Sobre uma Generalização da
Equação Backwards de
um Processo Markoviano de Saltos

Luiz Renato Gonçalves Fontes

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para obtenção do grau de mestre
em
Estatística

Área de concentração: Probabilidade

Orientador: *Prof. Dr. Enrique Daniel Andjel*

— São Paulo, junho de 1987 —

AGRADECIMENTOS

Enrique Andjel é o grande responsável por este trabalho.

Descobriu o assunto, ajudou-me em algumas passagens difíceis para mim e aperfeiçoou as idéias que eu mesmo tive.

Por seu incentivo, atenção e competente orientação, meus maiores agradecimentos.

As viagens do orientador desta dissertação foram parcialmente financiadas pela FAPESP, processo nº 86/2108 - 4.

NOTAÇÃO

— $o(h)$ é uma quantidade cujo quociente por h converge a 0 quando h tende a 0, ie

$$\frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

— $O(h)$ é uma quantidade que converge a 0 quando h tende a 0, ie

$$O(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

— N^* é o conjunto dos números naturais positivos, ie

$$N^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

— $\mathcal{P}(N^*)$ é a classe dos subconjuntos de N^* , ie

$$\mathcal{P}(N^*) = \{A; A \subset N^*\}.$$

A maioria das demonstrações às afirmações do trabalho são feitas em espaço próprio. Outras vezes, elas aparecem inseridas no texto, entre colchetes duplos ($[[\dots]]$).

As obras de referência mencionadas no texto aparecem como uma abreviatura do nome do autor entre colchetes. Uma tabela bibliográfica, no final, contém os significados.

Ao longo do trabalho, fazemos uso de processos de poisson não homogêneos. A definição que usamos é a que aparece em [SR]:

$[N_t, t \geq 0]$ é um processo de poisson, possivelmente não homogêneo, com função de intensidade $p(t)$ sse

a) $N_0 = 0$;

b) N_t tem incrementos independentes, ie, $\forall n$ e escolha de

$$0 \leq t_1 < \dots < t_n,$$

tem-se que as v.a.'s

$$N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_1}$$

são independentes entre si.

c) $\Pr(\text{mais que um evento de } N_t \text{ em } (s, s+h)) = o(h)$

d) $\Pr(\text{exatamente um evento de } N_t \text{ em } (s, s+h)) = p(t)h + o(h)$

APRESENTAÇÃO

Neste trabalho, demonstramos e discutimos, em condições um pouco mais gerais, uma afirmação feita por T.Liggett em [L1], sem demonstrar. A referência básica para a demonstração, sugerida pelo próprio Liggett a E.Andjel (que a sugeriu ao autor), é a técnica utilizada por W.Feller em [Fe2], na seção sobre processos de saltos, ao estabelecer a unicidade da solução de uma equação diferencial (a *backwards*) satisfeita pelas probabilidades de transição de um processo (markoviano) de saltos (estacionário).

Ela se constitui em construir uma solução positiva mínima (ie, qualquer outra solução positiva é maior que a solução mínima) para esta equação e provar que, sob certas condições, ela é única.

As condições são: 1) o processo não realiza um número infinito de saltos em tempo finito e 2) as soluções consideradas são as probabilísticas — ie, são medidas de probabilidade em um dos argumentos.

O mesmo método foi utilizado pelo mesmo autor antes em [Fe1], para provar um resultado correspondente para processos markovianos de salto não estacionários (denominados por ele *processos de markov puramente descontínuos*).

O mesmo problema foi também discutido por outros autores, entre eles Gihman&Skorohod (em [G&S]). Estes estabelecem a unicidade da solução da equação backwards, numa versão mais geral que a de Feller, dentro de uma classe maior de soluções, como fazemos neste trabalho num dos passos da demonstração do resultado principal, colocando entretanto maiores restrições que Feller (e nós) sobre as hipóteses.

Neste trabalho, queremos estabelecer a existência e unicidade da solução de uma equação diferencial semelhante à backwards (na verdade, uma generalização desta). Para isto, exibiremos uma solução, obtida da distribuição de um processo markoviano de saltos e, com o auxílio da técnica da solução positiva mínima, mostraremos que, se o processo não realiza um número infinito de saltos em tempo finito, esta solução será única entre

as soluções limitadas. Veremos ainda que esta condição suficiente para a unicidade também é necessária.

O trabalho foi dividido em três capítulos.

No primeiro, definimos processo markoviano de saltos, de maneira construtiva, ie, construímos o processo a partir de processos de poisson, que fazem o papel de relógio dos saltos, e de variáveis aleatórias com valores no espaço de estados no papel de endereço dos saltos.

A definição desta forma torna o trabalho posterior mais simples, em oposição à definição pelas propriedades infinitesimais das probabilidades de transição do processo, como usada por Feller.

Usamos processos de poisson ao invés de simplesmente tempos exponenciais com o fim de nos valermos de uma propriedade destes processos (Cap3,V,Lema) para estabelecer um resultado auxiliar do trabalho (Cap3,V,Proposição).

No capítulo 2, enunciamos e demonstramos o teorema principal, e deixamos para o capítulo 3, uma espécie de apêndice, a apresentação de argumentos, demonstrações e exemplos para as afirmações das partes anteriores.

E.Andjel mostrou-me como provar a unicidade, na parte II da demonstração do teorema e também como achar uma solução não limitada da equação backwards em um caso particular (Cap3,VIII), além de contribuir com muitas e valiosas sugestões para as partes centrais do trabalho.

CAPÍTULO 1: CONSTRUÇÃO DO PROCESSO

No que se segue:

E é um espaço arbitrário, não vazio.

$\mathcal{E}$ é uma σ -álgebra sobre E tal que $\{x\} \in \mathcal{E}$, $\forall x \in E$.

$F = E \cup \{\varnothing\}$, $\mathcal{F} = \{\Lambda, \Lambda \cup \{\varnothing\}; \Lambda \in \mathcal{E}\}$, $\varnothing \notin E$.

Para $t \in [0, \infty)$, $x \in E$, $\Lambda \in \mathcal{E}$:

$p(t, x)$ é uma função real finita e não negativa, contínua em t e $\mathcal{E}$ -mensurável em x ;

$\Pi(t, x, \Lambda)$ é uma probabilidade em $(E, \mathcal{E})$, para t, x fixos, contínua em t , $\mathcal{E}$ -mensurável em x tal que

$$\Pi(t, x, \{x\}) \equiv 0.$$

$[N_t^x, t \geq 0]$, $x \in E$, são *processos de poisson não homogêneos (ppnh)* independentes entre si, cada um com *função de intensidade (fi)* $p(t, x)$.

