**Comportamento da borda
de Sistemas Markovianos de Partículas
interagindo com os vizinhos
mais próximos sobre Z**

Rinaldo Bruno Schinazi

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para obtenção do grau de doutor
em
Estatística

Orientador: Prof. Pablo Augusto Ferrari

—São Paulo, Novembro de 1988—

Agradecimentos

a Pablo Ferrari por ter me dado um exemplo do que é a pesquisa em matemática, e pela grande dedicação com a qual me orientou.

a Enrique Andjel e Antônio Galves por vários esclarecimentos luminosos sobre a Teoria de Sistemas de Partículas, e por ter discutido algumas partes deste trabalho comigo.

a Roberto Schonmann e Nelson Tanaka por discussões que me foram muito úteis.

a Elisabeti Kira e Lúcia Pereira Barroso por ter lido algumas partes deste trabalho evitando assim que eu fizesse ainda mais erros de português.

Índice

Capítulo 1:

Existência de uma Probabilidade Invariante

1. Descrição das interações com os vizinhos mais próximos	1
2. Construção do processo semi-infinito visto da borda	3
3. Existência de uma medida de probabilidade invariante	4
4. Interações com alcance finito	14

Capítulo 2:

Aproximações finitas da probabilidade invariante do contato visto da borda

1. Aproximações finitas	19
2. A densidade assintótica de $\tilde{\mu}$	31
3. Um teorema ergódico pontual para o processo visto da borda	34

Capítulo 3:

Flutuações Brownianas da borda no caso reversível e crítico

1. Taxas reversíveis	36
2. O processo congelado	37
3. Reversibilidade da medida de renovação no caso crítico	38
4. Ergodicidade da medida de renovação no caso crítico	40
5. Convergência para um movimento Browniano no caso crítico	42
6. O coeficiente de difusão é estritamente positivo	47

Bibliografia	56
------------------------	----

A nossa prova é uma generalização de uma prova que Andjel nos comunicou oralmente para o modelo de percolação orientada. A prova de Andjel usa idéias contidas em Durrett [5]. A idéia principal é estudar a velocidade da borda do processo com a configuração inicial Z^- : ou seja, cada sítio a esquerda da origem ocupado por uma partícula e nenhum sítio ocupado a direita da origem. Depois de mostrar a existência da probabilidade invariante que notamos por $\tilde{\mu}$, provamos que os limites da velocidade da borda, quando o tempo tende para o infinito, são os mesmos com as distribuições iniciais Z^- ou $\tilde{\mu}$. Mostramos também que, sob a distribuição $\tilde{\mu}$, a distância entre duas partículas consecutivas tem esperança finita.

No capítulo 2 consideramos um caso particular: o processo de contato. É um caso particular de alcance finito com $R = 1$. Consideramos o caso supercrítico: $\lambda > \lambda^f$, aqui $\lambda^f = \lambda^i$. Mostramos que a probabilidade invariante para o processo visto da borda pode ser aproximada por uma sequência de probabilidades que se concentram sobre as configurações com finitas partículas. Mais precisamente seja $\xi_{t,n}$ um processo visto da borda que segue as regras do processo de contato mas com as condições suplementares seguintes. Se restar só uma partícula então ela não pode morrer e se nascer uma $(n+1)$ ésima partícula então a última partícula a esquerda desaparece de modo que o processo $\xi_{t,n}$ tem sempre entre uma e n partículas. Mostraremos que esse processo tem uma probabilidade invariante μ_n e que essa sequência de probabilidades converge fracamente para a probabilidade invariante do processo de contato visto da borda. A nossa prova se baseia na construção de uma versão particular do processo de contato introduzida por Galves e Presutti [9]. Com esse resultado obtemos uma nova prova da existência da probabilidade invariante e uma justificativa de possíveis simulações para obter informações sobre a probabilidade invariante do processo de contato visto da borda.

Com a configuração inicial Z : cada sítio ocupado por uma partícula, a lei do processo de contato converge fracamente para uma probabilidade que notamos por μ (cf [17]). Mostramos que, assintoticamente longe da borda, a densidade da probabilidade invariante vista da borda é igual a densidade da probabilidade μ . Finalmente provamos um Teorema Ergódico Pontual para o processo de contato visto da borda.

No capítulo 3 consideramos um outro caso particular: as interações com taxas reversíveis. Ou seja fazemos a suposição que existe uma densidade de probabilidade b sobre os inteiros positivos tal que:

$$b(l, r) = \frac{b(l)b(r)}{b(l+r)}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{b(l)}{b(l+1)} = 1$$

nesse caso $\lambda^f = \lambda^i = 1$ (cf [17]). Mostramos que o processo visto da borda no caso crítico admite uma probabilidade reversível m que é a probabilidade de renovação de densidade b . Fazemos as seguintes restrições:

$$\sum_{l \geq 1} l^2 b(l) < \infty$$

$$b(l, \infty) = b(l)$$

Aplicamos então um Principio de Invariância para Processos Markovianos reversíveis, provado por De Masi, Ferrari, Goldstein e Wick [3], ao movimento da borda no caso crítico. O resultado de [3] dá um limite superior para o coeficiente de difusão D que calculamos explicitamente:

$$D \leq 2 \sum_{l \geq 1} l^2 b(l)$$

O ponto delicado nesse tipo de problema é mostrar que D não é nulo. Comparando o nosso processo com um processo congelado, onde só a primeira partícula pode morrer e só podem nascer partículas a direita da primeira, conseguimos mostrar que:

$$D \geq 2 \left(\sum_{l \geq 1} l b(l) \right)^2$$

Isso prova que com a distribuição inicial m e com o reescalonamento usual, o movimento da borda converge para um Movimento Browniano não degenerado.

Abstract

In this work, we consider the Nearest-Particle Systems on Z . The birth rate of a particle at x on Z is $\lambda b(l, r)$ where b is a symmetric function, l and r are respectively the distances from x to the nearest particles on the left and on the right of x and λ is a real parameter. The death rate of a particle is constant and equal to 1. We are interested in studying the behaviour of the edge process of these systems, with semi-infinite initial configurations.

In Chapter 1, we assume that b is a nonincreasing function in l and r and

$$\sum_{l \geq 1} l b(l, \infty) < \infty$$

and there exists a real number B such that:

$$b(n) < B$$

for all n finite and infinite, where

$$b(n) = \sum_{l+r=n} b(l, r)$$

$$b(\infty) = \sum_{l \geq 1} b(l, \infty) + \sum_{r \geq 1} b(\infty, r)$$

Let λ^f be the infimum of λ such that if the initial state has only one particle then the probability of the process having at least one particle forever is strictly positive. Let λ^i be the infimum of λ such that if the initial state has one particle in each site of Z then the law of the process converges weakly to a probability which has no mass on the empty configuration.

Our first result is that there exists an invariant probability for the Nearest-Particle Systems as seen from the edge, when $\lambda \geq \lambda^f$. We also show this result when $\lambda \geq \lambda^i$ but with the following important restriction. We assume that the system has a finite interaction range. This means that there exists an integer R such that:

$$b(l, r) = 0 \text{ when } l > R \text{ and } r > R$$

We generalize a proof due to Andjel (private communication) for Oriented Percolation Model. This proof is based on ideas due to Durrett [5]. The main idea is to study the edge speed when the initial configuration is Z^- : all the sites on the left of the origin are occupied by a particle and all the sites on the right of the origin are empty. If we denote $\tilde{\mu}$ the invariant probability that we construct, we also show that when the time goes to infinity the limits of the edge speeds are the same either with the initial configurations Z^- or $\tilde{\mu}$. Finally we show that the expected value of the distance between two consecutive particles is finite when the distribution is $\tilde{\mu}$.

In Chapter 2, we consider a particular case: the Contact Process. We consider the supercritical case: $\lambda > \lambda^f$. For this system it is known that $\lambda^f = \lambda^i$. We show that the invariant probability for the process as seen from the edge is the weak limit of a sequence of probability measures which concentrate on finite configurations. More precisely, let $\xi_{t,n}$ be a process seen from the edge which follows the rules of the Contact Process but with the following conditions. If there is only one particle left it cannot disappear and when the $(n+1)^{st}$ particle appears then the leftmost one disappears, so that $\xi_{t,n}$ has always at least one and at most n particles. We show that this process has an invariant probability μ_n and that this sequence of probabilities converges to the invariant probability of the Contact Process as seen from the edge. Our proof is based on techniques in Galves and Presutti [9] for the Contact Process. Our result implies a new proof of the existence of the invariant probability and gives a theoretical justification for doing simulations.

We also show that, asymptotically far from the edge, the invariant probability density of the process as seen from the edge is equal to the superior invariant probability density of the Contact Process (not seen from the edge). We finally prove a Pointwise Ergodic Theorem for the Contact Process as seen from the edge.

In Chapter 3, we consider another particular case: Reversible Nearest Particle Systems. This means that there exists a probability density b on the integers such that:

$$b(l, r) = \frac{b(l)b(r)}{b(l+r)}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{b(l)}{b(l+1)} = 1$$

For this model it is known that $\lambda^f = \lambda^i = 1$. We show that the process as seen from the edge in the critical case ($\lambda = 1$) has a reversible probability m which is a renewal probability with density b . We assume that:

$$\sum_{l \geq 1} l^2 b(l) < \infty$$

$$b(l, \infty) = b(l)$$

With these hypothesis we apply an Invariance Principle for Markov Reversible Processes due to De Masi, Ferrari, Goldstein and Wick [3] to the edge process in the critical case. The result in [3] gives an upper bound, for the diffusion constant, wich we compute explicitly:

$$D \leq 2 \sum_{l \geq 1} l^2 b(l)$$

The hard point in this kind of problems is to find a lower bound for the diffusion constant. We compare the process with a frozen process where the only particle allowed to disappear is the first one and particles can appear only on the right of the edge. This comparison allows to show that:

$$D \geq 2 \left(\sum_{l \geq 1} l b(l) \right)^2$$

This proves that the edge process converges to a non degenerate Brownian Motion.

Capítulo 1

Existência de uma probabilidade invariante

1. Descrição das interações com os vizinhos mais próximos

Consideramos um processo sobre os inteiros Z . Os estados possíveis deste processo estão em $\{0, 1\}^Z$. Seja η um elemento deste conjunto e seja x um sítio em Z , $\eta(x) = 1$ indica que há uma partícula em x na configuração η , e $\eta(x) = 0$ indica que não há partícula. Sejam:

$$l_x(\eta) = x - \max\{y < x : \eta(y) = 1\}$$

$$r_x(\eta) = \min\{y > x : \eta(y) = 1\} - x$$

Observamos que esses dois números podem ser infinitos. Se $\eta(x) = 0$ então nasce uma partícula em x com a taxa $b(l_x(\eta), r_x(\eta))$; se $\eta(x) = 1$ então a partícula que está em x

desaparece com taxa 1. A função b tem as seguintes propriedades:

$$b(l, r) \geq 0 \text{ e } b(l, r) = b(r, l) \text{ e } \sup_{l, r} b(l, r) < \infty$$

$$b(1, \infty) = b(\infty, 1) > 0 \text{ e } b(\infty, \infty) = 0$$

Esses sistemas já foram estudados em dois casos particulares: um é o processo de contato introduzido por Harris [13] onde

$$b(1, 1) = 2\lambda \text{ e } b(1, r) = b(r, 1) = \lambda \text{ para } r > 1$$

$$b(l, r) = 0 \text{ para } l > 1 \text{ e } r > 1$$

para um real positivo λ . O outro caso estudado é o processo com taxas reversíveis introduzido por Spitzer [19] onde existe uma função b de uma variável, estritamente positiva e tal que:

$$b(l, r) = \frac{b(l)b(r)}{b(l+r)}$$

A primeira pergunta essencial é saber quando esses sistemas de partículas sobrevivem para sempre. Para isso definimos uma família de sistemas de partículas interagindo com os vizinhos mais próximos com as seguintes taxas de nascimento:

$$b_\lambda(l, r) = \lambda b(l, r)$$

para l e r inteiros finitos ou infinitos, λ sendo um parâmetro real e a taxa de morte sendo 1 independentemente do λ .

Seja η_t^* um sistema com interações com os mais próximos vizinhos com as taxas b_λ e com a configuração inicial $*$ que consiste de uma só partícula localizada em 0. Seja:

$$\tau^*(\lambda) = \inf\{t > 0; \sum_{x \in \mathbb{Z}} \eta_t^*(x) = 0\}$$

Definimos agora

$$\lambda^f = \inf\{\lambda > 0; P(\tau^*(\lambda) = \infty) > 0\}$$

Diremos que o sistema finito sobrevive se $\lambda > \lambda^f$. Podemos também definir a sobrevivência para configurações iniciais infinitas no caso de processos atrativos, ou seja, quando b é

uma função decrescente nos dois argumentos. Seja η_t^Z o processo com taxas b_λ e com configuração inicial Z : isto é, cada sítio de Z ocupado por uma partícula. Sabemos que uma consequência da atratividade é a convergência fraca da lei de η_t^Z quando t tende para o infinito para alguma medida de probabilidade $\mu(\lambda)$. Seja:

$$\lambda^i = \inf\{\lambda > 0; \mu(\lambda) \neq \delta_0\}$$

onde δ_0 é a medida de Dirac concentrada na configuração com 0 partículas. Diremos que o processo infinito sobrevive se $\lambda > \lambda^i$. Nos casos do contato e reversível temos que λ^f e λ^i são finitos e iguais.

2. Construção do processo semi-infinito visto da borda

Imitamos a construção que Liggett [17] fez (cap7.3) para o processo duplamente infinito. Construímos o processo por aproximações finitas. Seja X o espaço das configurações do processo visto da borda.

$$X = \{\eta : \eta(0) = 1; \eta(x) = 0 \text{ para } x > 0\}$$

Definimos também:

$$\tilde{X} = \{\eta : \eta(0) = 1; \eta(x) = 0 \text{ para } x > 0; \sum_{x < 0} \eta(x) = \infty\}$$

Seja $\eta^n(t)$ um processo em X que se comporta como um processo com interações com os vizinhos mais próximos à direita de uma certa partícula. No instante inicial temos uma partícula em $-n$ assim como em qualquer sítio à esquerda de $-n$; à direita de $-n$ temos uma configuração qualquer. Podemos ter nascimentos à direita da primeira partícula ou morte da primeira partícula. Cada vez que um desses eventos acontece fazemos uma translação para ter $\eta^n(t)$ em X . Em função dessas translações o bloco de partículas que estava à esquerda de $-n$ no instante inicial se desloca. Impedimos a morte de uma partícula desse bloco. À direita deste bloco de partículas as interações seguem as regras do mais próximo vizinho.

