$AX = 0,$$

então

(i) existe uma matriz X de posto $n-r$ que satisfaz a equação acima,

(ii) o posto de X não pode exceder $n-r$

Teorema A.11 Se A é uma matriz quadrada de dimensão n , com posto r , então existe uma matriz não nula X tal que $AX=0$ se $r < n$.

Teorema A.12 Se A é uma matriz de dimensão $m \times n$ com $m < n$, então existe uma matriz não nula tal que $AX=0$.

A.2 Autovalores e Autovetores

Os *autovalores*, ou *valores característicos*, ou *raízes características* de uma matriz quadrada A de dimensão m são as raízes do polinômio em λ dado por $\det(A - \lambda I_m)$ ou $\det(\lambda I_m - A)$. O determinante é chamado de *determinante característico*, e o polinômio de *polinômio característico*.

Um número λ_i é um autovalor de A se as colunas de $(A - \lambda_i I_m)$ são linearmente dependentes. Consequentemente, existe um vetor v_i , de dimensão $m \times 1$ tal que :

$$(A - \lambda_i I_m) v_i = 0 \quad \text{ou} \quad A v_i = \lambda_i v_i$$

Um vetor com esta propriedade é chamado de *autovetor* ou *vetor característico* correspondente a λ_i .

Regras :

(1) Se A é simétrica, então todos os autovalores são números reais.

(2) Os autovalores de uma matriz diagonal são seus elementos diagonais.

(3) Os autovalores de uma matriz triangular são seus elementos diagonais.

(4) Uma matriz de dimensão $m \times m$ tem no máximo m autovalores.

(5) Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores de uma matriz A de dimensão $m \times m$, então $|A| = \lambda_1 \dots \lambda_m$.

(6) Sejam λ_i e λ_j distintos autovalores de A , com os correspondentes autovetores v_i e v_j . Então v_i e v_j são linearmente independentes.

(7) Todos os autovalores de uma matriz A de dimensão $m \times m$ tem módulo menor do que 1 se $\det(I_m - Az) \neq 0$ para $|z| \leq 1$, isto é, a polinomial $\det(I_m - Az)$ não tem raízes dentro e sobre o círculo unitário.

A.3 Decomposição e Diagonalização de Matrizes.

A.3.1 A Forma Canônica Similar

Derivação da Forma Canônica Similar. Seja A uma matriz de dimensão $m \times m$, com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, onde alguns autovalores podem ser repetidos. Cada autovalor λ_i tem seu correspondente autovetor u_i para o qual :

$$Au_i = \lambda_i u_i \text{ para } i=1, 2, \dots, m \quad (A.1)$$

Isto é verdade para todas as raízes da equação característica, o que significa que para λ_k , de multiplicidade m_k , tem m_k equações da forma apresentada em (A.1); se existem m_k autovetores p_k linearmente independentes correspondendo aos λ_k , teremos uma equação para cada vetor, enquanto que se não tem m_k vetores p_k linearmente independentes, podemos ainda ter m_k equações com alguns p_k sendo repetições de outros. Em todos os casos, o arranjo de equações apresentado em (A.1) pode ser escrito como :

$$A \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

Definindo como P a matriz dos n autovetores, e como Λ a matriz diagonal dos autovalores, (A.2) pode ser escrito como :

$$AP = P\Lambda \quad (A.2)'$$

Λ é conhecida como a *forma canônica similar*.

A forma (A.2), ou, de forma equivalente, a forma (A.2)', existe sempre. Nos casos em que p_i se repete, é claro que P é uma matriz singular.

Nos casos em que P é uma matriz não singular, ou seja, todos os autovalores são linearmente independentes, (A.2) pode ser reescrita como :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix} = \Lambda \quad \text{ou} \quad A = P\Lambda P^{-1} \quad (\text{A.3})$$

O produto no primeiro membro de (3) é conhecido como *redução à forma canônica similar*. A redução à forma canônica similar tem importantes implicações. Por exemplo, implica que, para A definida em (A.3) :

$$A^j = (P\Lambda P^{-1})^j = P\Lambda^j P^{-1} \quad (\text{A.4})$$

Podem ser demonstradas as seguintes regras : Suponha que A é uma matriz real de dimensão $m \times m$, com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ que tem todos módulo menor que 1, isto é, $|\lambda_i| < 1$ para $i=1, \dots, n$. Suponha também que Λ e P são as matrizes definidas em (A.3). Então :

$$(1) \quad A^j = P\Lambda^j P^{-1} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$$(2) \quad \sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I_m - A)^{-1} \text{ existe.}$$

$$(3) \quad \text{A sequência } A_j, \quad j=0, 1, 2, \dots, \text{ é absolutamente somável.}$$

