**Resultados assintóticos para o modelo
de Exclusão com Contágio**

Fábio Prates Machado

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**
Orientador: **Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari**

trabalho parcialmente financiado pelo CNPq
-São Paulo, Setembro de 1994-

Resultados assintóticos para o modelo de Exclusão com Contágio

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Fábio Prates Machado e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 09 de Dezembro de 1994

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari (Orientador) - **IME-USP**

Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Fontes - **IME-USP**

Prof. Dra. Maria Eulália Vares - **IMPA**

Prof. Dr. Vladas Sidoravicius - **IMPA**

Prof. Dr. Mário de Oliveira - **IF-USP**

AGRADECIMENTOS

Foi com imenso prazer que atravessei este período. Poder contar com a orientação do Pablo foi sem dúvida a grande alavanca para conclusão deste projeto. Ainda precisarei de algum tempo para digerir seu exemplo de determinação, intimidade e talento com a pesquisa em Probabilidade. Tive também a oportunidade de expor partes deste trabalho (e algumas outras coisas que não estão aqui) para pessoas que iluminaram meu caminho com comentários e críticas de grande valor. Sou grato a todas elas. Em particular, as conversas com Enrique, Luis Renato, Roberto e Tom foram muito esclarecedoras. Não posso deixar de agradecer meus colegas e professores da Probabilidade. Foi com a ajuda deles e estimulado pela atmosfera criada por eles que iniciei o contato com este assunto extremamente desafiador. Recebi apoio financeiro em três momentos bastante diferentes e de importância fundamental. O primeiro do IMPA/CNPq, para estudar alguns artigos com a orientação da Maria Eulália; o segundo para participar do FIESTA na bela Santiago do Chile, através de um convite estimulante do Servet Martinez e o terceiro para participar do Random Spatial Processes em Cambridge-UK através de uma bolsa “sanduiche” do CNPq e com um apoio do “seu” Yoshida. Foram oportunidades decisivas. Por fim, agradeço aos meus colegas do departamento de Estatística do IME-USP pela dispensa parcial da carga didática e pelo convívio diário estimulante e agradável.

Paralelo ao trabalho acadêmico e científico, lembro com carinho das belas pessoas com as quais tive contato durante este tempo. Ternas, valiosas, poucas pessoas. Em especial, encontrei um porto alegre em São Paulo na inesquecível companhia de Iara e Francisco. Se o dia a dia nos afastou, suas pessoas são e continuarão sendo referências importantes para mim.

dedico este trabalho à Sá e ao Dedé e as memórias de Aurélio e Izidoro

Abstract

We consider some questions related to the branching exclusion process $(EC(\lambda))$. We may describe it shortly as a markovian process on $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ evolving on continuous time, where particles living at sites of $\mathbb{Z}^d$ try to jump to its empty nearest neighbour site after a rate λ exponential time or to create new particles in its empty nearest neighbour site at rate 1. We cancel jumps or creations which violate the at most one particle per site condition.

In the first chapter, we deal with some auxiliary processes which can be described as of $EC(\lambda)$ and that will work toward the understanding about questions which will appear. One of these is the random walk with drift toward the origin. We use later this process to show that $\forall \lambda > 0$ and $d \geq 1$, the space is filled up through a circle evolving with time.

In the second chapter, we show that the random variable $t_2(0)$: time of definite occupation, has tail with exponential decay. Provided that and with the help of the general shape theorem showed in Durrett and Griffeath [8], we are able to show that the limit shapes (rescaled by t and with λ fixed) for ζ_t^1 : set of sites already visited up to the time t and ζ_t^2 : set of sites definitely occupied from t , are the same ones.

In the third chapter, we start the study of the behavior of the limit shape on $d = 2$, when λ goes to infinity. With this goal we show that, the limit shape is contained into the unitary circle when that is divided by square root of λ . At this moment, we don't have any lower bound to this but we believe that the limit shape rescaled by $\sqrt{\lambda}$, goes to a circle when λ goes to infinity.

In the last chapter, we show the unicity of the invariant measure to $EC(\lambda)$ evolving inside a infinity strip in $\mathbb{Z}^2$ to many slopes, as seen of the rightmost particle. This measure is such that the number of holes in the interface, that is, in the intermediate region between the completely vacant side and the completely full side of the strip, has every moments finite. Moreover we show that the limit of the systems velocity grows like $\sqrt{\lambda}$. These results are our main ones and it is an extension of the work done by Bramson *et al* [4] on $d = 1$. To do this job we needed to adapt some technics developed in that paper, besides of needing some results showed in the earlier chapters of this work.

Resumo

Neste trabalho estudamos questões relacionadas ao modelo de exclusão com contágio ($EC(\lambda)$). Podemos descrevê-lo brevemente como um processo Markoviano com espaços de estados $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e a tempo contínuo, com partículas ocupando coordenadas (sítios) de $\mathbb{Z}^d$ tentando saltar para posições desocupadas vizinhas depois de um tempo exponencial de taxa λ ou criar novas partículas nos sítios vizinhos vazios com taxa 1. Saltos ou criações que violariam a condição de no máximo uma partícula por sítio são canceladas.

No primeiro capítulo apresentamos processos descritos a partir de $EC(\lambda)$ que são úteis para compreendermos algumas questões que são colocadas mais a frente. Um deles é um passeio aleatório com deriva para a origem que $\forall \lambda > 0$ e $d \geq 1$ nos garante o preenchimento do espaço através de um disco em função do tempo.

No segundo capítulo, mostramos que a variável aleatória $t_2(0)$: tempo de ocupação definitiva da origem, tem cauda com decaimento exponencial. A partir deste resultado e do teorema geral da forma de Durrett & Griffeath [8] mostramos que as formas limite (rescalonadas pelo tempo e com λ fixado) para ζ_t^1 : conjunto de pontos já visitados antes do instante t e ζ_t^2 : conjunto de pontos definitivamente ocupados a partir do instante t , são iguais.

No terceiro capítulo iniciamos o estudo do comportamento da forma limite para $d = 2$ quando λ diverge. Neste sentido mostramos que, reescalonada por $\sqrt{\lambda}$, a forma limite fica contida dentro da bola unitária. No momento não temos um limite inferior mas acreditamos que a forma limite, reescalonada por $\sqrt{\lambda}$, converge para uma circunferência quando λ diverge.

No quarto capítulo, mostramos a unicidade da medida invariante para $EC(\lambda)$ evoluindo dentro de uma faixa infinita em $\mathbb{Z}^2$ para diferentes orientações visto a partir da partícula mais a direita. Esta medida é tal que o número de buracos na interface, ou seja, na região intermediária entre a parte que esta completamente vazia e a parte que esta completamente cheia de partículas, possui todos os momentos finitos. Além disto mostramos que o limite da velocidade com que o sistema avança sobre a região vazia é da ordem de $\sqrt{\lambda}$. Este é nosso resultado principal e é uma extensão do trabalho de Bramson *et al* [4] para $d = 1$. Para fazer isto precisamos adaptar algumas técnicas desenvolvidas naquele trabalho além de necessitar de resultados apresentados nos capítulos anteriores.

ÍNDICE

Capítulo 1.

Descrição do modelo	1
Construção gráfica	2
Processo dual	4
Processos definidos a partir de $EC(\lambda)$	5
Algumas relações	7
Uma majoração para o primeiro tempo	14
Uma minoração para o segundo tempo	16

Capítulo 2.

Introdução	25
Cauda exponencial do segundo tempo	28

Capítulo 3.

Introdução 33

Posição projetada mais a direita na linha horizontal 36

Posição projetada “mais a direita” na linha de inclinação α 40

Capítulo 4.

$EC(\lambda)$ na faixa horizontal visto da borda 43

$EC(\lambda)$ na faixa de inclinação α visto da borda 47

Limites para a velocidade assintótica nas faixas 50

Referências Bibliográficas 57

Capítulo 1

Descrição do modelo

Começaremos definindo o modelo de Exclusão com Contágio ($EC(\lambda)$), a partir de sua dinâmica microscópica, como um processo Markoviano com espaço de estados $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Como usual, podemos interpretar o processo através da idéia de partículas ocupando sítios de $\mathbb{Z}^d$, podendo saltar ou criar novas partículas nos sítios vazios vizinhos do sítio que estão ocupando. Criações são feitas (se possível) a partir de sítios ocupados em algum sítio vizinho vazio, após uma espera exponencial de parâmetro 1. Exclusões ocorrem entre sítios ocupados e sítios vizinhos vazios, após uma espera exponencial de parâmetro λ . Para uma função cilíndrica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o gerador deste processo é definido por:

$$(Lf)(\eta) = \lambda \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} p(j,i)[f(\eta^{i,j}) - f(\eta)] + \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} p(j,i)[f(\eta^j) - f(\eta)]\eta(i)$$

onde

$$\eta^{i,j}(x) = \begin{cases} \eta(i), & \text{se } x = j; \\ \eta(j), & \text{se } x = i; \\ \eta(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$\eta^j(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = j; \\ \eta(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este gerador define de maneira única um processo de Markov (Liggett[17], teoremas 1.5 e 2.9). Uma maneira mais simples de definir este processo é através da chamada representação gráfica. A idéia principal é construir uma estrutura de percolação em $\mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$ sobre a qual definimos o sistema. Esta abordagem foi considerada inicialmente por Harris [13]. Notaremos por $(\xi_t^\mu, t \geq 0)$ o processo cuja distribuição no instante $t = 0$ é descrito pela medida μ . No caso desta medida ser degenerada em uma particular configuração η , escreveremos $(\xi_t^\eta, t \geq 0)$. A menos de menção em contrário, estaremos tratando do caso onde inicialmente existe apenas uma partícula em $\mathbb{Z}^d$, partindo da origem ($\xi_t := \xi_t^{\{0\}}$). Para $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ e com a notação $\|x\|$ estaremos indicando $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$, enquanto que $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$.

Construção gráfica

Tomando como vizinhos do sítio $x \in \mathbb{Z}^d$ o conjunto $\mathcal{V}(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \|(x - y)\| = 1\}$ e supondo a uniformidade na escolha dos vizinhos, ou seja:

$$p(j, i) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \text{se } \|j - i\| = 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

podemos fazer a construção gráfica do modelo de $\text{EC}(\lambda)$ da seguinte forma:

Para cada $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|x - y\|_1 = 1$, utilizamos processos pontuais de Poisson (p.p.p.) independentes da seguinte forma:

$$R_n^{x,y} \text{ p.p.p. de taxa } \frac{1}{2d}$$

$$E_n^{x,y} \text{ p.p.p. de taxa } \frac{\lambda}{2d}$$

Nos instantes $R_n^{x,y}$, marcaremos setas simples de x para y enquanto que nos instantes $E_n^{x,y}$ marcaremos setas duplas envolvendo x e y . Seja Ω o espaço das setas (duplas e simples) em $\mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$ e ω uma particular configuração de Ω . Construímos o processo para qualquer configuração inicial. Como em um conjunto de medida um, não existem marcas simultâneas, construímos o processo dentro de caixas isoladas e em tempos finitos. Quando uma partícula tem pela frente uma seta dupla envolvendo um sítio vizinho vazio, esta salta para aquela posição. Quando uma partícula encontra uma seta simples apontando para um sítio vizinho vazio, ela cria uma nova partícula naquele lugar. Nos dois casos, nada ocorre caso o outro sítio envolvido esteja ocupado naquele instante.

Fixamos inicialmente $t^* = t(\lambda, d)$ tal que para todo ω em um conjunto de medida um, podemos encontrar uma região conectada finita contendo a origem, que chamaremos de $D_1(0, \omega)$, tal que não exista nenhuma seta ligando algum ponto de $D_1(0, \omega)$ ao seu exterior durante o intervalo de tempo $[0, t^*)$. A existência de t^* vem do fato de que podemos acoplar o processo $C_t(0)$ dos sítios já visitados pelo processo até o tempo t , com o modelo de percolação de elos com $p = IP(\omega(x, y) = 1) = IP(\min\{R_n^{x,y}, E_n^{x,y}\} \leq t) = 1 - \exp^{-\frac{\lambda+1}{2d}t}$. Aqui p é a probabilidade de dois sítios vizinhos fixados quaisquer, estarem conectados no modelo de percolação. Com o acoplamento temos que $IP(|C_t(0)| = \infty) \leq IP_p(|C(0)| = \infty)$ onde $C(0)$ é o aglomerado da origem no modelo de percolação e $IP_p(\cdot)$ é a medida produto

construída a partir de p . De Grimmett [12], temos que $\exists p_c(d) \in]0, 1[$ tal que se $p < p_c(d)$ então $\mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) = 0$. Como p decresce a zero quando $t \rightarrow 0$, temos que para $t^* > 0$ suficientemente pequeno, $p < p_c(d)$ de modo que $\mathbb{P}(|C_{t^*}(0)| = \infty) = 0$. Desta forma, podemos construir o processo até o instante t^* . Repetimos a construção entre o instante t^* e $2t^*$. Definimos agora $D_2(A, \omega)$, uma região conectada finita tal que na configuração ω o processo partindo do conjunto de sítios A não visita o seu exterior durante o intervalo de tempo $[t^*, 2t^*]$. Deste modo, para todo ω em um conjunto de medida um, podemos encontrar uma região conectada finita $D_2(\xi_{t^*}^{\{0\}}, \omega)$ já que $\xi_{t^*}^{\{0\}} \subset D_1(0, \omega)$ e

$$D_2(D_1(0, \omega), \omega) \subset \bigcup_{x \in D_1(0, \omega)} D_2(x, \omega)$$

e a existência de $D_2(x, \omega)$ segue da existência de $D_1(0, \omega)$. Do fato que é possível encontrar $D_2(x, \omega)$ para todo x e quase todo ω , concluímos que podemos construir o processo no intervalo $[0, 2t^*]$. Deste modo podemos construir o processo sucessivamente para faixas no tempo de comprimento t^* . Como estamos com uma sequência enumerável de intervalos de tempo, construímos o processo para um conjunto de medida um na estrutura de percolação.