Seja η uma configuração de $\tilde{X}$, definimos uma sequência de processos $(\eta^n(t))_n$ com configurações iniciais $\eta^n(0)$, onde $\eta^n(0)$ coincide com η à direita de $-n$. Acoplando dois processos $\eta^n(t)$ e $\eta^p(t)$, com $p > n$, da sequência que acabamos de definir, temos que para um certo x de Z^- :

$$P(\eta^n(t)(x) \neq \eta^p(t)(x)) \leq (1 - e^{-t})^{I(n,x)}$$

onde $I(n, x) = \sum_{y=-n}^{y=x} \eta(y)$. Com efeito, para que $\eta^n(t)$ e $\eta^p(t)$ não coincidam em algum x de Z é preciso que todas as partículas entre x e $-n$ desapareçam antes do instante t . Se n e p tendem para $+\infty$ então $I(n, x)$ tende para $+\infty$ já que η tem infinitas partículas. Essa observação permite definir $\eta(t)$ quase certamente para todo t escrevendo que:

$$\eta(t)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta^n(t)(x)$$

para todo x . Definimos $\eta(t)$ como o processo com interações com os vizinhos mais próximos e visto da borda, com a configuração inicial η .

Os mesmos argumentos desenvolvidos por Liggett [17] mostram que $\eta(t)$ é um processo Markoviano e Feller sobre $\tilde{X}$ (Teorema 3.5 cap7.3).

3. Existência de uma medida de probabilidade invariante

Consideramos uma família de sistemas de partículas interagindo com os mais próximos vizinhos, com as seguintes taxas de nascimento:

$$b_\lambda(l, r) = \lambda b(l, r)$$

para l e r inteiros positivos

$$b_\lambda(l, \infty) = \lambda b(l, \infty)$$

onde λ é um real positivo que parametriza essa família. A taxa de morte é 1, independentemente de λ . A função b tem as propriedades enunciadas na seção 1. Faremos três hipóteses para provar a existência da medida de probabilidade invariante para o processo visto da borda:

(A) b é decrescente nos dois argumentos

$$(1) \quad M = \sum_{l \geq 1} lb(l, \infty) < \infty$$

Existe B real finito tal que:

$$(2) \quad b(n) < B \text{ para todo } n \text{ finito ou infinito}$$

onde

$$b(n) = \sum_{l+r=n} b(l, r) \text{ para } n \text{ inteiro finito}$$

$$b(\infty) = \sum_{l \geq 1} b(l, \infty) + \sum_{r \geq 1} b(\infty, r)$$

Observamos que a hipótese (A) é equivalente à atratividade dos processos. Com essas hipóteses provaremos a existência de uma probabilidade invariante em dois casos. Quando

$$\lambda \geq \lambda^f$$

no teorema 1. Quando a interação tem alcance finito e

$$\lambda \geq \lambda^i$$

no teorema 2.

Para o modelo de percolação orientada, Durrett [5] já provou a existência da medida de probabilidade invariante nos casos crítico e supercrítico. Generalizamos esta prova para sistemas de partículas com interações com os vizinhos mais próximos. Essa generalização só foi possível graças à ajuda de E. Andjel que num seminário mostrou as idéias principais da prova de Durrett.

A prova da existência da medida invariante está baseada em propriedades da velocidade da primeira partícula. Seja $r_t^1(\lambda)$ a posição da primeira partícula do sistema com as taxas de nascimento $b_\lambda(l, r)$, a configuração inicial sendo Z^- . Da mesma maneira que Durrett fez para o caso particular do contato (Teorema 2.19, cap.6 do Liggett [17]) podemos aplicar o teorema subaditivo para mostrar que para cada λ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t^1(\lambda)/t = \inf_{t > 0} E(r_t^1(\lambda)/t) = a(\lambda)$$

$a(\lambda)$ pode eventualmente ser $-\infty$ mas $a(\lambda) < \infty$. Para aplicar esse teorema subaditivo é essencial ter as propriedades (A) e (1). Enunciamos agora dois lemas que serão úteis para a prova da existência.

Lema 1: Se $\lambda > \lambda^f$ então $a(\lambda) \geq 0$.

Prova:

Fixamos $\lambda > \lambda^f$ e consideramos o processo com esse parâmetro naquilo que segue. Sabemos que $A = \{\tau^* = \infty\}$ tem probabilidade estritamente positiva, onde τ^* é o tempo de vida de um processo que começa com uma só partícula em 0. Sejam r_t^* e l_t^* as partículas respectivamente mais à direita e mais à esquerda deste último processo. Temos que:

$$1 = P(r_t^* \geq 0/A) + P(r_t^* < 0/A)$$

mas $P(r_t^* < 0/A) \leq P(l_t^* < 0/A)$. Por simetria temos também que :

$$P(l_t^* < 0/A) = P(r_t^* > 0/A)$$

Podemos então concluir que:

$$P(r_t^* \geq 0/A) \geq 1/2$$

Podemos fazer um acoplamento entre o processo com configuração inicial Z^- e o processo com configuração inicial $*$. Usando a atratividade temos que: $r_t^* \leq r_t^1$ quase certamente e portanto:

$$P(r_t^1 \geq 0/A) \geq 1/2$$

Como $\frac{r_t^1}{t}$ converge para $a(\lambda)$ quase certamente, isso mostra que para todo $\lambda > \lambda^f$ temos $a(\lambda) \geq 0$. O lema está provado.

Lema 2: $a(\lambda^f) \geq 0$

Prova:

Para t fixado, mostramos que a função que a λ associa $Er_t^1(\lambda)$ é contínua. Mostraremos primeiro que $r_t^1(\lambda + \delta)$ converge quase certamente para $r_t^1(\lambda)$ quando δ tende para 0. Podemos construir o processo com taxas $b_{\lambda+1}$ e para cada nascimento nesse processo associamos

uma variável uniforme U no intervalo $[0;1]$ e se

$$U \leq \frac{\lambda + \delta}{\lambda + 1}$$

então nasce a partícula para o processo com taxas $b_{\lambda+\delta}$, caso contrario essa partícula não nasce. Podemos construir assim todos os processos conjuntamente com taxas $b_{\lambda+\delta}$ onde $0 \leq \delta \leq 1$. Seja,

$$D = \{\lim_{\delta \rightarrow 0} r_t^1(\lambda + \delta) \neq r_t(\lambda)\}$$

Por outro lado definimos $F_t(\lambda)$ a posição da primeira partícula do processo que tem também taxas b_λ mas cujas partículas não morrem. Definimos também g_t , a posição da borda do processo cujas partículas só podem morrer. Consideramos g_t e $F_t(\lambda)$ com configurações iniciais Z^- . Podemos construir g_t e $F_t(\lambda)$ no mesmo espaço de probabilidade que os outros processos. Seja K um inteiro arbitrariamente grande:

$$P(D) \leq P(g_t < -K) + P(F_t(\lambda + 1) > K) + P(D; g_t \geq -K; F_t(\lambda + 1) \leq K)$$

Seja agora $N_t^K(\lambda + 1)$ o número de nascimentos entre $-K$ e K para o processo com taxas $b_{\lambda+1}$. Seja L um inteiro.

$$P(D; g_t \geq -K; F_t(\lambda + 1) \leq K) \leq$$

$$P(N_t^K(\lambda + 1) > L) + P(D; g_t \geq -K; F_t(\lambda + 1) \leq K; N_t^K(\lambda + 1) \leq L)$$

Esse último termo é menor que:

$$P(\exists i : 1 \leq i \leq L; \exists (\delta_k)_{k \geq 0}; \frac{\lambda}{\lambda + 1} < U_i < \frac{\lambda + \delta_k}{\lambda + 1} \forall k)$$

onde U_i é a variável uniforme que corresponde ao nascimento i e δ_k é uma sequência que converge para 0. É fácil ver que esse último termo é nulo. Temos então:

$$P(D) \leq P(g_t < -K) + P(F_t(\lambda + 1) > K) + P(N_t^K(\lambda + 1) > L)$$

Fazemos tender L e depois K para $+\infty$ e isso prova que:

$$P(D) = 0$$

Por outro lado:

$$|r_t^1(\lambda + \delta)| \leq \max(-g_t; F_t(\lambda + 1))$$

podemos então aplicar o teorema de convergência dominada:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} Er_t^1(\lambda + \delta) = Er_t^1(\lambda)$$

e isso prova a continuidade da função que a λ associa $Er_t^1(\lambda)$.

Agora, suponhamos que $a(\lambda^f) < 0$ para chegar a alguma contradição. Existe um t_0 tal que:

$$(3) \quad Er_{t_0}^1(\lambda^f)/t_0 < a(\lambda^f)/2$$

Usando a continuidade que acabamos de provar, temos que para $\lambda > \lambda^f$ e suficientemente próximo de λ^f

$$(4) \quad |Er_{t_0}^1(\lambda)/t_0 - Er_{t_0}^1(\lambda^f)/t_0| < -a(\lambda^f)/4$$

Usando (3) e (4) temos que :

$$(5) \quad Er_{t_0}^1(\lambda)/t_0 < a(\lambda^f)/4$$

Essa última desigualdade é válida para todo $\lambda > \lambda^f$ suficientemente próximo de λ^f . Por outro lado, para todo λ temos que :

$$a(\lambda) = \inf_{t > 0} Er_t^1/t$$

então usando (5) temos que $a(\lambda) < 0$ para algum $\lambda > \lambda^f$. Isso contradiz o Lema 1 e portanto temos que:

$$a(\lambda^f) \geq 0$$

Podemos mostrar agora o

Teorema 1: *Para todo $\lambda \geq \lambda^f$ o sistema de partículas interagindo com os vizinhos mais próximos e visto da primeira partícula admite uma medida de probabilidade invariante concentrada nas configurações infinitas.*

Prova:

Fixamos $\lambda \geq \lambda^f$ e consideramos o processo com esse parâmetro naquilo que segue. O processo tem os seus estados em X . Esse conjunto é um compacto de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Seja S o semi-grupo do processo e δ_1 a massa de Dirac sobre a configuração Z^- . Usando a compacidade de X sabemos que existe uma sequência t_n que tende para o infinito e tal que:

$$\mu_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \delta_1 S(s) ds$$

converge fracamente para alguma medida de probabilidade $\tilde{\mu}$ sobre X , quando n tende ao infinito.

Podemos observar que $\tilde{\mu}$ pode ter massa positiva sobre as configurações finitas sobre as quais o processo não está definido. Poderíamos definir o processo sobre as configurações finitas mas ele não teria a propriedade de Feller sobre esse conjunto. Se o processo fosse Feller sobre X inteiro, resultados clássicos implicariam a invariância de $\tilde{\mu}$. Para usar esses resultados, temos que mostrar primeiro que: $\tilde{\mu}$ tem massa 0 nas configurações finitas. Mostraremos isso agora. Definimos:

$$A_{i,j} = \left\{ \eta : \sum_{x=-i}^0 \eta(x) < j \right\}$$

Consideramos o processo com configuração inicial δ_1 . Comparando o processo com um processo com as mesmas taxas de nascimento mas com a taxa de morte igual a 0, temos para t qualquer:

$$(6) \quad E(r_{t+1} - r_t)^+ \leq E(F_1(\lambda)) = M\lambda$$

A seguinte desigualdade é o ponto crucial da prova:

$$(7) \quad E(r_{t+1} - r_t)^- \geq ip(j)\delta_1 S(t)(A_{i,j})$$

Com efeito: se o processo está numa configuração de $A_{i,j}$ no instante t e se todas as partículas que estão entre 0 e $-i$ morrem entre os instantes t e $t+1$ antes de ter feito nascer uma nova partícula, então a posição da primeira partícula recua de pelo menos i . Encontramos agora uma minoração $p(j)$ da probabilidade do evento que acabamos de

descrever. A probabilidade de k partículas desaparecerem antes de dar nascimento a uma nova partícula durante um intervalo de tempo igual a 1 é maior que:

$$g(k) = \prod_{l=1}^k P(\text{Exp}(l) < \text{Exp}((l+1)B); \text{Exp}(l) < \frac{1}{k})$$

onde $\text{Exp}(p)$ é uma variável exponencial de parâmetro p . Com efeito, o tempo de vida de uma partícula segue uma distribuição exponencial de parâmetro 1, portanto o tempo de vida da primeira partícula que desaparece entre l partículas segue uma exponencial de parâmetro l . Esse tempo de vida deve ser inferior ao mínimo dos tempos de nascimento. Cada tempo de nascimento de uma partícula entre duas que já existem é uma variável exponencial de taxa menor que B pela hipótese (2). Para l partículas temos no máximo $l+1$ intervalos onde partículas podem nascer. Depois da morte de uma partícula voltamos ao caso precedente com $l-1$ no lugar de l . Para ter (7) é só definir:

$$p(j) = \min_{1 \leq k \leq j} g(k)$$

Usando (6) e (7) e integrando entre 0 e t , temos:

$$(8) \quad \int_0^t E(r_{s+1} - r_s) ds \leq M\lambda t - ip(j) \int_0^t \delta_1 S(s)(A_{i,j}) ds$$

O lado esquerdo de (8) é igual a:

$$(9) \quad \int_t^{t+1} Er_s ds - \int_0^1 Er_s ds$$

Observamos agora que pelos Lemas 1 e 2, para $\lambda \geq \lambda^f$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_t^{t+1} Er_s ds = a(\lambda) \geq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^1 Er_s ds = 0$$

Substituindo t por t_n e fazendo tender n para o infinito temos em (8):

$$\tilde{\mu}(A_{i,j}) \leq \frac{M\lambda}{ip(j)}$$

Observamos que podemos passar ao limite porque $A_{i,j}$ é um cilindro. Fazendo tender i para o infinito e depois j , temos que:

$$\tilde{\mu}(\text{configurações finitas}) = 0$$

Agora sabemos que μ_n e $\tilde{\mu}$ concentram-se sobre o subespaço das configurações infinitas $\tilde{X}$ de X . Mas $\tilde{X}$ é um boreliano denso em X , qualquer função uniformemente contínua sobre $\tilde{X}$ pode ser extendida numa única função uniformemente contínua sobre X . Isso implica que μ_n converge para $\tilde{\mu}$ sobre $\tilde{X}$. Como o processo é Feller nesse conjunto isso implica que $\tilde{\mu}$ é invariante para o processo. O Teorema 1 está provado.