A.3.2 Decomposição de matrizes simétricas

Seja A uma matriz simétrica de dimensão $m \times m$. Então existe uma matriz ortogonal P tal que :

$$PAP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = P\Lambda P' \quad (\text{A.5})$$

onde λ_i são os autovalores de A e as colunas de P são os correspondentes autovetores. Aqui todas as matrizes são reais sendo que os autovalores de uma matriz simétrica são números reais. Denotando a i-ésima coluna de P como p_i e usando que $p'_i p_j = 0$ para $i \neq j$, temos :

$$A = P\Lambda P' = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i p'_i \quad (\text{A.6})$$

Também, temos que :

$$A^2 = P\Lambda P'P\Lambda P' = P\Lambda^2 P' \quad (\text{A.7})$$

e mais geralmente :

$$A^k = P\Lambda^k P' \quad (\text{A.8})$$

Se A é uma matriz positiva definida de dimensão $m \times m$, todos os autovalores de A são positivos, então a notação

$$\Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_m} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

faz sentido. Definindo $Q = P\Lambda^{1/2}P'$, obtemos $QQ=A$. Em generalização da terminologia para números reais positivos, Q pode ser chamada de raiz quadrada de A e pode ser denotada como $A^{1/2}$.

A.3.3 A Decomposição de Choleski de uma Matriz Positiva Definida

Seja A uma matriz simétrica de dimensão $m \times m$. Então existe uma matriz triangular superior e uma matriz triangular inferior P com diagonal principal positiva tal que :

$$P^{-1}AP'^{-1} = I_m \quad \text{ou} \quad A = PP' \quad (\text{A.10})$$

Similarmente, seja A uma matriz positiva semi-definida como $\text{posto}(A)=n,m$, então existe uma matriz P tal que :

$$P^{-1}AP'^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Alternativamente, $A=QQ'$, onde

$$Q = P \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

A decomposição $A=PP'$, quando P é uma matriz triangular inferior com diagonal principal positiva, é às vezes chamada de *decomposição de Choleski*.

Para mais detalhes, ver Searle (1982), capítulo 11.

Apêndice B

Somas Infinitas de Matrizes e Convergência Estocástica

B.1 Conceitos de Convergência Estocástica

Seja $\chi_1, \chi_2, \dots$ ou $\{\chi_T\}, T=1, 2, \dots$, uma sequência de variáveis aleatórias definidas em um espaço de probabilidade (Ω, M, P) .

Definição B.1 A sequência $\{\chi_T\}$ converge em probabilidade para uma variável aleatória χ (também definida em (Ω, M, P)) se para cada $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} P(|\chi_T - \chi| > \varepsilon) &= 0, \quad \text{ou equivalentemente} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} P(|\chi_T - \chi| < \varepsilon) &= 1 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Este tipo de convergência pode ser denotada por :

$$p \lim \chi_T = \chi \quad \text{ou} \quad \chi_T \xrightarrow{P} \chi$$

Definição B.2 A sequência $\{\chi_T\}$ converge quase certamente (q.c.) ou com probabilidade 1 para uma variável aleatória χ para cada $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\lim_{T \rightarrow \infty} |\chi_T - \chi| < \varepsilon\right) = 1 \tag{B.2}$$

Este tipo de convergência pode ser denotada por :

$$\chi_T \xrightarrow{qc} \chi$$

Definição B.3 A sequência $\{\chi_T\}$ converge em média quadrática ou erro médio quadrático para uma variável aleatória χ se,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E(\chi_T - \chi)^2 = 0 \tag{B.3}$$

Este tipo de convergência pode ser denotada por :

$$\chi_T \xrightarrow{mq} \chi$$

e requer que a média e a variância de χ e χ_T existam.

B.2 Somas Infinitas de Variáveis Aleatórias

Definição B.4 Uma sequência infinita de números reais $\{a_i\}$, $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, é absolutamente somável se :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n |a_i| \quad (\text{B.4})$$

existe e é finito. O limite é usualmente denotado por :

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i| \quad (\text{B.5})$$

A prova do seguinte teorema constitui a justificação para trabalhar com somas infinitas de variáveis aleatórias e a prova pode ser achada em Fuller (1976, págs.29-31).

Proposição B.1 (Existência de Somas Infinitas de Variáveis Aleatórias).

Suponha $\{a_i\}$ uma sequência de números reais absolutamente somável e $\{z_t\}$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, uma sequência de variáveis aleatórias satisfazendo :

$$E(z_t^2) \leq c, \quad t=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (\text{B.6})$$

Então existe uma sequência de variáveis aleatórias $\{y_t\}$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, tal que :

$$\sum_{i=-n}^n a_i z_{t-i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_t \quad \text{em média quadrática} \quad (\text{B.7})$$

e, em consequência :

$$p \lim \sum_{i=-n}^n a_i z_{t,i} = y_t \quad (\text{B.8})$$

Proposição B.2 (Momentos de Somas Infinitas de Variáveis Aleatórias).