Y_t^x , $x \in E$, $t \geq 0$, são v.a.'s assumindo valores em E , independentes entre si e dos processos N_t^x , cada qual com distribuição

$$\Pr(Y_t^x \in \Lambda) = \Pi(t, x, \Lambda), \Lambda \in \mathcal{E}.$$

W é uma v.a. com valores em E , independente das v.a.'s Y_t^x e dos processos N_t^x , com lei $L(\cdot)$.

Define-se:

$$T_\tau^x = \inf\{t > \tau : N_t^x \neq N_\tau^x\}, \quad \tau \geq 0, \quad (\text{convenção: } \inf \emptyset = \infty)$$

$$\tau_0 = 0, \quad Z_0 = W$$

$$\tau_{n+1} = T_{\tau_n}^{Z_n}, \quad Z_{n+1} = Y_{\tau_{n+1}}^{Z_n}, \quad n \geq 0$$

Observação: Se $\tau_n = \infty$ para algum n , então Z_n , τ_k e Z_k , $k > n$ não são definidos.

$$X_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Z_n, & \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, \quad n \geq 0 \\ \vartheta, & t \geq \tau_\infty (\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n), \text{ se este limite for finito.} \end{cases}$$

X_t está bem definido para $t \in [0, \infty)$, (i) é markoviano e (ii) sendo $T_\tau = \inf\{t > \tau : X_t \neq X_\tau\}$, a distribuição condicional de T_τ dado que $X_\tau = x$ é dada por

$$\Pr(T_\tau > t \mid X_\tau = x) = e^{-\int_\tau^t p(\sigma, x) d\sigma}, \quad t > \tau,$$

o que, em particular implica que T_τ tem densidade condicional em (τ, ∞) dado que $X_\tau = x$:

$$p(\sigma, x) e^{-\int_\tau^\sigma p(s, x) ds}, \quad x \in E.$$

Esta distribuição será denominada *exponencial não-homogênea com função de intensidade* $p(t, x)$ — *expnh*[$p(t, x)$].

No capítulo 3 serão apresentados alguns argumentos justificando (i) e uma demonstração mais ou menos formal de (ii).

Um processo X_t assim definido será chamado *processo markoviano de saltos (pms)* em $(F, \mathcal{F})$ com *função de intensidade (fi)* $p(t, x)$, *função de transição no salto (fts)* $\Pi(t, x, \Lambda)$ e distribuição inicial L .

Podemos descrever X_t da seguinte maneira:

$X_0 = W$; uma vez que $X_\tau = x$, $x \in E$, independentemente do passado, X_t permanece no estado x até um instante aleatório, τ' , com distribuição *expnh*[$p(t, x)$], no qual salta para Λ , $\Lambda \in \mathcal{E}$, $x \notin \Lambda$, com probabilidade $\Pi(\tau', x, \Lambda)$. Se X_t der um número infinito de saltos em tempo finito, ele vai a partir deste tempo para um estado absorvente ϑ , fora do espaço E .

CAPÍTULO 2: O TEOREMA

X_t é o processo definido atrás ; $t > \tau \geq 0$.

Definições:

1) X_t é *não-explosivo* em $[\tau, t]$ se

$$\Pr(N(\tau, t) < \infty \mid X_\tau = x) = 1, \quad \forall x \in E,$$

onde $N(\tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[\tau, t]}(\tau_n)$, é o número de saltos de X_t em $[\tau, t]$.

2) X_t é *explosivo* em $[\tau, t]$ se não for não-explosivo em $[\tau, t]$.

3) X_t é *não-explosivo* se for não-explosivo em qualquer intervalo limitado.

4) X_t é *explosivo* se não for não-explosivo.

No teorema a seguir:

- f é uma função real definida em E , $\mathcal{E}$ - mensurável e limitada.
- $v(t, x)$ satisfaz as mesmas condições de $p(t, x)$.
- $p^*(t, x) = p(t, x) + v(t, x)$.
- Existe $c(t, x)$ satisfazendo as mesmas condições de $p(t, x)$ tal que

$$\zeta(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} p(t, x)/p^*(t, x), & \text{se } p^*(t, x) > 0 \\ c(t, x), & \text{se } p^*(t, x) = 0 \end{cases}$$

é contínua em t .

- Para $t > 0$ fixo, $F_t(\tau, x)$ é uma função real definida em $[0, t] \times E$.

Teorema 1: Se X_t for não-explosivo em $[0, t]$, então a única solução limitada da família de equações

$$(1) \quad \frac{\partial F_t(\tau, x)}{\partial \tau} = p^*(\tau, x)F_t(\tau, x) - p(\tau, x) \int_E F_t(\tau, y) \Pi(\tau, x, dy), \quad x \in E$$

sujeita à condição

$$(1') \quad \lim_{\tau \rightarrow t} F_t(\tau, x) = f(x), \quad x \in E$$

é dada por

$$(2) \quad E \left[f(X_t) e^{-\int_{\tau}^t v(s, X_s) ds} \mid X_{\tau} = x \right], \quad x \in E$$

Prova:

Será dividida em três partes:

- (i) (2) satisfaz (1) + (1').
- (ii) Unicidade para $v \equiv 0$ ($p^* \equiv p$).
- (iii) Unicidade para qualquer v ($p^* \geq p$).

Parte (i): Nas condições do teorema, a equação íntegro-diferencial (1) + (1') é equivalente à equação integral

$$(3) \quad \begin{aligned} F_t(\tau, x) = & f(x) e^{-\int_{\tau}^t p^*(s, x) ds} \\ & + \int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p^*(s, x) ds} \int_E F_t(\sigma, y) \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma \end{aligned}$$

(2) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& E\left[f(X_t)e^{-\int_{\tau}^t v(s,X_s)ds}1_{\{N(\tau,t)=0\}} \mid X_{\tau}=x\right] \\
& + E\left[f(X_t)e^{-\int_{\tau}^t v(s,X_s)ds}1_{\{N(\tau,t)\geq 1\}} \mid X_{\tau}=x\right] \\
& = f(x)e^{-\int_{\tau}^t p^*(s,x)ds} + \int_{\tau}^t p(\sigma,x)e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p(s,x)ds} \\
& \times \int_E E\left[f(X_t)e^{-\int_{\tau}^t v(s,X_s)ds}1_{\{N(\tau,t)\geq 1\}} \mid X_{\tau}=x, T_{\tau}=\sigma, X_{\sigma}=y\right] \\
& \times \Pi(\sigma,x,dy) d\sigma
\end{aligned}$$

Pela natureza markoviana de X_t , a esperança condicional da última integral é equivalente a

$$e^{-\int_{\tau}^{\sigma} v(s,X_s)ds} E\left[f(X_t)e^{-\int_{\sigma}^t v(s,X_s)ds} \mid X_{\sigma}=y\right].$$

Substituindo esta expressão na integral, temos

$$\begin{aligned}
& E\left[f(X_t)e^{-\int_{\tau}^t v(s,X_s)ds} \mid X_{\tau}=x\right] \\
& = f(x)e^{-\int_{\tau}^t p^*(s,x)ds} + \int_{\tau}^t p(\sigma,x)e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p^*(s,x)ds} \\
& \int_E E\left[f(X_t)e^{-\int_{\sigma}^t v(s,X_s)ds} \mid X_{\sigma}=y\right] \Pi(\sigma,x,dy) d\sigma
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração da parte (i).

