"METAESTABILIDADE PARA O PROCESSO DE CON-
TACTO: EXTENSÃO DOS TEOREMAS BÁSICOS E ES-
TUDO DAS FLUTUAÇÕES"

ROBERTO HENRIQUE SCHONMANN

Orientador: JEFFERSON ANTONIO GALVES

*Tese apresentada ao Instituto
de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo, pa-
ra obtenção do título de Dou-
tor em Estatística.*

SÃO PAULO

1984

AGRADECIMENTOS

a ANTONIO GALVES, pela orientação dedicada;

a JOSÉ FERNANDO PEREZ, a quem devo a minha formação inicial em Física-Matemática, além de ter-me introduzido no problema específico da metaestabilidade;

à MARIA EULÁLIA VARES, ENZO OLIVIERI, MARZIO CASSANDRO e ARNALDO NOGUEIRA, com os quais tenho colaborado no ataque a problemas ligados à metaestabilidade de sistemas dinâmicos estocásticos;

a HERBERT SPOHN, ERRICO PRESUTTI, HERMAN ROST, ENRIQUE ANDJEL, FRANCOIS LEDRAPIER, ALBERT BENASSI e NELSON TANAKA, por discussões que me foram muito úteis.

R E S U M O

Estendemos os teoremas básicos sobre a metaestabilidade no modelo de contacto: provamos que este modelo apresenta comportamento metaestável para todo λ supercrítico e para condições iniciais $1|_{[-N,N]}$ e $\mu|_{[-N,N]}$. Mostramos, também, que a metaestabilidade pode ser verificada observando, simultaneamente, matranslados de um observável local ou certos observáveis macroscópicos (densidades espaciais).

Estudamos as flutuações para processos $(\xi^v(t), t \geq 0)$, quando $v(\eta: |\eta| < \infty) = 0$. Provamos que para toda função cilíndrica $f: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ vale, quando $R \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{R} \left[\frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^v(t)) dt - \int f d\mu \right] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_f^2) \quad 0 < \sigma_f^2 < \infty$$

Estudamos as flutuações na situação metaestável, verificando que são idênticas às do processo estacionário $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$. Provamos este resultado no caso em que as mêdias temporais são tomadas sobre intervalos de tempo que cres-cem mais lentamente do que o comprimento N do sistema.

ABSTRACT

The basic theorems about metastability for the contact process are extended. We prove that this model shows metastable behavior for any supercritical value of λ and initial conditions $\nu_{[-N,N]}$ and $\mu_{[-N,N]}$. We prove also that metastability can be verified observing simultaneously the translations of a local observable or a class of macroscopic observables (spacial densities).

The fluctuations of process $(\xi^\nu(t), t \geq 0)$ with $\nu(\eta: |\eta| < \infty) = 0$ are studied. We show that for any cylindrical function $f: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$, when $R \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{R} \left[\frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^\nu(t)) dt - \int f d\mu \right] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_f^2) \quad 0 < \sigma_f^2 < \infty$$

The fluctuations in the metastable situation are shown to be identical to the fluctuations of the process $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$. This is done provided that the time means are taken over time intervals that grow slower than the length N of the system.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
A. CONTEXTO DOS PROBLEMAS TRATADOS	1
B. O MODELO DO CONTACTO DE HARRIS	3
C. OS PROBLEMAS TRATADOS EM [1] E NO PRESENTE TRABA- LHO	6
CAPÍTULO I - EXTENSÃO DOS TEOREMAS BÁSICOS PARA A METAES- TABILIDADE NO MODELO DE CONTACTO	11
I.1. INTRODUÇÃO	11
I.2. CONVERGÊNCIA À EXPONENCIAL PARA TODO $\lambda > \lambda_*$...	11
I.3. TERMALIZAÇÃO - UNIFORMIDADE SOBRE TRANSLADADOS. DENSIDADES	19
I.4. METAESTABILIDADE PARA O PROCESSO $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$	32
CAPÍTULO II - FLUTUAÇÕES EM TORNO DO EQUILÍBRIO PARA PRO- CESSOS $(\xi^\nu(t), t \geq 0)$	39
II.1. INTRODUÇÃO	39
II.2. ASSOCIATIVIDADE	40
II.3. DECAIMENTO EXPONENCIAL DAS CORRELAÇÕES TEMPORAIS	47
II.4. CONCLUSÃO PARA O PROCESSO ESTACIONÁRIO $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$	50
II.5. FLUTUAÇÕES PARA PROCESSOS $(\xi^\nu(t), t \geq 0)$ COM $\nu(\eta: \eta < \infty) = 0$	51
CAPÍTULO III - FLUTUAÇÕES NA SITUAÇÃO METAESTÁVEL	55
III.1. INTRODUÇÃO	55
III.2. RESULTADOS	56
REFERÊNCIAS	68

INTRODUÇÃO

A. CONTEXTO DOS PROBLEMAS TRATADOS

O fenômeno da metaestabilidade, que constitui o tema central desta tese, pode ser observado em vários fenômenos naturais. De uma maneira geral, sistemas termodinâmicos, ao sofrerem transições de fase, exibem comportamento metaestável (para mais informações sobre o fenômeno veja, por exemplo, [13]). Por exemplo, ao esfriarmos, lentamente, um vapor abaixo do seu ponto de liquefação, é possível que este permaneça na forma gasosa ainda por um longo tempo, numa situação de aparente equilí**ri**o, até que, repentinamente, passa ao estado líquido, que é o verdadeiro equilíbrio.

Propostas de teorias para este tipo de fenômeno têm aparecido abundantemente nas últimas duas décadas (a literatura correspondente é bastante extensa; as referências [10] a [16] e [21] a [23] dão uma boa visão dos vários enfoques).

Os aspectos dinâmicos do fenômeno têm sido tratados nestes trabalhos sob um ponto de vista que pode ser chamado *evolu*ção de ensemble. De uma maneira geral, os sistemas tratados nestes trabalhos são processos markovianos com uma única medida invariante (medida de Gibbs), como a dinâmica de Glauber em volume finito [17]. Prescrevem-se, então, maneiras para construir outra medida sobre o espaço de estados que descreverá a situação metaestável. Isto é feito de tal maneira que a evolução temporal desta medida à medida de equilí**ri**o será lenta (de acordo com padrões adequados) quando o volume do sistema é grande e os parâmetros termodinâmicos têm valo-

res apropriados (ver principalmente [11], [12] e [13]).

Recentemente, foi proposto um novo enfoque ao problema [1], que é chamado pelos seus autores de *enfoque trajetória por trajetória*. Para processos markovianos considera-se o espaço de trajetórias de um único sistema e se estuda suas médias temporais. O comportamento metaestável surge quando as médias temporais se mantêm, praticamente, constantes sobre quase todas trajetórias até que uma grande flutuação ocorra e leve o sistema a uma situação completamente diferente. O momento em que esta grande flutuação ocorre deverá ser imprevisível a partir do conhecimento do tempo já transcorrido na situação metaestável. Portanto, numa escala apropriada de tempo, este momento deverá ser uma variável aleatória exponencial (de fato, deverá convergir à exponencial quando o limite apropriado é tomado).

Neste trabalho, adotamos este último enfoque. Estudamos em mais detalhe os problemas tratados em [1], estendemos resultados lá provados e estudamos outros aspectos do fenômeno.

O significado preciso das afirmações feitas acima, está nos enunciados dos teoremas de [1] e do presente trabalho.

É importante, por fim, enfatizar que, independentemente de suas motivações iniciais serem da Física, os problemas que tratamos têm interesse em várias outras áreas onde dinâmicas estocásticas intervêm. O Modelo de Contacto de Harris, com o qual trabalhamos, tem motivação biológica e há interesse, também, de áreas como Sociologia e Economia. Na realidade, descrevemos e verificamos para um modelo um padrão de comportamento em que se passa abruptamente de uma situação aparentemente estável para outra. Isto contrasta com transformações lentas, graduais e previsíveis, descritas por comportamento hidrodinâmico

e que vêm sendo estudadas nos últimos anos (ver [18]).

B. O MODELO DE CONTACTO DE HARRIS

O processo de contacto básico em uma dimensão é um processo de Markov a tempo contínuo com valores em $P(Z)$ = partes de Z . Pode ser descrito, informalmente, como segue: partículas estão distribuídas em Z de forma que cada sítio está ou ocupado por uma partícula ou vazio. $\xi(t)$ denota o conjunto de sítios ocupados no instante t . Às vezes usaremos, também, a função $\xi(t, \cdot): Z \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\xi(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \xi(t) \\ 1 & \text{se } x \in \xi(t) \end{cases}$$

A evolução estocástica pode ser descrita como segue. Cada partícula desaparece após esperar um tempo aleatório exponencial de média 1, independentemente das demais. Antes de desaparecer cada partícula tenta criar outras nos sítios vizinhos em instantes que se distribuem segundo processos de Poisson de taxa 2λ ($\lambda > 0$ dado). Mais precisamente, cada partícula espera um tempo exponencial de média $1/2\lambda$, independentemente de tudo o mais e, então, cria uma nova partícula em um de seus sítios vizinhos, escolhidos com probabilidades iguais, e assim por diante. Nos momentos de criação, se o sítio escolhido já está ocupado nada ocorre.

Construiremos o Processo de Contacto, com o auxílio de um gráfico aleatório sobre o espaço-tempo $Z \times \mathbb{R}_+$. Para cada $i \in Z$, considere três processos de Poisson independentes:

$(\tau_n^i)_{n \in \mathbb{N}}, (\tau_n^i)_{n \in \mathbb{N}}, (\tau_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ com parâmetros λ, λ e 1 , respectivamente (i.e., as variáveis aleatórias $\tau_1^i, \tau_2^i - \tau_1^i, \dots, \tau_{n+1}^i - \tau_n^i, \dots$, são exponenciais de média $1/\lambda$ independentes, etc). Os processos acima definidos com índices i diferentes são independentes.

Para cada $i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, construiremos setas de (i, τ_n^i) para $(i+1, \tau_n^i)$ e de (i, τ_n^i) para $(i-1, \tau_n^i)$. Finalmente, colocamos sinais $+$ nos pontos (i, τ_n^i) (veja [9] para construções muito mais gerais e figuras).

Dados dois pontos (i, s) e (j, t) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$, com $s < t$, diremos que há um caminho (ou trajetória) de (i, s) a (j, t) se houver uma sequência de segmentos verticais orientados no sentido crescente do tempo e setas levando de (i, s) a (j, t) sem passar por nenhum sinal $+$.

Dado $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, definiremos o processo $(\xi^A(t), t \geq 0)$ começando em A por $\xi^A(t) = \{j \in \mathbb{Z}: \text{há uma trajetória de } (i, 0) \text{ a } (j, t) \text{ para algum } i \in A\}$. Subentendendo-se que $\xi^A(0) = A$.

Da mesma maneira, podemos definir processos de contacto sobre $\mathcal{P}(\{-N, -N+1, \dots\})$ e $\mathcal{P}(\{-N, -N+1, \dots, N-1, N\})$, $N \in \mathbb{N}$. No primeiro caso apenas tomaremos $(\tau_n^i)_{n \geq 1}, (\tau_n^i)_{n \geq 1}$ e $(\tau_n^i)_{n \geq 1}$ para $i \geq -N+1$ e para $i = -N$ tomaremos apenas $(\tau_n^i)_{n \geq 1}$ e $(\tau_n^i)_{n \geq 1}$. O Processo de Contacto sobre $\mathcal{P}(\{-N, -N+1, \dots\})$ será denotado por $(\xi_{[-N, \infty)}(t))_{t \geq 0}$. O Processo de Contacto sobre $\mathcal{P}(\{-N, \dots, N\})$ é obtido tomando os processos $(\tau_n^i)_{n \geq 1}, (\tau_n^i)_{n \geq 1}$ e $(\tau_n^i)_{n \geq 1}$ para $i \in \{-N+1, \dots, N-1\}$, $(\tau_n^{-N})_{n \geq 1}, (\tau_n^{-N})_{n \geq 1}, (\tau_n^{-N})_{n \geq 1}$ e $(\tau_n^N)_{n \geq 1}$. Este processo será denotado $(\xi_N(t), t \geq 0)$.

Em todos os casos o índice superior na denominação dos Processos de Contacto indicará a condição inicial (por exemplo, $\xi_{[-N, \infty)}^A(0) = A$, $\xi_N^A(0) = A$, etc).

Os processos de contacto têm sido muito estudados desde sua invenção por Harris [19] (ver [2], [3], [9], [20]).

$(\xi_N(t), t \geq 0)$ é um processo markoviano com espaço de estados finito. Apresenta uma única medida invariante concentrada no conjunto vazio, δ_ϕ . $(\xi(t), t \geq 0)$ e $(\xi_{[-N, \infty)}, t \geq 0)$ apresentam dois possíveis comportamentos. Existe um valor crítico $\lambda_* > 0$ tal que se $\lambda < \lambda_*$ ambos têm como única medida invariante δ_ϕ . Se $\lambda > \lambda_*$ ambos apresentam uma família a um parâmetro de medidas invariantes, formada pelas combinações lineares convexas de δ_ϕ e $\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi^Z(t)$ (respectivamente $\mu_{[-N, \infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_{[-N, \infty)} \cap \xi^Z(t))$, no sentido da convergência fraca de medidas. O fato destes dois processos apresentarem o mesmo valor crítico λ_* para sua mudança de comportamento foi provado recentemente [3].

No que segue, usaremos a convenção de que quando a condição inicial não estiver explícita ela será aquela em que todos os sítios relevantes estão ocupados no início. Por exemplo, $\xi(0) = Z$, $\xi_N(0) = \{-N, \dots, N\}$.

Outras observações sobre a notação são: usamos $\int f(\eta) d\mu(\eta)$, $\int f d\mu$, $\mu(f)$ para representar o valor esperado do observável f na medida μ . $(\xi^\nu(t), t \geq 0)$ representa o processo de contacto com medida inicial ν , no sentido de escolhermos aleatoriamente, segundo a distribuição de probabilidades ν a medida inicial. Se denominarmos por (Ω, Σ, P) o espaço de probabilidade no qual a estrutura de flechas e cruzeiros é escolhida, o processo $\xi^\nu(t)$, $t \geq 0$ é definido sobre o espaço de probabilidades

que é produto deste por $(\{0,1\}^Z, A, \nu)$ onde A é a σ -álgebra gerada pelos cilindros em $\{0,1\}^Z$. Da mesma forma, $(\xi_N^\nu(t), t \geq 0)$ tem medida inicial $\nu|_{\{-N,\dots,N\}}$ e $(\xi_{[0,\infty)}^\nu(t), t \geq 0)$ tem medida inicial $\nu|_{\{0,1,\dots\}}$. Ainda

$$T^\nu = \inf\{t \geq 0 : \xi^\nu(t) = \phi\}$$

etc.