Seja $\tilde{r}_t$ a posição da primeira partícula do processo com medida de probabilidade inicial $\tilde{\mu}$. Mostramos agora que:

Corolário 1: Para todo $\lambda \geq \lambda^f$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{r}_t}{t} = a(\lambda)$ quase certamente.

Prova:

Usando a comparação com o mesmo processo sem mortes podemos escrever que:

$$E(r_{t+h}^1 - r_t^1) \leq \lambda M h$$

Aplicamos o lema de Fatou:

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int_0^T -E\left(\frac{r_{t+h}^1 - r_t^1}{h}\right) dt \geq \int_0^T \liminf_{h \rightarrow 0} -E\left(\frac{r_{t+h}^1 - r_t^1}{h}\right) dt$$

Temos então:

$$(10) \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \int_0^T E\left(\frac{r_{t+h}^1 - r_t^1}{h}\right) dt \leq \int_0^T \limsup_{h \rightarrow 0} E\left(\frac{r_{t+h}^1 - r_t^1}{h}\right) dt$$

Mas $\int_0^T E\left(\frac{r_{t+h}^1 - r_t^1}{h}\right) dt$ é igual a:

$$(11) \quad \int_T^{T+h} \frac{E(r_t^1)}{h} dt - \int_0^h \frac{E(r_t^1)}{h} dt$$

Usando a continuidade da função que a t associa $E r_t^1$ e fazendo h tender para 0 temos que (11) tende para:

$$E(r_T^1) - E(r_0^1) = E(r_T^1)$$

Por outro lado temos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E\left(\frac{r_{t+h}^1 - r_t^1}{h}\right) = \lambda M - E(d_t^1)$$

onde d_t^1 é a distância entre as duas primeiras partículas do processo cuja configuração inicial é Z^- . Temos então que (10) é equivalente a:

$$(12) \quad E(r_T^1) \leq \int_0^T (\lambda M - E(d_t^1)) dt$$

Seja k um inteiro positivo; temos que:

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} E(\min(d_t^1, k)) dt = E(\min(\tilde{d}, k))$$

onde $\tilde{d}$ é a distância entre as duas primeiras partículas para o processo com a distribuição invariante $\tilde{\mu}$. Essa convergência é consequência da definição de $\tilde{\mu}$ e do fato que a função, que para toda configuração associa o mínimo entre k e a distância entre as duas primeiras partículas, é contínua e limitada. Voltando para (12) temos que:

$$E(r_T^1) \leq \int_0^T (\lambda M - E(\min(d_t^1, k))) dt$$

Substituindo T por t_n , dividindo por t_n essa última desigualdade e usando (13) temos que:

$$a(\lambda) \leq \lambda M - E(\min(\tilde{d}, k))$$

Agora podemos fazer k tender para $+\infty$ e temos que:

$$a(\lambda) \leq \lambda M - E(\tilde{d})$$

Seja $v = \lambda M - E(\tilde{d})$, usando a invariância de $\tilde{\mu}$ temos que:

$$E(\tilde{r}_t) = vt$$

Usando a atratividade do processo temos que:

$$E(r_t^1) \geq E(\tilde{r}_t)$$

Dividindo por t e passando ao limite temos que:

$$a(\lambda) \geq v$$

Temos então que $v = a(\lambda)$.

Mostramos agora que essa convergência vale também quase certamente. Para isso consideramos a sequência estacionária: $(\tilde{r}_k - \tilde{r}_{k-1})_{k \in \mathbb{N}}$. Pelo Teorema Ergódico:

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{r}_k - \tilde{r}_{k-1} = E(\tilde{r}_1 / \mathcal{I})$$

onde $\mathcal{I}$ é a σ -álgebra gerada pelos eventos invariantes por translações no tempo. Mas o termo à esquerda de (14) é $\frac{1}{n} \tilde{r}_n$ e comparando esse termo com $\frac{1}{n} r_n^1$ temos que:

$$E(\tilde{r}_1 / \mathcal{I}) \leq a(\lambda)$$

Por outro lado sabemos que

$$EE(\tilde{r}_1 / \mathcal{I}) = E(\tilde{r}_1) = v = a(\lambda)$$

e isso implica que a variável aleatória $E(\tilde{r}_1 / \mathcal{I})$ é quase certamente igual à $a(\lambda)$ e o corolário está provado para o tempo discreto. A passagem para o tempo contínuo é uma consequência do fato que o movimento para frente de $\tilde{r}_t$ está limitado pela variável F_t . Com efeito, temos:

$$P\left(\max_{n \leq t \leq n+1} (\tilde{r}_t - \tilde{r}_n) \geq \epsilon n\right) \leq P(F_1 \geq \epsilon n)$$

$$P\left(\max_{n-1 \leq t \leq n} (\tilde{r}_n - \tilde{r}_t) \geq \epsilon n\right) \leq P(F_1 \geq \epsilon n)$$

e usando o lema de Borel Cantelli, temos que a convergência também vale para o tempo contínuo.

Damos agora mais uma propriedade da probabilidade invariante $\tilde{\mu}$. Definimos $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots$ as distâncias entre a primeira e a segunda partícula, entre a segunda e a terceira partícula etc, etc; a medida de probabilidade inicial sendo $\tilde{\mu}$.

Corolário 2: As distâncias $\tilde{d}_k$ têm esperança finita, para todo $k \geq 1$.

Prova:

Definimos $\tilde{r}_t^k$ a posição da k -ésima partícula, sendo a probabilidade inicial $\tilde{\mu}$. Por exemplo a posição da primeira partícula é $\tilde{r}_t^1$ que notamos até agora por $\tilde{r}_t$. Seja

$$v_k = \frac{d}{dt} E(\tilde{r}_t^k)$$

a velocidade da k -ésima partícula. Damos agora uma prova por indução do corolário 2: se $k = 1$, pelo corolário 1, temos que:

$$v_1 = a(\lambda) = \lambda M - E(\tilde{d}_1) \geq 0$$

e então $E(\tilde{d}_1) \leq \lambda M < \infty$.

Suponhamos que a propriedade seja válida para $k - 1$. Temos que:

$$\begin{aligned} v_k &= \lambda \sum_{l \geq 1} b(l, \infty) E(\tilde{d}_{k-1}) + E\left(\sum_{n \geq 1} \sum_{l+r=n} r \lambda b(l, r) 1_{\tilde{d}_{k-1}=n}\right) \\ &\quad + E\left(\sum_{j=1}^{k-2} \sum_{n \geq 1} 1_{\tilde{d}_j=n} \sum_{l+r=n} \lambda b(l, r) \tilde{d}_{k-1}\right) - k E(\tilde{d}_k) \end{aligned}$$

Usando a propriedade (2) temos que:

$$v_k \leq k \lambda B E(\tilde{d}_{k-1}) - k E(\tilde{d}_k)$$

por outro lado usando a invariância de $\tilde{\mu}$ temos que:

$$v_k = v_1 = a(\lambda) \geq 0$$

Isso implica que:

$$E(\tilde{d}_k) \leq \lambda B E(\tilde{d}_{k-1}) < \infty$$

O corolário 2 está provado por indução.

4. Interações com alcance finito

Nesta secção faremos a seguinte hipótese sobre as taxas de nascimento. Existe um inteiro R tal que:

$$b(l, r) = 0 \text{ para } l > R \text{ e } r > R$$

Observe que o processo de contato verifica essa propriedade com $R = 1$. Consideramos uma família de sistemas de partículas com alcance finito e com as taxas de nascimento:

$$b_\lambda(l, r) = \lambda b(l, r)$$

Continuamos supondo que $b(l, r)$ verifica a hipótese de atratividade (A). Temos que:

Lema 3: Para $\lambda \geq \lambda^i$, $a(\lambda) \geq 0$.

Prova:

Suponhamos que $a(\lambda) < 0$ para um certo valor de λ que fixamos e que omitiremos na notação naquilo que segue. Seja $\eta(t)$ o processo com configuração inicial Z . Seja d um inteiro positivo, notaremos por:

$$N(t) = \sum_{x=-d}^d \eta(t)(x)$$

o número de partículas entre $-d$ e d , no instante t . Sejam:

$$d_s = \max\{x \leq 0 : \eta(s)(x) = 1\}$$

$$g_s = \min\{x \geq 0 : \eta(s)(x) = 1\}$$

Fixamos um inteiro n que poderá ser arbitrariamente grande e definimos:

$$\tau^1 = \inf\{s \geq 0 : d_s \leq -nR \text{ e } g_s \geq nR\}$$

Avaliamos agora:

$$P(N(t) \geq 1) \leq P(N(t) \geq 1; \tau^1 < t) + P(\tau^1 \geq t)$$

Definimos agora:

$$\tau^2 = \inf\{s \geq \tau^1 : d_s \geq -nR/2 \text{ ou } g_s \leq nR/2\}$$

Temos que:

$$P(N(t) \geq 1; \tau^1 < t) \leq P(N(t) \geq 1; \tau^1 < t; \tau^2 = \infty) + P(\tau^2 < \infty)$$

Para n suficientemente grande, se $\tau^2 = \infty$ então $N(t) = 0$ para $t \geq \tau^1$. Examinamos agora:

$$(15) \quad P(\tau^2 < \infty) = P(d_{\tau^2} \geq -nR/2 \text{ ou } g_{\tau^2} \leq nR/2; \forall v < \tau^2, d_v < -nR/2 \text{ e } g_v > nR/2)$$

Antes do instante τ^2 não pode haver interação entre as partículas à esquerda e à direita da origem, temos então antes deste instante dois sistemas semi-infinitos que evoluem independentemente um do outro. Temos que (15) é menor que:

$$(16) \quad 2P(\exists u \geq 0 : r_u^1 \geq -nR/2 + nR)$$

onde r_u^1 é a posição da borda começando com a configuração inicial Z^- . Essa desigualdade vem da simetria e da atratividade deste sistema. Para avaliar (16), consideramos os dois casos: u pequeno e u grande. Seja

$$u_0 = \frac{nR}{4\lambda M}$$

onde M é definido pelo (1) na seção 3. Temos que:

$$P(\exists u \leq u_0; r_u^1 \geq nR/2) \leq P(F_{u_0} \geq nR/2)$$

onde F_t é a posição da borda para o processo sem mortes. Seja f_t o número de partículas que nasceram até o instante t à direita da primeira partícula. Temos que:

$$F_t = \sum_{i=0}^{f_t} W_i$$

onde $W_0 = 0$ e os W_i para $i \geq 1$ são independentes e têm mesma distribuição proporcional a $b(l, \infty)$. Temos então que:

$$Var(F_t) = E(f_t)Var(W_1) + E(W_1)^2 Var(f_t)$$

Por causa da hipótese do alcance finito, é claro que W_1 tem todos os seus momentos finitos. Como f_t é um processo de Poisson, temos:

$$E(f_t) = Var(f_t) = \lambda t \sum_{l \geq 1}^R b(l, \infty)$$

e $E(F_{u_0}) = nR/4$. Aplicamos a desigualdade de Tchebitchev:

$$P(\exists u \leq u_0; r_u^1 \geq nR/2) \leq \frac{16\text{Var}(F_{u_0})}{n^2 R^2}$$

Esse último termo é menor que: $\frac{4}{nR}E(W_1^2)$.

Para os tempos maiores que u_0 , usamos um resultado de Durrett [5] sobre grandes desvios da borda do processo de contato. Ele provou no (2) da seção 7, que se $b > a(\lambda)$ então existia duas constantes estritamente positivas c e c' tais que:

$$P(r_n^1 > bn) \leq ce^{-c'n}$$

A mesma prova vale no nosso caso. Temos então que:

$$P(\exists m \geq n; r_m^1 \leq bm) \leq ce^{-c'n}$$

onde c é uma nova constante. Usando o fato que r_t^1 é dominado por F_t , essa última desigualdade vale também para o tempo contínuo. Por outro lado estamos fazendo a suposição que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_t^1}{t} = a(\lambda) < 0$$

e então:

$$P(\exists u \geq u_0; r_u^1 \geq nR/2) \leq ce^{-c' \frac{nR}{4\lambda M}}$$

Finalmente, temos que:

$$P(N(t) \geq 1) \leq P(\tau^1 \geq t) + \frac{4}{nR}E(W_1^2) + ce^{-c' \frac{nR}{4\lambda M}}$$

É fácil ver que:

$$P(\tau^1 = \infty) = 0$$

Agora podemos fazer t tender para $+\infty$ e depois n e isso prova que $\eta(t)$ converge fracamente quando o tempo tende para $+\infty$, para a configuração sem nenhuma partícula. Ou seja, $\lambda \leq \lambda^i$.

Nesse ponto provamos o Lema 3 para $\lambda > \lambda^i$, mas o mesmo argumento desenvolvido no Lema 2 mostra que:

$$a(\lambda^i) \geq 0$$

e o Lema 3 está provado.

Agora podemos aplicar a mesma prova que no teorema 1 e obtemos:

Teorema 2: *Para todo $\lambda \geq \lambda^i$, o sistema de partículas interagindo com os vizinhos mais próximos, com alcance finito e visto da primeira partícula admite uma probabilidade invariante concentrada nas configurações infinitas.*

Liggett [17] fez a seguinte conjectura (Problema 10 cap7), se b for decrescente nos seus dois argumentos e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b(l, r) = b(l, \infty)$$

então

$$\lambda^i \leq \lambda^f$$

Pelos lemas 1 e 3, no caso de alcance finito temos que:

$$\lambda^i \geq \inf\{\lambda : a(\lambda) \geq 0\}$$

e

$$\lambda^f \geq \inf\{\lambda : a(\lambda) \geq 0\}$$

Talvez nesse caso seja possível mostrar que:

$$\lambda^i = \lambda^f$$

Uma possibilidade seria mostrar que valem as desigualdades inversas dos lemas 1 e 3. Essas desigualdades são conhecidas no caso do Processo de Contato mas as provas destes resultados usam fortemente a propriedade de aditividade que não vale em geral para sistemas de partículas interagindo com os vizinhos mais próximos.

Capítulo 2

Aproximações finitas da probabilidade invariante do contato visto da borda

1. Aproximações finitas

Para processos atrativos, não vistos da primeira partícula, Holley [14] mostrou que as probabilidades extremais podem ser obtidas como limites de probabilidades que têm o seu suporte contido no conjunto das configurações finitas, cf [17](cap3 teorema2.7), por exemplo. Na prova desse resultado é essencial que o processo considerado seja uma função monótona da configuração inicial.

