INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA — U.S.P.

**Distribuição de Tolerância da Mistura de
Dois Estímulos Independentes**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GABRIELA STANGENHAUS

Orientador: Dr. EUCLIDES C. DE LIMA FILHO

SÃO PAULO

1 9 7 3

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Euclides Custódio de Lima Filho, os ensinamentos que nos ministrou e o apoio dispensado durante o estudo desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Odelar Leite Linhares, o incentivo constante e o esforço para nos proporcionar excelentes condições de trabalho.

Aos colegas do Departamento, a atenção e a colaboração sempre dispensadas.

A CAPES, o auxílio concedido para a publicação deste trabalho.

Ao Centro de Processamento de Dados do Campus de São Carlos, da USP, o processamento dos programas apresentados neste trabalho.

Ao José, meu amigo e companheiro, o estímulo e sugestões sempre oportunas.

SUMMARY

TOLERANCE DISTRIBUTION FOR THE MIXTURE OF TWO INDEPENDENT STIMULI

This dissertation deals with the analysis of a mixture of two independent stimuli based on quantal data.

A method is presented to estimate the parameters of the tolerance distribution, under the hypothesis that it is a Bivariate Normal. The method is essentially due to Hewlett and Plackett [10]. It estimates the two means and variances using the (Normal) marginal tolerance distributions and the method of probits, which is also presented here.

The maximum-likelihood estimate of the correlation coefficient is obtained through the Newton iterative method.

A set of computer programs is also presented, to enable the use of the method by non-specialists.

INDICE

	pg
<u>INTRODUÇÃO</u>	1
 1. <u>O METODO DE PROBITOS</u>	 1
1.1. Considerações iniciais	1
1.2. Distribuição de tolerância	1
1.3. Transformação através de probitos	2
1.4. Estimação dos parâmetros de uma distribuição de tolerância	4
1.5. Estimação de μ e σ	9
1.6. Teste de aderência	13
1.7. Intervalos de confiança	15
1.8. Comparação entre duas distribuições de tole- rância	18
 2. <u>DISTRIBUIÇÃO DE TOLERÂNCIA DA MISTURA DE DOIS ES- TIMULOS INDEPENDENTES</u>	 22
2.1. Determinação da distribuição de tolerância de uma mistura a partir da distribuição de tole- rância de seus componentes	22
2.2. Uso da distribuição Normal como distribuição da tolerância da mistura de dois estímulos independentes	25
2.3. Estimação de ρ	28
2.4. Teste de aderência	32
2.5. Roteiro para a análise da mistura de dois es- tímulos independentes	32
2.6. Alternativas para a estimação de μ_1 , μ_2 , σ_1 e σ_2 e ρ	33
 3. <u>APLICAÇÃO</u>	 38
3.1. Simulação	38
3.2. Estimação de μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 e ρ	38
3.3. Teste de Aderência	40
3.4. Convergência do processo iterativo de Newton	41
 <u>APÊNDICE</u>	 43
 <u>BIBLIOGRAFIA</u>	 55

INTRODUÇÃO

Ocorrem na prática experimentos cujos resultados são de caráter qualitativo (não quantificáveis). Por exemplo, se desejamos estudar a eficácia de um inseticida, tomamos vários lotes de insetos aos quais aplicamos doses distintas do inseticida. Cada inseto pode, segundo nossa observação, ser considerado como morto ou sobrevivente. Como outro exemplo, consideremos cápsulas de fulminato de mercúrio (detonadores) que são submetidas a choque mecânico de intensidade conhecida. Cada prova resultará ou em explosão ou em não-explosão.

Os dois experimentos, um de Biologia, o outro de Engenharia, têm em comum o tipo de resultado, que é dicotômico (resposta, não-resposta). Também são passíveis de serem igualmente formulados: a lotes de unidades experimentais (insetos, cápsulas de fulminato de mercúrio) são aplicados estímulos (inseticida, choque mecânico) em vários níveis (doses, intensidades), obtendo-se resposta (morte, explosão) ou não-resposta (sobrevivência, falha). Tal tipo de resposta é dita dicotômica ou quantal.

A análise de experimentos com respostas quantais é um problema resolvido, quando consideramos apenas um estímulo.

Todavia, pode ocorrer a necessidade de estudar a ação simultânea de dois estímulos. A ação simultânea de dois inseticidas, por exemplo, bem pode ser de interesse prático.

Dois estímulos aplicados simultaneamente constituem uma mistura de estímulos e são ditos independentes se eles agem sobre sistemas distintos e a ação de um estímulo não interfere na ação do outro.

