ANÁLISE ESPECTRAL DE SÉRIES TEMPORAIS
COM AMPLITUDES MODULADAS

Clélia Maria de Castro Toloí

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin

São Paulo, dezembro de 1987

A minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Queremos agradecer a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, em particular:

- . ao Professor Doutor Pedro Alberto Morettin, orientador e amigo, pela paciência e dedicação com que transmitiu seus conhecimentos;
- . aos Professores Doutores Kaizô I. Beltrão, Carlos E. Harle, Zara I. Abud e Abraham L. Sicsû, pela colaboração e pelas críticas apresentadas;
- . a Nazira Gait, pela amizade e incentivo constante;
- . a Renê Sanda, pela elaboração de programas de computador;
- . a Izilda Maria Fischer e Lourdes Vaz da Silva, pelo paciente trabalho de datilografia.

SUMMARY

Let $\{X(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ be a non-observed strictly stationary process and $\{A(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ be a sequence independent of $X(n)$. The observed process

$$Y(n) = A(n)X(n), \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

is called an amplitude modulated version of $X(n)$ and $A(n)$ the amplitude modulated function.

This work deals with the estimation of the spectral density function, $f_x(\lambda)$, of the process of interest, $X(n)$, using observations of the modulated process $Y(n)$. We obtain estimators of $f_x(\lambda)$ for three types of modulating functions (deterministic, random independent and random correlated). We analyse, also, the properties and the asymptotic behavior of the proposed estimators.

In a final chapter we consider a simulated AR(2) process, two real series (river flow and ozone concentration) and several modulating sequences to illustrate the estimators considered in the work.

RESUMO

Seja $\{X(n), n = 0, \pm 1, \dots\}$ um processo não observável, estritamente estacionário e $\{A(n), n = 0, \pm 1, \dots\}$ uma seqüência independente de $X(n)$. O processo observável

$$Y(n) = A(n)X(n), n = 0, \pm 1, \dots$$

é denominado uma versão de amplitude modulada de $X(n)$ e $A(n)$ a fun_ção moduladora de amplitude.

Este trabalho se preocupa com a estimação da função densidade espectral, $f_X(\lambda)$, do processo de interesse, $X(n)$, utilizando observações do processo modulado $Y(n)$. Obtemos estimadores de $f_X(\lambda)$, para três tipos de funções moduladoras (determinística, aleatória independente e aleatória correlacionada). Analisamos, também, as propriedades e o comportamento assintótico dos estimadores propostos.

Finalmente, com o objetivo de ilustrar os estimadores considerados neste trabalho, utilizamos simulações de um processo AR(2) e duas séries reais (vazão de um rio e concentração de ozônio).

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - PRELIMINARES E SUPOSIÇÕES	1
1.1 - Algumas definições	1
1.2 - O processo modulado	15
1.3 - Suposições	18
1.4 - Resultado útil	19
1.5 - Objetivos do trabalho	20
 CAPÍTULO 2 - CUMULANTES DAS TRANSFORMADAS DE FOURIER	 21
 CAPÍTULO 3 - TEOREMAS LIMITES CENTRAIS PARA AS TRANSFORMADAS FINITAS DE FOURIER	 25
 CAPÍTULO 4 - ESTIMADORES DO ESPECTRO: PERIODOGRAMA	 35
4.1 - Estimador no caso A	35
4.2 - Estimador no caso B	45
4.3 - Estimador no caso C	54
 CAPÍTULO 5 - ESTIMADORES SUAVIZADOS DO ESPECTRO	 63
5.1 - Estimadores no caso A	63
5.2 - Estimadores no caso B	72
5.3 - Estimadores no caso C	76
5.4 - Construção de intervalos de confiança	84

CAPÍTULO 6 - ILUSTRAÇÕES	89
6.1 - Introdução	89
6.2 - Resultados	93
REFERÊNCIAS	139
APÊNDICE A	143
APÊNDICE B	185

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES E SUPOSIÇÕES

Veremos, neste capítulo, algumas definições e suposições que serão úteis no desenvolvimento do nosso trabalho.

1.1 - Algumas Definições

Definição 1: Um processo estocástico $X = \{X(t, w), t \in T, w \in \Omega\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias definidas sobre um espaço de probabilidades (Ω, F, P) e indexadas pelos elementos de um conjunto de parâmetros T .

Se $T = Z$ ou Z_+ temos um processo estocástico com parâmetro discreto, também denominado seqüência aleatória; se $T = R, R_+$ ou $[a, b] \in R$, temos um processo estocástico com parâmetro contínuo.

Na realidade, um processo estocástico é uma função de duas variáveis, onde $t \in T$ e $w \in \Omega$. Para cada $t \in T$, a função $X(t, \cdot)$ é mensurável relativamente a F . Por outro lado, fixando-se $w \in \Omega$, obtemos uma função $X(\cdot, w): T \rightarrow R$, que é chamada trajetória, realização ou função amostral do processo.

Definição 2: Dado um processo estocástico $\{X(t, w), w \in \Omega, t \in Z\}$ podemos definir suas distribuições finito-dimensionais por

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X(t_1, w) \leq x_1, \dots, X(t_n, w) \leq x_n], \quad (1.1)$$

$$n = 1, 2, \dots, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}.$$

Definição 3: As funções média e covariância de um processo são dadas por

$$E[X(t, w)] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x; t) = \mu(t)$$

$$\text{Cov}[X(t_1, w), X(t_2, w)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \mu(t_1)][x_2 - \mu(t_2)] dF_{t_1, t_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

$$= E[X(t_1, w) - \mu(t_1)][X(t_2, w) - \mu(t_2)]$$

$$= \gamma(t_1, t_2).$$

No caso em que $t_1 = t_2$, temos a variância do processo,

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t, w)] &= \int [x - \mu(t)]^2 dF(x, t) \\ &= E[X(t, w)]^2 - \mu^2(t). \end{aligned}$$

Para facilidade de notação, representaremos, daqui em diante, $X(t, w)$ por $X(t)$, isto é, omitiremos o segundo argumento da variável.

Definição 4: Um processo qualquer $\{X(t), t \in T\}$ é estritamente estacionário se as funções distribuições $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$, definidas por (1.1), são tais que

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n) \text{ para quais}$$

quer $t_1, \dots, t_n, h \in T$.

(i.e. a família de distribuições finito dimensionais é invariante sob uma translação comum em t).

Definição 5: Um processo $\{X(t), t \in T\}$, tal que $E(|X(t)|^2) < \infty, \forall t$, é estacionário de 2ª ordem, ou estacionário em sentido amplo se

$$\mu(t) = \mu, \forall t \in T$$

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 - t_2), \forall t_1, t_2 \in T$$

Nota: Um processo estritamente estacionário, com 2º momento finito, é estacionário de 2ª ordem.

Definição 6: Suponha que $\{X(t), t \in T\}$ seja estacionário. Então o espectro de 2ª ordem do processo é dado por

$$f(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \gamma(u) e^{-i\lambda u}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad (1.2)$$

$$\text{se } \sum_u |\gamma(u)| < \infty$$

$$\text{ou } f(\lambda) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(u) e^{-i\lambda u} du, \quad -\infty < \lambda < \infty \quad (1.3)$$

$$\text{se } \int |\gamma(u)| du < \infty,$$

para $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ou $T = \mathbb{R}$, respectivamente.

Definição 7: (a) Dizemos que a variável aleatória ξ é o limite em média quadrática de uma seqüência de v.a. $\xi_1, \dots, \xi_n$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi - \xi_n|^2 = 0$$

i.e., se para $\forall \epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon)$ tal que $E|\xi - \xi_n|^2 < \epsilon$ se $n > N$.

Tal limite é denotado por

$$\text{l.i.m } \xi_n = \xi \quad \text{ou} \quad \xi_n \xrightarrow{\text{m.q.}} \xi.$$

(b) Dizemos que a variável aleatória ξ é o limite quase certo de uma seqüência de v.a. $\xi_1, \dots, \xi_n$ se $\forall \epsilon > 0$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| \leq \epsilon \text{ para todo } n \geq m\} = 1 \quad (\text{ou } P\{w: \xi_n(w) \rightarrow \xi(w)\} = 1)$$

Notação: $\xi_n \xrightarrow{\text{q.c.}} \xi$.

Definição 8: Dizemos que um processo estacionário $\{X(t), t \in T\}$ é ergódico em relação à média se

$$\left[\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} X(t) dt \xrightarrow{m.q.} E[X(t)] \left[\text{ou } \frac{1}{N+1} \sum_{t=0}^N X(t) \xrightarrow{m.q.} E[X(t)] \right. \right. \quad (1.4)$$

se T for discreto

$$\left. \right]$$

e ergódico em relação ao segundo momento se

$$\left[\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau-u} X(t+u)X(t) dt \xrightarrow{m.q.} E[X(t+u)X(t)] \left[\text{ou } \frac{1}{N+1-u} \sum_{t=0}^{N-u} X(t)X(t+u) \right. \right. \quad (1.5)$$

$\xrightarrow{m.q.} E[X(t)X(t+u)]$ se T for discreto

$$\left. \right].$$

Observação: (1.4) e (1.5) significam, que se tivermos uma seqüência aleatória,

$$EX(t) \approx \frac{1}{N+1} \sum_{t=0}^N X^{(1)}(t),$$

$$EX(t)X(t+\tau) \approx \frac{1}{N+1} \sum_{t=0}^{N-\tau} X^{(1)}(t+\tau)X^{(1)}(t)$$

onde $X^{(1)}(t)$ é uma realização da seqüência estacionária (um conjunto de valores observados da seqüência) e N é suficientemente grande).

Do mesmo modo, se tivermos um processo aleatório, então

$$EX(t) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X^{(1)}(k\Delta),$$

$$EX(t)X(t+\tau) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X^{(1)}(k\Delta+\tau) X^{(1)}(k\Delta),$$

onde Δ é um intervalo de tempo pequeno, N é tal que $N\Delta=T$ seja suficientemente grande e $X^{(1)}(t)$ é um conjunto de valores observados do processo.

Definição 9: Uma sequência $X(n)$, $n=1,2,\dots$ é assintoticamente estacionária se e somente se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n)$$

e

(1.6)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-\ell} X(n)X(n+\ell), \quad \ell \geq 0$$

existem quase certamente.

Observações:

- (a) A definição acima é apresentada por Dunsmuir & Robinson (1981a) embora tenha sido introduzida, com uma conotação diferente, por Parzen (1962).

- (b) Toda seqüência que satisfaz (1.6) possui uma análise harmônica generalizada (Koopmans, 1974).
- (c) A definição é adequada tanto para seqüências aleatórias como determinísticas. Por exemplo, uma seqüência estritamente estacionária e ergódica satisfaz (1.6), ver Hannan (1970). Para o caso de seqüências determinísticas, temos o exemplo de uma seqüência periódica de zeros e uns.
- (d) No caso de uma seqüência aleatória, se os valores da expressão (1.6) forem iguais a $E[X(n)]$ e $E[X(n)X(n+l)]$, respectivamente, então, a definição assegura que eles são estimadores consistentes da média e da covariância da referida seqüência.
- (e) Parzen (1962), encontra condições para que uma série, com momentos de 4ª ordem finitos, satisfaça a definição, bem como apresenta alguns exemplos de séries temporais que satisfaçam (1.6).
- (f) Dunsmuir & Robinson (1981 a) estudam condições sobre $A(n)$ e $X(n)$ para que o processo modulado (ver seção 1.2), $Y(n)=A(n)X(n)$ seja assintoticamente estacionário.

Definição 10: (a) A transformada finita de Fourier dos valores $X(0), \dots, X(T-1)$ do processo estacionário $\{X(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ é dada por

$$d_x^{(T)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{T-1} X(n)e^{-i\lambda n}, \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (1.7)$$

No caso em que $T = 2n+1$, n inteiro, podemos escrever

$$d_x^{(T)}(\lambda) = \exp(-i\lambda n) \sum_{u=-n}^n X(u+n) \exp(-i\lambda u).$$

(b) A transformada discreta de Fourier dos valores $X(0), \dots, X(T-1)$ do processo $\{X(n), n = 0, \pm 1, \dots\}$, é dada por

$$d_x^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \quad s = 0, \dots, T-1.$$

Propriedades: (i) $d_x^{(T)}(\lambda + 2\pi) = d_x^{(T)}(\lambda)$

(ii) $\overline{d_x^{(T)}(\lambda)} = d_x^{(T)}(-\lambda)$, se $X(t)$ é real

(iii) $d_{\alpha X + \beta Y}^{(T)}(\lambda) = \alpha d_X^{(T)}(\lambda) + \beta d_Y^{(T)}(\lambda)$, α e β escalares, X e Y processos estacionários.

Definição 11: (a) Seja $(X_1, \dots, X_k)$ uma variável aleatória k -dimensional e suponha $E|X_j|^k < \infty$, $j=1, \dots, k$. O cumulante conjunto de ordem k é dado por

$$\text{Cum}(X_1, \dots, X_k) = \sum_v (-1)^{p-1} (p-1)! \prod_{j \in v_1} (E\pi X_j) \dots \prod_{j \in v_p} (E\pi X_j) \quad (1.8)$$

onde a soma é sobre todas as partições $v = (v_1, \dots, v_p)$ dos inteiros $\{1, \dots, k\}$.

- (b) Seja $\{X(t), t=0, \pm 1, \dots\}$ uma série temporal satisfazendo $E|X(t)|^k < \infty$, então

$$C_X(t_1, t_2, \dots, t_k) = \text{Cum}(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k))$$

é denominada função cumulante conjunta de ordem k da série $X(t)$.

Resultado: O $\text{Cum}(X_1, \dots, X_k)$ é dado pelo coeficiente de $(i)^k t_1 \dots t_k$ na série de expansão de Taylor de $\log E(e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_k X_k)})$.

Propriedades: (i) $\text{Cum} X_j = EX_j$, $j = 1, \dots, k$.

(ii) $\text{Cum}(X_j, \bar{X}_j) = \text{Var} X_j$, $\text{Cum}(X_j, \bar{X}_r) = \text{Cov}(X_j, X_r)$, $j, r = 1, \dots, k$.

(iii) Se $X(t)$ é um processo estritamente estacionário

$$C_X(t_1, \dots, t_k) = C_X(t_1+t, \dots, t_k+t), \quad t, t_1, \dots, t_k = 0, \pm 1, \dots$$

Neste caso, é comum a utilização da notação assimétrica,

$$C_X(t+u_1, \dots, t+u_{k-1}, t) = C_X(u_1, \dots, u_{k-1}).$$

(iv) $\text{Cum}(X_1+c, X_2, \dots, X_k) = \text{Cum}(X_1, X_2, \dots, X_k)$, c constante.

(v) $\text{Cum}(a_1 X_1, \dots, a_k X_k) = a_1 a_2 \dots a_k \text{Cum}(X_1, \dots, X_k)$, $a_1, \dots, a_k$ constantes reais ou imaginárias.

(vi) Se algum subconjunto dos $(X_1, \dots, X_k)$ é independente dos demais, então $\text{Cum}(X_1, \dots, X_k) = 0$.

Definição 12: Suponha $\{X(t), t=0, \pm 1, \dots\}$ estritamente estacionário e que $\sum_{u_1, \dots, u_{k-1}=-\infty}^{\infty} |C_X(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$. Então o cumulante espectral de ordem k é dado por

$$f_X(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) = (2\pi)^{-k+1} \sum_{u_1, \dots, u_{k-1}=-\infty}^{\infty} C_X(u_1, \dots, u_{k-1}) \exp \left[-i \sum_{j=1}^{k-1} u_j \lambda_j \right], \quad (1.9)$$

$$-\infty < \lambda_j < \infty, \quad k = 2, 3, \dots$$

Definição 13: (a) Dizemos que a distribuição de um vetor aleatório r-dimensional $\underline{X}$ é normal multivariada de dimensão r, com média $\underline{\mu}_X$ e matriz de covariâncias $\underline{\Sigma}_{XX}$, se sua função densidade é

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2} |\underline{\Sigma}_{XX}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\underline{X} - \underline{\mu}_X)' \underline{\Sigma}_{XX}^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}_X) \right].$$

Notação: $\underline{X} \sim N_r(\underline{\mu}_X, \underline{\Sigma}_{XX})$.

Podemos dizer, também, que $\underline{X} \sim N_r(\underline{\mu}_X, \underline{\Sigma}_{XX})$ se

$$E(\underline{X}) = \underline{\mu}_X$$

$$E \left[(\underline{X} - \underline{\mu}_X) (\underline{X} - \underline{\mu}_X)' \right] = \underline{\Sigma}_{XX}$$

e $\underline{X}$ tem a forma

$$\tilde{X}^{rx1} = \tilde{A}^{rx1} + \tilde{B}^{rxt} \tilde{Z}^{tx1} \quad (\tilde{\Sigma}_{XX} = BB')$$

onde os elementos de $\tilde{Z}$ são v.a. independentes $N(0,1)$.

(b) Suponha $\tilde{X}$ um vetor aleatório, de dimensão r , com componentes complexas. Dizemos que $\tilde{X}$ tem distribuição normal multivariada complexa de dimensão r , com média μ_X e matriz de covariâncias $\tilde{\Sigma}_{XX}$, se o vetor

$$\begin{bmatrix} \text{Re } \tilde{X} \\ \text{Im } \tilde{X} \end{bmatrix} \sim N_{2r} \left(\begin{bmatrix} \text{Re } \mu_X \\ \text{Im } \mu_X \end{bmatrix}; \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{Re } \tilde{\Sigma}_{XX} & -\text{Im } \tilde{\Sigma}_{XX} \\ \text{Im } \tilde{\Sigma}_{XX} & \text{Re } \tilde{\Sigma}_{XX} \end{bmatrix} \right)$$

onde $\tilde{\Sigma}_{XX}$ é uma matriz Hermitiana não negativa definida de dimensão rxr .

Notação: $\tilde{X} \sim N_r^C(\mu_X, \tilde{\Sigma}_{XX})$

Propriedades: (i) Se $\tilde{\Sigma}_{XX}$ é uma matriz diagonal, então as componentes de $\tilde{X}$ são estatisticamente independentes;

(ii) se $\tilde{X} \sim N_r^C(\mu_X, \sigma_{XX})$, $\sigma_{XX} \in \mathbb{R}$, então $\text{Re } \tilde{X}$ e $\text{Im } \tilde{X}$ são independentes e com distribuições $N_1(\text{Re } \mu_X, \frac{\sigma_{XX}}{2})$ e $N_1(\text{Im } \mu_X, \frac{\sigma_{XX}}{2})$, respectivamente.

Definição 14: (a) Dizemos que a seqüência vetorial $\tilde{Z}_T$, $T=1,2,\dots$ é assintoticamente $N_r(\mu_T, \tilde{\Sigma}_T)$ se a seqüência $\tilde{\Sigma}_T^{-1/2}(\tilde{Z}_T - \mu_T) \xrightarrow{D} N_r(0, I)$.

(b) Dizemos que a seqüência vetorial $\tilde{z}_T$, $T=1,2,\dots$ é assintoticamente $N_r^C(\mu_T, \Sigma_T)$ se a seqüência $\Sigma_T^{-1/2}(\tilde{z}_T - \mu_T) \xrightarrow{D} N_r^C(0, I)$.

Observações:

- (a) Uma v.a $N(0,1)$ tem função característica, $\psi(t) = \exp(-t^2/2)$ e, portanto, todos os seus momentos de ordem maior ou igual a 3 são iguais a zero.
- (b) Os cumulantes conjuntos de uma coleção de v.a. independentes são todos iguais a zero.
- (c) Uma normal multivariada também pode ser definida como um vetor de combinações lineares de v.a. normais independentes. Portanto, todos os cumulantes de ordem maior do que dois são iguais a zero.

Definição 15: A seqüência determinística $\{A(n), n \in \mathbb{Z}\}$ é de variação limitada se

$$\sum_n |A(n+1) - A(n)| < \infty.$$

Se $A(n)$ é uma seqüência de variação limitada, então valem as seguintes proposições:

Proposição 15.a: $A^k(n)$ também é uma seqüência de variação limitada.

Dem:

$$\begin{aligned}
 \sum_n |A^k(n) - A^k(n-1)| &= \sum_n \left| \sum_{u=0}^{k-1} A^{k-u}(n) A^u(n-1) - A^{k-u-1}(n) A^{u+1}(n-1) \right| \\
 &\leq \sum_n \sum_{u=0}^{k-1} |A^{k-u}(n) A^u(n-1) - A^{k-u-1}(n) A^{u+1}(n-1)| \\
 &= \sum_n \sum_{u=0}^{k-1} |A^{k-u-1}(n) A^u(n-1)| |A(n) - A(n-1)| \\
 &\leq \sum_n kL^{k-1} |A(n) - A(n-1)| \leq M.
 \end{aligned}$$

Proposição 15.b:

$$H_a(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} = \begin{cases} O(1) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ O(T) & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Dem:

Utilizando a transformação de Abel (Brillinger (1974)), isto é,

$$\sum_{k=m}^n u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) - U_{m-1} v_m + U_n v_n$$

onde $0 \leq m \leq n$, $U_k = u_0 + \dots + u_k$, $U_{-1} = 0$, temos que

$$\sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} = \sum_{t=0}^{T-2} \sum_{k=0}^t e^{-i\lambda k} [A(t) - A(t+1)] - U_{-1} v_0 +$$

$$\left(\sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} \right) A(T-1)$$

$$= - \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{k=0}^{t-1} e^{-i\lambda k} [A(t) - A(t-1)] + \Delta^{(T)}(\lambda) A(T-1)$$

onde $\Delta^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t}$. Portanto

$$\left| \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} \right| \leq \left| \sum_{t=1}^{T-1} \Delta^{(t)}(\lambda) [A(t) - A(t-1)] \right| + |\Delta^{(T)}(\lambda) A(T-1)|$$

$$\leq \left| \sum_{t=1}^{T-1} \Delta^{(t)}(\lambda) [A(t) - A(t-1)] \right| + L |\Delta^{(T)}(\lambda)|$$

Assim,

$$\left| \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} \right| \leq \frac{k}{|\sin \frac{\lambda}{2}|} \text{ pois } A(t) \text{ é uma seqüência de varia}$$

ção limitada e $|\Delta^{(j)}(\lambda)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\lambda}{2}|}$, $j \geq 1$.

Proposição 15.c:

$$\sum_{t=0}^{T-1} A^k(t) e^{-i\lambda t} = \begin{cases} O(1) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ O(T) & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Dem:

De (a) temos que $A^k(t)$ é uma seqüência de variação limitada, de (b) segue o resultado, substituindo $A(t)$ por $A^k(t)$.

1.2 - O processo modulado

Suponha $\{X(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ uma seqüência estritamente estacionária e $\{A(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ uma seqüência (determinística ou estocástica) independente de $X(n)$. Então o processo observável

$$Y(n) = A(n)X(n), \quad n=0, \pm 1, \dots \quad (1.10)$$

é denominado uma versão de amplitude modulada de $X(n)$ e $A(n)$ é denominada função moduladora de amplitude.

Um caso particular importante de versão de amplitude modulada é o das observações perdidas, como veremos a seguir.

É bastante comum que os registros de um processo estocástico $\{X(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ comecem a ser coletados no instante $n=1$ e termine com $n=N$, sendo que o intervalo de tamanho N (N observações) contenha falhas. Tais falhas são denominadas perdas de observações que podem ocorrer por várias razões: falhas de instrumento, incapacidade

cidade de observar o processo em tempos específicos, detecção de "outliers", etc. Com o objetivo de "completar" o registro, Parzen (1962) sugere substituir a série original, com seus valores perdidos, por uma nova série $Y(n)$, que não possua falhas. Por isso, ele utiliza (1.10) com

$$A(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } X(n) \text{ é observado no instante } n \\ 0 & \text{se } X(n) \text{ é perdido no instante } n \end{cases}$$

ou seja, uma função moduladora de amplitude formada por 0-1.

Tais 0-1 podem ser resultados de uma sequência de ensaios independentes de Bernoulli, o que implicaria em uma função moduladora de amplitude aleatória e assintoticamente estacionária e que, de acordo com (1.10), representaria um processo $X(n)$ cuja perda de observações ocorreria com probabilidade p e independente uma das outras; este caso foi considerado por Scheinok (1965) e Hinich & Weber (1981). Bloomfield (1970) estudou o caso em que as perdas de observações ocorreriam dependentemente uma das outras, de acordo com uma certa estrutura de covariâncias. Uma variação do esquema proposto é o caso em que a probabilidade de perda, p , tem uma variação periódica com período conhecido, como considerado por Thrall (1980); neste trabalho ele considera observações semanais de uma série, onde a probabilidade de perda de observações depende do dia específico da semana.

Por outro lado, poderíamos ter dados perdidos de uma forma sistemática, o que seria representado por uma função moduladora de amplitude determinística e formada de repetições de uma mesma seqüência de 0 e 1; neste caso $A(n)$ também é uma seqüência assintoticamente estacionária e tal esquema é conhecido como amostragem regular, tendo sido considerado por Jones (1962), Parzen (1963), Alekseev & Savitskii (1973) e outros. Para maiores detalhes, ver Dunsmuir (1981,1983).

Entretanto, (1.10) pode ser utilizado para representar versões mais gerais de amplitude modulada de séries temporais, pois $A(n)$ pode assumir qualquer valor real e ser ou não aleatória. Parzen (1962) considera um processo modulado onde $\{X(t), t \geq 0\}$ é uma série temporal estacionária com função de covariância contínua e $\{A(n), n \geq 0\}$ é uma seqüência determinística limitada e assintoticamente estacionária; ele cita como exemplo uma soma finita de harmônicos, isto é,

$$A(n) = \sum_{i=1}^k a_i \cos w_i n.$$

Dunsmuir & Robinson (1981a) consideram vários subconjuntos diferentes de suposições sobre as seqüências $\{A(n), n=1,2,\dots\}$ e $\{X(n), n=1,2,\dots\}$ de tal forma que a versão de amplitude modulada, $Y(n)$, seja uma seqüência assintoticamente estacionária.

Outras referências relativas à análise de séries temporais com observações não igualmente espaçadas são Dunsmuir & Robinson (1981b) e Shapiro & Silverman (1960).

1.3 - Suposições

Nos próximos capítulos iremos estudar, sob várias condições, o comportamento de certas funções do processo modulado. Tais condições se referem à sequência $\{A(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ e ao processo estritamente estacionário $\{X(n), n=0, \pm 1, \dots\}$.

Suposição 1.3.1 (ou caso A):

$\{A(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ é uma sequência real, determinística, de variação limitada e assintoticamente estacionária com

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} A(t) = m_a, \quad (1.11)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-\ell-1} A(t)A(t+\ell) = v_a(\ell), \quad 0 \leq \ell \leq T-1 \quad (1.12)$$

e $\{X(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ é um processo estritamente estacionário com $E|X(n)|^k < \infty$, $k > 0$, e independente de $A(n)$.

Quando $\ell = 0$ em (1.12), indicamos o limite simplesmente por v_a .

Suposição 1.3.2 (ou caso B)

$A(n)$ e $X(n), n=0, \pm 1, \dots$ são processos independentes e es

tritamente estacionários com $E|X(n)|^k < \infty$ e $E|A(n)|^k < \infty$, $k > 0$.

Suposição 1.3.3 (ou caso C)

$\{X(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ é uma seqüência estritamente estacionária, $E|X(n)|^k < \infty$, $k > 0$.

$\{A(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ é uma seqüência de v.a. independentes e identicamente distribuídas com média μ_a , diferente de zero, e variância σ_a^2 estritamente positiva. Além disso $A(n)$ e $X(n)$ são independentes.

1.4 - Resultado útil

Lema 1.4.1: Seja $Y^{(T)}$, $T=1, 2, \dots$, uma seqüência de vetores aleatórios de dimensão r , com componentes complexas e tal que todos os cumulantes da variável $[Y_1^{(T)}, \bar{Y}_1^{(T)}, \dots, Y_r^{(T)}, \bar{Y}_r^{(T)}]$ existam e converjam para os correspondentes cumulantes da variável $[Y_1, \bar{Y}_1, \dots, Y_r, \bar{Y}_r]$ que é determinada por seus momentos. Então $Y^{(T)}$ converge em distribuição para o vetor aleatório com componentes $Y_1, \dots, Y_r$.