A equivalência (1) + (1') $\equiv$ (3) será demonstrada no capítulo 3.

Parte (ii): $v(t, x) \equiv 0 \Rightarrow p^*(t, x) \equiv p(t, x)$

Começaremos com a construção de uma

1) Solução positiva mínima quando $f \geq 0$:

Seja $f \geq 0$ e

$$G_t^{(0)}(\tau, x) = f(x) e^{-\int_{\tau}^t p(s, x) ds};$$

$$G_t^{(n+1)}(\tau, x) = G_t^{(0)}(\tau, x) + \int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p(s, x) ds}$$

$$\times \int_E G_t^{(n)}(\sigma, y) \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma, \quad n \geq 0$$

Verifica-se por indução que*

$$G^{(n+1)} \geq G^{(n)} \geq 0, \quad \forall n.$$

Então, $G = \lim_{n \rightarrow \infty} G^{(n)}$ está bem definida e, pelo TCM, satisfaz (3).

G é finita: $G \leq \sup_x f(x) < \infty$, como se pode ver indutivamente:

$G^{(0)} \leq \sup_x f(x)$, claramente.

Supondo a desigualdade válida para $G^{(n)}$:

* Por economia de notação, omitiremos algumas vezes daqui para frente os argumentos das funções. P.ex., escreveremos $G^{(n)}$ e F ao invés de $G_t^{(n)}(\tau, x)$ e $F_t(\tau, x)$.

$$\begin{aligned}
G_t^{(n+1)}(\tau, x) &= f(x) e^{-\int_{\tau}^t p(s, x) ds} \\
&+ \int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p(s, x) ds} \int_E G_t^{(n)}(\sigma, y) \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma \\
&\leq \sup_x f(x) e^{-\int_{\tau}^t p(s, x) ds} \\
&+ \int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p(s, x) ds} \int_E \sup_x f(x) \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma \\
&= \sup_x f(x) \left[e^{-\int_{\tau}^t p(s, x) ds} + \int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p(s, x) ds} d\sigma \right] \\
&= \sup_x f(x).
\end{aligned}$$

Dada $F \geq 0$ satisfazendo (3):

$F \geq G^{(0)}$, claramente.

Indutivamente, $F \geq G^{(n)} \Rightarrow$ (imediatamente) $\Rightarrow F \geq G^{(n+1)}$.

Conclui-se que $F \geq G^{(n)}, \forall n$, e, portanto, $F \geq G$.

Devido a esta propriedade, G será chamada *solução mínima* (positiva) de (3).

Pela construção:

$$G_t^{(n)}(\tau, x) = E[f(X_t) 1_{\{N(\tau, t) \leq n\}} \mid X_{\tau} = x]. \text{ (veja cap 3, III)}$$

Logo

$$G_t(\tau, x) = E[f(X_t) 1_{\{N(\tau, t) < \infty\}} \mid X_{\tau} = x] = E[f(X_t) \mid X_{\tau} = x],$$

pelo fato de X_t ser não-explosivo em $[0, t]$.

2) Unicidade:

Sejam F_1 e F_2 soluções limitadas de (3); pela linearidade em F do membro direito em (3),

$$G = F_1 - F_2$$

satisfaz (3) com $f \equiv 0$. Pela limitação de F_1 e F_2 , existe ϵ positivo tal que $|G| \leq \epsilon$. Fazendo

$$H = \frac{G}{\epsilon} + 1$$

e observando que $F \equiv 1$ satisfaz (3), com $f \equiv 1$, e é a solução mínima [[pois $F \equiv 1 \Rightarrow f \equiv 1$ e, neste caso, a solução mínima $E[f(X_t) | X_\tau = x] \equiv 1$]], temos:

- H satisfaz (3) com $f \equiv 1$, $1 \leq H \leq 2$;
- $I = H - 1$ satisfaz (3) com $f \equiv 0$, $0 \leq I \leq 1$;
- $J = 1 - I$ satisfaz (3), com $f \equiv 1$ e $J \geq 0$.

Então

$$J \geq 1 \Rightarrow I \leq 0 \Rightarrow I \equiv 0 \Rightarrow H \equiv 1 \Rightarrow G \equiv 0 \Rightarrow F_1 \equiv F_2$$

o que termina a prova da unicidade e da parte (ii).

Parte (iii): Abaixo,

$$E' = E \cup \{\delta\}, \quad \mathcal{E}' = \{\Lambda, \Lambda \cup \{\delta\}; \Lambda \in \mathcal{E}\},$$

$$F' = F \cup \{\delta\}, \quad \mathcal{F}' = \{\Gamma, \Gamma \cup \{\delta\}; \Gamma \in \mathcal{F}\}; \quad \delta \notin F$$

Para demonstrar o caso mais geral, usaremos um *pms* X'_t em $(F', \mathcal{F}')$, construído, de maneira análoga a X_t , a partir de *ppnh's* $N_t'^x$ e v.a.'s $Y_t'^x$ e W especificadas a seguir:

$N_t'^x$ tem f_t

$$p'(t, x) = \begin{cases} p^*(t, x), & x \in E \\ 0, & x = \delta \end{cases}$$

$$Y_t'^x = \begin{cases} Y_t^x 1_{A_t^x} + \delta 1_{\{A_t^x\}^c}, & \text{se } x \in E \\ V_t, & x = \delta \end{cases}, \text{ onde}$$

Y_t^x e W são, como na definição de X_t , independentes entre si e dos processos $N_t'^x$,

$A_t^x, x \in E, t \in [0, \infty)$, são eventos independentes entre si, dos processos $N_t'^x$ e das v.a.'s acima, de tal forma que

$$\Pr(A_t^x) = q(x, t)$$

$V_t, t \in [0, \infty)$, são v.a.'s i.i.d., independentes dos eventos, v.a.'s, e processos acima, cuja distribuição $\mu(\cdot)$ é tal que $\mu(\{\delta\}) = 0$.