Um experimento com uma mistura é feito aplicando-se a diversos lotes de unidades experimentais níveis da mistura e observando-se, em cada lote, o número de respostas. Suponhamos que um certo lote contém n_1 unidades experimentais, das quais $r_1 \leq n_1$ responderam à mistura. A análise estatística dos resultados experimentais refere-se

à relação entre as proporções observadas $p_i = r_i/n_i$ e os níveis da mistura aplicados aos diversos lotes. Para interpretar dados desse tipo em termos quantitativos, torna-se necessário adotarmos um modelo matemático para relacionar os níveis da mistura e as probabilidades de resposta (distribuição de tolerância). Essa distribuição de tolerância irá envolver um conjunto de parâmetros a serem estimados a partir dos dados experimentais.

Neste trabalho trataremos da determinação da distribuição de tolerância da mistura de dois estímulos independentes A e B. Suporemos que a distribuição de tolerância da mistura é Normal bidimensional.

No Capítulo 1 apresentamos o método de probitos, que se presta a estimar a média e a variância de uma distribuição Normal, quando os dados são quantais.

O Capítulo 2 consiste na determinação da distribuição de tolerância da mistura de dois estímulos independentes. Primeiramente determinamos a distribuição de tolerância da mistura a partir da distribuição de tolerância de seus componentes. Em seguida tratamos da estimação dos parâmetros da distribuição de tolerância no caso em que esta é suposta Normal bidimensional. As médias e as variâncias dos estímulos são estimadas através do método de probitos e o coeficiente de correlação é estimado, basicamente, pelo método apresentado por Hewlett e Plackett [8]. Para finalizar apresentamos alguns métodos adicionais para estimar os parâmetros da distribuição normal bidimensional, no caso de respostas quantais.

No capítulo 3 fazemos aplicações da teoria apresentada nos capítulos 1 e 2 a dados simulados em computador.

Apresentamos em um apêndice dois programas para computador, que elaboramos para a estimação dos parâmetros em uma análise de misturas. O primeiro programa calcula os valores estimados da média e da variância pelo método de probitos. O segundo calcula a estimativa do coeficiente de correlação. A inclusão dos programas foi feita para permitir a pessoas não iniciadas em programação o emprego de computadores na solução de problemas reais.

1. O MÉTODO DE PROBITOS

1.1. Considerações iniciais

Apresentaremos algumas definições que serão frequentemente utilizadas ao longo deste trabalho.

Em certas experiências existem duas componentes a serem consideradas:

- a. Estímulo - uma ação que produz determinada resposta.
- b. Unidade experimental - elemento ao qual é aplicado o estímulo.

O estímulo é aplicado à unidade experimental numa intensidade especificada e como resultado obtém-se, ou não, uma resposta. A capacidade que o estímulo possui de produzir respostas é denominada potência do estímulo.

Quando realizamos experiências cujo resultado é a resposta a um estímulo aplicado a uma unidade experimental, frequentemente é impossível ou impraticável obter-se uma medida quantitativa dessa resposta. O que se pode saber após a aplicação do estímulo é se produziu ou não um efeito especificado. Por exemplo, ao injetar-se certa dose de veneno em um lote de cobaias, verifica-se, após dez minutos, quantas morreram. Esse tipo de resposta denomina-se dicotômica ou quantal.

Quando a resposta é quantal, sua ocorrência irá depender da intensidade do estímulo aplicado (nível do estímulo). Associado a cada unidade experimental existe um nível abaixo do qual ela não responde ao estímulo e acima do qual ela responde. Esse nível denomina-se "tolerância" da unidade experimental.

1.2. Distribuição de tolerância

A tolerância varia de unidade experimental para unidade experimental. Portanto, para estudarmos a potência de um estímulo é necessário conhecermos a distribuição de tolerância.

A medida do estímulo será expressa por λ e a distribuição de tolerância, por:

$$dP = f(\lambda) d\lambda \quad (1.2.1)$$

Então, se um nível λ_1 do estímulo é aplicado a uma unidade experimental, a probabilidade de resposta a esse nível do estímulo é

$$P_1 = \int_0^{\lambda_1} f(\lambda) d\lambda \quad (1.2.2)$$

Suporemos que o estímulo é medido por uma quantidade que varia de 0 a $+\infty$. Assim,

$$\int_0^{+\infty} f(\lambda) d\lambda = 1$$

A experiência tem mostrado que $f(\lambda)$ é geralmente assimétrica, quando medida na escala natural e que através de uma transformação adequada de λ obtém-se uma distribuição simétrica, que é aproximadamente Normal. Denotaremos por x o valor transformado de λ e será denominado de nível transformado.