A demonstração do Lema pode ser encontrada em Brillinger (1974, p.403).

1.5 - Objetivos do trabalho

Os objetivos do nosso trabalho são:

- a) Encontrar estimadores para a função densidade espectral do processo de interesse $\{X(t)\}$, utilizando observações do processo de amplitude modulada $\{Y(t)\}$. Consideraremos os três casos diferentes de versão moduladora de amplitude, citados na seção (1.3).
- b) Estudar as propriedades dos estimadores propostos.
- c) Comparar, numericamente, tais estimadores do espectro $f_X(\lambda)$ com aqueles que seriam obtidos se utilizássemos as observações do processo de interesse $\{X(t)\}$. Essa comparação é feita no último capítulo, utilizando duas séries reais e uma série simulada.

CAPÍTULO 2

CUMULANTES DAS TRANSFORMADAS DE FOURIER

Vamos estudar, sob as várias suposições da seção 1.3, o comportamento dos cumulantes das transformadas finitas de Fourier dos valores $Y(0), Y(1), \dots, Y(T-1)$ do processo modulado $\{Y(n)\}$,

$$\begin{aligned} d_Y^{(T)}(\lambda) &= \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} Y(t) \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} A(t)X(t), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \end{aligned}$$

Tais resultados serão úteis para a demonstração da normalidade assintótica de $d_Y^{(T)}(\lambda)$, no capítulo seguinte.

Sejam

$$H_a^{(k)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} A^k(t) e^{-i\lambda t} \quad (2.1)$$

e

$$\Delta^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} \quad (2.2)$$

Teorema 2.1: Se a Suposição 1.3.1 está satisfeita (caso A) e se

$$\sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots \sum_{u_{k-1}} (1 + |u_j|) |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty, \quad j=1, \dots, k-1 \text{ e } k=2,$$

3, ... então

$$\text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda_1), \dots, d_Y^{(T)}(\lambda_k) \right] = H_a^{(k)} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) (2\pi)^{k-1} f_X(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) + O(1).$$

A demonstração do teorema encontra-se no Apêndice A.

Nota: Neste teorema, a suposição de que $A(n)$, $n=0, \pm 1, \dots$ seja assintoticamente estacionária, não é necessária.

Teorema 2.2: Se a Suposição 1.3.2 (caso B) está satisfeita e se

$$\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} (1 + |u_j|) |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty, \quad j=1, \dots, k-1, \quad k=2, 3, \dots \quad \text{então}$$

$$\begin{aligned} \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda_1), \dots, d_Y^{(T)}(\lambda_k) \right] &= \Delta^{(T)} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right) \sum_{u_1} \dots \sum_{u_k} \\ &\quad e^{-i \left(\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j \right)} C_Y(u_1, \dots, u_{k-1}) + O(1) \end{aligned}$$

ou, de modo equivalente,

$$\begin{aligned} \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda_1), \dots, d_Y^{(T)}(\lambda_k) \right] &= (2\pi)^{k-1} \Delta^{(T)} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right) f_Y(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \\ &\quad + O(1). \end{aligned}$$

Dem:

Imediata, utilizando o Teorema 4.3.2 de Brillinger (1975), pois $Y(n) = A(n)X(n)$ é um processo estritamente estacionário.

Corolário 2.2: O resultado do Teorema 2.2 continua valendo, se substituirmos a Suposição 1.3.2 (caso B) pela Suposição 1.3.3 (caso C).

Dem:

É só observarmos que o caso C está contido no caso B.

A suposição

$$\sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots \sum_{u_{k-1}} (1+|u_j|) |C_Z(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty,$$

utilizada nos teoremas anteriores, é do tipo mixing, ou seja, dá uma medida da dependência entre os valores do processo $\{Z_t\}$, à medida que eles se distanciam no tempo.

CAPÍTULO 3

TEOREMAS LIMITES CENTRAIS PARA AS TRANSFORMADAS FINITAS DE FOURIER

Neste capítulo vamos demonstrar a normalidade assintótica das transformadas de Fourier do processo modulado, para cada um dos três casos considerados. Tais resultados serão úteis no desenvolvimento dos capítulos seguintes, quando construiremos estimadores do espectro do processo de interesse, $X(t)$. Vale a pena ressaltar a independência assintótica das transformadas de Fourier, em frequências distintas λ_j e λ_k , sujeitas à restrição $\lambda_j \pm \lambda_k \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$; tal fato muito nos ajudará no desenvolvimento dos próximos capítulos.

Teorema 3.1: Se a Suposição 1.3.1 (caso A) for válida e $\sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots \sum_{u_{k-1}} (1 + |u_j|) |C_X(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$, $j=1, \dots, k-1$, $k=2, 3, \dots$ então

(i) para $2\lambda_j$, $\lambda_j \pm \lambda_k \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $1 \leq j < k \leq J$, temos que

$$d_Y^{(T)}(\lambda_j) \xrightarrow{D} N_1^C(0, 2\pi T v_a f_X(\lambda_j)) \text{ independentes, } j=1, \dots, J;$$

(ii) para $\lambda=0, \pm 2\pi, \dots$ $d_Y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{D} N_1(T m_a \mu_X, 2\pi T v_a f_X(\lambda))$ independentemente das variáveis anteriores;

(iii) para $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ $d_y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1(0, 2\pi T v_a f_x(\lambda))$, independente-
mente das variáveis anteriores.

Dem:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad E d_y^{(T)}(\pm\lambda_j) &= E \left[\sum_{t=0}^{T-1} A(t) X(t) e^{\mp i \lambda_j t} \right] \\ &= \mu_x \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{\mp i \lambda_j t} \\ &= \begin{cases} \mu_x \sum_{t=0}^{T-1} A(t) & \text{se } \lambda_j \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \mu_x H_a^{(1)}(\pm\lambda_j) = O(1) & \text{se } \lambda_j \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

pois $|H_a^{(1)}(\pm\lambda_j)| \leq \frac{k}{\left| \sin \frac{\pm\lambda_j}{2} \right|}$ para algum k finito (ver demonstra-

ção no capítulo 1, seção 1.1). Portanto

$$\frac{E d_y^{(T)}(\lambda_j)}{T} \rightarrow \begin{cases} \mu_x m_a & \text{se } \lambda_j \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ 0 & \text{se } \lambda_j \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \text{Cov} \left[\frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_j)}{\sqrt{T}}, \frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_k)}{\sqrt{T}} \right] = T^{-1} 2\pi H_a^{(2)}(\pm\lambda_j \mp \lambda_k) f_x(\pm\lambda_j) + \frac{O(1)}{T}$$

de acordo com o Teorema 2.1. Assim

$$\text{Cov}[\cdot, \cdot] = \begin{cases} T^{-1}O(1) & \text{se } \pm\lambda_j \mp \lambda_k \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ T^{-1}2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) f_x(\pm\lambda_j) + \frac{O(1)}{T} & \text{se } \pm\lambda_j \mp \lambda_k \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

e

$$\text{Cov}[\cdot, \cdot] \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \pm\lambda_j \mp \lambda_k \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ 2\pi v_a f_x(\pm\lambda_j) & \text{se } \pm\lambda_j \mp \lambda_k \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \text{Cum} \left[\frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_{j_1})}{\sqrt{T}}, \frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_{j_2})}{\sqrt{T}}, \dots, \frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_{j_k})}{\sqrt{T}} \right] &= \\ &= T^{-k/2} (2\pi)^{k-1} H_a^{(k)}(\pm\lambda_{j_1} \pm \lambda_{j_2} \pm \dots \pm \lambda_{j_k}) f_x(\pm\lambda_{j_1} \pm \dots \pm \lambda_{j_{k-1}}) + T^{-k/2} O(1) \end{aligned}$$

novamente devido ao Teorema 2.1.

Utilizando o fato de que

$$H_a^{(k)}(\pm\lambda_{j_1} \pm \lambda_{j_2} \pm \dots \pm \lambda_{j_k}) = O(T), \text{ temos que}$$

$$\text{Cum} \left[\frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_{j_1})}{\sqrt{T}}, \frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_{j_2})}{\sqrt{T}}, \dots, \frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_{j_k})}{\sqrt{T}} \right] \xrightarrow{T \uparrow \infty} 0,$$

para $k > 2$.

Pelo Lema 1.4.1 e observação c da Definição 14, o resultado segue.

Teorema 3.2: Se a Suposição 1.3.1 (caso A) for válida, $\sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots \sum_{u_{k-1}} (1+|u_j|) |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$, $j=1, \dots, k-1$, $k=2, 3, \dots$ e $s_j(T)$ um inteiro com $\lambda_j(T) = \frac{2\pi s_j(T)}{T} \rightarrow \lambda_j$ quando $T \rightarrow \infty$, $j=1, \dots, J$, então

- (i) para $2\lambda_j(T), \lambda_j(T) \pm \lambda_k(T) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $1 \leq j < k \leq J$, $T=1, 2, \dots$ temos que $d_y^{(T)}(\lambda_j(T)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1^C(0, 2\pi T v_a f_x(\lambda_j))$ independentes, $j=1, \dots, J$;
- (ii) para $\lambda=0, \pm 2\pi, \dots$ $d_y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1(\mu_x m_a T, 2\pi T v_a f_x(\lambda))$ independentes das variáveis anteriores;
- (iii) para $\lambda=\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$, $d_y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1(0, 2\pi T v_a f_x(\lambda))$ independentes das variáveis anteriores.

Dem:

Utilizando o fato de que $f_x(\lambda_j(T)) \rightarrow f_x(\lambda_j)$, $T \rightarrow \infty$, a demonstração é análoga a do Teorema 3.1.

Teorema 3.3: Se a Suposição 1.3.2 (caso B) for válida, $\sum_u |\gamma_a(u)| < \infty$, $\sum_u |\gamma_x(u)| < \infty$, $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$, $j=1, \dots, k-1$, $k=2, 3, \dots$ e $s_j(T)$ um inteiro com $\lambda_j(T) = \frac{2\pi s_j(T)}{T} \rightarrow \lambda_j$ quando $T \rightarrow \infty$, $j=1, \dots, J$, então

- (i) para $2\lambda_j(T), \lambda_j(T) \pm \lambda_k(T) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $1 \leq j < k \leq J, T=1, 2, \dots$
temos que $d_Y^{(T)}(\lambda_j(T)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1^C(0, 2\pi T \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda_j - u) f_a(u) du + \mu_x^2 f_a(\lambda_j) + \mu_a^2 f_x(\lambda_j) \right])$ independentes, $j=1, \dots, J$;
- (ii) para $\lambda=0, \pm 2\pi, \dots$, $d_Y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1(\mu_a \mu_x^T, 2\pi T \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda - u) f_a(u) du + \mu_x^2 f_a(\lambda) + \mu_a^2 f_x(\lambda) \right])$ independentes das variáveis anteriores.
- (iii) para $\lambda=\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$, $d_Y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1(\theta, 2\pi T \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda - u) f_a(u) du + \mu_x^2 f_a(\lambda) + \mu_a^2 f_x(\lambda) \right])$ independentes das variáveis anteriores, onde $\theta=0$ ou $\mu_a \mu_x$ se T for par ou ímpar, respectivamente.

Dem:

$$(i) \text{Ed}_Y^{(T)}(\pm\lambda_j(T)) = E \left[\sum_{t=0}^{T-1} A(t) X(t) e^{\mp i \lambda_j(T) t} \right]$$

$$= \mu_a \mu_x \Delta^{(T)}(\pm\lambda_j(T))$$

e

$$\text{Ed}_Y^{(T)}(\pm\lambda_j(T)) = \begin{cases} \mu_a \mu_x^T & \text{se } \lambda_j(T) \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ 0 & \text{se } \lambda_j(T) \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ 0 \text{ ou } \mu_a \mu_x & \text{se } \lambda_j(T) = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e se } T \text{ for} \\ & \text{par ou ímpar, respectivamente.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \operatorname{Cov} \left[\frac{d_Y^{(T)}(\pm \lambda_j(T))}{\sqrt{T}}, \frac{d_Y^{(T)}(\pm \lambda_k(T))}{\sqrt{T}} \right] &= \\
&= T^{-1} \left[\Delta^{(T)}(\pm \lambda_j(T) \mp \lambda_k(T)) \sum_{u_1} e^{\mp i \lambda_j(T) u_1} \gamma_Y(u_1) \right] + \frac{O(1)}{T} \quad (3.1)
\end{aligned}$$

utilizando o Teorema 2.2. Mas

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(u_1) &= \operatorname{Cov}[Y(t), Y(t+u_1)] = \operatorname{Cov}[A(t)X(t), A(t+u_1)X(t+u_1)] \\
&= EA(t)X(t)A(t+u_1)X(t+u_1) - [EA(t)X(t)]^2 \\
&= EA(t)A(t+u_1)EX(t)X(t+u_1) - \mu_a^2 \mu_x^2 \\
&= [\gamma_a(u_1) + \mu_a^2][\gamma_x(u_1) + \mu_x^2] - \mu_a^2 \mu_x^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \gamma_Y(u_1) = \gamma_a(u_1)\gamma_x(u_1) + \mu_x^2\gamma_a(u_1) + \mu_a^2\gamma_x(u_1)$$

Substituindo em (3.1) vem,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[\cdot, \cdot] &= T^{-1} \left[\Delta^{(T)}(\pm \lambda_j(T) \mp \lambda_k(T)) \sum_{u_1} e^{\mp i \lambda_j(T) u_1} \left[\gamma_a(u_1)\gamma_x(u_1) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \mu_a^2\gamma_x(u_1) + \mu_x^2\gamma_a(u_1) \right] \right] + T^{-1}O(1).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Cov}[\cdot, \cdot] = \begin{cases} 2\pi \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\pm\lambda_j(T)-u) f_a(u) du + \mu_a^2 f_x(\pm\lambda_j(T)) + \right. \\ \left. \mu_x^2 f_a(\pm\lambda_j(T)) + T^{-1}O(1) \right] \text{ se } \pm\lambda_j(T) \mp \lambda_k(T) \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ T^{-1}2\pi O(1) + T^{-1}O(1) \text{ se } \pm\lambda_j(T) \mp \lambda_k(T) \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

e, portanto,

$$\text{Cov} \left[\frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_j(T))}{\sqrt{T}}, \frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_k(T))}{\sqrt{T}} \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} 2\pi \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda_j-u) f_a(u) du + \mu_a^2 f_x(\lambda_j) + \mu_x^2 f_a(\lambda_j) \right] \\ \text{se } \pm\lambda_j(T) \mp \lambda_k(T) \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ 0 \text{ se } \pm\lambda_j(T) \mp \lambda_k(T) \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$(iii) \text{ Cum} \left[\frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_{j_1}(T))}{\sqrt{T}}, \frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_{j_2}(T))}{\sqrt{T}}, \dots, \frac{d_y^{(T)}(\pm\lambda_{j_k}(T))}{\sqrt{T}} \right]$$

$$= T^{-k/2} (2\pi)^{k-1} \Delta^{(T)}(\pm\lambda_{j_1}(T) \pm \dots \pm \lambda_{j_k}(T)) \sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}}$$

$$e^{-i \sum_{i=1}^{k-1} \pm \lambda_{j_i}(T) u_i} \text{Cum}_Y(u_1, \dots, u_{k-1}) + O(1) T^{-k/2}$$

$$\therefore \text{Cum}[\cdot, \dots, \cdot] = O(T^{-k/2}) O(T) + O(1) O(T^{-k/2}) = O(T^{-k/2 + 1})$$

e $\text{Cum}[\cdot, \dots, \cdot] \rightarrow \text{zero}$, $k > 2$, quando $T \rightarrow \infty$.

Assim, vemos que os cumulantes das variáveis de interesse e dos conjugados dessas variáveis, convergem para os cumulantes de uma distribuição normal.

Pelo Lema 1.4.1 e observação c da Definição 14, o resultado segue.

A expressão da variância da distribuição assintótica do Teorema 3.3 é dada por $2\pi T f_Y(\lambda_j)$ onde

$$f_Y(\lambda_j) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda_j - u) f_A(u) du + \mu_X^2 f_A(\lambda_j) + \mu_A^2 f_X(\lambda_j)$$

ou

$$f_Y(\lambda_j) = f_X * f_A(\lambda_j) + \mu_X^2 f_A(\lambda_j) + \mu_A^2 f_X(\lambda_j) \quad (3.2)$$

que envolve os espectros e a convolução dos espectros do processo $A(t)$ e $X(t)$. Esse fato implicará numa abordagem diferente para a obtenção dos estimadores de $f_X(\lambda)$, no caso B.

Corolário 3.3: O resultado do Teorema 3.3 continua válido se substituirmos a Suposição 1.3.2 (caso B) pela Suposição 1.3.3 (caso C). Neste caso, a variância da distribuição normal assintótica fica reduzida a

$$2\pi T \left[\frac{\sigma_A^2 (\sigma_X^2 + \mu_X^2)}{2\pi} + \mu_A^2 f_X(\lambda) \right].$$

Dem:

De acordo com o Teorema 3.3 temos que, se $\lambda_j(T)$, $\lambda_j(T) \pm \lambda_k(T) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, então

$$d_Y^{(T)}(\lambda_j(T)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1^C(0, 2\pi T \left[\int_{-\pi}^{\pi} f_x(\lambda_j - u) f_a(u) du + \mu_x^2 f_a(\lambda_j) + \mu_a^2 f_x(\lambda_j) \right]). \quad (3.3)$$

Mas, se vale a Suposição 1.3.3, então

$$f_a(\lambda_j) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \quad (3.4)$$

e substituindo (3.4) em (3.3) temos

$$d_Y^{(T)}(\lambda_j(T)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1^C(0, 2\pi T \left[\frac{\sigma_a^2 \sigma_x^2}{2\pi} + \frac{\mu_x^2 \sigma_a^2}{2\pi} + \mu_a^2 f_x(\lambda_j) \right]).$$

Para $\lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$, a demonstração é análoga.

CAPÍTULO 4

ESTIMADORES DO ESPECTRO: PERIODOGRAMA

Vamos estudar, neste capítulo, estimadores do espectro de $X(n)$, baseados no processo modulado

$$Y(n) = A(n)X(n) \quad , \quad n=0, \pm 1, \dots$$

sob as três suposições mencionadas na seção 1.3.

Os estimadores obtidos serão inconsistentes, mas servirão como alicerce para a construção de estimadores consistentes no capítulo 5. Veremos que os estimadores, nos casos A e C, serão baseados nos resultados obtidos no capítulo 3; já para o caso B iremos dar uma abordagem diferente, como mencionado no capítulo anterior.

4.1 - Estimador no caso A (Suposição 1.3.1 válida)

Vimos, no Teorema 3.1, que

$$d_Y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{P} \begin{cases} N_1^C(0, 2\pi T v_a f_X(\lambda)) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ N_1(T m_a \mu_X, 2\pi T v_a f_X(\lambda)) & \text{se } \lambda = 0, \pm 2\pi, \dots \\ N_1(0, 2\pi T v_a f_X(\lambda)) & \text{se } \lambda = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots \end{cases}$$

sugerindo, como um possível estimador de $f_x(\lambda)$, a estatística

$$I_x^A(\lambda) = \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} |d_Y^{(T)}(\lambda)|^2, \quad (4.1)$$

no caso em que $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, que é proporcional ao "periodograma de 2ª ordem" dos valores $Y(0), Y(1), \dots, Y(T-1)$.

Iremos estudar, agora, propriedades do estimador (4.1).

Seja $H_a^{(k)}(\lambda)$ dada por (2.1); então

$$\begin{aligned} \text{Teorema 4.1.1: } EI_x^A(\lambda) &= \left[\int_{-\pi}^{\pi} |H_a^{(1)}(\lambda)|^2 d\lambda \right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |H_a^{(1)}(\lambda - \alpha)|^2 f_x(\alpha) d\alpha \\ &+ \left[\int_{-\pi}^{\pi} |H_a^{(1)}(\lambda)|^2 d\lambda \right]^{-1} \mu_x^2 |H_a^{(1)}(\lambda)|^2 \end{aligned}$$

se $\sum_u |\gamma_x(u)| < \infty$.

Dem:

Para demonstrar o teorema, vamos utilizar dois resultados que estão provados no Apêndice A.

$$\text{RESULTADO 1: } E|d_Y^{(T)}(\lambda)|^2 = \text{Cum}[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(-\lambda)] + |Ed_Y^{(T)}(\lambda)|^2$$

$$\text{RESULTADO 2: } \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} \right|^2 d\lambda = 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)$$

Temos que,

$$\text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(-\lambda) \right] = \sum_{s,t=0}^{T-1} e^{-i\lambda(s-t)} A(s)A(t) \gamma_X(s-t)$$

e pelo Teorema de Bochner,

$$\begin{aligned} \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(-\lambda) \right] &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s,t=0}^{T-1} e^{-i\lambda(s-t)} A(s)A(t) e^{i\alpha(s-t)} f_X(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s,t=0}^{T-1} A(s)A(t) e^{-is(\lambda-\alpha)+it(\lambda-\alpha)} f_X(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{s=0}^{T-1} A(s) e^{-is(\lambda-\alpha)} \right|^2 f_X(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |H_a^{(1)}(\lambda-\alpha)|^2 f_X(\alpha) d\alpha . \end{aligned}$$

$$Ed_Y^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} \mu_X$$

$$\left| Ed_Y^{(T)}(\lambda) \right|^2 = \mu_X^2 \left| \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} \right|^2$$

$$= \mu_X^2 \left| H_a^{(1)}(\lambda) \right|^2 .$$

Usando os RESULTADOS 1 e 2 temos

$$\begin{aligned}
EI_X^A(\lambda) &= \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} E \left| d_Y^{(T)}(\lambda) \right|^2 \\
&= \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left| H_a^{(1)}(\lambda - \alpha) \right|^2 f_X(\alpha) d\alpha + \mu_X^2 \left| H_a^{(1)}(\lambda) \right|^2 \right] \\
&= \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left| H_a^{(1)}(\lambda) \right|^2 d\lambda \right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H_a^{(1)}(\lambda - \alpha) \right|^2 f_X(\alpha) d\alpha + \\
&\quad \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left| H_a^{(1)}(\lambda) \right|^2 d\lambda \right]^{-1} \mu_X^2 \left| H_a^{(1)}(\lambda) \right|^2.
\end{aligned}$$

Se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $EI_X^A(\lambda)$ ficará reduzida, assintoticamente, à primeira expressão, pois $H_a^{(1)}(\lambda) = O(1)$.

Assim, mesmo que tenhamos $\mu_X = 0$, o estimador $I_X^A(\lambda)$ poderá ser viciado, exceto no caso em que $f_X(\alpha)$ for constante, $\forall \alpha$. Entretanto, para sequências $A(t)$ que satisfazem a condição $\sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) = O(T^\alpha)$, $\alpha > 0$, poderemos provar que $I_X^A(\lambda)$ é assintoticamente não viciado; este é o nosso próximo resultado.

Proposição 4.1.1: Sob as condições do Teorema 4.1.1, se $\mu_X = 0$ e $\sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) = O(T^\alpha)$, para algum $\alpha > 0$, então $I_X^A(\lambda)$ é um estimador assintoticamente não viciado de $f_X(\lambda)$.

Dem:

$$EI_X^A(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\alpha t} \right|^2}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} f_X(\alpha - \lambda) d\alpha$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} K_T(\alpha) f_X(\alpha - \lambda) d\alpha$$

onde

$$K_T(\alpha) = \frac{\left| \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\alpha t} \right|^2}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} . \quad (4.2)$$

Seja

$$\Phi_T(\alpha) = \begin{cases} K_T(\alpha) & , \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.3)$$

Vamos provar, agora, que $\Phi_T(\alpha)$ é uma sucessão de núcleos de Dirac, isto é,

$$i) \quad \Phi_T(\alpha) \geq 0$$

$$ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T(\alpha) d\alpha = 1$$

iii) Dados $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, existe n_0 tal que, para $T \geq n_0$

$$\int_{|\alpha| > \eta} \Phi_T(\alpha) d\alpha < \varepsilon .$$

i) Óbvio.

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T(\alpha) d\alpha &= \int_{-\pi}^{\pi} K_T(\alpha) d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} A(t_1) A(t_2) e^{-i\alpha(t_1-t_2)} d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) = 1.
 \end{aligned}$$

iii) Dados $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ temos

$$\int_{|\alpha| > \delta} \Phi_T(\alpha) d\alpha = 2 \int_{\delta}^{\pi} K_T(\alpha) d\alpha \text{ pois } \Phi_T(\alpha) \text{ é uma função par.}$$

Mas $K_T(\alpha) \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)}$, $\forall T$, resultado que foi obtido

durante a demonstração da Proposição 15.b (cap. 1).

Portanto,

$$\int_{|\alpha| > \delta} \Phi_T(\alpha) d\alpha \leq \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} \cdot \frac{L^*}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \int_{\delta}^{\pi} d\alpha$$

$$= \frac{L^*(\pi-\delta)}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)}$$

e para T suficientemente grande, a condição (iii) estará satisfeita se $\sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) = O(T^\alpha)$, para algum $\alpha > 0$.

Assim, de (4.2) e (4.3) temos que

$$EI_X^A(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_T(\alpha) f_X(\alpha-\lambda) d\alpha$$

e utilizando o Teorema 3.5.(c) de Figueiredo (1977),

$$EI_X^A(\lambda) \rightarrow f(\lambda), \quad T \rightarrow \infty$$

uniformemente, em todo intervalo limitado fechado I que não contenha pontos de descontinuidade de f .

Portanto

$$EI_X^A(\lambda) = f(\lambda) + o(1), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

Os resultados seguintes nos fornecem a estrutura de covariâncias do estimador $I_X^A(\lambda)$, sua variância assintótica diferente de zero (estimador inconsistente) e sua distribuição assintótica.

Teorema 4.1.2: Se $\mu_x = 0$ e $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$,
 $j=1, \dots, k-1$, $k=2, 3, \dots$ então

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[I_x^A(\lambda), I_x^A(\mu) \right] &= \left| H_a^{(2)}(0) \right|^{-2} \left\{ \left| H_a^{(2)}(\lambda - \mu) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left| H_a^{(2)}(\lambda + \mu) \right|^2 \right\} f_x^2(\lambda) + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

A demonstração encontra-se no Apêndice A.

Corolário 4.1.2: Sob as condições do Teorema 4.1.2, se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ então

$$\text{Var} I_x^A(\lambda) = f_x^2(\lambda) + O(T^{-1}).$$

Dem:

Utilizamos a Proposição 15.c (Capítulo 1) e colocamos $\lambda = \mu$ no resultado do Teorema 4.1.2.

Teorema 4.1.3: Suponha que $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$,
 $j=1, \dots, k-1$, $k=2, 3, \dots$. Seja $s_j(T)$ um inteiro com $\lambda_j(T) = \frac{2\pi s_j(T)}{T} \rightarrow \lambda_j$,
 $T \rightarrow \infty$, $j=1, \dots, J$.

(i) Se $2\lambda_j(T), \lambda_j(T) \pm \lambda_k(T) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $i \leq j < k \leq J$ e $T=1, 2, \dots$
então $I_x^A(\lambda_j(T)) \xrightarrow{D} f_x(\lambda_j) \frac{\chi_2^2}{2}$ independentes, $j=1, \dots, J$.

- (ii) Se $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ então $I_X^A(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} f_X(\lambda) \chi_1^2$ independentes das variáveis anteriores.
- (iii) Se $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi}$, então $I_X^A(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} f_X(\lambda) \chi_1^2$ se $\mu_X = 0$; se $\mu_X \neq 0$, então $I_X^A(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} f_X(\lambda) \chi_1^2(\psi)$ onde $\psi = |\mu_X| \sqrt{T/(2\pi v_a f_X(\lambda))}$ é o parâmetro de não-centralidade do quiquadrado.