C. OS PROBLEMAS TRATADOS EM [1] E NO PRESENTE TRABALHO

O processo $(\xi_N(t), t \geq 0)$ para $\lambda > \lambda_*$ é um candidato natural para exibir o comportamento metaestável descrito na secção I desta introdução. Para o processo em Z , teríamos com o mesmo λ

$$\xi(t) \rightarrow \mu \neq \delta_\phi \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

O processo em volume finito se assemelha àquele em volume infinito se estivermos longe das bordas. Durante um longo tempo deveremos observar uma medida próxima de $\mu|_{\{-N,\dots,N\}}$ até, repentinamente, o sistema passar à situação estável δ_ϕ .

Antes de enunciarmos os resultados precisos necessitamos de alguma notação:

Tempos até extinção:

$$T^A = \inf\{t > 0 : \xi^A(t) = \phi\}$$

$$T_N^A = \inf\{t > 0 : \xi_N^A(t) = \phi\}$$

Continuaremos adotando a convenção de que quando a condição inicial não estiver explícita ela será aquela em que todos os sítios relevantes estão preenchidos. Por exemplo:

$$T_N = T_N^{\{-N, \dots, N\}}.$$

Uma função $f : P(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita cilíndrica se houver um conjunto finito $B \subset Z$ tal que $f(A) = f(A \cap B), \forall A \in P(Z)$. O menor B com esta propriedade é chamado de suporte de f e será denotado $\Lambda(f)$.

As médias temporais sobre trajetórias serão definidas através do seguinte processo: dado $R > 0, N \in \{1, 2, \dots\}$ definimos os processos a valor medido

$$A_R^N(s, \cdot) = \frac{1}{R} \int_s^{s+R} \delta_{\xi_N(t)}(\cdot) dt$$

$M_1(P(Z))$ representa o espaço de medidas de probabilidade sobre $P(Z)$ com topologia fraca* ($P(Z) = \{0, 1\}^Z$ com topologia produto e σ -álgebra de Borel). Os processos A_R^N têm trajetórias em $D([0, \infty), M_1(P(Z)))$ e sua convergência significará convergência das medidas de probabilidade no espaço de Skorohod.

Finalmente, a fim de enunciar os resultados provados em [1] necessitamos do processo $(\vec{\xi}(t), t \geq 0)$. Este é o contacto em Z utilizando setas apenas para a direita. Este processo também apresenta um comportamento crítico: para $\lambda < \vec{\lambda}_*$ apresenta uma única medida invariante e para $\lambda > \vec{\lambda}_*$ uma família a um parâmetro de medidas invariantes. Vale a relação $\vec{\lambda}_* > \lambda_*$.

Em [1] foram provados os teoremas:

Teorema [1].3.2 - Se $\lambda > \vec{\lambda}_*$ e β_N é definido por $P(T_N > \beta_N) = e^{-1}$, então T_N/β_N converge em distribuição quando $N \rightarrow \infty$ a uma variável aleatória exponencial de média um.

Teorema [1].3.3 - Se $\lambda > \bar{\lambda}_*$, existe uma sequência crescente de números reais positivos $(R_N, N \geq 1)$ tais que:

$$i) \frac{R_N}{\beta_N} \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

(β_N definido no teorema [1].3.2)

$$ii) \forall \varepsilon > 0, \forall f \text{ cilíndrica: } P(Z) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \left[\max_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ 0 < \ell < K_N - 1}} \left| A_{R_N}^N(\ell R_N, f) - \int f d\mu \right| > \varepsilon \right] \rightarrow 0$$

onde $K_N = \max\{\ell \geq 0 : \ell \text{ é inteiro e } \ell R_N \leq T_N\}$

Destes dois teoremas segue o

Teorema [1].3.1 - Se $\lambda > \bar{\lambda}_*$ existem seqüências crescentes de números reais positivos $(R_N, N \geq 1)$ e $(\beta_N, N \geq 1)$ tais que o processo $(A_{R_N}^N(s\beta_N), s \geq 0)$ converge em lei, quando $N \rightarrow \infty$ para um processo markoviano de salto $(A(s), s \geq 0)$ definido por:

$$A(s) = \begin{cases} \mu & \text{se } s < T \\ \delta_\phi & \text{se } s > T \end{cases}$$

onde T é um tempo aleatório cuja distribuição é exponencial de média um.

OBSERVAÇÃO: o enunciado do teorema [1].3.³ afirma não só que as médias temporais na situação metaestável são constantes, mas também que são idênticas a $\int f d\mu$. Referir - nos-emos a propriedades deste tipo como Termalização, uma vez que indicam serem as médias temporais iguais as médias num *ensemble* e que portanto a situação é análoga a um equilíbrio termodinâmico.

No capítulo I estendemos estes resultados. Em primeiro lugar, mostramos sua validade para todo $\lambda > \lambda_*$. Mostramos que podemos enunciar um teorema mais forte do que o teorema [1].3.3, tomando, simultaneamente, transladados da função cilíndrica f e obtendo estimativas uniformes sobre a proximidade entre as médias empíricas $A_{R_N}^N(\mathcal{L}_{R_N}, f)$ e o valor $\int f d\mu$ para estes transladados. Como corolário, resulta um teorema análogo para observáveis que são médias espaciais de transladados de uma função cilíndrica, como a densidade. Verificamos teoremas análogos para o processo $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$, cuja condição inicial é $\mu|_{\{-N, \dots, N\}}$. Este último resultado torna mais claro o papel da condição inicial para o comportamento metaestável do Processo de Contacto.

No capítulo II obtemos resultados cujo interesse é independente do problema da metaestabilidade. Estudamos as flutuações para o processo estacionário $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$. Provamos que para toda função cilíndrica $f : P(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ vale

$$\sqrt{R} \left[\frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^\mu(t)) dt - \int f d\mu \right] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_f^2)$$

$$0 < \sigma_f^2 < \infty$$

quando $R \rightarrow \infty$. A partir daí, mostramos que para toda medida inicial ν tal que $\nu(\eta: |\eta| < \infty) = 0$ vale resultado análogo:

$$\sqrt{R} \left[\frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^\nu(t)) dt - \int f d\mu \right] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_f^2)$$

quando $R \rightarrow \infty$.

Finalmente, no capítulo III mostramos que as flutua

ções na situação metaestável são idênticas às do processo $(\xi^H(t), t \geq 0)$, ao menos se tomarmos médias temporais ao longo de intervalos de tempo S_N tais que $S_N/N \rightarrow 0$.

OBSERVAÇÃO: Tanto nos teoremas em [1] quanto nos do presente trabalho é possível substituir a normalização β_N , que é um quantil da distribuição de T_N , por $E(T_N)$. Isto está demonstrado em [24] (lema 3.7).

CAPÍTULO I - EXTENSÃO DOS TEOREMAS BÁSICOS PARA A METAESTABILIDADE NO MODELO DO CONTACTO

I.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, obtemos teoremas que estendem resultados obtidos em [1].

Na secção I.2, mostramos a validade do teorema [1].3.2 para todo $\lambda > \lambda_*$.

Na secção I.3, estendemos o teorema [1].3.3 num sentido proposto por Errico Presutti: mostramos que tomando trasladados da função cilíndrica f ainda temos convergência das médias temporais para as médias com respeito a μ , uniformemente. Como corolário, resulta a convergência das médias temporais de densidades espaciais para sua média com respeito a μ . Tecnicamente, estes resultados são conseguidos a partir de estimativas derivadas do decaimento exponencial das funções de correlação temporais para o processo $(\xi(t), t \geq 0)$, as quais serão demonstradas no capítulo II. Estes resultados são válidos para todo $\lambda > \lambda_*$; resulta, portanto, um teorema análogo ao teorema [1].3.1 para todo $\lambda > \lambda_*$.

Na secção seguinte, mostramos resultados análogos para o processo de contacto cuja medida inicial de probabilidade é μ restrita às partes de $[-N, N] \cap \mathbb{Z}$.

I.2. CONVERGÊNCIA À EXPONENCIAL PARA TODO $\lambda > \lambda_*$

Teorema I.2.1 - Se $\lambda > \lambda_*$ e β_N é definido por $P(T_N > \beta_N) = e^{-1}$, então T_N/β_N converge em distribuição quando

$N \rightarrow \infty$ para uma variável aleatória exponencial de média um.

Demonstração:

Mostraremos que para todos $t > 0, s > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s + t \right] - P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s \right] P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > t \right] \right\} = 0 \quad (I.2.1)$$

em seguida, mostraremos que isto implica a tese.

Sejam

$$\rho = \rho_\lambda = \mu\{\eta: 0 \in \eta\}$$

$$F_b = \left\{ A \subset Z : \frac{|A \cap [-b, -1]|}{b} > \frac{\rho}{2}, \frac{|A \cap [1, b]|}{b} > \frac{\rho}{2} \right\}$$

Como μ é ergódica com respeito a translações espaciais [2], segue

$$\mu(F_b) \geq 1 - 2\mu \left\{ B \subset Z : \frac{|B \cap [-b, -1]|}{b} \leq \frac{\rho}{2} \right\} \nearrow 1$$

quando $b \nearrow \infty$

$$\text{logo } \mu(F_b) \rightarrow 1 \text{ quando } b \nearrow \infty. \quad (I.2.2)$$

No sentido de provar (I.2.1) temos:

$$\begin{aligned} P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s + t \right] &= \\ &= \sum_{\substack{A \subset \{-N, \dots, N\} \\ A \neq \emptyset}} P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s+t \mid \xi_N(\beta_N s) = A \right] \cdot P \left[\xi_N(\beta_N s) = A \right] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{AC\{-N, \dots, N\} \\ A \neq \phi}} P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s+t \mid \xi_N(\beta_N s) = A \right] \cdot P \left[\xi_N(\beta_N s) = A, T_N > \beta_N s \right] =$$

$$= \sum_{\substack{AC\{-N, \dots, N\} \\ A \neq \phi}} P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] P \left[\xi_N(\beta_N s) = A, T_N > \beta_N s \right] =$$

$$= \sum_{\substack{AC\{-N, \dots, N\} \\ A \in F_b}} P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] P \left[\xi_N(\beta_N s) = A, T_N > \beta_N s \right] +$$

$$+ \sum_{\substack{AC\{-N, \dots, +N\} \\ A \notin F_b \\ A \neq \phi}} P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] P \left[\xi_N(\beta_N s) = A, T_N > \beta_N s \right]$$

Logo:

$$\left| P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s \right] P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > t \right] - P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s+t \right] \right| \leq$$

$$\leq \left| P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s \right] P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > t \right] - \sum_{\substack{AC\{-N, \dots, N\} \\ A \in F_b}} P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] P \left[\xi_N(\beta_N s) = A, T_N > \beta_N s \right] \right| +$$

$$+ P \left[\xi_N(\beta_N s) \notin F_b, T_N > \beta_N s \right] \leq$$

$$\leq \left| P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s \right] P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > t \right] - \min_{\substack{AC\{-N, \dots, N\} \\ A \in F_b}} P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] P \left[\xi_N(\beta_N s) \in F_b, T_N > \beta_N s \right] \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + P \left[\xi_N(\beta_N s) \notin F_b, T_N > \beta_N s \right] = \\
& = \left| P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > s \right] \left\{ P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > t \right] - \min_{\substack{A \in F_b \\ AC\{-N, \dots, N\}}} P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] \right\} + \right. \\
& \left. + \min_{\substack{A \in F_b \\ AC\{-N, \dots, N\}}} P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] P \left[\xi_N(\beta_N s) \notin F_b, T_N > \beta_N s \right] \right| + \\
& + P \left[\xi_N(\beta_N s) \notin F_b, T_N > \beta_N s \right] \leq \\
& \leq \left| P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > t \right] - \min_{\substack{A \in F_b \\ AC\{-N, \dots, N\}}} P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] \right| + 2P \left[\xi_N(\beta_N s) \notin F_b, T_N > \beta_N s \right]
\end{aligned}$$

(I.2.1) segue então se mostrarmos que $\forall \epsilon > 0$, $\exists b(\epsilon)$ e $N(\epsilon)$ tais que

- i) $P[\xi_N(\beta_N s) \notin F_{b(\epsilon)}, T_N > \beta_N s] \leq \epsilon$ se $N \geq N(\epsilon)$
- ii) $\forall A \in F_{b(\epsilon)}, P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > t \right] - P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] \leq \epsilon$ se $N \geq N(\epsilon)$.

Mostraremos, inicialmente, (ii). Por aditividade

$$\begin{aligned}
& P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > t \right] - P \left[\frac{T_N^A}{\beta_N} > t \right] = P \left[\frac{T_N}{\beta_N} > t, \frac{T_N^A}{\beta_N} \leq t \right] \leq \\
& \leq P[T_N \neq T_N^A]
\end{aligned} \tag{I.2.3}$$

Usaremos, agora, como auxiliar, o processo de contacto na semi-reta. No que segue, usamos sua autodualidade.

Dado $\epsilon > 0$, seja $n(\epsilon)$ tal que se $n \geq n(\epsilon)$, então

$\mu_{[0, \infty)}\{B^- : B \cap [1, n] \neq \emptyset\} \geq 1 - \epsilon/2$ e tome $b = b'(\epsilon)$ tal que

$$b'(\epsilon) \cdot \frac{\rho}{2} \geq n(\epsilon).$$

Por autodualidade; para $A \in \mathcal{F}_b$

$$P \left[T_{\begin{smallmatrix} A \cap [-b, -1] \\ [-b, \infty) \end{smallmatrix}} = +\infty \right] \geq 1 - \epsilon/2$$

$$P \left[T_{\begin{smallmatrix} A \cap [1, b] \\ (-\infty, b] \end{smallmatrix}} = +\infty \right] \geq 1 - \epsilon/2$$

Como a interação no modelo de contacto $\bar{e}$ de primeiros vizinhos, na intersecção de eventos

$$\left[T_{\begin{smallmatrix} A \cap [-b, -1] \\ [-b, \infty) \end{smallmatrix}} = T_{\begin{smallmatrix} A \cap [1, b] \\ (-\infty, b] \end{smallmatrix}} = +\infty \right]$$

existe, quase certamente, um sítio x , $x \in A \cap [-b, b]$, cuja descendência $(\xi^x(\ell))_{\ell \geq \beta_N s}$ atinge tanto N como $-N$. Isto ocorre porque

$$\xi_{\begin{smallmatrix} A \cap [-b, -1] \\ [-b, \infty) \end{smallmatrix}}(\ell) \subset \xi_{\begin{smallmatrix} A \cap [-b, b] \\ (-\infty, b] \end{smallmatrix}}(\ell) \quad \forall \ell \geq \beta_N s$$

$$\xi_{\begin{smallmatrix} A \cap [1, b] \\ (-\infty, b] \end{smallmatrix}}(\ell) \subset \xi_{\begin{smallmatrix} A \cap [-b, b] \\ (-\infty, b] \end{smallmatrix}}(\ell) \quad \forall \ell \geq \beta_N s$$

Mas após $(\xi^x(\ell))_{\ell \geq s}$ ter atingido N e $-N$, temos $\xi_N^A(\ell) = \xi_N(\ell)$,

em particular $T_N^A = T_N$. Desta maneira, podemos concluir que:

$$P(T_N \neq T_N^A) \leq \epsilon$$

e (I.2.3) conduz a (ii).