A transformação mais comum é

$$x = \log_{10} \lambda$$

Ocorre também com frequência a transformação

$$x = \lambda^1 \quad 1 \leq 1$$

A distribuição de tolerância na escala x será suposta Normal, isto é, sua função de densidade é dada por

$$(1.2.3) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \begin{array}{l} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < \mu < +\infty \\ \sigma > 0 \end{array}$$

A densidade (1.2.3) será denotada por $N(\mu; \sigma)$

1.3. Transformação através de probitos

Para estudar-se a distribuição de tolerância de um estímulo, escolhem-se diversos níveis desse estímulo e aplica-se cada nível a um lote de unidades experimentais.

Observa-se então, em cada lote, a proporção de unidades experimentais que respondeu ao nível aplicado. Normalmente a relação entre nível e resposta é expressa por uma curva sigmóide assimétrica, como já foi dito.

Quando se aplica um estímulo a um lote de unidades experimentais, irão responder ao estímulo aquelas unidades cuja tolerância é inferior ao nível aplicado. Esse fato é uma inerente variabilidade na suscetibilidade entre as unidades experimentais são responsáveis pela forma sigmóide da curva.

Existe um inconveniente em se estudar diretamente essa curva sigmóide. Ela é assintótica na região em que a percentagem de resposta se aproxima de 100%, tornando difícil a determinação do menor nível que age sobre cerca de 100% da população estudada. Além do mais, a estimação dos parâmetros da distribuição de tolerância é trabalhosa. Para superar essas dificuldades, Bliss [2] propôs a transformação dos níveis em logaritmos decimais dos níveis e as percentagens de resposta nas abscissas correspondentes da distribuição Normal com média 5 e variância 1. Essas unidades foram denominadas de probitos. O probito é uma modificação do N.E.D. (normal equivalent deviate), definido por Gaddum, que é o nível transformado esperado numa distribuição normal com média 0 e variância 1, correspondente a uma proporção. Bliss achou conveniente adotar a média 5 para evitar valores negativos.

Obtemos com essa transformação pontos que podem ser representados por uma reta. Assim, a análise da potência dos estímulos pode ser realizada através dos coeficientes angular e linear da reta.

Seja P a probabilidade de resposta a um certo nível transformado x ; então o probito de P é dado por Y , onde

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Y-5} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \quad (1.3.1)$$

Se (1.2.3) representa a distribuição de tolerância, então a probabilidade esperada de resposta a um nível

transformado x é,

$$P = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}} dv \quad (1.3.2)$$

Comparando (1.3.1) e (1.3.2) com respeito à mesma proporção P , obtemos:

$$Y = 5 + \frac{1}{\sigma} (x - \mu) \quad (1.3.3)$$

De (1.3.3) concluímos que a relação entre o probito da proporção esperada de resposta e o nível transformado é linear. Assim, através de probitos, dados experimentais podem ser utilizados para fornecer uma estimativa de μ e σ .

1.4. Estimação dos parâmetros de uma distribuição de tolerância

Suponhamos que a distribuição de tolerância de um estímulo seja dada por (1.2.1), que depende do parâmetro θ , e que a probabilidade de uma unidade experimental responder ao nível λ_1 do estímulo seja dada por (1.2.2).

Se um estímulo é aplicado ao nível λ_1 a um lote com n_1 unidades experimentais e se as respostas das unidades experimentais são independentes, então a probabilidade de que r_1 unidades experimentais respondam ao estímulo é dada pela distribuição binomial,

$$P(r_1) = \binom{n_1}{r_1} P_1^{r_1} Q_1^{n_1-r_1} \quad r_1 = 0, 1, \dots, n_1$$

$$\text{e } Q_1 = 1 - P_1$$

Suponha-se agora que uma série de k níveis de um estímulo são testados em uma certa experiência. A partir dos resultados experimentais, utilizando o método de máxima-verossimilhança, serão estimados os parâmetros de $f(\lambda)$.

A função de verossimilhança da amostra é,

$$L_1 = \prod_{i=1}^k \binom{n_i}{r_i} P_i^{r_i} Q_i^{n_i-r_i}$$

O estimador de máxima verossimilhança de θ é a solução da equação

$$\frac{\partial L_1}{\partial \theta} = 0$$

$\log L_1$ e L_1 tem o mesmo ponto de máximo, pois $\log L_1$ é uma função crescente de L_1 . Podemos então determinar o estimador de θ através da equação:

$$\frac{\partial \log L_1}{\partial \theta} = 0$$

Mas,

$$L = \log L_1 = \sum_{i=1}^k \log(r_i^{n_i}) + \sum_{i=1}^k r_i \log P_i + \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) \log Q_i$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{P_i} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - r_i)}{Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \theta} = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{P_i} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} - \frac{(n_i - r_i)}{Q_i} \frac{\partial (1 - P_i)}{\partial \theta} = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{(r_i - n_i P_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (p_i - P_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} \quad (1.4.1) \end{aligned}$$

Obtemos assim a equação:

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i (p_i - P_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = 0 \quad (1.4.2)$$

em que $p_i = r_i/n_i$ é uma estimativa empírica de P_i .