Suponha que $\{z_t\}$ satisfaz as condições da proposição B.1, e que $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ são sequências absolutamente somáveis e

$$y_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z_{t,i} \quad \text{e} \quad \chi_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i z_{t,i} \quad (\text{B.9})$$

Então :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n a_i E(z_{t,i}), \\ E(y_t \chi_t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n a_i b_j E(z_{t,i} z_{t,j}) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Em particular :

$$E(y_t^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n a_i a_j E(z_{t,i} z_{t,j}) \quad (\text{B.11})$$

Prova : Fuller(1976, págs. 32-33).

Todos os conceitos anteriores podem ser estendidos a processos vetoriais.

Definição B.5 Uma sequência de matrizes de dimensão $n \times n$ $\{A_i = (a_{st,i})\}$, $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, é absolutamente somável se cada sequência $\{a_{st,i}\}_{s,t=1, \dots, n}$, é absolutamente somável.

Proposição B.3 (Existência de Somas Infinitas de Vetores Aleatórios)

Suponha $\{A_i\}$ uma sequência de matrizes n -dimensionais reais absolutamente somável e $\{z_t\}$ uma sequência de vetores aleatórios n -dimensionais satisfazendo :

$$E(z'_t z_t) \leq c, \quad t=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (\text{B.12})$$

para alguma constante finita c . Então existe uma sequência de variáveis aleatórias n -dimensionais $\{y_t\}$ tais que :

$$\sum_{i=-n}^n A_i z_{t-i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_t \quad \text{em média quadrática} \quad (B.13)$$

Prova : Fuller (1976, págs. 29-31).

Proposição B.4 (Momentos de Somas Infinitas de Vetores Aleatórios).

Suponha que $\{z_t\}$ satisfaz as condições da proposição B.3, e que $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$ são sequências de matrizes n -dimensionais absolutamente somáveis e

$$y_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i z_{t-i} \quad \text{e} \quad \chi_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i z_{t-i} \quad (B.14)$$

Então :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n A_i E(z_{t-i}), \\ E(y_t \chi'_t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n A_i (z_{t-i} z'_{t-j}) B'_j \end{aligned} \quad (B.15)$$

onde o limite de sequência de matrizes é a matriz dos limites das sequências dos elementos individuais.

Prova : Fuller (1976, págs. 32-33).

Apêndice C

Cálculo dos Coeficientes do Polinômio na Representação de MCE

Um processo $\{\chi_t\}$, que segue um processo VAR(p), de acordo com as especificações que temos feito no capítulo 2:

$$A(L)\chi_t = \rho + \rho^* D_t + \varepsilon_t \quad (C.1)$$

com $A(L) = I_n - \sum_{j=1}^p A_j L^j$, pode ter a representação :

$$A^*(L)\Delta\chi_t = \rho + \rho^* D_t - A(L)\chi_{t-1} + \varepsilon_t \quad (C.2)$$

onde :

$$A^*(L) = I_n - \sum_{i=1}^{p-1} A_i^* L^i \quad \text{e} \quad A_i^* = -\sum_{j=i+1}^p A_j \quad (C.3)$$

Demonstração.

(i) Escrevendo $A(L)$ como:

$$A(L) = A^*(L)(1-L) + A(L)L \quad (C.4)$$

procuraremos fazer a correspondência dos termos dos polinômios $A(L)$ e $A^*(L)$, para obter os termos do polinômio $A(L)^*$ em função dos termos do polinômio $A(L)$. Assim, desenvolvendo (C.4), obtemos :

$$\begin{aligned} I_n - A_1 L - A_2 L^2 \dots - A_p L^p &= (I_n - A_1^* L - A_2^* L^2 \dots - A_p^* L^p)(1-L) + (I_n - A_1 - A_2 \dots - A_p)L \\ &= I_n - A_1^* L - A_2^* L^2 \dots - A_p^* L^p - I_n L + A_1 L + A_2 L^2 \dots + A_p L^p + I_n L - A_1 L - A_2 L^2 \dots - A_p L^p \end{aligned} \quad (C.5)$$

Reagrupando termos no lado direito de (C.5), segundo a potência, obtemos:

$$I_n - A_1 L - A_2 L^2 \dots - A_p L^p = I_n - (A_1^* + A_1 + A_2 \dots + A_p) L - (A_2^* - A_1^*) L^2 - (A_3^* - A_2^*) L^3 \dots - (A_p^* - A_{p-1}^*) L^p + A_p^* L^p \quad (C.6)$$

Então, igualando as potências de L em (C.6), obtemos :

$$A_1^* + A_1 + \dots + A_p = A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1^* = - \sum_{j=2}^p A_j \quad (C.7)$$

$$A_2^* - A_1^* = A_2 \quad \Rightarrow \quad \text{por (C.7)} \Rightarrow \quad A_2^* = - \sum_{j=3}^p A_j \quad (C.8)$$

.....

$$\text{Para } A_{i-1}^*, \quad A_{i-1}^* = - \sum_{j=i}^p A_j, \quad (C.9)$$

então para A_i^* :

$$A_i^* - A_{i-1}^* = A_i \Rightarrow \text{por (C.8)} \Rightarrow A_i^* = - \sum_{j=i+1}^p A_j$$

Também, note que $A_p^* = 0$, pois está multiplicando L^p , potência que não existe em $A(L)$.