Dem:

- (i) Pelo Teorema 3.2 temos que $d_Y^{(T)}(\lambda_j(T)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1^C(0, 2\pi T v_a f_X(\lambda_j))$.
 Mas $I_X^A(\lambda_j(T)) = \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \left[(\text{Re } d_Y^{(T)}(\lambda_j(T)))^2 + (\text{Im } d_Y^{(T)}(\lambda_j(T)))^2 \right]$
- $$= \left\{ \left[\frac{\text{Re } d_Y^{(T)}(\lambda_j(T))}{\sqrt{\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) f_X(\lambda_j(T))}} \right]^2 + \left[\frac{\text{Im } d_Y^{(T)}(\lambda_j(T))}{\sqrt{\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) f_X(\lambda_j(T))}} \right]^2 \right\} \frac{f_X(\lambda_j(T))}{2},$$

com

$$\left[\frac{\text{Re } d_Y^{(T)}(\lambda_j(T))}{\sqrt{\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) f_X(\lambda_j(T))}} \right]^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} z_1^2 \quad \text{onde } z_1 \sim N(0,1)$$

e

$$\left[\frac{\text{Im } d_Y^{(T)}(\lambda_j(T))}{\sqrt{\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) f_X(\lambda_j(T))}} \right]^2 \xrightarrow{\mathcal{D}} z_2^2 \quad \text{onde } z_2 \sim N(0,1)$$

de acordo com o Teorema 3.2 e a definição de normal complexa. Além disso z_1 e z_2 são v.a. independentes e $f_X(\lambda_j(T)) \rightarrow f_X(\lambda_j)$, quando $T \rightarrow \infty$.

Portanto,

$$I_x^A(\lambda_j(T)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{f_x(\lambda_j)}{2} \chi_2^2 \quad \text{independentes.}$$

(ii) Pelo Teorema 3.2, $d_y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1(0, 2\pi T v_a f_x(\lambda))$ independentes.

Portanto,

$$I_x^A(\lambda) = \left[\frac{d_y^{(T)}(\lambda)}{\sqrt{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) f_x(\lambda)}} \right]^2 f_x(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} z_1^2 f_x(\lambda)$$

onde $z_1 \sim N(0,1)$.

Assim,

$$I_x^A(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} f_x(\lambda) \chi_1^2 \quad \text{independentes.}$$

(iii) Pelo Teorema 3.2, se $\mu_x = 0$, $d_y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1(0, 2\pi T v_a f_x(\lambda))$ independentes. Portanto,

$$I_x^A(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} f_x(\lambda) \chi_1^2 \quad \text{independentes, como no caso anterior.}$$

Se $\mu_x \neq 0$, então pelo Teorema 3.2, $d_y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_1(T\mu_x, 2\pi T v_a f_x(\lambda))$ e portanto

$$I_X^A(\lambda) = \left[\frac{d_Y^{(T)}(\lambda)}{\sqrt{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) f_X(\lambda)}} \right]^2 f_X(\lambda) \xrightarrow{D} f_X(\lambda) Z_3^2$$

onde $Z_3 \sim N \left(\frac{\sqrt{T} \mu_X}{\sqrt{2\pi v_a f_X(\lambda)}}, 1 \right)$, do que segue

$$I_X^A(\lambda) \xrightarrow{D} \chi_1^2(\psi), \text{ onde } \psi = \left(\frac{\sqrt{T} \mu_X}{\sqrt{2\pi v_a f_X(\lambda)}} \right)^2.$$

4.2 - Estimador no caso B (Suposição 1.3.2 válida)

Neste caso, iremos introduzir uma notação ainda não utilizada e algumas suposições adicionais que poderão ser necessárias daqui em diante.

I - Processo $A(t)$

Notação: $EA(t) = \mu_a > 0$, constante, $\forall t$.

$$EA(t)A(t+r) = k_r \mu_a, \quad k_r > 0 \Rightarrow \gamma_a(r) = \mu_a(k_r - \mu_a)$$

$$EA(t)A(t+q)A(t+r)A(t+s) = \mu_a^2 v_{q,r,s}, \quad q,r,s = 0, \pm 1, \dots$$

$$b_r = \mu_a^{-1} (\mu_a^{-1} - k_r^{-1}) = \frac{(k_r - \mu_a)}{\mu_a^2 k_r} \quad (4.4)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{-ik\omega} \quad (4.5)$$

$$\text{Suposições: } \sum_{r=-\infty}^{\infty} |\gamma_a(r)| < \infty \quad (4.6)$$

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\ell| |v_{j,\ell,k+\ell} - k_j k_k| \leq V(|j| + |k| + 1) \quad (4.7)$$

$$E|A(t)A(t+q)A(t+r)A(t+s)| < M \quad (4.8)$$

onde V e M são constantes.

$$\text{Consequências: } (4.6) \Rightarrow \sum_r |k_r - \mu_a| < \infty \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} k_r = \mu_a \quad (4.9)$$

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} |b_r| = \frac{1}{\mu_a^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left| \frac{k_r - \mu_a}{k_r} \right| < \infty$$

por (4.6) e (4.9). Assim $b(\omega)$ é limitada e uniformemente contínua.

II - Processo $X(t)$

$$\text{Suposições: } \mu_x = 0 \quad (4.10)$$

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} r^2 |\gamma_x(r)| < \infty \quad (4.11)$$

$$\sum_{u_1} \sum_{u_2} \sum_{u_3} |u_j| |C_x(u_1, u_2, u_3)| = Q < \infty, \quad j=1,2,3 \quad (4.12)$$

Conseqüências: $f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \gamma_X(r) e^{-ir\lambda}$, $-\infty < \lambda < \infty$ existe e é derivável com derivadas contínuas (continuamente diferenciável).

Todas essas suposições, com relação aos processos $X(t)$ e $A(t)$, influem no processo $Y(t)$ da seguinte maneira:

$$i) \quad \mu_Y = 0$$

$$ii) \quad \gamma_Y(r) = E[Y(t)Y(t+r)] = E[A(t)A(t+r)X(t)X(t+r)]$$

$$= k_r \mu_a \gamma_X(r), \text{ logo}$$

$$\gamma_X(r) = \frac{\gamma_Y(r)}{k_r \mu_a}. \quad (4.13)$$

$$iii) \quad \sum_{r=-\infty}^{\infty} |r| |\gamma_Y(r)| = \sum_{r=-\infty}^{\infty} |r| |k_r \mu_a \gamma_X(r)|$$

$$= \mu_a \sum_{r=-\infty}^{\infty} |r| |k_r| |\gamma_X(r)| < \infty \text{ por (4.9) e (4.11) o que im-}$$

plica na existência de $f_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \gamma_Y(r) e^{ir\omega}$ (continuamente diferenciável).

$$iv) \quad \sum_{u_1} \sum_{u_2} \sum_{u_3} |u_j| |C_Y(u_1, u_2, u_3)| < \infty, \quad j=1,2,3. \quad (4.14)$$

$$C_Y(u_1, u_2, u_3) = E[Y(t)Y(t+u_1)Y(t+u_2)Y(t+u_3)]$$

$$\begin{aligned}
& - E[Y(t)Y(t+u_1)]E[Y(t+u_2)Y(t+u_3)] - E[Y(t)Y(t+u_2)]E[Y(t+u_1)Y(t+u_3)] \\
& - E[Y(t)Y(t+u_3)]E[Y(t+u_1)Y(t+u_2)] \\
& = E[Y(t)Y(t+u_1)Y(t+u_2)Y(t+u_3)] - \gamma_Y(u_1)\gamma_Y(u_3-u_2) \\
& - \gamma_Y(u_2)\gamma_Y(u_3-u_1) - \gamma_Y(u_3)\gamma_Y(u_2-u_1) \\
& = \mu_a^2 v_{u_1, u_2, u_3} E[X(t)X(t+u_1)X(t+u_2)X(t+u_3)] - \\
& - \mu_a^2 k_{u_1} k_{u_3-u_2} \gamma_X(u_1)\gamma_X(u_3-u_2) - \mu_a^2 k_{u_2} k_{u_3-u_1} \gamma_X(u_2)\gamma_X(u_3-u_1) - \\
& - \mu_a^2 k_{u_3} k_{u_2-u_1} \gamma_X(u_3)\gamma_X(u_2-u_1) \\
& = \mu_a^2 v_{u_1, u_2, u_3} \left[C_X(u_1, u_2, u_3) + \gamma_X(u_1)\gamma_X(u_3-u_2) + \right. \\
& + \gamma_X(u_2)\gamma_X(u_3-u_1) + \gamma_X(u_3)\gamma_X(u_2-u_1) \left. \right] - \\
& - \mu_a^2 k_{u_1} k_{u_3-u_2} \gamma_X(u_1)\gamma_X(u_3-u_2) - \mu_a^2 k_{u_2} k_{u_3-u_1} \gamma_X(u_2)\gamma_X(u_3-u_1) - \\
& - \mu_a^2 k_{u_3} k_{u_2-u_1} \gamma_X(u_3)\gamma_X(u_2-u_1) \\
& = \mu_a^2 \left[v_{u_1, u_2, u_3} C_X(u_1, u_2, u_3) + \gamma_X(u_1)\gamma_X(u_3-u_2) \left[v_{u_1, u_2, u_3}^{-k_{u_1} k_{u_3-u_2}} \right. \right. \\
& + \gamma_X(u_2)\gamma_X(u_3-u_1) \left[v_{u_1, u_2, u_3}^{-k_{u_2} k_{u_3-u_1}} \right] + \gamma_X(u_3)\gamma_X(u_2-u_1) \\
& \left. \left. \left[v_{u_1, u_2, u_3}^{-k_{u_3} k_{u_2-u_1}} \right] \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{u_1} \sum_{u_2} \sum_{u_3} |u_j| |C_Y(u_1, u_2, u_3)| \leq \mu_a^2 \sum_{u_1} \sum_{u_2} \sum_{u_3} |u_j|$$

$$\left| v_{u_1, u_2, u_3} \right| \left| C_X(u_1, u_2, u_3) \right| +$$

$$+ 3\mu_a^2 \sum_{u_1, u_2, u_3} |u_j| |\gamma_X(u_1)| |\gamma_X(u_3 - u_2)| \left| v_{u_1, u_2, u_3}^{-k_{u_1} k_{u_3 - u_2}} \right|$$

Utilizando (4.8) e (4.12), temos que

$$\sum_{u_1, u_2, u_3} |u_j| |C_Y(u_1, u_2, u_3)| \leq QM +$$

$$+ 3\mu_a^2 \sum_{u_1, u_2, u_3} |u_j| |\gamma_X(u_1)| |\gamma_X(u_3 - u_2)| \left| v_{u_1, u_2, u_3}^{-k_{u_1} k_{u_3 - u_2}} \right|.$$

Fazendo a transformação

$$\begin{aligned} i &= u_1 & u_1 &= i \\ k &= u_3 - u_2 \Rightarrow & u_2 &= \ell \\ \ell &= u_2 & u_3 &= k + \ell \end{aligned}$$

temos,

$$\sum_{u_1, u_2, u_3} |u_j| |C_Y(u_1, u_2, u_3)| \leq QM +$$

$$+ 3\mu_a^2 \sum_{i, \ell, k} |u_j| |\gamma_X(i)| |\gamma_X(k)| \left| v_{i, \ell, k+\ell}^{-k_i k_k} \right|, \quad j=1, 2, 3.$$

Para $j = 1$ temos

$$\sum_{u_1, u_2, u_3} |u_1| |C_Y(u_1, u_2, u_3)| \leq QM + \\ + 3\mu_a^2 \sum_{i, k} |i| |\gamma_X(i)| |\gamma_X(k)| \sum_{\ell} |v_{i, \ell, k+\ell} - k_i k_k|.$$

Utilizando (4.7) vem,

$$\sum_{u_1, u_2, u_3} |u_1| |C_Y(u_1, u_2, u_3)| \leq QM \\ + 3\mu_a^2 \sum_{i, k} |i| |\gamma_X(i)| |\gamma_X(k)| V^*(|i| + |k| + 1) \\ = QM + 3V^*\mu_a^2 \sum_i |i|^2 |\gamma_X(i)| \sum_k |\gamma_X(k)| + \\ + 3V^*\mu_a^2 \sum_i |i| |\gamma_X(i)| \sum_k |k| |\gamma_X(k)| + 3V^*\mu_a^2 \sum_i |i| |\gamma_X(i)| \sum_k |\gamma_X(k)|.$$

De (4.11), temos que

$$\sum_{u_1, u_2, u_3} |u_1| |C_Y(u_1, u_2, u_3)| < \infty.$$

Para $j=2,3$ temos uma demonstração análoga.

Assim,

$$\sum_{u_1} \sum_{u_2} \sum_{u_3} |u_j| |C_Y(u_1, u_2, u_3)| < \infty, \quad j = 1, 2, 3.$$

Um possível estimador para $f_x(\lambda)$ é baseado no seguinte resultado, que aparece em Bloomfield (1970), no caso de distribuição de Bernoulli. Ver também Brillinger (1983).

Teorema 4.2.1:
$$f_x(\lambda) = \frac{f_y(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-\omega) f_y(\omega) d\omega$$

se $\sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma_x(u)| < \infty$ e (4.6) estiver satisfeita.

Dem:

As condições do teorema garantem a existência de $f_x(\lambda)$ e $f_y(\lambda)$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f_y(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-\omega) f_y(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi\mu_a^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \gamma_y(r) e^{-i\lambda r} \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r \gamma_y(r) e^{-i\lambda r} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \gamma_y(r) e^{-i\lambda r} (\mu_a^{-2} - b_r). \end{aligned}$$

Mas

$$\mu_a^{-2} - b_r = \mu_a^{-2} - \mu_a^{-2} + (\mu_a k_r)^{-1} = (\mu_a k_r)^{-1},$$

assim

$$\frac{\hat{f}_Y(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-\omega) \hat{f}_Y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_Y(r)}{\mu_a k_r} e^{-i\lambda r}.$$

Utilizando (4.13) temos que

$$\frac{\hat{f}_Y(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-\omega) \hat{f}_Y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k) e^{-i\lambda k} = f_X(\lambda).$$

Assim, um estimador natural para $f_X(\lambda)$ é dado por

$$\hat{f}_X(\lambda) = \frac{\hat{\hat{f}}_Y(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-\omega) \hat{\hat{f}}_Y(\omega) d\omega \quad (4.15)$$

onde $\hat{\hat{f}}_Y(\lambda)$ é um estimador qualquer de $f_Y(\lambda)$.

Vamos estudar, agora, as propriedades do estimador (4.15) supondo que

$$\begin{aligned} \hat{f}_Y^1(\lambda) &= I_Y^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=0}^{T-1} Y(t) e^{-i\lambda t} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_u e^{-i\lambda u} \hat{\gamma}_Y(u) \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde

$$\hat{\gamma}_Y(u) = T^{-1} \sum_{0 \leq t, t+u \leq T-1} Y(t+u) Y(t),$$

pois $\mu_Y = 0$.

Substituindo $\hat{f}_Y^1(\lambda)$ em (4.15) teremos o estimador

$$\hat{f}_X^{1B}(\lambda) = \frac{\hat{f}_Y^1(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda - \omega) \hat{f}_Y^1(\omega) d\omega. \quad (4.17)$$

A seguir veremos que $\hat{f}_X^{1B}(\lambda)$, embora assintoticamente não viciado, é um estimador não-consistente.

Teorema 4.2.2: (i) $\hat{f}_X^{1B}(\lambda)$ é um estimador assintoticamente não viciado de $f_X(\lambda)$ se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $\sum_u |\gamma_X(u)| < \infty$ e (4.6) estiver satisfeita.

$$(ii) \text{Var} \hat{f}_X^{1B}(\lambda) = \frac{f_Y^2(\lambda)}{\mu_a^4} + O(T^{-1}) \text{ se } \lambda = \frac{2\pi s}{T}, s \not\equiv 0 \pmod{T}, \quad (4.8),$$

(4.11) e (4.12) estiverem satisfeitas.

Dem:

(i) Se $\sum_r |\gamma_X(r)| < \infty$ e $\sum_r |\gamma_a(r)| < \infty$, então $\sum_r |\gamma_Y(r)| < \infty$ e $E\hat{f}_Y^1(\lambda) \rightarrow f_Y(\lambda)$, $T \rightarrow \infty$, de acordo com o Corolário 5.2.1 de Brillinger (1975, p. 123). Assim, utilizando (4.17) e o Teorema 4.2.1, temos que $E\hat{f}_X^{1B}(\lambda) \rightarrow f_X(\lambda)$, $T \rightarrow \infty$.

(ii) A demonstração encontra-se no Apêndice A.

4.3 - Estimador no caso C (Suposição 1.3.3 válida)

Em alguns dos teoremas referentes ao caso C aparece a suposição

$$\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} (1+|u_j|) |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty, \quad j=1, \dots, k-1, \quad k=2, 3, \dots$$

Pode-se demonstrar que ela está satisfeita se

$$\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} (1+|u_j|) |C_X(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty, \quad j=1, \dots, k-1, \quad k=2, 3, \dots$$

e

$$E|A(t)|^k < \infty, \quad k=2, 3, \dots$$

Vimos no Corolário 3.3 que

$$d_Y^{(T)}(\lambda) \xrightarrow{D} \begin{cases} N_1^C(0, 2\pi T \left[\frac{\sigma_a^2(\sigma_x^2 + \mu_x^2)}{2\pi} + \mu_a^2 f_x(\lambda) \right]), & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ N_1(\mu_a \mu_x T, 2\pi T \left[\frac{\sigma_a^2(\sigma_x^2 + \mu_x^2)}{2\pi} + \mu_a^2 f_x(\lambda) \right]), & \text{se } \lambda = 0, \pm 2\pi, \dots \\ N_1(\theta, 2\pi T \left[\frac{\sigma_a^2(\sigma_x^2 + \mu_x^2)}{2\pi} + \mu_a^2 f_x(\lambda) \right]), & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \end{cases}$$

sugerindo, como no caso A, um estimador para $f_x(\lambda)$, $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, dado por

$$\hat{f}_x^{1C}(\lambda) = (2\pi T \mu_a^2)^{-1} \left| d_Y^{(T)}(\lambda) \right|^2 - (2\pi \mu_a^2)^{-1} \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2). \quad (4.18)$$

Estudaremos, agora, propriedades do estimador (4.18).

Teorema 4.3.1: Se $\sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma_x(u)| < \infty$, então

$$E \hat{f}_x^{1C}(\lambda) = (2\pi T)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\text{sen} T(\lambda - \alpha)/2}{\text{sen}(\lambda - \alpha)/2} \right]^2 f_x(\alpha) d\alpha + (2\pi T)^{-1} \mu_x^2 \left[\frac{\text{sen} T\lambda/2}{\text{sen} \lambda/2} \right]^2.$$

Dem:

Utilizando os seguintes fatos (ver demonstração do Teorema 4.1.1, Apêndice A)

$$\begin{aligned} (i) \quad E \hat{f}_x^{1C}(\lambda) &= (2\pi T \mu_a^2)^{-1} \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(-\lambda) \right] + (2\pi T \mu_a^2)^{-1} \left| E d_Y^{(T)}(\lambda) \right|^2 \\ &\quad - (2\pi \mu_a^2)^{-1} \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$(ii) \quad \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(-\lambda) \right] = \text{Cov} \left[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(\lambda) \right]$$

$$= T \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) + \mu_a^2 \sum_{s,t=0}^{T-1} e^{-i\lambda(s-t)} \gamma_x(s-t)$$

$$= T \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) + \mu_a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{u=0}^{T-1} e^{-iu(\lambda-\alpha)} \right|^2 f_x(\alpha) d\alpha$$

$$= T \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) + \mu_a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\text{sen} T(\lambda - \alpha)/2}{\text{sen}(\lambda - \alpha)/2} \right]^2 f_x(\alpha) d\alpha$$

e

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad |E d_Y^{(T)}(\lambda)| &= \left| \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} \right|^2 \mu_x^2 \mu_a^2 \\
 &= \left[\frac{\text{sen} T\lambda/2}{\text{sen} \lambda/2} \right]^2 \mu_x^2 \mu_a^2
 \end{aligned}$$

temos que, de acordo com (4.19),

$$\begin{aligned}
 E \hat{f}_x^{1C}(\lambda) &= (2\pi T \mu_a^2)^{-1} \left[T \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) + \mu_a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\text{sen} T(\lambda-\alpha)/2}{\text{sen}(\lambda-\alpha)/2} \right]^2 f_x(\alpha) d\alpha \right] \\
 &+ (2\pi T \mu_a^2)^{-1} \left[\frac{\text{sen} T\lambda/2}{\text{sen} \lambda/2} \right]^2 \mu_x^2 \mu_a^2 - (2\pi \mu_a^2)^{-1} \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) \\
 &= (2\pi T)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\text{sen} T(\lambda-\alpha)/2}{\text{sen}(\lambda-\alpha)/2} \right]^2 f_x(\alpha) d\alpha + (2\pi T)^{-1} \mu_x^2 \left[\frac{\text{sen} T\lambda/2}{\text{sen} \lambda/2} \right]^2.
 \end{aligned}$$

Corolário 4.3.1: Sob as mesmas condições do Teorema 4.3.1 e se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $\hat{f}_x^{1C}(\lambda)$ é um estimador assintoticamente não viciado de $f_x(\lambda)$.

Dem:

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} E \hat{f}_x^{1C}(\lambda) &= \lim_{T \rightarrow \infty} (2\pi T^{-1}) \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\text{sen} T(\lambda-\alpha)/2}{\text{sen}(\lambda-\alpha)/2} \right]^2 f_x(\alpha) d\alpha \\
 &= f_x(\lambda)
 \end{aligned}$$

pois $\frac{1}{2\pi T} \left[\frac{\text{sen} T\lambda/2}{\text{sen} \lambda/2} \right]^2$ é o núcleo de Fejér.

Teorema 4.3.2: Se $\sum_u |u| |\gamma_x(u)| < \infty$, então

$$\hat{E}f_x^{1C}(\lambda) = f_x(\lambda) + (2\pi T)^{-1} \left[\frac{\text{sen} T\lambda/2}{\text{sen} \lambda/2} \right]^2 \mu_x^2 + O(T^{-1}).$$

Dem:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[d_Y^{(T)}(\lambda_1), d_Y^{(T)}(\lambda_2) \right] &= \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda_1), d_Y^{(T)}(-\lambda_2) \right] \\ &= \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} e^{-i(\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2)} \text{Cov} \left[A(t_1)X(t_1), A(t_2)X(t_2) \right] \\ &= \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} e^{-i(\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2)} \left\{ \left[\gamma_a(t_1 - t_2) + \mu_a^2 \right] \left[\gamma_x(t_1 - t_2) + \mu_x^2 \right] - \mu_a^2 \mu_x^2 \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando o fato que $\gamma_a(t_1 - t_2) = 0$ para $t_1 \neq t_2$, temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[d_Y^{(T)}(\lambda_1), d_Y^{(T)}(\lambda_2) \right] &= \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) \sum_{t_1=0}^{T-1} e^{-it_1(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\ &+ \mu_a^2 \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} \gamma_x(t_1 - t_2) e^{-i(\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2)}. \end{aligned}$$

Fazendo a transformação $t_1 - t_2 = u$ e $t = t_2$, temos

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[d_Y^{(T)}(\lambda_1), d_Y^{(T)}(\lambda_2) \right] &= \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) \Delta^{(T)}(\lambda_1 - \lambda_2) + \\ &+ \mu_a^2 \Delta^{(T)}(\lambda_1 - \lambda_2) 2\pi f_x(\lambda_1) + O(1). \end{aligned}$$

Assim, se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, temos

$$\text{Cov} \left[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(\lambda) \right] = T\sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) + 2\pi T\mu_a^2 f_x(\lambda) + O(1).$$

Substituindo em (4.19), vem

$$\begin{aligned} E\hat{f}_x^{1C}(\lambda) &= (2\pi T\mu_a^2)^{-1} \left[T\sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2) + 2\pi T\mu_a^2 f_x(\lambda) + O(1) \right] + \\ &+ (2\pi T\mu_a^2)^{-1} \left[\frac{\text{sen} T\lambda/2}{\text{sen} \lambda/2} \right]^2 \mu_x^2 \mu_a^2 - (2\pi\mu_a^2)^{-1} \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_a^2) \end{aligned}$$

Assim,

$$E\hat{f}_x^{1C}(\lambda) = f_x(\lambda) + (2\pi T)^{-1} \left[\frac{\text{sen} T\lambda/2}{\text{sen} \lambda/2} \right]^2 \mu_x^2 + O(T^{-1}).$$

Corolário 4.3.2: Sob as mesmas condições do Teorema 4.3.2, se

$\lambda = \frac{2\pi s}{T}$, $s \not\equiv 0 \pmod{T}$, então

$$E\hat{f}_x^{1C}(\lambda) = f_x(\lambda) + O(T^{-1}).$$

A estrutura de covariâncias e a variância assintótica diferente de zero (estimador não consistente) são os resultados dos próximos teoremas.

Teorema 4.3.3: Se $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$,

$j=1, \dots, k-1$, $k=2, 3, 4$ então

$$\text{Cov} \left[\hat{f}_x^{1C}(\lambda), \hat{f}_x^{1C}(\mu) \right] = \frac{1}{\mu_a^4} \left\{ \left[\frac{\text{sen}T(\lambda+\mu)/2}{T \text{sen}(\lambda+\mu)/2} \right]^2 + \left[\frac{\text{sen}T(\lambda-\mu)/2}{T \text{sen}(\lambda-\mu)/2} \right]^2 \right\} f_Y^2(\lambda) +$$

$$+ O(T^{-1})$$

para $\lambda, \mu \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

A demonstração do teorema encontra-se no Apêndice A.

Teorema 4.3.4: Se $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$, $j=1, \dots, k-1$

$k=2, 3, 4$, $\lambda = \frac{2\pi s}{T}$, $\mu = \frac{2\pi r}{T}$, $r, s, r \pm s \not\equiv 0 \pmod{T}$, então

$$\text{i)} \quad \text{Cov} \left[\hat{f}_x^{1C}(\lambda), \hat{f}_x^{1C}(\mu) \right] = O(T^{-1})$$

$$\text{ii)} \quad \text{Var} \hat{f}_x^{1C}(\lambda) = \frac{f_Y^2(\lambda)}{\mu_a^4} + O(T^{-1}).$$

Dem:

- (i) Utilizando o Teorema 4.3.3 e os fatos que $\lambda \neq \mu$, $\lambda \pm \mu = \frac{2\pi(r \pm s)}{T}$, $r \pm s \not\equiv 0 \pmod{T}$, temos que

$$\text{Cov} \left[\hat{f}_x^{1C}(\lambda), \hat{f}_x^{1C}(\mu) \right] = O(T^{-1}),$$

pois

$$\left[\frac{\sin T(\lambda \pm \mu)/2}{T \sin(\lambda \pm \mu)/2} \right]^2 = \left| \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i(\lambda \pm \mu)t} \right|^2 \frac{1}{T^2} = \text{zero}.$$

- (ii) Fazendo $\lambda = \mu$, no resultado do Teorema 4.3.3 temos

$$\begin{aligned} \text{Var} \hat{f}_x^{1C}(\lambda) &= \left[\left| \Delta^{(T)}(2\lambda) \right|^2 \frac{1}{T^2} + \left| \Delta^{(T)}(0) \right|^2 \frac{1}{T^2} \right] \frac{f_y^2(\lambda)}{\mu_a^4} + O(T^{-1}) \\ &= \frac{f_y^2(\lambda)}{\mu_a^4} + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

Nos teoremas 4.3.3 e 4.3.4 os resultados aparecem em função de $f_y(\lambda)$. Por outro lado, se utilizarmos (3.2) e o fato de que a sequência $\{A(t), t=0, \pm 1, \dots\}$ é formada por variáveis aleatórias in dependentes e identicamente distribuídas, temos que

$$f_y(\lambda) = \frac{\sigma_a^2 \sigma_x^2}{2\pi} + \frac{\mu_x^2 \sigma_a^2}{2\pi} + \mu_a^2 f_x(\lambda).$$

Assim,

$$f_Y(\lambda) = \mu_a^2 f_X(\lambda) + \frac{\sigma_a^2(\sigma_X^2 + \mu_X^2)}{2\pi} \quad (4.20)$$

e, se for de interesse, podemos substituir $f_Y(\lambda)$ por (4.20).