Definido desta maneira, X_t' é um *pms* em $(F', \mathcal{F}')$ com $f_t p'(t, x)$, f_t s

$$\Pi(t, x, \Lambda) = \begin{cases} q(t, x) \Pi(t, x, \Lambda), & \text{se } x \in E, \Lambda \in \mathcal{E} \\ 1 - q(t, x), & \text{se } x \in E, \Lambda = \delta \\ \mu(\Lambda), & \text{se } x = \delta \end{cases}$$

e distribuição inicial L .

X_t' é um processo que se comporta da seguinte maneira: $X_0' = W$; uma vez que $X_t' = x, x \in E$, então, independentemente do que ocorreu no passado, X_t' permanece em x até um instante $\tau'(\tau' \sim \exp nh[p'(t, x)])$ no qual é lançada uma moeda com probabilidade $q(\tau', x)$ de dar cara. Se esta ocorrer, X_t' salta para $\Lambda \in \mathcal{E}$ com probabilidade $\Pi(\tau', x, \Lambda)$; senão, X_t' salta para o estado absorvente δ .

Como X_t , se X_t' der um número infinito de saltos em tempo finito, vai a partir de então para o estado absorvente ϑ , fora de E e diferente de δ .

Veremos no capítulo 3 que X_t não-explosivo em $[0, t]$ implica X_t' não-explosivo no mesmo intervalo. Valendo-nos deste resultado e da parte (ii)

atrás, podemos concluir que a equação

$$(3') \quad F_t(\tau, x) = \int_{\tau}^t p'(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p'(s, x) ds} \int_E F_t(\sigma, y) \Pi'(\sigma, x, dy) d\sigma$$

tem como única solução limitada $F \equiv 0$.

Escrevendo (3') para $x = \delta$ e $x \in E$:

$$F_t(\tau, \delta) \equiv 0$$

$$\begin{aligned} (3'') \quad F_t(\tau, x) &= \int_{\tau}^t p^*(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p^*(s, x) ds} \int_E F_t(\sigma, y) q(\sigma, x) \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma \\ &= \int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p(s, x) ds} \int_E F_t(\sigma, y) \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração da parte (iii) e do teorema, basta verificar que, se F_1 e F_2 limitadas satisfazem (3), então $G = F_1 - F_2$ satisfaz (3'') e é limitada. Logo $G \equiv 0$, o que implica $F_1 \equiv F_2$.

Observações:

1) Claramente, a condição X_t não-explosivo em $[0, t]$ não é necessária. É suficiente, para a validade do teorema, que X'_t seja não-explosivo em $[0, t]$, o que pode ocorrer com X_t explosivo em $[0, t]$. Um exemplo desta situação será visto no próximo capítulo (3, VII). Veremos também (3, VI) que X'_t não-explosivo em $[0, t]$ é além disso uma condição necessária, o que permite a seguinte versão, mais completa, do teorema 1:

Teorema 1': A família de equações (1) + (1') terá uma única solução limitada, dada por (2), se e só se X'_t , como definido atrás, for não-explosivo em $[0, t]$.

2) Condições necessárias e suficientes sobre $p(t, x)$ e $\Pi(t, x, \Lambda)$ para que o pms definido a partir delas seja não-explosivo em um intervalo limitado

são apresentadas e demonstradas em [Fe1].

Veremos no próximo capítulo (3,IV) que uma condição suficiente, mas não necessária, é que p seja limitada em $[0, t] \times E$.

3) A especificação "F limitada" é necessária. Veremos no próximo capítulo (3,VIII) que, ao se admitir qualquer F, a unicidade é perdida.

4) Fazendo $v \equiv 0$ e $f(x) \equiv 1_\Lambda(x)$, $\Lambda \in \mathcal{E}$, (1) se reduz à família de equações *backward* de Kolmogorov. Neste caso, o teorema 1 é uma variante do teorema da existência e unicidade de uma solução mínima probabilística desta família de equações, dada por

$$\Pr(X_t \in \Lambda \mid X_\tau = x) (= E[1_\Lambda(X_t) \mid X_\tau = x]).$$

5) Quando X_t for *estacionário* — ie, $p(t, x) \equiv p(x)$, $v(t, x) \equiv v(x)$, $p^*(t, x) \equiv p^*(x)$ e $\Pi(t, x, \Lambda) \equiv \Pi(x, \Lambda)$ não dependem de t —, a família de equações (1) fica

$$\frac{\partial F_t(\tau, x)}{\partial \tau} = p^*(x)F_t(\tau, x) - p(x) \int_E F_t(\tau, y) \Pi(x, dy), \quad x \in E$$

e a única solução limitada (se X_t for não-explosivo em $[0, t]$) é

$$\begin{aligned} E[f(X_t) e^{-\int_\tau^t v(X_s) ds} \mid X_\tau = x] \\ = E[f(X_{t-\tau}) e^{-\int_0^{t-\tau} v(X_s) ds} \mid X_0 = x], \quad x \in E, \end{aligned}$$

(a última igualdade se deve à estacionariedade de X_t).

Neste caso, podemos restringir nossa atenção a funções F *estacionárias*, ie,

$$F_t(\tau, x) \equiv F_0(t - \tau, x) \equiv F(t - \tau, x);$$

deste modo, a família de equações (1)+(1') toma a seguinte forma

$$\frac{\partial F(t - \tau, x)}{\partial \tau} = p^*(x)F(t - \tau, x) - p(x) \int_E F(t - \tau, y) \Pi(x, dy), \quad x \in E$$

$$\lim_{\tau \rightarrow t} F(t - \tau, x) = f(x), \quad x \in E$$

ou, fazendo $s = t - \tau$:

$$(1^*) \quad \frac{\partial F(s, x)}{\partial s} = -p^*(x)F(s, x) + p(x) \int_E F(s, y) \Pi(x, dy), \quad x \in E$$

$$(1^{**}) \quad \lim_{s \rightarrow 0} F(s, x) = f(x), \quad x \in E$$

Ainda, se X_t for estacionário, X_t não-explosivo em um intervalo limitado arbitrário implica X_t não-explosivo [[tome $[s_1, s_2], [t_1, t_2]$ dois intervalos com $0 \leq s_1 < s_2 < \infty$, $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ e X_t não-explosivo em $[t_1, t_2]$. Então X_t é não-explosivo em $[(n-1)t, nt]$, $t = t_2 - t_1$, $n \geq 1$, pela estacionariedade de X_t . Logo X_t é não-explosivo em $[0, nt]$, $n \geq 1$. É claro que existe $n \geq 1$ tal que $[s_1, s_2] \subset [0, nt]$. A conclusão é imediata]].