Se a distribuição de tolerância envolve mais de um parâmetro, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros serão dados pela solução de um sistema de equações, em que, para cada parâmetro, tem-se uma equação do tipo (1.4.2)

Normalmente é impossível resolver esses sistemas através de métodos exatos. Entretanto podemos utilizar métodos iterativos que convergem para a solução.

Suponhamos que a distribuição de tolerância depende de dois parâmetros θ e ϕ . Seus estimadores de máxima verossimilhança são a solução do sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k \frac{n_i(p_i - P_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = 0 \\ \sum_{i=1}^k \frac{n_i(p_i - P_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial P_i}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Através do método iterativo de Newton obtemos estimativas de θ e ϕ que convergem para as estimativas de máxima-verossimilhança. Suponhamos que θ_1 e ϕ_1 são as primeiras aproximações das soluções do sistema (1.4.3), obtidas através de método gráfico (Finney, [5], pg.28) ou outro processo. Desenvolvendo-se $\partial L / \partial \theta$ e $\partial L / \partial \phi$ em séries de Taylor até as derivadas de 1ª ordem temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta} + (\theta - \theta_1) \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_1} + (\phi - \phi_1) \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \phi} \right]_{\substack{\theta=\theta_1 \\ \phi=\phi_1}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} + (\theta - \theta_1) \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \phi \partial \theta} \right]_{\substack{\theta=\theta_1 \\ \phi=\phi_1}} + (\phi - \phi_1) \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2} \right]_{\phi=\phi_1} = 0 \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Considerando-se (1.4.1) obtemos as seguintes derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = & \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right)^2 - \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right)^2 - 2P_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right)^2 \right] \times \left[\frac{n_i(p_i - P_i)}{P_i^2 Q_i^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{n_i(p_i - P_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \theta^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right)^2 - \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right)^2 - 2P_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right)^2 \right] \times \left[\frac{n_i (P_i - P_i)}{P_i^2 Q_i^2} \right] + \frac{n_i (P_i - P_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \theta^2} \right\}$$

e

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \phi} = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{-n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial P_i}{\partial \phi} \right) \left[\frac{(P_i - P_i)(1 - 2P_i)}{P_i Q_i} + 1 \right] + \frac{n_i (P_i - P_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \theta \partial \phi} \right\} \quad (1.4.5)$$

Substituindo-se os valores observados p_i pelos valores esperados P_i , temos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = \sum_{i=1}^k \frac{-n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right)^2 \quad (1.4.6)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2} = \sum_{i=1}^k \frac{-n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \phi} \right)^2 \quad (1.4.7)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \phi} = \sum_{i=1}^k \frac{-n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial P_i}{\partial \phi} \right) \quad (1.4.8)$$

Ao fazer-se tal substituição comete-se um erro que converge em probabilidade para 0, pois o método de máxima verossimilhança garante a consistência dos estimadores.

Substituindo (1.4.6), (1.4.7) e (1.4.8) em (1.4.4) vem

$$\left\{ \begin{aligned} & \delta\theta_1 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right)^2 \right]_{\theta=\theta_1} + \delta\phi_1 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left[\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_1} \times \\ & \times \left[\frac{\partial P_i}{\partial \phi} \right]_{\phi=\phi_1} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (p_i - P_i)}{P_i Q_i} \left[\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_1} \quad (1.4.9) \\ & \delta\theta_1 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left[\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_1} \times \left[\frac{\partial P_i}{\partial \phi} \right]_{\phi=\phi_1} + \delta\phi_1 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial \phi} \right)^2 \right]_{\phi=\phi_1} = \\ & = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (p_i - P_i)}{P_i Q_i} \left[\frac{\partial P_i}{\partial \phi} \right]_{\phi=\phi_1} \end{aligned} \right.$$

em que $\delta\theta_1 = \theta - \theta_1$ e $\delta\phi_1 = \phi - \phi_1$

Obtidas as soluções $\delta\theta_1$ e $\delta\phi_1$ de (1.4.9) temos as aproximações melhoradas

$$\theta_2 = \theta_1 + \delta\theta_1 \quad \text{e} \quad \phi_2 = \phi_1 + \delta\phi_1$$

Substitui-se θ_1 e ϕ_1 em (1.4.9) por θ_2 e ϕ_2 , resolve-se o sistema e obtém-se as novas aproximações θ_3 e ϕ_3 . Esse processo é repetido até alcançar-se a precisão desejada, isto é, até verificarem-se

$$|\theta_1 - \theta_{1-1}| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\phi_1 - \phi_{1-1}| < \delta, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad \delta > 0$$

A distribuição assintótica dos estimadores é dada pelo teorema: (Wald [12]).