CAPÍTULO 5

ESTIMADORES SUAVIZADOS DO ESPECTRO

5.1 - Estimadores no caso A

O teorema 4.1.3 sugere um estimador melhor para $f_x(\lambda)$; ele é baseado no fato de que as $(2m+1)$ ordenadas $I_x^A(2\pi[s(T)+j]/T)$, $j=0, \pm 1, \dots, \pm m$, com $\frac{2\pi s(T)}{T}$ próximo de λ , são variáveis com distribuição assintótica $\frac{f_x(\lambda)}{2} \chi_2^2$ independentes. Assim, o novo estimador será uma média aritmética das ordenadas do periodograma em torno de λ :

$$\hat{f}_x^{2A}(\lambda) = \begin{cases} (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m I_x^A\left(2\pi \left[\frac{s(T)+j}{T}\right]\right) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ (2m)^{-1} \left(\sum_{j=-m}^{-1} + \sum_{j=1}^m \right) I_x^A\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ ou} \\ & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e} \\ & T \text{ par} \\ (2m)^{-1} \sum_{j=1}^m I_x^A\left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T}\right) + I_x^A\left(\lambda + \frac{\pi}{T} - \frac{2\pi j}{T}\right) & \text{se} \\ & \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } T \text{ ímpar} \end{cases} \quad (5.1)$$

com $I_x^A(\lambda)$ dado por (4.1).

As propriedades do estimador $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$ são consideradas a seguir.

Teorema 5.1.1: Se $\sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma_X(u)| < \infty$, então

$$E\hat{f}_X^{2A}(\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} (2m+1)^{-1} \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-m}^m \left| H_a^{(1)} \left(2\pi \left[\frac{s(T)+j}{T} \right] - \alpha \right) \right|^2 f_X(\alpha) d\alpha \right. \\ \quad \left. + \mu_X^2 \left| H_a^{(1)} \left(2\pi \left[\frac{s(T)+j}{T} \right] \right) \right|^2 \right] \text{ se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \\ m^{-1} \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^m \left| H_a^{(1)} \left(\frac{\lambda+2\pi j}{T} - \alpha \right) \right|^2 f_X(\alpha) d\alpha + \right. \\ \quad \left. \mu_X^2 \sum_{j=1}^m \left| H_a^{(1)} \left(\lambda + \frac{2\pi j}{T} \right) \right|^2 \right] \text{ se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ ou } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \\ \quad \text{e } T \text{ par} \\ \\ m^{-1} \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^m \left| H_a^{(1)} \left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T} - \alpha \right) \right|^2 f_X(\alpha) d\alpha \right. \\ \quad \left. + \mu_X^2 \sum_{j=1}^m \left| H_a^{(1)} \left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T} \right) \right|^2 \right] \text{ se } \lambda \equiv \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e} \\ \quad \text{e } T \text{ ímpar} \end{array} \right.$$

Dem:

(i) Se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$,

$$E\hat{f}_X^{2A}(\lambda) = (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m EI_X^A \left[2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) \right].$$

Utilizando o Teorema 4.1.1 temos

$$\begin{aligned}
 \hat{E}f_X^{2A}(\lambda) &= (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m \left\{ \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| H_a^{(1)} \left[2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) - \alpha \right] \right|^2 f_X(\alpha) d\alpha \right. \\
 &\quad \left. + \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \mu_X^2 \left| H_a^{(1)} \left[2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) \right] \right|^2 \right\} \\
 &= (2m+1)^{-1} \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \sum_{j=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} \left| H_a^{(1)} \left[2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) - \alpha \right] \right|^2 f_X(\alpha) d\alpha \\
 &\quad + (2m+1)^{-1} \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \mu_X^2 \sum_{j=-m}^m \left| H_a^{(1)} \left[2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) \right] \right|^2 .
 \end{aligned}$$

(ii) Se $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou se $\lambda = \pm\lambda, \pm 3\lambda, \dots$ e T par.

$$\hat{E}f_X^{2A}(\lambda) = m^{-1} \sum_{j=1}^m EI_X^A \left(\lambda + \frac{2\pi j}{T} \right) .$$

Utilizando o Teorema 4.1.1 temos que

$$\begin{aligned}
 \hat{E}f_X^{2A}(\lambda) &= m^{-1} \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \sum_{j=1}^m \int_{\pi}^{\pi} \left| H_a^{(1)} \left[\lambda + \frac{2\pi j}{T} - \alpha \right] \right|^2 f_X(\alpha) d\alpha \\
 &\quad + m^{-1} \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-1} \mu_X^2 \sum_{j=1}^m \left| H_a^{(1)} \left(\lambda + \frac{2\pi j}{T} \right) \right|^2 .
 \end{aligned}$$

A demonstração é análoga para o caso $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ e T ímpar.

Assim, $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$ poderá ser um estimador viciado de $f_x(\lambda)$, a menos que sejam introduzidas suposições adicionais sobre a sequência $A(t)$ (a mesma introduzida na Proposição 4.1.1), a proximidade de λ e $\frac{2\pi s}{T}$ e sobre o valor de m .

Proposição 5.1.1: Sob as condições do Teorema 5.1.1, se $\mu_x = 0$, $\sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) = O(T^\alpha)$, para algum $\alpha > 0$, $\lambda - \frac{2\pi s}{T} = O(T^{-1})$ e m constante com respeito a T , então $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$ é um estimador assintoticamente não viciado de $f_x(\lambda)$.

A demonstração encontra-se no Apêndice A.

Veremos, agora, que $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$ ainda é um estimador inconsistente de $f_x(\lambda)$, embora tenha ordenadas assintoticamente independentes para frequências $\lambda, \mu \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

Teorema 5.1.2: Se $\mu_x = 0$, $\sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$, $j=1, \dots, k-1$, $k=2, 3, \dots$, $\lambda - \frac{2\pi s(T)}{T} = O(T^{-1})$, $\lambda \pm \mu \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, m independente de T e $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$ dada por (5.1), então

$$(i) \quad \text{Var} \hat{f}_x^{2A}(\lambda) = \frac{f_x^2(\lambda)}{2m+1} + O(T^{-1}) \text{ se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$(ii) \quad \text{Var} \hat{f}_x^{2A}(\lambda) = \frac{f_x^2(\lambda)}{m} + O(T^{-1}) \text{ se } \lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$(iii) \quad \text{Cov} \left[\hat{f}_x^{2A}(\lambda), \hat{f}_x^{2A}(\mu) \right] = O(T^{-1}).$$

Dem:

$$(i) \quad \text{Var} \hat{f}_x^{2A}(\lambda) = \left(\frac{1}{2m+1} \right)^2 \text{Var} \sum_{j=-m}^m I_x^A \left[2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) \right] .$$

Utilizando o Teorema 4.1.2 e o Corolário 4.1.2 temos que

$$\begin{aligned} \text{Var} \hat{f}_x^{2A}(\lambda) &= \left(\frac{1}{2m+1} \right)^2 \sum_{j=-m}^m \text{Var} I_x^A \left[2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) \right] + O(T^{-1}) \\ &= \left(\frac{1}{2m+1} \right)^2 \sum_{j=-m}^m f_x^2 \left[2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) \right] + O(T^{-1}) \\ &= \frac{f_x^2(\lambda)}{2m+1} + O(T^{-1}) . \end{aligned}$$

(ii) Se $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou se $\lambda = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$ e T par, então

$$\begin{aligned} \text{Var} \hat{f}_x^{2A}(\lambda) &= m^{-2} \text{Var} \sum_{j=1}^m I_x^A \left(\lambda + \frac{2\pi j}{T} \right) \\ &= m^{-2} \sum_{j=1}^m f_x^2 \left(\lambda + \frac{2\pi j}{T} \right) + O(T^{-1}) \\ &= \frac{f_x^2(\lambda)}{m} + O(T^{-1}) . \end{aligned}$$

Se $\lambda = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$ e T ímpar, a demonstração é análoga.

(iii) Utilizando o Teorema 4.1.2, o Corolário 4.1.2 e a definição de $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$, temos que

$$\text{Cov} \left[\hat{f}_x^{2A}(\lambda), \hat{f}_x^{2A}(\mu) \right] = O(T^{-1}) .$$

Teorema 5.1.3: Suponha $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$,

$j=1, \dots, k-1, k=2, 3, \dots$. Seja $s(T)$ um inteiro com $\lambda(T) = \frac{2\pi s(T)}{T} \rightarrow \lambda$ quando $T \rightarrow \infty$, $2\lambda_j, \lambda_j \pm \lambda_k \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, $1 \leq j < k \leq J$ e $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$ dado por (5.1). Então

(i) $\hat{f}_x^{2A}(\lambda_1), \dots, \hat{f}_x^{2A}(\lambda_J)$ são assintoticamente independentes com $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$ assintoticamente $\frac{f_x(\lambda)}{4m+2} \chi_{4m+2}^2$ se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

(ii) $\hat{f}_x^{2A}(\lambda) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \frac{f_x(\lambda)}{2m} \chi_{2m}^2$ se $\lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Dem:

(i) De acordo com o Teorema 4.1.3, se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

$$I_x^A(\lambda(T)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{f_x(\lambda)}{2} \chi_2^2.$$

Sabemos que $\hat{f}_x^{2A}(\lambda) = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=-m}^m I_x^A(2\pi \left[\frac{s(T)+j}{T} \right])$ é uma soma

ponderada de variáveis aleatórias assintoticamente independentes e com distribuição assintótica $\frac{f_x(\lambda)}{2} \chi_2^2$.

Assim,

$$\frac{I_x^A(2\pi \left[\frac{s(T)+j}{T} \right])}{2m+1} \xrightarrow{D} \frac{f_x(\lambda)}{2(2m+1)} \chi_{2m+1}^2, j=-m, \dots, m, \text{ independentes pois}$$

$$\frac{2\pi s(T)}{T} \rightarrow \lambda, \text{ quando } T \rightarrow \infty, \text{ e}$$

$$\hat{f}_x^{2A}(\lambda) \xrightarrow{D} \frac{f_x(\lambda)}{2(2m+1)} \chi_{2(2m+1)}^2$$

(ii) Se $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou se $\lambda = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$ e T par

$$\hat{f}_x^{2A}(\lambda) = (2m)^{-1} \left(\sum_{j=-m}^{-1} + \sum_{j=1}^m \right) I_x^A\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right).$$

De acordo com o Teorema 4.1.3

$$\frac{I_x^A\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right)}{2m} \xrightarrow{D} \frac{f_x(\lambda)}{2m} \chi_{2m}^2, j=1, \dots, m, \text{ independentes, assim}$$

$$\hat{f}_x^{2A}(\lambda) \xrightarrow{D} \frac{f_x(\lambda)}{2m} \chi_{2m}^2.$$

Demonstração análoga se $\lambda = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$ e T ímpar.

Se analisarmos os resultados das Proposições 4.1.1 e 5.1.1 e Teorema 5.1.2 veremos que os estimadores (4.1) e (5.1), embora assintoticamente não viciados, são inconsistentes. O segundo estimador, $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$, tem uma variância assintoticamente menor, embora di-

ferente de zero, pois m é uma constante fixada a priori. Uma maneira de construir um estimador consistente é ponderar um número de ordenadas do periodograma que vai aumentando à medida que $T \rightarrow \infty$.

Assim seja

$$\hat{f}_x^{3A}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) I_x^A\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \quad -\infty < \lambda < \infty \quad (5.2)$$

onde $W^{(T)}(\alpha)$ é uma família de funções peso de período 2π , tal que

$$W^{(T)}(\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_T^{-1} W\left[B_T^{-1}(\alpha + 2\pi j)\right], \quad -\infty < \alpha < \infty$$

onde B_T , $T=1,2,\dots$ é uma sequência de escalares, com as propriedades $B_T > 0$, $B_T \rightarrow 0$, $B_T T \rightarrow \infty$ quando $T \rightarrow \infty$ e $W(\beta)$ uma função determinística, real, par, de variação limitada satisfazendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\beta) d\beta = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |W(\beta)| d\beta < \infty.$$

Teorema 5.1.4: (i) $E\hat{f}_x^{3A}(\lambda) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} f_x(\lambda)$ se $\mu_x = 0$, $\sum_u |\gamma_x(u)| < \infty$ e

$$\sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) = O(T^\alpha), \text{ para algum } \alpha > 0.$$

$$(ii) \lim_{T \rightarrow \infty} B_T T \text{Cov}\left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda), \hat{f}_x^{3A}(\mu)\right] = 2\pi \left[\eta(\lambda - \mu) + \eta(\lambda + \mu)\right] f_x^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta$$

$$\text{se } \mu_x = 0 \text{ e } \sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty, \quad j=1, \dots, k-1,$$

$$k=2, 3, \dots$$

(iii) $\text{Var} \hat{f}_x^{3A}(\lambda) \rightarrow 0, T \rightarrow \infty.$

$$\text{Nota: } \eta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ 0 & \text{se } \alpha \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

A demonstração do teorema encontra-se no Apêndice A.

Assim, $\hat{f}_x^{3A}(\lambda)$ é um estimador consistente e tem a mesma estrutura de covariâncias assintótica que o estimador suavizado de periodogramas usual de $f_x(\lambda)$, quando temos observações do processo de interesse $X(t)$; ver Brillinger (1975).

Finalmente, verificaremos a normalidade assintótica do estimador.

Teorema 5.1.5: Suponha que $\sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots \sum_{u_{k-1}} (1+|u_j|) |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$, $j=1, \dots, k-1$, $k=2, \dots$, $f_x(\lambda_j) \neq 0$, $j=1, \dots, J$ e $\sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) = O(T)$. Então $\hat{f}_x^{3A}(\lambda_1), \dots, \hat{f}_x^{3A}(\lambda_J)$ são assintoticamente conjuntamente normais com estrutura de covariâncias dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T^{-1} \text{Cov}[\hat{f}_x^{3A}(\lambda), \hat{f}_x^{3A}(\mu)] = 2\pi [\eta(\lambda - \mu) + \eta(\lambda + \mu)] f_x^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta.$$

A demonstração do Teorema encontra-se no Apêndice A.

Corolário 5.1.5: Sob as condições do Teorema 5.1.5, $\hat{f}_x^{3A}(\lambda)$ e $\hat{f}_x^{3A}(\mu)$ são assintoticamente independentes se $\lambda \pm \mu \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

5.2 - Estimadores no caso B

Pelo mesmo argumento utilizado na seção 5.1 podemos propor,

$$\hat{f}_Y^2(\lambda) = \begin{cases} (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m I_Y^{(T)}\left(2\pi \left[\frac{s(T)+j}{T}\right]\right) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ (m)^{-1} \sum_{j=1}^m I_Y^{(T)}\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ ou} \\ & \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } T \text{ par} \\ (m)^{-1} \sum_{j=1}^m I_Y^{(T)}\left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T}\right) & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e} \\ & T \text{ ímpar} \end{cases}$$

com $I_Y^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=0}^{T-1} Y(T) e^{-i\lambda t} \right|^2$. Substituindo $\hat{f}_Y^2(\lambda)$ em (4.15), temos um novo estimador para $f_x(\lambda)$,

$$\hat{f}_x^{2B}(\lambda) = \frac{\hat{f}_Y^2(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-\omega) \hat{f}_Y^2(\omega) d\omega. \quad (5.3)$$

Teorema 5.2.1: (i) $E\hat{f}_x^{2B}(\lambda) = f_x(\lambda) + O(T^{-1})$ se $\lambda - \frac{2\pi s(T)}{T} = O(T^{-1})$,

m constante com respeito a T, $\sum_u |u| |\gamma_x(u)| < \infty$ e (4.6) estiver satisfeita.

$$(ii) \text{Var} \hat{f}_x^{2B}(\lambda) = \begin{cases} \frac{f_Y^2(\lambda)}{(2m+1)\mu_a^4} + O(T^{-1}) & , \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \frac{f_Y^2(\lambda)}{m\mu_a^4} + O(T^{-1}) & , \lambda \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases}$$

se valerem (4.8), (4.11) e (4.12).

A demonstração do teorema está no Apêndice A.

Embora $\hat{f}_x^{2B}(\lambda)$ dado por (5.3) seja um estimador melhor do que $\hat{f}_x^{1B}(\lambda)$, dado por (4.17), podemos verificar, analisando os resultados do Teorema 5.2.1, que ele não é um estimador consistente. A idéia, aqui, é a mesma que foi utilizada na seção 5.1 para construir um estimador consistente: ponderar um número de ordenadas do periodograma que vai aumentando à medida que $T \rightarrow \infty$.

O estimador utilizado é

$$\hat{f}_x^{3B}(\lambda) = \frac{\hat{f}_Y^3(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda - \omega) \hat{f}_Y^3(\omega) d\omega \quad (5.4)$$

onde

$$\hat{f}_Y^3(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) I_Y^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \quad (5.5)$$

com $I_Y^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$ dado por (4.16) e $W^{(T)}(\alpha)$ como descrito na seção 5.1.

Teorema 5.2.2: $\hat{f}_X^{3B}(\lambda)$ dado por (5.4) é um estimador consistente em média quadrática de $f_X(\lambda)$ se valerem (4.8), (4.11) e (4.12).

A demonstração do teorema é feita em duas partes:

$$(i) \quad E\hat{f}_X^{3B}(\lambda) \rightarrow f_X(\lambda) \quad , \quad T \rightarrow \infty.$$

$$(ii) \quad \text{Var}\hat{f}_X^{3B}(\lambda) \rightarrow 0 \quad , \quad T \rightarrow \infty.$$

que se encontram no Apêndice A.

Se reescrevermos (5.5) de uma outra maneira, poderemos verificar que o estimador depende de parâmetros desconhecidos que terão de ser estimados de alguma forma. Sabemos que

$$\begin{aligned} \hat{f}_Y^{3B}(\lambda) &= \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) I_Y^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \quad , \quad -\infty < \lambda < \infty \\ &\approx \int_0^{2\pi} W^{(T)}(\lambda - \alpha) I_Y^{(T)}(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\text{onde } W^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w^{(T)}(k) e^{-i\lambda k} \quad ,$$

$$w^{(T)}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W^{(T)}(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda \quad ,$$

$$I_Y^{(T)}(\alpha) = (2\pi T)^{-1} \left| \sum_{t=0}^{T-1} Y(t) e^{-i\alpha t} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-T+1}^{T-1} e^{-i\alpha u} \hat{\gamma}_Y(u)$$

e $\hat{\gamma}_Y(u) = \frac{1}{T} \sum_{0 \leq t; t+u \leq T-1} Y(t+u)Y(t)$, pois $\mu_Y = 0$. Assim,

$$\hat{f}_Y^{3B}(\lambda) \cong \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-T+1}^{T-1} \hat{\gamma}_Y(u) w^{(T)}(u) e^{-i\lambda u}. \quad (5.7)$$

Substituindo (5.7) em (5.5) temos que

$$\begin{aligned} \hat{f}_X^{3B}(\lambda) &\cong \frac{1}{2\pi \mu_a^2} \sum_{u=-T+1}^{T-1} \hat{\gamma}_Y(u) w^{(T)}(u) e^{-i\lambda u} - \frac{1}{2\pi} \sum_u b_u \hat{\gamma}_Y(u) w^{(T)}(u) e^{-i\lambda u} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-T+1}^{T-1} \hat{\gamma}_Y(u) w^{(T)}(u) e^{-i\lambda u} (\mu_a^{-2} - b_u) \end{aligned}$$

e

$$\hat{f}_X^{3B}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-T+1}^{T-1} \frac{w^{(T)}(u)}{\mu_a k_u} \hat{\gamma}_Y(u) e^{-i\lambda u} \quad (5.8)$$

ou seja, $\hat{f}_X^{3B}(\lambda)$ é um estimador suavizado de covariâncias que depende de $E(A_t A_{t+u}) = \mu_a k_u$, desconhecida.

Se substituirmos, $\mu_a k_u$ por um estimador assintoticamente não viciado, isto é,

$$\widehat{\mu_a k_u} = \begin{cases} \frac{\sum_{t=1}^{T-1-u} A(t)A(t+u)}{T-u}, & \text{se } \widehat{\mu_a k_u} > \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde ε é um limite inferior conhecido de $\mu_a k_u$, teremos um novo estimador,

$$\tilde{f}_x^{3B}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-T+1}^{T-1} \frac{w^{(T)}(u) \hat{\gamma}_y(u) e^{-i\lambda u}}{\widehat{\mu_a k_u}} \quad (5.9)$$

assintoticamente equivalente a $\hat{f}_x^{3B}(\lambda)$, como provado a seguir.

Teorema 5.2.3: $\tilde{f}_x^{3B}(\lambda)$, dado por (5.9), é assintoticamente equivalente a $\hat{f}_x^{3B}(\lambda)$, dado por (5.8), se

$$\text{Var } \widehat{\mu_a k_u} = O(T - |u|)^{-1} \text{ e } \text{Cov}(\widehat{\mu_a k_u}, \widehat{\mu_a k_v}) = O(T^{-1}).$$

A demonstração do teorema está no Apêndice A.

5.3 - Estimadores no Caso C

O Corolário 4.3.2 e o Teorema 4.3.4 nos sugerem um estimador melhor para $f_x(\lambda)$; ele é baseado no fato de que as $(2m+1)$ ordenadas $\hat{f}_x^{1C}(2\pi[s(T)+j]/T)$, $j=0, \pm 1, \dots, \pm m$, com $\frac{2\pi s(T)}{T}$ próximo de λ , são variáveis assintoticamente não correlacionadas e não viciadas. Assim, o novo estimador será uma média aritmética das ordenadas de $\hat{f}_x^{1C}$ em torno de λ .

$$\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = \begin{cases} (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m \hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ (2m)^{-1} \left[\sum_{j=-m}^{-1} + \sum_{j=1}^m \right] \hat{f}_x^{1C}\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ & \text{ou se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } T \text{ par} \\ (2m)^{-1} \sum_{j=1}^m \left[\hat{f}_x^{1C}\left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T}\right) + \hat{f}_x^{1C}\left(\lambda + \frac{\pi}{T} - \frac{2\pi j}{T}\right) \right] & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } T \text{ ímpar} \end{cases} \quad (5.10)$$

ou

$$\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = \begin{cases} (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m \hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ m^{-1} \sum_{j=1}^m \hat{f}_x^{1C}\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ ou } \\ & \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } T \text{ par} \\ m^{-1} \sum_{j=1}^m \hat{f}_x^{1C}\left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T}\right) & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } \\ & T \text{ ímpar} \end{cases} \quad (5.11)$$

Nos teoremas que virão a seguir utilizaremos a seguinte notação:

$$F_T(\lambda) = (2\pi T)^{-1} \left[\frac{\sin T\lambda/2}{\sin \lambda/2} \right]^2 : \text{ núcleo de Fejér,}$$

$$A_T^m(\lambda) = (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m F_T\left(\lambda - \frac{2\pi j}{T}\right),$$

$$B_T^m(\lambda) = (2m)^{-1} \left(\sum_{j=-m}^{-1} + \sum_{j=1}^m \right) F_T \left(\lambda - \frac{2\pi j}{T} \right)$$

e

$$C_T^m(\lambda) = (2m)^{-1} \sum_{j=1}^m \left[F_T \left(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T} \right) + F_T \left(\lambda + \frac{\pi}{T} - \frac{2\pi j}{T} \right) \right].$$

Teorema 5.3.1: Suponha que $\sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma_X(u)| < \infty$ e $\hat{f}_X^{2C}(\lambda)$ dado por (5.11).

Então

$$\hat{E}f_X^{2C}(\lambda) = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} A_T^m(\alpha) f_X \left(\frac{2\pi s(T)}{T} - \alpha \right) d\alpha & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{\pi} \\ \int_{-\pi}^{\pi} B_T^m(\alpha) f_X(\lambda - \alpha) d\alpha & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ ou se} \\ & \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } T \text{ par} \\ \int_{-\pi}^{\pi} C_T^m(\alpha) f_X(\lambda - \alpha) d\alpha & \text{se } \lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \text{ e } T \text{ ímpar} \end{cases}$$

A demonstração do teorema está no Apêndice A.

Para que $\hat{f}_X^{2C}(\lambda)$ seja assintoticamente não viciado, teremos que introduzir novas suposições.

Teorema 5.3.2: Se $\lambda - \frac{2\pi s(T)}{T} = o(T^{-1})$, $\sum_{u=-\infty}^{\infty} |u| |\gamma_X(u)| < \infty$, m é constante com respeito a T e $\hat{f}_X^{2C}(\lambda)$ dada por (5.11), então

$$E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = f_x(\lambda) + O(T^{-1}), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

A demonstração do teorema encontra-se no Apêndice A.

Os resultados seguintes mostram que $\hat{f}_x^{2C}(\lambda)$, embora melhor do que $\hat{f}_x^{1C}(\lambda)$, ainda é um estimador inconsistente.

Teorema 5.3.3: Se $\sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$,

$j=1, \dots, k-1$, $k=2, 3, 4$, $\lambda - \frac{2\pi s(T)}{T} = O(T^{-1})$; $\lambda \pm \mu \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, m independente de T e $\hat{f}_x^{2C}(\lambda)$ dado por (5.10), então

$$(i) \quad \text{Var}\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = \frac{1}{(2m+1)\mu_a^4} f_Y^2(\lambda) + O(T^{-1}) \quad \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$(ii) \quad \text{Var}\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = \frac{1}{m\mu_a^4} f_Y^2(\lambda) + O(T^{-1}) \quad \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$(iii) \quad \text{Cov}\left[\hat{f}_x^{2C}(\lambda), \hat{f}_x^{2C}(\mu)\right] = O(T^{-1}).$$

A demonstração do Teorema encontra-se no Apêndice A.

Nota: O valor $f_Y(\lambda)$ pode ser substituído pela expressão (4.20).

Repetindo o raciocínio utilizado nos casos A e B, vamos construir um estimador consistente poderando um número de ordenadas do periodograma que vai aumentando a medida que $T \rightarrow \infty$.

O estimador utilizado é

$$\hat{f}_x^{3C}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) \hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \quad -\infty < \lambda < \infty \quad (5.12)$$

com $\hat{f}_x^{1C}(\lambda)$ dado por (4.18) e $W^{(T)}(\alpha)$ como descrito no caso A.

Através dos dois próximos teoremas, iremos demonstrar que $\hat{f}_x^{3C}(\lambda)$ é um estimador consistente com distribuição assintótica normal.

Teorema 5.3.4: (i) $E\hat{f}_x^{3C}(\lambda) \xrightarrow[T \uparrow \infty]{} f_x(\lambda)$ se $\sum_u |u| |\gamma_x(u)| < \infty$.

Se $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$, $j=1, \dots, k-1$, $k=2, 3, 4$ então

$$(ii) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} B_T^T \text{Cov} \left[\hat{f}_x^{3C}(\lambda), \hat{f}_x^{3C}(\mu) \right] = \frac{2\pi}{\mu_a^4} \left[\eta(\lambda - \mu) + \eta(\lambda + \mu) \right] f_Y^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\beta) d\beta$$

$$(iii) \quad \text{Var} \hat{f}_x^{3C}(\lambda) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

$$\text{Nota: } \eta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ 0 & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

A demonstração do teorema encontra-se no Apêndice A.

Assim, a estrutura de covariâncias do estimador $\hat{f}_x^{3C}(\lambda)$ é semelhante a do estimador $\hat{f}_x^{3A}(\lambda)$ dada pelo Teorema 5.1.5.