(ii) Substituindo (C.4) em (C.1), obtemos (C.2), que era o que queríamos demonstrar ■

Apêndice D

O Método de Johansen para estimar Processos AR com Co-integração

Para estimar os parâmetros em (2.53), ou seja, estimar γ , α , $A_1^*, \dots, A_{p-1}^*$, ρ e ρ^* , o método de Soren Johansen pode ser usado (Johansen, 1988). Seja um AR(p) :

$$\chi_t = A_1 \chi_{t-1} + A_2 \chi_{t-2} + \dots + A_p \chi_{t-p} + \rho + \rho^* D_t + \varepsilon_t \quad (D.1)$$

que pode assumir a seguinte representação :

$$A^*(L) \Delta \chi_t = \rho + \rho^* D_t - A(1) \chi_{t-1} + \varepsilon_t \quad (D.2)$$

onde $\{\varepsilon_t\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de Gauss, de média zero e matriz de variância-covariância Λ ; $\Delta := 1 - L$ é o operador de primeira diferença. Também :

$$A(1) = I_n - \sum_{j=1}^p A_j$$

e $A^*(L)$ é dado por :

$$A^*(L) = I_n - \sum_{i=1}^{p-1} A_i^* L^i \quad \text{onde} \quad A_i^* = - \sum_{j=i+1}^p A_j$$

Definindo a matriz polinomial :

$$|A(z)| = |A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p| \quad (D.3)$$

vamos nos concentrar nos casos em que o polinômio tem raízes igual a 1, assumindo que o resto das raízes estão fora do círculo unitário. Assim, a matriz $A(1)$ é singular, ou seja, $|A(1)| = 0$. Assumimos que o posto da matriz $A(1)$ é r , onde r é o número de vetores co-integrados, como foi explicado no capítulo 2.

Sendo que a matriz $A(1)$ é singular, de posto r , ela pode ser escrita como $A(1)=\gamma\alpha'$, para apropriadas matrizes γ e α , de dimensão $n \times r$.

A função de verossimilhança para (D.1) está dada por :

$$L(A_1^*, \dots, A_{p-1}^*, \gamma, \alpha, \Lambda) = \prod_{t=1}^T [(2\pi)^{-n/2} |\Lambda|^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2} (\Delta\chi_t - \mu)' \Lambda^{-1} (\Delta\chi_t - \mu)\}] \quad (D.4)$$

ou

$$L(A_1^*, \dots, A_{p-1}^*, \gamma, \alpha, \Lambda) = (2\pi)^{-Tn/2} |\Lambda|^{-T/2} \exp\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\Delta\chi_t - \mu)' \Lambda^{-1} (\Delta\chi_t - \mu)\}$$

onde :

$$\mu = A_1^* \Delta\chi_{t-1} - \dots - A_{p-1}^* \Delta\chi_{t-p+1} - \gamma\alpha' \chi_{t-p} - \rho - \rho^* D_t$$

A maximização de (D.4) sobre os parâmetros $A_1^*, \dots, A_{p-1}^*, \rho, \rho^*$ é simples, consistindo na aplicação de uma regressão de mínimos quadrados ordinários de $\Delta\chi_t + \gamma\alpha' \chi_{t-1}$ nas diferenças desfasadas de χ_t . Isto pode ser feito usando o seguinte procedimento : faça a regressão de $\Delta\chi_t$ sobre as diferenças desfasadas $\Delta\chi_{t-1}, \dots, \Delta\chi_{t-p+1}$, o que fornece os resíduos R_{0t} , e logo faça a regressão de χ_{t-1} sobre as diferenças $\Delta\chi_{t-1}, \dots, \Delta\chi_{t-p+1}$, o que fornece os resíduos R_{1t} , onde R_{it} , $i=0,1$, são matrizes $n \times 1$. Uma vez efetuadas estas regressões, a função de verossimilhança concentrada fica proporcional a:

$$L(\gamma, \alpha, \Lambda) \propto |\Lambda|^{-T/2} \exp\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (R_{0t} + \gamma\alpha' R_{1t})' \Lambda^{-1} (R_{0t} + \gamma\alpha' R_{1t})\} \quad (D.5)$$