Mostraremos, agora, (i):

$$\begin{aligned} P[\xi_N(\beta_N s) \notin F_b, T_N > \beta_N s] &\leq \\ &\leq P[\xi_N(\beta_N s) \notin F_b, T_N > \beta_N s, \min \xi_N(\beta_N s) < -N+L, \max \xi_N(\beta_N s) > N-L] + \\ &+ P[\min \xi_N(\beta_N s) \geq -N+L, T_N > \beta_N s] + P[\max \xi_N(\beta_N s) \leq N-L, T_N > \beta_N s] \end{aligned}$$

(I.2.4)

onde tomamos $N > N - L > b$.

Por construção, se $\beta_N s < T_N$

$$\begin{aligned} \xi_N(\beta_N s) \cap [\min \xi_N(\beta_N s), \max \xi_N(\beta_N s)] &= \\ &= \xi(\beta_N s) \cap [\min \xi_N(\beta_N s), \max \xi_N(\beta_N s)]. \end{aligned}$$

Então a primeira parcela em (I.2.4) pode ser limitada, superiormente, por $P[\xi(\beta_N s) \notin F_b]$.

Por monotonicidade e usando (I.2.2) vem:

$$P[\xi(\beta_N s) \notin F_b] \leq \mu(F_b^c) \leq \epsilon/3 \quad \text{se } b \geq b''(\epsilon) \quad (I.2.5)$$

A fim de controlarmos os outros dois termos em (I.2.4), usaremos novamente, como auxiliar, o processo de contato na semi-reta. Do fato de a interação ser entre primeiros vi

zinhos segue para $t < T_N$ que $\min \xi_N(t) = \min \xi_{[-N, \infty)}(t)$. Logo:

$$P[\min \xi_N(\beta_N s) \geq -N + L, T_N > \beta_N s] \leq$$

$$\leq P[\min \xi_{[-N, \infty)}(\beta_N s) \geq -N + L].$$

Por monotonicidade:

$$P[\min \xi_{[-N, \infty)}(\beta_N s) \geq -N + L] \leq$$

$$\leq \mu_{[-N, \infty)}\{AC[-N, \infty) \cap Z : A \cap [-N, -N + L - 1] = \emptyset\}$$

Como $\lambda > \lambda_*$, podemos tomar $L = L(\epsilon)$ tal que este último seja inferior a $\epsilon/3$ (sobre a ergodicidade de $\mu_{[0, \infty)}$ ver [3]). Isto controla o segundo termo em (I.2.4).

O último termo em (I.2.4) é análogo a este, de modo que (i) se verifica.

Finalmente, vamos mostrar que a tese segue de (I.2.1). Em primeiro lugar, para $k = 1, 2, 3, \dots$, $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > kx\right) - P^k\left(\frac{T_N}{\beta_N} > x\right) \right| &\leq \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > kx\right) - P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > (k-1)x\right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > x\right) \right| + \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > (k-1)x\right) \cdot P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > x\right) - \right. \\ &\quad \left. - P^k\left(\frac{T_N}{\beta_N} > x\right) \right| \leq \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > kx\right) - P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > (k-1)x\right)P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > x\right) \right| + \\ &\quad + \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > (k-1)x\right) - P^{k-1}\left(\frac{T_N}{\beta_N} > x\right) \right| \end{aligned}$$

O primeiro termo no segundo membro vai a zero quando $N \rightarrow \infty$, por I.2.1. Então provamos por indução que $x \in \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > kx\right) - P^k\left(\frac{T_N}{\beta_N} > x\right) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \nearrow \infty.$$

Daí segue que para r racional

$$P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > r\right) \rightarrow e^{-r}$$

Como $P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > t\right)$ é decrescente para cada N como função de t , segue para todo $r < t < s$, r e s racionais, t real.

$$\begin{aligned} \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > t\right) - e^{-t} \right| &\leq \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > t\right) - P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > r\right) \right| + \\ &+ \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > r\right) - e^{-t} \right| \leq \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > s\right) - P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > r\right) \right| + \\ &\vdots \\ &+ \left| e^{-r} - e^{-t} \right| + \left| P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > r\right) - e^{-r} \right| \end{aligned}$$

Tomando, então, duas seqüências de racionais: $r_N \nearrow t$ e $s_N \searrow t$ segue

$$P\left(\frac{T_N}{\beta_N} > t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \forall t > 0$$

I.3. TERMALIZAÇÃO - UNIFORMIDADE SOBRE TRANSLADADOS, DENSIDADES

No que segue usaremos a notação:

Dada uma função cilíndrica f , $\Lambda(f)$ será seu suporte, i.e., o menor subconjunto de Z tal que $f(\eta) = f(\eta \cap \Lambda(f))$, $\forall \eta \subset Z$. Se não houver perigo de confusão indicaremos $\Lambda(f) = \Lambda$.

Para cada $i \in Z$, τ_i será um operador de translação sobre funções cilíndricas:

$$(\tau_i f)(\eta) = f(\eta^{(i)}) \quad \eta^{(i)}(x) = \eta(x-i)$$

Dados f cilíndrica e $N, L \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_{\Lambda, N}(L) = \{i \in Z : \Lambda(\tau_i f) \subset [-N+L, N-L] \cap Z\}$$

$$\tilde{I}_{\Lambda, N} = \{i \in Z : \Lambda(\tau_i f) \subset [-N, N] \cap Z\}$$

Teorema I.3.1 - Se $\lambda > \lambda_*$, existe uma seqüência crescente de números reais positivos $(R_N, N \geq 1)$ tal que

$$i) \quad R_N/\beta_N \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty$$

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ e f cilíndrica, existe $L = L(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$P \left[\max_{\substack{\ell \in Z \\ 0 \leq \ell < k_N - 1}} \max_{i \in I_{\Lambda}} \left| A_{R_N}^N(\ell R_N, \tau_i f) - \mu(f) \right| > \varepsilon \right] \rightarrow 0$$

onde $K_N = \max\{k \in \mathbb{N} : kR_N \leq T_N\}$

1ª Parte da Demonstração

Uma vez que T_N é quase certamente finita, para todo real positivo R_N , K_N é uma variável aleatória bem definida e quase certamente finita. Ademais, se R_N verificar a condição (i) acima, segue do teorema I.2.1 que $P(K_N = 0) \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Seja, então, $(R_N, N \geq 1)$ uma sequência satisfazendo (i). Dado $\varepsilon > 0$ e f cilíndrica, sejam os eventos

$$B_{k,i}^N = [|A_{R_N}^N(kR_N, \tau_i f) - \mu(f)| > \varepsilon]$$

Então, para todo $m \geq 1, L \geq 0$

$$\begin{aligned} P[K_N \geq 1, \bigcap_{1 \leq k < K_N} \bigcap_{i \in I_{\Lambda, N}(L)} (B_{k,i}^N)^c] &= \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (P[K_N = j] - P[\bigcup_{k=1}^{j-1} \bigcup_{i \in I_{\Lambda, N}(L)} B_{k,i}^N, K_N = j]) \geq \\ &\geq P[1 \leq K_N \leq m] - \sum_{j=1}^m P[\bigcup_{k=1}^{j-1} \bigcup_{i \in I_{\Lambda, N}(L)} B_{k,i}^N, K_N = j] \geq \\ &\geq P[1 \leq K_N \leq m] - \sum_{j=1}^m j \cdot (2N+1) \max_{\substack{1 \leq k < j \\ i \in I_{\Lambda, N}(L)}} P[B_{k,i}^N, K_N = j] \\ &\geq P[1 \leq K_N \leq m] - m^2 (2N+1) \max_{j \geq 1} \max_{\substack{1 \leq k < j \\ i \in I_{\Lambda, N}(L)}} P[B_{k,i}^N, K_N = j] \quad (I.3.1) \end{aligned}$$

Para $i \in I_{\Lambda, N}(L)$, o evento

$$[\min \xi_N(t) < -N + L, \max \xi_N(t) > N - L]$$

implica (está contido em)

$$[\tau_i f(\xi_N(t)) = \tau_i f(\xi(t))].$$

Se definirmos $h_L(\eta) = I_{\{\zeta: \zeta \cap [-N, -N+L] = \emptyset\}}(\eta)$, então, para $t < T_N$

$$h_L(\xi_N(t)) = h_L(\xi_{[-N, \infty)}(t)).$$

Caso $k < j$, $i \in I_{\Lambda, N}(L)$ temos

$$\begin{aligned} P[B_{k,i}^N, K_N = j] &= P[|A_{R_N}^N(kR_N, \tau_i f) - \mu(f)| > \varepsilon, K_N = j] \leq \\ &\leq P[|A_{R_N}^N(kR_N, \tau_i f) - \frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} \tau_i f(\xi(t)) dt| > \frac{\varepsilon}{2} \text{ ou } \\ &|\frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} \tau_i f(\xi(t)) dt - \mu(f)| > \frac{\varepsilon}{2}, K_N = j] \quad (I.3.2) \end{aligned}$$

Mas, trajetória por trajetória, em $[K_N = j]$, se $k < j$

$$\begin{aligned} |A_{R_N}^N(kR_N, \tau_i f) - \frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} \tau_i f(\xi(t)) dt| &\leq \\ &\leq 2 \|f\| \frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} (h_L(\xi_N(t)) + h_L(S\xi_N(t))) dt = \\ &= 2 \|f\| \frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} (h_L(\xi_{[-N, \infty)}(t)) + h_L(S\xi_{(-\infty, N]}(t))) dt \quad (I.3.3) \end{aligned}$$

onde

$$||f|| = \sup_{\eta \in \mathbb{Z}} f(\eta)$$

e S é o operador sobre configurações definido por

$$(S\eta)(x) = \eta(-x)$$

Definindo os eventos

$$\Gamma_{k,i}^N = \left[\left| \frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} \tau_i f(\xi(t)) dt - \mu(f) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

$$\tilde{\Gamma}_k^N = \left[2 ||f|| \frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} h_L(\xi_{[-N,\infty)}(t)) dt > \frac{\varepsilon}{4} \right]$$

$$\Gamma_k^N = \Gamma_{k,0}^N$$

segue de (I.3.2) e (I.3.3), notando que $P(\Gamma_{k,i}^N)$ independe de i ,

$$P[B_{k,i}^N, K_N = j] \leq P(\Gamma_k^N) + 2P(\tilde{\Gamma}_k^N) \quad (I.3.4)$$

A desigualdade (I.3.1) nos assegura que a parte (ii) da tese estará satisfeita se a parte (i) estiver e pudermos encontrar uma seqüência $(m_N, N \geq 1)$ tal que

$$a) \ P(1 \leq K_N \leq m_N) \rightarrow 1$$

$$b) \ m^2(2N+1) \cdot \left(\max_{k \geq 1} P(\Gamma_k^N) + \max_{k \geq 1} P(\tilde{\Gamma}_k^N) \right) \rightarrow 0$$

A condição (a) pode, ainda, ser escrita como

$P[T_N \leq m_N R_N] \rightarrow 1$ e, em vista do teorema I.2.1, como $m_N R_N / \beta_N \rightarrow \infty$.

Usando a notação

$$\alpha_L(R_N) = \max_{k \geq 1} P(\Gamma_k^N) + \max_{k \geq 1} P(\tilde{\Gamma}_k^N)$$

e incluindo a parte (i) do teorema, o nosso problema se resume em encontrar $L \in \mathbb{N}$ e duas seqüências $(R_N, N \geq 1)$, $(m_N, N \geq 1)$ que satisfaçam simultaneamente, quando $N \rightarrow \infty$,

$$a) \frac{m_N R_N}{\beta_N} \rightarrow \infty$$

$$b) m_N^2 \alpha_L(R_N) \rightarrow 0$$

$$c) \frac{R_N}{\beta_N} \rightarrow 0$$

Comentários e lemas. Final da demonstração

Em [1], na demonstração do teorema [1].3.3, obtêm-se um sistema semelhante de condições, com a única diferença que (b) é substituída pela condição mais fraca

$$b') m_N^2 \alpha_L(R_N) \rightarrow 0$$

Naquele trabalho são usados os teoremas ergódicos pontuais e de Birkhoff para o processo de contacto na reta e na semi-reta, para mostrar que se $L = L(\epsilon)$ for convenientemente escolhido, então $\alpha_L(\cdot)$ é decrescente e converge a zero quando o argumento vai a infinito. Em seguida, mostra-se que este fato é suficiente para garantir a existência de $(R_N, N \geq 1)$ e $(m_N, N \geq 1)$ satisfazendo (a), (b') e (c).