Teorema 5.3.5: Suponha que $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_k} |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$ e $f_X(\lambda_j) \neq 0$, $j = 1, \dots, J$. Então $\hat{f}_X^{3C}(\lambda_1), \dots, \hat{f}_X^{3C}(\lambda_J)$ são assintoticamente, conjuntamente normais com estrutura de covariâncias dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T^{-1} \text{Cov} \left[\hat{f}_X^{3C}(\lambda), \hat{f}_X^{3C}(\mu) \right] = \frac{2\pi}{4\mu_a} \left[\eta(\lambda - \mu) + \eta(\lambda + \mu) \right] f_Y^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\beta) d\beta$$

com $B_T^{-1} \rightarrow 0$, $B_T \rightarrow \infty$.

A demonstração do Teorema encontra-se no Apêndice A.

Corolário 5.3.5: Sob as condições do Teorema 5.3.5, $\hat{f}_X^{3C}(\lambda)$ e $\hat{f}_X^{3C}(\mu)$ são assintoticamente independentes se $\lambda \pm \mu \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Se analisarmos a expressão (5.12) poderemos verificar que o estimador $\hat{f}_X^{3C}(\lambda)$ pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\hat{f}_X^{3C}(\lambda) = \frac{2\pi}{T^2 \mu_a^2} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) \left| d_Y^{(T)} \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \right|^2 - \frac{1}{2\pi \mu_a^2} \sigma_a^2 (\sigma_X^2 + \mu_X^2) \quad (5.13)$$

$$= \frac{1}{T^2 \mu_a^2} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) \left| d_Y^{(T)} \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \right|^2 - \frac{(EA^2(t) - \mu_a^2) EY^2(t)}{2\pi \mu_a^2 EA^2(t)}$$

que depende de vários parâmetros desconhecidos e que deverão ser estimados. Nesse caso, um estimador alternativo é dado por

$$\tilde{f}_x^{3C}(\lambda) = \frac{1}{T \bar{a}^2} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) \left| d_Y^{(T)} \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \right|^2 - \frac{(\bar{a}^2 - \bar{a}^2) \bar{y}^2}{2\pi \bar{a}^2 \bar{a}^2} \quad (5.14)$$

onde

$$\bar{a} = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} A(t)}{T},$$

$$\bar{a}^2 = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)}{T},$$

e

$$\bar{y}^2 = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} Y^2(t)}{T}.$$

Teorema 5.3.6: Suponha que $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_k} |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$,

$f_x(\lambda_j) \neq 0$ e $X(t)$ um processo ergódico, então $\hat{f}_x^{3C}(\lambda)$ e $\tilde{f}_x^{3C}(\lambda)$ são assintoticamente equivalentes.

Dem:

$$\bar{a}^2 \xrightarrow{q.c.} \mu_a^2$$

$$\bar{a}^2 \xrightarrow{q.c.} EA^2(t)$$

pela Lei dos Grandes Números e pela continuidade da função $g(x)=x^2$.

Se $X(t)$ é ergódico, então $Y(t)$ também o é, pois $A(t)$ é um processo de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Então

$$\overline{y_2} \xrightarrow{q.c.} EY^2(t);$$

de acordo com o Teorema 2 de Hannan (1970, p.203).

Assim,

$$\frac{[\overline{a_2} - \overline{a}^2] \overline{y_2}}{2\pi \overline{a}^2 \overline{a_2}} \xrightarrow{q.c.} \frac{[EA^2(t) - \mu_a^2] EY^2(t)}{2\pi \mu_a^2 EA^2(t)}. \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_x^{3C}(\lambda) - \tilde{f}_x^{3C}(\lambda) &= \frac{2\pi}{T} \left[\frac{1}{\mu_a^2} - \frac{1}{\overline{a}^2} \right] \frac{\mu_a^2}{2\pi T \mu_a^2} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) \left| d_Y^{(T)} \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \right|^2 \\ &\quad - \left[\frac{(EA^2(t) - \mu_a^2) EY^2(t)}{2\pi \mu_a^2 EA^2(t)} - \frac{[\overline{a_2} - \overline{a}^2] \overline{y_2}}{2\pi \overline{a}^2 \overline{a_2}} \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mas

$$\frac{1}{\mu_a^2} - \frac{1}{\overline{a}^2} \xrightarrow{P} 0$$

$$\frac{2\pi}{T} \frac{1}{2\pi T \mu_a^2} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) \left| d_Y^{(T)} \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \right|^2 \xrightarrow{P} W$$

onde W é uma variável aleatória com distribuição normal e a segunda parcela do lado direito de (5.16) converge em probabilidade para zero, por (5.15).

Logo,

$$\hat{f}_x^{3C}(\lambda) - \tilde{f}_x^{3C}(\lambda) \xrightarrow{P} 0$$

e podemos afirmar que $\hat{f}_x^{3C}(\lambda)$ e $\tilde{f}_x^{3C}(\lambda)$ têm a mesma distribuição assintótica dada pelo Teorema 5.3.5.

5.4 - Construção de Intervalos de Confiança

Os teoremas sobre distribuição assintótica, em cada caso, podem ser utilizados na construção de intervalos de confiança, sempre levando em consideração que eles serão válidos somente para grandes valores de T .

Seja z_α um número tal que $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ onde $Z \sim N(0,1)$.

5.4.1 - Caso A

Utilizando os Teoremas 4.1.3, 5.1.3, 5.1.5 e os estimadores $I_x^A(\lambda)$, $\hat{f}_x^{2A}(\lambda)$ e $\hat{f}_x^{3A}(\lambda)$, respectivamente, podemos construir intervalos de confiança para $f_x(\lambda)$. Por exemplo, se utilizarmos o Teorema 5.1.5 e o estimador $\hat{f}_x^{3A}(\lambda)$, que é o melhor deles, teremos o seguinte intervalo de confiança assintótico, com coeficiente de confiança aproximadamente igual a $1-\alpha$,

$$\left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda) - z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{f}_x^{3A}(\lambda) \sqrt{\frac{2\pi \int W^2(\beta) d\beta}{B_T T}}; \hat{f}_x^{3A}(\lambda) + z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{f}_x^{3A}(\lambda) \sqrt{\frac{2\pi \int W^2(\beta) d\beta}{B_T T}} \right]$$

para $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

e

$$\left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda) - z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{f}_x^{3A}(\lambda) \sqrt{\frac{4\pi \int W^2(\beta) d\beta}{B_T T}}; \hat{f}_x^{3A}(\lambda) + z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{f}_x^{3A}(\lambda) \sqrt{\frac{4\pi \int W^2(\beta) d\beta}{B_T T}} \right]$$

para $\lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$

Observações: i) De acordo com o Teorema 5.1.5, $B_T T \text{Var} \hat{f}_x^{3A}(\lambda) \rightarrow 2\pi f_x^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta$, $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, ou seja, depende de $f_x(\lambda)$. Assim, para construirmos o intervalo de confiança, substituímos esse valor desconhecido por um estimador consistente.

ii) Podemos, também, utilizar a aproximação

$$\frac{2\pi}{B_T T} \int W^2(\beta) d\beta \approx \int_S \left[\frac{2\pi}{T} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) \right]^2 ds, \quad (5.17)$$

ver Brillinger (1975, p.154).

5.4.2 - Caso B

Neste caso, não conhecemos a distribuição assintótica dos estimadores $\hat{f}_x^{1B}(\lambda)$, $\hat{f}_x^{2B}(\lambda)$ e $\hat{f}_x^{3B}(\lambda)$ e, portanto, não podemos construir os intervalos de confiança da maneira usual. Um procedi

mento é construí-los através de Bootstrap, ver Efron (1982), Efron & Tibshirani (1985) e Efron (1987).

5.4.3 - Caso C

Utilizando o Teorema 5.3.5 e o estimador $\hat{f}_x^{3C}(\lambda)$ temos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T T \text{Var} \left[\hat{f}_x^{3C}(\lambda) \right] = \begin{cases} \frac{2\pi}{\mu_a^4} f_Y^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta, & \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \frac{4\pi}{\mu_a^4} f_Y^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta, & \lambda \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases}$$

com $f_Y(\lambda)$ dado por (4.20).

Assim, um intervalo de confiança assintótico, com coeficiente de confiança aproximadamente $1-\alpha$, é dado por

$$\left[\hat{f}_x^{3C}(\lambda) - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{f}_Y(\lambda)}{\mu_a^2} \sqrt{\frac{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta}{B_T T}}; \hat{f}_x^{3C}(\lambda) + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{f}_Y(\lambda)}{\mu_a^2} \sqrt{\frac{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta}{B_T T}} \right]$$

para $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

e

$$\left[\hat{f}_x^{3C}(\lambda) - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{f}_Y(\lambda)}{\mu_a^2} \sqrt{\frac{4\pi \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta}{B_T T}}; \hat{f}_x^{3C}(\lambda) + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{f}_Y(\lambda)}{\mu_a^2} \sqrt{\frac{4\pi \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta}{B_T T}} \right]$$

para $\lambda \equiv 0 \pmod{\pi}$

onde $\hat{f}_Y(\lambda) = \frac{1}{T^2} \sum_{s=1}^{T-1} w^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) \left| d_Y^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \right|^2$ é um estimador consistente de $f_Y(\lambda)$, de acordo com (4.20), (5.13) e o Teorema 5.3.4.

Se desconhecemos o valor de algum parâmetro em (5.13), deveremos utilizar $\tilde{f}_X^{3C}(\lambda)$ em lugar de $\hat{f}_X^{3C}(\lambda)$ e substituir μ_a^2 por $\bar{a}^2$ na expressão do intervalo de confiança.

CAPÍTULO 6

ILUSTRAÇÕES

6.1 - Introdução

Neste capítulo vamos utilizar os melhores estimadores de $f_x(\lambda)$ obtidos em cada um dos casos abordados.

Escolhemos, para tal, três séries de interesse:

- (a) 128 valores mensais de concentração de ozônio em Azuza, na Califórnia;
- (b) 128 valores mensais de vazões do rio Corumbá;
- (c) valores gerados de um processo AR(2), com 64 e 128 observações.

Os valores das séries e os respectivos gráficos encontram-se no Apêndice B (Tabelas B.1 - B.3).

Representando as séries $A(t)$ temos:

- (a) Para o caso A, duas sequências:

$$A_1(t) = \frac{t}{t+1}, \quad t = 0, \dots, 127$$

$$A_2(t) = (0,995)^t, \quad t = 0, \dots, 127$$

cujas observações encontram-se nas Tabelas B.4 e B.5, respectivamente.

A primeira sequência satisfaz a suposição $\sum_{t=0}^{T-1} A_1(t) = O(T)$, garantindo que o estimador $\hat{f}_x^{3A}(\lambda)$, além de ser assintoticamente não viciado, converge para uma distribuição normal. Entretanto, $\sum_{t=0}^{T-1} A_2(t) \leq 200$, e, portanto de $O(1)$, o que fará com que o estimador $\hat{f}_x^{3A}(\lambda)$ não tenha as propriedades acima mencionadas.

- (b) Para o caso B, escolhemos observações do processo de médias móveis

$$A(t) = \varepsilon(t) + 1,1\varepsilon(t-1) + 0,2\varepsilon(t-2) + 1,0, \quad \sigma_\varepsilon^2 = 1, \quad t=0, \dots, 127$$

que se encontra em Priestley (1981). Deve-se observar, que foi adicionado à série original, um valor constante (δ) e igual a 1,0, de modo a tornar $\mu_a > 0$, que é uma condição necessária ao processo $A(t)$, no caso B. Os valores da série e o respectivo gráfico se encontram na Tabela B.6.

- (c) Para o caso C, escolhemos um processo normal com média 10 e variância 4, cujos resultados estão na Tabela B.7.
- (d) Uma sequência de 0-1 que, dependendo da maneira como foi gerada, é analisada ora no caso A, ora no caso C. Os resultados da aplicação desse tipo de sequência moduladora são apresentados à parte, na seção 6.2.4.

Para obtenção dos estimadores é necessário a utilização de um núcleo (no caso de estimadores suavizados de covariâncias) e uma janela espectral (no caso de estimadores suavizados de periodograma). Utilizamos as janelas de Parzen e Hamming dadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Núcleos e Janelas Espectrais de Parzen e Hamming.

	PARZEN	HAMMING
NÚCLEO	$1 - 6\left(\frac{s}{M}\right)^2 + 6\left(\frac{ s }{M}\right)^3, s \leq \frac{M}{2}$	$0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{\pi s}{M}\right), s \leq M$
$w^{(T)}(s)$	$2(1 - s /M)^3, \frac{M}{2} \leq s \leq M$	0
	0 $ s > M$	c.c.
JANELA	$\frac{3}{8\pi M^3} \left[\frac{\text{sen}(M\theta/4)}{\frac{1}{2} \text{sen}(\theta/2)} \right]^4$	$0,23 D_M\left(\theta - \frac{\pi}{M}\right) + 0,54 D_M(\theta) +$
$W^{(T)}(\theta)$		$+ 0,23 D_M\left(\theta + \frac{\pi}{M}\right)$

Na Tabela 6.1,

$$D_M(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\text{sen}\left[\left(M + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\text{sen}\frac{\theta}{2}} \right]$$

$$W^{(T)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} w^{(T)}(\theta) e^{-is\theta}$$

$$e M = B_T^{-1}.$$

Os estimadores utilizados são:

(i) **Caso A:** uma expressão alternativa àquela dada por (5.2),

$$\hat{f}_X^{3A}(\lambda) = \frac{1}{T \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) |d_Y^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)|^2, -\infty < \lambda < \infty$$

(ii) Caso B:

$$\tilde{f}_x^{3B}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-T+1}^{T-1} \frac{w^{(T)}(u)}{\widehat{\mu_a k_u}} \hat{\gamma}_y(u) e^{-i\lambda u}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

dado por (5.8).

(iii) Caso C:

$$\tilde{f}_x^{3C}(\lambda) = \frac{1}{T^2 \bar{a}^2} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) \left| d_Y^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \right|^2 - \frac{(\bar{a}^2 - \bar{a}^2) \bar{y}^2}{2\pi \bar{a}^2 \bar{a}^2}, \quad -\infty < \lambda < \infty$$

dado por (5.14).

Além disso, com o objetivo de comparar os estimadores, em cada um dos casos, com aquele obtido utilizando-se a série original $X(t)$, calculamos o espectro estimado do processo $X(t)$,

$$\hat{g}_x(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-T+1}^{T-1} w^{(T)}(u) \hat{\gamma}_x(u) e^{-i\lambda u}, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Antes de começar analisar os resultados, vale a pena observar que:

- i. O estimador obtido no caso A, assim como $\hat{g}_x(\lambda)$, são sempre positivos quando utilizamos a janela de Parzen.
- ii. Os estimadores nos casos B e C podem assumir valores negativos. Isso acontece, geralmente, em frequências onde o verdadeiro valor do espectro é próximo de zero. Nesse caso, para fazer o

gráfico, substituímos esses valores negativos pelo menor valor positivo, de modo a não alterar a escala.

- iii. Todos os estimadores foram calculados nas frequências $\lambda = \frac{2\pi s}{T}$, $s = 0, \dots, \left[\frac{T-1}{2} \right]$, denominadas frequências de Fourier, fazendo com que os picos, representantes das periodicidades de cada série, não sejam, eventualmente, "encontrados" em suas frequências exatas.

6.2 - Resultados

Vamos apresentar os resultados utilizando uma série gerada (AR(2)) e duas séries reais (Ozônio e Vazão).

6.2.1 - Processo AR(2)

Foram, inicialmente, geradas 64 observações do processo estacionário

$$X(t) = 0,75X(t-1) - 0,3X(t-2) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \sim N(0,1).$$

De acordo com a teoria, ver Priestley (1981), o processo acima é pseudo-periódico e apresenta um pico na frequência $w_{\text{pico}} = 0,6224$ que não é uma frequência de Fourier. Se procurarmos a frequência de Fourier mais próxima à w_{pico} vemos que ela é dada por $w_p^* = \frac{2\pi 7}{64} = 0,6872$. Na realidade w_{pico} está entre as frequências $\frac{2\pi 6}{64}$ e $\frac{2\pi 7}{64}$.

Calculamos os estimadores de $f_x(\lambda)$ e comparamo-los, em cada caso, com o espectro teórico e o espectro estimado $\hat{g}_x(\lambda)$. O valor de $M(B_T^{-1})$ escolhido, foi aquele que tornava os espectros estimados nem muito alisados, nem muito variáveis. Neste caso, obtemos $M=8$ que se colocarmos como uma função de T , isto é, $M=T^\alpha$, corresponderá ao valor de $\alpha=0,5$.

(i) **Caso A**

As Figuras 6.1 e 6.2 apresentam os espectros teórico, estimado ($\hat{g}_x(\lambda)$) e estimado caso A, utilizando como sequência moduladora $A_1(t)$ e as janelas de Parzen e Hamming, respectivamente.

Figura 6.1 - $\square$: $f_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$
 $+$: $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=8$, Parzen.
 $\diamond$: $\hat{f}_x^{3A}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=8$, Parzen, sequência $A_1(t)$.

Figura 6.2 - $\square$: $f_x\left(\frac{2\pi S}{T}\right)$
 $+$: $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi S}{T}\right)$, $M=8$, Hamming.
 $\diamond$: $\hat{f}_x^{3A}\left(\frac{2\pi S}{T}\right)$, $M=8$, Hamming, sequência $A_1(t)$.

Observando a Figura 6.1 vemos que o espectro estimado (caso A) detecta um pico na frequência $\frac{2\pi 8}{64}$ o que também ocorre com $\hat{g}_x(\lambda)$. Se compararmos esses dois estimadores do espectro vemos que eles estão bem próximos para frequências menores do que $\frac{2\pi 18}{64}$ e que ambos superestimam, com exceção às baixas frequências, o verdadeiro valor do espectro.

A Figura 6.2, correspondente à utilização da janela de Hamming, fornece conclusões semelhantes com uma única exceção: nas fre

quências próximas à do pico os valores estimados são comparativamente maiores do que o valor teórico.

As Figuras 6.3 e 6.4 são referentes aos espectros estimados e teórico, utilizando a sequência moduladora $A_2(t)$ e as janelas de Parzen e Hamming, respectivamente. Podemos observar que utilizando a janela de Hamming, o espectro estimado caso A detecta o pico na "frequência correta" $\frac{2\pi 7}{64}$, enquanto que utilizando a janela de Parzen, o pico é detectado na frequência $\frac{2\pi 8}{T}$. Como antes, com exceção feita às baixas frequências, os espectros estimados superestimam o verdadeiro espectro.

Figura 6.3 - □: $f_x(\frac{2\pi s}{T})$.

+ : $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=8$, Parzen.

◊ : $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=8$, Parzen, sequência $A_2(t)$.

Figura 6.4 - □: $f_x(\frac{2\pi s}{T})$.

+ : $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=8$, Hamming.

◊ : $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=8$, Hamming, sequência $A_2(t)$.

(ii) Caso B

As Figuras 6.5 e 6.6 apresentam os resultados correspondentes a utilização das janelas de Parzen e Hamming. Comparando-as vemos que a utilização da janela de Hamming faz com que o pico do espectro estimado caso B seja detectado na frequência $\frac{2\pi 6}{64}$, enquanto que, utilizando a janela de Parzen este pico é detectado nas frequências $\frac{2\pi 6}{64}$ e $\frac{2\pi 7}{64}$. Com exceção às baixas frequências, o espectro

estimado caso B se aproxima mais do verdadeiro espectro quando utilizamos a janela de Hamming.

Podemos observar, também, que nas frequências próximas à do pico, o espectro estimado caso B, Parzen, subestima o espectro teórico, enquanto que $\hat{g}_x(\lambda)$ superestima. Com relação à janela de Hamming, ambos os espectros superestimam o teórico.

O espectro estimado caso B fornecem valores negativos nas frequências $\frac{2\pi 29}{64} - \frac{2\pi 31}{64}$ quando utilizamos a janela de Hamming.

Figura 6.5 - $\square$: $f_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$.

$+$: $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=8$, Parzen.

$\diamond$: $\tilde{f}_x^{3B}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=8$, Parzen.

Figura 6.6 - $\square$: $f_X\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$
 $+$: $\hat{g}_X\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=8$, Hamming.
 $\diamond$: $\tilde{f}_X^{3B}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=8$, Hamming.

(iii) Caso C

Os resultados estão nas Figuras 6.7 e 6.8.

Vemos que, os espectros estimados, caso C e $\hat{g}_X(\lambda)$, superestimam o espectro teórico, com exceção feita às frequências mais baixas. Com relação à janela, utilizando a de Hamming, o erro de estimação é maior nas frequências próximas à do pico; além dis-

so, ambas detectam o pico nas frequências $\frac{2\pi 7}{64}$ e $\frac{2\pi 8}{64}$.

Figura 6.7 - □: $f_x(\frac{2\pi s}{T})$.

+ : $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=8$, Parzen.

◊ : $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=8$, Parzen.

Figura 6.8 - □: $f_x(\frac{2\pi s}{T})$.

+ : $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=8$, Hamming.

◊ : $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=8$, Hamming.

Em seguida, refaremos toda a análise utilizando um número maior de observações, $T=128$. Agora, o valor de $M(B_T^{-1})$ utilizado é 12, correspondendo, aproximadamente, a $(128)^{0,5}$. A frequência de Fourier mais próxima à frequência de pico é $w_p^* = \frac{2\pi 13}{128} = 0,6381$. Na realidade a frequência de pico, w_p , está entre $\frac{2\pi 12}{128}$ e $\frac{2\pi 13}{128}$. O que se espera é que, por trabalharmos com um número maior de observa-

ções, os espectros estimados estejam mais próximos do espectro teórico.

Novamente, iremos fazer a análise caso por caso.

(i') Caso A

As Figuras 6.9 e 6.10 referem-se aos estimadores quando utilizamos a sequência moduladora $A_1(t)$.

Figura 6.9 - □: $f_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$.

+ : $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=12$, Parzen.

◊ : $\hat{f}_x^{3A}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=12$, Parzen, sequência $A_1(t)$.

Figura 6.10 - □: $f_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$.

+ : $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=12$, Hamming.

◇ : $\hat{f}_x^{3A}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=12$, Hamming, sequência $A_1(t)$.

Analisando os resultados vemos que, os espectros estimados (caso A) utilizando as janelas de Parzen e Hamming, detectam o pico nas frequências $\frac{2\pi 10}{128} - \frac{2\pi 12}{128}$ e $\frac{2\pi 11}{128} - \frac{2\pi 12}{128}$, respectivamente, enquanto que os estimadores $\hat{g}_x(\lambda)$ detectam o pico na frequência $\frac{2\pi 11}{T}$, ou seja, mais distante de $w_p^* = \frac{2\pi 13}{128}$. Como anteriormente, a janela de Hamming produz um viés de estimação maior, nas frequências próximas à do pico. Como esperávamos, podemos notar que os espectros

estimados caso A e $\hat{g}_x(\lambda)$ produzem valores quase que coincidentes.

As Figuras 6.11 e 6.12 referem-se à sequência moduladora $A_2(t)$. Os resultados são semelhantes, porém um pouco mais interessantes, pois:

- (a) os espectros caso A (Hamming e Parzen) detectam o pico nas frequências $\frac{2\pi 12}{128} - \frac{2\pi 14}{128}$ e $\frac{2\pi 11}{128} - \frac{2\pi 12}{128}$, respectivamente, enquanto que os espectros $\hat{g}_x(\lambda)$ (Hamming e Parzen) os faz na frequência $\frac{2\pi 11}{T}$. Assim os espectros caso A detectaram melhor a frequência w_p^* ;
- (b) como já vem ocorrendo, a janela de Hamming produz erros maiores quando estimamos próximo à frequência de pico.

Figura 6.11 - $\square$: $f_x(\frac{2\pi s}{T})$. $+$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=12$, Parzen.

$\diamond$: $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=12$, Parzen, sequência $A_2(t)$.

Figura 6.12 - $\square$: $f_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$.

+ : $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=12$, Hamming.

$\diamond$: $\hat{f}_x^{3A}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=12$, Hamming, sequência $A_2(t)$.

(ii') Caso B

As Figuras 6.13 e 6.14 apresentam os resultados correspondentes às janelas de Parzen e Hamming, respectivamente. Comparando-as notamos que:

- (a) O espectro caso B, Parzen, detecta o pico na frequência correta $\frac{2\pi 13}{T}$, enquanto que, a utilização da janela de Hamming detecta o pico na frequência $\frac{2\pi 14}{T}$. Assim, os estimadores caso B são

melhores, para detectar o pico, do que os estimadores $\hat{g}_x(\lambda)$.

- (b) Novamente, com exceção às baixas frequências, a utilização da janela de Hamming parece ser mais adequada; além disso o espectro estimado caso B, Parzen, também subestima o espectro teórico nas frequências próximas à do pico.
- (c) Ocorreram valores negativos, no espectro caso B, nas frequências $\frac{2\pi 57}{128} - \frac{2\pi 63}{128}$ quando utilizamos a janela de Parzen e, $\frac{2\pi 58}{128} - \frac{2\pi 63}{128}$ com a utilização da janela de Hamming.

Figura 6.13 - □: $f_x(\frac{2\pi s}{T})$.

+ : $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=12$, Parzen.

◊ : $\tilde{f}_x^{3B}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=12$, Parzen.

Figura 6.14 - $\square$: $f_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$.

+ : $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=12$, Hamming.

$\diamond$: $\tilde{f}_x^{3B}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=12$, Hamming.

(iii') Caso C

Analisando as Figuras 6.15 e 6.16 vemos que:

- (a) Como anteriormente ($T=64$) os espectros estimados, caso C e $\hat{g}_x(\lambda)$, superestimam o espectro teórico, com exceção fei-

ta às altas frequências.

(b) Novamente, a janela de Hamming produz um erro de estimação maior, próximo à frequência de pico.

(c) Com relação à detecção da frequência de pico, as duas janelas, considerando o estimador caso C, fornecem os valores $\frac{2\pi 10}{128} - \frac{2\pi 13}{128}$ e $\frac{2\pi 11}{128} - \frac{2\pi 13}{128}$, respectivamente.

Figura 6.15 - u: $f_x(\frac{2\pi s}{T})$.

+ : $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=12$, Parzen.

o : $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=12$, Parzen.

Figura 6.16 - $\square$: $f_x(\frac{2\pi s}{T})$.

$+$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=12$, Hamming.

$\diamond$: $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=12$, Hamming.

Agora, fazendo uma comparação direta entre $T=64$ e $T=128$ temos:

Caso A: os estimadores do espectro com $T=128$ estão mais próximos um do outro, no caso $A_1(t)$; ambos subestimam a frequência de

pico; quando utilizamos $T=64$, a frequência de pico foi superestimada. Utilizando a sequência moduladora $A_2(t)$, os espectros caso A superestimam a frequência de pico quando $T=64$ e estimam corretamente quando $T=128$.

Caso B: Com exceção às baixas frequências, os estimadores caso B se aproximam mais do espectro teórico quando $T=128$. A frequência de pico é bem detectada, independentemente do tamanho da amostra.

Caso C: Os espectros estimados, caso C e $\hat{g}_x(\lambda)$, estão mais próximos um do outro quando $T=128$, tanto utilizando Parzen como Hamming. A frequência de pico, é "razoavelmente" detectada, independentemente do tamanho da amostra.

6.2.2 - Ozônio

Esta série é bastante conhecida e já foi analisada por vários autores. Em Morettin & Toloi (1985) foi ajustado o modelo

$$\begin{aligned} \hat{X}(t) = & 5,08 - 2,0082 \cos \frac{2\pi t}{12} - 1,5502 \sin \frac{2\pi t}{12} - 0,2634 \cos \frac{2\pi t}{6} + \\ & + 0,5253 \sin \frac{2\pi t}{6} + (1-0,1577B)^{-1} \epsilon_t, \quad \hat{\sigma}_\epsilon^2 = 0,981 \end{aligned}$$

detectando duas periodicidades: 12 meses e 6 meses. Tais períodos, devem aparecer na estimativa do espectro próximo às frequências $\frac{2\pi 11}{128}$ e $\frac{2\pi 21}{128}$, respectivamente.