Processo dual

A representação gráfica do processo dual é feita através da troca do sentido da linha do tempo e da troca do sentido das flechas de criação. Desta forma o processo dual $\tilde{\xi}_t^A$, com $\tilde{\xi}_0^A = A$ suportando no máximo uma partícula por sítio, também é um processo de $\mathbf{EC}(\lambda)$ (auto dualidade) com taxas idênticas as do processo a tempo real. Estas taxas são aquelas definidas para os p.p.p. $R_n^{x,y}$ e $E_n^{x,y}$. Criações ocorrem quando verificamos uma seta simples partindo de um sítio vazio e chegando em $\tilde{\xi}_t^A$, enquanto que exclusões ocorrem quando encontramos uma seta dupla envolvendo pelo menos um sítio de $\tilde{\xi}_t^A$.

A partir daí temos a seguinte igualdade, chamada equação dual, que é consequência imediata da auto dualidade do processo de $\mathbf{EC}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(x \in \xi_t^A) = \mathbb{P}(\tilde{\xi}_t^{\{x\}} \cap A \neq \emptyset)$$

Este tipo de equação, sempre que possível ser estabelecida, é extremamente útil nos sistemas de partículas. Em alguns casos o processo dual é bem mais simples que o processo original, enquanto que em outros casos o que temos é uma reformulação do problema de modo a torná-lo tratável.

Processos definidos a partir de $\mathbf{EC}(\lambda)$

Tomaremos agora alguns processos definidos a partir de $\mathbf{EC}(\lambda)$, para os quais existem questões clássicas já resolvidas. Definiremos inicialmente:

$$\zeta_t^1 = \{x \in \mathbb{Z}^d : \xi_s(x) = 1 \text{ para algum } s \leq t\}$$

ou seja ζ_t^1 é o conjunto dos sítios já visitados por alguma partícula do processo ξ_t . A partir deste processo definimos o que iremos chamar de “primeiro instante de visita”:

$$t_1(x) = \inf\{t : \xi_t(x) = 1\}$$

para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ temos então que:

$$\zeta_t^1(x) = 0 \Leftrightarrow t_1(x) > t$$

Outro processo de interesse, imerso em ξ_t é:

$$\zeta_t^2 = \{x \in \mathbb{Z}^d : \xi_s(x) = 1 \text{ para todo } s \geq t\},$$

o conjunto dos sítios que no instante t já estão definitivamente ocupados. O que chamaremos de “segundo tempo de ocupação” é então definido da seguinte maneira:

$$t_2(x) = \sup\{t : \xi_t(x) = 0\}$$

também para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ vale que:

$$\zeta_t^2(x) = 1 \Leftrightarrow t_2(x) \leq t$$

Um segundo processo imerso de interesse para o processo de $\mathbf{EC}(\lambda)$ com distribuição inicial degenerada em um sítio, é o passeio aleatório X_t^x que também pode ser descrito a partir da construção gráfica, escolhendo-se um ramo específico de $\xi_t^{\{x\}}$ através da seguinte regra: Sempre que uma seta de exclusão aparecer mudamos de sítio mas em geral só seguiremos as setas de contágio que nos levam para um sítio mais próximo da origem do reticulado. Desta maneira, sempre que o passeio X_t^x não estiver sobre algum conjunto da forma $R_i := \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^d : y_i = 0\}$ para algum $i = 1, \dots, d$, ele terá as seguintes taxas:

$$\text{se } \|z - y\|_2 = 1 \text{ e } \|z\|_2 < \|y\|_2 \Rightarrow y \rightarrow z \text{ a taxa } \frac{\lambda + 1}{2d}$$

$$\text{se } \|z - y\|_2 = 1 \text{ e } \|z\|_2 > \|y\|_2 \Rightarrow y \rightarrow z \text{ a taxa } \frac{\lambda}{2d}$$

Com isto faltaria definirmos o que ocorre quando $y \in R_i$ para algum i . Com o propósito de criarmos um processo X_t^x imerso em $\xi_t^{\{x\}}$, que salte para metade de seus vizinhos a uma taxa $\frac{\lambda+1}{2d}$ e para a outra metade a uma taxa $\frac{\lambda}{2d}$, com deriva para o centro do reticulado, completamos a definição das taxas da seguinte forma, onde $z = (z_1, \dots, z_d)$ é tal que $\|z - y\|_2 = 1$:

$$\text{se } y \in R_i \text{ e } z_i = 1 \text{ para algum } 1 \leq i \leq d \Rightarrow y \rightarrow z \text{ a taxa } \frac{\lambda + 1}{2d}$$

se $y \in R_i$ e $z_i = -1$ para algum $1 \leq i \leq d \Rightarrow y \rightarrow z$ a taxa $\frac{\lambda}{2d}$

Desta forma o processo assim definido troca de sítio a uma taxa $\frac{2\lambda+1}{2}$, independente da posição que estiver ocupando. Se imaginarmos que para cada $\omega \in \Omega$ o que temos é algo como uma “ramificação” em $\mathbb{Z}^d \times [0, +\infty)$, podemos dizer que o passeio aleatório X_t^x escolhe um ramo do processo $\xi_t^{\{x\}}$. Observamos que podemos construir de maneira análoga, um passeio aleatório com deriva para qualquer sítio $y \in \mathbb{Z}^d$. Chamaremos este processo de $X_t^{x,y}$.

Algumas relações

Sejam os seguintes tempos:

$t^{x,y}(y)$ = Tempo até que o passeio aleatório que escolhe o ramo do processo $\xi_t^{\{x\}}$, com deriva para o sítio y , alcance pela primeira vez o sítio y ,

$t^R(y)$ = Tempo para que y pertença pela primeira vez a mancha no modelo de Richardson (partículas são criadas na vizinhança de partículas já existentes, sem mortes) com taxa $\frac{\lambda+1}{2d}$.

Notamos que é possível construir um acoplamento de modo a obter-se as seguintes desigualdades:

Lema 1.1:

Sejam as variáveis $t^R(y)$, $t_1^{\{0\}}(y)$, $t^{0,y}(y)$. Então

$$t^R(y) \leq t_1^{\{0\}}(y) \leq t^{0,y}(y) \quad \forall y \in \mathbb{Z}^d \quad 1.1$$

prova:

Tomamos o seguinte acoplamento. Partindo de uma partícula na origem, para cada $\omega \in \Omega$, definimos o processo ξ_t^R : criamos uma partícula sempre que tivermos uma seta de criação partindo de um sítio ocupado em direção a um sítio vazio ou quando encontrarmos uma seta de exclusão envolvendo um sítio ocupado e outro vazio. Desta forma encontramos $\xi_t^{\{0\}} \subset \xi_t^R \forall t \geq 0$, o que implica na primeira desigualdade. A segunda vem do fato que para cada $\omega \in \Omega$ o processo $X_t^{\{0,y\}}$ escolhe um ramo de $\xi_t^{\{0\}}$ de modo que $X_t^{\{0,y\}} \subset \xi_t^{\{0\}}$, e assim o lema está provado. ■

Seja agora o processo:

$$Z_t^\alpha = \left\| X^x\left(\frac{2t}{2\lambda+1}\right) \right\|_2$$

onde $\alpha = \|x\|_2$.

Z_t^α move-se com um tempo exponencial de taxa 1, já que o passeio aleatório X_t^x está imerso no processo de $\text{EC}(\lambda)$, saltando com um tempo exponencial de taxa $\frac{2\lambda+1}{2}$. Seja Y_n o passeio aleatório a tempo discreto (imerso) definido pelo movimento de X_t^x . Vamos verificar que existe um disco D , centrado na origem, tal que $\forall y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d \setminus D$ temos:

$$\|y\|_2^2 - \mathbb{E}(\|Y_{n+1}\|_2^2 | Y_n = y) \geq \epsilon > 0$$

Fixado $y \in \mathbb{Z}^d \setminus D$, definimos $A(y) = \{i : y_i = 0\}$ e $z = |A(y)|$. Através de $Y_n|_i$ notamos o valor da i -ésima coordenada da posição Y_n . Neste caso, $y|_i = y_i$. Definimos agora o acréscimo ($a(y, i)$) e o decréscimo ($d(y, i)$) quando $Y_n = y$ e a diferença entre Y_n e Y_{n+1} está na i -ésima coordenada.

$$a(y, i) = (|y_i| + 1)^2 - y_i^2 = 1 + 2|y_i|,$$

$$d(y, i) = (|y_i| - 1)^2 - y_i^2 = 1 - 2|y_i|.$$

Observamos que se y é tal que $|A(y)| = d - 1$, caso $i \notin A(y)$ teremos $a(y, i) = d(y, i) = 1$. Além disto, se y é tal que $|A(y)| > 0$, tomando $i \in A(y)$ temos $d(y, i) = 0$ enquanto que $a(y, i) = 1$.

Para $p = (\lambda + 1)/d(2\lambda + 1)$ e $q = \lambda/d(2\lambda + 1)$ onde $d(q + p) = 1$, temos:

$$\|y\|_2^2 - \mathbb{E}(\|Y_{n+1}\|_2^2 | Y_n = y) =$$

$$\|y\|_2^2 - \left[z(\|y\|_2^2 + 1)(q + p) + q \left[\sum_{i \notin A(y)} a(y, i) + \|y\|_2^2 \right] + p \left[\sum_{i \notin A(y)} d(y, i) + \|y\|_2^2 \right] \right] =$$

$$\|y\|_2^2 - [z(\|y\|_2^2 + 1)(q + p) + q \sum_{i \notin A(y)} (\|y\|_2^2 + 1 + 2|y_i|) + p \sum_{i \notin A(y)} (\|y\|_2^2 + 1 - 2|y_i|)] =$$

$$\|y\|_2^2 [1 - z(p + q) - q(d - z) - p(d - z)] - [z(q + p) + q(d - z) + p(d - z) + 2(q - p) \sum_{i \notin A(y)} |y_i|] =$$

$$2(p - q) \sum_{i \notin A(y)} |y_i| - 1 = 2(p - q)\|y\| - 1 > \epsilon$$

onde a última desigualdade vale para $y \notin D$ ou seja, suficientemente longe da origem.

Deste modo fixado $0 < \delta < \frac{1}{2d}$, $\exists \gamma(\delta)$ tal que fora do disco D de raio $\gamma(\delta)$, em qualquer lugar que o processo esteja, a deriva em direção ao zero é no mínimo $\epsilon = \frac{1}{2d} - \delta$. Isto vem do fato de que suficientemente longe da origem, para o conjunto de pontos que estão a uma distância γ do zero, o passeio aleatório X_t^x tem uma deriva que em média o aproxima (na distância euclidiana) da origem, sendo esta deriva mínima nos pontos que estão sobre os eixos. Nestes pontos a deriva vale:

$$\frac{-1 + [\sqrt{(X_t^x)^2 + 1} - X_t^x](d-1)(2\lambda+1)}{2d}$$

Desta forma estamos em condições de adaptar uma técnica apresentada em Bramson e Griffeath [5]. Naquele trabalho eles estudaram o comportamento assintótico no tempo do modelo do votante viciado iniciando apenas com a origem ocupada, condicionado ao evento de que a infecção permaneça para sempre. Eles apresentaram um disco centrado na origem e crescente com o tempo que eventualmente fica contido (e para sempre) dentro do conjunto dos sítios infectados, com probabilidade 1. Aquele evento possui probabilidade estritamente positiva se e somente se a taxa com que um sítio infectado contagia um sítio saudável é maior do que a taxa com que um sítio saudável recupera um sítio infectado. Isto pode ser verificado através do fato que um passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$ tendo o zero como estado absorvente, extingui-se com probabilidade um caso seja simétrico ou tenha uma deriva para o zero. Por outro lado a probabilidade de eterna sobrevivência é positiva, se o passeio apresentar deriva contrária a origem. Isto é uma aplicação do clássico problema da ruína do jogador.

Nossa preocupação agora será estudar o comportamento assintótico no sentido do tempo de $\mathbf{EC}(\lambda)$ quando o parâmetro da exclusão λ está fixado. O que vamos verificar é que diferentemente do que ocorre no passeio aleatório simples simétrico (heurísticamente falando, o que ocorre quando λ é muito grande é que vemos muitas exclusões junto com uma pequena quantidade de criações e isto poderia nos levar a pensar que este modelo deveria ter as mesmas características de um processo com um número finito de passeios aleatórios independentes) a probabilidade de que a partir de um certo instante, um sítio fique desocupado para sempre é zero, para qualquer λ e qualquer dimensão. Mais do que isto, provamos que o espaço fica completamente preenchido com as partículas que vão sendo criadas, independentemente dos valores fixados para a dimensão e da taxa de exclusão. Em Salzano [21] encontramos uma prova que vale para $\lambda < 1$ em qualquer

dimensão. No próximo lema apresentaremos um processo X_t que é um submartingal. Esta abordagem nos foi sugerida por Tom Mountford.