Teorema: Considere-se a função de densidade $f(y; \vec{\theta})$ em que $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$

Sejam $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ os estimadores de máxima verossimilhança de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, respectivamente. Então a distribuição de probabilidade de $\hat{\vec{\theta}}$ é assintoticamente Normal com média $\vec{\theta}$ e matriz de variância e covariância dada por:

$$\|\sigma_{1j}(\theta)\| = \|c_{1j}(\theta)\|^{-1}$$

em que

$$c_{1j}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \log L_1}{\partial \theta_1 \partial \theta_j}\right)$$

Observe-se de (1.4.5) que

$$E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_j}\right) = \sum_{i=1}^k \frac{-n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_1}\right) \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_j}$$

que é a expressão obtida em (1.4.8)

Temos assim para os parâmetros θ e ϕ a seguinte matriz de variâncias e covariâncias assintótica,

$$V = \begin{vmatrix} \left. \frac{-\partial^2 L}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\hat{\theta}} & \left. \frac{-\partial^2 L}{\partial \theta \partial \phi} \right|_{\substack{\theta=\hat{\theta} \\ \phi=\hat{\phi}}} \\ \left. \frac{-\partial^2 L}{\partial \theta \partial \phi} \right|_{\substack{\theta=\hat{\theta} \\ \phi=\hat{\phi}}} & \left. \frac{-\partial^2 L}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\hat{\phi}} \end{vmatrix} \quad (1.4.10)$$

em que $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ são as estimativas de θ e ϕ obtidas com a precisão requerida.

1.5. Estimação de μ e σ

Os resultados obtidos em (1.4) são gerais e aplicam-se a qualquer distribuição de tolerância. Suponha-se que a distribuição de tolerância do estímulo transformado seja Normal com média μ e desvio padrão σ , isto é, da forma (1.2.3). Já vimos que a relação entre o estímulo transformado x e o probito Y de P é linear,

$$Y = \alpha + \beta x$$

em que os parâmetros α e β estão relacionados a μ e σ por

$$\mu = \frac{(5 - \alpha)}{\beta} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{1}{\beta} \quad (1.5.1)$$

Obtendo estimativas de α e β , calculam-se imediatamente de (1.5.1) estimativas para μ e σ .

O probito da proporção P é dado por (1.3.1). Então,

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Y-5)^2}{2}} = Z$$

Z é a ordenada da distribuição $N(0,1)$ no ponto cuja abscissa é $Y-5$.

Temos assim,

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{\partial P}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = Z \quad (1.5.2)$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{\partial P}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \beta} = x Z \quad (1.5.3)$$

Suponhamos que a_0 e b_0 são as primeiras aproximações das estimativas de máxima verossimilhança de α e β . Substituindo (1.5.2) e (1.5.3) em (1.4.9) temos,

$$\left\{ \begin{aligned} \delta a_0 \sum_{i=1}^k \frac{n_i Z_i^2}{P_i Q_i} + \delta b_0 \sum_{i=1}^k \frac{n_i Z_i^2}{P_i Q_i} \cdot x_i &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i Z_i^2}{P_i Q_i} \left(\frac{P_i - P_i}{Z} \right) \\ \delta a_0 \sum_{i=1}^k \frac{n_i Z_i^2}{P_i Q_i} x_i + \delta b_0 \sum_{i=1}^k \frac{n_i Z_i^2}{P_i Q_i} \cdot x_i^2 &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i Z_i^2}{P_i Q_i} \left(\frac{P_i - P_i}{Z} \right) x_i \end{aligned} \right. \quad (1.5.4)$$

Observe-se que no sistema (1.5.4) temos as equações normais da regressão ponderada de $(p - P)/Z$ sobre x , em que os coeficientes de ponderação são:

$$nw = \frac{n Z^2}{PQ}$$

A ponderação nw é o inverso da variância de Y , pois desenvolvendo $p = F(Y)$ pela fórmula de Taylor até a derivada de 1ª ordem temos

$$p = F(Y_p) - (Y - Y_p) F'(Y_p)$$

daí vem

$$V(p) = \left[F'(Y_p) \right]^2 V(Y)$$

e

$$V(Y) = \frac{PQ}{nZ^2}$$

Substituindo w em (1.5.4) vem

$$\begin{cases} \delta a_0 \sum_{i=1}^k n_i w_i + \delta b_0 \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i = \sum_{i=1}^k n_i w_i \left(\frac{p_i - P}{Z_i} \right) \\ \delta a_0 \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i + \delta b_0 \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i^2 = \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i \left(\frac{p_i - P}{Z_i} \right) \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Para resolvermos o sistema (1.5.5) introduziremos o probito auxiliar que é definido por:

$$y = Y + \frac{p-P}{Z} = a_0 + b_0 x + \eta; \quad \eta = \frac{p-P}{Z}$$

Temos assim a equação de regressão

$$y = a_1 + b_1 x$$

em que

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i w_i x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^k n_i w_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.5.6)$$

$$a_1 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \quad (1.5.7)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i w_i x_i}{\sum_{i=1}^k n_i w_i}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i w_i y_i}{\sum_{i=1}^k n_i w_i}$$

e

$$b_1 = b_0 + \delta b_0 \quad \text{e} \quad a_1 = a_0 + \delta a_0$$

Provemos que δb_0 e δa_0 são as soluções do sistema (1.5.5). Substituindo em (1.5.6) e (1.5.7) y por $a_0 + b_0 x + \eta$ vem

$$b_1 = b_0 + \frac{\sum_{i=1}^k n_i w_i x_i (\eta_i - \bar{\eta})}{\sum_{i=1}^k w_i (x_i - \bar{x})^2}; \quad \bar{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i w_i \eta_i}{\sum_{i=1}^k n_i w_i}$$

$$a_1 = a_0 + \bar{\eta} - \bar{x} (b_1 - b_0)$$

Temos então

$$\delta b_0 = \frac{\sum_{i=1}^k w_i x_i (\eta_i - \bar{\eta})}{\sum_{i=1}^k w_i (x_i - \bar{x})^2}$$

e

$$\delta a_0 = \bar{\eta} - \delta b_0 \bar{x}$$

onde δa_0 e δb_0 são as soluções de (1.5.5).

Um novo ciclo de cálculos pode ser realizado usando-se a reta $y = a_1 + b_1 x$. O processo iterativo segue até alcançar a precisão desejada.

Através de (1.4.10) obtém-se a matriz de variâncias e covariâncias assintótica.

$$V = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^k n_i w_i & \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i \\ \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i & \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i^2 \end{vmatrix}^{-1}$$

Temos assim

$$V(a) = \frac{(\overline{x^2})}{S_{xx}}$$

$$V(b) = \frac{1}{S_{xx}}$$

$$\text{Cov}(a, b) = \frac{-\bar{x}}{S_{xx}}$$

em que

$$(\overline{x^2}) = \frac{\sum_{i=1}^k n_i w_i x_i^2}{\sum_{i=1}^k n_i w_i}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^k n_i w_i (x_i - \bar{x})^2$$

Como $\text{cov}(a,b)$ nem sempre é nula, trabalharemos com a reta de regressão na forma

$$Y = \bar{y} + b(x - \bar{x})$$

pois

$$\text{Cov}(\bar{y}, b) = \text{cov}(a, b) + \bar{x} V(b) = 0$$

Mais ainda:

$$V(\bar{y}) = V(a) + \bar{x}^2 V(b) + 2\bar{x} \text{cov}(a, b) = \frac{1}{\sum_{i=1}^k n_i w_i}$$

Observação: As variâncias $V(\bar{y})$ e $V(b)$ são obtidas somente quando as estimativas de α e β estão bem próximas das estimativas de máxima verossimilhança.

1.6. Teste de aderência

Construiremos um teste de hipóteses, a fim de decidir se a distribuição de tolerâncias pode ser considerada Normal.

A variável aleatória $(p_1 - P_1)$ tem distribuição assintoticamente Normal com média e variância dadas por:

$$E(p_1 - P_1) = 0$$

$$V(p_1 - P_1) = \frac{P_1 Q_1}{n}$$

A estatística

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (p_i - P_i)^2}{P_i Q_i} \quad (1.6.1)$$

sob a hipótese de que a distribuição de tolerância é Normal, tem distribuição assintoticamente qui-quadrado com $(k-2)$ graus de liberdade, pois dispomos de k conjuntos de observações independentes e duas restrições lineares dadas pelos estimadores de α e β .

Através da estatística χ^2 , temos uma avaliação dos desvios das observações com relação aos valores esperados,

dando-nos portanto uma medida da aderência do modelo proposto aos dados observados.