Neste caso, não conhecemos o espectro teórico da série e, portanto, toda nossa análise será baseada na comparação do espectro estimado $\hat{g}_x(\lambda)$ com o espectro modulado, em cada caso. Em relação a M , foram testados vários valores e o que nos pareceu mais adequado foi $M=26$.

(i) Caso A

As Figuras 6.17 - 6.18 (série moduladora $A_1(t)$) e 6.19 - 6.20 (série moduladora $A_2(t)$) apresentam os resultados. Podemos observar que

- (a) Utilizando $A_1(t)$ o espectro estimado caso A praticamente coincide com $\hat{g}_x(\lambda)$, independentemente da janela utilizada. Além disso, os picos aparecem nas frequências corretas: $\frac{2\pi 11}{128}$ e $\frac{2\pi 21}{128}$.
- (b) Utilizando $A_2(t)$, vemos que nas frequências próximas a $\frac{2\pi 11}{128}$, o espectro caso A fornece valores menores e provavelmente mais próximos ao teórico, uma vez que os estimadores do tipo $\hat{g}_x(\lambda)$ quase sempre o superestima. Aqui os picos também aparecem nas frequências corretas.

Figura 6.17 - $\square$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

$+$: $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen, sequência $A_1(t)$.

Figura 6.18 - $\square$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

$+$: $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming, sequência $A_1(t)$.

Figura 6.19 - $\square$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

$+$: $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, sequência $A_2(t)$.

Figura 6.20 - $\square$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

$+$: $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming, sequência $A_2(t)$.

(ii) Caso B

Os resultados são apresentados nas Figuras 6.21 e 6.22.

Figura 6.21 - $\square$: $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=26$, Parzen.
 $+$: $\tilde{f}_x^{3B}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=26$, Parzen.

Figura 6.22 - $\square$: $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=26$, Hamming.

$$+ : \tilde{f}_x^{3B}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), M=26, \text{ Hamming.}$$

Não existe muita diferença em função da janela utilizada. Aqui, aparecem vários picos laterais que acabam confundindo aquele que deveria aparecer na frequência $\frac{2\pi 21}{128}$. O pico mais importante, $\frac{2\pi 11}{128}$, é detectado corretamente em ambos os casos. Além disso, observamos que nas frequências próximas à do pico principal, o espectro caso B se distancia mais do espectro $\hat{g}_x(\lambda)$.

Valores negativos do espectro, ocorreram nos intervalos

$$\left[\frac{2\pi 15}{128}, \frac{2\pi 19}{128}\right], \left[\frac{2\pi 21}{128}, \frac{2\pi 23}{128}\right], \left[\frac{2\pi 28}{128}, \frac{2\pi 31}{128}\right], \left[\frac{2\pi 38}{128}, \frac{2\pi 42}{128}\right] \text{ e } \left[\frac{2\pi 55}{128}, \frac{2\pi 57}{128}\right]$$

se utilizarmos a janela de Parzen e nos intervalos $\left[\frac{2\pi 17}{128}, \frac{2\pi 21}{128}\right],$

$$\left[\frac{2\pi 29}{128}, \frac{2\pi 30}{128}\right] \text{ e } \left[\frac{2\pi 39}{128}, \frac{2\pi 40}{128}\right] \text{ se utilizarmos a janela de Hamming.}$$

(iii) Caso C

Analisando a Figura 6.23 vemos que a utilização da janela de Parzen, detecta corretamente o pico principal ($\frac{2\pi 11}{128}$), mas não o pico secundário. Os estimadores caso C e $\hat{g}_x(\lambda)$ são praticamente coincidentes nas frequências não muito próximas à do pico.

Figura 6.23 - □: $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=26$, Parzen.

$$+: \tilde{f}_x^{3C}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), M=26, \text{ Parzen.}$$

Com relação à janela de Hamming (Figura 6.24), notamos que sua utilização faz com que apareça uma pequena elevação, do valor estimado do espectro, na frequência $\frac{2\pi 21}{128}$, além é claro, de detectar corretamente o pico principal. Aqui, também, os espectros estimados são bastante próximos.

Ocorreram valores negativos do espectro caso C no intervalo $\left[\frac{2\pi 27}{128}, \frac{2\pi 29}{128}\right]$.

Figura 6.24 - □: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

+ : $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

6.2.3 - Vazão

Esta é uma série que aparentemente nunca foi analisada. Tudo indica, que ela contém apenas uma periodicidade de 12 meses que deve aparecer, na estimativa do espectro, próxima à frequência $\frac{2\pi 11}{128}$.

Após vários testes, escolhemos o valor $M=26$.

(i) Caso A

As Figuras 6.25 e 6.26, referentes à função moduladora $A_1(t)$, nos mostram que o estimador caso A detecta a periodicidade na frequência correta $\frac{2\pi 11}{128}$, independentemente da janela utilizada. Além disso, com exceção feita às baixas frequências, ele acompanha razoavelmente o espectro estimado $\hat{g}_x(\lambda)$.

Figura 6.25 - $\square$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

$+$: $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen, sequência $A_1(t)$.

Figura 6.26 - □: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

+ : $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming, sequência $A_1(t)$.

As Figuras 6.27 e 6.28, referentes à sequência moduladora $A_2(t)$, nos mostram que o estimador caso A detecta, novamente, de forma correta a periodicidade da série, embora neste caso, exista uma diferença maior com relação ao espectro $\hat{g}_x(\lambda)$, em frequências próximas à do pico.

Figura 6.27 - $\square$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

$+$: $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen, sequência $A_2(t)$.

Figura 6.28 - □: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

+ : $\hat{f}_x^{3A}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming, sequência $A_2(t)$.

(ii) Caso B

As Figuras 6.29 e 6.30 revelam que

- (a) O espectro estimado caso B fornece quase sempre valores inferiores ao espectro estimado $\hat{g}_x(\lambda)$.

- (b) O espectro caso B, Parzen, desloca um pouco a frequência de pico, aparecendo no valor $\frac{2\pi 10}{128}$, embora apresente um valor estimado de magnitude não muito diferente na frequência $\frac{2\pi 11}{128}$.
- (c) O espectro caso B, Hamming, apresenta comportamento semelhante ao (a), embora detecte corretamente a frequência de pico.
- (d) Ambos os espectros caso B, janelas Hamming e Parzen, apresentam uma elevação na frequência $\frac{2\pi 22}{128}$ indicando, talvez, uma periodicidade próxima a 6 meses. Tal elevação não aparece nos estimadores $\hat{g}_x(\lambda)$.
- (e) Ocorreram valores negativos no intervalo de frequências

$\left[\frac{2\pi 34}{128}, \frac{2\pi 41}{128}\right]$ quando utilizamos a janela de Parzen e $\left[\frac{2\pi 16}{128}, \frac{2\pi 18}{128}\right]$,

$\left[\frac{2\pi 34}{128}, \frac{2\pi 41}{128}\right]$ quando utilizamos Hamming.

Figura 6.29 - $\square$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

$+$: $\tilde{f}_x^{3B}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

Figura 6.30 - $\square$: $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=26$, Hamming.

$+$: $\tilde{f}_x^{3B}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=26$, Hamming.

(iii) Caso C

Analisando as Figuras 6.31 e 6.32 notamos que

- (a) A frequência de pico é detectada corretamente, independentemente da janela utilizada.
- (b) Utilizando Hamming notamos uma pequena elevação na frequência

$$\frac{2\pi 22}{128} \cdot$$

(c) Ambas as janelas fornecem resultados do estimador caso C quase sempre maiores que os do $\hat{g}_x(\lambda)$.

Figura 6.31 - $\square$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

$+$: $\hat{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

Figura 6.32 - □: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

+ : $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

6.2.4 - Sequência Moduladora 0-1

A utilização deste tipo de sequência moduladora significa que temos observações perdidas, ou então, a série de interesse observada em tempos não igualmente espaçados.

(a) Sequência determinística 0-1

Analisando a série de Vazão, resolvemos escolher as observações estranhas ao padrão sazonal da série e eliminá-las, refazendo a análise considerando essas perdas como sendo determinísticas (caso A).

As observações eliminadas, $A(t)=0$, foram as correspondentes aos meses de dez65, jan66, out67, dez70, jan71, fev71, mar71, jan72 e fev74, num total de nove.

As figuras 6.33 e 6.34 mostram o resultado da análise utilizando as janelas de Parzen e Hamming, respectivamente, com M igual a 26.

Figura 6.33 - □: $\hat{g}_X\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=26$, Parzen.

+ : $\hat{f}_X^{3A}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, 9 perdas, $M=26$, Parzen.

Figura 6.34 - □: $\hat{g}_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, $M=26$, Hamming.

+ : $\hat{f}_x^{3A}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$, 9 perdas, $M=26$, Hamming.

Analisando os espectros estimados caso A vemos que ambas as janelas fornecem valores maiores que os do espectro estimado $\hat{g}_x(\lambda)$, com exceção às frequências próximas a do pico. Além disso, os picos aparecem na frequência $\frac{2\pi 11}{128}$, sugerindo o padrão sazonal de 12 meses.

Finalmente, a perda das nove observações não parece influir muito na estimativa do espectro.

(b) Sequência aleatória 0-1

Utilizando uma tabela de números aleatórios geramos duas sequências moduladoras de 0-1, que se encaixam no caso C. Em seguida, utilizamos a série de Ozônio, cujos valores, quando multiplicados por essas duas sequências, apresentam perdas que são então analisadas como sendo aleatórias e independentes.

A primeira sequência $A(t)$ é formada por zeros nos meses correspondentes a mar60, out62, abr64, dez64, jul66, out67, jan68, abr69 e mai70, num total de nove perdas. A segunda sequência $A(t)$ é formada pela anterior mais nove observações: mai60, mai62, abr63, fev64, fev66, abr66, mar68, mai68 e fev69, perfazendo um total de dezoito observações perdidas (aproximadamente 14% da série).

Os resultados são apresentados nas Figuras 6.35, 6.36, 6.37 e 6.38.

Figura 6.35 - □: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

+ : $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, 9 perdas, $M=26$, Parzen.

Figura 6.36 - □: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

+ : $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, 9 perdas, $M=26$, Hamming.

Figura 6.37 - □: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Parzen.

+ : $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, 18 perdas, $M=26$, Parzen.

Figura 6.38 - $\square$: $\hat{g}_x(\frac{2\pi s}{T})$, $M=26$, Hamming.

+ : $\tilde{f}_x^{3C}(\frac{2\pi s}{T})$, 18 perdas, $M=26$, Hamming.

Em todos os casos (janelas Parzen e Hamming, nove ou dezoito observações perdidas) o espectro estimado caso C fornece valores maior que $\hat{g}_x(\lambda)$, para quase todo λ . Os picos aparecem todos na mesma frequência $\frac{2\pi 11}{128}$, indicando que a perda de observações não influenciaria o resultado de uma possível análise de periodicidades da série.

O segundo pico, equivalente a uma periodicidade de 6 meses, aparece em todos os casos, embora com um destaque maior quando utilizamos a janela de Hamming.

A perda de precisão do estimador, quando passamos de nove para dezoito observações perdidas, pode ser observada comparando-se as Figuras 6.35 e 6.37 ou 6.36 e 6.38.

Finalmente, observamos que, com a utilização dessa sequência moduladora aleatória de 0-1, aumentaram o número de frequências em que o estimador caso C forneceu valores negativos; entretanto em todas elas o valor de $\hat{g}_x(\lambda)$ é muito pequeno (frequências mais altas que $\frac{2\pi 25}{128}$).

REFERÊNCIAS

- ALEKSEEV, V.G. & SAVITSKII, Yu.A. (1973): Estimation of the spectrum of a Gaussian stochastic process on the basis of a realization of the process with omissions, *Problems of Information Transmission*, 9, 1:50-54.
- BLOOMFIELD, P. (1970): Spectral analysis with randomly missed observations, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 32, 369-380.
- BRILLINGER, D.R. (1975): *Time Series: Data Analysis and Theory*, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- BRILLINGER, D.R. (1983): Statistical inference for irregularly observed processes, in *Time Series Analysis of Irregularly Observed Data*, 38-57, edited by E. Parzen, Springer-Verlag, New York.
- DUNSMUIR, W. (1981): Estimation for stationary time series when data are irregularly spaced or missing, in *Applied Time Series II*, edited by D.F. Findley, Academic Press, New York.
- DUNSMUIR, W. & ROBINSON, P.M. (1981a): Asymptotic theory for time series containing missing and amplitude modulated observations, *Sankhyā*, A, 260-281.
- DUNSMUIR, W. & ROBINSON, P.M. (1981b): Parametric estimators for stationary time series with missing observations, *Advances in Applied Probability*, 13, 129-146.

- DUNSMUIR, W. (1983): Large sample properties of estimation in time series observed at unequally spaced times, in *Time Series Analysis of Irregularly Observed Data*, 58-77, edited by E. Parzen, Springer-Verlag, New York.
- EFRON, B. (1982): The jackknife, the bootstrap and other resampling plans, SIAM, Philadelphia, CBMS-NSF n° 38.
- EFRON, B. & TIBSHIRANI, R. (1985): The bootstrap method for assessing statistical accuracy, *Behaviormetrika*, 17, 1-35.
- EFRON, B. (1987): Bootstrap confidence intervals: Good or bad? , *Technical Report n° 116*, Division of Biostatistics, Stanford University, California.
- FIGUEIREDO, D.G. (1977): *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA-CNPq, Rio de Janeiro.
- HANNAN, E.J. (1970): *Multiple Time Series*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- HINICH, M.J. & WEBER, W.E. (1981): A method for estimating distributed lags when observations are randomly missing, *ONR Technical Report*, 21.
- JONES, R.H. (1962): Spectral analysis with regularly missed observations, *The Annals of Mathematical Statistics*, 33, 455-461.
- KOOPMANS, L.H. (1974): *The Spectral Analysis of Time Series*, Academic Press, New York.
- MORETTIN, P.A. & TOLOI, C.M.C. (1985): *Previsão de Series Temporais*, Ed. Atual, São Paulo.

- PARZEN, E. (1962): Spectral analysis of asymptotically stationary time series, *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 39, 87-103.
- PARZEN, E. (1963): On spectral analysis with missing observations and amplitude modulation, *Sankhyā A*, 25, 383-392.
- PRIESTLEY, M.B. (1981): *Spectral Analysis and Time Series*, vol. 1, Academic Press, New York.
- REINSEL, G., TIAO, G.C., WANG, M.N., LEWIS, R. and NYCHKA, D. (1981): Statistical analysis of stratospheric ozone data for the detection of trend, *Atmospheric Environment*, 15, 1569-1577.
- SCHEINOK, P.A. (1965): Spectral analysis with randomly missed observations: the binomial case, *The Annals of Mathematical Statistics*, 36, 971-977.
- SHAPIRO, H.S. & SILVERMAN, R.A. (1960): Alias-free sampling of random noise, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 8, 225-248.
- THRALL, A.D. (1980): A spectral analysis of a time series in which probabilities of observations are periodic, *Time Series*, O.D. Anderson, ed., North Holland Publishing Company.

APÊNDICE A

Apresentaremos, aqui, algumas demonstrações de teoremas enunciados durante o texto.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1:

$$\begin{aligned}
 \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda_1), d_Y^{(T)}(\lambda_2), \dots, d_Y^{(T)}(\lambda_k) \right] &= \\
 &= \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} \dots \sum_{t_k=0}^{T-1} A(t_1) A(t_2) \dots A(t_k) e^{-i \sum_{i=1}^k \lambda_i t_i} C_X(t_1, \dots, t_k) \\
 &= \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} \dots \sum_{t_k=0}^{T-1} A(t_1) \dots A(t_k) e^{-i \sum_{i=1}^k \lambda_i t_i} C_X(t_1 - t_k, \dots, t_{k-1} - t_k)
 \end{aligned}$$

pois $X(t)$ é um processo estritamente estacionário.

Fazendo a transformação,

$$u_j = t_j - t_k, \quad j = 1, \dots, k-1$$

$$t = t_k$$

temos,

$$\begin{aligned} \text{Cum} \left[\dots \right] &= \sum_{u_1=0}^{T-1} \dots \sum_{u_{k-1}=0}^{T-1} \sum_{t=0}^{T-1-\left[|u_1|+|u_2|+\dots+|u_{k-1}|\right]} A(u_1+t) \dots A(u_{k-1}+t) A(t) \cdot \\ &\cdot e^{-i \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right) t} e^{-i \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j} C_x(u_1, \dots, u_{k-1}) + O(1) \end{aligned} \quad (1)$$

Para chegarmos à expressão final, temos que utilizar alguns resultados:

Resultado I: $H_{a_t a_{t+u_1} \dots a_{t+u_{k-1}}}(\alpha) = H_a^{(k)}(\alpha) + O(1)$

$$\left| \sum_{t=0}^{T-1} A(u_1+t) \dots A(u_{k-1}+t) A(t) e^{-i(\lambda_1+\dots+\lambda_k)t} - \sum_{t=0}^{T-1} A^k(t) e^{-i(\lambda_1+\dots+\lambda_k)t} \right|$$

$$\leq \sum_{t=0}^{T-1} |A(t)| |A(u_1+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-1}(t)|$$

$$\leq L \sum_{t=0}^{T-1} |A(u_1+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-1}(t)|$$

mas,

$$|A(u_1+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-1}(t)| = |A(u_1+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-1}(t)|$$

$$+ |A(u_1+t) A^{k-2}(t) - A(u_1+t) A^{k-2}(t)|$$

$$= \left| A(t) \left[A(u_1+t) A^{k-3}(t) - A^{k-2}(t) \right] + A(u_1+t) \left[A(u_2+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-2}(t) \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq L \left[|A(u_1+t)A^{k-3}(t) - A^{k-2}(t)| + |A(u_2+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-2}(t)| \right] \\
&\leq L \left[|A(u_1+t) - A(t)| |A^{k-3}(t)| + |A(u_2+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-2}(t)| \right] \\
&\leq L^{k-2} |A(u_1+t) - A(t)| + L |A(u_2+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-2}(t)|.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
|A(u_2+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-2}(t)| &\leq L^{k-3} |A(u_2+t) - A(t)| + \\
&+ L |A(u_3+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{k-3}(t)|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|A(u_1+t) \dots A(u_{k-1}+t) - A^{(k)}(t)| \leq M \sum_{j=1}^{k-1} |A(u_j+t) - A(t)|$$

e

$$\left| \sum_{t=0}^{T-1} A(u_1+t) \dots A(u_{k-1}+t) A(t) e^{-i(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)t} - \sum_{t=0}^{T-1} A^k(t) e^{-i(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)t} \right|$$

$$\leq M^* \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{v=0}^{u_j} \sum_{t=0}^{T-1} |A(t+v+1) - A(t)| < \infty \quad \text{pois } A(t) \text{ é de}$$

variação limitada.

Resultado II:

$$\sum_{u_1=-T+1}^{T-1} \dots \sum_{u_{k-1}=-T+1}^{T-1} \sum_{t=T-|u_1|-|u_2|-\dots-|u_{k-1}|}^{T-1} A(t) A(t+u_1) \dots A(t+u_{k-1}) e^{-i \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) t}$$

$$e^{-i \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i u_i} C_x(u_1, \dots, u_{k-1}) = O(1)$$

$$|\dots| \leq L' \sum_{u_1=-T+1}^{T-1} \dots \sum_{u_{k-1}=-T+1}^{T-1} \sum_{t=T-|u_1|-\dots-|u_{k-1}|}^{T-1} |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$$

de onde segue o resultado.

Resultado III:

$$H_a^{(k)}(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \sum_{\substack{|u_i| > T-1 \\ i=1, \dots, k-1}} e^{-i \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j} C_x(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) = O(1)$$

$$|\dots| \leq |H_a^{(k)}(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)| \sum_{\substack{i=1, \dots, k-1}} \frac{|u_1| + \dots + |u_{k-1}|}{T} |C_x(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$$

pois $H_a^{(k)}(\cdot) = O(T)$ e $|\sum \dots| = O(T^{-1})$.

Utilizando os resultados (I), (II) e (III) na expressão (1)

temos

$$\begin{aligned}
\text{Cum}[\text{ordem } k] &= H_a^{(k)} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \sum_{u_1=-T+1}^{T-1} \dots \sum_{u_{k-1}=-T+1}^{T-1} e^{-i \left(\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j \right)} C_x(u_1, \dots, u_{k-1}) \\
&\quad + O(1) + O(1) \\
&= H_a^{(k)} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \sum_{u_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{u_{k-1}=-\infty}^{\infty} e^{-i \left(\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j \right)} C_x(u_1, \dots, u_{k-1}) \\
&\quad + O(1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\text{Cum} \left[d_y^{(T)}(\lambda_1), \dots, d_y^{(T)}(\lambda_k) \right] = H_a^{(k)} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) (2\pi)^{k-1} f_x(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) + O(1).$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.1.1

Resultado 1:

$$E |d_y^{(T)}(\lambda)|^2 = \text{Cum} \left[d_x^{(T)}(\lambda), d_x^{(T)}(-\lambda) \right] + |E d_x^{(T)}(\lambda)|^2$$

$$\text{Cum} \left[d_x^{(T)}(\lambda), d_x^{(T)}(-\lambda) \right] = \text{Cov} \left[d_x^{(T)}(\lambda), d_x^{(T)}(\lambda) \right]$$

$$= E \left[\left(d_x^{(T)}(\lambda) - \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} \mu_x \right) \overline{\left(d_x^{(T)}(\lambda) - \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} \mu_x \right)} \right]$$

$$= E \left[d_x^{(T)}(\lambda) d_x^{(T)}(-\lambda) \right] - E d_x^{(T)}(-\lambda) \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} \mu_x -$$

$$E d_x^{(T)}(\lambda) \sum_{t=0}^{T-1} e^{i\lambda t} \mu_x + \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} \mu_x \sum_{t=0}^{T-1} e^{i\lambda t} \mu_x$$

$$= E \left| d_x^{(T)}(\lambda) \right|^2 - \left| \sum_{t=0}^{T-1} e^{-i\lambda t} \mu_x \right|^2.$$

Portanto,

$$\text{Cum} \left[d_x^{(T)}(\lambda), d_x^{(T)}(-\lambda) \right] = E \left| d_x^{(T)}(\lambda) \right|^2 - \left| E d_x^{(T)}(\lambda) \right|^2$$

Resultado 2:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} \right|^2 d\lambda = 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} \right|^2 d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{t=0}^{T-1} A(t) e^{-i\lambda t} \right) \left(\sum_{k=0}^{T-1} A(k) e^{+i\lambda k} \right) d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{k=0}^{T-1} A(t) A(k) e^{-i\lambda t} e^{i\lambda k} \right) d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \neq t=0}^{T-1} A(t) A(k) e^{-i\lambda(t-k)} d\lambda$$

(I)

(II)

$$(I) = \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda = 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)$$

$$(II) = \sum_{k \neq t} A(t) A(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda(t-k)} d\lambda = 0$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.1.2:

Como $\mu_x = 0$, então $E \left[d_y^{(T)}(\lambda) \right] = 0$ e

$$\begin{aligned}
& \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda) d_Y^{(T)}(-\lambda), d_Y^{(T)}(-\mu) d_Y^{(T)}(\mu) \right] = \\
& \quad \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(-\lambda), d_Y^{(T)}(-\mu), d_Y^{(T)}(\mu) \right] \\
& + \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(\mu) \right] \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(-\lambda), d_Y^{(T)}(-\mu) \right] + \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(\lambda), d_Y^{(T)}(-\mu) \right] \\
& \quad \cdot \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}(-\lambda), d_Y^{(T)}(\mu) \right].
\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 2.1 temos,

$$\begin{aligned}
\text{Cum} \left[., . \right] &= (2\pi)^3 \left(\sum_{t=0}^{T-1} A^4(t) \right) f_X(\lambda, -\lambda, -\mu) + O(1) + \\
& + \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(\lambda+\mu)t} f_X(\lambda) + O(1) \right] \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(-\lambda-\mu)t} f_X(-\lambda) + O(1) \right] \\
& + \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(\lambda-\mu)t} f_X(\lambda) + O(1) \right] \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(-\lambda+\mu)t} f_X(-\lambda) + O(1) \right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left[I_X^A(\lambda), I_X^A(\mu) \right] &= \text{Cum} \left[I_X^A(\lambda), \overline{I_X^A(\mu)} \right] \\
&= \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-2} \left[(2\pi)^3 \left(\sum_{t=0}^{T-1} A^4(t) \right) f_X(\lambda, -\lambda, -\mu) + O(1) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-2} \left[4\pi^2 \left| \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(\lambda+\mu)t} f_x(\lambda) \right|^2 \right. \\
& + O(1) 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(\lambda+\mu)t} f_x(\lambda) \\
& + O(1) 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(-\lambda-\mu)t} f_x(-\lambda) \\
& + O(1) + 4\pi^2 \left| \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(\lambda-\mu)t} f_x(\lambda) \right|^2 \\
& + O(1) 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(\lambda-\mu)t} f_x(\lambda) \\
& \left. + O(1) 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(-\lambda+\mu)t} f_x(-\lambda) + O(1) \right] \\
& = \left[2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) \right]^{-2} \left[4\pi^2 \left| \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(\lambda+\mu)t} f_x(\lambda) \right|^2 + \right. \\
& \quad \left. + 4\pi^2 \left| \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t) e^{-i(\lambda-\mu)t} f_x(\lambda) \right|^2 \right] + O(T^{-1}) .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left[I_x^A(\lambda), I_x^A(\mu) \right] &= \left| H_a^{(2)}(0) \right|^{-2} \left[\left| H_a^{(2)}(\lambda+\mu) \right|^2 + \right. \\
&\quad \left. \left| H_a^{(2)}(\lambda-\mu) \right|^2 \right] f_x^2(\lambda) + O(T^{-1}) .
\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.2.2:

$$\text{Var} \hat{f}_x^{1B}(\lambda) = \text{Var} \left[\frac{\hat{f}_y^1(\lambda)}{\mu_a^2} \right] + \text{Var} \left[\int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_y^1(w) dw \right] -$$

(I) (II)

$$- 2\text{Cov} \left[\frac{\hat{f}_y^1(\lambda)}{\mu_a^2}, \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_y^1(w) dw \right]$$

(III)

$$(II): \text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_y^1(w) dw = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) b(\lambda-v) \text{Cov} \left[\hat{f}_y^1(w), \hat{f}_y^1(v) \right] dw dv$$

Se valerem (4.8), (4.11) e (4.12) então $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})|$

$< \infty$, $k=2,3,4$, $j=1, \dots, k-1$, como foi demonstrado na seção 4.2. Assim, utilizando o Teorema 5.2.4 de Brillinger (1975, p.125) temos que

$$\text{Cov} \left[\hat{f}_y^1(w), \hat{f}_y^1(v) \right] = O(T^{-1}) \text{ se } w = \frac{2\pi r}{T}, \lambda = \frac{2\pi s}{T}, r, s, r \pm s \not\equiv 0 \pmod{T}.$$

Portanto,

$$(II) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) b(\lambda-v) O(T^{-1}) dw dv = O(T^{-1}) \text{ pois}$$

$$\begin{aligned} |II| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |b(\lambda-w)| |b(\lambda-v)| K T^{-1} dw dv \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k| \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |b_{\ell}| K T^{-1} dw dv \end{aligned}$$

$$= 4\pi^2 K T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k| \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |b_\ell|.$$

Assim,

$$(II) = O(T^{-1})$$

$$(I): \text{Var} \left[\frac{\hat{f}_Y^1(\lambda)}{\mu_a^2} \right] = \frac{1}{\mu_a^4} \text{Var} \hat{f}_Y^1(\lambda) = \frac{\hat{f}_Y^2(\lambda)}{\mu_a^4} + O(T^{-1})$$

utilizando o Teorema 5.2.4 de Brillinger (1975).

$$(III): \text{Cov} \left[\frac{\hat{f}_Y^1(\lambda)}{\mu_a^2}, \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Y^1(w) dw \right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_a^2} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \text{Cov} \left[\hat{f}_Y^1(\lambda), \hat{f}_Y^1(w) \right] dw$$

$$= \frac{1}{\mu_a^2} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) O(T^{-1}) dw.$$

Assim,

$$(III) = O(T^{-1}).$$

De (I), (II) e (III) temos que

$$\text{Var} \left[\hat{f}_X^{1B}(\lambda) \right] = \frac{\hat{f}_Y^2(\lambda)}{\mu_a^4} + O(T^{-1}).$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.3.3:

$$\text{Cov} \left[\hat{f}_x^{1C}(\lambda), \hat{f}_x^{1C}(\mu) \right] = \text{Cov} \left[\frac{|d_y^{(T)}(\lambda)|^2}{2\pi T \mu_a^2}, \frac{|d_y^{(T)}(\mu)|^2}{2\pi T \mu_a^2} \right]$$

pois $(2\pi\mu_a^2)^{-1}\sigma_a^2(\sigma_x^2 + \mu_x^2)$ é uma constante.