Lema 1.2:

Para $\gamma > 0$, seja

$$X_t = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \xi_t^{\{0\}}(x) \gamma^{\|x\|}$$

Se $\gamma \in [\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1)$ então X_t é um submartingal com relação a $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_s^{\{0\}} : 0 \leq s \leq t\}$.

prova:

Queremos provar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(X_{t+h} | \mathcal{F}_t) - X_t}{h} \geq 0 \quad 1.2$$

Pela construção do processo, temos

$$\mathbb{E}(X_{t+h} | \mathcal{F}_t) =$$

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y \in \mathcal{V}(x)} p_h \xi_t^{\{0\}}(x) [1 - \xi_t^{\{0\}}(y)] [\gamma^{\|y\|} \frac{1}{1+\lambda} + (\gamma^{\|y\|} - \gamma^{\|x\|}) \frac{\lambda}{1+\lambda}] + X_t + o(h) \quad 1.3$$

onde

$$p_h = \mathbb{P} \left[\begin{array}{c} \text{exista uma flecha ligando dois sítios} \\ \text{vizinhos no intervalo } [t, t+h] \end{array} \right]$$

No caso $d = 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
(1.3) = & \sum_{x \geq 0} p_h \xi_t^{\{0\}}(x) [1 - \xi_t^{\{0\}}(x+1)] (\gamma^x [\gamma - \frac{\lambda}{1+\lambda}]) + p_h \xi_t^{\{0\}}(-1) [1 - \xi_t^{\{0\}}(0)] (1 - \frac{\gamma\lambda}{1+\lambda}) \\
& + \sum_{x \leq -2} p_h \xi_t^{\{0\}}(x) [1 - \xi_t^{\{0\}}(x+1)] (\gamma^{-x-1} [1 - \frac{\gamma\lambda}{1+\lambda}]) \\
& + \sum_{x \geq 1} p_h \xi_t^{\{0\}}(x) [1 - \xi_t^{\{0\}}(x-1)] (\gamma^{x-1} [1 - \frac{\gamma\lambda}{1+\lambda}]) + p_h \xi_t^{\{0\}}(0) [1 - \xi_t^{\{0\}}(-1)] (\gamma - \frac{\lambda}{1+\lambda}) \\
& + \sum_{x \leq -1} p_h \xi_t^{\{0\}}(x) [1 - \xi_t^{\{0\}}(x-1)] (\gamma^{-x} [\gamma - \frac{\lambda}{1+\lambda}]) + X_t + o(h)
\end{aligned}$$

ou seja, se $\gamma \in [\frac{\lambda}{1+\lambda}, 1]$ valem as desigualdades

$$\gamma - \frac{\lambda}{1+\lambda} \geq 0 \quad \text{e} \quad 1 - \frac{\gamma\lambda}{1+\lambda} \geq 0$$

e (1.2) está provado. Para d qualquer e definindo $\mathcal{V}_i(x)$ como os vizinhos de x na i -ésima cordenada, tomamos (1.3) como

$$\sum_{i=1}^d \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y \in \mathcal{V}_i(x)} p_h \xi_t^{\{0\}}(x) [1 - \xi_t^{\{0\}}(y)] [\gamma^{\|y\|} \frac{1}{1+\lambda} + (\gamma^{\|y\|} - \gamma^{\|x\|}) \frac{\lambda}{1+\lambda}] \right] + X_t + o(h)$$

onde para cada i fixado, temos a mesma tarefa que tivemos quando consideramos $d = 1$. Desta maneira (1.2) fica provado para todo d . ■

Tomando $\gamma < 1$, temos que X_t é uniformemente integrável pois

$$|X_t| \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \gamma^{\|x\|} < \infty.$$

Do fato de que X_t é um submartingal limitado (Billingsley [1]) temos que $\exists X$ integrável, tal que $X_t \xrightarrow{q.c.} X$, além disto temos que $\mathbb{E}(X_t) \rightarrow \mathbb{E}(X)$ onde nosso candidato natural para X é $c = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \gamma^{\|x\|}$.

Corolário 1.3:

$$X_t \rightarrow \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \gamma^{\|x\|}$$

prova:

Temos que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}(X_t)}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=1}^d \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y \in \mathcal{V}_i(x)} \frac{\lambda+1}{2d} \mathbb{E}[\xi_t^{\{0\}}(x)[1 - \xi_t^{\{0\}}(y)]] \left[\gamma^{\|y\|} \frac{1}{1+\lambda} + (\gamma^{\|y\|} - \gamma^{\|x\|}) \frac{\lambda}{1+\lambda} \right] \right]$$

O lema 1.2 nos garante que para $\gamma \in [\frac{\lambda}{1+\lambda}, 1]$ temos $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X]$ o que implica em $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathbb{E}[X_t]}{\partial t} = 0$.

Disto somado ao fato que $\mathbb{E}[X_t] \geq \mathbb{E}[x_0] = \gamma$ concluimos que $\forall x \in \mathbb{Z}^d, y \in \mathcal{V}_i(x)$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\xi_t^{\{0\}}(x)[1 - \xi_t^{\{0\}}(y)]] = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^d,$$

logo

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_t^{\{0\}}(x) \neq \xi_t^{\{0\}}(y)] = 0.$$

Desta forma

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\xi_t^{\{0\}}(x) = 0, \xi_t^{\{0\}}(y) = 0] = 0,$$

de onde concluimos a tese ■

Corolário 1.4:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t^{\{0\}}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

prova:

Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t^{\{0\}}(x) \neq 1 \Rightarrow A(x) = \{\omega : \liminf_t \xi_t^{\{0\}}(x) < 1\}$ é tal que $\mu(A(x)) \in]0, 1[$ desta forma, com probabilidade maior ou igual a $\mu(A(x))$:

$$\liminf_t \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \xi_t^{\{0\}}(y) \gamma^{\|y\|} \leq \sum_{y \in \mathbb{Z}^d / \{x\}} \gamma^{\|y\|} < \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \gamma^{\|y\|}$$

o que contradiz o corolário 1.3. ■

Uma majoração para o primeiro tempo

O próximo resultado mostra o fato de que é “muito difícil” que um ponto de $\mathbb{Z}^d$ venha a ser contaminado pelo processo em um tempo drasticamente inferior a sua norma. Como consequência da majoração exponencial encontrada (portanto somável em x), temos que o conjunto dos pontos que são atingidos em um tempo muito inferior a sua própria norma é finito com probabilidade 1. Este resultado segue imediatamente do acoplamento entre o modelo de Richardson com o modelo de $\mathbf{EC}(\lambda)$. A prova de que o resultado vale para o modelo de Richardson é bem conhecida (Durrett [7]) e segue essencialmente da prova do teorema de Cramèr Chernoff (Ellis [9]) para grandes desvios para soma de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas.

Proposição 1.5:

Existem constantes $c, C, \gamma \in (0, \infty)$ tais que:

$$\mathbb{P}(t_1^{\{0\}}(x) < c\|x\|) \leq C \exp^{-\gamma\|x\|}$$

prova:

Consideramos inicialmente a desigualdade (1.1) que implica em:

$$\left\{ t_1^{\{0\}}(x) < c\|x\| \right\} \subset \left\{ t^R(x) < c\|x\| \right\}$$

Se $t^R(x) < c\|x\|$, então existe algum caminho ativo ((*) caminho na estrutura de percolação avançando na direção do tempo e no sentido das setas duplas e simples) ligando $(0, 0)$ a $(x, c\|x\|)$ de tamanho $l \geq \|x\|$. A cada caminho ativo deste tipo corresponde uma sequência de sítios distintos $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_l = x$ tais que $\|x_{i+1} - x_i\| = 1 \ \forall i = 1, \dots, l$ e tal que restrito ao conjunto $\{x_0, \dots, x_l\}$ o processo contamina x antes do tempo $c\|x\|$.

$$\mathbb{P}(t^R(x) < c\|x\|) \leq \mathbb{P}(\exists (*) \text{ caminho ativo de tamanho } l \geq \|x\|)$$

$$\leq \sum_{l=\|x\|}^{\infty} \mathbb{P}(\exists (*) \text{ caminho ativo de tamanho } l) \leq \sum_{l=\|x\|}^{\infty} (2d)^l \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{l-1} Z_i < c\|x\|\right) = \quad 1.4$$

com $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ um conjunto de variáveis aleatórias independentes exponenciais com taxa $\alpha = \frac{1+\lambda}{2d}$.

Agora, por sua vez $\forall \theta > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{l-1} Z_i < c\|x\|\right) = \mathbb{P}[\exp(-\theta \sum_{i=0}^{l-1} Z_i) > \exp(-\theta lc)] \leq$$

$$\frac{\mathbb{E}\left(\exp(-\theta \sum_{i=0}^{l-1} Z_i)\right)}{\exp(-\theta lc)} = \frac{\left[\mathbb{E}\left(\exp(-\theta Z_1)\right)\right]^l}{\exp(-\theta lc)} =$$

$$\exp(\theta lc) \left(\int_0^\infty \alpha \exp(-z(\theta + \alpha)) dz \right)^l = \exp(\theta lc) \left(\frac{\alpha}{\theta + \alpha} \right)^l$$

assim

$$(1.4) \leq \sum_{l=||x||}^{\infty} \exp[l \log(2d) + \theta lc - l \log(\frac{\theta + \alpha}{\alpha})]$$

chamando $g_c(\theta, \alpha) = \log(\frac{\theta + \alpha}{\alpha}) - \theta c$, temos

$$\frac{\partial g_c(\theta, \alpha)}{\partial \theta} = \frac{\alpha}{\alpha + \theta} - c, \text{ logo } \frac{\partial g_c(\theta, \alpha)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha}{c} - \alpha,$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} [\log(2d) - g_c(\frac{\alpha}{c} - \alpha, \alpha)] = \infty$$

o que nos diz que $\forall \lambda$ é possível encontrar $0 < c, \theta$ tais que $[\log(2d) - g_c(\theta, \alpha)] < 0$. Isto completa a prova. ■

Uma minoração para o segundo tempo

Os próximos quatro resultados tratam de fornecer um hipercone (disco centrado na origem com o raio em função do tempo), onde com probabilidade um a mancha definitiva, ou o conjunto de pontos que já atingiu o segundo instante de ocupação, terá sua passagem assegurada.

Teorema 1.6:

Seja $D(\delta t) = \{y : ||y||_2 \leq \delta t\}$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\xi_t^{\{0\}} \supset D(\delta t) \cap \mathbb{Z}^d$$

para todo t suficientemente grande com probabilidade 1.

prova:

A prova deste resultado é uma adaptação de uma idéia apresentada por Bramson e Griffeath [5] para o modelo do votante viciado. Inicialmente apresentaremos algumas definições que também serão úteis para o enunciado e a prova de um resultado intermediário.

Seja $\beta, \mu > 0$. Para todo $k \geq 0$, definimos:

$$\beta_k = 2^k \beta, s_k = \frac{\beta_k}{\mu}, t_k = s_1 + s_2 + \dots + s_k, t_0 = 0 \text{ e } R(k) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_2 < \beta_k\}.$$

A idéia principal é montar uma estrutura no espaço $\times$ tempo de modo a termos uma “discretização” do evento

$$\xi_t^{\{0\}} \supset D(\delta t) \cap \mathbb{Z}^d \quad \forall t > t_0$$

onde nesta “discretização” podemos efetuar os cálculos de modo simplificado.

Inicialmente definimos o evento:

$$E_{x,c}^\Lambda = \{\exists s < \infty : B_{x,ct} \subset \xi_t^\Lambda \quad \forall t > s\}$$

onde $x \in \mathbb{Z}^d, c > 0, B_{x,ct} = D(ct) + x$ e Λ uma configuração com uma quantidade finita de sítios ocupados. Seja também

$$\kappa_R = \min\{k \geq 1 : R(k) \not\subset \xi_t^{R(0)} \text{ para algum } t \in [t_k, t_{k+1}]\}$$

A observação chave é que, para algum c^* apropriado e $\forall c < c^*$, vale:

$$\{\kappa_R = \infty\} \subset E_{0,c}^{D(\beta)}$$

Prosseguindo, definimos:

$$F_k = \{R(k) \not\subset \xi_t^{R(0)} \text{ para algum } t \in [t_k, t_{k+1}]\}$$

e

$$G_k = \{R(k) \subset \xi_{t_k}^{R(0)}\}$$

e observamos que:

$$IP(\kappa_R = k) \leq IP(F_k | G_{k-1})$$

além do fato que:

$$IP(\kappa_R < \infty) = IP(\cup_{k=1}^{\infty} \{\kappa_R = k\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} IP(\kappa_R = k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} IP(F_k | G_{k-1})$$

Dito isto e lembrando que $G_0 = \{R(0) \subset \xi_{t_k}^{\{0\}}\}$ onde $R(0) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_2 < \beta\}$, precisaríamos mostrar primeiro que para todo $\epsilon > 0$, $\exists \beta$ suficientemente grande tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} IP(F_k | G_{k-1}) < \epsilon$$

além de que a probabilidade de preenchermos um disco de raio R suficientemente grande, em algum momento é um. Isto é feito nos lemas 1.7 e 1.8 apresentados a seguir. Como consequência destes dois resultados concluiremos a prova pois saberemos que se $\xi_t^{\{0\}}$ contém $R(0)$ para algum t , então com alta probabilidade, ele conterá $R(k)$ para todo tempo $s \in [t + t_k, t + t_{k+1}]$. Como $t_{k+1} \approx \frac{2\beta_{k+1}}{\mu} = \frac{4\beta_k}{\mu}$ e $R(k)$ possui raio β_k , concluimos que o teorema 1.6 vale quando $\delta < \frac{\mu}{4}$. Com os lemas 1.7 e 1.8, o teorema fica provado. ■

Lema 1.7:

Seja $\sigma_R^\Lambda = \min\{t : \xi_t^\Lambda \supset B_{x,R} \text{ para algum } x \in \mathbb{Z}^d\}$

Então:

$$\mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} < \infty) = 1$$

prova:

Observe que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n < \sigma_R^{\{0\}} \leq n+1) &= \sum_{\Lambda \neq \emptyset} \mathbb{P}(\xi_n^{\{0\}} = \Lambda, \sigma_R^{\{0\}} > n) \mathbb{P}(\sigma_R^\Lambda \leq 1) \\ &\geq \sum_{\Lambda \neq \emptyset} \mathbb{P}(\xi_n^{\{0\}} = \Lambda, \sigma_R^{\{0\}} > n) \mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} \leq 1) = \mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} \leq 1) \mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} > n) \end{aligned}$$

assim

$$\mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} > n) - \mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} > n+1) \geq \mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} \leq 1) \mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} > n)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} > n+1) \leq (1 - \mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} \leq 1))^n$$

como

$$\mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} \leq 1) = p > 0,$$

temos então que $\mathbb{P}(\sigma_R^{\{0\}} = \infty) = 0$. ■

Lema 1.8:

Se μ é suficientemente pequeno, então:

$$\mathbb{P}(\xi_t^{R(k-1)} \not\supseteq R(k) \ \forall \ t \in [s_k, s_k + s_{k+1}]) \leq p_k(\beta)$$

onde

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(\beta) \rightarrow 0 \text{ quando } \beta \rightarrow \infty$$

prova:

Da equação dual temos que:

$$\mathbb{P}(x \notin \xi_t^{R(k-1)}) = \mathbb{P}(\tilde{\xi}_t^{\{x\}} \cap R(k-1) = \emptyset) \leq \mathbb{P}(X_t^x \notin R(k-1))$$

Observe agora que se $y \in R(k)$, então existe $x \in \partial R(k)$ tal que:

$$\mathbb{P}(\tilde{\xi}_t^{\{y\}} \cap R(k-1) = \emptyset) \leq \mathbb{P}(\tilde{\xi}_{s_k}^{\{x\}} \cap R(k-1) = \emptyset)$$

$\forall t \in [s_k, s_k + s_{k+1}]$. O que a desigualdade nos diz é que partindo do conjunto $R(k-1)$, a probabilidade de que um ponto fixado na bola $R(k)$ não esteja ocupado em um determinado instante $t \in [s_k, s_k + s_{k+1}]$ é maximizada quando tomamos este ponto o mais distante possível da origem, portanto em $\partial R(k)$ e no menor tempo, portanto com $t = s_k$. Desta forma, para ocupar aquela posição o processo teria que andar mais em um tempo menor.