Os sistemas de partículas sobre Z vistos da borda, mesmo com taxas atrativas, não são em geral monótonos e o resultado de Holley não se aplica a esse caso. Nesse capítulo mostraremos que no caso do processo de contato super-crítico visto da primeira partícula é possível encontrar uma tal aproximação. Mais precisamente, definimos um processo visto da borda, $\xi_{t,n}$ que segue as regras do contato mas com as condições suplementares seguintes.

Se restar só uma partícula então essa não pode desaparecer e se nascer uma $(n + 1)$ ésima partícula então a última partícula à esquerda morre de modo que o processo tem sempre entre uma e n partículas. Mostraremos que $\xi_{t,n}$ tem uma única medida invariante que chamamos μ_n . Mostraremos então que a sequência μ_n converge fracamente para uma medida de probabilidade $\tilde{\mu}$ que é exatamente a medida de probabilidade invariante do processo de contato visto da primeira partícula, cuja existência foi provada por Durrett [5] e a unicidade por Galves e Presutti [9]. Obtemos aqui uma nova prova da existência.

Podemos notar que as aproximações finitas de $\tilde{\mu}$ dão uma construção desta probabilidade muito mais explícita daquela do teorema 1 do capítulo 1 e justificam simulações para obter informações sobre $\tilde{\mu}$. Provamos também que a densidade de $\tilde{\mu}$, a uma distância x à esquerda da borda, decresce para a densidade da probabilidade invariante superior do processo de contato (não visto pela primeira partícula) quando x tende para $+\infty$. Damos finalmente um teorema ergódico pontual para o processo de contato visto da borda.

Usaremos a seguinte notação. Seja η uma configuração qualquer, definimos:

$$|\eta| = \sum_{x \in Z} \eta(x)$$

$$r(\eta) = \sup\{x \in Z : \eta(x) = 1\}$$

$$l(\eta) = \inf\{x \in Z : \eta(x) = 1\}$$

Definimos também:

$$X = \{\eta \in \{0, 1\}^Z : r(\eta) = 0\}$$

$$\tilde{X} = \{\eta \in X : r(\eta) = 0; |\eta| = \infty\}$$

Seja $*$ a configuração de X que só tem uma partícula no 0. Seja η tal que $r(\eta) < \infty$ então definimos:

$$S\eta(x) = \eta(x + r(\eta))$$

O processo de contato pode ser construído usando uma sequência de processos de Poisson independentes. A cada x de Z associamos três processos de Poisson de taxa respectivamente 1, λ , λ . O processo com taxa 1 indica os instantes em que a partícula eventualmente

presente em x desaparece. Os dois processos com taxa λ indicam os instantes em que uma partícula eventualmente presente em x cria uma nova partícula em $x + 1$ e $x - 1$ respectivamente. Uma nova partícula só pode aparecer se o sítio não estar ocupado.

Sejam uma configuração η e um instante $s \geq 0$, para $t \geq s$ notaremos $\xi_t^{(\eta,s)}$ a configuração no instante t do processo de contato que começa no instante s com a configuração η , usando as marcas dos processos de Poisson à partir do instante s .

Sabemos que existe um real λ_c tal que:

$$1 < \lambda_c \leq 2$$

e tal que os parâmetros críticos para os processos finitos e infinitos sejam iguais ao λ_c . Naquilo que segue estaremos sempre no caso:

$$\lambda > \lambda_c$$

Damos a seguir a construção da medida de probabilidade $\tilde{\mu}$. Lembramos que $\xi_{t,n}$ é um processo de "contato" visto da borda com menos de n partículas e que não pode desaparecer. Quando n tende para o infinito esse processo tende para o processo de contato visto da borda. Mostraremos agora que $\xi_{t,n}$ é um processo recorrente positivo. Basta mostrar que a cadeia imersa $(\xi_{k,n})_{k \geq 0}$ correspondente ao processo $\xi_{t,n}$ é recorrente positiva, já que a taxa de mudança de estado é uniformemente limitada. Mostramos agora que existe um real estritamente positivo $c(n)$, tal que:

$$\inf_{|\eta| \leq n} P(\exists k \leq n, \xi_{k,n}^\eta = *) \geq c(n)$$

Se η é uma configuração qualquer com m partículas ($m \leq n$), temos que:

$$P(\exists k \leq n, \xi_{k,n}^\eta = *) \geq g(m)$$

onde $g(m) = \prod_{k=2}^m \frac{k}{k+2\lambda+(k-1)2\lambda}$. Com efeito, a taxa de morte é 1, a taxa de nascimento externa é 2λ , e a taxa de nascimento entre duas partículas é sempre menor que 2λ . Se definirmos:

$$c(n) = \frac{1}{(1+2\lambda)^n}$$

teremos a desigualdade desejada. Essa permite mostrar que a espera média para a volta ao estado $*$ é finita para a cadeia imersa.

$\xi_{t,n}$ é então um processo recorrente positivo num espaço de estados enumerável. Esse processo tem uma única probabilidade invariante que notaremos por μ_n . A sequência de probabilidades μ_n está num espaço compacto (X é compacto) então existe uma sub-sequência que notaremos por μ_{n_k} que converge para alguma probabilidade sobre X que notaremos $\tilde{\mu}$. A probabilidade $\tilde{\mu}$ está construída.

Para qualquer configuração inicial η , definimos τ^η como o primeiro instante em que o processo de contato atinge a configuração vazia ou seja sem nenhuma partícula. Podemos enunciar agora:

Teorema 1:

Para qualquer configuração inicial η , temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(S\xi_t^\eta \in C; \tau^\eta = \infty) = P(\tau^\eta = \infty)\tilde{\mu}(C)$$

onde C é um cilindro de X .

A prova deste teorema está baseada na construção seguinte de uma versão particular do processo de contato que foi dada em [9]. Seja u um real estritamente positivo, η uma configuração infinita tal que $r(\eta) < \infty$. Notamos por $\hat{\xi}_t^{(\eta, ku)}$ a versão particular do processo de contato, definido para $t \geq ku$ e tal que:

$$\hat{\xi}_{ku}^{(\eta, ku)} = \eta$$

Para $n \geq k$ e $nu \leq t < (n+1)u$, definimos:

$$\hat{\xi}_t^{(\eta, ku)} = \xi_t^{(S\zeta, nu)} + r(\zeta)$$

onde $\zeta = \hat{\xi}_{nu}^{(\eta, ku)}$ e $\xi_t^{(S\zeta, nu)} + r(\zeta)$ é a configuração translada de $\xi_t^{(S\zeta, nu)}$ por $r(\zeta)$. Se $k = 0$, notaremos $\hat{\xi}_t^{(\eta, ku)}$ por $\hat{\xi}_t^\eta$. Estamos interessados pelo processo de contato visto da primeira partícula, que definimos por:

$$\tilde{\xi}_t^{(\eta, ku)} = S\hat{\xi}_t^{(\eta, ku)}$$

A vantagem desta construção sobre a construção usual é que para todas as configurações iniciais semi-infinitas η e η' , nos instantes nu as primeiras partículas de $\tilde{\xi}_{nu}^{(\eta,ku)}$ e $\tilde{\xi}_{nu}^{(\eta',ku)}$ estarão acopladas.

Por outro lado, definimos $\hat{\xi}_{t,n}^{(\eta,ku)}$. Esse processo tem a mesma evolução que $\hat{\xi}_t^{(\eta,ku)}$ com as restrições que se só resta uma partícula então ela não morre e que se nasce uma $(n+1)$ ésima então a partícula mais à esquerda desaparece. Definimos:

$$\xi_{t,n}^{(\eta,ku)} = S_{\xi_{t,n}^{(\eta,ku)}}$$

Podemos construir $\hat{\xi}_{t,n}^{(\eta,ku)}$ e $\hat{\xi}_t^{(\eta,ku)}$ usando os mesmos processos de Poisson. Uma consequência é que nos instantes nu ($n \geq k$), as primeiras partículas de $\xi_{t,n}^{(\eta,ku)}$ e $\tilde{\xi}_t^{(\eta,ku)}$ estarão acopladas.

Com essa versão do processo de contato e esse acoplamento, podemos mostrar que:

Lema 1:

$\sup_{\eta' \in \tilde{X}; |\eta| \leq n} P(\tilde{\xi}_t^{\eta'}(x) \neq \xi_{t,n}^{\eta}(x) \text{ para um } x \in C) \leq be^{-c\sqrt{t}} + c' \frac{(2\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$ onde b, c e c' são reais estritamente positivos.

Prova do Lema 1:

Definimos:

$$\tau^{(*,ku)} = \inf\{s > ku : |\tilde{\xi}_s^{(*,ku)}| = 0\}$$

$$K = \inf\{k \geq 0 : \tau^{(*,ku)} \geq (k+1)u\}$$

Observamos que o evento $\{K \leq k-1\}$ e o processo $\tilde{\xi}_t^{(*,k\sqrt{t})}$ são independentes. Naquilo que segue fixamos um instante t e definimos $u = \sqrt{t}$.

Seja C um cilindro de X cujo suporte se encontra entre 0 e m_C que é um inteiro negativo. Notaremos por C o cilindro e seu suporte. Temos que:

$$\sup_{\eta', \eta} P(\tilde{\xi}_t^{\eta'}(x) \neq \xi_{t,n}^{\eta}(x) \text{ para um } x \text{ de } C) \leq p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t, n)$$

onde

$$p_1(t) = P(K > \sqrt{t})$$

$$\begin{aligned}
p_2(t) &= \sum_{k < \sqrt{t}} P(K \geq k-1) P((k+1)\sqrt{t} < \tau^{(*,k\sqrt{t})} < \infty) \\
p_3(t) &= \sum_{k < \sqrt{t}} P(K \geq k-1) P(\tau^{(*,k\sqrt{t})} = \infty, l_t^{(*,k\sqrt{t})} > m_C) \\
p_4(t, n) &= \sum_{k < \sqrt{t}} P(K \geq k-1) P(\tau^{(*,k\sqrt{t})} = \infty, l_t^{(*,k\sqrt{t})} < m_C) \\
&\quad \tilde{\xi}_t^{\eta'}(x) \neq \xi_{t,n}^{\eta}(x) \text{ para um } x \text{ de } C)
\end{aligned}$$

onde

$$l_t^{(*,k\sqrt{t})} = \min\{x : \tilde{\xi}_t^{(*,k\sqrt{t})}(x) = 1\}$$

Daremos agora majorações para essas probabilidades. Para $p_1(t)$, usando o fato que K é uma variável geométrica de parâmetro $P(\tau^{(*,0)} \geq \sqrt{t})$, temos que:

$$p_1(t) \leq P(\tau^{(*,0)} < \sqrt{t})^{\sqrt{t}} < (1 - P(\tau^{(*,0)} = \infty))^{\sqrt{t}}$$

Como estamos no caso super-crítico temos que $P(\tau^{(*,0)} = \infty) > 0$.

Para $p_2(t)$ usamos um resultado de Durrett e Griffeath (cf [6]):

$$P(\sqrt{t} < \tau^{(*,k\sqrt{t})} < \infty) < be^{-c\sqrt{t}}$$

b e c sendo reais estritamente positivos. Naquilo que segue b e c serão reais estritamente positivos que poderão mudar de valor de uma linha para outra.

Para $p_3(t)$ precisaremos usar propriedades do processo de contato não visto da primeira partícula. Seja $\hat{\xi}_t^*$ esse processo com configuração inicial $*$. Notaremos por $\hat{r}_t^*$ e $\hat{l}_t^*$ as partículas mais à direita e mais à esquerda respectivamente, deste processo. Cada termo da soma de $p_3(t)$ é menor que:

$$(1) \quad P(\tau^{(*,k\sqrt{t})} = \infty, l_s^{(*,k\sqrt{t})} > m_C \text{ para um } s \geq t)$$

Substituindo $l_s^{(*,k\sqrt{t})}$ por $\hat{l}_{s-k\sqrt{t}}^* - \hat{r}_{s-k\sqrt{t}}^*$, fazendo uma translação de $k\sqrt{t}$ sobre o tempo, e usando que:

$$\{\hat{r}_s^* - \hat{l}_s^* < -m_C\} \text{ está incluído em } \{\hat{r}_s^* < -m_C\} \cup \{\hat{l}_s^* > m_C\}$$

temos que, (1) é menor que:

$$2P(|\hat{\xi}_t^*| \geq 1 \text{ para todo } t \geq 0; \hat{r}_s^* < -m_C \text{ para um } s \geq \sqrt{t})$$

Esse termo é menor que:

$$(2) \quad 2P(\hat{r}_s^1 < -m_C \text{ para um } s \geq \sqrt{t})$$

onde $\hat{r}_s^1 = r(\hat{\xi}_s^1)$ e 1 é a configuração com todos os sítios ocupados à esquerda da origem.

Por outro lado Durrett [5] mostrou que existe uma constante a tal que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{r}_s^1 / s = a > 0$$

e além disso

Lema 2: $P(\hat{r}_t^1 \leq (a - \delta)t) \leq be^{-ct}$ para qualquer δ estritamente positivo.

A partir deste resultado, em [9] está provado que:

Lema 3: $P(\inf_{s \geq t} \frac{\hat{r}_s^1}{s} \leq a - \delta) \leq be^{-ct}$

Este último resultado aplicado à (2) prova que $p_3(t) \leq be^{-c\sqrt{t}}$.

Para $p_4(t, n)$ observamos que $\tilde{\xi}_t^{(*, k\sqrt{t})}$ e $\xi_{t,n}^{(*, k\sqrt{t})}$ só podem ser diferentes se tivermos em algum instante s entre $k\sqrt{t}$ e t :

$$|\tilde{\xi}_s^{(*, k\sqrt{t})}| > n$$

Mas o processo de contato é dominado pelo processo com as mesmas taxas de nascimento e com taxas de mortes nulas. O número de partículas deste último processo no instante s segue uma distribuição de Poisson de parâmetro $2\lambda s$ que notaremos por $W(2\lambda s)$. Portanto:

$$P(\exists s \leq t, |\tilde{\xi}_s^{(*, k\sqrt{t})}| > n) \leq P(\exists s \leq t, W(2\lambda s) > n)$$

Esse último termo é menor que:

$$P(W(2\lambda t) > n) \leq \frac{(2\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Essa última desigualdade vem da fórmula de Taylor-Lagrange para a função exponencial entre os pontos 0 e $2\lambda t$. Temos então que:

$$p_4(t, n) < E(K) \frac{(2\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

O Lema 1 está provado.