Para um α fixo, podemos maximizar (D.5) sobre γ e Λ , fazendo uma regressão de Mínimos Quadrados Ordinários de R_{0t} sobre $-\alpha' R_{1t}$, o que resulta em :

$$\tilde{\gamma}(\alpha) = -S_{01} \alpha (\alpha' S_{11} \alpha)^{-1} \quad (D.6)$$

e

$$\tilde{\Lambda}(\alpha) = S_{00} - S_{01}\alpha(\alpha'S_{11}\alpha)^{-1}\alpha'S_{10} \quad (D.7)$$

onde são definidas as matrizes (de dimensão $n \times n$) dos produtos dos momentos dos resíduos como

$$S_{ij} = T^{-1} \sum_{t=1}^T R_{it} R'_{jt}, \text{ onde } i, j = 0, 1 \quad (D.8)$$

Substituindo (D.6) e (D.7) em (D.5), o expoente de (D.5) se torna uma constante. Assim, a função de verossimilhança concentrada, em torno de α , fica :

$$L(\alpha) \propto |\tilde{\Lambda}(\alpha)|^{-\frac{T}{2}} \quad (D.9)$$

o que implica encontrar a solução do problema de minimização :

$$\min |S_{00} - S_{01}\alpha(\alpha'S_{11}\alpha)^{-1}\alpha'S_{10}| \quad (D.10)$$

onde a minimização é feita sobre todas as matrizes α de dimensão $n \times r$.

Dada a conhecida relação de determinantes particionados (ver Graybill 1983, capítulo 8):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} S_{00} & S_{01}\alpha \\ \alpha'S_{10} & \alpha'S_{11}\alpha \end{vmatrix} &= |S_{00}| |\alpha'S_{11}\alpha - \alpha'S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\alpha| \\ &= |\alpha'S_{11}\alpha| |S_{00} - S_{01}\alpha(\alpha'S_{11}\alpha)^{-1}\alpha'S_{10}| \end{aligned} \quad (D.11)$$

temos que minimizar a seguinte relação, com relação a matriz α :

$$|\alpha'S_{11}\alpha - \alpha'S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\alpha| / |\alpha'S_{11}\alpha| \quad (D.12)$$

Defina agora a matriz diagonal D com os autovalores ordenados $\tilde{\lambda}_1 > \dots > \tilde{\lambda}_n$ de $S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}$ com relação a S_{11} , ou seja, as soluções da equação :

$$|\lambda S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}| = 0 \quad (D.13)$$

e a matriz E com os correspondentes autovetores. A seguinte expressão é então verdade :

$$S_{11}ED = S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}E \quad (D.14)$$

onde E é normalizado de tal maneira que :

$$E'S_{11}E = I \quad (D.15)$$

Agora, escolha

$$\alpha = E\xi \quad (D.16)$$

onde ξ é uma matriz $n \times r$. Substituindo α em (D.12), por $E\xi$, e considerando a expressão (D.15), temos agora que minimizar a seguinte expressão :

$$|\xi'\xi - \xi'D\xi| / |\xi'\xi| \quad (D.17)$$

Isto pode ser feito com a escolha de ξ como sendo os primeiros r vetores unitários, ou escolhendo $\tilde{\alpha}$ como sendo os primeiros r autovetores de $S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}$ com relação a S_{11} , ou seja, as primeiras r colunas de E . Estas colunas são chamadas de variáveis canônicas, e os autovalores são as correlações canônicas ao quadrado de R_{1t} com relação a R_{0t} . Para mais detalhes destes cálculos, ver Anderson (1984, capítulo 12). Este tipo de análise é também chamada de regressão de posto reduzido.

Considerando a expressão (D.15), e substituindo $\tilde{\alpha}$ em (D.6) e (D.7), obtemos :

$$\tilde{\gamma} = -S_{01}\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}'S_{11}\tilde{\alpha})^{-1} = -S_{01}\tilde{\alpha} \quad (D.18)$$

$$\tilde{\Lambda} = S_{00} - S_{01}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}'S_{10} = S_{00} - \tilde{\alpha}\tilde{\alpha}' \quad (D.19)$$

Finalmente a estimativa de $A(1)$:

$$\tilde{A}(1) = \tilde{\gamma}\tilde{\alpha}' = -S_{01}\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}'S_{11}\tilde{\alpha})^{-1}\tilde{\alpha}' = -S_{01}\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}' \quad (D.20)$$

Por outro lado, por (D.9), (D.11) e (D.15), temos que a função de verossimilhança verifica a seguinte relação :

$$L^{-\frac{3}{2}T} \propto |\tilde{\Lambda}| = |S_{00}| |\tilde{\alpha}' S_{11} \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}' S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} \tilde{\alpha}|$$

ou seja,

$$L^{-\frac{3}{2}T} \propto |\tilde{\alpha}' S_{11} \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}' S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} \tilde{\alpha}| \quad (D.21)$$

Por (D.15) e (D.16), (D.21) fica :

$$L^{-\frac{3}{2}T} \propto |S_{00}| |I - \xi' E' S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} E \xi| \quad (D.22)$$

Premultiplicando (D.14) por E' , obtemos :

$$E' S_{11} E D = E' S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} E$$

$$D = E' S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} E \quad (D.23)$$