Se considerassemos X_t^x com a maior tendência possível em direção ao centro do reticulado (o que estará ocorrendo a medida que k aumenta), no caso $\frac{1}{2d}$, a distância a ser vencida seria de $2^k \beta - 2^{k-1} \beta = \frac{\beta_k}{2}$ em um tempo de $\frac{\beta_k}{\mu}$. Tomando $\mu < \frac{1}{d}$ esta não seria uma tarefa difícil, sendo aquela probabilidade pequena.

Para estimar $\mathbb{P}(X_t^x \notin R(k-1))$ para x, t definidos acima, vamos usar a família de processos a tempo contínuo sobre $[-\gamma, \infty) \subset \mathbb{R}$ definidos por:

$$Z_t^\alpha = \|X^x(\frac{2t}{2\lambda + 1})\|_2 - \gamma$$

para $\gamma > 0$ tal que o passeio imerso apresente deriva para o zero em $\mathbb{Z}^d \setminus D(\gamma)$ sendo $\alpha = \|x\|_2 - \gamma$. Agora estamos em condições de utilizar o seguinte teorema, cuja prova está em Bramson & Griffeath [5] e que apenas reproduzimos aqui.

Teorema 1.9: Bramson & Griffeath [5]

Seja Z_t^α um processo de saltos a tempo contínuo com tempo de salto exponencial independente de média 1, onde $Z_0^\alpha = \alpha$. Seja N_t o número de saltos feitos por Z_t^α antes do tempo t e Y_n^α o processo discreto imerso da posição de Z_t^α depois de n saltos. Assuma N_t e Y_n^α independentes e seja $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0^\alpha, \dots, Y_n^\alpha)$.

Assuma ainda:

- (i) $|Y_n^\alpha - Y_{n-1}^\alpha| \leq M < \infty \quad \forall n$;
- (ii) $\mathbb{E}[Y_n^\alpha - Y_{n-1}^\alpha / \mathcal{F}_{n-1}] \leq -(\nu + \epsilon)$ sobre $\{Y_{n-1}^\alpha \geq 0\}$ com $\nu, \epsilon > 0$

Então existem $0 < k, \delta < \infty$, dependendo somente de ϵ, ν e M tais que:

$$\mathbb{P}(Z_t^\alpha \geq y) \leq k \exp(-\delta y)(1 + \exp(-\delta(\nu t - \alpha)))$$

prova:

A desigualdade segue de

$$\mathbb{E}[\exp^{\delta Z_t^\alpha}] \leq k(1 + \exp^{-\delta(\nu t - \alpha)})$$

quando utilizamos a desigualdade exponencial de Chebyshev para $\delta > 0$. Por sua vez, a desigualdade acima vem da desigualdade diferencial, que provaremos a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[\exp^{\delta Z_t^\alpha}] \leq -\delta \nu \mathbb{E}[\exp^{\delta Z_t^\alpha}] + \delta \nu + \exp^{\delta M} \quad 1.5$$

Da a independência de Nt e Y_n^α , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[\exp^{\delta Z_t^\alpha}] &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \exp^{-t} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}[\exp^{\delta Y_n^\alpha}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \exp^{-t} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}[\exp^{\delta Y_{n+1}^\alpha} - \exp^{\delta Y_n^\alpha}]
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Agora tomamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp^{\delta Y_{n+1}^\alpha} - \exp^{\delta Y_n^\alpha}] &= \mathbb{E}[\exp^{\delta Y_n^\alpha} (\exp^{\delta(Y_{n+1}^\alpha - Y_n^\alpha)} - 1)] \\
&= \mathbb{E}[\exp^{\delta Y_n^\alpha} \mathbb{E}[\exp^{\delta(Y_{n+1}^\alpha - Y_n^\alpha)} - 1 | \mathcal{F}_n]]
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Da linearidade da função exponencial na vizinhança da origem e das hipóteses (i) e (ii), temos para δ suficientemente pequeno

$$\mathbb{E}[\exp^{\delta(Y_{n+1}^\alpha - Y_n^\alpha)} - 1 | \mathcal{F}_n] \leq -\delta\nu \tag{1.8}$$

para $Y_n^\alpha \geq 0$. Por outro lado, para $Y_n^\alpha < 0$

$$\mathbb{E}[\exp^{\delta(Y_{n+1}^\alpha - Y_n^\alpha)} - 1] \leq \exp^{\delta M} \tag{1.9}$$

De (1.8) e (1.9), (1.7) é no máximo

$$\mathbb{E}[\exp^{\delta Y_n^\alpha} (-\delta\nu \mathbf{1}_{R^+}(Y_n^\alpha) + \exp^{\delta M} \mathbf{1}_{R^-}(Y_n^\alpha))] \leq -\delta\nu \mathbb{E}[\exp^{\delta Y_n^\alpha}] + \delta\nu + \exp^{\delta M}$$

o que prova que

$$\mathbb{E}[\exp^{\delta Y_{n+1}^\alpha} - \exp^{\delta Y_n^\alpha}] \leq -\delta\nu \mathbb{E}[\exp^{\delta Y_n^\alpha}] + \delta\nu + \exp^{\delta M}$$

Usando a desigualdade acima em (1.6), temos a desigualdade (1.5) provada e por consequência o teorema está provado ■

De posse do último resultado, o que precisamos é tomar:

$$\alpha = \beta_k - \gamma, \quad t \geq s_k = \frac{\beta_k}{\mu} \text{ e } \nu = \frac{1}{2d} - 2\epsilon$$

o que é possível para $\mu < \frac{1}{2d}$. Tomando $\beta > 2\gamma$ e fazendo $y = \frac{\beta_{k-1}}{2}$, temos:

$$\mathbb{P}(x \notin \xi_t^{R(k-1)}) \leq 2k \exp\left(\frac{-\delta\beta_{k-1}}{2}\right)$$

para $x \in R(k)$ e $t \in [s_k, s_k + s_{k+1}]$. Para estendermos este resultado para todo $t \in [s_k, s_k + s_{k+1}]$, observamos que se $x \notin \xi_t^{R(k-1)}$, então, com probabilidade maior ou igual a $\exp(-(\lambda + 1))$ ele permanecerá vazio por pelo menos mais uma unidade de tempo, onde a desigualdade vem do fato que este evento seria menos provável, quanto maior o número de vizinhos ocupados o sítio x possuir. Ali, consideramos a situação onde todos os vizinhos estão ocupados. Então, temos:

$$\exp(-(\lambda + 1))\mathbb{P}(x \notin \xi_t^{R(k-1)} \text{ para algum } t \in [s_k, s_k + s_{k+1}]) \leq$$

$$\int_{s_k}^{s_k + s_{k+1}} \mathbb{P}(x \notin \xi_{[s, s+1]}^{R(k-1)} | x \notin \xi_s^{R(k-1)}) \mathbb{P}(x \notin \xi_s^{R(k-1)}) ds \leq$$

$$\int_{s_k}^{s_k + s_{k+1} + 1} \mathbb{P}(x \notin \xi_s^{R(k-1)}) ds = \mathbb{E} \left[\int_{s_k}^{s_k + s_{k+1} + 1} 1_{\{x \notin \xi_s^{R(k-1)}\}} ds \right] =$$

$$\mathbb{E} \left[\left| \{t \in [s_k, s_k + s_{k+1} + 1] : x \notin \xi_t^{R(k-1)}\} \right| \right] \leq (1 + s_{k+1} 2k) \exp\left(\frac{-\delta\beta_{k-1}}{2}\right)$$

e consequentemente:

$$\mathbb{P}(\xi_t^{R(k-1)} \not\supset R(k) \text{ para algum } t \in [s_k, s_k + s_{k+1}]) \leq$$

$$|R(k)| \exp(\lambda + 1)(1 + s_{k+1}2k) \exp\left(\frac{-\delta\beta_{k-1}}{2}\right) \leq C \exp^{-\gamma\beta(k)}$$

o que conclui a prova do lema 1.8. ■

Como conclusão deste capítulo, observamos que o fato de a variável $t_2(x)$ ser finita quase-certamente pode ser apresentada como um corolário do teorema 1.6. Qualquer que seja o valor de δ temos como consequência o resultado de que qualquer $x \in \mathbb{Z}^d$ fica definitivamente ocupado para todo $t > t(x, \omega)$ finito.

Capítulo 2

Introdução

Neste capítulo iremos abordar questões do ponto de vista assintótico no sentido do tempo quando o parâmetro da exclusão λ está fixado. Vamos mostrar que existe um conjunto A convexo tal que para todo $\epsilon > 0$ e $i = 1, 2$

$$(1 - \epsilon)tA \subset \zeta_t^i \subset (1 + \epsilon)tA$$

para todo t suficientemente grande, com probabilidade 1. Do fato que $\zeta_t^2 \subset \xi_t^{\{0\}} \subset \zeta_t^1$ temos o mesmo resultado para $\xi_t^{\{0\}}$. Para fazer isto utilizaremos o passeio aleatório imerso

definido no capítulo 1, uma estimativa de decaimento exponencial para $t_2(0)$ e o resultado de Durrett e Griffeath [8] que provaram um teorema da forma para uma classe de processos de Markov assumindo valores em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, chamados modelos de crescimento, com as seguintes características:

a) $\emptyset$ é um estado absorvente,

b) Invariância por translação:

$$x + \eta_t^A \text{ possui a mesma distribuição de } \eta_t^{x+A},$$

c) Atratividade:

$$\text{Se } A \subset B \Rightarrow \exists \text{ acoplamento tal que } \eta_t^A \subset \eta_t^B \forall t \geq 0,$$

d) Alcance local:

$$\exists L < \infty \text{ tal que se } A \cap B_{0,L} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(\eta_t^A(0) = 1) = o(t)$$

Verificado que o processo de $\text{EC}(\lambda)$ é um modelo de crescimento, o que o teorema garante é a existência de um conjunto convexo A_λ (que depende de λ), tal que condicionado ao evento $\{\inf\{t : \xi_t^{\{0\}} = \emptyset\} = \infty\}$ temos para todo $\epsilon > 0$,

$$(1 - \epsilon)tA_\lambda \subset \zeta_t^1 \subset (1 + \epsilon)tA_\lambda$$

para todo t suficientemente grande. A condição que teríamos de verificar para nos certificarmos que aquele resultado se aplica ao nosso modelo é a de que existem constantes $\gamma, c, C \in (0, \infty)$ tais que:

$$\mathbb{P}(t_1(x) > t) \leq C \exp^{-\gamma t}, \quad \|x\| < ct$$

Para confirmarmos a validade desta condição basta pensarmos no passeio aleatório imerso definido no capítulo 1. Para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ definimos s_1 como sendo o primeiro instante em que o passeio encontra o sítio x ou a borda da região onde não existe deriva para o centro do reticulado. Caso o passeio encontre primeiro a borda, e isto sempre irá ocorrer quando x estiver fora da bola, definimos s_2 como o primeiro instante em que o

passeio atinge x ou a borda novamente. Repetimos o processo até o instante em que o passeio atinge o sítio x . Depois do instante em que o passeio atinge x , todos os subsequentes s_i são tomados como zeros. Para $n = |\{i : s_i \neq 0\}|$ temos que

$$t_1(x) \leq \sum_{i=1}^n s_i$$

Observamos que com exceção de s_1 , todas as variáveis s_i assim definidas, podem ser majoradas pela variável definida da mesma forma mas para o ponto sobre a borda mais distante do sítio x além do fato que a quantidade n que deve ser somada de modo a obtermos $t_1(x)$, o tempo para atingir o sítio x , possui distribuição geométrica. A variável s_1 tem cauda exponencial pois temos um passeio aleatório dentro de um espaço de estados finito que é a bola onde o passeio não tem deriva para o centro. Para todos os outros tempos, caso o passeio comece indo para fora da bola, o tempo até atingir a borda novamente, possui cauda exponencial pois estamos na região com deriva. Caso o primeiro passo seja dado em direção à origem, estamos no caso de um passeio aleatório sobre uma quantidade finita de estados. A partir de c , tomamos $\gamma = \min\{\gamma(x) : \|x\| < ct\}$ e $C = \max\{C(x) : \|x\| < ct\}$. Neste caso não precisamos fazer nenhum tipo de condicionamento já que o corolário 1.8 nos diz que para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda \in (0, \infty)$ e $\forall d$ temos $\mathbb{P}(t_2(x) < \infty) = 1$. Isto mostra o teorema da forma para ζ_t^1 .

Agora queremos mostrar este resultado para ζ_t^2 . Para isto mostraremos primeiro que a probabilidade de que a ocupação definitiva aconteça já a partir do instante inicial, é estritamente maior do que zero.

Lema 2.1:

Para $t_2(0) = \sup\{t : \xi_t^{\{0\}}(0) = 0\}$, vale

$$\mathbb{P}(t_2(0) = 0) = p_2 > 0$$

prova:

Como consequência do teorema 1.6, temos que $\mathbb{P}(t_2(0) < \infty) = 1$, o que implica que $\exists t < \infty$ tal que $\mathbb{P}(t_2(0) < t) > 0$.

Desta forma, para este t fixado

$$0 < \mathbb{P}(t_2(0) < t) = \sum_{\substack{\Lambda \text{ finito} \\ \{0\} \in \Lambda}} \mathbb{P}(\xi_t^{\{0\}} = \Lambda) \mathbb{P}(\xi_s^{\{0\}}(0) = 1 \forall s \geq t | \xi_t^{\{0\}} = \Lambda)$$

logo $\exists \Lambda$ finito contendo a origem, tal que

$$0 < \mathbb{P}(\xi_s^{\{0\}}(0) = 1 \forall s \geq t | \xi_t^{\{0\}} = \Lambda) = \mathbb{P}(\xi_s^\Lambda(0) = 1, \forall s \geq 0)$$

Para este Λ podemos afirmar

$$\mathbb{P}(\xi_s^{\{0\}}(0) = 1, \forall s \geq 0) \geq \mathbb{P}(\xi_t^{\{0\}} \supset \Lambda, \xi_s^{\{0\}}(0) = 1 \forall 0 \leq s \leq t) \mathbb{P}(\xi_s^\Lambda(0) = 1 \forall s \geq 0)$$

Notamos agora que o evento $\{\xi_t^{\{0\}} \supset \Lambda, \xi_s(0) = 1 \forall 0 \leq s \leq t\}$ também possui probabilidade estritamente positiva pois depende de uma região finita do tempo e do espaço. Com isto concluímos que $\mathbb{P}(\xi_s^{\{0\}}(0) = 1 \forall s \geq 0) > 0$. ■

Uma consequência deste resultado é que $\forall x \in \mathbb{Z}^d$ temos que $\mathbb{P}(t_1(x) = t_2(x)) > 0$. Isto pode ser verificado através da observação que no instante $t_1(x)$ vários outros sítios podem estar ocupados, tornado mais provável (pela atratividade) de que a ocupação definitiva se inicie naquele mesmo instante do que foi para a origem no instante $t = 0$ onde existia apenas uma partícula.