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[\hat{f}_x^{1C}(\lambda), \hat{f}_y^{1C}(\mu) \right] &= \frac{1}{\mu_a^4} \text{Cov} \left[\frac{|d_y^{(T)}(\lambda)|^2}{2\pi T}, \frac{|d_y^{(T)}(\mu)|^2}{2\pi T} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_a^4} \left\{ \left[\frac{\text{sen} T(\lambda+\mu)/2}{T \text{sen}(\lambda+\mu)/2} \right]^2 + \left[\frac{\text{sen} T(\lambda-\mu)/2}{T \text{sen}(\lambda-\mu)/2} \right]^2 \right\} f_y^2 + O(T^{-1}) \end{aligned}$$

utilizando o Teorema 5.2.5 de Brillinger (1975, p.125).

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 5.1.1:

(i) Utilizando o Teorema 5.1.1, para $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, temos

$$E \left[\hat{f}_x^{2A}(\lambda) \right] = (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|H_a^{(1)} \left[2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) - \alpha \right]|^2}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} f_x(\alpha) d\alpha$$

e, de acordo com a Proposição 4.1.1,

$$\begin{aligned} E \left[\hat{f}_x^{2A}(\lambda) \right] &= (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m \left[f_x \left(2\pi \left(\frac{s(T)+j}{T} \right) \right) + o(1) \right] \\ &= f_x(\lambda) + O(T^{-1}) + o(1) \end{aligned}$$

$$= f_x(\lambda) + o(1).$$

(ii) Se $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou se $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ e T ímpar,

$$E\left[\hat{f}_x^{2A}(\lambda)\right] = m^{-1} \sum_{j=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|H_a^{(1)}\left[(\lambda + \frac{2\pi j}{T}) - \alpha\right]|^2}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} f_x(\alpha) d\alpha$$

e, de acordo com a Proposição 4.1.1,

$$\begin{aligned} E\left[\hat{f}_x^{2A}(\lambda)\right] &= m^{-1} \sum_{j=1}^m \left[f_x\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) + o(1) \right] \\ &= f_x(\lambda) + o(1). \end{aligned}$$

(iii) A demonstração é análoga para o caso $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ e T par.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.1.4:

$$\begin{aligned} (i) \quad E\left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda)\right] &= \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) E\left[I_x^A\left(\frac{2\pi s}{T}\right)\right] \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) \left[f_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right) + o(1) \right] \end{aligned}$$

utilizando a Proposição 4.1.1.

Assim,

$$\begin{aligned} E\left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda)\right] &= \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) f_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right) + o(1) \\ &= \int_0^{2\pi} W^{(T)}(\lambda - \alpha) f_x(\alpha) d\alpha + O(T^{-1} B_T^{-1}) + o(1) \end{aligned}$$

utilizando o Lema P5.1 de Brillinger (1975, p.415).

Logo,

$$E\left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} W(\beta) f_x(\lambda - \beta B_T) d\beta + o(1)$$

$$e \quad \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda)\right] = f_x(\lambda).$$

$$(ii) \quad \text{Cov}\left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda), \hat{f}_x^{3A}(\mu)\right] = \text{Cov}\left[\frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) I_x^A\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \right.$$

$$\left. \frac{2\pi}{T} \sum_{r=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\mu - \frac{2\pi r}{T}\right) I_x^A\left(\frac{2\pi r}{T}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{r=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) W^{(T)}\left(\mu - \frac{2\pi r}{T}\right) \text{Cov}\left[I_x^A\left(\frac{2\pi s}{T}\right), I_x^A\left(\frac{2\pi r}{T}\right)\right].$$

Utilizando o Teorema 4.1.1 temos que

$$\text{Cov}\left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda), \hat{f}_x^{3A}(\mu)\right] = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{r=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) W^{(T)}\left(\mu - \frac{2\pi r}{T}\right) \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left| H_a^{(2)}(0) \right|^{-2} \left[\left| H_a^{(2)} \left[\frac{2\pi(s-r)}{T} \right] \right|^2 + \left| H_a^{(2)} \left[\frac{2\pi(s+r)}{T} \right] \right|^2 \right] \right. \\
& \quad \left. f_x^2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) + O(T^{-1}) \right\} \\
& = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{r=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) W^{(T)} \left(\mu - \frac{2\pi r}{T} \right) \left\{ \left| H_a^{(2)}(0) \right|^{-2} \right. \\
& \quad \left. \left[\left| H_a^{(2)} \left[\frac{2\pi(s-r)}{T} \right] \right|^2 + \left| H_a^{(2)} \left[\frac{2\pi(s+r)}{T} \right] \right|^2 \right] \right\} f_x^2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) + O(T^{-1}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda), \hat{f}_x^{3A}(\mu) \right] & = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) W^{(T)} \left(\mu - \frac{2\pi s}{T} \right) . \\
& \left| H_a^{(2)}(0) \right|^{-2} \left[\left| H_a^{(2)}(0) \right|^2 + \left| H_a^{(2)} \left(\frac{4\pi s}{T} \right) \right|^2 \right] f_x^2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \\
& + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) W^{(T)} \left(\mu + \frac{2\pi s}{T} \right) \left| H_a^{(2)}(0) \right|^{-2} \left[\left| H_a^{(2)} \left(\frac{4\pi s}{T} \right) \right|^2 + \right. \\
& \left. \left| H_a^{(2)}(2\pi) \right|^2 \right] f_x^2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{T-1} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq T-s}}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) \\
& W^{(T)} \left(\mu - \frac{2\pi r}{T} \right) \left| H_a^{(2)}(0) \right|^{-2} \left[\left| H_a^{(2)} \left[\frac{2\pi(s-r)}{T} \right] \right|^2 + \left| H_a^{(2)} \left[\frac{2\pi(s+r)}{T} \right] \right|^2 \right] f_x^2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \\
& + O(T^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) W^{(T)}\left(\mu - \frac{2\pi s}{T}\right) f_x^2\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \\
&\quad + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) W^{(T)}\left(\mu + \frac{2\pi s}{T}\right) f_x^2\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \\
&\quad + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left|H_a^{(2)}(0)\right|^{-2} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) W^{(T)}\left(\mu - \frac{2\pi s}{T}\right) \left|H_a^{(2)}\left(\frac{4\pi s}{T}\right)\right|^2 f_x^2\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \\
&\quad \text{(I)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left|H_a^{(2)}(0)\right|^{-2} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) W^{(T)}\left(\mu + \frac{2\pi s}{T}\right) \left|H_a^{(2)}\left(\frac{4\pi s}{T}\right)\right|^2 f_x^2\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \\
&\quad \text{(II)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left|H_a^{(2)}(0)\right|^{-2} \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{\substack{r=1 \\ s+r \text{ e } s \neq T-r}}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) W^{(T)}\left(\mu - \frac{2\pi r}{T}\right) \left[\left|H_a^{(2)}\left(\frac{2\pi(s-r)}{T}\right)\right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left|H_a^{(2)}\left(\frac{2\pi(s+r)}{T}\right)\right|^2 \right] f_x^2\left(\frac{2\pi s}{T}\right) + O(T^{-1}). \\
&\quad \text{(III)}
\end{aligned}$$

Utilizando o fato

$$H_a^{(k)}(\lambda) = \begin{cases} O(T) & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ O(1) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

temos que

$$(I) = O(T^{-2})O(T^{-2})O(T)O(B_T^{-1})O(1) = O(T^{-3}B_T^{-1})$$

$$(II) = O(T^{-2})O(T^{-2})O(T)O(B_T^{-1})O(1) = O(T^{-3}B_T^{-1})$$

$$(III) = O(T^{-2})O(T^{-2})O(T)O(T) = O(T^{-2})$$

e, portanto

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda), \hat{f}_x^{3A}(\mu) \right] &= \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) W^{(T)} \left(\mu - \frac{2\pi s}{T} \right) f_x^2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \\ &+ \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) W^{(T)} \left(\mu + \frac{2\pi s}{T} \right) f_x^2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) + O(T^{-3}B_T^{-1}) + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

Utilizando o Lema P5.1 de Brillinger (1975, p.415) temos

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda), \hat{f}_x^{3A}(\mu) \right] &= \left(\frac{2\pi}{T} \right) \int_0^{2\pi} W^{(T)}(\lambda - \alpha) W^{(T)}(\mu - \alpha) f_x^2(\alpha) d\alpha \\ &+ \left(\frac{2\pi}{T} \right) \int_0^{2\pi} W^{(T)}(\lambda - \alpha) W^{(T)}(\mu + \alpha) f_x^2(\alpha) d\alpha + O(T^{-2}B_T^{-2}) + O(T^{-3}B_T^{-1}) + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

Substituindo $W^{(T)}(\alpha)$ por $\sum_{j=-\infty}^{\infty} B_T^{-1} W \left[B_T^{-1}(\alpha + 2\pi j) \right]$ temos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T T \text{Cov} \left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda), \hat{f}_x^{3A}(\mu) \right] = 2\pi \left[\eta(\lambda - \mu) + \eta(\lambda + \mu) \right].$$

$$f_x^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta.$$

(iii) Fazendo $\lambda = \mu$ temos

$$\begin{aligned}\text{Var} \left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda) \right] &\approx B_T^{-1} T^{-1} 2\pi f_x^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta, \quad \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\approx B_T^{-1} T^{-1} 4\pi f_x^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta, \quad \lambda \equiv 0 \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Em ambos os casos, $\text{Var} \left[\hat{f}_x^{3A}(\lambda) \right] \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.1.5:

$$\begin{aligned}\hat{f}_x^{3A}(\lambda) &= \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) I_x^A\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \\ &= \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{2\pi \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) \left| d_Y^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \right|^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\text{Cum} \left[\hat{f}_x^{3A}(\pm\lambda_1), \hat{f}_x^{3A}(\pm\lambda_2), \dots, \hat{f}_x^{3A}(\pm\lambda_K) \right] &= \\ &= \text{Cum} \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{s_1=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda_1 - \frac{2\pi s_1}{T}\right) I_x^A\left(\frac{2\pi s_1}{T}\right), \dots, \frac{2\pi}{T} \sum_{s_K=0}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda_K - \frac{2\pi s_K}{T}\right) \right. \\ &\quad \left. \cdot I_x^A\left(\frac{2\pi s_K}{T}\right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{T \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} \right)^K \sum_{s_1=1}^{T-1} \dots \sum_{s_K=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda_1 - \frac{2\pi s_1}{T}\right) \dots W^{(T)}\left(\lambda_K - \frac{2\pi s_K}{T}\right) \\ &\quad \cdot \text{Cum} \left[d_Y^{(T)}\left(\frac{2\pi s_1}{T}\right) d_Y^{(T)}\left(-\frac{2\pi s_1}{T}\right), \dots, d_Y^{(T)}\left(\frac{2\pi s_K}{T}\right) d_Y^{(T)}\left(-\frac{2\pi s_K}{T}\right) \right].\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 2.3.2 de Brillinger (1975, p. 21) e o Teorema 2.1 temos que

$$\begin{aligned} \text{Cum} \left[\hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_1), \dots, \hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_K) \right] &= \left(\frac{1}{T \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} \right)^K \sum_{s_1=1}^{T-1} \dots \sum_{s_K=1}^{T-1} W^{(T)}(\lambda_1 - \frac{2\pi s_1}{T}) \dots \\ &\cdot W^{(T)}(\lambda_K - \frac{2\pi s_K}{T}) \sum_v \left[(2\pi)^{m_1-1} H_a^{(m_1)} \left(2\pi \sum_{jk \in v_1} \frac{r_{jk}}{T} \right) f_x \left(2\pi \frac{r_{jk}}{T}; jk \in v_1 \right) + O(1) \right] \\ &+ \dots + \left[(2\pi)^{m_p-1} H_a^{(m_p)} \left(2\pi \sum_{jk \in v_p} \frac{r_{jk}}{T} \right) f_x \left(2\pi \frac{r_{jk}}{T}; jk \in v_p \right) + O(1) \right] \end{aligned}$$

onde $r_{k1} = s_k$, $r_{k2} = -s_k$, $k=1 \dots K$

$\sum_v$ se estende a toda "partição indecomponível" $v = v_1 \cup \dots \cup v_p$ de

$$\begin{array}{cc} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ \vdots & \vdots \\ r_{K1} & r_{K2} \end{array}$$

e m_i é o número de elementos em v_i , $i=1 \dots p$.

Utilizando o fato

$$H_a^{(k)}(\lambda) = \begin{cases} O(T) & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ O(1) & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

temos que

$$\begin{aligned} \text{Cum} \left[\hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_1), \dots, \hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_K) \right] &= \left(\frac{1}{T \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} \right)^K \sum_{s_1=1}^{T-1} \dots \sum_{s_K=1}^{T-1} \\ &W^{(T)} \left(\lambda_1 - \frac{2\pi s_1}{T} \right) \dots W^{(T)} \left(\lambda_K - \frac{2\pi s_K}{T} \right) \sum_v \left[(2\pi)^{m_1-1} H_a^{(m_1)} \left(2\pi \sum_{jk \in v_1} \frac{r_{jk}}{T} \right) \right. \\ &f_x \left(2\pi \frac{r_{jk}}{T}; jk \in v_1 \right) \dots \left[2\pi^{m_q-1} H_a^{(m_q)} \left(2\pi \sum_{jk \in v_q} \frac{r_{jk}}{T} \right) f_x \left(2\pi \frac{r_{jk}}{T}; \right. \right. \\ &\left. \left. jk \in v_q \right) \right] O(1) \end{aligned}$$

onde q é o número de subconjuntos de cada partição tal que $\sum \frac{2\pi r_{jk}}{T} \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Além disso, temos que

- i) $H_a^{(k)}(\lambda)$ introduz q restrições lineares, se $q < K$ e $q-1$ se $q=K$;
- ii) $W^{(T)}(\alpha) \equiv O(B_T^{-1})$ e
- iii) $\sum_{s=0}^{T-1} W^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right) = O(T)$.

Portanto (ver Brillinger, 1975 p.437),

$$\text{Cum} \left[\hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_1), \dots, \hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_K) \right] = \left(\frac{1}{T \sum_{t=0}^{T-1} A^2(t)} \right)^K \max_{q \leq p \leq K} O \left[(B_T^{-1})^{q - \left\lfloor \frac{q}{K} \right\rfloor} \right] \\ O(T^{K-q + \left\lfloor \frac{q}{K} \right\rfloor}) O(T^q) O(1)$$

onde $\left\lfloor \frac{q}{K} \right\rfloor$ denota a parte inteira de q/K .

O máximo é obtido quando $p=q=K$, ou seja, quando a partição tem K subconjuntos, todos satisfazendo $\sum \frac{2\pi r_{jk}}{T} \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Assim

$$\text{Cum} \left[\hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_1), \dots, \hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_K) \right] = O(T^{-2K}) O \left[(B_T^{-1})^{K-1} \right] O(T^{K+1})$$

e

$$\text{Cum} \left[(B_T T)^{\frac{1}{2}} \hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_1), \dots, (B_T T)^{\frac{1}{2}} \hat{f}_x^{3A}(\pm \lambda_K) \right] = O \left[(B_T T)^{\frac{K}{2}} T^{-2K} (B_T^{-1})^{K-1} T^{K+1} \right] \\ = O(B_T^{-\frac{K}{2}+1} T^{-\frac{K}{2}+1})$$

é uma quantidade que converge para zero se $K > 2$.

Assim, pelo Lema 1.4.1 e a observação c da Definição 14, o resultado segue.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.2.1

$$(i) \quad E \hat{f}_x^{2B}(\lambda) = \frac{E \hat{f}_y^2(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) E \hat{f}_y^2(w) dw.$$

Se $\sum_u |u| |\gamma_x(u)| < \infty$ e $\sum_u |\gamma_a(u)| < \infty$ então, $\sum_u |u| |\gamma_y(u)| < \infty$ e utilizando o Corolário 5.4.1 de Brillinger (1975, p. 135) temos que

$$E\hat{f}_y^2(\lambda) = f_y(\lambda) + O(T^{-1}), \quad -\infty < \lambda < \infty$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} E\hat{f}_x^{2B}(\lambda) &= \frac{f_y(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) (f_y(\lambda) + O(T^{-1})) dw + O(T^{-1}) \\ &= \frac{f_y(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) f_y(\lambda) dw - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) O(T^{-1}) dw + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) O(T^{-1}) dw \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |b(\lambda-w)| kT^{-1} dw \\ &= kT^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |b(\lambda-w)| dw. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) O(T^{-1}) dw = O(T^{-1}),$$

e

$$\begin{aligned} E\hat{f}_x^{2B}(\lambda) &= \frac{f_y(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) f_y(\lambda) dw + O(T^{-1}) \\ &= f_x(\lambda) + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \text{Var} \hat{f}_x^{2B}(\lambda) = \text{Var} \frac{\hat{f}_y^2(\lambda)}{\mu_a^2} + \text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_y^2(w) dw$$

(I)
(II)

$$- 2\text{Cov} \left[\frac{\hat{f}_y^2(\lambda)}{\mu_a^2}, \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_y^2(w) dw \right]$$

(III)

$$(II): \text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_y^2(w) dw = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) b(\lambda-v) \text{Cov} [\hat{f}_y^2(w), \hat{f}_y^2(v)] dw dv.$$

Se valerem (4.8), (4.11) e (4.12) então $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})|$

$< \infty$, $k=2,3,4$ e $j=1, \dots, k-1$. Assim, utilizando o Teorema 5.2.4 de Brillinger (1975, p.125) temos que

$$\text{Cov} [\hat{f}_y^2(w), \hat{f}_y^2(v)] = O(T^{-1}) \quad \text{se } w \pm v \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$$

e, portanto,

$$\text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_y^2(w) dw = O(T^{-1})$$

$$(I): \text{Var} \frac{\hat{f}_y^2(\lambda)}{\mu_a^2} = \frac{1}{\mu_a^4} \text{Var} \hat{f}_y^2(\lambda)$$

$$= \begin{cases} \frac{f_y^2(\lambda)}{\mu_a^{4(2m+1)}} + O(T^{-1}), & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \frac{f_y^2(\lambda)}{\mu_a^{4m}} + O(T^{-1}), & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases}$$

de acordo com o Teorema 5.4.2 de Brillinger (1975, p.135).

$$\begin{aligned}
 \text{(III): } \text{Cov} \left[\frac{\hat{f}_Y^2(\lambda)}{\mu_a^2}, \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Y^2(w) dw \right] &= \\
 &= \frac{1}{\mu_a^2} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \text{Cov} \left[\hat{f}_Y^2(\lambda), \hat{f}_Y^2(w) \right] dw \\
 &= \frac{1}{\mu_a^2} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) O(T^{-1}) dw.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Cov} \left[\frac{\hat{f}_Y^2(\lambda)}{\mu_a^2}, \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Y^2(w) dw \right] = O(T^{-1}).$$

De (I), (II) e (III) temos

$$\text{Var} \hat{f}_X^{2B}(\lambda) = \begin{cases} \frac{f_Y^2(\lambda)}{\mu_a^{4(2m+1)}} + O(T^{-1}), & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ \frac{f_Y^2(\lambda)}{\mu_a^{4m}} + O(T^{-1}), & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.2.2

$$\text{(i)} \quad E \hat{f}_X^{3B}(\lambda) = \frac{E \hat{f}_Y^3(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) E \hat{f}_Y^3(w) dw$$

Se valer (4.11) então $\sum_u |u| |\gamma_x(u)| < \infty$ e utilizando o Teorema 5.6.1 de Brillinger (1975, p.147), temos que

$$E\hat{f}_Y^3(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\beta) f_Y(\lambda - B_T \beta) d\beta + O(B_T^{-1} T^{-1}),$$

e

$$E\hat{f}_Y^3(\lambda) \rightarrow f_Y(\lambda), \quad T \rightarrow \infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda - w) E\hat{f}_Y^3(w) dw = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda - w) \left[\int_{-\pi}^{\pi} W(\beta) f_Y(w - B_T \beta) d\beta + O(B_T^{-1} T^{-1}) \right] dw \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda - w) \left[\int_{-\pi}^{\pi} W(\beta) f_Y(w - B_T \beta) d\beta \right] dw + \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda - w) O(B_T^{-1} T^{-1}) dw \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda - w) \left[\int_{-\infty}^{\infty} W(\beta) f_Y(w - B_T \beta) d\beta \right] dw + O(B_T^{-1} T^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pois } & \left| \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda - w) O(B_T^{-1} T^{-1}) dw \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |b(\lambda - w)| K B_T^{-1} T^{-1} dw \\ &= K B_T^{-1} T^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |b(\lambda - w)| dw < \infty. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda - w) E\hat{f}_Y^3(w) dw =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \left[\int_{-\pi}^{\pi} W(\beta) f_Y(w-B_T \beta) d\beta \right] dw + \lim_{T \rightarrow \infty} O(B_T^{-1} T^{-1}) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) f_Y(w) dw.
\end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \hat{f}_X^{3B}(\lambda) = \frac{f_Y(\lambda)}{\mu_a^2} - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) f_Y(w) dw = f_X(\lambda).$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var} \hat{f}_X^{3B}(\lambda) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var} \frac{\hat{f}_Y^3(\lambda)}{\mu_a^2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Y^3(w) dw + \\
&\quad (I) \qquad \qquad \qquad (II)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Cov} \left[\frac{\hat{f}_Y^3(\lambda)}{\mu_a^2}, \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Y^3(w) dw \right] \\
&\quad (III)
\end{aligned}$$

$$(I): \text{Var} \frac{\hat{f}_Y^3(\lambda)}{\mu_a^2} = \frac{1}{\mu_a^4} \text{Var} \hat{f}_Y^3(\lambda)$$

$$= \frac{1}{\mu_a^4} \begin{cases} B_T^{-1} T^{-1} 2\pi f_Y^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta & \text{se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ B_T^{-1} T^{-1} 4\pi f_Y^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta & \text{se } \lambda \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases}$$

de acordo com Corolário 5.6.2 de Brillinger (1975), pois se (4.8), (4.11) e (4.12) estiverem satisfeitas, então $\sum_{u_1} \dots \sum_{u_{k-1}} |u_j| |C_Y(u_1, \dots, u_{k-1})| < \infty$, $k=2,3,4$, $j=1, \dots, k-1$.

Portanto, $\text{Var} \frac{\hat{f}_Y^3(\lambda)}{\mu_a^2} \rightarrow 0$, $B_T T \rightarrow \infty$.

$$(II): \text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Y^3(w) dw = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) b(\lambda-v) \text{Cov} \left[\hat{f}_Y^3(w), \hat{f}_Y^3(v) \right] dw dv.$$

Utilizando o Corolário 5.6.2 de Brillinger (1975), vemos que

$$\text{Cov} \left[\hat{f}_Y^3(w), \hat{f}_Y^3(v) \right] \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty, \quad \text{se } w \pm v \not\equiv 0 \pmod{2\pi},$$

portanto,

$$\text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Y^3(w) dw \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

$$(III): \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \text{Cov} \left[\hat{f}_Y^3(\lambda), \hat{f}_Y^3(w) \right] dw \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty$$

pelo Corolário 5.6.2 de Brillinger (1975) e porque $\int_{-\pi}^{\pi} |b(\lambda-w)| dw < \infty$.

De (I), (II) e (III) temos que

$$\text{Var} \hat{f}_x^{3B}(\lambda) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.2.3:

$$a) \quad \left[\hat{f}_x^{3B}(\lambda) - \tilde{f}_x^{3B}(\lambda) \right] = \frac{1}{2\pi} \sum_{|u| < T} w^{(T)}(u) \hat{\gamma}_Y(u) \left[\frac{1}{\widehat{\mu_a k_u}} - \frac{1}{\mu_a k_u} \right] e^{-i\lambda u}$$

$$\cong \frac{1}{2\pi} \sum_{|u| < T} w^{(T)}(u) \gamma_Y(u) \left[\frac{1}{(\mu_a k_u)^2} (\widehat{\mu_a k_u} - \mu_a k_u) \right] e^{-i\lambda u}$$

$$\text{pois} \begin{cases} \hat{\gamma}_Y(u) \cong \gamma_Y(u) \\ \frac{1}{\widehat{\mu_a k_u}} \cong \frac{1}{\mu_a k_u} - \frac{1}{(\mu_a k_u)^2} (\widehat{\mu_a k_u} - \mu_a k_u) \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} E \left[\hat{f}_x^{3B}(\lambda) - \tilde{f}_x^{3B}(\lambda) \right] &\cong \frac{1}{2\pi} \sum_{|u| < T} \frac{w^{(T)}(u) \gamma_Y(u)}{(\mu_a k_u)^2} e^{-i\lambda u} E(\widehat{\mu_a k_u} - \mu_a k_u) \\ &\leq \frac{K}{2\pi} \sum_{|u| < T} \frac{\gamma_Y(u)}{(\mu_a k_u)^2} O(T^{-1}) e^{-i\lambda u}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| E \left[\hat{f}_x^{3B}(\lambda) - \tilde{f}_x^{3B}(\lambda) \right] \right| \leq \frac{K^*}{2\pi T} \sum_{|u| < T} \frac{|\gamma_Y(u)|}{(\mu_a k_u)^2}.$$

$$\text{Mas } \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|u| < T} \frac{|\gamma_Y(u)|}{(\mu_a k_u)^2} < \infty \text{ pois } \mu_a k_u \rightarrow \mu_a^2 \text{ e}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma_Y(u)|}{\mu_a^2} < \infty.$$

Assim,

$$\left| E \left[\hat{f}_x^{3B}(\lambda) - \tilde{f}_x^{3B}(\lambda) \right] \right| \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (1)$$

$$b) \quad \left[\hat{f}_x^{3B}(\lambda) - \tilde{f}_x^{3B}(\lambda) \right]^2 = \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{|u| < T} w^{(T)}(u) \hat{\gamma}_Y(u) \left[\frac{1}{\mu_a k_u} - \widehat{\frac{1}{\mu_a k_u}} \right] e^{-i\lambda u} \right]^2$$

$$\cong \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{|u| < T} w^{(T)}(u) \gamma_Y(u) \frac{1}{(\mu_a k_u)^2} (\widehat{\mu_a k_u} - \mu_a k_u) e^{-i\lambda u} \right]^2$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{|u| < T} w^{2(T)}(u) \gamma_Y^2(u) \frac{1}{(\mu_a k_u)^4} (\widehat{\mu_a k_u} - \mu_a k_u)^2 e^{-2i\lambda u} +$$

(I)

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{u \neq v \\ |u|, |v| < T}} w^{(T)}(u) w^{(T)}(v) \frac{1}{(\mu_a k_u)^2 (\mu_a k_v)^2} (\widehat{\mu_a k_u} - \mu_a k_u)$$

(II)

$$\cdot (\widehat{\mu_a k_v} - \mu_a k_v) e^{-i\lambda u} e^{-i\lambda v} \gamma_Y(u) \gamma_Y(v).$$

Assim,

$$E \left[\hat{f}_x^{3B}(\lambda) - \tilde{f}_x^{3B}(\lambda) \right]^2 = E(I) + E(II). \quad (2)$$

$$\begin{aligned} E(I) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{|u| < T} \frac{w^{2(T)}(u) \gamma_Y^2(u)}{(\mu_a k_u)^4} E \left[\widehat{\mu_a k_u} - \mu_a k_u \right]^2 e^{-2i\lambda u} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{|u| < T} \frac{w^{2(T)}(u) \gamma_Y^2(u)}{(\mu_a k_u)^4} O(T - |u|)^{-1} e^{-2i\lambda u}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |E(I)| &\leq \frac{K}{4\pi^2} \sum_{|u| < T} \frac{w^{2(T)}(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T - |u|)} \gamma_Y^2(u) \\ &\leq \frac{K^*}{4\pi^2} \sum_{|u| < T} \frac{\gamma_Y^2(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T - |u|)}, \text{ pois } |w^{(T)}(u)| < K^*. \end{aligned}$$

Mas,

$$\sum_{|u| < T} \frac{\gamma_Y^2(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T - |u|)} = \frac{\gamma_Y^2(0)}{(\mu_a k_0)^4 T} + 2 \sum_{u=1}^{T-1} \frac{\gamma_Y^2(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T - u)}, \quad (3)$$

e $\sum_{u=0}^{\infty} |u| |\gamma_Y(u)| < \infty$, implicando que

$$\sum_{u=1}^{T-1} \frac{\gamma_Y^2(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T - u)} = \sum_{u=1}^{T-1} \frac{b^2(u)}{u^2 (\mu_a k_u)^4 (T - u)}$$

onde $b(u) = u |\gamma_Y(u)|$.