Substituindo (D.23) em (D.22), obtemos :

$$L^{-\frac{3}{2}T} \propto |S_{00}| |I - \xi' D \xi| \quad (D.24)$$

Assim, a maximização da verossimilhança, considerando que D é a matriz dos autovalores ordenados $\tilde{\lambda}_1 > \dots > \tilde{\lambda}_n$ de $S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}$ com relação a S_{11} , é dada por :

$$L_{\text{max}}^{-\frac{3}{2}T} = |S_{00}| \prod_{j=1}^r (1 - \tilde{\lambda}_j) \quad (D.25)$$

Testando o posto de co-integração. Baseados na discussão acima, o método proposto nos permite estimar $A(1)$ e Λ sem restrições com relação ao posto de $A(1)$, ou seja, com relação ao posto de α . Podemos calcular os n autovalores e autovetores de uma vez, e logo realizar inferência com relação a quantas relações de co-integração são significativas, o que equivale a testar quantos dos autovalores λ são iguais a 0.

Johansen & Juselius tem desenvolvido dois tipos de testes:

i) **Teste da estatística do traço.** Deseja-se testar:

$$H_0: r=r_0, \quad H_1: r_0 < r \leq n \quad r=0, 1, \dots$$

Partindo de (D.25), construímos o ratio de verossimilhança da seguinte forma, para r_0 e um r_1 , tal que $r_1 > r_0$.

$$\begin{aligned} -2\ln Q(H(r_0)|H(r_1)) &= T[-\sum_{i=1}^{r_1} \ln(1-\lambda_i) + \sum_{i=1}^{r_0} \ln(1-\lambda_i)] \\ &= -T \sum_{i=r_0+1}^{r_1} \ln(1-\lambda_i) \end{aligned} \quad (D.26)$$

Por exemplo, si temos :

$H_0: r=0$, $H_1: r=2$, o teste será :

$$= -T \sum_{i=1}^2 \ln(1-\lambda_i)$$

ii) **Teste da estatística do $\lambda_{\max}$.** Considere os n valores estimados de λ , sequencialmente de maior a menor, e teste em cada sequência si o i -ésimo autovalor é significativamente diferente de 0. Si o autovalor λ_s não é significativamente diferente de 0, para um certo grau de significância, então podemos inferir que o posto de α é $n-s$, e o teste acaba aí.

Em outras palavras, o teste é baseado na comparação :

$$H_0 = (r-1), \quad H_1 = (r),$$

$$\lambda_{\max} = -T \ln(1-\tilde{\lambda}_r) \quad (D.27)$$

As distribuições assintóticas das estatísticas em (D.26) e (D.27) não são padrão. Em particular não são distribuições χ^2 , sendo versões multivariadas da distribuição de Dickey-Fuller. Estas distribuições são convenientemente descritas por certas integrais estocásticas, envolvendo processos Brownianos multivariados, que podem ser tabuladas por simulação. As distribuições dependem simplesmente da diferença $n-r$. Por tanto, é possível computar algumas porções selecionadas da distribuição, o que foi efetuado por Johansen & Juselius (1990).