Cauda exponencial do segundo tempo

O resultado seguinte nos diz que o segundo tempo de ocupação para a origem é dominada por uma variável aleatória com cauda exponencial para todo λ e d . Dai concluímos

que esta majoração também serve para a distância entre os dois tempos de ocupação para os outros sítios do reticulado.

Teorema 2.2:

$\exists 0 < \gamma, C < \infty$ (C e γ dependem de λ e d), para os quais:

$$\mathbb{P}(t_2(0) > t) \leq Ce^{-\gamma t}$$

prova:

Para cada trajetória do processo $\xi_t^{\{0\}}$, definimos os conjuntos de tempos aleatórios O_i, D_i para $i \in \mathbb{N}$ com $O_0 = D_0 = 0$.

$$D_i = \min\{\inf\{t > O_{i-1} : \xi_t^{\{0\}}(0) = 0\}, t_2(0)\}$$

$$O_i = \min\{\inf\{t > D_i : \xi_t^{\{0\}}(0) = 1\}, t_2(0)\}$$

além de $n = \max\{i : O_i - D_i > 0\}$. Em outras palavras, temos os tempos

a) $D_0 = 0, D_1, D_2, \dots, D_n$, onde

$$\xi_{D_i}^{\{0\}}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \xi_{D_i^-}^{\{0\}}(0) = 1$$

b) $O_0 = 0, O_1, O_2, \dots, O_n$, onde

$$\xi_{O_i}^{\{0\}}(0) = 1 \quad \text{e} \quad \xi_{O_i^-}^{\{0\}}(0) = 0$$

Do lema 2.1 temos $n = n(\omega)$ definido implicitamente acima é menor ou igual em distribuição a variável geométrica N com probabilidade de sucesso igual a p_2 . Nos instantes O_i ($i < n$), ocorre uma nova tentativa de ocupação definitiva da origem com condições mais favoráveis do que quando $t = 0$. A partir de $n(\omega)$, $\forall k \geq 1$, tomamos $D_{n+k} = O_{n+k} = O_n$.

Observamos agora que para $\{e_1, \dots, e_d\}$, a base canônica de $\mathbb{R}^d$ e para todo $k \leq n(\omega)$, existe um conjunto aleatório A que contém pelo menos um dos elementos do conjunto $\mathcal{E} = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$, tal que $\xi_{D_i}^{\{0\}}(x) = 1$ para todo $x \in A$. Isto acontece pois no instante D_i aparece uma seta de exclusão ligando a origem a algum elemento y de $\mathcal{E}$, sendo este y tal que $\xi_{D_i}^{\{0\}}(y) = 0$.

Usando a propriedade forte de Markov, a atratividade do processo de $\mathbf{EC}(\lambda)$ e o teorema 1.9, podemos afirmar que $\exists 0 < C_1, \gamma_1 < \infty$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(O_i - D_i > s) &= \sum_A \mathbb{P}(\{\inf_t \{\xi_{D_i+t}^A(0) = 1\} > s\}, \xi_{D_i}^0 = A) \leq \\ &\mathbb{P}(\inf_t \{\xi_{D_i+t}^{\{e_1\}}(0) = 1\} > s) \leq C_1 \exp^{-\gamma_1 s} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por outro lado, verificamos que nos instantes O_i , um conjunto aleatório de pontos contendo a origem, que chamaremos de B_i , estará ocupado. Para $B := B_1$ (aleatório) definimos:

$$t_2^B(0) = \sup\{t : \xi_t^B(0) = 0\}$$

e pela atratividade verificamos que é possível construir um acoplamento onde $t_2(0) \geq t_2^B(0)$. Com o passeio aleatório $X_t^{\{y\}}$ definido no primeiro capítulo e com a utilização da auto dualidade de $\mathbf{EC}(\lambda)$, verificamos que definindo

$$\mathcal{M}(s) = \{ \text{existe uma seta de exclusão no instante } s, \text{ ligando a origem a algum } y \in \mathcal{E} \}$$

$\forall y \in \mathcal{E}, \exists 0 < C_2, \gamma_2 < \infty$ tal que:

$$\mathbb{P}(D_1 = s)ds = \mathbb{P}(\{\xi_t^{\{0\}}(0) = 1 \forall t < s, \xi_s^{\{0\}}(0) = 0, \mathcal{M}(s)\})ds =$$

$$\mathbb{P}(\{\tilde{\xi}_t^y(0) = 0 \ \forall t \leq s\})\mathbb{P}(\mathcal{M}(s))ds \leq C_2 \exp^{-\gamma_2 s} ds \quad 2.2$$

A última igualdade se verifica pois a partícula que estava ocupando a origem pode saltar para qualquer $y \in \mathcal{E}$ com igual probabilidade. Para o salto ocorrer, aquele sítio deve estar vazio no instante s . Tomando o dual a partir daquele y , teremos que este não poderia visitar a origem antes do tempo dual s . A última desigualdade vale pois $\mathbb{P}(\mathcal{M}(s))$ é a densidade dos processos de Poisson entre a origem e seus vizinhos e a probabilidade do primeiro instante de ocupação da origem ser depois do instante s , pode ser majorada pelo passeio $X_t^{e_1}$ cuja densidade para o primeiro instante de visita a origem possui cauda com decaimento exponencial (Feller [10]). Observamos agora que $t_2(0)$ assume o valor zero com probabilidade p_2 (definida no lema 2.1) e pode assumir o valor de $D_1 + O_1 + t_2^B(0)$ (B aleatório contendo a origem) com probabilidade $(1 - p_2)$. Deste modo a seguinte desigualdade vale em distribuição

$$D_1 + O_1 + t_2^B(0) \leq D_1 + O_1 + t_2(0)$$

e isto é suficiente para verificarmos que

$$\mathbb{E}[\exp^{\theta t_2(0)}] \leq p_2 + \mathbb{E}[\exp^{\theta[D_1+O_1]}]\mathbb{E}[\exp^{\theta t_2^B(0)}](1 - p_2)$$

Para θ suficientemente pequeno encontramos

$$\mathbb{E}[\exp^{\theta t_2(0)}] \leq [1 - \mathbb{E}[\exp^{\theta[D_1+O_1]}](1 - p_2)]^{-1}$$

Logo, usando a desigualdade de Chebyshev exponencial para $\theta > 0$

$$\mathbb{P}(t_2(0) > t) = \exp^{-\theta t} [p_2 + \mathbb{E}[\exp^{\theta[D_1+O_1]}]\mathbb{E}[\exp^{\theta t_2^B(0)}](1 - p_2)]$$

$$\leq \exp^{-\theta t} p_2 \left[1 + \frac{\mathbb{E}[\exp^{\theta[D_1+O_1]}]}{1 - \mathbb{E}[\exp^{\theta[D_1+O_1]}]} \right] \leq C \exp^{-\gamma t}$$

sendo que a última desigualdade vem de (2.1) e (2.2). ■

Enrique Andjel sugeriu uma forma diferente de provar este resultado. Sua idéia passa por ignorar as criações em um trecho do intervalo $[0, t]$ e utilizar o teorema de Liggett que compara o exclusão simples com o passeio aleatório independente. A forma que a prova esta apresentada aqui é feita a partir de um resultado apresentado em um trabalho de Camarota e Ferrari [6] que foi sugerido a mim pelo segundo autor. Como dissemos anteriormente, o resultado acima tem como consequência que a variável $t_2(0)$ possui todos os momentos. Em particular $\mathbb{E}(t_2(0)) < \infty$. Observamos então que $\forall x \in \mathbb{Z}^d$ a seguinte desigualdade vale em distribuição:

$$t_2(x) - t_1(x) \leq t_2(0) \tag{2.3}$$

já que possivelmente no instante $t_1(x)$ vários outros sítios estão ocupados o que colaboraria para que o tempo de espera até a ocupação definitiva fosse menor do que $t_2(0)$ em distribuição. Em outras palavras temos que para todo λ fixado, o tempo que um sítio leva para ficar ocupado definitivamente não é muito maior do que o tempo que ele leva para ser infectado pela primeira vez. A diferença entre estes dois tempos possui um majorante que não depende de x . Desta forma, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ valem as desigualdades em distribuição:

$$\frac{t_1(nx)}{n} \leq \frac{t_2(nx)}{n} = \frac{t_1(nx)}{n} + \frac{t_2(nx) - t_1(nx)}{n} \leq \frac{t_1(nx)}{n} + \frac{t_2(0)}{n}$$

onde pelo teorema 2.2, $t_2(0)$ é tal que $\mathbb{P}(t_2(0) > t) \leq C \exp^{-\gamma t}$. Assim segue que para todo $\epsilon > 0$ existe A_λ tal que: $t(1 - \epsilon)A_\lambda \subset \zeta_t^2 \subset t(1 + \epsilon)A_\lambda$ com probabilidade 1. Uma última observação é que como $\zeta_t^2 \subset \xi_t^{\{0\}} \subset \zeta_t^1$, temos novamente este resultado para $\xi_t^{\{0\}}$.

Capítulo 3

Introdução

Neste capítulo iremos tratar do comportamento assintótico da forma limite em relação ao parâmetro da exclusão. Para isto vamos adaptar uma prova apresentada em Bramson *et al* [4] para o caso bi-dimensional. Para isto definimos:

$$X_t = \max\{x \in \mathbb{Z} : \xi_t^{\{0\}}(x, y) = 1 \text{ para algum } y \in \mathbb{Z}\}$$

onde X_t é a linha vertical ocupada mais a direita. Inicialmente vamos mostrar que X_t possui todos os momentos finitos.

Lema 3.1:

Para todo k, t fixados

$$\mathbb{E} \left[\frac{X_t}{t\sqrt{\lambda}} \right]^k < \infty$$

prova:

Inicialmente tomamos o modelo de Richardson $\bar{\xi}_t^{\{0\}}$ com taxa $\frac{\lambda+1}{4}$ e acoplamos os processos $\xi_t^{\{0\}}$ e $\bar{\xi}_t^{\{0\}}$ de forma que $\xi_t^{\{0\}} \subset \bar{\xi}_t^{\{0\}} \forall t \geq 0$. Para ver que isto é possível basta observar que quando uma partícula é criada ou salta no modelo de $\text{EC}(\lambda)$, outra partícula é adicionada em $\bar{\xi}_t^{\{0\}}$, a menos que os dois sítios envolvidos já estejam ocupados em $\bar{\xi}_t^{\{0\}}$. Uma vez que um sítio se torne ocupado em $\bar{\xi}_t^{\{0\}}$, nunca mais será desocupado.

Agora definimos:

$$X_t^s = \max\{x \in \mathbb{Z} : \bar{\xi}_t^{\{0\}}(x, y) = 1 \text{ para algum } y \in \mathbb{Z}\}$$

$$X_t^i = \min\{x \in \mathbb{Z} : \bar{\xi}_t^{\{0\}}(x, y) = 1 \text{ para algum } y \in \mathbb{Z}\}$$

e com os processos acoplados, temos que fixados λ e t :

$$X_t^i \leq X_t \leq X_t^s$$

onde X_t^i é não crescente e X_t^s é não decrescente em t .

Por sua vez:

$$\mathbb{P}(X_t^s \geq k) = \mathbb{P}\left[\bigcup_{z=k}^{\infty} \{z - \text{caminhos}\}\right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{z=k}^{\infty} \mathbb{P}(\{z - \text{caminhos}\}) \leq \sum_{z=k}^{\infty} 3^z \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^z X_i \leq t\right) \\
&\leq \sum_{z=k}^{\infty} 3^z C \exp^{-\gamma z} = \sum_{z=k}^{\infty} C \exp^{-\gamma z} = C \exp^{-\gamma k}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\{z - \text{caminhos}\}$ são os caminhos de comprimento z ligando a origem a algum sítio cuja coordenada seja maior do que k e X_i possuem distribuição exponencial de taxa $\lambda + 1$ independentes. De 3.1 temos

$$0 < \mathbb{E}[|X_t|^k] \leq \max\{\mathbb{E}[|X_t^i|^k], \mathbb{E}[|X_t^s|^k]\} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

■

Agora vamos introduzir uma idéia de velocidade média da borda de $\xi_t^{\{0\}}$. Em Bramson *et al* [4], esta velocidade foi definida iniciando-se com uma medida invariante. Aqui gostaríamos de pensar em uma definição de velocidade para o processo iniciando apenas com uma partícula na origem.