Este tipo de argumento não nos basta, pois seria

possível que $\alpha_L(x) \searrow 0$ mas que $N\alpha_L(\beta_N) \not\rightarrow 0$. Nosso problema não teria então solução, pois

$$(a) + (c) \Rightarrow m_N \rightarrow \infty$$

e usando (c) novamente, para N grande segue

$$m_N^2 N\alpha_L(R_N) > m_N^2 N\alpha_L(\beta_N) \not\rightarrow 0.$$

Felizmente o decaimento exponencial das correlações temporais para $(\xi(t))_{t \geq 0}$ e $(\xi_{[0, \infty)}(t))_{t \geq 0}$, que mostraremos no capítulo II, nos permite obter a estimativa $\alpha_L(R_N) \leq C/R_N$ (C constante). (b) pode então ser substituído por

$$(b'') \quad m_N^2 N/R_N \rightarrow 0$$

A resolução do sistema (a), (b''), (c) ainda depende de estimativa sobre a relação entre β_N e N , pois se tivéssemos $N/\beta_N \neq 0$ viria

$$(c) \Rightarrow \frac{N}{R_N} \not\rightarrow 0$$

$$(a) + (c) \Rightarrow m_N \rightarrow \infty$$

$$\text{então } m_N^2 N/R_N \not\rightarrow 0.$$

Por outro lado se tivermos $N/\beta_N \rightarrow 0$ teremos a seguinte solução para o nosso problema:

$$m_N = \left(\frac{\beta_N}{N}\right)^{1/5}$$

(I.3.5)

$$R_N = \beta_N^{9/10} N^{1/10}$$

De fato

$$a) \frac{m_N R_N}{\beta_N} = \left(\frac{\beta_N}{N}\right)^{1/10} \rightarrow \infty$$

$$b") m_N^2 N/R_N = \left(\frac{N}{\beta_N}\right)^{1/2} \rightarrow 0$$

$$c) \frac{R_N}{\beta_N} = \left(\frac{N}{\beta_N}\right)^{1/10} \rightarrow 0$$

Embora conjecturemos que para todo $\lambda > \lambda_*$, β_N cresce exponencialmente com N , provamos abaixo apenas a afirmativa mais modesta, mas suficiente para nós, de que $N/\beta_N \rightarrow 0$.

Lema I.3.1 - Tomando $L = L(\epsilon)$ tal que

$$\mu_{[0,\infty)}\{A : A \cap [0,L] = \emptyset\} \leq \frac{\epsilon}{16\|f\|} \quad (I.3.6),$$

segue $\alpha_L(R) \leq \frac{C}{R}$ (C = constante que depende de ϵ e f)

OBSERVAÇÃO: a possibilidade de tomar L como acima, segue da ergodicidade sob translações espaciais de $\mu_{[0,\infty)}$, ver [3].

Demonstração:

No que segue, usaremos a convenção de que C represen

tarã constantes, mas de igualdade em igualdade seu valor poderã mudar.

Mostraremos, inicialmente, que $\max_{k \geq 1} P(\Gamma_k^N) \leq \frac{C}{R_N}$.

Definimos as variáveis aleatórias

$$X_k^R = \frac{1}{R} \int_{kR}^{(k+1)R} f(\xi(t)) dt - \mu(f)$$

$$Y_k^R = \frac{1}{R} \int_{kR}^{(k+1)R} f(\xi(t)) dt - \frac{1}{R} \int_{kR}^{(k+1)R} E f(\xi(t)) dt$$

Então

$$E(Y_k^R) = 0$$

e usando a observação após o teorema II.3.1 vem

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_k^R) &\leq \frac{2}{R^2} \int_{kR}^{(k+1)R} dr \int_r^{(k+1)R} ds | \text{Cov}(f(\xi(r)), f(\xi(s))) | \leq \\ &\leq \frac{2}{R^2} \int_{kR}^{(k+1)R} dr \int_r^\infty ds C e^{-\gamma(s-r)} = \frac{2}{R^2} \cdot CR = \frac{C}{R} \end{aligned}$$

(C independe de k).

Segue, usando a desigualdade de Chebyshev,

$$P[|Y_k^N| > \delta] \leq \frac{C}{\delta^2 R} \quad (\forall \delta > 0) \quad (I.3.7)$$

Por outro lado, como $\xi(t) \rightarrow \mu$ fracamente, quando

$t \rightarrow \infty$,

$$Ef(\xi(t)) \rightarrow \mu(f)$$

Ou, escrevendo $f = f_1 - f_2$ com f_1 e f_2 crescentes

$$Ef_i(\xi(t)) \rightarrow \mu(f_i) \quad \text{quando } t \rightarrow \infty$$

Daí

$$\frac{1}{R} \int_{kR}^{(k+1)R} Ef_i(\xi(t)) dt \rightarrow \mu(f_i) \quad \text{uniformemente em } k \text{ quando}$$

$$R \rightarrow \infty.$$

Dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $R(\epsilon)$ tal que

$$R > R(\epsilon) \Rightarrow \left| \frac{1}{R} \int_{kR}^{(k+1)R} Ef_i(\xi(t)) dt - \mu(f_i) \right| \leq \frac{\epsilon}{8}$$

para todo $k \geq 1$, $i = 1, 2$.

Segue, então, para $R_N > R(\epsilon)$

$$P(\Gamma_k^N) = P[|X_k^{R_N}| > \frac{\epsilon}{2}] \leq P[|Y_k^{R_N}| > \frac{\epsilon}{4}] \leq \frac{C}{R_N} \quad (I.3.8)$$

(C dependente de ϵ).

O outro termo, $\max_{k \geq 1} P(\tilde{\Gamma}_k^N)$ é controlado de maneira análoga. Definimos as variáveis aleatórias:

$$Z_k^R = \frac{1}{R} \int_{kR}^{(k+1)R} h_L(\xi_{[0,\infty)}(t)) dt$$

$$W_k^R = Z_k^R - \frac{1}{R} \int_{kR}^{(k+1)R} Eh(\xi_{[0,\infty)}(t)) dt$$

Em completa analogia com o que fizemos para Y_k^R obtemos

$$E(W_k^R) = 0$$

$$\text{Var}(W_k^R) \leq \frac{C}{R} \quad (C \text{ independente de } k)$$

Daí

$$P[|W_k^R| > \delta] \leq \frac{C}{\delta^2 R} \quad (\forall \delta > 0) \quad (I.3.9)$$

Também

$$Eh_L(\xi_{[0,\infty)}(t)) \nearrow \mu_{[0,\infty)}(h_L) \quad \text{quando } t \rightarrow \infty$$

Então, para todos k e R

$$\frac{1}{R} \int_{kR}^{(k+1)R} Eh_L(\xi_{[0,\infty)}(t)) dt \leq \mu_{[0,\infty)}(h_L) \leq \frac{\epsilon}{16||f||}$$

onde a última desigualdade segue da maneira como tomamos $L = L(\epsilon)$.

Finalmente resulta

$$\begin{aligned} P(\tilde{I}_k^N) &= P[2||f|| |Z_k^R| > \frac{\epsilon}{4}] \leq \\ &\leq P[|W_k^R| \geq \frac{\epsilon}{16||f||}] \leq \frac{C}{R_N} \end{aligned} \quad (I.3.10)$$

(C dependente de ϵ e f)

□

Lema 1.3.2 - $N/\beta_N \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$, se $\lambda > \lambda_*$.

Demonstração:

Seja o evento

$$A_a = [\forall x \in [-aN, aN] \cap \mathbb{Z}, \quad \forall t \geq 0, \quad \xi^{\{x\}}(t) \notin \{-N, N\}]$$

$$(0 < a < 1)$$

ou seja, no evento A_a a descendência a partir de cada sítio em $[-aN, aN]$ se extingue antes de atingir alguma borda. O lema de Borel-Cantelli garante que

$$P[\xi^{[-aN, aN] \cap \mathbb{Z}}(t) \neq \phi \quad \forall t \geq 0, A_a] = 0$$

Por autodualidade segue, caso $\lambda > \lambda_*$

$$P(A_a) \leq \mu\{B \subset \mathbb{Z} : B \cap [-aN, aN] = \phi\} \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow \infty$.

Por outro lado, em A_a^C há uma trajetória saindo de $[-aN, aN]$ e chegando a uma das bordas; seja U o instante em que borda é atingida (se houver mais de uma trajetória nestas condições escolhemos uma delas). U é minorado por uma variável aleatória Y_N igual ao instante da $[N(1-a)]^e$ ocorrência de um processo de Poisson de taxa λ . Por sua vez U minora T_N , trajetória por trajetória. Então

$$P[T_N \leq \frac{\lambda}{2} N(1-a)] \leq P[T_N \leq \frac{\lambda}{2} N(1-a), A_a^C] +$$

$$\begin{aligned}
& + P[A_a] \leq P[Y_N \leq \frac{\lambda}{2} N(1-a), A_a^c] + P[A_a] \leq \\
& \leq P[Y_N \leq \frac{\lambda}{2} N(1-a)] + P[A_a] \rightarrow 0 \quad (I.3.11)
\end{aligned}$$

onde usamos a lei dos grandes números.

Seja $b = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\beta_N}$. Existe, então, uma subsequência $N_k/\beta_{N_k} \rightarrow b$ quando $k \rightarrow \infty$. Pelo teorema I.2.1, segue

$$P\left[\frac{T_{N_k}}{\beta_{N_k}} \leq \lambda \frac{1-a}{2} \frac{N_k}{\beta_{N_k}}\right] \rightarrow F\left(\lambda \frac{1-a}{2} b\right) \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

$$\text{onde } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Mas por (I.3.11) isto só pode acontecer se $F(\lambda \frac{1-a}{2} b) = 0$ e, portanto, $b \leq 0$. Como a sequência N/β_N é positiva isto conduz à tese.

□

Isto completa, também, a demonstração do teorema I.3.1.

Os teoremas I.2.1 e I.3.1 permitem demonstrar o teorema [1].3.1 para todo $\lambda > \lambda_*$. A demonstração é a mesma feita em [1]. Um importante corolário do teorema I.3.1 é o teorema I.3.2 que mostra a termalização de densidades espaciais, as quais são uma classe importante de observáveis macroscópicos.

Definição:

$$B_{R_N}^N(\mathcal{L}_{R_N}, f) = \frac{1}{|\tilde{I}_{\Lambda, N}|} \sum_{i \in \tilde{I}_{\Lambda, N}} A_{R_N}^N(\mathcal{L}_{R_N}, \tau_i f)$$

Teorema I.3.2 - Se $\lambda > \lambda_*$ e a seqüência $(R_N, N \geq 1)$ é aquela obtida no teorema I.3.1, então

$$P \left[\max_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \ell < K_N - 1}} |B_{R_N}^N(\ell R_N, f) - \mu(f)| > \varepsilon \right] \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty$$

para toda f cilíndrica e $\varepsilon > 0$.

Demonstração:

O teorema I.3.1 implica

$$P \left[\max_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \ell < K_N - 1}} \left| \frac{1}{|I_{\Lambda, N}(L)|} \sum_{i \in I_{\Lambda, N}(L)} A_{R_N}^N(\ell R_N, \tau_i f) - \mu(f) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right] \rightarrow 0$$

onde fixamos $L = L(\varepsilon/2)$.

Como $|\tilde{I}_{\Lambda, N}| = 2N+1 - \Lambda$ segue de uma simples desigualdade^(*) que

$$\left| \frac{1}{|\tilde{I}_{\Lambda, N}|} \sum_{i \in \tilde{I}_{\Lambda, N}} A_{R_N}^N(\ell R_N, \tau_i f) - \frac{1}{|I_{\Lambda, N}(L)|} \sum_{i \in I_{\Lambda, N}(L)} A_{R_N}^N(\ell R_N, \tau_i f) \right| \leq$$

(*) Fazemos

$$\begin{aligned} \alpha &= |I_{\Lambda, N}(L)| & \beta &= |\tilde{I}_{\Lambda, N}| - |I_{\Lambda, N}| \\ \alpha &= \sum_{i \in I_{\Lambda, N}(L)} A_{R_N}^N(\ell R_N, \tau_i f) & b &= \sum_{i \in (\tilde{I}_{\Lambda, N} - I_{\Lambda, N}(L))} A_{R_N}^N(\ell R_N, \tau_i f) \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\alpha+b}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha b - \beta \alpha}{\alpha(\alpha+\beta)} \right| \leq \frac{|b|}{\alpha+\beta} + \frac{|a|}{\alpha} \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$\leq \frac{\|f\|_{2L}}{2N+1-\Lambda} + \|f\| \frac{2L}{2N+1-\Lambda} \rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty \text{ uniformemente}$$

em $\mathcal{L}$, completando a demonstração.

□

I.4. METAESTABILIDADE PARA O PROCESSO $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$

Nesta secção demonstraremos os teoremas

Teorema I.4.1 - Se $\lambda > \lambda_*$ e γ_N é definido por $P(T_N^\mu > \gamma_N) = e^{-1}$, então T_N^μ/γ_N converge em distribuição quando $N \rightarrow \infty$ para uma variável aleatória exponencial de média um.

Teorema I.4.2 - Se $\lambda > \lambda_*$, existe uma sequência crescente de números reais positivos $(R_N, N \geq 1)$ tal que

i) $\frac{R_N}{\gamma_N} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ e f cilíndrica, existe $L = L(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$P \left[\max_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \ell < K_N - 1}} \max_{i \in I_\Lambda} |A_{R_N}^N(\ell R_N, \tau_i f) - \mu(f)| > \varepsilon \right] \rightarrow 0$$

onde $K_N = \max\{\ell \in \mathbb{N} : \ell R_N \leq T_N^\mu\}$

As demonstrações são essencialmente as mesmas dos teoremas I.2.1 e I.3.1 e nos limitaremos a expor as diferenças.

Demonstração do teorema I.4.1

Usando a notação e o desenvolvimento da demonstração do teorema I.2.1, basta-nos provar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists b(\epsilon)$ e $N(\epsilon)$ tais que

$$i) P[\xi_N^\mu(\gamma_N s) \notin F_{b(\epsilon)}, T_N^\mu > \gamma_N s] \leq \epsilon \quad \text{se } N \geq N(\epsilon)$$

$$ii) \forall A \in F_{b(\epsilon)}, P\left[\frac{T_N^\mu}{\gamma_N} > t\right] - P\left[\frac{T_N^A}{\gamma_N} > t\right] \leq \epsilon \quad \text{se } N \geq N(\epsilon)$$

A relação (ii) segue da seguinte maneira: sabemos da demonstração do teorema I.2.1 que é possível tomar $b(\epsilon)$ e $N(\epsilon)$ tais que $\forall A \in F_b$

$$\left| P\left[\frac{T_N^A}{\gamma_N} > t\right] - P\left[\frac{T_N}{\gamma_N} > t\right] \right| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad (I.4.1)$$

Como

$$P\left[\frac{T_N^\mu}{\gamma_N} > t\right] = \sum_{B \in \{-N, \dots, N\}} \mu(B) P\left(\frac{T_N^B}{\gamma_N} > t\right)$$

segue

$$\begin{aligned} & \left| P\left[\frac{T_N^\mu}{\gamma_N} > t\right] - P\left[\frac{T_N}{\gamma_N} > t\right] \right| \leq \mu(F_b^c) + \\ & + \left| P\left(\frac{T_N}{\gamma_N} > t\right) - \sum_{\substack{B \in \{-N, \dots, N\} \\ B \in F_b}} \mu(B) P\left(\frac{T_N^B}{\gamma_N} > t\right) \right| \leq \\ & \leq 2\mu(F_b^c) + \left| P\left(\frac{T_N}{\gamma_N} > t\right) - \min_{\substack{B \in \{-N, \dots, N\} \\ B \in F_b}} P\left(\frac{T_N^B}{\gamma_N} > t\right) \right| \quad (I.4.2) \end{aligned}$$

Usando (I.4.2), (I.4.1) e o fato de $\mu(F_b^C) \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \infty$ segue (ii).