Desta forma, podemos, se X_t for estacionário, enunciar o teorema 1' da seguinte maneira:

Teorema 1*: A solução da família de equações $(1^*) + (1^{**})$ dada por

$$(2^*) \quad E[f(X_s) e^{-\int_0^s v(X_s) ds} \mid X_0 = x], \quad x \in E$$

é única entre as soluções limitadas se e só se X'_t for não-explosivo.

6) A afirmação de Liggett que inspirou este trabalho é a suficiência do teorema 1* acima, com E enumerável ([Li], demonstração do teorema III 4.13).

7) Gihman & Skorohod fazem uma outra demonstração para a unicidade de $(1) + (1')$ (com $v \equiv 0$, veja [G&S] teorema I.1.5). As condições que eles colocam sobre $p(t, x)$ a tornam limitada em $[0, s] \times E$, $\forall s > 0$, o que, como veremos em (3, IV), é mais forte do que o necessário.

CAPÍTULO 3: RESULTADOS, EXEMPLOS

(I) X_t é o processo definido na introdução.

(i) X_t é markoviano

Dado $X_s (\neq \vartheta)$, $X_{s'}$, com $s' > s$, depende apenas da evolução dos processos $N_t^x, x \in E$, em $[s, s']$ e das v.a.'s $Y_t^x, x \in E, t \in [s, s']$.

Para $s_1 < \dots < s_n < s$, $(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$ depende apenas da evolução dos $N_t^x, x \in E$, em $[0, s_n]$ e das v.a.'s $Y_t^x, x \in E, t \geq s_n$, e W .

Pela natureza dos N_t^x (incrementos independentes, independência entre os processos), suas evoluções em $[0, s_n]$ e $[s, s']$ são independentes.

Como as v.a.'s Y_t^x , W e os N_t^x são independentes entre si, conclui-se que, dado $X_s (\neq \vartheta)$, $X_{s'}$ não depende de $X_{s_1}, \dots, X_{s_n}$.

Se $X_s = \vartheta$, então $X_{s'} = \vartheta$, independentemente do que ocorreu em $[0, s]$.

$$(ii) \Pr(T_\tau > t \mid X_\tau = x) = e^{-\int_\tau^t p(\sigma, x) d\sigma}$$

Prova:

$$\Pr(T_\tau > t \mid X_\tau = x) = \Pr(T_\tau^x > t \mid X_\tau = x) = \Pr(T_\tau^x > t)$$

A última igualdade acima é justificada da seguinte maneira:

X_τ depende apenas da evolução dos processos $N_t^y, y \in E$, em $[0, \tau]$ e das v.a.'s $W, Y_t^y, y \in E, t \leq \tau$. T_τ^x depende apenas da evolução do processo N_t^x em (τ, ∞) ; temos a independência entre a última e:

- i) a evolução de N_t^x em $[0, \tau]$, por incrementos independentes ;
- ii) a evolução de $N_t^y, y \neq x$, por definição ;
- iii) as v.a.'s Y_t^y e W , por definição ;
- iv) X_τ , por i, ii e iii.

Para concluir, vamos introduzir:

$$\tau_0^x = 0, \quad \tau_{n+1}^x = T_{\tau_n^x}^x, \quad n \geq 0$$

ie, $\{\tau_n^x, n \geq 0\}$ são os instantes dos eventos do *ppnh* N_t^x .

Sabe-se da teoria destes processos (veja [Ci], p.ex.) que

$$\Pr(\tau_{n+1}^x > t \mid \tau_n^x = s) = e^{-\int_s^t p(\sigma, x) d\sigma}, \quad t \geq s, \quad n \geq 0.$$

Então:

$$\begin{aligned} \Pr(T_\tau^x > t) &= \sum_{n \geq 0} \int_0^\tau \Pr(T_\tau^x > t, \tau_n^x \leq \tau < \tau_{n+1}^x, \tau_n^x \in ds) \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_0^\tau \Pr(\tau_{n+1}^x > t \mid \tau_n^x = s, \tau_{n+1}^x > \tau) \Pr(\tau_n^x \leq \tau < \tau_{n+1}^x, \tau_n^x \in ds) \end{aligned}$$

A primeira probabilidade na integral acima é equivalente a:

$$\frac{\Pr(\tau_{n+1}^x > t \mid \tau_n^x = s)}{\Pr(\tau_{n+1}^x > \tau \mid \tau_n^x = s)} = e^{-\int_\tau^t p(\sigma, x) d\sigma},$$

que não depende de s ou n .

(ii) segue-se imediatamente.

(II) **Proposição:** A equação $(1, 1')$ é equivalente à equação (3).

Prova: Para ver que $(1) + (1') \Rightarrow (3)$, basta resolver a equação (1), que pode ser vista como uma equação diferencial ordinária, da maneira usual, fazendo de $(1')$ a condição inicial:

Multiplica-se ambos os lados por $e^{\int_{\sigma}^t p^*(s, x) ds}$; a equação resultante equivale a

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[F_t(\sigma, x) e^{\int_{\sigma}^t p^*(s, x) ds} \right] = -p(\sigma, x) e^{\int_{\sigma}^t p^*(s, x) ds} \int_E F_t(\sigma, y) \Pi(\sigma, x, dy)$$

Para concluir, é só integrar ambos os lados em $[\tau, t]$.

Reciprocamente, se F satisfaz (3) e é limitada, então

$$\int_E F_t(\sigma, y) \Pi(\sigma, x, dy) \text{ é limitada.}$$

Segue-se que

$$\int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p^*(s, x) ds} \int_E F_t(\sigma, y) \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma, \quad ,$$

integral de uma função limitada, é contínua em τ .

Como $f(x) e^{-\int_{\tau}^t p^*(s, x) ds}$ é contínua em τ , F também é.