Deste modo podemos definir:

$$v(\lambda, t) = \frac{\mathbb{E}(X_t)}{t}$$

Observe que

$$\mathbb{E}(X_{t+s} - X_t) \geq \mathbb{E}(X_s)$$

o que significa que $\mathbb{E}(X_t)$ é superaditiva e portanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(X_t)}{t} = \sup_t \frac{\mathbb{E}(X_t)}{t}$$

Posição projetada mais a direita na linha horizontal

Gostariamos de estudar o comportamento de

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(\lambda, t)}{\sqrt{\lambda}}$$

e neste sentido apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 3.2:

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_t}{t\sqrt{\lambda}}\right) \leq 1$$

prova:

Para fazer isto vamos adaptar a prova apresentada em Bramson *et al* [4], escrevendo:

$$\begin{aligned} \frac{v(\lambda, t)}{\sqrt{\lambda}} &= \mathbb{E}\left(\frac{X_t}{t\sqrt{\lambda}}; \{X_t < yt\sqrt{\lambda}\}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{X_t}{t\sqrt{\lambda}}; \{X_t \geq yt\sqrt{\lambda}\}\right) \\ &\leq y + \mathbb{E}\left(\frac{X_t}{t\sqrt{\lambda}}; \{X_t \geq yt\sqrt{\lambda}\}\right) \end{aligned}$$

Além disto, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_t}{t\sqrt{\lambda}}; \{X_t \geq yt\sqrt{\lambda}\}\right) \leq [\mathbb{E}\left(\frac{X_t}{t\sqrt{\lambda}}\right)^2]^{\frac{1}{2}} [\mathbb{P}(X_t \geq yt\sqrt{\lambda})]^{\frac{1}{2}}$$

A idéia é mostrar agora que $\forall y > 1$ podemos encontrar $\rho, C > 0$ e $\lambda_0(y)$ tal que para todo $\lambda > \lambda_0(y)$ tenhamos

$$\mathbb{P}(\{X_t \geq yt\sqrt{\lambda}\}) \leq C \exp^{-\rho t}$$

Para isto, suponha agora um processo ζ_t onde cada partícula coloca suas crias em cada um de seus vizinhos com taxa $1/4$ e de modo independente. Desta forma temos que este processo admite mais de uma partícula por sítio. De outra parte em cada sítio com pelo menos uma partícula, apenas uma segue as setas de exclusão, enquanto que as outras saltam sem se preocupar com o que ocorre nos sítios vizinhos. Como exemplo poderíamos tomar um esquema onde apenas a partícula que esta ocupando o sítio por mais tempo segue as setas de exclusão. Neste caso uma seta de exclusão envolvendo dois sítios com pelo menos uma partícula, ira fazer com que as duas mais antigas em cada um deles, troque de posição. Com esta construção temos que:

$$\xi_t^{\{0\}} \subset \zeta_t^{\{0\}} \quad \forall \quad t \geq 0$$

Vamos agora introduzir uma notação para o processo $\zeta_t^{\{0\}}$. Seja $J(\sigma)$ a ramificação associada com a sequência $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ de 0's e 1's da seguinte maneira: No instante zero iniciamos seguindo a partícula que inicialmente estava na origem. No instante da primeira reprodução, continuaremos seguindo-a se $\sigma_1 = 0$, caso contrário seguiremos sua cria. Seja T_1^σ o primeiro instante de criação. Seguiremos a partícula indicada por σ_1 até o instante T_2^σ , o segundo instante de criação no ramo definido por $J(\sigma)$, quando decidiremos novamente sobre continuar seguindo-a ou optar por seguir a sua cria, conforme o valor de σ_2 . Por indução, temos um processo que fixado σ , escolhe um ramo específico de $\zeta_t^{\{0\}}$, estabelecendo um novo processo imerso $J(\sigma)$, além dos tempos de reprodução $T_k^\sigma, k = 1, 2, 3, \dots$. Definimos também:

$$L_t^\sigma = \max\{k : T_k^\sigma \leq t\}$$

ou seja, o número de criações observadas no ramo definido por σ antes do instante t . Definimos ainda $x^\sigma(t)$ como a projeção no eixo x da posição do ramo estabelecido por $J(\sigma)$ no instante t . Temos que:

$$\Delta_i^\sigma = x^\sigma(T_i^\sigma) - x^\sigma(T_i^\sigma)^-$$

é o salto dado no instante T_i^σ pelo processo gerado por $J(\sigma)$. Observamos que $\Delta_i^\sigma = 0$ quando $\sigma_i = 0$ ou nos casos em que $\sigma_i = 1$ mas a criação é feita de um partícula que estava em alguma posição (x, y) para uma posição $(x, y \pm 1)$.

Observamos também que:

$$W(s) := x^\sigma(s) - \sum_{i=1}^{L_s^\sigma} \Delta_i^\sigma$$

é um passeio aleatório simples simétrico com taxa de salto $\frac{\lambda}{2}$ e $W(0) = 0$. Neste passeio só estão sendo contados os saltos dados no sentido do eixo x e desconsiderados os movimentos causados pelas criações em qualquer sentido e pelos saltos no sentido do eixo da abcissa (eixo y).

Para controlar o efeito da reprodução no avanço de X_t , definimos um evento cuja ocorrência nos permite majorar o avanço de X_t e cujo complementar possui probabilidade reduzida como veremos. Seja então

$$A(M, t) = \{\forall \sigma, L_t^\sigma \leq Mt - 1\}$$

Em palavras $A(M, t)$ é o evento onde por nenhum dos ramos definidos pelo vetor σ , verificamos mais do que Mt criações antes do instante t . Como o número de ramificações dentro de $A(M, t)$ deve ser menos do que 2^{Mt} e para M grande a probabilidade de que um ramo particular tenha mais do que Mt ramificações decai exponencialmente a zero em t , encontramos a seguinte majoração:

1) $\forall \beta > 0$

$$\mathbb{P}((A(M, t))^c) \leq 2^{Mt} \exp^{\beta t} (2\beta + 1)^{-[Mt]} \quad 3.2$$

e tomando $\beta > \frac{1}{2}$, para M suficientemente grande, temos:

$$\mathbb{P}((A(M, t))^c) \leq \exp^{-Mt/2}$$

2) Pela definições de $A(M, t)$, da variável $x^\sigma(t)$ e pela desigualdade exponencial de Chebyshev, temos que $\forall \theta > 0$

$$\mathbb{P}(A(M, t) \cap \{x^\sigma(t) \geq yt\sqrt{\lambda}\}) \leq \exp\left[\frac{t\lambda}{2}(\cosh(\theta) - 1) - yt\sqrt{\lambda}\theta + Mt\theta\right]$$

Agora escrevemos:

$$\mathbb{P}(X_t \geq yt\sqrt{\lambda}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\cup_\sigma \{x^\sigma(t) \geq yt\sqrt{\lambda}\}}, A(M, t)) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\cup_\sigma \{x^\sigma(t) \geq yt\sqrt{\lambda}\}}, A(M, t)^c)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\sum_\sigma \mathbb{1}_{\{x^\sigma(t) \geq yt\sqrt{\lambda}\}}, A(M, t)\right) + \mathbb{P}(A(M, t)^c)$$

$$\leq \mathbb{E}(|\xi_t|) \mathbb{P}(\{x^\sigma(t) \geq yt\sqrt{\lambda}\} \cap A(M, t)) + \mathbb{P}(A(M, t)^c)$$

$$\leq \mathbb{E}(|\xi_t|) \exp\left[\frac{t\lambda}{2}(\cosh(\theta) - 1) - yt\sqrt{\lambda}\theta + Mt\theta\right] + \exp\left(-\frac{Mt}{2}\right)$$

tomando $\theta = ey\lambda^{-\frac{1}{2}}$ e escrevendo $\cosh \theta \approx 1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!}$

$$\exp(t) \exp\left[\frac{t\lambda}{2}\left(1 + \frac{(ey)^2}{2\lambda} + \frac{(ey)^4}{4!\lambda^2} - 1\right) - yt\sqrt{\lambda}\theta + Mt\theta\right] + \exp\left(-\frac{Mt}{2}\right)$$

$$= \exp\left(-t\left[-\frac{(ey)^2}{4} + y^2e - 1 - \frac{1}{2} \frac{(ey)^4}{4!\lambda} - \frac{Me y}{\sqrt{\lambda}}\right]\right) + \exp\left(-\frac{Mt}{2}\right) \quad 3.3$$

tomando $e = 2$ temos que $\forall y > 1, \exists \lambda_0 = \lambda_0(y)$ tal que $\forall \lambda \geq \lambda_0(y)$

$$-\frac{(ey)^2}{4} + y^2 e - 1 - \frac{1}{2} \frac{(ey)^4}{4!\lambda} - \frac{Mey}{\sqrt{\lambda}} > 0$$

o que implica que $3.3 \leq C \exp^{-\rho t}$. ■

Posição projetada “mais a direita” na linha de inclinação α

Vamos ver como fica esta estimativa se olharmos o avanço da fronteira definido segundo uma inclinação α .

Seja α tal que $\tan \alpha = \frac{q}{p}$ onde $q < p \in \mathbb{N}$

$$X_t^\alpha = \max\left\{ \frac{bq}{\sqrt{p^2 + q^2}} : \xi_t^{\{0\}}(x, y) = 1 \text{ para algum } (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ onde } y = -\frac{p}{q}x + b \right\}$$

E apresentarmos um resultado análogo:

Teorema 3.3:

Seja α tal que $\tan \alpha = \frac{q}{p}$ onde $q < p \in \mathbb{N}$. Então

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_t^\alpha}{t\sqrt{\lambda}}\right) \leq 1$$

prova:

Com relação as variáveis definidas para a prova do resultado a zero graus, teríamos que fazer algumas modificações. Inicialmente temos que observar que as variáveis $\Delta_i^{\alpha, \sigma}$ assumem valores no conjunto $\{-d_2^\alpha, -d_1^\alpha, d_1^\alpha, d_2^\alpha\}$ onde:

$$d_1^\alpha = \frac{\sqrt{(pq)^2 + q^4}}{p^2 + q^2} \quad \text{enquanto} \quad d_2^\alpha = \frac{\sqrt{(pq)^2 + p^2}}{p^2 + q^2}$$

enquanto que o passeio aleatório simples simétrico $W^\alpha(t)$, possui taxa de salto igual a λ . Por outro lado não temos nenhuma alteração a fazer em 3.2, visto que todas as criações estão sendo contadas. Assim, para todo M suficientemente grande

$$\mathbb{P}((A(M, t))^c) \leq \exp(-Mt/2)$$

Um resultado simples mas que vai ser de grande utilidade em nossa estimativa é o de que quando temos variáveis aleatórias independentes $X_i \in \{-b, -a, a, b\}$ onde $0 \leq a \leq b < \infty$ e definimos $X^n = \sum_{i=1}^n X_i$ temos que:

$$\mathbb{E}(S^{X_i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{S^{-b} + S^b}{2} + \frac{S^{-a} + S^a}{2} \right)$$

No caso de tomarmos $S = \exp^\theta$ temos:

$$\mathbb{E}(\exp^{\theta X^n}) = \left[\frac{1}{2} (\cosh(b\theta) + \cosh(a\theta)) \right]^n$$

e assim, considerando nosso passeio aleatório simples simétrico $W(t)$, calculamos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp^{\theta W(t)}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(\exp^{\theta W(t)} / N(t) = n) \mathbb{P}[N(t) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (\cosh(b\theta) + \cosh(a\theta)) \right]^n \frac{\exp -\lambda t (\lambda t)^n}{n!} \\ &= \exp \left\{ \lambda t \left[\frac{1}{2} (\cosh(b\theta) + \cosh(a\theta)) - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

onde λ é a taxa com que o passeio muda de posição. Nossa estimativa fica agora da seguinte maneira:

$$\mathbb{P}(X_t^\alpha \geq yt\sqrt{\lambda}) \leq \mathbb{E} \left(\sum_{\sigma} \mathbf{1}_{\{x^\sigma(t) \geq yt\sqrt{\lambda}\}}, A(M, t) \right) + \mathbb{P}(A(M, t)^c)$$

$$\leq \mathbb{E}(|\xi_t|) \exp(\lambda t [\frac{1}{2}(\cosh(\theta d_1(k)) + \cosh(\theta d_2(k))) - 1])$$

$$\times \exp(-yt\sqrt{\lambda}\theta + \frac{Mt\theta k}{\sqrt{k^2 + 1}}) \times \exp(-\frac{Mt}{2})$$

Tomando $\theta = ey\lambda^{-\frac{1}{2}}$ e $\cosh \theta \approx 1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!}$

$$\leq \exp(t) \exp(\lambda t [\frac{1}{2}(1 + \frac{(eyd_1^\alpha)^2}{2\lambda} + \frac{(eyd_1^\alpha)^4}{2\lambda^2} + 1 + \frac{(eyd_2^\alpha)^2}{2\lambda} + \frac{(eyd_2^\alpha)^4}{4!\lambda^2}) - 1])$$

$$\times \exp(-y^2 et + \frac{Mtk}{\sqrt{k^2 + 1}} ey\lambda^{-\frac{1}{2}}) + \exp(-\frac{Mt}{2})$$

$$= \exp(-t[-\frac{1}{2}(\frac{(eyd_1^\alpha)^2}{2} + \frac{(eyd_2^\alpha)^2}{2}) + y^2 e - 1] - \frac{1}{2}(\frac{(eyd_1^\alpha)^4}{4!\lambda} + \frac{(eyd_2^\alpha)^4}{4!\lambda} + \frac{Meyq}{\sqrt{\lambda}\sqrt{p^2 + q^2}}))$$

Observando agora que $\forall \alpha, (d_1^\alpha)^2 + (d_2^\alpha)^2 = 1$, temos:

$$= \exp(-t[-\frac{(ey)^2}{4} + y^2 e - 1 - \frac{1}{2}(\frac{(eyd_1^\alpha)^4}{4!\lambda} + \frac{(eyd_2^\alpha)^4}{4!\lambda} - \frac{Meyq}{\sqrt{\lambda}\sqrt{p^2 + q^2}})]) + \exp(-\frac{Mt}{2}) \quad 3.4$$

tomando $e = 2$ temos que $\forall y > 1, \exists \lambda_0 = \lambda_0(y)$ tal que $\forall \lambda \geq \lambda_0(y)$

$$-\frac{(ey)^2}{4} + y^2 e - 1 - \frac{1}{2}(\frac{(eyd_1^\alpha)^4}{4!\lambda} + \frac{(eyd_2^\alpha)^4}{4!\lambda} - \frac{Meyp}{\sqrt{\lambda}\sqrt{p^2 + q^2}}) > 0$$

fazendo com que $3.4 \leq C \exp^{-\rho t}$ ■

Capítulo 4

$EC(\lambda)$ na faixa horizontal visto da borda

Bramson *et al* [4] estudaram este processo para $d = 1$, concentrado no conjunto das configurações com uma partícula mais a direita. Naquele trabalho, entre outras coisas, foi provada a unicidade da medida invariante e o fato de que ela está concentrada nas configurações com um número finito de buracos, ou seja, a medida invariante do conjunto de configurações com um buraco mais a esquerda é um. Aqui vamos mostrar que o número de buracos a esquerda da partícula mais a direita possui todos os momentos. Um pouco mais do que isto, usando o teorema 2.2, vamos mostrar a unicidade da medida invariante para o processo evoluindo em uma faixa de largura N dentro de $\mathbb{Z}^2$, como consequência do fato de que o número de buracos a esquerda da linha vertical ocupada mais a direita possui todos os momentos. Mais precisamente, sejam:

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \times \mathcal{N}} \text{ onde } \mathcal{N} = \{1, \dots, N\},$$

$$\tilde{\Omega} = \{\eta \in \Omega : \eta(0, y) = 1 \text{ para algum } y \in \mathcal{N}, \eta(x, y) = 0 \forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathcal{N}\}$$

Para μ concentrada em $\tilde{\Omega}$ e ξ_t^μ restrito a $\mathbb{Z} \times \mathcal{N}$ definimos:

$$X_t^\mu = \sup\{x \in \mathbb{Z} : \xi_t^\mu(x, y) = 1 \text{ para algum } y \in \mathcal{N}\}$$

e $\zeta_t^\mu(x, y) = \xi_t^\mu(x + X_t, y)$ é o processo transladado, visto a partir da linha vertical ocupada mais a direita. Deste modo, $(\zeta_t^\mu : t \geq 0)$ é um processo com espaço de estados em $\tilde{\Omega}$. Antes de apresentarmos o próximo resultados, para $\eta \in \tilde{\Omega}, x \leq 0$ definimos as variáveis

$$H_x(\eta) = \sum_{y \in \mathcal{N}} [1 - \eta(x, y)] \quad H(\eta) = \sum_{x \leq 0} [\mathbf{1}_{\{H_x(\eta) > 0\}}(x)]$$

onde $H_x(\eta)$ é o número de buracos na linha vertical x , na configuração η e $H(\eta)$ é o número total de linhas verticais com pelo menos um buraco buraco, à esquerda da linha vertical ocupada mais a direita.