Para verificar (i) faremos a mesma decomposição usada na demonstração do teorema I.2.1

$$\begin{aligned} P[\xi_N^\mu(\gamma_N s) \notin F_b, T_N^\mu > \gamma_N s] &\leq \\ &\leq P[\xi_N^\mu(\gamma_N s) \notin F_b, T_N^\mu > \gamma_N s, \min \xi_N^\mu(\gamma_N s) < -N+L, \max \xi_N^\mu(\gamma_N s) > N-L] + \\ &+ P[\min \xi_N^\mu(\gamma_N s) \geq -N+L, T_N^\mu > \gamma_N s] + P[\max \xi_N^\mu(\gamma_N s) \leq N-L, T_N^\mu > \gamma_N s] \end{aligned} \quad (I.4.3)$$

onde tomamos $N > N - L > b$

Por construção, se $\gamma_N s < T_N^\mu$

$$\begin{aligned} \xi_N^\mu(\gamma_N s) \cap [\min \xi_N^\mu(\gamma_N s), \max \xi_N^\mu(\gamma_N s)] &= \\ &= \xi_N^\mu(\gamma_N s) \cap [\min \xi_N^\mu(\gamma_N s), \max \xi_N^\mu(\gamma_N s)] \end{aligned}$$

Então a primeira parcela em (I.4.3) pode ser limitada superiormente por $P(\xi_N^\mu(\gamma_N s) \notin F_b) = \mu(F_b^C) \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \infty$.

Os outros dois termos em (I.4.3) serão controlados com o auxílio do processo na semi-reta $(\xi_{[-N, \infty)}^\mu(t), t \geq 0)$ cuja condição inicial é $\mu|_{[-N, \infty)}$. Como a interação é entre primeiros vizinhos, segue para $t < T_N^\mu$ que $\min \xi_N^\mu(t) = \min \xi_{[-N, \infty)}^\mu(t)$. Logo

$$P[\min \xi_N^\mu(\gamma_N s) \geq -N+L, T_N^\mu > \gamma_N s] \leq$$

$$\leq P[\min \xi_{[-N, \infty)}^\mu(\gamma_N s) \geq -N + L]$$

Abaixo demonstramos o lema I.4.1, segundo o qual $\mu|_{[-N, \infty)}$ é estocasticamente superior a $\mu_{[-N, \infty)}$. Logo $\xi_{[-N, \infty)}^\mu(t)$ decresce estocasticamente quando t cresce. Segue

$$\begin{aligned} P[\min \xi_{[-N, \infty)}^\mu(\gamma_N s) \geq -N + L] &\leq \\ &\leq \mu_{[-N, \infty)}\{AC[-N, \infty) \cap Z : A \cap [-N, -N + L - 1] = \phi\} \end{aligned}$$

De modo que a ergodicidade de $\mu_{[-N, \infty)}$ garante ser possível toma $L = L(\varepsilon)$ tal que este último seja inferior a $\varepsilon/3$. Isto controla o segundo termo em (I.4.3), sendo o terceiro termo análogo.

□

Lema I.4.1: $\mu|_{[0, \infty)} \stackrel{s}{\geq} \mu_{[0, \infty)}$

Demonstração: Devemos mostrar que para todo $AC\{0, 1, \dots\}$ vale

$$\mu|_{[0, \infty)}[\eta: \eta \cap A \neq \phi] \geq \mu_{[0, \infty)}[\eta: \eta \cap A \neq \phi] \quad (I.4.4)$$

Para tanto basta construir, usando a mesma estrutura de percolação (setas e cruces), os dois processos $(\xi_{[0, \infty)}^A(t), t \geq 0)$ e $(\xi^A(t), t \geq 0)$. Por autodualidade

$$\mu|_{[0, \infty)}[\eta: \eta \cap A \neq \phi] = P[\xi^A(t) \neq \phi, \forall t > 0]$$

$$\mu_{[0,\infty)}[\eta: \eta A \neq \phi] = P[\xi_{[0,\infty)}^A(t) \neq \phi, \forall t > 0]$$

Da construção dos dois processos segue (I.4.4).

□

Demonstração do teorema I.4.2

Assim como na demonstração do teorema I.3.1, o problema fica reduzido à obtenção de $L \in \mathbb{N}$ e duas seqüências $(R_N, N \geq 1)$ e $(m_N, N \geq 1)$ que satisfaçam simultaneamente, quando $N \rightarrow \infty$

$$a) \frac{m_N R_N}{\gamma_N} \rightarrow \infty$$

$$b) m_N^2 N \delta_L(R_N) \rightarrow 0$$

$$c) \frac{R_N}{\gamma_N} \rightarrow 0$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_L(R_N) = & \max_{k \geq 1} P\left[\left|\frac{1}{R_N} \int_{kR_N}^{(k+1)R_N} f(\xi^\mu(t)) dt - \mu(f)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right] + \\ & + \max_{k \geq 1} P\left[2\left|\int_{kR_N}^{(k+1)R_N} h_L(\xi_{[-N,\infty)}^\mu(t)) dt\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right] \end{aligned}$$

Uma vez que verifiquemos

$$\delta_L(R_N) \leq \frac{C}{R_N} \quad (C \text{ constante}) \quad (I.4.5)$$

$$\frac{\gamma_N}{N} \rightarrow \infty \quad (I.4.6)$$

Teremos a solução

$$m_N = \left(\frac{\gamma_N}{N}\right)^{1/5} \quad (I.4.7)$$

$$R_N = \gamma_N^{9/10} N^{1/10}$$

A relação (I.4.5) se verifica uma vez que tomemos $L = L(\epsilon)$ tal que

$$\mu_{[0,\infty)}\{A : A \cap [0,L] = \emptyset\} \leq \frac{\epsilon}{16||f||} \quad (I.4.8)$$

A demonstração deste fato é análoga à do lema I.3.1.

Finalmente, vamos adaptar a demonstração do lema I.3.2 a fim de provar a relação (I.4.6). Substituímos o evento A_a pelo evento

$$\tilde{A}_a = [\forall x \in [-aN, aN] \cap \xi^\mu(0), \quad \forall t \geq 0, \quad \xi^{\{x\}}(t) \notin \{-N, N\}]$$

No evento $\tilde{A}_a$, quase certamente, nenhuma partícula em $\xi^\mu(0) \cap [-aN, aN]$ pode ter descendência que viva para sempre. A probabilidade deste último evento vai a zero quando $N \rightarrow \infty$, pois usando F_{aN} como definido na demonstração do teorema I.2.1, segue

$$\mu(F_{aN}) \rightarrow 1 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

$$\forall B \in F_{aN}, \quad P(\xi^B(t) \neq \emptyset \quad \forall t > 0) \rightarrow 1 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

Logo

$$P(\tilde{A}_a) \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty \quad (\forall a \in (0,1)).$$

A demonstraco de (I.4.6) segue análoga  do lema I.3.2.

Do teorema I.4.2 segue como corolário um teorema análogo ao I.3.2 para o processo $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$.

CAPÍTULO II - FLUTUAÇÕES EM TORNO DO EQUILÍBRIO PARA PROCESSOS ($\xi^V(t)$), $t \geq 0$)

II.1. INTRODUÇÃO

Os resultados, neste capítulo, têm um interesse independente do problema da metaestabilidade. Uma vez que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^\mu(t)) dt = \int f(\eta) d\mu(\eta)$$

para toda função cilíndrica $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$, é natural perguntarmos se para alguma função $\sigma(R)$ a lei de

$$\sigma(R) \left[\frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^\mu(t)) dt - \int f(\eta) d\mu(\eta) \right] \quad (\text{II.1.1})$$

converge a uma distribuição não degenerada.

Em [4], questões análogas são respondidas (para uma classe de funções cilíndricas) com respeito ao Modelo do Votante. Verifica-se, neste caso, que a função $\sigma(\cdot)$ depende da dimensionalidade do modelo.

Neste capítulo, verificamos que para o processo que estamos considerando, qualquer que seja a função cilíndrica f , vale o resultado clássico: tomando $\sigma(R) = \sqrt{R}$, a expressão (II.1.1) converge a uma distribuição normal de média 0 e variância σ_f^2 ($0 < \sigma_f^2 < \infty$). Para tanto, usamos os teoremas estabelecidos em [5], [6], [7] e usados, também, em [4] (para o caso de dimensão maior ou igual a 5; para detalhes ver [8]).

A fim de usarmos os teoremas provados em [5] e [7] e obter nossa tese, basta verificarmos que

i) Para toda função cilíndrica crescente $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$, o processo $\{f(\xi^{\mu}(t))\} \ t \geq 0$ é *associado*, significando que para todo $m \in \mathbb{N}$, quaisquer que sejam os instantes $-\infty < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \infty$ e as funções não decrescentes $g_1, g_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, segue que as variáveis aleatórias $\tilde{g}_j = g_j(f(\xi^{\mu}(t_1)), \dots, f(\xi^{\mu}(t_m)))$, $j = 1, 2$, satisfazem $\text{cov}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) \geq 0$.

ii) Para toda função cilíndrica $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ temos $|\text{cov}(f(\xi^{\mu}(0)), f(\xi^{\mu}(s)))| \leq Ce^{-\gamma s}$ para algum par $C > 0$, $\gamma > 0$.

Finalmente, na secção 5, provaremos que para toda medida inicial ν tal que $\nu(\eta : |\eta| < \infty) = 0$ (que constituem o domínio de atração de μ) vale o resultado

$$\sqrt{R} \left[\frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^{\nu}(t)) dt - \int f d\mu \right] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_f^2)$$

quando $R \rightarrow \infty$. Para tanto, compararemos os procesos $(\xi^{\mu}(t), t \geq 0)$ e $(\xi^1(t), t \geq 0)$ construindo-os sobre a mesma estrutura de percolação. A tese seguirá, então, para o caso $\nu = 1$. Para provar o caso geral compararemos $(\xi^1(t), t \geq 0)$ com $(\xi^{\nu}(t), t \geq 0)$.

II.2. ASSOCIATIVIDADE

A propriedade (i) da secção anterior é conhecida como Associatividade na literatura probabilística e como relação FKG (em homenagem a Fortuin, Kastelyn e Ginibre) na literatura físico-matemática. Em [5] e [7], os teoremas se referem a processos estacionários em tempo discreto; para podermos utilizar aquelas técnicas, basta notar que se definirmos

$$X_n = \int_{n-1}^n f(\xi^\mu(t)) dt - \int f(\eta) d\mu(\eta) \quad (\text{II.2.1})$$

então o processo $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ será estacionário e associado para f crescente. Ademais

$$\sqrt{R} \left[\frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^\mu(t)) dt - \int f(\eta) d\mu(\eta) \right] = \frac{1}{\sqrt{R}} \sum_{k=1}^R X_k \quad (\text{II.2.2})$$

para R inteiro.

A técnica que usaremos para provar associatividade é baseada num acoplamento especial para o modelo de contacto inventado por Griffeath ([9], teorema 2.17).

Teorema II.2.1 - Dada $f : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$, cilíndrica e crescente, para todo $m \in \mathbb{N}$, quaisquer que sejam os instantes $-\infty < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \infty$ e as funções não decrescentes $g_1, g_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, segue que as variáveis aleatórias $\tilde{g}_j = g_j(f(\xi^\mu(t_1)), f(\xi^\mu(t_2)), \dots, f(\xi^\mu(t_m)))$, $j = 1, 2$ satisfazem $\text{cov}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) \geq 0$

Demonstração

Devido à identidade

$$\text{cov}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (P[\tilde{g}_1 > x, \tilde{g}_2 > y] - P[\tilde{g}_1 > x]P[\tilde{g}_2 > y]) dx dy$$

basta que provemos que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$P(\tilde{g}_1 > x, \tilde{g}_2 > y) \geq P(\tilde{g}_1 > x)P(\tilde{g}_2 > y) \quad (\text{II.2.3})$$

Isto, por sua vez, é equivalente a

$$P(\tilde{g}_1 \leq x, \tilde{g}_2 \leq y) \geq P(\tilde{g}_1 \leq x)P(\tilde{g}_2 \leq y) \quad (\text{II.2.4})$$

Provaremos a relação (II.2.4) usando uma técnica de vida a Griffeath ([9], teorema 2.17). Para tanto, construiremos, inicialmente, um espaço de probabilidades conveniente sobre o qual construiremos uma versão de $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$ e outros processos auxiliares.