A região crítica do teste, ao nível de significância γ , é dada pela região

$$(\chi^2_{(k-2, 1-\gamma)}; +\infty)$$

em que

$\chi^2_{(k-2, 1-\gamma)}$ é o valor tabelado da distribuição qui-quadrado com $k-2$ graus de liberdade, tal que

$$P\left\{X \leq \chi^2_{(k-2, 1-\gamma)}\right\} = 1 - \gamma$$

Como em 1.5 trabalhamos com x e y , façamos algumas transformações em (1.6.1) de modo a facilitar os cálculos

Temos que

$$w = \frac{Z^2}{PQ}$$

Então

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k n_i w_i \left(\frac{p_i - P_i}{Z_i}\right)^2$$

Como

$$y = Y + \frac{p-P}{Z}$$

vem

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^k n_i w_i (y_i - Y_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^k n_i w_i \left[y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x}) \right]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^k n_i w_i (y_i - \bar{y})^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^k n_i w_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) \right]^2}{\sum_{i=1}^k n_i w_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.6.2) \end{aligned}$$

Observe-se que o teste de aderência realizado através de (1.6.2) mede os desvios dos probitos observados em relação à reta de probitos estimada

1.7. Intervalos de confiança

i) Intervalos de confiança para α e β

Como já vimos em 1.4 os estimadores a e b tem a seguinte distribuição assintótica.

$$a \sim N(\alpha; \sqrt{(x^2)/S_{xx}}) \quad (1.7.1)$$

e

$$b \sim N(\beta; \sqrt{1/S_{xx}}) \quad (1.7.2)$$

De (1.7.1) temos que

$$(a - \alpha) / \sqrt{V(a)} \sim N(0,1)$$

Então um intervalo de $(1-\delta)\%$ de confiança para α é

$$(a - z_{\delta} \cdot \sqrt{V(a)} ; a + z_{\delta} \cdot \sqrt{V(a)})$$

em que z_{δ} é o valor da abscissa na distribuição $N(0,1)$ tal que

$$P\{-z_{\delta} \leq Z \leq z_{\delta}\} = 1 - \delta$$

De (1.7.2) vem

$$(b - \beta) \cdot S_{xx} \sim N(0,1)$$

Assim, um intervalo de $(1-\delta)\%$ de confiança para β é dado por:

$$(b - \frac{z_{\delta}}{S_{xx}} ; b + \frac{z_{\delta}}{S_{xx}})$$

ii) Intervalo de confiança para a reta estimada.

A fim de fazermos previsões com boa margem de segurança necessitamos conhecer uma região de confiança para a reta.

Suponhamos que a reta ajustada seja dada por

$$\hat{Y} = \bar{y} + b(x - \bar{x})$$

Então

$$V(\hat{Y}) = V(\bar{y}) + (x - \bar{x})^2 V(b) =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^k n_i w_i} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k n_i w_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Temos que $E(\hat{Y}) = Y = 5 + \frac{1}{\sigma} (x - \mu)$

Logo $\frac{\hat{Y} - Y}{\sqrt{V(\hat{Y})}} \sim N(0,1)$

Assim um intervalo de $(1-\gamma)\%$ de confiança para Y é

$$\left(\hat{Y} - z_{\gamma} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^k n_i w_i} + \frac{(x_1 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k n_i w_i (x_i - \bar{x})^2} \right]; \right. \\ \left. \hat{Y} + z_{\gamma} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^k n_i w_i} + \frac{(x_1 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k n_i w_i (x_i - \bar{x})^2} \right] \right)$$

iii) Intervalos de confiança para μ e σ

Considere-se a reta $Y = \bar{y} + b(x - \bar{x})$. O estimador de μ é obtido invertendo-se a reta no ponto $Y=5$. Obtemos

$$m = \bar{x} + \frac{5 - \bar{y}}{b} \quad (1.7.3)$$

Determinaremos primeiramente um intervalo de confiança para o nível transformado x , através do teorema de Fieller ([7], pg. 550)

Teorema de Fieller

Suponhamos que α e β são dois parâmetros e

$$\delta = \frac{\alpha}{\beta}$$

Sejam a e b dois estimadores não-tendenciosos de α e β em que a e b tem distribuição Normal, tal que

$V(a) = \sigma^2 \cdot v_{11}$; $V(b) = \sigma^2 \cdot v_{22}$; $cov(a,b) = \sigma^2 \cdot v_{12}$ em que σ^2 pode ser desconhecida.

Seja S^2 um estimador de σ^2 baseado em f graus de liberdade, tal que

a) $\frac{fS^2}{\sigma^2} \sim \chi_f^2$

b) S^2 é independente de $(a - \delta b)$

Então um intervalo de $100(1 - \gamma\%)$ para δ é dado por:

$$\left(m + \frac{g}{1-g} \left(m - \frac{v_{12}}{v_{22}}\right) + \frac{tS}{b(1-g)} \sqrt{v_{11} - 2m v_{12} + m^2 v_{22} - g \left(v_{11} - \frac{v_{12}^2}{v_{22}}\right)}\right) \quad (1.7.4)$$

em que $m = \frac{a}{b}$ e $g = \frac{t^2 \cdot S^2 \cdot v_{22}}{b^2}$

e t é a ordenada da distribuição "t" de Student com f graus de liberdade.