Teorema 4.1:

A família $\{(\zeta_t^\eta, t \geq 0), \eta \in \tilde{\Omega}\}$ possui uma única medida invariante ν . Ela é tal que $\exists 0 < C, \gamma < \infty$ para os quais

$$\nu(\{H \geq k\}) \leq C \exp^{-\gamma k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 4.1$$

Em particular, ν está concentrada sobre:

$$\tilde{\Omega}_0 = \{\eta \in \tilde{\Omega} : \eta(x, y) = 1 \text{ se } x < M \text{ e } y \in \mathcal{N} \text{ para algum } M > -\infty\} \quad 4.2$$

prova:

A existência de uma medida invariante é garantida pelo teorema de Liggett [17] visto que o processo $\{(\zeta_t^\eta, t \geq 0), \eta \in \tilde{\Omega}\}$ é Feller e $\tilde{\Omega}$ é compacto (Ferrari[11]). A unicidade segue do seguinte argumento: Seja ν uma medida invariante. Observe que toda configuração com um número finito de partículas é transitória pois partículas são criadas e nunca são destruídas. Logo ν está concentrada sobre configurações em $\tilde{\Omega}$ com infinitas partículas. Definindo $\tilde{t}_2(x) = \max\{t_2(x, y) : y \in \mathcal{N}\}$, mostramos que esta variável também tem cauda exponencial. Com isto estaremos prontos para mostrar (4.1). De (4.1) verificamos que ν deve estar concentrada sobre $\tilde{\Omega}_0$ concluindo a prova pois o fato de que $(\zeta_t^\eta, t \geq 0)$ é um processo com espaço de estados enumerável e irredutível garante-nos a unicidade da medida invariante. Este é um resultado básico de cadeias de Markov (Feller[10]). Para por em prática nosso programa, definimos para $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{A}_t(n) = \{H_{-n}(\zeta_t^\nu) > 0\}$$

$$\tilde{B}_t(n) = \inf\{s : H_{X_t^\nu - n}(\xi_s^\nu) < N\}$$

Inicialmente observamos que podemos tomar o passeio aleatório que parte de alguma posição ocupada da linha da origem para garantirmos que para t grande o suficiente, o evento $\{H_{-n}(\zeta_s^\nu) < N \text{ para algum } s \leq t\}$ possui alta probabilidade de já ter ocorrido. Mais precisamente, para cada n tomamos $t(n) = n^2$ de modo que a probabilidade de que o passeio imerso que partiu da linha da origem, com grande probabilidade, já tenha ultrapassado a n -ésima linha vertical, o que nos garante a ocorrência de $\{H_{-n}(\zeta_s^\nu) < N\}$, para algum $0 \leq s \leq t$. Tomamos o ponto $x = (0, 0)$ para origem e fazendo um acoplamento podemos garantir que $X_t^\nu \geq X_t^x$ em distribuição. Como o passeio $(X_t^{x, \infty})$ possui deriva $\frac{1}{2d}$ em direção a $+\infty$, podemos afirmar que para $\epsilon > 0$ propriamente escolhido $\exists 0 < \gamma_1, C_1 < \infty$, tais que

$$\nu(\{X_{t(n)}^\nu < n^2(\frac{1}{2d} - \epsilon)\}) \leq C_1 \exp^{-\gamma_1 n}$$

Agora para para $\tilde{t}_2(x) = \max\{t_2(x, y) : y \in \mathcal{N}\}$, verificamos que:

$$IP(\tilde{t}_2(0) > t) = IP(\cup_{y \in \mathcal{N}} \{t_2(0, y) > t\}) \leq \sum_{y \in \mathcal{N}} IP(\{t_2(0, y) > t\}) = N IP(\{t_2(0, z) > t\})$$

para algum $z \in \mathcal{N}$ fixado. Como $t_2(0, z) \leq t_1(0, z) + t_2(0, 0)$ em distribuição, onde as duas parcelas do lado direito da desigualdade possuem cauda exponencial, temos que o mesmo vale para $\tilde{t}_2(x)$.

Agora necessitamos das seguintes desigualdades:

$$\nu(\tilde{A}_t(n) \cap \{\tilde{B}_t(n) \leq t - n(\frac{N^{-1}}{\lambda + 1} - \epsilon)\}) \leq IP(\{\tilde{t}_2(0) \geq n(\frac{N^{-1}}{\lambda + 1} - \epsilon)\}) \leq C_2 \exp^{-\gamma_2 n}$$

e

$$\nu(\tilde{A}_t(n) \cap \{t - n(\frac{N^{-1}}{\lambda + 1} - \epsilon) < \tilde{B}_t(n) \leq t\}) \leq IP(\{S_n < n(\frac{N^{-1}}{\lambda + 1} - \epsilon)\}) \leq C_3 \exp^{-\gamma_3 n}$$

onde $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, uma soma de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas exponenciais de parâmetro $N(\lambda + 1)$. A idéia é que dado que a linha x está ocupada por pelo menos uma partícula, o tempo que temos que esperar para que a linha $x + 1$ fique ocupada é estocasticamente maior do que Y_i . Isto é uma consequência do lema 1.1. A última desigualdade é um resultado de grandes desvios para variáveis aleatórias deste tipo. Dando continuidade temos que para $c \in [0, t]$

$$\nu(\tilde{A}_t(n)) = \nu(\tilde{A}_t(n) \cap \{X_t^\nu < n^2(\frac{1}{2d} - \epsilon)\}) + \nu(\tilde{A}_t(n) \cap \{X_t^\nu \geq n^2(\frac{1}{2d} - \epsilon)\} \cap \{\tilde{B}_t(n) \leq t - c\}) +$$

$$\nu(\tilde{A}_t(n) \cap \{X_t^\nu \geq n^2(\frac{1}{2d} - \epsilon)\} \cap \{\tilde{B}_t(n) > t - c\})$$

logo,

$$\nu(\tilde{A}_t(n)) \leq \nu(\{X_t^\nu < n^2(\frac{1}{2d} - \epsilon)\}) + IP(\{\tilde{t}_2(0) \geq n(\frac{N^{-1}}{\lambda+1} - \epsilon)\}) +$$

$$IP(\{S_n < n(\frac{N^{-1}}{\lambda+1} - \epsilon)\}) \leq C \exp^{-\gamma n}$$

Para concluir a prova de (4.1), utilizamos a seguinte relação:

$$\{\eta \in \tilde{\Omega} : \eta(x, y) = 1 \forall x < -m, \forall y \in \mathcal{N}\} \subset \{\eta \in \tilde{\Omega} : H(\eta) \leq m\}$$

o que por sua vez implica em

$$\{\eta \in \tilde{\Omega} : H(\eta) > m\} \subset \{\eta \in \tilde{\Omega} : \exists (x, y) \text{ com } x < -m \text{ tal que } \eta(x, y) = 0\}$$

$$= \bigcup_{x=m+1}^{\infty} \{\eta \in \tilde{\Omega} : H_{-x}(\eta) > 0\}$$

Logo

$$\nu(\{H \geq m\}) \leq \sum_{i=m}^{\infty} \nu(\{H_{-i} > 0\}) \leq \sum_{i=m}^{\infty} C \exp^{-\gamma i} = C \exp^{-\gamma m}$$

o que prova (4.1). Como consequência deste fato, verificamos que H possui todos os momentos finitos e em particular $\nu(\{H = \infty\}) = 0$, o que implica em (4.2). ■

EC(λ) na faixa de inclinação α visto da borda

Neste tópico estaremos interessados em introduzir as faixas de largura N e orientação α , chamando atenção ao fato de que um resultado similar ao teorema 4.1 pode ser obtido,

ou seja, a existência e unicidade da medida invariante e a característica desta de estar concentrada no conjunto das configurações com apenas um número finito de buracos “abaixo” da primeira partícula ou seja, na interface entre uma região completamente cheia e uma região completamente vazia. Vamos definir então a faixa $\mathcal{N}_N = \mathcal{N}_N(p, q)$ onde p, q são inteiros fixados que determinam a orientação α da faixa, sendo $\alpha = \arctan \frac{q}{p}$. Pela simetria do processo, verificamos que podemos nos restringir aos casos em que $0 < q \leq p$. O caso $q = 0$ é a faixa horizontal, definida no tópico anterior. Definimos então as linhas que formam $\mathcal{N}_N$. Sempre que considerarmos pequena a chance de que alguma confusão seja gerada, eliminaremos as constantes p, q da notação.

$$l_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (x, y) = (kp + j, kq) \text{ onde } k \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq p\}$$

$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (x, y) = (kp, kq - j) \text{ onde } k \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq q\}$$

$$l_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (x + 1, y - 1) \in l_1\}$$

$$l_i = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (x + 1, y - 1) \in l_{i-1}\} \text{ onde } i \geq 1$$

Assim, a faixa $\mathcal{N}_N$ é definida como:

$$\mathcal{N}_N = \bigcup_{i=1}^N l_i$$

Tomamos um processo (ξ_t) que possui dinâmica local dentro de $\mathcal{N}_N$ idêntica a $\mathbf{EC}(\lambda)$ em $\mathbb{Z}^2$. Como continuamos interessados em definir e medir a velocidade com que um processo que inicia com uma medida sobre um conjunto de configurações com uma região infinita sem partículas, avança sobre esta região, tomamos:

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \eta \in \{0,1\}^{\mathcal{N}_N} : \eta(x,y) = 1 \text{ para algum } (x,y) \in B_0, \eta(x,y) = 0 \text{ se } (x,y) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B^k \right\}$$

onde:

$$B^j = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k^j \cap \mathcal{N}_N$$

e:

$$C_0^0 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 < x \leq p, y = 0\}$$

$$C_1^0 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 < x \leq p, 1 \leq y \leq p+q\}$$

$$C_2^0 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : (x+q, y-p) \in C_1^0\}$$

$$C_k^0 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : (x+q, y-p) \in C_{k-1}^0\} \quad k \geq 2$$

$$C_k^j = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : (x-p, y-q) \in C_k^{j-1}\} \quad j \in \mathbb{Z}$$

Para μ concentrada em $\tilde{\Omega}$ definimos ζ_t^μ que é o processo ξ_t^μ transladado de X_t^μ , o deslocamento da posição mais “a direita” projetada sobre a reta $y = \frac{q}{p}x$, de maneira que a borda do processo (o que separa a região onde há partículas da região onde todos os sítios estão desocupados) caia sobre B_0 . Deste modo $\zeta_t^\mu \in \tilde{\Omega}$.

X_t^μ mede a distância percorrida pela borda do processo, com relação à posição inicial, em direção aos sítios desocupados. Mais precisamente, tomamos:

$$b_0^\mu = \sup\{b : \xi_0^\mu(x, y) = 1 \text{ onde } (x, y) \in B_0 \text{ e } y = -\frac{p}{q}x + b\}$$

$$b_t^\mu = \sup\{b : \xi_t^\mu(x, y) = 1 \text{ onde } y = -\frac{p}{q}x + b\}$$

e definimos

$$X_t^\mu = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}[b_t^\mu - b_0^\mu]$$

Alguns resultados do próximo tópico serão apresentados para o toro $\tilde{\mathcal{N}}_N$, onde as condições de fronteira permitem exclusões e criações entre as linhas l_1 e l_N . O teorema 4.1 tem seu análogo para $\tilde{\mathcal{N}}_N$ bem como as definições apresentadas neste tópico. Observamos também que o número de buracos “a esquerda” da posição ocupada “mais a direita” também possui todos os momentos (segundo a medida invariante) nos espaços $\mathcal{N}_N$ e $\tilde{\mathcal{N}}_N$. Isto vem da idéia básica de que depois de atingir um sítio x pela primeira vez, em um tempo exponencialmente rápido conseguimos atingir algum dos seus vizinhos mais próximos. Verificamos isto fixando o vizinho y e construindo o passeio aleatório com a deriva voltada para este sítio, como definido no capítulo 1.

Limites para a velocidade assintótica nas faixas

Nosso interesse agora será apresentar estimativas superiores e inferiores para a velocidade assintótica da borda do processo ξ_t em $\tilde{\mathcal{N}}_N$ definido para diferentes ângulos, como função do parâmetro da exclusão e tendo a medida invariante como condição inicial. Já observamos anteriormente que devido a simetria do processo, podemos ficar restritos aos ângulos entre 0 e 45 graus. Vamos estudar os ângulos cuja tangente é um racional da forma q/p , onde $0 < q \leq p$. De acordo com Bramson *et al* [4] e Kerstein [14], observamos que existem várias maneiras equivalentes de definirmos o que seria a velocidade (microscópica)

de propagação do sistema. O próximo resultado apresenta duas maneiras equivalentes de medirmos esta velocidade de propagação.