Pela continuidade e limitação de F , $\int_E F_t(\sigma, y) \Pi(\sigma, x, dy)$ é contínua em σ . [[Este resultado é consequência da seguinte proposição (em [Ro], cap11, sec4): Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável e $\{\mu_n\}$ uma seqüência de medidas que convergem conjunto a conjunto para uma medida μ (ie, $\mu_n(B) \rightarrow \mu(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}$). Sejam $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ duas seqüências de funções mensuráveis convergindo pontualmente a f e g . Supondo $|f_n| \leq g_n$ e

$$\lim \int g_n d\mu_n = \int g d\mu < \infty,$$

então

$$\lim \int f_n d\mu_n = \int f d\mu.$$

Para aplicar esta proposição ao nosso caso, fazemos:

$$\sigma_n \rightarrow \sigma$$

$$\Pi(\sigma_n, x, \cdot) = \mu_n(\cdot), \Pi(\sigma, x, \cdot) = \mu(\cdot)$$

$$F_t(\sigma_n, \cdot) = f_n(\cdot), F_t(\sigma, \cdot) = f(\cdot)$$

$$g_n(\cdot) = g(\cdot) = \sup_{E \times [0, t]} |F_t(\cdot, \cdot)| \].$$

Em consequência,

$$\int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p^*(s, x) ds} \int_E F_t(\sigma, y) \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma,$$

integral de uma função contínua, é derivável em τ .

$f(x) e^{-\int_{\tau}^t p^*(s, x) ds}$ também o é. Conclui-se que F é derivável em τ . Derivando F , obtemos (1). (1') segue da continuidade de F .

(III) Proposição: (Na parte (ii) do teorema 1:)

$$G_t^{(n)}(\tau, x) = E[f(X_t)1_{\{N(\tau, t) \leq n\}} \mid X_\tau = x]$$

Prova: (Por indução:)

Vale trivialmente para $n = 0$.

Supondo que valha para n arbitrário:

$$\begin{aligned} (1) \quad & E[f(X_t)1_{\{N(\tau, t) \leq n+1\}} \mid X_\tau = x] \\ & = G_t^{(0)}(\tau, x) + E[f(X_t)1_{\{1 \leq N(\tau, t) \leq n+1\}} \mid X_\tau = x] \end{aligned}$$

Condicionaremos a (segunda) esperança acima ao instante do primeiro salto e ao estado de chegada:

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p(s, x) ds} \\ & \int_E E[f(X_t)1_{\{1 \leq N(\tau, t) \leq n+1\}} \mid X_\tau = x, T_\tau = \sigma, X_\sigma = y] \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma \end{aligned}$$

Como X_t é markoviano, a esperança na última integral é equivalente a:

$$E[f(X_t)1_{\{N(\sigma, t) \leq n\}} \mid X_\sigma = y] = G_t^{(n)}(\sigma, y),$$

pela hipótese de indução.

Substituindo a última igualdade em (2) e (2) em (1), temos a validade para $n + 1$, concluindo a demonstração.

(IV) 1) **Proposição:** Uma condição suficiente para que X_t definido no capítulo 1 seja não-explosivo em $[0, t]$ é que $p(\cdot, \cdot)$ seja limitada em $[0, t] \times E$.

A demonstração a seguir foi imitada, sem alterações substanciais, de [Fe2], onde o caso em consideração é o estacionário.

Prova: Fazendo $f = 1_E$, mostraremos, por indução, que

$$G_t^{(n)}(\tau, x) \geq 1 - [1 - e^{-a(t-\tau)}]^n, \quad \forall n, \tau \in [0, t], x \in E,$$

onde $a = \sup_{[0, t] \times E} p(\cdot, \cdot)$.

Isto é trivialmente verdadeiro para $n = 0$.

Supondo que é verdadeiro para n arbitrário:

$$\begin{aligned} G_t^{(n+1)}(\tau, x) &\geq e^{-\int_{\tau}^t p(\sigma, x) d\sigma} \\ &+ \int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p(s, x) ds} \int_E \left\{ 1 - [1 - e^{-a(t-\sigma)}]^n \right\} \Pi(\sigma, x, dy) d\sigma \\ &\geq (\text{a última função entre chaves é decrescente em } \sigma) \\ &\geq e^{-\int_{\tau}^t p(\sigma, x) d\sigma} + \left\{ 1 - [1 - e^{-a(t-\tau)}]^n \right\} \\ &\quad \times \int_{\tau}^t p(\sigma, x) e^{-\int_{\tau}^{\sigma} p(s, x) ds} d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\int_r^t p(\sigma, x) d\sigma} + \left\{ 1 - [1 - e^{-a(t-r)}]^n \right\} \\
&\quad \times [1 - e^{-\int_r^t p(\sigma, x) d\sigma}] \\
&= 1 - [1 - e^{-a(t-r)}]^n \cdot [1 - e^{-\int_r^t p(\sigma, x) d\sigma}] \\
&\geq 1 - [1 - e^{-a(t-r)}]^{n+1}.
\end{aligned}$$

A conclusão é imediata.

2) Esta condição não é necessária, como podemos ver no seguinte exemplo:

$$E = N^*, \mathcal{E} = \mathcal{P}(N^*)$$

$$p(t, x) = n, \Pi(t, n, \{n+1\}) = 1, L(1) = 1$$

X_t é o pms em $(F, \mathcal{F})$ com f_t , $f_t s$ e distribuição inicial acima.

T_1 é o tempo do primeiro salto de X_t .

T_n é o tempo decorrido entre o $(n-1)$ -ésimo e o n -ésimo saltos de X_t , $n \geq 2$.

Então

$(T_i)_{i=1}^\infty$ são v.a.'s independentes, $T_i \sim \exp(n)$,

$$N(0, t) < \infty \iff \sum_{n=1}^\infty T_n > t,$$

$$\Pr\left(\left|\sum_{n=1}^k T_n - E \sum_{n=1}^k T_n\right| > t\right) \leq \frac{\sum_{n=1}^k \text{Var} T_n}{t^2} = \frac{\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2}}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}, \forall k$$

(a primeira desigualdade segue-se de *Tchebichev* e da independência entre os T_n 's).

Observando agora que $ET_n = 1/n$:

$$\Pr\left(\left|\sum_{n=1}^k T_n - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}\right| \leq t\right) \geq 1 - \frac{2}{t^2}, \forall k$$

Dado $\epsilon > 0$, escolhemos t_0 tal que $2/t_0^2 \leq \epsilon$:

$$\Pr\left(\sum_{n=1}^k T_n \geq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - t_0\right) \geq 1 - \epsilon, \forall k$$

Portanto

$$\Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \infty\right) \geq 1 - \epsilon$$

Como ϵ é arbitrário:

$$\begin{aligned}\Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \infty\right) &= 1 \implies \Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n > t\right) = 1, \forall t \\ &\implies \Pr(N(0, t) < \infty) = 1, \forall t\end{aligned}$$

e X_t é não-explosivo.