Apêndice E

Dados

ÍNDICE DE PREÇOS POR ATACADO			TAXA CÂMBIO	TAXAS DE JUROS CURTO PRAZO (3 MESES)	
FRANÇA		EUA	FFR/US\$	FRANÇA	EUA
70: 1	29.56625	39.13334	5.547400	9.826667	7.249250
70: 2	29.70875	39.10000	5.524467	9.093333	6.721750
70: 3	29.85125	39.33334	5.519633	8.293334	6.194250
70: 4	29.99375	39.63333	5.521333	7.533333	5.666750
71: 1	29.80625	40.16667	5.517233	6.096667	4.451875
71: 2	30.16875	40.46667	5.522900	6.616666	4.382625
71: 3	30.53125	40.63334	5.516066	5.763333	4.313375
71: 4	30.89375	40.76667	5.491000	5.583333	4.244125
72: 1	30.05400	41.33333	5.100667	5.110000	2.957250
72: 2	31.21800	41.50000	5.022000	4.403334	3.699750
72: 3	32.38200	42.03333	5.004333	3.813334	4.442250
72: 4	33.54600	42.23333	5.050000	6.263333	5.184750
73: 1	32.38950	43.73333	4.793334	7.486666	6.724125
73: 2	35.10050	45.03334	4.429333	7.613333	6.935375
73: 3	37.81150	46.43333	4.186666	9.270000	7.146625
73: 4	40.52250	47.13334	4.406667	11.28000	7.357875
74: 1	48.31250	49.70000	4.935333	13.05333	8.654000
74: 2	47.63750	51.03334	4.875333	12.77000	8.142000
74: 3	46.96250	53.56667	4.784000	13.67333	7.630000
74: 4	46.28750	55.93333	4.645100	12.48333	7.118000
75: 1	43.37000	56.73333	4.282567	10.18333	6.606000
75: 2	44.19000	57.43333	4.081533	7.733333	6.094000
75: 3	45.01000	58.83333	4.357234	7.160000	5.582000
75: 4	45.83000	59.93333	4.424266	6.623333	5.070000
76: 1	46.65000	59.96666	4.522734	7.063333	4.853333
76: 2	47.47000	60.43333	4.702600	7.570000	5.286666
76: 3	48.29000	60.80000	4.907400	8.986667	5.116667
76: 4	49.11000	61.90000	4.985800	10.62000	4.566667
77: 1	49.90001	63.13334	4.976533	9.833333	4.680000
77: 2	50.43333	64.46667	4.952500	9.070001	4.826667
77: 3	50.00000	65.10000	4.889133	8.496667	5.570000
77: 4	50.00000	66.23333	4.845500	8.876667	6.160000
78: 1	50.73333	67.50000	4.756433	9.673333	6.746667
78: 2	51.63333	69.26667	4.605300	8.106667	7.356667
78: 3	52.60000	70.43334	4.387234	7.293334	8.180000
78: 4	54.20000	72.06667	4.302033	6.850000	10.34000
79: 1	56.50000	74.46667	4.268000	6.696667	10.26667
79: 2	58.63333	76.33334	4.707600	7.343334	9.633333
79: 3	60.26667	78.23333	4.234334	10.26000	10.80667
79: 4	61.43333	81.23333	4.141200	11.86333	13.67333
80: 1	63.10000	84.56667	4.149134	12.37667	15.26333
80: 2	64.20000	86.76666	4.212101	12.48333	8.590000
80: 3	64.86666	89.33334	4.121400	11.57667	10.18333
80: 4	65.56667	91.33334	4.421533	10.94667	16.75667
81: 1	67.86667	93.86667	4.859767	11.12333	14.84667
81: 2	70.16666	96.06666	5.418533	16.06333	16.17333

81: 3	72.70000	96.76666	5.808400	17.92333	16.97333
81: 4	75.70000	97.96665	5.651633	16.09000	13.27333
82: 1	78.73333	98.93333	5.994867	15.17667	14.58000
82: 2	80.43333	99.20000	6.279867	16.40000	14.51667
82: 3	80.80000	100.4000	6.941767	14.58000	10.56000
82: 4	81.93333	101.4667	7.073100	13.32333	8.590000
83: 1	84.36666	101.1000	6.887367	12.77333	8.430000
83: 2	86.43333	101.2667	7.469967	12.54000	8.256667
83: 3	88.40000	101.8000	7.960133	12.50333	9.163334
83: 4	90.40000	102.3333	8.167733	12.30000	8.889999
84: 1	92.73334	103.5333	8.305667	12.41333	9.433333
84: 2	95.00000	103.7333	8.331699	12.30333	10.76000
84: 3	96.50000	103.7333	8.960234	11.41333	11.25667
84: 4	97.50000	104.0333	9.362733	10.68000	8.923333
85: 1	98.83334	104.1333	9.960134	10.60667	8.346667
85: 2	100.2667	104.6667	9.407101	10.28667	7.633334
85: 3	100.9000	104.3333	8.686833	9.803333	7.876667
85: 4	100.0000	105.5000	7.886833	9.076667	7.763334
86: 1	99.00000	104.0333	7.207667	8.693334	7.513334
86: 2	97.83334	102.7667	7.146767	7.363333	6.576666
86: 3	96.83334	102.5333	6.777700	7.106667	5.813334
86: 4	96.10000	103.5667	6.572234	7.633333	5.590000
87: 1	96.40000	104.1333	6.127767	8.883334	6.356667
87: 2	97.10000	105.3333	6.025366	8.256667	7.093333
87: 3	97.70000	105.8667	6.135233	8.140000	7.166667
87: 4	98.53333	106.1000	5.754467	8.993333	7.873333
88: 1	99.53333	106.2333	5.668800	8.166667	6.906667
88: 2	100.5333	107.4000	5.778667	7.840000	7.473333
88: 3	102.7000	108.6333	6.318900	7.743333	8.373333
88: 4	105.2000	109.7333	6.061400	8.286667	9.043334
89: 1	108.8000	111.6333	6.294100	8.956667	9.746667
89: 2	108.4133	113.8333	6.540733	8.770000	9.713333
89: 3	108.4000	113.7000	6.454567	9.113334	8.913333
89: 4	107.3000	115.0667	6.043000	10.37000	8.540000
90: 1	106.8333	117.4000	5.721134	10.91667	8.336667
90: 2	106.9700	117.5667	5.643200	9.906666	8.410000
90: 3	105.7000	119.3000	5.343367	10.15333	8.110001
90: 4	108.0333	122.4000	5.061633	10.02333	8.053333
91: 1	106.3000	121.5333	5.204233	9.816667	6.846667
91: 2	105.2400	121.6000	5.873167	9.390000	6.106667
91: 3	104.0000	121.5667	5.928767	9.453333	5.776667
91: 4	103.8567	122.1333	5.554333	9.526668	4.993333
92: 1	103.7433	122.0333	5.479700	9.970000	4.226667
92: 2	104.0767	123.1667	5.440600	9.963334	3.986667
92: 3	103.0600	123.5333	4.959967	10.51000	3.363333
92: 4	102.2967	124.0667	5.259500	10.87667	3.596667
93: 1	101.3767	124.4667	5.543566	11.69333	3.213333
93: 2	100.6367	125.6000	5.455733	7.993333	3.226667
93: 3	99.55000	124.5000	5.818433	7.540000	3.200000
93: 4	98.92000	124.4000	5.833467	6.706666	3.343333