Como primeiro passo construiremos uma estrutura de percolação sobre $Z \times \mathbb{R}$ (e não sobre $Z \times \mathbb{R}_+$ como havíamos feito anteriormente) da seguinte maneira: para cada linha temporal em $Z \times \mathbb{R}$ associamos três processos de Poisson independentes; um de taxa 1 correspondendo a cruces e dois de taxa λ correspondendo um a flechas para direita e outro a flechas para a esquerda. Definimos, então, para $A \subset Z \times \mathbb{R}$ o processo (esta é uma generalização do conceito de processo dual)

$\tilde{\xi}^A(t) = \{x \in Z: \text{seguindo as flechas e as linhas temporais no sentido do tempo crescente e sem passar por cruces é possível partir de } (x,t) \text{ e atingir o conjunto } A\}.$

Podemos construir para $A \subset Z$ uma versão de $(\xi^A(t), t \geq 0)$ da seguinte forma:

$$\xi^A(t) = \{x \in Z: \tilde{\xi}^{\{(x,t)\}}(0) \cap A \neq \emptyset\}$$

Finalmente, a fim de construirmos uma versão de $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$ notemos que a configuração aleatória

$$A = \{x \in Z: \tilde{\xi}^{\{(x,0)\}}(\ell) \neq \emptyset \forall \ell \leq 0\}$$

se distribuir segundo a medida μ . Os processos de Poisson (usados para construir a estrutura de percolação) após $t = 0$ são independentes destes mesmos processos para $t < 0$, a medida μ assim construída é independente da evolução posterior do sistema. Portanto, construímos uma versão de $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$. Esta está definida por

$$\xi^\mu(t) = \{x \in \mathbb{Z}: \tilde{\xi}^\mu\{(x,t)\}_{(l)} \neq \emptyset \forall l \leq t\}$$

Reescreveremos, agora, eventos da forma $[\tilde{g}_j \leq x]$ usando os processos que definimos acima. Primeiramente, notemos que $\tilde{g}_j$ depende de $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$ apenas através da configuração no retângulo espaço-temporal $\Phi = \Lambda(f) \times \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, ademais é função crescente desta configuração. Segue para todo $x \in \mathbb{R}$ a existência de um conjunto $K_j(x) \subset \{0,1\}^\Phi$ tal que

$$\begin{aligned} [\tilde{g}_j \leq x] &= \bigcup_{B \in K_j(x)} [\xi^\mu(t,x) = 0, \forall (x,t) \in B] = \\ &= \bigcup_{B \in K_j(x)} [\xi^\mu(\cdot) \big|_B = 0] \end{aligned} \quad (II.2.5)$$

Isto pode ser demonstrado como segue: sejam

$$\Gamma = \{\eta \in \{0,1\}^\Phi: \tilde{g}_j \leq x \text{ se } \xi^\mu(t,x) = \eta(t,x) \forall (x,t) \in \Phi\}$$

$$C(\eta) = \{(x,t) \in \Phi: \eta(t,x) = 0\}$$

Vem

$$\Gamma = \bigcup_{\eta \in \Gamma} \{\zeta \in \{0,1\}^\Phi: \zeta \leq \eta\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{\eta \in \Gamma} \{ \zeta \in \{0,1\}^\Phi : \zeta(t,x) = 0 \quad \forall (x,t) \in C(\eta) \} = \\
&= \bigcup_{B \in \{C(\eta), \eta \in \Gamma\}} \{ \zeta \in \{0,1\}^\Phi : \zeta(t,x) = 0 \quad \forall (x,t) \in B \}
\end{aligned}$$

ou seja

$$\zeta \in \Gamma \Leftrightarrow (\zeta(t,x) = 0, \quad \forall (x,t) \in B) \text{ para algum } B \in \{C(\eta), \eta \in \Gamma\}.$$

Basta, portanto, tomar $K_j(x) = \{C(\eta), \eta \in \Gamma\}$.

A relação (II.2.5) pode, ainda, ser rescrita como

$$[\tilde{g}_j \leq x] = \bigcup_{B \in K_j(x)} [\exists \ell < t_1 : \tilde{\xi}^B(\ell) = \phi] \quad (\text{II.2.6})$$

Finalmente, construiremos um acoplamento que nos permitirá provar (II.2.4) via (II.2.6). Sobre $Z \times \mathbb{R}$, construiremos duas cópias idênticas e independentes da estrutura de percolação que descrevemos. Usando o primeiro destes sistemas, construiremos $(\tilde{\xi}^B(\ell), \ell \leq t_1)$ para todos $B \in K_1(x)$ e usando o segundo construiremos versões independentes destas (mas não entre si) dos processos $(\tilde{\xi}^B(\ell), \ell \leq t_1)$ para $B \in K_2(y)$. Finalmente, construiremos sobre o mesmo espaço de probabilidades uma versão acoplada de todos estes processos. Para tanto, invertamos o sentido das flechas e definimos uma escala de tempo invertida $s = -t$. Para cada $B \in K_1(x)$, definimos o processo $(X^B(s), s \geq -t_m)$ por

$$X^B(s) = \{x \in Z : \text{há um caminho que parte de um ponto de } B \text{ e chega a } (x,s) \text{ seguindo as flechas invertidas da primeira estrutura de percolação e as linhas temporais no sentido de } s \text{ crescente, sem passar por cruces}\}.$$

Definimos, para cada $B \in K_2(y)$ o processo $(Y^B(s), s \geq -t_m)$ por

$Y^B(s) = \{x \in Z: \text{h\u00e1 um caminho que parte de um ponto de } B \text{ e chega a } (x,s) \text{ seguindo as linhas temporais no sentido de } s \text{ crescente, sem passar por cruces e usando as flechas invertidas e cruces segundo a seguinte regra: usa-se o segundo sistema de flechas e cruces para as posi\u00e7\u00f5es } z \in Z \text{ no instante } r, \text{ se } X^C(r,z) = 0, \forall C \in K_1(x) \text{ e o primeiro sistema de flechas em caso contr\u00e1rio}\}.$

A id\u00e9ia por tr\u00e1s desta \u00faltima defini\u00e7\u00e3o \u00e9 a seguinte: sempre que uma part\u00edcula de $(Y^B(s), s \geq -t_m)$ para algum $B \in K_2(y)$ pula sobre uma de algum $(X^C(s), s \geq -t_m)$ para algum $C \in K_1(x)$, ela se identifica com esta \u00faltima e evolui de maneira id\u00eantica a esta. A propriedade forte de Markov do processo de Poisson mostra, ent\u00e3o, que $(Y^B(s), s \geq -t_m)$ tem mesma lei que um processo an\u00e1logo que usasse um \u00fanico sistema de flechas.

Definindo:

$$Z^B(t) = \begin{cases} X^B(-t) & \text{se } t \leq t_m \\ \phi & \text{se } t > t_m \end{cases} \quad (B \in K_1(x))$$

$$W^B(t) = \begin{cases} Y^B(-t) & \text{se } t \leq t_m \\ \phi & \text{se } t > t_m \end{cases} \quad (B \in K_2(y))$$

segue que as vari\u00e1veis aleat\u00f3rias $\{Z^B(t), B \in K_1(x)\}, \{W^B(t), B \in K_2(y)\}$, t\u00eam, conjuntamente, a mesma distribui\u00e7\u00e3o das vari\u00e1veis aleat\u00f3rias $\{\xi^B(t), B \in K_1(x) \cup K_2(y)\}$, sob a correspond\u00eancia

$$Z^B(t) \leftrightarrow \tilde{\xi}^B(t), \quad B \in K_1(x)$$

$$W^B(t) \leftrightarrow \tilde{\xi}^B(t), \quad B \in K_2(y)$$

O ponto crucial está no fato de esta versão acoplada dos processos apresentar menos partículas que as versões independentes construídas com sistemas diferentes de flechas e cruzes. Isto é

$$Z^C(t) \cup W^B(t) \subset \tilde{\xi}^C(t) \cup \tilde{\xi}^B(t) \quad \forall B \in K_2(y), \forall C \in K_1(x), \forall t \in \mathbb{R},$$

onde no segundo membro, temos as versões independentes. Segue

$$P(Z^C(t) = \phi = W^B(t)) \geq P(\tilde{\xi}^C(t) = \phi)P(\tilde{\xi}^B(t) = \phi)$$

ou seja,

$$P(\tilde{\xi}^C(t) = \phi = \tilde{\xi}^B(t)) \geq P(\tilde{\xi}^C(t) = \phi)P(\tilde{\xi}^B(t) = \phi)$$

e

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{C \in K_1(x)} [\tilde{\xi}^C(t) = \phi] \cap \bigcup_{B \in K_2(y)} [\tilde{\xi}^B(t) = \phi]\right) &\geq \\ &\geq P\left(\bigcup_{C \in K_1(x)} [\tilde{\xi}^C(t) = \phi]\right)P\left(\bigcup_{B \in K_2(y)} [\tilde{\xi}^B(t) = \phi]\right) \end{aligned}$$

Usando (II.2.6) prova-se, então, (II.2.4).

I.3. DECAIMENTO EXPONENCIAL DAS CORRELAÇÕES TEMPORAIS

Teorema II.3.1 - Dada uma função cilíndrica $f: \{0,1\}^Z \rightarrow \mathbb{R}$, existem constantes $C > 0$, $\gamma > 0$, tais que

$$|\text{cov}(f(\xi^\mu(0)), f(\xi^\mu(s)))| \leq Ce^{-\gamma s}$$

Demonstração

Usaremos a notação: dado $A \subset Z$,

$$\bar{A} = \{\eta \in \{0,1\}^Z \mid \eta \cap A \neq \emptyset\}.$$

Então, toda função cilíndrica pode ser escrita na forma

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^{2^{|\Lambda|}} a_i I_{\bar{A}_i}(\cdot)$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ são constantes, $\{A_i, i = 1, \dots, 2^{|\Lambda|}\} =$ partes de Λ e $I_{\bar{A}_i}$ é a função indicadora do conjunto $\bar{A}_i$. Portanto,

$$\text{cov}(f(\xi^\mu(0)), f(\xi^\mu(s))) = \sum_{i=1}^{2^{|\Lambda|}} \sum_{j=1}^{2^{|\Lambda|}} a_i a_j \text{cov}(I_{\bar{A}_i}(\xi^\mu(0)), I_{\bar{A}_j}(\xi^\mu(s)))$$

E precisamos mostrar apenas que $\forall A, B \subset Z$ finitos

$$|\text{cov}(I_{\bar{A}}(\xi^\mu(0)), I_{\bar{B}}(\xi^\mu(s)))| \leq Ce^{-\gamma s} \quad (\text{II.3.1})$$

Construímos $(\xi^\mu(t), t \in \mathbb{R})$, $(\xi^{A \times \{0\}}(t), t \leq 0)$ e $(\xi^{B \times \{s\}}(t), t \leq s)$ como explicado na demonstração do teorema II.2.1, num único espaço de probabilidades. Se definirmos, então, uma escala de tempo invertida $\ell = s - t$ e fizermos

$$X_\ell = \tilde{\xi}^{B \times \{s\}}(s - \ell), \quad \ell \geq 0$$

$$Y_\ell = \tilde{\xi}^{A \times \{0\}}(s - \ell), \quad \ell \geq s$$

os processos $(X_\ell, \ell \geq 0)$ e $(Y_\ell, \ell \geq s)$ terão, respectivamente, a mesma lei de $(\xi^B(t), t \geq 0)$ e $(\xi^A(t), t \geq 0)$.

É conveniente, ainda, definir os eventos

$$A' = [I_{\bar{A}}(\xi_0^\mu) = 1] = [Y_\ell \neq \emptyset \quad \forall \ell \geq s]$$

$$B' = [I_{\bar{B}}(\xi_0^\mu) = 1] = [X_\ell \neq \emptyset \quad \forall \ell \geq 0]$$

A relação (II.3.1) segue de

$$\begin{aligned} \text{cov}(I_{\bar{A}}(\xi^\mu(0)), I_{\bar{B}}(\xi^\mu(s))) &= P(A') \cdot \{P(B'|A') - P(B')\} = \\ &= P(A') \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{Z} \\ 0 < |\eta| < \infty}} P(X_s = \eta) \cdot \{P(B'|A', X_s = \eta) - P(B'|X_s = \eta)\} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} &|\text{cov}(I_{\bar{A}}(\xi^\mu(0)), I_{\bar{B}}(\xi^\mu(s)))| \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{Z} \\ 0 < |\eta| < \infty}} P(X_s = \eta) \cdot |P(B'|A', X_s = \eta) - P(B'|X_s = \eta)| \end{aligned} \quad (\text{II.3.2})$$

Do teorema II.2.1 segue

$$0 \leq P(B'|X_s = \eta) \leq P(B'|A', X_s = \eta) \leq 1 \quad (\text{II.3.3})$$

As relações (II.3.2) e (II.3.3) permitem escrever

$$\begin{aligned}
 & |\text{cov}(I_{\bar{A}}(\xi^H(0)), I_{\bar{B}}(\xi^H(s)))| \leq \\
 & \leq \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{C}^Z \\ 0 < |\eta| < \infty}} P(X_s = \eta) \cdot (1 - P(B^1 | X_s = \eta)) = \\
 & = \sum_{\substack{\eta \in \mathbb{C}^Z \\ 0 < |\eta| < \infty}} P(X_s = \eta) \cdot P(B^{1^c} | X_s = \eta) = \\
 & = P(B^{1^c}, X_s \neq \phi) = P(X_s \neq \phi, X_\ell = \phi \text{ para algum } \ell < \infty) = \\
 & = P(s < T^B < \infty) \leq Ce^{-\gamma s}
 \end{aligned}$$

Sendo a última desigualdade provada em [3] (teorema 5).

(*) OBSERVAÇÃO: De maneira semelhante podemos provar que $|\text{cov}(f(\xi^1(r)), f(\xi^1(s)))| \leq Ce^{-\gamma|s-r|}$. Neste caso, o raciocínio acima conduz à majoração por $P(|s-r| < T^B < \max(s,r))$ mas esta é, ainda, menor que $P(|s-r| < T^B < \infty) \leq Ce^{-\gamma|s-r|}$. Raciocínios análogos mostram que

$$|\text{cov}(f(\xi_{[0,\infty)}^1(r)), f(\xi_{[0,\infty)}^1(s)))| \leq Ce^{-\gamma|s-r|}$$

$$|\text{cov}(f(\xi_{[0,\infty)}^\mu(r)), f(\xi_{[0,\infty)}^\mu(s)))| \leq Ce^{-\gamma|s-r|}$$

I.4. CONCLUSÃO PARA O PROCESSO ESTACIONÁRIO ($\xi^\mu(t)$, $t \geq 0$)

Teorema II.4.1 - Para toda função cilíndrica real $f: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ vale

$$\sqrt{R} \left[\frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^\mu(t)) dt - \int f(\eta) d\mu(\eta) \right] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_f^2)$$

quando $R \rightarrow \infty$, onde

$$\sigma_f^2 = 2 \int_0^\infty \text{cov}(f(\xi^\mu(0)), f(\xi^\mu(t))) dt$$

Demonstração

Dada f cilíndrica real podemos decompô-la na diferença de duas funções crescentes

$$f = f_+ - f_-, \quad f_+, f_- \text{ crescentes}$$

definimos, ainda,

$$f' = f_+ + f_-$$

Tomando X_n definido por (II.2.1), a relação (II.2.2) mostra ser suficiente provar que

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X_k \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2) \quad \text{quando } N \rightarrow \infty$$

Para tanto, notamos que as condições do teorema 3 em [7] estão verificadas, uma vez que definindo

$$X_{\pm k} = \left[\int_{k-1}^k f_{\pm}(\xi^{\mu}(t)) dt - \int f_{\pm}(\eta) d\mu(\eta) \right]$$

$$X'_k = X_{+k} + X_{-k}$$

segue:

i) $(X_k)_{k \geq 1}$ e $(X'_k)_{k \geq 1}$ são estacionários e reais

ii) $X'_k \gg X_k$ (no sentido definido em [7])

$$\begin{aligned} \text{iii) } \sum_{j=2}^{\infty} \text{cov}(X'_1, X'_j) &= \int_0^1 ds \int_1^{\infty} dt \text{cov}(f'(\xi^{\mu}(s)), f'(\xi^{\mu}(t))) \leq \\ &\leq \int_0^1 ds \int_1^{\infty} dt C e^{-\gamma t} < \infty \end{aligned}$$

□

I.5. FLUTUAÇÕES PARA PROCESSOS $(\xi^{\nu}(t), t \geq 0)$ COM $\nu(\eta: |\eta| < \infty) = 0$

Teorema: Para toda medida ν sobre $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, tal que $\nu(\eta: |\eta| < \infty) = 0$, o processo $(\xi^{\nu}(t), t \geq 0)$ satisfaz, para toda função cilíndrica $f: \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sqrt{R} \left[\frac{1}{R} \int_0^R f(\xi^{\nu}(t)) dt - \int f d\mu \right] \xrightarrow{D} N(0, \sigma_f^2) \quad \text{quando } R \rightarrow \infty.$$

Demonstração

Mostramos, inicialmente, que a tese vale no caso em que $\nu = 1 = \text{delta de Dirac na configuração } 1$. Para tanto, cons

truiremos com a mesma estrutura de percolação em $Z \times R_+$ os dois processos $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$ e $(\xi^1(t), t \geq 0) = (\xi(t), t \geq 0)$. Mostraremos, então, que $P(\frac{1}{R}(\int_0^R f(\xi^\mu(t))dt - \int_0^R f(\xi^1(t))dt) > \epsilon) \rightarrow 0, \forall \epsilon > 0$.

Dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $P(T^{\mu|}[1, N] = \infty) \geq 1 - \delta$. Isto segue da autodualidade do processo de contacto, do fato de $P(T^A = \infty) \geq P(T[1, |A|] \cap Z = \infty)$ e da ergodicidade de μ , como já fizemos na capítulo I.

Sobre $A_N = (T^{\mu|}[1, N] = \infty)$ podemos para cada trajetória escolher $x \in [1, N] \cap Z$ tal que $\xi^{\{x\}}(t) \neq \emptyset, \forall t \geq 0$. Em [2] é provado que então

$$\min \frac{\xi^{\{x\}}(t)}{t} \rightarrow -\alpha \quad \text{e} \quad \max \frac{\xi^{\{x\}}(t)}{t} \rightarrow \alpha \quad \text{quase certamente}$$

quando $t \rightarrow \infty$ com $0 < \alpha < \infty$ (desde que $\lambda > \lambda_*$).

Definimos a variável aleatória

$$\theta = \inf\{t \geq 0: \min \xi^{\{x\}}(s) \leq \min \Lambda(f) \text{ e } \max \xi^{\{x\}}(s) \geq \max \Lambda(f), \forall s \geq t\}$$

Segue que

$$[\theta < \infty] \supset A_N \tag{II.5.1}$$

Temos, agora,

$$P(\frac{1}{\sqrt{R}}(\int_0^R f(\xi^\mu(t))dt - \int_0^R f(\xi^1(t))dt) \geq \epsilon) \leq$$

$$\leq P\left(\frac{1}{\sqrt{R}} \theta \cdot 2 \|f\|_{\infty} \geq \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq P\left(\frac{1}{\sqrt{R}} \theta \cdot 2 \|f\|_{\infty} \geq \varepsilon, \quad \theta < \infty\right) + P(\theta = \infty) \quad (\text{II.5.2})$$

o primeiro termo, acima, vai a zero quando $R \rightarrow \infty$. O segundo, devido a (II.5.1) é menor ou igual a $P(A_N^C)$ que é menor do que qualquer $\delta > 0$ dado, desde que N seja tomado grande o suficiente. Isto mostra que

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \left(\int_0^R f(\xi^u(t)) dt - \int_0^R f(\xi^1(t)) dt \right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty.$$

Basta, agora, usar o teorema de Slutsky (que afirma que a soma de uma variável aleatória que converge a zero em probabilidade com uma variável aleatória que converge em lei a distribuição F converge em lei a mesma distribuição F) e o teorema II.4.1, para concluir a tese no caso do processo $(\xi^1(t), t \geq 0)$.

O teorema segue para processos da forma $(\xi^v(t), t \geq 0)$ tais que $v(\eta: |\eta| < \infty) = 0$ por um argumento idêntico ao utilizado acima. Basta provar que

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \left(\int_0^R f(\xi^v(t)) dt - \int_0^R f(\xi^1(t)) dt \right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty.$$

Isto pode ser provado de maneira análoga ao que foi feito acima.

Para mostrar que dado $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(T^u|_{[1, N]} = \infty) \geq 1 - \delta \quad (\text{II.5.3})$$

tomamos $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(T^{[0,M]} \cap Z < \infty) < \frac{\delta}{2}$$

e $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$v(n: |n \cap [0, K]| < M) < \frac{\delta}{2}.$$

Fazendo $N = \max (M, K)$ segue (II.5.3)

CAPÍTULO III - FLUTUAÇÕES NA SITUAÇÃO METAESTÁVEL

III.1. INTRODUÇÃO

No capítulo I, mostramos que antes de atingir o equilíbrio em δ_ϕ , os processos $(\xi_N(t), t \geq 0)$ e $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$ mantêm-se próximos a $\mu|_{[-N, N]}$, para todo $\lambda > \lambda_*$. Neste capítulo, estudaremos como são as flutuações de médias temporais nesta situação. Consideraremos o processo $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$, que já inicia em $\mu|_{[-N, N]}$.

Sob o ponto de vista físico, a questão é motivada como segue. Suponhamos que um dispositivo faça medidas do valor assumindo por uma função cilíndrica (observável local) ao longo do tempo, mas que (como é usualmente assumido) ele registre na realidade o valor de médias temporais ao longo de intervalos de duração S . No instante $\gamma_N S$ o aparelho registra o valor

$$\frac{1}{S} \int_{\gamma_N S - S}^{\gamma_N S} f(\xi_N^\mu(t)) dt \quad (III.1.1)$$

Conforme concluímos no capítulo I, se fizermos N e S irem a infinito, mantendo uma relação apropriada, a grandeza acima convergirá a $\int f(\eta) d\mu(\eta)$. Para S , suficientemente longo e N grande, o aparelho deverá registrar valores próximos a este, não constatando desta maneira a presença das bordas em $-N$ e $+N$ e o fato de a situação ser metaestável. A questão que se impõe então é: será que aumentando a sensibilidade do aparelho poderemos constatar estes fatos (apenas observando a função cilíndrica f). Aumentar a sensibilidade seria detectar as flutuações em torno do valor $\int f(\eta) d\mu(\eta)$ para as médias temporais. A questão matemá-

tica é comparar as flutuações de $(\xi^{\mu}(t), t \geq 0)$ que estudamos no capítulo II com as de $(\xi_N^{\mu}(t), t \geq 0)$.

No caso em que S cresce com N mas de maneira tal que $\frac{S}{N} \rightarrow 0$, provaremos que estas flutuações são indistinguíveis. Nesse caso, mesmo as flutuações não nos permitem distinguir localmente os processos até o momento da extinção da situação metaestável.

III.2. RESULTADOS

Lema III.2.1 - Se a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$ é tal que $X_n \rightarrow F$ e $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de eventos tais que $P(A_n) \rightarrow 1$. Então, $P(X_n \leq x | A_n) \rightarrow F(x)$ para todos pontos x de continuidade F .

Demonstração

$$\begin{aligned} P(X_n \leq x) &= P(X_n \leq x, A_n) + P(X_n \leq x, A_n^c) \leq \\ &\leq P(X_n \leq x, A_n) + P(A_n^c) \end{aligned}$$

Logo

$$P(X_n \leq x | A_n) \geq \frac{P(X_n \leq x) - P(A_n^c)}{P(A_n)} \quad (\text{III.2.1})$$

$$P(X_n \leq x | A_n) = \frac{P(X_n \leq x, A_n)}{P(A_n)} \leq \frac{P(X_n \leq x)}{P(A_n)} \quad (\text{III.2.2})$$

Os segundos membros de (III.2.1) e (III.2.2) conver-

gem ambos a $F(x)$ nos pontos x que são de continuidade de F , mostrando a tese.

Lema III.2.2 - Se temos uma seqüência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$ e duas seqüências de eventos $(A_n)_{n \geq 1}$ e $(B_n)_{n \geq 1}$ tais que

$$i) X_n | B_n \xrightarrow{D} F \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

i.e.

$$P(X_n \leq x | B_n) \rightarrow F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ de continuidade de } F.$$

$$ii) P(A_n | B_n) \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

Então,

$$X_n | A_n, B_n \xrightarrow{D} F$$

i.e.

$$P(X_n \leq x | A_n, B_n) \rightarrow F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ de continuidade de } F$$

Demonstração: Análoga à do lema III.2.1.

Dada uma seqüência $(S_N)_{N \geq 1}$, $S_N \rightarrow \infty$ e uma função cilíndrica f , definiremos os processos de flutuação $(X_s^N, s \geq 0)$ por

$$X_s^N = \sqrt{S_N} \left[\frac{1}{S_N} \int_{\gamma_N^s}^{\gamma_N^s + S_N} f(\xi_N^\mu(t)) dt - \int f(\eta) d\mu(\eta) \right] \quad (\text{III.2.3})$$

Note que, diferentemente da expressão III.1.1, preferimos, na definição acima, atribuir o índice s à flutuação entre os instantes γ_N^s e $\gamma_N^s + S_N$. Desta maneira X_s^N está bem definido para todo $s \geq 0$. No que segue, estamos interessados na distribuição assintótica das variáveis aleatórias condicionadas

$$X_s^N | [T_N^\mu \geq \gamma_N^s + S_N]$$

Notemos, no entanto, que como $\frac{S_N}{\gamma_N} = \frac{S_N}{N} \cdot \frac{N}{\gamma_N} \rightarrow 0$,

$$P[T_N^\mu \geq \gamma_N^s + S_N | T_N^\mu \geq \gamma_N^s] = \frac{P[T_N^\mu \geq \gamma_N(s + \frac{S_N}{\gamma_N})]}{P[T_N^\mu \geq \gamma_N^s]} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{e^{-s}}{e^{-s}} = 1$$

Podemos, então, usar o lema III.2.2 para concluir que basta-nos estudar o comportamento de

$$X_s^N | [T_N^\mu \geq \gamma_N^s]$$

Teorema III.2.1 - Se $S_N/N \rightarrow 0$, então X_s^N condicionado a $[T_N^\mu > \gamma_N^s]$ converge em lei a $N(0, \sigma_f^2)$, $0 < \sigma_f^2 < 1$. Isto é

$$P(X_s^N \leq x | T_N^\mu > \gamma_N^s) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_f} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2\sigma_f^2}} dy \quad \text{quando } N \rightarrow \infty,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Construímos ξ^μ e ξ_N^μ sobre a mesma estrutura de percolação.

Utilizaremos, também, o processo dual $(\tilde{\xi}^{\Lambda(f) \times \{\gamma_N s + S_N\}}(t))_{t \leq \gamma_N s + S_N}$ conforme definido no capítulo II.

Dado L tal que $0 < L < N$ definimos os eventos

$$A_1 = [\min \xi_N^\mu(\gamma_N s) > -N + L]$$

$$A_2 = [\max \xi_N^\mu(\gamma_N s) < N - L]$$

$$A_3 = [\min \tilde{\xi}^{\Lambda(f) \times \{\gamma_N s + S_N\}}(\gamma_N s) < -N + L]$$

$$A_4 = [\max \tilde{\xi}^{\Lambda(f) \times \{\gamma_N s + S_N\}}(\gamma_N s) > N - L]$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

Conforme mostramos no capítulo I,

$$P(A_1 \cup A_2 | T_N^\mu > \gamma_N s) \rightarrow 0 \text{ se tomarmos } L \rightarrow \infty \text{ quando } N \rightarrow \infty.$$

Controlaremos A_3 e A_4 lembrando que nas bordas o processo de contacto não pode crescer mais rapidamente do que um processo de Poisson de taxa λ . Definimos

$$a = \min \Lambda(f)$$

$$b = \max \Lambda(f)$$

$(Y_t)_{t \geq 0}$ = processo de Poisson de taxa λ .

A independência dos processos de Poisson para $t < \gamma_N s$ e $t \geq \gamma_N s$ permite escrever:

$$P(A_3 | T_N^\mu > \gamma_N s) = P(A_3) \leq P(Y_{S_N} > a + N-L)$$

$$P(A_4 | T_N^\mu > \gamma_N s) = P(A_4) \leq P(Y_{S_N} > N-L - b)$$

Se $S_N/N \rightarrow 0$, basta tomar $L = N/3$ e teremos

$$P(A | T_N^\mu > \gamma_N s) \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty \quad (\text{III.2.4})$$

Como em A^c

$$\xi^\mu \Big|_{\Lambda(f)}(t) = \xi_N^\mu \Big|_{\Lambda(f)}(t),$$

durante $\gamma_N s \leq t \leq \gamma_N s + S_N$, segue que

$$P(X_S^N \leq x | T_N^\mu > \gamma_N s) = P(X_S^N \leq x | T_N^\mu > \gamma_N s, A^c) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot P(A^c | T_N^\mu > \gamma_N s) + P(X_S^N \leq x | T_N^\mu > \gamma_N s, A) P(A | T_N^\mu > \gamma_N s) = \\ & = P(\sqrt{S_N} \left(\frac{1}{S_N} \int_{\gamma_N s}^{\gamma_N s + S_N} f(\xi^\mu(t)) dt - \int f d\mu \right) \leq x | T_N^\mu > \gamma_N s, A^c) \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot P(A^c | T_N^\mu > \gamma_N s) + P(X_S^N \leq x | T_N^\mu > \gamma_N s, A) \cdot P(A | T_N^\mu > \gamma_N s)$$

Usando (III.2.4) e o lema III.2.2, basta provarmos que

$$P(\sqrt{S_N} \left(\frac{1}{S_N} \int_{\gamma_N^S}^{\gamma_N^S + S_N} f(\xi^\mu(t)) dt - \int f d\mu \right) \leq x | T_N^\mu > \gamma_N^S) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_f} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2\sigma_f^2}} dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Isto equivale a mostrar que

$$\sqrt{S_N} \left(\frac{1}{S_N} \int_0^{S_N} f(\xi^v(t)) dt - \int f d\mu \right) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_f^2)$$

onde v é a medida condicionada

$$v = \xi^\mu(\gamma_N^S) | [T_N^\mu > \gamma_N^S] \quad (\text{III.2.5})$$

Usaremos no que segue o símbolo $\stackrel{\text{S}}{\approx}$ para indicar majoração estocástica. A mesma técnica usada na demonstração do teorema II.2.1 permite mostrar que

$$v \stackrel{\text{S}}{\approx} \mu \quad (\text{III.2.6})$$

Basta, para tanto, que construamos dois sistemas independentes de setas e cruzeiros sobre $Z \times \mathbb{R}$.