(V) **Proposição:** Se X_t e X'_t são os pms's dos capítulos 1 e 2,

$$X_t \text{ não-explosivo em } [0, t] \implies X'_t \text{ não-explosivo em } [0, t].$$

Na demonstração da proposição, faremos uso do seguinte

Lema: Sejam $p(t), q(t)$ funções contínuas e não negativas, $q \leq 1$;

$[N_t, t \geq 0]$, um ppnh com fi $p(t)$; τ_n , o tempo do n -ésimo evento deste processo ;

$\{A_t\}_{t \geq 0}$ uma família de eventos independentes entre si e de N_t tais que $\Pr(A_t) = q(t)$;

$M_t = \sum_{n \geq 1} 1_{[0, t]}(\tau_n) 1_{A_{\tau_n}}$, ie, M_t é o processo que conta eventos aleatoriamente escolhidos de N_t ; um destes eventos, ocorrido no instante t , será escolhido com probabilidade $q(t)$.

Então, $[M_t, t \geq 0]$ é um ppnh com fi $q(t)p(t)$.

Demonstração do lema:

(i) $N_0 = 0 \implies M_0 = 0$

(ii) Dados $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$,

$$M_{t_j} - M_{t_{j-1}} = \sum_{n \geq 1} 1_{(t_{j-1}, t_j]}(\tau_n) 1_{A_{\tau_n}}, \quad j = 2, \dots, n,$$

depende somente de $N_{t_j} - N_{t_{j-1}}$ e de $A_t, t \in (t_{j-1}, t_j]$.

Pela independência dos incrementos de N_t e dos A_t entre si e com N_t , concluímos que $\{M_{t_j} - M_{t_{j-1}}\}_{2 \leq j \leq n}$ são independentes entre si.

Portanto, M_t tem incrementos independentes.

(iii)

$$\begin{aligned}(1) \quad & \Pr(\text{mais que um salto de } M_t \text{ em } (s, s+h)) \\ & \leq \Pr(\text{mais que um salto de } N_t \text{ em } (s, s+h)) \\ & = o(h)\end{aligned}$$

Portanto (1) é um $o(h)$.

(iv) No que se segue:

$$q_0(s, h) = \inf_{(s, s+h)} q(\cdot) = q(s) + O_0(h)$$

$$q_1(s, h) = \sup_{(s, s+h)} q(\cdot) = q(s) + O_1(h)$$

com a última igualdade em cada linha acima devida à continuidade de $q(t)$.

Então

$$\begin{aligned}& \Pr(\text{exatamente um salto de } N_t \text{ em } (s, s+h)) \\ & = \Pr(\text{exatamente um salto de } N_t \text{ em } (s, s+h), \text{ ocorre o} \\ & \quad \text{evento } A_t \text{ correspondente ao tempo do salto em } (s, s+h)) \\ & + \Pr(\text{mais de um salto de } N_t \text{ em } (s, s+h), \text{ ocorre} \\ & \quad \text{apenas um dos eventos } A_t \text{ correspondentes aos saltos}).\end{aligned}$$

A última probabilidade é, claramente, um $o(h)$.

A primeira pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n \geq 1} \Pr(\tau_{n-1} \leq s < \tau_n < s+h \leq \tau_{n+1}, A_{\tau_n}) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \int_s^{s+h} \Pr(\tau_{n-1} \leq s, \tau_{n+1} \geq s+h, \tau_n \in d\sigma, A_\sigma) \\
 &= (\text{independência entre } A_t\text{'s e } N_t\text{'s}) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \int_s^{s+h} \Pr(\tau_{n-1} \leq s, \tau_{n+1} \geq s+h, \tau_n \in d\sigma) q(\sigma) \\
 &\leq q_1(s, h) \sum_{n \geq 1} \int_s^{s+h} \Pr(\tau_{n-1} \leq s, \tau_{n+1} \geq s+h, \tau_n \in d\sigma) \\
 &= q_1(s, h) \Pr(\text{exatamente um salto de } N_t \text{ em } (s, s+h)) \\
 &= [q(s) + O_1(h)] \cdot [p(s)h + o(h)] = q(s)p(s)h + o_1(h)
 \end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que a primeira probabilidade é maior ou igual que $q(s)p(s)h + o_0(h)$. Conclui-se que ela é igual a $q(s)p(s)h + o(h)$ e portanto

$\Pr(\text{exatamente um salto de } M_t \text{ em } (s, s+h)) = q(s)p(s)h + o(h)$,
o que, juntamente com i, ii e iii, demonstra o lema.

Demonstração da proposição: X_t'' é um *pms* acoplado a X_t' , construído da seguinte maneira:

$$M_t^x = \sum_{n \geq 1} 1_{[0, t]}(\tau_n^{x'}) 1_{A_{\tau_n^{x'}}^x},$$

$\tau_n^{I^x}$ é o tempo do n -ésimo evento de $N_t^{I^x}$ usado na construção de X_t^I ; A_t^x são os eventos usados na mesma construção.

X_t^{II} é construído de maneira análoga aos *pms*'s X_t e X_t^I , usando M_t^x , Y_t^x e W , com estas últimas v.a.'s as mesmas usadas na construção de X_t^I .

Construído desta maneira: i) $X_0^{II} = X_0^I = W \neq \delta$; ii) X_t^{II} salta quando, e só quando o salto não leva a δ . Segue-se que X_t^{II} coincide com X_t^I enquanto, e apenas enquanto, este for diferente de δ .

Pelo lema anterior, X_t^{II} é um *pms* em $(F, \mathcal{F})$ de mesma lei que X_t .

Pela construção de X_t^{II} :

$$N'(\tau, t) \leq N''(\tau, t) + 1, \forall \tau, t$$

onde N' e N'' contam os saltos em $[\tau, t]$, respectivamente, de X_t^I e X_t^{II} .

A conclusão da demonstração é imediata.

(VI) A condição " X'_t não-explosivo em $[0, t]$ " é necessária para a validade do teorema 1.

Antes de demonstrar esta afirmação, exibiremos um exemplo de *pms* explosivo.

Exemplo: $E = N^+$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(N^+)$

$$p(t, n) = n^2, \quad \Pi(t, n, \{n+1\}) = 1, \quad L(1) = 1$$

X_t é o *pms* construído em $(F, \mathcal{F})$ com f_t , f_t s e distribuição inicial acima.

T_1 é o tempo do primeiro salto de X_t .