Prova do Teorema 1:

Provamos primeiro o teorema para uma configuração inicial η' infinita. Usando que, para quaisquer eventos A e B :

$$|P(A) - P(B)| \leq P(AB^c \cup A^c B)$$

temos que:

$$(3) \quad |P(\tilde{\xi}_t^{\eta'} \in C) - \int P(\xi_{t,n}^\eta \in C) d\mu_n(\eta)| \leq \sup_\eta P(\tilde{\xi}_t^{\eta'}(x) \neq \xi_{t,n}^\eta(x) \text{ para um } x \in C)$$

Usamos o lema 1, (2) é menor que:

$$be^{-c\sqrt{t}} + c' \frac{(2\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Na desigualdade (3), substituímos n por n_k . A esquerda desta desigualdade a integral é igual a $\mu_{n_k}(C)$, já que μ_{n_k} é invariante para o processo ξ_{t,n_k} . Fazemos primeiro n_k tender para o infinito $\mu_{n_k}(C)$ tende para $\tilde{\mu}(C)$ e $c' \frac{(2\lambda t)^{n_k+1}}{(n_k+1)!}$ tende para 0. Depois fazemos t tender para o infinito $be^{-c\sqrt{t}}$ tende para 0. Isso prova o teorema 1 para as configurações infinitas já que se η' é uma configuração infinita então $P(\tau^{\eta'} = \infty) = 1$.

Provamos agora o teorema para as configurações finitas. Seja ζ uma configuração finita. Examinamos o seguinte termo:

$$(4) \quad |P(\tilde{\xi}_{t+s}^\zeta \in C; \tau^\zeta = \infty) - P(\tau^\zeta = \infty)\tilde{\mu}(C)|$$

Aplicando a desigualdade triangular, (4) é menor que:

$$p_5(t, s) + p_6(t, s) + p_7(t, s) + p_8(t, s)$$

onde

$$p_5(t, s) = |P(\tilde{\xi}_{t+s}^\zeta \in C; \tau^\zeta = \infty) - P(\tilde{\xi}_{t+s}^\zeta \in C; |\tilde{\xi}_t^\zeta| > N; \tau^\zeta = \infty)|$$

$$p_6(t, s) = |P(\tilde{\xi}_{t+s}^\zeta \in C; |\tilde{\xi}_t^\zeta| > N; \tau^\zeta = \infty) - P(\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C; |\tilde{\xi}_t^\zeta| > N; \tau^\zeta = \infty)|$$

onde 1 é a configuração com todos os sítios ocupados à esquerda da origem.

$$p_7(t, s) = |P(\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C; |\tilde{\xi}_t^\zeta| > N; \tau^\zeta = \infty) - P(\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C; \tau^\zeta > t)|$$

$$p_8(t, s) = |P(\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C; \tau^\zeta > t) - \tilde{\mu}(C)P(\tau^\zeta = \infty)|$$

Temos que:

$$p_5(t, s) \leq P(0 < |\tilde{\xi}_t^\zeta| \leq N)$$

$$p_6(t, s) \leq \sup_{A_N} P(\tilde{\xi}_{t+s}^{(\eta,t)}(x) \neq \tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)}(x) \text{ para um } x \in C)$$

onde $A_N = \{\eta : N < |\eta| < \infty\}$. Para dar uma majoração deste último termo, usamos a variável aleatória K como na primeira parte da prova. Temos então:

$$p_6(t, s) \leq p_1(s) + p_2(s) + p_3(s) + p(s, N)$$

onde p_1, p_2, p_3 já foram definidas e

$$p(s, N) = \sum_{k < \sqrt{s}} P(K \geq k - 1) P(\tau^{(*, k\sqrt{s})} = \infty, l_s^{(*, k\sqrt{s})} < m_C)$$

$$\tilde{\xi}_s^\eta(x) \neq \tilde{\xi}_s^1(x) \text{ para um } x \text{ de } C)$$

Mas, $\tilde{\xi}_s^\eta$ e $\tilde{\xi}_s^1$ só podem ser diferentes em C , se $\tilde{\xi}_s^\eta$ desaparecer antes do instante $k\sqrt{s}$. Temos então que:

$$p(s, N) \leq E(K)(1 - e^{-s})^N$$

Para $p_7(t, s)$ temos:

$$p_7(t, s) \leq P(0 < |\tilde{\xi}_t^\zeta| \leq N) + P(t < \tau^\zeta < \infty)$$

Para $p_8(t, s)$ escrevemos que:

$$\{\tau^\zeta > t\} \text{ e } \{\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C\}$$

são independentes e então:

$$p_8(t, s) = |P(\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C)P(\tau^\zeta > t) - \tilde{\mu}(C)P(\tau^\zeta = \infty)|$$

Finalmente temos que (4) é menor que:

$$2P(0 < |\tilde{\xi}_t^\zeta| < N) + P(t < \tau^\zeta < \infty) + p_1(s) + p_2(s) + p_3(s) + p(s, N) + p_8(t, s)$$

Fazemos primeiro N tender para o infinito, $p(s, N)$ tende para 0 e $P(0 < |\tilde{\xi}_t^\zeta| < N)$ tende para

$$P(0 < |\tilde{\xi}_t^\zeta| < \infty)$$

Fazemos agora s tender para o infinito

$$p_1(s), p_2(s), p_3(s)$$

tendem para 0 e em $p_8(t, s)$,

$$P(\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C)$$

tende para $\tilde{\mu}(C)$, já que podemos aplicar o teorema para as configurações infinitas. Finalmente fazemos t tender para o infinito, temos em $p_8(t, s)$ que $P(\tau^\zeta > t)$ tende para

$$P(\tau^\zeta = \infty)$$

e que

$$P(t < \tau^\zeta < \infty) \text{ e } P(0 < |\tilde{\xi}_t^\zeta| < \infty)$$

tendem para 0. Essa última convergência vem do fato que se o processo de contato não desaparece então o número de partículas tende para o infinito. Isso prova o teorema para as configurações finitas também.

Temos então:

Corolário 1: A sequência μ_n converge para $\tilde{\mu}$.

Prova: Observamos que a prova do teorema 1 vale para qualquer valor de aderência da sequência μ_n . Isso prova que essa sequência só tem um valor de aderência $\tilde{\mu}$, e como

estamos num compacto (o espaço das probabilidades sobre X é compacto) a sequência inteira μ_n converge para $\tilde{\mu}$.

Se o processo de contato visto pela primeira partícula tivesse a propriedade de Feller então o teorema 1 implicaria a invariância de $\tilde{\mu}$. Como esse processo só é Feller sobre as configurações infinitas, para mostrar a invariância de $\tilde{\mu}$, temos que provar antes, que:

Corolário 2: *A medida de probabilidade $\tilde{\mu}$ se concentra nas configurações infinitas.*

Prova:

Mostramos que $\tilde{\mu}$ tem massa zero nas configurações finitas. Lembramos que a é tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{r}_t^1 / t = a > 0$$

Examinamos:

$$(5) \quad \tilde{\mu}(\eta : \eta(x) = 0 \text{ para } x < -a\sqrt{t}/2)$$

Esse termo é menor que:

$$\tilde{\mu}(\eta : \eta(x) = 0 \text{ para } -3a\sqrt{t}/4 < x < -a\sqrt{t}/2)$$

Usando o teorema 1, esse termo é igual a:

$$(6) \quad P(\tilde{\xi}_t^1(x) = 0 \text{ para } -3a\sqrt{t}/4 < x < -a\sqrt{t}/2) + e(t)$$

onde $e(t)$ é uma função que tende para zero quando t tende para $+\infty$. Observamos que:

$$C_t = \{x : -3a\sqrt{t}/4 < x < -a\sqrt{t}/2\}$$

é um cilindro que depende do tempo. Mesmo assim podemos aplicar o teorema 1, com efeito o lema 3 pode ser aplicado nesse caso e isso implica que $p_3(t)$ tende para zero aqui também. O resto da prova do teorema 1 é idêntica nesse caso.

Usando o processo de contato não visto da borda, temos que (6) é igual a:

$$P(\hat{\xi}_t^1(x) = 0 \text{ para } x \in C_t + \hat{r}_t^1) + e(t)$$

Usando que $\hat{\xi}_t^Z$ e $\hat{\xi}_t^1$ são iguais à esquerda de $\hat{r}_t^1$, (6) é igual a:

$$P(\hat{\xi}_t^Z(x) = 0, x \in C_t + \hat{r}_t^1)$$

Esse termo é menor que:

$$(7) \quad P(|\hat{r}_t^1| > 2\lambda t) + \sum_{z=-2\lambda t}^{z=2\lambda t} P(\hat{\xi}_t^Z(x) = 0, x \in C_t + z; \hat{r}_t^1 = z)$$

Cada termo da soma de (7) é menor que:

$$P(\hat{\xi}_t^Z(x) = 0, x \in C_t)$$

e usando a auto-dualidade do processo de contato, isso é igual a:

$$P(\hat{\xi}_t^{C_t}(x) = 0, x \in Z)$$

Esse termo é menor que (Teorema 3.29 cap. 6 de Liggett [17]):

$$e^{-c\sqrt{t}}$$

Com efeito, $\frac{1}{4}a\sqrt{t}$ é o comprimento de C_t . Como sempre c é uma constante estritamente positiva. A soma em (7) é então menor que:

$$4\lambda t e^{-c\sqrt{t}}$$

Por outro lado, para avaliar o primeiro termo em (7), fazemos uma comparação com o processo de contato sem mortes. Podemos construir os dois processos de tal maneira que o processo sem mortes contenha sempre o processo de contato. Como a posição da borda do processo sem mortes segue uma distribuição de Poisson, temos que

$$P(\hat{r}_t^1 > 2\lambda t) \leq P(\mathcal{P}(\lambda t) > 2\lambda t)$$

onde $\mathcal{P}(m)$ indica uma variável de Poisson de parâmetro m . É fácil ver que:

$$P(\mathcal{P}(\lambda t) > 2\lambda t) < e^{-ct}$$

Para $P(\hat{r}_t^1 < -2\lambda t)$, aplicamos o Lema 2 e temos o mesmo tipo de majoração. Temos então que (7) é menor que:

$$4\lambda t b e^{-c\sqrt{t}}$$

Isso prova que (5) tende para 0, quando t tende para ∞ . Mas (5) tende também para $\tilde{\mu}(\eta : \eta \text{ é finita})$. O corolário 2 está provado.

Corolário 3: *A medida de probabilidade $\tilde{\mu}$ é invariante para o processo de contato visto da borda.*

Prova:

Uma vez que provamos que $\tilde{\mu}$ se concentra sobre $\tilde{X}$, podemos usar o mesmo argumento que no final da prova do Teorema 1 do capítulo 1.

2. A densidade assintótica de $\tilde{\mu}$

Seja μ a medida invariante extremal superior do processo de contato (não visto pela primeira partícula). Essa probabilidade é invariante por translação, definimos a densidade desta medida por:

$$\rho = \mu\{\eta : \eta(0) = 1\}$$

Nesta seção daremos uma relação entre ρ e a densidade de $\tilde{\mu}$. Como no resto deste capítulo, só estamos considerando o caso super-crítico.

Teorema 2: *Para todo $\epsilon > 0$, existem b e c estritamente positivos tais que:*

$$\tilde{\mu}(\eta : \eta \in C_n) \leq b e^{-cn}$$

onde: $C_n = \{\eta : |\frac{1}{n} \sum_0^n \eta(-x) - \rho| > \epsilon\}$.

Prova:

Na prova do Corolário 2, mostramos que:

$$(8) \quad \tilde{\mu}(C_{g(n)}) \leq P(\tilde{\xi}_n^1 \in C_{g(n)}) + b e^{-c\sqrt{n}}$$

onde $g(n) = a\sqrt{n}/2$ e b, c são constantes estritamente positivas que poderão mudar de valor de uma linha para outra. Exatamente como na prova do Corolário 2 condicionamos sobre os diferentes valores possíveis da posição da borda e passamos ao processo de contato não visto da borda. Temos que (8) é menor que:

$$(9) \quad P(|\hat{r}_n^1| > 2\lambda n) + 4\lambda n P(\hat{\xi}_n^Z \in C_{g(n)}) + be^{-c\sqrt{n}}$$

Já mostramos que:

$$P(|\hat{r}_n^1| > 2\lambda n) \leq be^{-cn}$$

Usamos agora uma estimativa de Liggett [17] (Teorema 3.23 cap.6):

$$(10) \quad |P(\hat{\xi}_n^Z \in C_{g(n)}) - \mu(C_{g(n)})| \leq b\sqrt{n}e^{-cn}$$

or outro lado Lebowitz e Schonmann [16] e Durrett e Schonmann [7] provaram resultados de grandes desvios respectivamente superior e inferior em relação a ρ . Esses resultados implicam que:

$$(11) \quad \mu(C_{g(n)}) \leq be^{-c\sqrt{n}}$$

Usando (10) e (11) temos que, (9) é menor que:

$$be^{-cn} + 4\lambda n(b'\sqrt{n}e^{-c'n} + b''e^{-c''\sqrt{n}}) + b'''e^{-c'''\sqrt{n}}$$

onde $b, c, b', c', b'', c'', b''', c'''$ são constantes estritamente positivas. Então para n suficientemente grande temos que:

$$\tilde{\mu}(C_{g(n)}) \leq be^{-c\sqrt{n}}$$

Provamos o teorema para $C_{g(n)}$, mas a mesma prova pode ser feita para C_n , só que o tempo n deve ser substituído por $4n^2/a^2$.

O Teorema 2 implica imediatamente, aplicando o Lema de Borel-Cantelli, que:

Corolário 4:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n \eta(-x) = \rho$$

$\tilde{\mu}$ quase certamente.

Usando um resultado de Gray [11], temos que:

Corolário 5: $\tilde{\mu}(\eta : \eta(-x) = 1)$ é uma sequência decrescente e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(\eta : \eta(-x) = 1) = \rho$$

Prova:

Uma consequência do Teorema 4 de Gray [11] é que:

$$P(\xi_t^1(-x) = 1)$$

é uma sequência decrescente em x . Usando o Teorema 1, isso implica que: $\tilde{\mu}(\eta : \eta(-x) = 1)$ é decrescente e portanto converge para algum real l .