Com um destes, construiremos uma versão de $(\xi^\mu(t), t \geq 0)$, com o outro, construiremos uma versão independente de $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$, usando todas as setas e cruzeiros para $t < 0$ e somente aquelas internas a $[-N, N]$ para $t \geq 0$.

Construindo dois destes processos e acoplando-os como na demonstração do teorema II.2.1, segue:

$$\forall A \subset \mathbb{Z}$$

$$P(\xi_N^\mu(\gamma_N s) \cap A \neq \emptyset, \xi_N^\mu(\gamma_N s) \neq \emptyset) \geq$$

$$\geq P(\xi_N^\mu(\gamma_N s) \cap A \neq \emptyset) \cdot P(\xi_N^\mu(\gamma_N s) \neq \emptyset).$$

De onde vem

$$P(\xi_N^\mu(\gamma_N s) \cap A \neq \emptyset | T_N^\mu > \gamma_N s) \geq P(\xi_N^\mu(\gamma_N s) \cap A \neq \emptyset),$$

que equivale a III.2.6.

Como $\mu(\eta: |\eta| < \infty) = 0$, III.2.6 implica $\nu(\eta: |\eta| < \infty) = 0$.

O teorema II.5.1 pode, então, ser usado para completar a demonstração.

Segue, imediatamente, o

Corolário III.2.1 - Se $S_N/N \rightarrow 0$, então

$$X_S^N \xrightarrow{D} e^{-S} N(0, \sigma_f^2) + (1 - e^{-S}) \delta_0$$

O teorema seguinte diz respeito às flutuações em instantes diferentes. Provaremos que elas são assintoticamente independentes:

Teorema III.2.2 - Se $S_N/N \rightarrow 0$, então, $\forall m$ $(X_{r_1}^N, X_{r_2}^N, \dots, X_{r_m}^N)$

condicionado a $[\gamma_N \max_{i=1}^m(r_i) \leq T_N^\mu]$ converge em lei a uma distribuição normal multivariada com matriz de covariância diagonal

$\sigma_f^2 I_m$, onde I_m é a matriz identidade de ordem m .

Demonstração

Mostraremos, inicialmente, que $\forall r, s \in \mathbb{R}$ vale $\text{cov}(X_r^N, X_s^N) \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Suporemos $s > r$. Construímos o processo $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$ sobre uma estrutura de percolação em $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ usando todas as setas e cruzeiras para $t < 0$ e apenas as internas a $[-N, N]$ para $t \geq 0$ (o sistema em $t < 0$ é usado para construir μ em $t = 0$). Usando a mesma notação e técnicas da demonstração do teorema II.3.1, temos

$$\forall A, B \subset \mathbb{Z} \cap [-N, N]$$

$$\begin{aligned} & |\text{cov}(I_{\bar{A}}(\xi_N^\mu(\gamma_N r)), I_{\bar{B}}(\xi_N^\mu(\gamma_N s)) | T_N^\mu > \gamma_N s) | \leq \\ & \leq P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B < \infty | T_N^\mu > \gamma_N s) \end{aligned} \quad (\text{III.2.10})$$

onde $\bar{\tau}_{s,N}^B = \inf\{\ell \geq 0: \zeta_{s,N}^B(\ell) = \emptyset\}$ e $(\zeta_{s,N}^B(\ell), \ell \geq 0)$ é o processo de contacto cuja configuração inicial é B e que até o instante $\gamma_N s$ está confinado a $\{-N, \dots, N\}$ (i.e., não utiliza os processos $(\bar{\tau}_n^{-N})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\bar{\tau}_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ e após $\gamma_N s$ passa a utilizar todas as setas e cruzeiras (deixa de estar confinado)).

Estamos construindo este processo sobre a mesma estrutura de percolação de $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$, invertendo o sentido das setas e tomando a escala de tempo $\ell = \gamma_N s - t$.

Sejam os processos definidos para $0 \leq \ell \leq \bar{\tau}_{s,N}^B$

$$\begin{aligned} e(t) &= \min \zeta_{s,N}^B(\ell) \\ d(t) &= \max \zeta_{s,N}^B(\ell) \end{aligned}$$

e os eventos (bem definidos sobre $[\bar{\tau}_{s,n}^B > \gamma_N(s-r)]$)

$$E = [e(\ell) > -N, \quad \forall \ell \in [0, \gamma_N(s-r)]]$$

$$D = [d(\ell) < N, \quad \forall \ell \in [0, \gamma_N(s-r)]]$$

Como a interação $\bar{e}$ é de primeiros vizinhos, temos

$$[T_N^\mu > \gamma_N s] \cap [\bar{\tau}_{s,N}^B > \gamma_N(s-r)] \cap E^c \cap D^c \Rightarrow [\bar{\tau}_{s,N}^B = \infty] \quad (\text{III.2.11})$$

Logo

$$\begin{aligned} P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B < \infty, T_N^\mu > \gamma_N s) &= \\ &= P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B < \infty, T_N^\mu > \gamma_N s, E \cup D) \leq \\ &\leq P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B, E \cup D) \end{aligned} \quad (\text{III.2.12})$$

A fim de estimarmos esta última probabilidade, consideremos o processo $(\xi^B(\ell), \ell \geq 0)$ construído sobre a mesma estrutura de percolação com setas de sentido invertido e mesma escala de tempo $\ell = \gamma_N s - t$. Sejam

$$\tilde{e}(\ell) = \min \xi^B(\ell)$$

$$\tilde{d}(\ell) = \max \xi^B(\ell)$$

que são bem definidos sobre $[(s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B]$. Segue

$$E \Rightarrow \tilde{E} = [\tilde{e}(\ell) > -N, \forall \ell \in [0, \gamma_N(s-r)]]$$

$$D \Rightarrow \tilde{D} = [\tilde{d}(\ell) < N, \forall \ell \in [0, \gamma_N(s-r)]]$$

Então

$$\begin{aligned} P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B, E \cup D) &\leq P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B, \tilde{E} \cup \tilde{D}) \leq \\ &\leq P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B, \tilde{E}) + P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B, \tilde{D}) \quad (\text{III.2.13}) \end{aligned}$$

As duas probabilidades no segundo membro de (III.2.13) podem ser limitadas superiormente usando o teorema 4 de [3]. Este teorema garante que

$$P(\tilde{d}(\gamma_N(s-r)) - \max B < \frac{\alpha}{2} \gamma_N(s-r)) \leq C e^{-\gamma \gamma_N(s-r)} \quad (\text{III.2.14})$$

$$\text{onde } \alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\max_{(-\infty, 0]} \xi(t)}{t} \quad (\text{quase certamente})$$

Como $\max B \leq N$, $\alpha > 0$, $\frac{\gamma_N}{N} \rightarrow \infty$ vem para N suficientemente grande

$$\begin{aligned} P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B, \tilde{D}) &\leq P(\tilde{d}(\gamma_N(s-r)) - \max B < \frac{\alpha}{2} \gamma_N(s-r)) \leq \\ &\leq C e^{-\gamma \gamma_N(s-r)} \quad (\text{III.2.15}) \end{aligned}$$

O outro termo em (III.2.13) pode ser controlado da mesma maneira. Usando (III.2.12) vem

$$P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B < \infty | T_N^\mu > \gamma_N s) \leq \frac{C e^{-\gamma \gamma_N(s-r)}}{P(T_N > \gamma_N s)}$$

Como o denominador converge a e^{-S} , temos, redefinido

C

$$P((s-r)\gamma_N < \bar{\tau}_{s,N}^B < \infty | T_N^\mu > \gamma_N s) \leq C e^{-\gamma \gamma_N (s-r)} \quad (\text{III.2.16})$$

Usando (III.2.10) e (III.2.16) vem para toda função cilíndrica f

$$|\text{cov}(f(\xi_N^\mu(\gamma_N r)), f(\xi_N^\mu(\gamma_N s)) | T_N^\mu > \gamma_N s)| \leq C e^{-\gamma \gamma_N (s-r)} \quad (\text{III.2.17})$$

(C e γ dependem de f)

Daí vem, tomando N grande o suficiente para que $\gamma_N s > \gamma_N r + S_N$ e para que (III.2.17) valha

$$\begin{aligned} & |\text{cov}(X_r^N, X_s^N | T_N^\mu > \gamma_N s)| \leq \\ & \leq \frac{1}{S_N} \int_r^{r+\frac{S_N}{\gamma_N}} du \int_s^{s+\frac{S_N}{\gamma_N}} dv |\text{cov}(f(\xi_N^\mu(\gamma_N u)), f(\xi_N^\mu(\gamma_N v)) | T_N^\mu > \gamma_N s)| \leq \\ & \leq \frac{1}{S_N} \int_r^{r+\frac{S_N}{\gamma_N}} du \int_s^{s+\frac{S_N}{\gamma_N}} dv C e^{-\gamma \gamma_N (v-u)} \\ & \leq \frac{1}{S_N} \cdot \left(\frac{S_N}{N}\right)^2 \cdot C e^{-\gamma \gamma_N [s-r - \frac{S_N}{\gamma_N}]} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{III.2.18})$$

quando $N \rightarrow \infty$, pois $\frac{S_N}{N} \rightarrow 0$ e $\frac{N}{\gamma_N} \rightarrow 0$.

(na terceira desigualdade majoramos a integral pelo produto do máximo do integrante pela área de integração).

Sejam, agora, as funções características

$$\phi^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_m) = E(e^{i(x_1 X_{r_1} + \dots + x_m X_{r_m})})$$

$$\phi_k^{(N)}(x) = E(e^{ixX_{r_k}}) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

Decompomos f como na demonstração do teorema II.4.1

em

$$f = f_+ - f_-, \quad f_+ \text{ e } f_- \text{ crescentes}$$

e definimos

$$f' = f_+ + f_-$$

$$X_s^{(N)} = \sqrt{S_N} \left[\frac{1}{S_N} \int_{\gamma_N s}^{\gamma_N s + S_N} f'(\xi_N^\mu(t)) dt - \int f' d \right]$$

Podemos demonstrar a associatividade do processo $(\xi_N^\mu(t), t \geq 0)$ de maneira análoga ao teorema II.2.1. Então, podemos aplicar a proposição 2 de [7]:

$$\begin{aligned} & \left| \phi^{(N)}(x_1, \dots, x_m) - \prod_{k=1}^m \phi_k^{(N)}(x_k) \right| \leq \\ & \leq 2 \sum_{\substack{\ell, n=1 \\ \ell < n}}^m |x_\ell x_n| \text{cov}(X_{x_\ell}^{(N)}, X_{x_n}^{(N)}) \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Logo

$$\phi^{(N)}(x_1, \dots, x_m) \rightarrow \prod_{k=1}^m e^{-\frac{x_k^2 \sigma_f^2}{2}}$$

REFERÊNCIAS

- [1] - M. Cassandro, A. Galves, E. Olivieri e M.E. Vares - Metastable behavior of stochastic dynamics: a pathwise approach. Informes de Matemática, série B, 013/83, IMPA. A ser publicado no Journal of Statistical Physics.
- [2] - R. Durrett - On the growth of one dimensional contact processes. Ann, Probability 8, 890 (1980).
- [3] - R. Durrett e D. Griffeath - Supercritical contact processes on $\mathbb{Z}$. Ann. Probability, 11, 1 (1983).
- [4] - J.T. Cox e D. Griffeath - Occupation time limit theorems for additive interacting systems I: the voter model. Ann. Prob. 11, 876 (1983).
- [5] - C.M. Newman e A.L. Wright - An invariance principle for certain dependent sequences. Ann. Probability 9, 671 (1981).
- [6] - C.M. Newman - Normal fluctuations and the FKG inequalities Commun. Math. Phys. 74, 119 (1980).
- [7] - C.M. Newman - A general central limit theorem for FKG systems. Comm. Math. Phys. 91, 75 (1983).
- [8] - J.T. Cox e G. Grimmett - Central limit theorems for associated random variables and the percolation model. Technical Report nº S-5 Department of Mathematics. Syracuse University (1982).
- [9] - D. Griffeath - Additive and cancelative interacting particle systems. Lectures Notes in Mathematics 724. Springer. New York.

- [10] - R. Griffiths, C.Y. Weng e J.S. Langer - Relaxation times for metastable states in the meanfield model of a ferromagnet. Phys. Review 149, 301 (1966).
- [11] - J.L. Lebowitz e O. Penrose - Rigorous treatment of metastable states in the Van der Waals-Maxwell theory. Journal of Stat. Phys. 3, 211 (1971).
- [12] - D. Capocaccia, M. Cassandro, E. Olivieri - A study of metastability in the Ising model. Commun. Math. Phys. 39, 185 (1974).
- [13] - O. Penrose e J.L. Lebowitz - Towards a rigorous molecular theory of metastability. In "Fluctuation Phenomena". Eds. E.W. Montroll, J.L. Lebowitz. North-Holland Publishing Company (1979).
- [14] - G.L. Sewell - Stability, equilibrium and metastability in statistical mechanics. Physics Reports 57, 307 (1980).
- [15] - K. Binder e H. Müller-Krumbhaar - Investigation of metastable states and nucleation in the kinetic Ising model. Physical Review B6, 2328 (1974).
- [16] - C.M. Newman e L.S. Schulman - Metastability and the analytic continuation of eigenvalues. Journal of Math. Phys. 18, 23 (1977).
- [17] - R. Glauber - Time dependent statistics of the Ising model. Journal of Math. Phys. 4, 294 (1963).
- [18] - A. de Masi, N. Ianiro, A. Pellegrinotti e E. Presutti - A survey of hydrodinamical behavior of many particle systems. In "Non Equilibrium Processes", Eds. J.L. Lebowitz, E.W. Montroll. North-Holland Publishing Company (1984).

- [19] - T.E. Harris - Contact interactions on a Lattice. Ann. Probability 2, 969 (1974).
- [20] - D. Griffeath - The basic contact processes. Stochastic Processes and their Applications 11, 151 (1981).
- [21] - C.M. Newman e L.S. Schulman - Complex free energies and metastable lifetimes. Journal of Statistical Phys. 23, 131 (1980).
- [22] - E.B. Davies e Ph. A. Martin - An approach to metastability in some ferromagnetic systems. Helvetica Physica Acta 54, 106 (1981).
- [23] - E.B. Davies - Metastability and the Ising model. Journal of Statistical Physics 27, 657 (1982).
- [24] - A. Galves - Estabilidade estatística e grandes desvios do processo de contacto: um estudo de comportamento em tempo intermediário. Tese apresentada para concurso de livre-docência junto ao IME-USP (1984).