□

Referências Bibliográficas

Ardeni, P.G. & D. Lubian (1989), "Is There Trend Reversion in Purchasing Power Parity?", *European Economic Review*, 35, 1035-1055.

Campbell, J. Y., and R.J. Shiller (1988), "Interpreting Cointegrated Models", *Journal of Economic Dynamic and Control*, 12, 505-522.

Davidson, R. e MacKinnon, J. G, *Estimation and Inference in Econometrics*, New York : Oxford University Press, 1993.

Edison, H. J., Joseph E. Gagnon & William R. Melick (1994), "Understanding the Empirical Literature on Purchasing Power Parity: The Post-Bretton Woods Era", Board of Governors of the Federal Reserve System, Division of International Finance, Washington D.C.: *Unpublished*.

Edison, H. J. & Klovland, Jan T. (1987), "A Quantitative Reassessment of the Purchasing Power Parity Hypothesis : Some Evidence on Norway and the United States", *Journal of Applied Econometrics*, 2, 309-334.

Engle, R. F. & C. W. J. Granger (1987), "Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing", *Econometrica*, 55, 251-276.

Ericsson, N. R. (1992), "Cointegration, Exogeneity, and Policy Analysis: An Overview", *Journal of Policy Modelling*, 14(3), 251-280.

Frankel, O.J.A. (1979), "On the Mark: A Theory of Floating Exchange Rates based on Real Interest Differentials", *American Economic Review* 69, 610-622.

Fuller, W. A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, New York : John Wiley.

Gourieroux, C. & A. Monfort (1983), *Cours de Séries Temporelles*, Paris : Economica.

Graybill, F. A. (1983), *Matrices with Applications in Statistics*, Watdsworth International Group, Belmont, California, 2ª edição.

Harvey, A. C. (1990), *The Econometric Analysis of Time Series*, London : Philip Allan.

Johansen, S. (1988), "Statistical Analysis of Cointegration Vectors", *Journal of Economics Dynamics and Control*, 12, 231-254.

Johansen, S. & K. Juselius (1990), "Maximun Likelihood Estimation and Inference on Cointegration With Applications to the Demand for Money", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, 169-210.

Johansen, S. (1991), "The Power Function for the Likelihood Ratio Test for Cointegration", em: J. Gruber, ed., *Econometric Decision Models: New Methods of Modelling and Applications* (Springer Verlag, New York, NY) 336-357.

Johansen, S. & K. Juselius (1992), "Testing Structural Hypotheses in a Multivariate Cointegration Analysis of the PPP and the UIP for UK", *Journal of Econometrics*, 53, 211-244.

Kim, Y. (1990), "Purchasing Power Parity in the Long-Run: A Cointegration Approach", *Journal of Money, Credit and Banking*, 22, 491-503.

King, R. G., C. I. Plosser, J. H. Stock, & M. W. Watson (1991), "Stochastic Trends and Economic Fluctuations", NBER Working Paper No. 2229.

King, R. G., C. I. Plosser, J. H. Stock, & M. W. Watson (1991), "Stochastic Trends and Economic Fluctuations", *American Economic Review*, 81, 819-840.

Lutkepohl, H., *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Berlin : Springer-Verlag.

Lutkepohl, H. & H.E. Reimers (1992), "Impulse Response Analysis of Co-integrated Systems", *Journal of Economics Dynamics and Control*, 16, 53-78.

Mellander E., A. Vredin e A. Warne (1992), "Stochastic Trends and Economic Fluctuations in a Small Economy", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 7, 369-394.

Nelson C. R. & C. I. Plosser (1982), "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series", *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.

Searle Shayle R. (1982), *Matrix Algebra Useful for Statistics*, John Wiley & Sons.

Stock, J. H. & M. W. Watson (1988), "Testing for Common Trends", *Journal of the American Statistical Association*, 83, 1097-1107.

Valls Pereira, P.L (1991), "Cointegração e suas Representações: uma Resenha", *Revista de Econometria*, 11, nº 2, 185-216.

Warne, A. "A Common Trends Model : Identification, Estimation and Asymptotics", Manuscrito Não Publicado, Stockholm School of Economics, Suecia.