Definimos a variável aleatória $X_n = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n \eta(-x)$. Temos que:

$$E_{\tilde{\mu}}(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n \tilde{\mu}(\eta : \eta(-x) = 1)$$

e portanto, já que temos uma média de Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\tilde{\mu}}(X_n) = l$$

Por outro lado, usando o corolário 4 e o teorema de convergência dominada, já que

$$|X_n| \leq 1$$

temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\tilde{\mu}}(X_n) = \rho$$

e então $l = \rho$. O corolário 5 está provado.

3. Um Teorema Ergódico pontual para o processo visto da borda

Teorema 3: *Seja f uma função contínua e limitada, η uma configuração qualquer,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\tilde{\xi}_s^\eta) ds = \int f d\tilde{\mu}$$

quase certamente sobre $\{\tau^\eta = \infty\}$.

Prova:

Seja η' uma configuração infinita, C um cilindro, mostraremos que:

$$(12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{\xi}_s^\eta(x) = \tilde{\xi}_s^{\eta'}(x) \text{ para todos } x \in C, s \geq t/\{\tau^\eta = \infty\}) = 1$$

Seja A o evento:

$$A = \{\exists x \in C, \exists s \geq t \text{ tais que } \tilde{\xi}_s^\eta(x) \neq \tilde{\xi}_s^{\eta'}(x)\}$$

Escrevemos agora que:

$$(13) \quad P(A; \tau^\eta = \infty) \leq P(A; |\tilde{\xi}_{\sqrt{t}}^\eta| \geq n) + P(0 < |\tilde{\xi}_{\sqrt{t}}^\eta| < n)$$

Agora majoramos o primeiro termo do lado direito de (13). Para isso, usamos a variável K como na prova do lema 1, só que o instante inicial é aqui $\sqrt{t}$. Obtemos assim majorações $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ como na prova do lema 1. $\tilde{\xi}_s^\eta$ e $\tilde{\xi}_s^{\eta'}$ podem ser diferentes no cilindro C , dado que antes do instante t uma primeira partícula sobreviveu para sempre e deu início a um processo que cobriu C , só se todas as partículas de $\tilde{\xi}_s^\eta$ desaparecerem antes do instante $k\sqrt{t}$. Temos então que (13) é menor que:

$$be^{-c\sqrt{t}} + (1 - e^{-t})^n + P(0 < |\tilde{\xi}_{\sqrt{t}}^\eta| < n)$$

Agora fazemos sucessivamente n tender para o infinito e t tender para o infinito, isso prova (12). Podemos agora adaptar ao nosso caso a prova do teorema ergódico pontual que Griffeath [12] dá para o processo de contato (não visto da borda).

Como $\tilde{\mu}$ só se concentra nas configurações infinitas, temos que:

$$\begin{aligned} & \int P(\tilde{\xi}_s^\eta(x) = \tilde{\xi}_s^{\eta'}(x) \text{ para todos } x \in C, s \geq t / \{\tau^\eta = \infty\}) d\tilde{\mu}(\eta') \\ &= P(\tilde{\xi}_s^\eta(x) = \tilde{\xi}_s^{\tilde{\mu}}(x) \text{ para todos } x \in C, s \geq t / \{\tau^\eta = \infty\}) \end{aligned}$$

Usamos agora (12), e pelo teorema de convergência dominada:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{\xi}_s^\eta(x) = \tilde{\xi}_s^{\tilde{\mu}}(x) \text{ para todos } x \in C, s \geq t / \{\tau^\eta = \infty\}) = 1$$

Ou seja, se definirmos:

$$\sigma = \inf\{t > 0 : \tilde{\xi}_s^\eta(x) = \tilde{\xi}_s^{\tilde{\mu}}(x) \text{ para todos } x \in C, s \geq t\}$$

então σ é quase certamente finito, sobre $\{\tau^\eta = \infty\}$.

Por outro lado, a medida $\tilde{\mu}$ é invariante e extremal, como consequência do teorema 1. Essas duas propriedades implicam a ergodicidade de $\tilde{\mu}$. Podemos então aplicar o teorema ergódico de Birkhoff com $f = 1_C$:

$$(14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\tilde{\xi}_s^{\tilde{\mu}}) ds = \int f d\tilde{\mu}$$

Temos finalmente que:

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(\tilde{\xi}_s^\eta) ds = \frac{1}{t} \int_0^{\min(\sigma, t)} f(\tilde{\xi}_s^\eta) ds + \frac{1}{t} \int_{\min(\sigma, t)}^t f(\tilde{\xi}_s^{\tilde{\mu}}) ds$$

Usando que σ é finito sobre $\{\tau^\eta = \infty\}$ e (14), temos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\tilde{\xi}_s^\eta) ds = \int f d\tilde{\mu}$$

e o teorema 3 está provado para $f = 1_C$ mas essas funções geram o espaço das funções contínuas e limitadas.

Capítulo 3

Flutuações Brownianas da borda no caso reversível e crítico

1. Taxas reversíveis

Nesse capítulo consideraremos uma família de sistemas de partículas interagindo com os vizinhos mais próximos com as seguintes taxas de nascimento:

$$(R) \quad b_{\lambda}(l, r) = \lambda \frac{b(l)b(r)}{b(l+r)}$$

$$(1) \quad b_{\lambda}(l, \infty) = \lambda b(l)$$

Onde λ é um parâmetro real e b é uma densidade de probabilidade estritamente positiva e tal que:

$$(2) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{b(l)}{b(l+1)} = 1$$

A taxa de morte de uma partícula vale 1. Com essas hipóteses Liggett [17] mostrou (Cor.4.30 cap.7) que os valores críticos, para os processos finitos e infinitos são respectivamente:

$$\lambda^f = \lambda^i = 1$$

O processo finito, com parâmetro igual a 1, morre com probabilidade 1. O processo infinito com parâmetro igual a 1, não desaparece se e sómente se:

$$(3) \quad \sum_{l \geq 1} lb(l) < \infty$$

Para $\lambda > 1$, Spitzer [19] mostrou que (R) é uma condição necessária e suficiente de existência de uma medida de probabilidade reversível para o processo com infinitas partículas à esquerda e à direita da origem. Para $\lambda = 1$, (R) e (3) são as condições necessárias e suficientes para ter uma medida de probabilidade reversível. Para todo $\lambda \geq 1$ a probabilidade reversível é uma probabilidade de renovação estacionária.

2. O Processo Congelado

Para provar a convergência da borda para um movimento Browniano fazemos uma comparação com o movimento da borda do processo congelado.

Descrevemos agora o processo congelado: ele é tal que à esquerda da primeira partícula nenhuma partícula possa nascer ou morrer. A primeira partícula pode morrer com taxa 1, e podem nascer partículas à direita da primeira com as taxas $\lambda b(l, \infty)$.

A construção deste processo, que notamos por $\eta'(t)$, pode ser feita tomando o limite de uma sequência $\eta'^n(t)$ como na seção 2 do capítulo 1.

Definimos a sequência $\eta'^n(t)$ com uma certa configuração inicial η de $\tilde{X}$; $\eta'^n(0)$ coincide com η à direita de $-n$. À esquerda de $-n$ todos os sítios de $\eta'^n(0)$ estão ocupados. Podem nascer partículas à direita da primeira e a única partícula que pode morrer é a primeira, a menos que a primeira partícula seja aquela que estava em $-n$ no instante inicial. Nenhuma das partículas que estavam à esquerda de $-n$ no instante inicial podem morrer.

Definimos agora $\eta'(t)$ o processo congelado, com a configuração inicial η , como:

$$\eta'(t)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta'^n(t)(x)$$

para todo t , para todo x em Z . Isso define um processo Markoviano e Feller sobre $\tilde{X}$.

3. Reversibilidade da medida de renovação no caso crítico

Seja L o operador infinitesimal de $\eta(t)$, o processo visto da borda cujas taxas de nascimento verificam (R) e (1) e com configuração inicial η em $\tilde{X}$. Temos que:

$$L = L_0 + L'$$

onde L_0 é o operador infinitesimal de um processo com interações com os vizinhos mais próximos e que tem uma partícula na origem que não pode morrer; L' é o operador do processo congelado $\eta'(t)$. Seja f uma função que depende só de um número finito de sítios, então:

$$L_0 f(\eta) = \sum_{x: \eta(x)=0} \lambda b(l_x(\eta), r_x(\eta)) (f(\eta_x) - f(\eta)) + \sum_{x: \eta(x)=1} 1 (f(\eta_x) - f(\eta))$$

onde $\eta_x(y) = \eta(y)$ para $x \neq y$ e $\eta_x(x) = 1 - \eta(x)$.

Para L' :

$$L' f(\eta) = \sum_{r \geq 1} \lambda b(r, \infty) (f(\tau_r \eta) - f(\eta)) + \sum_{l \geq 1} 1_{\{X_1=l\}} (f(\tau_{-l} \eta) - f(\eta))$$

onde $\tau_r \eta$ é a configuração que obtemos, quando nasce uma partícula à distância r da primeira, depois de fazer uma translação para ter a nova primeira partícula na origem. De maneira simétrica $\tau_{-l} \eta$ é a configuração obtida, quando a primeira partícula morre e que a distância X_1 entre as duas primeiras partículas é l , depois de fazer uma translação para ter a nova primeira partícula na origem.

Spitzer [19] mostrou que para $\lambda > 1$, o processo com infinitas partículas à esquerda e à direita da origem admite uma medida de probabilidade reversível que é a probabilidade de renovação de densidade $b_\gamma(l) = \gamma^l b(l)$ onde γ é determinado pela equação:

$$\sum_{l \geq 1} \lambda \gamma^l b(l) = 1$$

Para $\lambda = 1$, o processo, com infinitas partículas à direita e à esquerda da origem, admite uma probabilidade reversível se e só se a condição (3) é satisfeita. A probabilidade reversível é então a probabilidade de renovação de densidade b .

Seja m a probabilidade de renovação de densidade b condicionada a ter uma partícula na origem e nenhuma à direita da origem.

A partir de agora e até o fim deste capítulo assumimos:

$$\lambda = 1 \text{ e (3)}$$

Teorema 1: *A probabilidade m é reversível para o processo crítico visto da borda.*

Prova: Temos que mostrar que, para todas as funções contínuas e limitadas f e g :

$$\langle f, Lg \rangle_m = \langle Lf, g \rangle_m$$

onde $\langle, \rangle_m$ designa o produto interno usual em $L^2(m)$. Por causa do resultado para o processo com infinitas partículas à direita e à esquerda da origem, é claro que vale:

$$\langle f, L_0 g \rangle_m = \langle L_0 f, g \rangle_m$$

Sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ inteiros positivos, definimos A como o conjunto das configurações que têm uma partícula em $0, -x_1, -x_2, \dots, -x_n$ e nenhuma outra partícula entre 0 e $-x_n$. Por definição de m , temos:

$$m(A) = b(x_1)b(x_2 - x_1) \dots b(x_n - x_{n-1})$$

Seja B o conjunto das configurações que têm uma partícula em $0 > -y_1 > -y_2 > \dots > -y_p$ e nenhuma outra entre 0 e $-y_p$. Definimos:

$$f = 1_A \text{ e } g = 1_B$$

Suponhamos que $p < n$. O produto $f(\tau_r \eta)g(\eta)$ não é 0, se e só se:

$$(4) \quad r = x_1, y_1 = x_2 - x_1, y_2 = x_3 - x_1 \dots y_p = x_{p+1} - x_1$$

Se tivermos esta relação entre A e B então, $f(\tau_{x_1}\eta)g(\eta) = 1_C$ onde C é o conjunto de configurações com uma partícula em:

$$0, -x_2 + x_1, -x_3 + x_1, \dots -x_n + x_1$$

e sem nenhuma outra partícula entre 0 e $-x_n + x_1$.

$$\langle b(x_1, \infty)f(\tau_{x_1}\eta), g(\eta) \rangle_m = b(x_1)m(C) = m(A)$$

Por outro lado, $f(\eta)g(\tau_{-x_1}\eta)$ não é 0, se e só se valer a relação (4) entre A e B . Neste caso, $f(\eta)g(\tau_{-x_1}\eta) = 1_A$ e então:

$$\langle 1f(\eta), g(\tau_{-x_1}\eta) \rangle_m = m(A)$$

Como os outros produtos $f(\tau_r\eta)g(\eta)$ e $f(\eta)g(\tau_{-l}\eta)$ valem 0, para r e l diferentes de x_1 , isso prova que vale:

$$\langle f, L'g \rangle_m = \langle L'f, g \rangle_m$$

Mas as funções do tipo 1_A geram, por combinações lineares e limites, o espaço das funções contínuas e limitadas. Portanto provamos que m é reversível para os dois processos $\eta(t)$ e $\eta'(t)$.

No caso super-crítico ($\lambda > 1$) é fácil ver que m é invariante, mas não reversível, para $\eta'(t)$ e não é invariante para o processo correspondente ao L_0 . Por outro lado a medida de renovação de densidade $\gamma^l b(l)$, γ sendo uma função de λ , é reversível para o processo correspondente ao L_0 mas não é invariante para $\eta'(t)$. Essas observações não foram suficientes para encontrar explicitamente uma medida de probabilidade invariante para o processo visto da borda $\eta(t)$, no caso super-crítico.

4. Ergodicidade da medida de renovação no caso crítico

Seja $(\mathcal{P})$ a seguinte propriedade:

$(\mathcal{P})$ Se f é tal que $\langle f, Lf \rangle_m = 0$ então f é constante.

Temos então o seguinte critério para provar a ergodicidade, conhecido oralmente e cuja prova nos foi comunicada por S. Goldstein:

Teorema 2: *A medida de probabilidade invariante m é ergódica se e só se o processo verifica a propriedade (ρ) .*

Prova:

Suponhamos que m é ergódica e seja f tal que:

$$\langle f, Lf \rangle_m = 0$$

Integrando essa igualdade, temos que:

$$\langle f(\eta(0)), f(\eta(t)) \rangle_m = \langle f(\eta(0)), f(\eta(0)) \rangle_m$$

e isso implica que:

$$\langle f(\eta(0)), f(\eta(t)) - f(\eta(0)) \rangle_m = 0$$

Por outro lado, a invariância de m implica que:

$$\langle f(\eta(t)) - f(\eta(0)), f(\eta(t)) - f(\eta(0)) \rangle_m = 2 \langle f(\eta(0)), f(\eta(t)) - f(\eta(0)) \rangle_m$$

Temos então que $f(\eta(t)) = f(\eta(0))$ m quase certamente, f é invariante em relação às translações no tempo do processo e como m é ergódica, f é constante.