Assim,

$$\sum_{u=1}^{T-1} \frac{\gamma_Y^2(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T-u)} \leq \sum_{u=1}^{T-1} \frac{b^2(u)}{u (\mu_a k_u)^4 (T-u)}$$

$$\leq \sum_{u=1}^{T-1} \frac{b^2(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T-1)} \quad \text{pois no intervalo } [1, T-1] \quad \text{o m\u00ednimo de}$$

$u(T-u)$ \u00e9 $T-1$.

Logo,

$$\sum_{u=1}^{T-1} \frac{\gamma_Y^2(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T-u)} \leq \sum_{u=1}^{T-1} \frac{b^2(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T-1)} \rightarrow 0, \text{ quando } T \rightarrow \infty$$

$$\text{pois } \sum_{u=1}^{T-1} \frac{b^2(u)}{(\mu_a k_u)^4} < \infty.$$

Assim, voltando \u00e0 express\u00e3o (3), temos que,

$$\sum_{|u| < T} \frac{\gamma_Y^2(u)}{(\mu_a k_u)^4 (T-|u|)} \rightarrow 0, \text{ quando } T \rightarrow \infty \text{ e, } |E(I)| \rightarrow \text{zero},$$

quando $T \rightarrow \infty$.

$$E(II) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{u \neq v} \frac{w^{(T)}(u) w^{(T)}(v)}{(\mu_a k_u)^2 (\mu_a k_v)^2} E \left\{ \left[\widehat{\mu_a k_u} - \mu_a k_u \right] \left[\widehat{\mu_a k_v} - \mu_a k_v \right] \right\} \cdot e^{-i\lambda u} e^{-i\lambda v} \gamma_Y(u) \gamma_Y(v)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{u \neq v} \frac{w^{(T)}(u) w^{(T)}(v)}{(\mu_a k_u)^2 (\mu_a k_v)^2} O(T^{-1}) e^{-i\lambda u} e^{-i\lambda v} \gamma_Y(u) \gamma_Y(v).$$

Assim,

$$|E(II)| \leq \frac{K}{4\pi^2 T} \sum_{|u| < T} \frac{w^{(T)}(u) |\gamma_Y(u)|}{(\mu_a k_u)^2} \sum_{|v| < T} \frac{w^{(T)}(v) |\gamma_Y(v)|}{(\mu_a k_v)^2}.$$

Usando o fato que

$$\sum_{|u| < T} \frac{w^{(T)}(u)}{(\mu_a k_u)^2} |\gamma_Y(u)| \leq K^* \sum_{|u| < T} \frac{|\gamma_Y(u)|}{(\mu_a k_u)^2} < \infty,$$

temos que

$$|E(II)| \rightarrow \text{zero}, \quad T \rightarrow \infty.$$

Logo, de (2) temos

$$E \left[\hat{f}_x^{3B}(\lambda) - \tilde{f}_x^{3B}(\lambda) \right]^2 \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (4)$$

De (1) e (4) segue o resultado.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.3.1:

(i) Se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$,

$$\hat{E}f_x^{2C}(\lambda) = (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m \hat{E}f_x^{1C}\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) .$$

Utilizando o Teorema 4.3.1, temos que

$$\begin{aligned} \hat{E}f_x^{2C}(\lambda) &= (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m (2\pi T)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\text{sen} \left[T \left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T} - \alpha \right) / 2 \right]}{\text{sen} \left[\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T} - \alpha \right) / 2 \right]} \right]^2 f_x(\alpha) d\alpha \\ &+ (2m+1)^{-1} (2\pi T)^{-1} \mu_x^2 \sum_{j=-m}^m \left[\frac{\text{sen} T \left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{2T} \right)}{\text{sen} \frac{2\pi[s(T)+j]}{2T}} \right]^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m F_T \left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T} - \alpha \right) f_x(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} A_T^m \left(\alpha - \frac{2\pi s(T)}{T} \right) f_x(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

de acordo com a notação da seção 5.3.

(ii) Se $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou $\lambda = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$ e T par

$$E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = (2m)^{-1} \left[\sum_{j=-m}^{-1} + \sum_{j=1}^m \right] E\hat{f}_x^{1C}(\lambda + \frac{2\pi j}{T}).$$

Utilizando o Teorema 4.3.1, temos que

$$E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = (2m)^{-1} \left[\sum_{j=-m}^{-1} + \sum_{j=1}^m \right] (2\pi T)^{-1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\text{sen} T(\lambda + \frac{2\pi j}{T} - \alpha)/2}{\text{sen}(\lambda + \frac{2\pi j}{T} - \alpha)/2} \right]^2 f_x(\alpha) d\alpha \right. \\ \left. + \mu_x^2 \left[\frac{\text{sen} T(\lambda + \frac{2\pi j}{T})/2}{\text{sen}(\lambda + \frac{2\pi j}{T})/2} \right]^2 \right\}.$$

Portanto,

$$E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} (2m)^{-1} \left[\sum_{j=-m}^{-1} + \sum_{j=1}^m \right] F_T(\lambda + \frac{2\pi j}{T} - \alpha) f_x(\alpha) d\alpha \\ = \int_{-\pi}^{\pi} B_T^m(\alpha - \lambda) f_x(\alpha) d\alpha.$$

(iii) Se $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi \dots$ e T ímpar

$$E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = (2m)^{-1} \sum_{j=1}^m \left[E\hat{f}_x^{1C}(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T}) + E\hat{f}_x^{1C}(\lambda + \frac{\pi}{T} - \frac{2\pi j}{T}) \right].$$

Utilizando o Teorema 4.3.1 temos que

$$\begin{aligned}
\hat{E}f_x^{1C}(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T}) &= (2\pi T)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\text{sen} T(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T} - \alpha)/2}{\text{sen}(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T} - \alpha)/2} \right]^2 f_x(\alpha) d\alpha \\
&+ (2\pi T)^{-1} \mu_x^2 \left[\frac{\text{sen} T(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T})/2}{\text{sen}(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T})/2} \right]^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} F_T(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T} - \alpha) f_x(\alpha) d\alpha.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\hat{E}f_x^{1C}(\lambda + \frac{\pi}{T} - \frac{2\pi j}{T}) = \int_{-\pi}^{\pi} F_T(\lambda + \frac{\pi}{T} - \frac{2\pi j}{T} - \alpha) f_x(\alpha) d\alpha.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\hat{E}f_x^{2C}(\lambda) &= (2m)^{-1} \sum_{j=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} \left[F_T(\lambda - \frac{\pi}{T} + \frac{2\pi j}{T} - \alpha) + \right. \\
&\quad \left. + F_T(\lambda + \frac{\pi}{T} - \frac{2\pi j}{T} - \alpha) \right] f_x(\alpha) d\alpha \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} C_T^m(\lambda - \alpha) f_x(\alpha) d\alpha.
\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.3.2:

(i) Se $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

$$E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m E\hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right).$$

Utilizando o Teorema 4.3.2 temos

$$\begin{aligned} E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) &= (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m \left[f_x\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) + \right. \\ &\quad \left. + (2\pi T)^{-1} \mu_x^2 \left[\frac{\text{sen} 2\pi T \left[\frac{s(T)+j}{T} \right] / 2}{\text{sen} 2\pi \left[\frac{s(T)+j}{T} \right] / 2} \right]^2 + O(T^{-1}) \right] \\ &= (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m f_x\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) + (2\pi T)^{-1} (2m+1)^{-1} \mu_x^2 \\ &\quad \sum_{j=-m}^m \left[\frac{\text{sen} 2\pi T \left[\frac{s(T)+j}{T} \right] / 2}{\text{sen} 2\pi \left[\frac{s(T)+j}{T} \right] / 2} \right]^2 + O(T^{-1}) \\ &= (2m+1)^{-1} \sum_{j=-m}^m f_x\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

Assim,

$$E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = f_x(\lambda) + O(T^{-1}).$$

(ii) Se $\lambda \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou se $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ e T par

$$E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = m^{-1} \sum_{j=1}^m E\hat{f}_x^{1C}\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right).$$

Utilizando o Teorema 4.3.2 temos

$$E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) = m^{-1} \sum_{j=1}^m \left[f_x\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) + (2\pi T)^{-1} \mu_x^2 \left[\frac{\sin T \left[\lambda + \frac{2\pi j}{T} \right] / 2}{\sin \left[\lambda + \frac{2\pi j}{T} \right] / 2} \right]^2 + O(T^{-1}) \right]$$

logo,

$$\begin{aligned} E\hat{f}_x^{2C}(\lambda) &= m^{-1} \sum_{j=1}^m f_x\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) + O(T^{-1}) \\ &= f_x(\lambda) + O(T^{-1}). \end{aligned}$$

(iii) Se $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ e T ímpar, a demonstração é análoga a (ii).

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.3.3:

$$\begin{aligned} (i) \quad \text{Var}\hat{f}_x^{2C}(\lambda) &= \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2 \text{Var} \sum_{j=-m}^m \hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2 \sum_{j=-m}^m \text{Var}\hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) + O(T^{-1}) \end{aligned}$$

de acordo com o Teorema 4.3.4, que também fornece

$$\begin{aligned}\text{Var} \hat{f}_x^{2C}(\lambda) &= \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2 \frac{1}{\mu_a^4} \sum_{j=-m}^m f_Y^2\left(\frac{2\pi[s(T)+j]}{T}\right) + O(T^{-1}) \\ &= \frac{1}{(2m+1)\mu_a^4} f_Y^2(\lambda) + O(T^{-1}).\end{aligned}$$

(ii) Se $\lambda = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ ou se $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ e T par, então

$$\text{Var} \hat{f}_x^{2C}(\lambda) = m^{-2} \text{Var} \sum_{j=1}^m \hat{f}_x^{1C}\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right).$$

Utilizando o Teorema 4.3.4 temos,

$$\text{Var} \hat{f}_x^{2C}(\lambda) = \frac{1}{m^2 \mu_a^4} \sum_{j=1}^m f_Y^2\left(\lambda + \frac{2\pi j}{T}\right) + O(T^{-1}).$$

Portanto,

$$\text{Var} \hat{f}_x^{2C}(\lambda) = \frac{1}{m \mu_a^4} f_Y^2(\lambda) + O(T^{-1}).$$

Se $\lambda = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ e T ímpar, a demonstração é análoga.

(iii) $\text{Cov}\left[\hat{f}_x^{2C}(\lambda), \hat{f}_x^{2C}(\mu)\right] = O(T^{-1})$, de acordo com o resultado do Teorema 4.3.4.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.3.4:

$$(i) \quad E\hat{f}_x^{3C}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) E\hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi s}{T}\right).$$

Utilizando o Corolário 4.3.2 temos que

$$\begin{aligned} E\hat{f}_x^{3C}(\lambda) &= \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) \left[f_x\left(\frac{2\pi s}{T}\right) + O(T^{-1}) \right], \quad s \not\equiv 0 \pmod{T} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(\beta) f_x(\lambda - \beta B_T) d\beta + O(T^{-1} B_T^{-1}) \xrightarrow{T \uparrow \infty} f_x(\lambda). \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \text{Cov}\left[\hat{f}_x^{3C}(\lambda), \hat{f}_x^{3C}(\mu)\right] = \text{Cov}\left[\frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) \hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \right.$$

$$\left. \frac{2\pi}{T} \sum_{r=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\mu - \frac{2\pi r}{T}\right) \hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi r}{T}\right) \right]$$

$$= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{r=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) W^{(T)}\left(\mu - \frac{2\pi r}{T}\right) \text{Cov}\left[\hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \hat{f}_x^{1C}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)\right].$$

Utilizando o Teorema 4.3.3 temos,

$$\text{Cov}[\cdot, \cdot] = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{r=1}^{T-1} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) W^{(T)}\left(\mu - \frac{2\pi r}{T}\right)$$

$$\left\{ \left[\eta\left(\frac{2\pi}{T}(s-r)\right) + \eta\left(\frac{2\pi}{T}(s+r)\right) \right] f_Y^2\left(\frac{2\pi s}{T}\right) \frac{1}{\mu_a^4} + O(T^{-1}) \right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left[\hat{f}_x^{3C}(\lambda), \hat{f}_x^{3C}(\mu) \right] &= \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{1}{\mu_a^4} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) W^{(T)} \left(\mu - \frac{2\pi s}{T} \right) \\ &\quad f_Y^2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) + \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{1}{\mu_a^4} \sum_{s=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda - \frac{2\pi s}{T} \right) W^{(T)} \left(\mu + \frac{2\pi s}{T} \right) f_Y^2 \left(\frac{2\pi s}{T} \right) \\ &\quad + O(T^{-1}) \\ &= \frac{2\pi T^{-1}}{\mu_a^4} \int_0^{2\pi} W^{(T)}(\lambda - \alpha) W^{(T)}(\mu - \alpha) f_Y^2(\alpha) d\alpha + \\ &\quad + \frac{2\pi T^{-1}}{\mu_a^4} \int_0^{2\pi} W^{(T)}(\lambda - \alpha) W^{(T)}(\mu + \alpha) f_Y^2(\alpha) d\alpha + O(B_T^{-2} T^{-2}) + O(T^{-1}) \end{aligned}$$

de acordo com o Lema P5.1 de Brillinger (1975, p.415).

Assim, como feito no Teorema 5.1.4,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} B_T T \text{Cov} \left[\hat{f}_x^{3C}(\lambda), \hat{f}_x^{3C}(\mu) \right] &= \\ &= 2\pi \left[\eta(\lambda - \mu) + \eta(\lambda + \mu) \right] \frac{f_Y^2(\lambda)}{\mu_a^4} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta \\ \text{e} \\ \text{Var} \hat{f}_x^{3C}(\lambda) &\approx B_T^{-1} T^{-1} 2\pi \mu_a^{-4} f_Y^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta, \text{ se } \lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\approx B_T^{-1} T^{-1} 4\pi \mu_a^{-4} f_Y^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\beta) d\beta, \text{ se } \lambda \equiv 0 \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

(iii) $\text{Var} \hat{f}_x^{3C}(\lambda) \rightarrow 0$, quando $B_T T \rightarrow \infty$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.3.5:

$$\begin{aligned}
 & \text{Cum} \left[(B_T T)^{1/2} \hat{f}_x^{3C}(\pm \lambda_1), \dots, (B_T T)^{1/2} \hat{f}_x^{3C}(\pm \lambda_K) \right] = \\
 & = (B_T T)^{K/2} \text{Cum} \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{s_1=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda_1 - \frac{2\pi s_1}{T} \right) \hat{f}_x^{1C} \left(\frac{2\pi s_1}{T} \right), \dots, \right. \\
 & \quad \left. \frac{2\pi}{T} \sum_{s_K=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda_K - \frac{2\pi s_K}{T} \right) \hat{f}_x^{1C} \left(\frac{2\pi s_K}{T} \right) \right] \\
 & = (B_T T)^{K/2} \text{Cum} \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{s_1=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda_1 - \frac{2\pi s_1}{T} \right) \frac{\left| d_y^{(T)} \left(\frac{2\pi s_1}{T} \right) \right|^2}{2\pi T \mu_a^2} - \right. \\
 & \quad \left. \frac{2\pi}{T} \sum_{s_1=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda_1 - \frac{2\pi s_1}{T} \right) C, \right. \\
 & \quad \dots, \frac{2\pi}{T} \sum_{s_K=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda_K - \frac{2\pi s_K}{T} \right) \frac{\left| d_y^{(T)} \left(\frac{2\pi s_K}{T} \right) \right|^2}{2\pi T \mu_a^2} - \\
 & \quad \left. - \frac{2\pi}{T} \sum_{s_K=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda_K - \frac{2\pi s_K}{T} \right) C \right]
 \end{aligned}$$

onde $C = (2\pi \mu_a^2)^{-1} \sigma_a^2 (\sigma_x^2 + \mu_x^2)$ é uma constante.

Assim,

$$\begin{aligned}
& \text{Cum} \left[(B_T T)^{1/2} \hat{f}_X^{3C}(\pm \lambda_1), \dots, (B_T T)^{1/2} \hat{f}_X^{3C}(\pm \lambda_K) \right] \\
&= \frac{(B_T T)^{K/2}}{\mu_a^{2K}} \text{Cum} \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{s_1=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda_1 - \frac{2\pi s_1}{T} \right) \frac{\left| d_Y^{(T)} \left(\frac{2\pi s_1}{T} \right) \right|^2}{2\pi T}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{2\pi}{T} \sum_{s_K=1}^{T-1} W^{(T)} \left(\lambda_K - \frac{2\pi s_K}{T} \right) \frac{\left| d_Y^{(T)} \left(\frac{2\pi s_K}{T} \right) \right|^2}{2\pi T} \right] \\
&= (B_T T)^{K/2} O(B_T^{-K+1} T^{K+1})
\end{aligned}$$

de acordo com a demonstração do Teorema 5.6.3 de Brillinger (1975).

Portanto,

$$\text{Cum} \left[(B_T T)^{1/2} \hat{f}_X^{3C}(\pm \lambda_1), \dots, (B_T T)^{1/2} \hat{f}_X^{3C}(\pm \lambda_K) \right] = O(B_T^{-K+1} T^{-K+1})$$

e tende para zero se $K > 2$.

Assim, pelo Lema 1.4.1 e a observação c da Definição 14, o resultado segue.

APÊNDICE B

Tabela B.1 - Valores mensais de Concentração de Ozônio (em partes por 100 milhões) em Azuza, Califórnia.

Ano	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
1960	3,4	3,0	3,7	5,6	5,0	7,4	7,8	6,8	5,6	6,9	4,8	2,8
1961	3,0	2,9	4,9	5,3	5,9	8,0	9,0	8,2	7,3	4,8	3,7	2,6
1962	3,0	4,2	3,9	5,4	4,6	7,5	6,9	7,1	5,9	5,5	3,4	2,5
1963	2,8	2,3	2,6	5,8	4,4	7,1	9,5	9,2	7,9	5,3	3,9	3,3
1964	2,1	3,6	3,0	3,8	4,6	4,4	7,7	6,2	4,9	5,1	3,6	3,1
1965	2,5	3,9	2,6	3,6	5,3	7,0	8,6	7,6	6,6	5,6	2,3	1,6
1966	2,2	3,5	2,7	5,4	5,2	4,9	8,7	8,7	6,6	5,6	2,3	1,6
1967	2,8	2,6	4,5	4,8	3,9	8,0	8,9	8,1	7,2	5,9	3,3	2,2
1968	2,9	4,1	3,6	3,2	5,9	6,5	8,6	9,3	6,9	7,9	3,8	2,4
1969	2,3	3,0	3,9	4,8	4,9	6,5	7,2	7,0	5,8	4,8	3,8	2,3
1970	2,1	2,6	4,1	3,9	6,7	5,1	7,8	9,3	-	-	-	-

FONTE: REINSEL, G. et al (1981).

Tabela B.2 - Valores mensais de Vazões do rio Corumbá (em m^3/s), Estação 7 - Fecho da Onça.

Ano	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
1965	881	1030	1560	1000	543	573	294	243	197	399	587	421
1966	474	1200	857	692	469	380	313	251	220	319	545	881
1967	935	1130	1000	611	448	375	301	245	222	78	305	551
1968	642	989	1240	618	369	420	250	222	194	271	260	595
1969	434	506	420	306	221	161	119	86	65	141	504	471
1970	881	1084	1284	708	444	302	237	174	161	240	304	284
1971	220	229	301	245	174	148	111	97	97	168	292	694
1972	478	596	576	442	269	207	191	151	140	310	595	681
1973	769	750	772	840	375	284	230	178	155	252	396	581
1974	901	572	946	814	466	390	308	200	140	226	209	522
1975	700	642	455	451	276	188	191	137	-	-	-	-

Tabela B.3 - 128 valores gerados do processo AR(2)

$$X(t) = 0,75 X(t-1) - 0,3 X(t-2) + \varepsilon_t, \quad \sigma_{\varepsilon}^2 = 1.$$

t										
0-9	-2,37	0,46	1,13	-0,53	1,12	2,76	3,07	2,08	-0,02	-1,15
10-19	-1,08	-1,53	-1,69	-0,57	1,33	2,41	0,25	0,09	1,13	0,04
20-29	0,44	0,51	-0,29	-3,34	-1,36	1,85	2,07	0,83	0,01	-0,65
30-39	-1,43	-0,29	0,73	-0,73	-1,48	-1,44	1,53	1,56	0,96	-1,29
40-49	-2,81	-2,53	-0,35	-0,17	0,38	-0,33	-0,16	-0,18	0,32	0,27
50-59	0,87	3,35	1,99	-0,60	-1,56	-2,99	-1,21	0,52	0,21	-0,29
60-69	0,84	1,18	-0,32	-1,57	0,87	1,12	1,45	0,99	0,98	1,07
70-79	1,36	0,14	-1,07	-0,01	1,07	1,19	0,71	-0,90	-2,22	-2,14
80-89	-1,28	0,33	0,52	0,58	0,22	2,32	2,11	1,08	0,14	1,15
90-99	0,49	-0,98	-0,59	-0,78	-0,10	3,38	2,48	3,01	3,30	1,90
100-109	1,19	0,91	0,21	-0,35	-0,86	-0,86	-0,97	0,73	2,73	0,87
110-119	-0,81	-1,01	-1,01	-1,37	-0,42	-1,05	-1,29	-1,67	-1,86	-2,31
120-127	-0,94	-1,05	-0,34	1,04	0,77	0,78	0,45	-0,56	-	-

Tabela B.4 - Observações da sequência $A_1(t) = \frac{t}{t+1}$, $t=0, \dots, 127$.

t										
0-9	0	0,50	0,67	0,75	0,80	0,83	0,86	0,88	0,89	0,90
10-19	0,91	0,92	0,92	0,93	0,93	0,94	0,94	0,94	0,95	0,95
20-29	0,95	0,95	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,97	0,97
30-39	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98
40-49	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
50-59	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
60-69	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99
70-79	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
80-89	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
90-99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
100-109	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
110-119	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
120-127	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99

Tabela B.5 - Observações da sequência $A_2(t) = (0,995)^t, t=0, \dots, 127$.

t										
0-9	1,00	0,99	0,99	0,98	0,98	0,97	0,97	0,96	0,96	0,95
10-19	0,95	0,94	0,94	0,93	0,93	0,92	0,92	0,91	0,91	0,90
20-29	0,90	0,90	0,89	0,89	0,88	0,88	0,87	0,87	0,86	0,86
30-39	0,86	0,85	0,85	0,84	0,84	0,83	0,83	0,83	0,82	0,82
40-49	0,81	0,81	0,81	0,80	0,80	0,79	0,79	0,79	0,78	0,78
50-59	0,77	0,77	0,77	0,76	0,76	0,76	0,75	0,75	0,74	0,74
60-69	0,74	0,73	0,73	0,73	0,72	0,72	0,71	0,71	0,71	0,70
70-79	0,70	0,70	0,69	0,69	0,69	0,68	0,68	0,68	0,67	0,67
80-89	0,67	0,66	0,66	0,66	0,65	0,65	0,65	0,64	0,64	0,64
90-99	0,63	0,63	0,63	0,62	0,62	0,62	0,61	0,61	0,61	0,61
100-109	0,60	0,60	0,60	0,59	0,59	0,59	0,58	0,58	0,58	0,58
110-119	0,57	0,57	0,57	0,56	0,56	0,56	0,56	0,55	0,55	0,55
120-127	0,55	0,54	0,54	0,54	0,53	0,53	0,53	0,53

Tabela B.6 - 128 valores gerados do processo MA(2)

$$A(t) = \varepsilon(t) + 1,1\varepsilon(t-1) + 0,2\varepsilon(t-2) + 1,0, \sigma_{\varepsilon}^2 = 1,0.$$

t										
0-9	-0,39	0,23	0,96	1,42	1,36	-0,02	1,23	0,90	-0,53	1,43
10-19	3,24	1,44	0,76	1,51	2,37	4,88	4,17	2,13	2,21	2,61
20-29	2,04	0,08	-0,59	-0,04	0,14	0,20	2,05	2,81	1,61	-0,42
30-39	-0,83	0,62	-0,95	0,47	1,41	0,60	1,96	2,54	1,57	0,02
40-49	0,31	-1,15	-0,23	1,29	1,18	1,21	-1,43	-0,05	4,48	2,85
50-59	-1,06	-1,28	-0,14	1,67	1,47	-0,89	-0,39	1,57	1,25	1,02
60-69	1,68	1,39	2,16	2,57	2,84	3,12	0,93	1,05	1,96	2,80
70-79	2,51	1,27	2,84	3,01	2,23	1,15	1,39	2,19	1,68	1,55
80-89	0,64	0,42	4,05	2,88	0,06	2,60	1,81	0,81	2,32	2,19
90-99	2,50	3,14	0,53	-2,00	-1,57	0,56	0,83	0,29	-0,47	0,67
100-109	2,10	1,73	1,61	0,97	0,28	0,93	2,75	2,72	2,44	2,04
110-119	1,31	1,95	1,86	1,72	0,59	-1,47	-0,74	-0,63	-0,41	1,62
120-127	1,45	-0,01	1,96	1,63	-0,14	-1,27	-0,86	0,56

Tabela B.7 - 128 valores gerados de uma $N(10,4)$.

t										
0-9	12,59	10,08	12,76	9,43	8,54	11,81	9,61	8,65	11,84	7,11
10-19	8,42	7,12	9,92	10,55	8,31	11,67	11,75	7,94	13,49	8,73
20-29	10,05	8,99	8,87	14,13	11,35	9,22	14,14	12,03	11,16	12,30
30-39	11,12	6,51	12,21	11,91	10,84	11,28	13,81	8,49	9,22	8,32
40-49	7,13	12,58	10,80	9,32	8,66	13,22	10,53	15,22	10,75	11,90
50-59	10,42	7,44	7,75	12,70	8,85	6,57	10,83	11,45	12,08	12,02
60-69	8,55	11,07	11,74	11,12	10,17	7,76	11,07	10,58	10,90	9,29
70-79	12,16	10,99	10,04	12,42	7,62	10,02	8,32	13,97	9,25	13,10
80-89	12,09	11,51	11,18	7,97	9,85	9,63	9,96	12,95	10,29	9,04
90-99	12,40	8,94	8,24	8,64	10,73	12,65	10,65	10,16	10,60	9,72
100-109	8,07	9,55	9,18	13,23	10,06	10,49	8,82	10,45	8,42	9,11
110-119	11,57	8,69	12,15	11,63	12,24	4,48	10,49	6,17	8,96	8,49
120-127	13,29	6,50	11,29	8,36	9,85	8,40	11,29	7,56