T_n é o tempo decorrido entre o $(n-1)$ -ésimo e o n -ésimo saltos de X_t , $n \geq 2$.

Então, $T_n \sim \exp(n^2)$.

$$N(0, t) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} T_n > t,$$

Dada a sequência $\{t_i\}_{i \geq 1} : t_i \uparrow \infty$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Pr(N(0, t_i) < \infty) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n > t_i\right)$$

$$\stackrel{\text{Tch.}}{\leq} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{E \sum_{n=1}^{\infty} T_n}{t_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}{t_i} = 0$$

Logo, existe i tal que $\Pr(N(0, t_i) < \infty) < \frac{1}{2}$: X_t é explosivo.

Demonstração da afirmação:

Se X'_t for explosivo em $[0, t]$, existe $x \in E$ satisfazendo $\Pr(N'(0, t) < \infty \mid X'_0 = x) < 1$.

Então, $\Pr(N'(0, t) < \infty \mid X'_0 = x)$ e 1 são duas soluções limitadas e

diferentes — a primeira é a solução mínima — da equação:

$$F_t(0, x) = e^{-\int_0^t p'(\sigma, x) d\sigma} + \int_0^t p'(\sigma, x) e^{-\int_0^\sigma p'(s, x) ds} \int_{E'} F_t(\sigma, y) \Pi'(\sigma, x, dy) d\sigma$$

Portanto, 0 e $1 - \Pr(N'(0, t) < \infty \mid X'_0 = x)$ são distintas soluções limitadas de (3') e, logo, de (3'').

Dada uma solução limitada de (3), $F_t(0, x)$,

$$F_t(0, x) + 1 - \Pr(N'(0, x) < \infty \mid X'_0 = x)$$

é uma outra solução limitada de (3).

Observação: É claro que a existência de duas soluções limitadas de (3) implica a existência de infinitas já que, pela linearidade de (3) em F , qualquer combinação convexa de duas soluções limitadas de (3) também é uma solução limitada de (3).

(VII) X'_t não-explosivo em $[0, t]$ não implica X_t não-explosivo em $[0, t]$.

(Contra-)Exemplo: Seja X_t um pms explosivo e $v \equiv p > 0$. Nestas condições:

$$\{N'(0, t) = \infty\} \subset \{\tau'_\infty \leq t, \cap_{n=1}^\infty A_n\},$$

onde, $A_n = A_{\tau'_n}^{Z'_n}$, N' , Z' e τ' são os correspondentes de N , Z e τ do pms X_t em X'_t .

Então

$$\Pr(N'(0, t) = \infty) \leq \Pr(\tau'_\infty \leq t, \cap_{n=1}^\infty A_n).$$

Condicionando:

$$\Pr(\tau'_\infty \leq t, \cap_{n=1}^\infty A_n \mid (Z'_n, \tau'_n) = (z_n, t_n), n = 1, 2, \dots) = 0,$$

se $z_n = \delta$ para algum n .

Por outro lado, se $z_n \neq \delta, \forall n$:

$$Z'_n = Z''_n, \tau'_n = \tau''_n, \tau'_\infty = \tau''_\infty,$$

onde Z''_n, τ''_n são os correspondentes a Z'_n, τ'_n , quando se usa Y_t^x no lugar de Y_t^{1x} .

Neste caso, a probabilidade condicional acima é equivalente a

$$\Pr(\tau''_\infty \leq t, \cap_{n=1}^\infty A_n \mid (Z''_n, \tau''_n) = (z_n, t_n), n = 1, 2, \dots)$$

$$\stackrel{qc}{\leq} \Pr(\cap_{n=1}^\infty A_{t_n}^{z_n} \mid (Z''_n, \tau''_n) = (z_n, t_n), n = 1, 2, \dots)$$

$$\stackrel{ind.}{=} \Pr(\cap_{n=1}^\infty A_{t_n}^{z_n}) = 0.$$

A conclusão é imediata.

(VIII) A condição "F é limitada" é necessária.

Exibiremos abaixo um exemplo onde X_t é não-explosivo mas, ao se admitir soluções não limitadas para (1) + (1'), a unicidade é perdida:

X_t é um processo de poisson de parâmetro 1 — na linguagem deste trabalho, um pms em $(N^*, \mathcal{P}(N^*))$, com $p(t, n) \equiv 1$, $\Pi(t, n, \{n+1\}) = 1$ e $L(1) = 1$. Logo, pela proposição em (IV), não-explosivo. $v \equiv 0$, $f \equiv 0$.

A equação (1) tem neste caso a seguinte forma:

$$F'(n, t) = F(n+1, t) - F(n, t) \Rightarrow$$

$$(*) \quad F(n+1, t) = F(n, t) + F'(n, t), \quad n \in N^*$$

$F \equiv 0$ é a solução dada pelo teorema 1.

Por outro lado, (*) vale se e só se

$$F(n, t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} g^{(i)}(t),$$

onde $g(t) = F(0, t)$, $g^{(i)}(t)$, $i \geq 1$, é a i -ésima derivada de $g(t)$.

Agora, se tomarmos g infinitamente diferenciável, com $g^{(i)}(0) = 0$, $\forall i$, $g \neq 0$, então teremos uma outra solução para (*).

Como se pode ver em [EL] (pg.229, ex.29),

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

satisfaz as condições acima.

Obviamente, $F(n, t)$ assim definida é não limitada.

BIBLIOGRAFIA

- 1.[Çi] Çinlar, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall, (1975).
- 2.[EL] Lima, E.L., *Curso de Análise, vol.1*, IMPA (Projeto Euclides), (1976).
- 3.[Fe1] Feller, W., *On the Integro-Differential Equations of Purely Discontinuous Markov Processes*, Trans.Amer.Math.Soc., vol.48 (1940), pp 488-515 [Erratum, vol.58, p.474].
- 4.[Fe2] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol.II, 2nd ed.*, John Wiley&Sons, (1971).
- 5.[G&S] Gihman, I.I.& Skorohod, A.V., *The Theory of Stochastic Processes II*, Springer-Verlag, (1975).
- 6.[Li] Liggett, T.M., *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, (1985).
- 7.[Ro] Royden, H.L., *Real Analysis, 2nd ed.*, Macmillan, (1968).
- 8.[SR] Ross, S.M., *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, (1970).

Os originais do texto do trabalho foram editados e impressos no microcomputador pela rotina T_EX, instalada nos micros do IME, cujo manual vai em referência abaixo:

Knuth, D.E., *The T_EXbook*, Addison-Wesley, (1984).

Obrigado ao Pablo, Antônio e Denise.