Mostramos agora a outra implicação. Seja A um evento invariante em relação às translações no tempo. Seja $\mathcal{F}(t)$ a σ -álgebra gerada pelo processo até o instante t . Definimos f como:

$$f(\eta, t) = E_m(1_A / \mathcal{F}(t) = \eta)$$

e então

$$f(\eta(t), t) = E_m(1_A / \mathcal{F}(t))$$

Observamos agora que por causa da invariância de A e m em relação ao tempo, temos que, para todos os instantes s e t :

$$f(\eta, t) = f(\eta, s)$$

Por outro lado:

$$E_m(f(\eta(t), t)/\mathcal{F}(s)) = f(\eta(s), s) \text{ para } s \leq t$$

Mas essa última igualdade implica, quando t tende para s :

$$Lf = 0$$

A propriedade $\mathcal{P}$ implica que f é constante. Então:

$$f(\eta(t), t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\eta(t), t)$$

Mas como esse último limite é 1_A , essa função indicadora é m quase certamente constante.

Isso prova que m é ergódica e o teorema 2 está provado. Podemos provar agora:

Corolário 1: *A probabilidade m é ergódica.*

Prova:

Mostramos que o processo verifica a propriedade $\mathcal{P}$. Suponhamos que uma função f seja tal que:

$$\langle f, Lf \rangle_m = 0$$

Temos que $L = L_0 + L'$, e usando a invariância de m em relação à L_0 e L' , é fácil ver que:

$$\langle f, L_0 f \rangle_m \leq 0 \text{ e } \langle f, L' f \rangle_m \leq 0$$

Isso implica que:

$$\langle f, L_0 f \rangle_m = \langle f, L' f \rangle_m = 0$$

Como

$$\langle f, L_0 f \rangle_m = \frac{-1}{2} \sum_{x < 0} \langle c(x, \eta)(f(\eta_x) - f(\eta)), f(\eta_x) - f(\eta) \rangle_m$$

isso implica que para todo $x < 0$, temos:

$$f(\eta_x) = f(\eta) \text{ } m \text{ quase certamente}$$

Temos então, para todo n , que $f(\eta)$ não pode depender das distâncias entre as n primeiras partículas. Mas como m é uma medida de renovação, as distâncias são independentes entre si. Pela lei 0, 1 de Kolmogorov temos que $f(\eta)$ é constante. O corolário 1 está provado.

5. Convergência para um Movimento Browniano no caso crítico

Mostraremos que a borda tem flutuações Brownianas no caso em que valem

$$(R), (1), (2) \text{ e } \lambda = 1$$

e além disso:

$$(5) \quad \sum_{l \geq 1} l^2 b(l) < \infty$$

De Masi, Ferrari, Goldstein e Wick [3] provaram um Princípio de Invariância que implica o seguinte resultado para a borda de um processo semi-infinito:

Teorema 3: *Seja $\eta(t)$ um processo Markoviano que admite uma probabilidade m reversível e ergódica. Seja $X(t)$ a posição da primeira partícula, a probabilidade inicial sendo m . Seja $\mathcal{F}(t)$ a σ -álgebra gerada por $\{\eta(s); s \leq t\}$. Se para todo t , $X(t)$ está em $L^2(m)$, se*

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E_m(X(t+h)/\mathcal{F}(t))$$

existe como limite em $L^1(m)$ e se v pertence ao $L^2(m)$ então

$$aX(a^{-2}t)$$

converge em distribuição, quando a tende para 0, para um movimento Browniano com um coeficiente de difusão D :

$$D = C + 2 \langle v, L^{-1}v \rangle_m$$

onde $C = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E_m(X^2(h))$ e $\langle, \rangle_m$ designa o produto interno usual sobre $L^2(m)$; L^{-1} é o inverso do gerador infinitesimal do processo.

Verificamos que podemos aplicar o teorema 3 para $X(t)$ e $Y(t)$, respectivamente a posição da borda de $\eta(t)$ e $\eta'(t)$. Já mostramos que a probabilidade de renovação de densidade b é reversível e ergódica. Para provar que $X(t)$ está no espaço $L^2(m)$ precisamos da hipótese (5). Notaremos:

$$M = \sum_{l \geq 1} lb(l)$$

Seja $F(t)$ a posição da primeira partícula de um processo onde ocorrem nascimentos com as taxas $b(l, r)$ e não ocorrem mortes. Definimos f_t como o número de nascimentos à direita da primeira partícula, f_t é um processo de Poisson de parâmetro 1. Temos que:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{f_t} W_i$$

onde $W_0 = 0$ e os W_i , para $i \geq 1$, são variáveis independentes e identicamente distribuídas com a densidade de probabilidade b , já que $b(l, \infty) = b(l)$.

Por outro lado seja $G(t)$ a posição da primeira partícula de um processo em que as taxas de morte são 1 e onde não nascem partículas. Definimos g_t como o número de partículas que morreram, até o instante t , à direita de $G(t)$. A variável g_t é geométrica de parâmetro e^{-t} . Se m é a probabilidade inicial, temos que:

$$G(t) = - \sum_{i=0}^{g_t} Z_i$$

onde $Z_0 = 0$ e os Z_i , para $i \geq 1$, são independentes e identicamente distribuídas com a densidade de probabilidade b . É claro que:

$$G(t) \leq X(t) \leq F(t)$$

Usando que:

$$\text{Var}(F(t)) = E(f_t) \text{Var}(W_1) + E(W_1)^2 \text{Var}(f_t)$$

e a mesma fórmula para $G(t)$, a condição (5) implica que $X(t)$ está em $L^2(m)$. Observamos que a mesma prova mostra que $Y(t)$, a posição da primeira partícula para o processo congelado, também pertence à $L^2(m)$.

Verificamos agora as hipóteses para v a velocidade do processo. Seja X_1 a distância separando a primeira partícula da segunda, podemos escrever que:

$$E(X(h)/\mathcal{F}(0)) = \sum_{l \geq 1} l b(l, \infty) h e^{-h} - \sum_{l \geq 1} l 1_{\{X_1=l\}} h e^{-h} + E(X(h) 1_A / \mathcal{F}(0))$$

A primeira soma corresponde a um nascimento (um só) durante o intervalo de tempo $[0; h]$ à direita da primeira partícula; a segunda soma a uma morte (uma só) da primeira partícula

durante $[0;h]$. A é o evento correspondente a duas mudanças (morte ou nascimento) ou mais para a primeira partícula.

Para mostrar que

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E(X(h)/\mathcal{F}(0)) = \sum_{l \geq 1} lb(l) - \sum_{l \geq 1} l1_{\{X_1=l\}}$$

essa convergência ocorrendo em $L^1(m)$, basta mostrar que:

$$(6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E|E(X(h)1_A/\mathcal{F}(0))| = 0$$

Usamos aqui também a comparação com os processos $F(h)$ e $G(h)$. Definimos n_h o número de mortes da primeira partícula até o instante h . Temos então:

$$A = \{f_h + n_h \geq 2\}$$

Podemos calcular, usando a independência entre f_h e n_h :

$$E(F(h)1_A) \leq E(W_1)(P(f_h = 1)P(n_h \geq 1) + E(f_h 1_{\{f_h \geq 2\}}))$$

Usando que f_h e n_h são processos de Poisson de parâmetro 1, é fácil ver que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E(F(h)1_A) = 0$$

Por outro lado temos que: $n_h \leq g_h$ e então:

$$E(-G(h)1_A) \leq E(-G(h)1_{\{g_h + f_h \geq 2\}})$$

e usando a independência entre g_h e f_h , esse termo é menor que:

$$E(Z_1)(P(f_h = 1)P(g_h \geq 1) + E(f_h 1_{\{f_h \geq 2\}}))$$

Temos então que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E(-G(h)1_A) = 0$$

e como

$$E|E(X(h)1_A/\mathcal{F}(0))| \leq E|X(h)|1_A$$

é fácil ver que (6) ocorre.

Falta mostrar que v está em $L^2(m)$. Usando que a distribuição de X_1 é b , e que essa distribuição tem um segundo momento finito, temos que:

$$\langle v, v \rangle_m = \sum_{l \geq 1} l^2 b(l) - M^2$$

Isso prova que v está em $L^2(m)$. Observamos que a conta precedente também é válida para v' a velocidade da primeira partícula do processo congelado.

Calculamos agora o coeficiente C , definido no teorema 3. Usando que a taxa de nascimento de uma partícula à distância l da primeira é $b(l, \infty) = b(l)$ e que a distância entre duas partículas tem a distribuição b , temos que:

$$E_m(X^2(h)) = \sum_{l \geq 1} l^2 e^{-h} h b(l) + \sum_{l \geq 1} l^2 e^{-h} h b(l) + E_m(X^2(h)1_A)$$

Aqui também as somas correspondem a um nascimento e a uma morte durante o intervalo de tempo $[0; h]$ e A é o evento correspondente a dois acontecimentos ou mais. As duas somas divididas por h tendem para $2 \sum_{l \geq 1} l^2 b(l)$ quando h tende para 0. Avaliamos agora o terceiro termo. Usamos de novo a comparação com $F(t)$ e $G(t)$ e com o mesmo tipo de conta que já fizemos temos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E(F^2(h)1_A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E(G^2(h)1_A) = 0$$

Isso mostra que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E_m(X^2(h)) = 2 \sum_{l \geq 1} l^2 b(l)$$

É fácil ver que o coeficiente C' para $Y(t)$ também é $2 \sum_{l \geq 1} l^2 b(l)$. Verificamos todas as hipóteses do teorema 1 para $X(t)$ e $Y(t)$, isso mostra que esses dois processos convergem, quando convenientemente reescalados, para um Movimento Browniano.

Usando a invariância de m temos que L é um operador negativo, ou seja:

$$\langle v, Lv \rangle_m \leq 0$$

Do Teorema 3, deduzimos então que:

Corolário 2: $D \leq 2 \sum_{l \geq 1} l^2 b(l)$

Observamos que neste ponto não temos um limite inferior para o coeficiente de difusão, ou seja, o Movimento Browniano poderia ser degenerado, mostraremos agora que não é o caso.

6. O coeficiente de difusão é estritamente positivo

Para mostrar que o coeficiente de difusão D do processo $X(t)$ é positivo usaremos uma estratégia também sugerida nos trabalhos de De Masi et al [3]. A idéia é mostrar que o coeficiente de difusão D' do processo $Y(t)$ é positivo e depois que D é maior ou igual a D' . Encontraremos explicitamente o valor de D' (Cor.3) e isso dará um limite inferior para D (Cor.4).

Para mostrar que D' é positivo, comparamos o movimento de $Y(t)$ com o movimento de uma partícula que segue um passeio aleatório $P(t)$. Lembramos primeiro que:

$$M = \sum_{l \geq 1} l b(l)$$

No instante inicial $Y(0) = 0$ e $P(0) = 0$. Cada vez que teremos um nascimento à direita da primeira partícula para o processo congelado $\eta'(t)$, teremos um salto à direita, à distância M , para $P(t)$. Cada vez que teremos uma morte da primeira partícula para $\eta'(t)$, teremos um salto à esquerda, à distância M para $P(t)$. Essas regras implicam, já que estamos no caso crítico, que depois de um tempo exponencial de parâmetro 2, $P(t)$ salta à direita com probabilidade $1/2$ ou à esquerda com probabilidade $1/2$, à distância M . Mostramos agora que se a probabilidade inicial é m para $\eta'(t)$, então:

Teorema 4: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} E|P(t) - Y(t)| = 0$.

Prova:

Seja Z_{-i} a distância aleatória, no instante 0, entre a i -ésima e a $(i+1)$ -ésima partícula, a partir da primeira partícula que está no 0. A probabilidade m sendo uma probabilidade de renovação de densidade b , os Z_i são independentes e têm a mesma distribuição b . Usando o fato que todas as partículas à esquerda da primeira estão congeladas e que só podem

nascer partículas à direita da primeira, temos a seguinte descrição do processo congelado. Quando a primeira partícula morre, desaparece a distância Z_i correspondente. Quando nasce uma partícula à direita da primeira, cria-se uma nova distância que chamamos de W_i . Podemos notar que, como $b(k, \infty) = b(k)$, os W_i também têm distribuição b . Além disso os W_i e Z_i são independentes.

Definimos agora $Q(t) = \frac{1}{M}P(t)$ e $m(t) = \min_{s \leq t} Q(s)$. Podemos descrever $Y(t)$ só com $Q(t)$, $m(t)$ e os Z_i e W_i . Por exemplo se no instante t , $m(t) = -2$ e $Q(t) = 1$ então

$$Y(t) = -Z_{-1} - Z_{-2} + W_{-2} + W_{-1} + W_1$$

Se no instante t , $m(t) = -3$ e $Q(t) = -2$ então

$$Y(t) = -Z_{-1} - Z_{-2} - Z_{-3} + W_{-3}$$

De uma forma mais geral se $P(t) < 0$ então:

$$Y(t) = - \sum_{i=Q(t)}^{-1} Z_i + \sum_{i=m(t)}^{Q(t)-1} W_i - Z_i$$

se $P(t) \geq 0$ então:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{Q(t)} W_i + \sum_{i=m(t)}^{-1} W_i - Z_i$$

Quando uma das somas precedentes não pode ser definida, ela vale 0.