Lema 4.2:

Para $\eta \in \tilde{\Omega}$ e ν a medida invariante para o processo, sejam

X_t^η = deslocamento da borda do processo na faixa $\tilde{\mathcal{N}}_N$, com relação a posição inicial em t ;

Y_t^η = número de partículas criadas na faixa $\tilde{\mathcal{N}}_N$, no intervalo $[0, t)$

Então, para a faixa de inclinação α , onde $\alpha = \tan \frac{q}{p}$, $0 < q \leq p$ vale a relação:

$$\mathbb{E}_\nu(X_t) = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{N(p + q)} \mathbb{E}_\nu(Y_t) \quad 4.3$$

prova:

Para estabelecermos a relação entre estas duas quantidades, definimos a sequência de tempos aleatórios $t_0 = 0, t_k$ para $k \in \mathbb{N}$ da seguinte maneira:

$$t_k = \inf \{t \geq t_{k-1} + 1 : \bar{\xi}_t = \bar{\xi}_{t_{k-1}} \cup \left(\bigcup_{i=1}^m B^i \right) \text{ para algum } m\}$$

onde $\bar{\xi}_t = \xi_t^{\bar{\eta}}$ e

$$\bar{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^\infty B^i; \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definimos ainda $\bar{X}_t = X_t^{\bar{\eta}}$ e $\bar{Y}_t = Y_t^{\bar{\eta}}$ observamos o valor destas variáveis naqueles tempos:

$$\bar{X}_{t_k} = D_k \sqrt{p^2 + q^2} + \bar{X}_{t_{k-1}}$$

$$\bar{Y}_{t_k} = D_k [N(p + q)] + \bar{Y}_{t_{k-1}}$$

onde D_k é a variável aleatória que define o número de blocos (B^i é o i -ésimo bloco) que a fronteira vai ter que se deslocar, até o processo ficar em uma configuração que seja igual a inicial a menos de uma translação. A idéia é que condicionado a algum valor de D_k , podemos saber tanto o tamanho do deslocamento $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ quanto o número de partículas criadas $Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$, já que o cardinal do conjunto $l_i \cap B^j$ é igual a $p + q$. Como o processo visto da borda tem uma única medida invariante concentrada em configurações com infinitas partículas e um número finito de buracos, o processo é uma cadeia de Markov recorrente positiva o que tem como consequência o fato de que $\mathbb{E}(D_k) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$. A conclusão da prova vem de que $\forall s > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\bar{X}_t)}{t} = \frac{\mathbb{E}_\nu(X_s)}{s} \quad 4.4$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(\bar{Y}_t)}{t} = \frac{\mathbb{E}_\nu(Y_s)}{s}$$

■

A seguir apresentamos um resultado que trata da velocidade assintótica da borda do processo definido nas faixas.

Teorema 4.3:

$\text{EC}(\lambda)$ definido sobre $\tilde{\mathcal{N}}_N$ com a orientação $\alpha = \arctag \frac{q}{p}$ é tal que

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_\nu(X_t)}{t\sqrt{\lambda}} \geq 1 \quad 4.5$$

prova:

Inicialmente definimos

$$f_{p,q} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p + q}$$

De (4.3) e (4.4) verificamos que $\forall \epsilon > 0 \exists t(\epsilon)$ tal que $\forall t > t(\epsilon)$

$$\frac{\mathbb{E}_\nu(X_t)}{t\sqrt{\lambda}} \geq \frac{\mathbb{E}(\bar{X}_t)}{t\sqrt{\lambda}} - \epsilon = \frac{f_{p,q}}{N} \frac{\mathbb{E}(\bar{Y}_t)}{t\sqrt{\lambda}} - \epsilon \quad 4.6$$

O próximo passo é relacionar $\mathbb{E}(\bar{Y}_t)$ com a taxa instantânea de criação de partículas. Para isto, utilizamos a característica da medida ν e o fato que estamos no toro $\tilde{\mathcal{N}}_N$ (ν está concentrada nas configurações com apenas um número finito de buracos), obtendo:

$$(4.6) = \frac{f_{p,q}}{Nt\sqrt{\lambda}} \left[\int_0^t \sum_{x \in \tilde{\mathcal{N}}_N} \mathbb{E}[\bar{\xi}_s(x) \sum_{y \in V_N(x)} [1 - \bar{\xi}_s(y)]] ds \right] - \epsilon$$

onde $V_N(x)$ é o conjunto de vizinhos de x em $\tilde{\mathcal{N}}_N$.

Do fato de estarmos no toro $\tilde{\mathcal{N}}_N$ temos a seguinte igualdade:

$$\forall x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \text{ tais que } \exists b \text{ para o qual } y_i = -\frac{p}{q}x_i + b \quad i = 1, 2$$

$$\mathbb{E}(\bar{\xi}_t(x)) = \mathbb{E}(\bar{\xi}_t(y)) \quad 4.7$$

e também

$$\mathbb{E}(\bar{\xi}_t(x)) \sum_{z \in V_N(x)} [1 - \bar{\xi}_s(z)] = \mathbb{E}(\bar{\xi}_t(y)) \sum_{z \in V_N(y)} [1 - \bar{\xi}_s(z)] \quad 4.8$$

Nosso próximo passo é considerar o limite hidrodinâmico. Para tanto precisamos definir $x_i = \{(0, \bar{y}) : \bar{y} = \min\{y : (0, y) \in l_i\}\}$ e $u_\lambda^i(z, t) = \mathbb{E}(\xi_t(x, y))$ para $(x, y) \in l_i$ tal que $|\|(x, y) - x_i\|_2 - \sqrt{\lambda}z|$ é mínimo. De (4.7) temos que $u_\lambda^i(z, t) = u_\lambda^j(z, t)$ para todo par i, j . Escrevendo a derivada no tempo da função $u_\lambda^i(z, t)$, encontramos a equação de reação difusão quando tomamos a relação $s = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ para s um incremento de tempo e mostramos que para todo $x, y \in \tilde{\mathcal{N}}_N$

$$|\mathbb{E}_\lambda[\xi_t(\sqrt{\lambda}x)\xi_t(\sqrt{\lambda}y)] - \mathbb{E}_\lambda[\xi_t(\sqrt{\lambda}x)]\mathbb{E}[\xi_t(\sqrt{\lambda}y)]| = o(\lambda^{-\frac{1}{2}})$$

Isto foi provado De Masi *et al* [18] e a idéia da prova é usar uma estimativa da distância entre duas partículas interagindo através de exclusão simples simétrico, partindo dos sítios x e y , e duas partículas interagindo como passeios aleatórios simples simétrico independentes, partindo dos sítios x e y . Considerando isto além de (4.7) e (4.8) encontramos, para $a < b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{x_1 = a\sqrt{\lambda} \\ x = (x_1, y_1) \in I_i}}^{b\sqrt{\lambda}} \mathbb{E}[\bar{\xi}_t(x) \sum_{y \in V_N(x)} [1 - \bar{\xi}_t(y)]] = \frac{N}{f_{p,q}} \int_a^b u(z, t) [1 - u(z, t)] dz \quad 4.9$$

onde $u(z, s)$ é a solução da equação

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial^2 z} + u(z, t) [1 - u(z, t)] \quad 4.10$$

com a condição inicial $u(z, 0) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(z)$. Esta equação foi estudada inicialmente por Kolmogorov *et al* [16], como um modelo para a velocidade de propagação de determinadas características genéticas em uma população. De acordo com Bramson [3], $u(z, t)$ converge em t , uniformemente em z , para a forma *travelling wave* $u(z, t) = u_v(z - vt/\sqrt{\lambda})$ onde $v = \sqrt{\lambda}$. Esta função, satisfaz a equação:

$$\frac{\partial u(y)}{\partial y} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u(y)}{\partial^2 y} - u(y) [1 - u(y)] = 0 \quad 4.11$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} u(y) = 1 \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(y) = 0 \quad 4.12$$

considerando isto e tomando $m(t)$ tal que $u(t, m(t)) = 1/2$ temos de (4.6) e (4.9) que para todo $\epsilon > 0$ existe $t(\epsilon)$ tal que para todo $t > t(\epsilon)$ e todo $b > 0$, encontramos

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_\nu(X_t)}{t\sqrt{\lambda}} \geq \int_{m(t)-b}^{m(t)+b} u(z, t) [1 - u(z, t)] dz - \epsilon$$

como $u(z, t)$ converge para $u_v(t)$ uniformemente em z , temos no limite em t

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_\nu(X_t)}{t\sqrt{\lambda}} \geq \int_{-b}^b u_v(z)[1 - u_v(z)]dz - \epsilon$$

Aplicando agora o sup em b , obtemos através das equações (4.11) e (4.12)

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_\nu(X_t)}{t\sqrt{\lambda}} \geq 1 - \epsilon$$

Do fato de utilizarmos o limite em t segue a arbitrariedade de ϵ e o teorema está provado.

■

Teorema 4.4:

$\text{EC}(\lambda)$ definido sobre $\tilde{\mathcal{N}}_N$ com a orientação $\alpha = \arctag \frac{q}{p}$ é tal que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_\nu(X_t^\alpha)}{t\sqrt{\lambda}} \leq 1$$

prova:

A prova deste resultado é análoga a prova do teorema 3.2 e é uma adaptação de parte da prova do Teorema 2 de Bramson *et al* [4]. Além do que foi feito no capítulo 3, deveríamos considerar ainda que

$$\mathbb{E}_\nu(X_t^\alpha) \leq \mathbb{E}(\bar{X}_t^\alpha) \quad \forall t > 0$$

já que, pela atratividade do processo, $\xi_t^\eta \subset \bar{\xi}_t \quad \forall \eta \in \tilde{\Omega}_{N,\alpha}$. Sem perda de generalidade, pela simetria do processo, podemos nos restringir ao casos em que $p < q$.

Tomando $\mathcal{B} = \cup_{i=-\infty}^0 B^i$ temos:

$$\{\bar{X}_t^\alpha > yt\sqrt{\lambda}\} \subset \{\exists (x, y) \in \mathcal{B} \text{ tal que } X_t^\alpha(\zeta_t^{(x,y)}) > yt\sqrt{\lambda}\}$$

de onde tiramos

$$\begin{aligned}
IP(\{\bar{X}_t^\alpha > yt\sqrt{\lambda}\}) &\leq \sum_{(x,y) \in \mathcal{B}} IP(\{X^\alpha(\zeta_t^{(x,y)}) > yt\sqrt{\lambda}\}) \\
&\leq \sum_{(x,y) \in \mathcal{B}} [IE(\sum_{\sigma} \mathbb{1}_{\{x^\sigma(t) \geq yt\sqrt{\lambda}\}}, A(M_{(x,y)}, t)) + IP([A(M_{(x,y)}, t)]^c)]
\end{aligned}$$

onde $A(M_{(x,y)}, t) = \{\forall \sigma, L_t^\sigma < M_{(x,y)}\}$. Em palavras, $A(M_{(x,y)}, t)$ é o conjunto das configurações para as quais para todo ramo partindo de $(x, y) \in \mathcal{B}$, não encontramos mais do que a quantidade $M_{(x,y)}$ de criações. Tomando

$$M_{(x,y)} = \begin{cases} M, & \text{se } \|(x, y)\| < \lambda t^2 \\ 2 \log \|(x, y)\|, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

temos $\forall y > 1$ existem $\rho, c > 0$ e $\lambda(y, N)$ tal que, para todo $\lambda > \lambda(y, N)$

$$IP(\{\bar{X}_t > yt\sqrt{\lambda}\}) \leq NC\lambda t^2 \exp^{-\rho t}$$

o que conclui a prova da tese já que $\forall y > 1$ e pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$IE\left(\frac{X_t}{t\sqrt{\lambda}}\right) \leq y + [N(1 + \lambda^{-1})t^{-1} + \lambda^{-1}N(\lambda + 1)^2]^{\frac{1}{2}} IP(\bar{X}_t > yt\sqrt{\lambda})$$

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P. Billingsley; *Probability and Measure*, Willey, New York (1978).
- [2] M. Bramson, *Front propagation in certain one-dimensional exclusion models*, J. Statis. Phys. **51**, nº 5/6 (1988).
- [3] M. Bramson, *Convergence of Solutions of the Kolmogorov Equation to travelling waves*, Memoirs American Mathematical Society **25** (1986).
- [4] M. Bramson, P. Calderoni, A. De Masi, P. Ferrari, J. Lebowitz and R. H. Schonmann, *Microscopic selection principle for a diffusion-reaction equation*, J. Statist. Phys. **45**, 56-70 (1986).
- [5] M. Bramson and D. Griffeath, *On the Williams-Bjerknes tumour growth model I*, Ann. Prob. **9**, nº 2, 173-185 (1981).
- [6] C. Cammarota and P. A. Ferrari, *An invariance principle for the edge of the Branching Exclusion Process*, Sthoc. Proc. and their applications **38**, 1-11 (1991).
- [7] R. Durrett, *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*, Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books, Software, Pacific Grove, California, (1988).
- [8] R. Durrett and D. Griffeath, *Contact Processes in several dimensions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiet **59**, 535-552 (1982).
- [9] R. S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*, Springer, New York, Berlin(1985).
- [10] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Willey, New York (1968).

- [11] P. Ferrari, *Growth processes on a strip*, Relatório técnico RT-MAE-9207 (1992).
- [12] G. R. Grimmett, *Percolation*, Springer-Verlag (1989)
- [13] T. E. Harris, *Additive set-valued Markov process and graphical methods*, Ann. Prob. **6**, 355-378 (1978).
- [14] A. Kerstein, *Computational study of propagating fronts in a lattice-gas model*, J. Stat. Phys **45**, nº 5/6, 921-931 (1986).
- [15] A. Kerstein, *A two-particle representation of front propagation in diffusion-reaction systems*, J. Stat. Phys. **53**, nº 3/4, 703-712 (1988).
- [16] A. Kolmogorov, I. Petrovski and N. Piscunov, *Etudes de l'equations de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application a un problème biologique*, Bull. Univ. Mosc. Ser. Int. A **1**(6): 1- 25 (1937).
- [17] T. M. Ligget, *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New York, (1985).
- [18] A. De Masi, P. Ferrari, and J. Lebowitz, *Reaction-diffusion equations for interacting particle systems*, J. Stat. Phys. **44**, nº 3/4, 589-644 (1986).
- [19] A. De Masi, P. Ferrari, and J. Lebowitz, *Rigorous derivation of reaction-diffusion equations with fluctuations*, Phys. review letters **55**, nº 19, 1947-1949 (1986).
- [20] D. Richardson, *Random growth in a tessellation*, Proc. Cambridge Phil. Soc **74**, 515-528 (1973).
- [21] M. Salzano, *Processo de ramificação com exclusão e algumas modificações*, Dissertação de mestrado, IME-USP (1993).