Fixamos $a > 0$ que poderá ser arbitrariamente pequeno. Temos que:

$$E(|Y(t) - P(t)|1_{P(t)>0}) \leq E(|P(t) - \sum_{i=1}^{Q(t)} W_i|1_{P(t)>0}) + E(|\sum_{i=m(t)}^{-1} W_i - Z_i|)$$

Examinamos primeiro:

$$E(|P(t) - \sum_{i=1}^{Q(t)} W_i|1_{P(t)>0})$$

Como $P(t) = Q(t)M$, o termo precedente é igual à:

$$(7) \quad E(|\sum_{i=1}^{Q(t)} M - W_i|1_{Q(t) < a\sqrt{t}}) + E(|\sum_{i=1}^{Q(t)} M - W_i|1_{Q(t) > a\sqrt{t}})$$

O primeiro termo de (7) é menor que:

$$E\left(\sum_{i=1}^{Q(t)} |M - W_i| 1_{Q(t) < a\sqrt{t}}\right) \leq E\left(\sum_{i=1}^{a\sqrt{t}} |M - W_i|\right)$$

Os W_i tendo todos a mesma distribuição temos que:

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{t}} E\left(\sum_{i=1}^{Q(t)} |M - W_i| 1_{Q(t) < a\sqrt{t}}\right) \leq a E|M - W_1|$$

Para o termo:

$$(9) \quad E\left|\sum_{i=1}^{Q(t)} M - W_i\right| 1_{Q(t) > a\sqrt{t}}$$

usando a independência entre $Q(t)$ e os W_i , temos que (9) é igual à:

$$\sum_{l=a\sqrt{t}}^{\infty} P(Q(t) = l) E\left|\sum_{i=1}^l M - W_i\right|$$

Os W_i são independentes, identicamente distribuídos e têm variância finita, portanto,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (W_i - M) = 0$$

no espaço $L^2(m)$ e então também no $L^1(m)$. Para todo c arbitrariamente pequeno, podemos encontrar um T tal que: se $l > a\sqrt{T}$ então $\frac{1}{l} E\left|\sum_{i=1}^l M - W_i\right| < c$. Temos então para $t > T$,

$$E\left|\sum_{i=1}^{Q(t)} M - W_i\right| 1_{Q(t) > a\sqrt{t}} < c \sum_{l=a\sqrt{t}}^{\infty} P(Q(t) = l)l$$

Por outro lado temos, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, que:

$$E\left(\frac{Q(t)}{\sqrt{t}} 1_{Q(t) > a\sqrt{t}}\right) \leq E\left(\frac{Q^2(t)}{t}\right)^{1/2} P(Q(t) > a\sqrt{t})^{1/2}$$

Mas $E(Q^2(t)) = 2t$, para todo t . Portanto, temos que, para t suficientemente grande:

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt{t}} E\left|\sum_{i=1}^{Q(t)} M - W_i\right| 1_{Q(t) > a\sqrt{t}} \leq \sqrt{2}c$$

Com (8) e (10) podemos concluir que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} E \left| \sum_{i=1}^{Q(t)} P(t) - W_i \right| 1_{P(t) > 0} = 0$$

Avaliamos agora

$$E \left| \sum_{i=m(t)}^{-1} W_i - Z_i \right| 1_{P(t) > 0}$$

Notamos $M(t) = -m(t)$ e por simetria, temos que o termo precedente é igual à:

$$(11) \quad E \left| \sum_{i=1}^{M(t)} W_i - Z_i \right| 1_{M(t) < a\sqrt{t}} + E \left| \sum_{i=1}^{M(t)} W_i - Z_i \right| 1_{M(t) > a\sqrt{t}}$$

O primeiro termo de (11) é menor que:

$$E \left(\sum_{i=1}^{M(t)} |W_i - Z_i| 1_{M(t) < a\sqrt{t}} \right) \leq E \left(\sum_{i=1}^{a\sqrt{t}} |W_i - Z_i| \right)$$

Mas os $W_i - Z_i$ têm mesma distribuição e portanto

$$(12) \quad E \left| \sum_{i=1}^{M(t)} W_i - Z_i \right| 1_{M(t) < a\sqrt{t}} \leq a\sqrt{t} E |W_1 - Z_1|$$

Para o segundo termo de (11), usando a independência entre os $W_i - Z_i$ e $M(t)$, temos que:

$$E \left| \sum_{i=1}^{M(t)} W_i - Z_i \right| 1_{M(t) > a\sqrt{t}} = \sum_{l=a\sqrt{t}}^{\infty} P(M(t) = l) E \left| \sum_{i=1}^l W_i - Z_i \right|$$

Como, por hipótese, a variância de $W_i - Z_i$ é finita então $\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l W_i - Z_i$ converge para 0 em $L^2(m)$ quando l tende para ∞ . Para todo $d > 0$ podemos encontrar um T tal que: se $l > a\sqrt{T}$ então $\frac{1}{l} E \left| \sum_{i=1}^l W_i - Z_i \right| < d$.

Temos então, para todo $t > T$:

$$(13) \quad E \left| \sum_{i=1}^{M(t)} W_i - Z_i \right| 1_{M(t) > a\sqrt{t}} \leq d E(M(t) 1_{M(t) > a\sqrt{t}})$$

Mostramos agora que $E(M(t)1_{M(t) > a\sqrt{t}})$ é limitada. Observamos que para toda variável aleatória X , temos que:

$$(14) \quad \sum_{l \geq 0} P(|X| \geq l) \leq E|X| \leq 1 + \sum_{l \geq 0} P(|X| \geq l)$$

Usando (14), o termo à direita de (13) é menor que:

$$(15) \quad d(1 + \sum_{l=a\sqrt{t}}^{\infty} P(|M(t)| \geq l))$$

Aplicamos agora um lema de Skorokhod (Lema 3.21 do Breiman [1]):

$$(16) \quad P(|M(t)| \geq l) \leq \frac{1}{1 - c(t, l)} P(|Q(t)| \geq l/2)$$

onde

$$c(t, l) = \sup_{s \leq t} P(|Q(s)| \geq l)$$

Para avaliar $c(t, l)$, fazemos as seguintes observações: $Q(s)$ é igual à diferença entre o número de saltos para frente e o número de saltos para trás. Esses dois números de saltos são processos de Poisson de parâmetro 1. Então $Q(s)$ é menor que uma variável de Poisson de parâmetro $2s$ que notamos $\mathcal{P}(2s)$. Temos que:

$$P(|Q(s)| \geq l) \leq P(\mathcal{P}(2s) \geq l)$$

Por outro lado a função que à s associa $e^{-s}s^k$ é crescente para $k \geq s$. Usando o fato que $l > a\sqrt{t}$, temos para $s < \frac{a}{2}\sqrt{t}$:

$$P(|Q(s)| \geq l) \leq P(\mathcal{P}(a\sqrt{t}) \geq l) \leq P(\mathcal{P}(a\sqrt{t}) \geq a\sqrt{t})$$

Para $s > \frac{a}{2}\sqrt{t}$, usamos o teorema Limite-Central:

$$P(|Q(s)| \geq l) = P(|Z(s)| \geq l) + e(t)$$

Onde $Z(s)$ designa uma variável normal $N(0, s)$ e $e(t)$ uma função que tende para 0 quando t tende para $+\infty$. Usamos agora o fato que se $s \leq t$, temos que:

$$P(|Z(s)| \geq l) \leq P(|Z(t)| \geq l) \leq P(|Z(t)| > a\sqrt{t})$$

Temos então que:

$$c(t, l) = \max(P(\mathcal{P}(a\sqrt{t}) \geq a\sqrt{t}); P(|Z(t)| \geq a\sqrt{t}))$$

Claramente o máximo destes dois números é: $c(t, l) = c(t) = P(|Z(t)| \geq a\sqrt{t})$. Podemos agora usar (16) para dar uma majoração de (15):

$$(17) \quad \frac{d}{1-c(t)} \left(1 + \sum_{l > a\sqrt{t}}^{\infty} P(|Q(t)| \geq l/2)\right)$$

Usando a desigualdade (14); (17) é menor que:

$$\frac{d}{1-c(t)} (1 + E(2|Q(t)|1_{2Q(t) > a\sqrt{t}}))$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, o termo precedente é menor que:

$$\frac{d}{1-c(t)} (1 + 2E(Q^2(t))^{1/2} P(2Q(t) > a\sqrt{t})^{1/2})$$

Temos então que, para t suficientemente grande:

$$(18) \quad \frac{1}{\sqrt{t}} E \left| \sum_{i=1}^{M(t)} W_i - Z_i \right| 1_{M(t) > a\sqrt{t}} \leq \frac{d}{1-c(t)} (1 + 2\sqrt{2})$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} 1 - c(t) = P(|Z(1)| < a)$ e como podemos escolher a e d independentemente um do outro, usando (12) e (18) temos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} E \left| \sum_{i=m(t)}^{-1} W_i - Z_i \right| = 0$$

De (8) e (10), (12) e (18), deduzimos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} E |Y(t) - P(t)| 1_{P(t) > 0} = 0$$

Para o termo correspondente à $P(t) < 0$; $E|Y(t) - P(t)| 1_{P(t) < 0}$ é menor que:

$$E|P(t) - \sum_{i=Q(t)}^{-1} Z_i| 1_{P(t) < 0} + E \left| \sum_{i=m(t)}^{Q(t)-1} W_i - Z_i \right| 1_{P(t) < 0}$$

O termo à esquerda se comporta como:

$$E|P(t) - \sum_{i=1}^{Q(t)} Z_i|1_{P(t)>0}$$

O termo à direita é menor que:

$$E|\sum_{i=m(t)}^{-1} W_i - Z_i|1_{P(t)<0} + E|\sum_{i=Q(t)-1}^{-1} W_i - Z_i|1_{P(t)<0}$$

Isso mostra que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} E|Y(t) - P(t)|1_{P(t)<0} = 0$$

O Teorema 4 está provado.

Corolário 3: $D' = 2(\sum_{l \geq 1} lb(l))^2$.

Prova:

Pelo teorema Limite-Central $\frac{P(t)}{\sqrt{t}}$ tende em distribuição, quando t tende para ∞ , para uma variável normal de esperança 0 e variância $2M^2$. Uma consequência do Teorema 4 é que $\frac{Y(t)}{\sqrt{t}} - \frac{P(t)}{\sqrt{t}}$ converge em probabilidade para 0. Então (Teorema de Slutsky) $\frac{Y(t)}{\sqrt{t}}$ também converge em distribuição para uma variável normal $N(0, 2M^2)$. O Corolário 3 está provado.

Corolário 4: $D \geq 2(\sum_{l \geq 1} lb(l))^2$.

Prova:

Pelo Teorema 1, temos que:

$$D = C + 2 \langle v, L^{-1}v \rangle_m$$

$$D' = C' + 2 \langle v', L'^{-1}v' \rangle_m$$

Mas nesse caso temos: $C = C'$ e $v = v'$. Usando a invariância de m , temos que L, L_0, L' são três operadores negativos e como

$$L = L_0 + L'$$

então:

$$(19) \quad \langle v, Lv \rangle_m \text{ é menor que } \langle v, L'v \rangle_m$$

Por outro lado, m é reversível para os dois processos, $\eta(t)$ e $\eta'(t)$, e então L e L' são dois operadores autoadjuntos em $L^2(m)$. Uma consequência de (19) para operadores autoadjuntos (Faris [8]) é que:

$$\langle v, L^{-1}v \rangle_m \text{ é maior que } \langle v, L'^{-1}v \rangle_m$$

O Corolário 4 está provado.

Consideramos o processo $\zeta(t)$, não visto da borda, cujas taxas verificam,

$$(R), (1), (2), (5)$$

com $\lambda = 1$ e cuja distribuição inicial é m . Acabamos de provar que $X(t)$, a posição da borda deste processo, converge para um Movimento Browniano. Sejam a um real positivo e $A(t)$ o seguinte evento:

$$A(t) = \{X(t) < -a\sqrt{t}\}$$

Seja d um inteiro fixado, temos que:

$$P\left(\sum_{x=-d}^d \zeta(t)(x) = 0\right) \geq P\left(\sum_{x=-d}^d \zeta(t)(x) = 0/A(t)\right)P(A(t))$$

Temos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\sum_{x=-d}^d \zeta(t)(x) = 0/A(t)\right) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t)) = P(Z(D) \leq -a)$$

onde $Z(D)$ é uma variável normal $N(0, D)$. Fazendo agora a tender para 0, temos que:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\left(\sum_{x=-d}^d \zeta(t)(x) = 0\right) \geq \frac{1}{2}$$

Essa desigualdade mostra que $\zeta(t)$ tem um comportamento muito diferente do processo de contato supercrítico, por exemplo. Com efeito, a lei deste último processo converge

para uma probabilidade que se concentra nas configurações infinitas quando a distribuição inicial se concentra nas configurações infinitas. A desigualdade precedente mostra que se a lei de $\zeta(t)$ convergir então a probabilidade limite deve ter pelo menos massa $1/2$ na configuração vazia, a probabilidade inicial sendo m que tem massa zero nas configurações finitas. Esse comportamento nós parece ser uma consequência direta do fato que $\zeta(t)$ está no ponto crítico.

A nossa conjectura que não conseguimos provar até o momento é que a lei de $\zeta(t)$ converge e que a lei limite é:

$$\frac{1}{2}\delta_{\emptyset} + \frac{1}{2}m$$

Bibliografia.

- [1] BREIMAN (1968): Probability *Addisson Wesley Publishing company*
- [2] DE MASI, FERRARI (1985): Self diffusion in one dimensional lattice gases in the presence of an external field
Journal of Statistical Physics 38
- [3] DE MASI, FERRARI, GOLDSTEIN, Wick (1985): An invariance principle for reversible Markov processes. Application to diffusion in the percolation regime
Contemporary Math. Durrett ed. 41
- [4] DE MASI, FERRARI, GOLDSTEIN, WICK (1987): An invariance principle for reversible Markov processes. Application to random motion in random enviroment.
preprint
- [5] DURRETT (1984): Oriented Percolation in two dimensions *Ann Prob* 12 999-1040
- [6] DURRETT, GRIFFEATH (1983): Supercritical contact processes on $\mathbb{Z}$.
Ann Prob 11 1-15
- [7] DURRETT, SCHONMANN (1988): Large deviations for the contact process and two dimensional percolation.
Prob. Th. and Rel. Fields 77 583-603
- [8] FARIS (1975): Self adjoint operators *Lecture Notes in Math.* 433
- [9] GALVES, PRESUTTI (1987): Edge Fluctuations for the one dimensional supercritical contact process
Ann Prob 15 1131-1145
- [10] GALVES, PRESUTTI (1987): Travelling wave structure of the one dimensional contact process
Stochastic Processes and applic. 25 153-163
- [11] GRAY (1986): Duality for general attractive spin systems with applications in one dimension.
Ann Prob 14 371-396

- [12] GRIFFEATH (1979): Pointwise ergodicity of the basic contact process
Ann. Prob. **7** 139-142
- [13] HARRIS (1974): Contact interaction on a lattice *Ann. Prob.* **2** 969-988
- [14] HOLLEY (1972): An Ergodic theorem for interacting particle systems with attractive interactions
Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **24** 325-334
- [15] KIPNIS, VARADHAN (1986): Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusion
Com. Math. Phys. **104** 1-19
- [16] LEBOWITZ, SCHONMANN (1987): On the occurrence of rare events for stochastic spin systems.
Journal of Stat. Phys. **48** 727-751
- [17] LIGGETT (1985): Interacting Particles Systems *Springer*
- [18] LIGGETT (1983): Attractive nearest particle systems
Ann. of prob. **11**
- [19] SPITZER (1977): Stochastic time evolution of one dimensional infinite particle systems
Bull. Amer. Math. soc. **83** 880-890