Quando $g \approx 0$, o intervalo (1.7.4) reduz-se a

$$\left(m \pm \frac{tS}{b} \sqrt{v_{11} - 2m v_{12} + m^2 v_{22}}\right)$$

e se $g \approx 0$ e $v_{12} = 0$ temos

$$\left(m \pm \frac{tS}{b} \sqrt{v_{11} + m^2 v_{22}}\right)$$

Fazendo a inversão da reta, a estimativa por ponto de x é:

$$\hat{x} = \bar{x} + \frac{\hat{Y} - \bar{Y}}{b} \longrightarrow \hat{x} - \bar{x} = \frac{\hat{Y} - \bar{Y}}{b}$$

Colocando $a = \hat{Y} - \bar{Y}$, $m = a/b$ é um estimador para $(x - \bar{x})$, satisfazendo o teorema de Fieller, pois

a) $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são estimadores não tendenciosos de $(Y - \bar{Y})$ e β , respectivamente e tem distribuição assintoticamente Normal.

b) $V(a) = V(\bar{Y}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^k n_i w_i}$

$$V(b) = \frac{1}{S_{xx}}$$

$$\text{Cov}(a, b) = 0$$

c) σ^2 é conhecido é igual a 1

Então um intervalo de $(1 - \gamma)\%$ de confiança para x é

$$\left(x + \frac{g}{1-g} (x - \bar{x}) \pm \frac{z\gamma}{b(1-g)} \sqrt{\frac{1-g}{\sum_{i=1}^k n_i w_i} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \right) \quad (1.7.5)$$

$$g = \frac{(z\gamma)^2}{b^2 \cdot S_{xx}}$$

De (1.7.3) e (1.7.5) obtemos o seguinte intervalo de $(1 - \gamma)\%$ para μ ,

$$\left(m + \frac{g}{1-g} (m - \bar{x}) \pm \frac{z\gamma}{b(1-g)} \sqrt{\frac{1-g}{\sum_{i=1}^k n_i w_i} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \right)$$

Um intervalo de confiança para σ é encontrado através da relação $\sigma = 1/\beta$. Ao nível de confiança $(1 - \gamma)\%$ temos o intervalo

$$\left(\frac{S_{xx}}{b \cdot S_{xx} + z\gamma} ; \frac{S_{xx}}{b \cdot S_{xx} - z\gamma} \right)$$

1.8. Comparação entre duas distribuições de tolerância

Frequentemente no estudo de distribuições de tolerância tem-se como interesse testar se dois estímulos têm a mesma potência.

Sejam A e B dois estímulos que foram aplicados em diversos níveis a lotes de unidades experimentais. Suponhamos que a partir dos dados observados obtivemos as seguintes retas de regressão

$$Y_A = \bar{y}_A + b_A (x - \bar{x}_A)$$

$$Y_B = \bar{y}_B + b_B (x - \bar{x}_B)$$

Ora, para testarmos se a potência dos estímulos A

e B são iguais temos que testar se as retas são coincidentes. Para tal, primeiramente testaremos se os coeficientes angulares das retas de probitos são iguais. Aceita essa hipótese testaremos se os coeficientes lineares são iguais.

1) Teste de paralelismo

Queremos testar as hipóteses

$$\begin{cases} H_0: \beta_A = \beta_B \\ H_1: \beta_A \neq \beta_B \end{cases}$$

Sabemos que

$$(b_A - b_B) \sim N \left(\beta_A - \beta_B; \sqrt{\frac{1}{\frac{A}{S_{xx}} + \frac{1}{\frac{B}{S_{xx}}}}} \right)$$

Sob H_0 :

$$(b_A - b_B) \sim N \left(0; \sqrt{\frac{1}{\frac{A}{S_{xx}} + \frac{1}{\frac{B}{S_{xx}}}}} \right)$$

Então a estatística

$$Q = \frac{(b_A - b_B)^2}{\frac{1}{\frac{A}{S_{xx}}} + \frac{1}{\frac{B}{S_{xx}}}}$$

tem distribuição assintoticamente qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

A região crítica do teste ao nível de significância de $\gamma\%$ é

$$(\chi^2_{(1, 1-\gamma)}; +\infty)$$

Suponhamos que aceitamos a hipótese H_0 . Então as duas retas de regressão podem ser consideradas paralelas. Uma estimativa comum para o coeficiente angular $\beta_A = \beta_B = \beta$ é obtida pela média ponderada dos coeficientes angulares b_A e b_B , usando os valores recíprocos das variâncias como pesos, isto é,

$$\bar{b} = \frac{\frac{A}{S_{xx}} b_A + \frac{B}{S_{xx}} b_B}{\frac{A}{S_{xx}} + \frac{B}{S_{xx}}} = \frac{\frac{A}{S_{xx}} + \frac{B}{S_{xx}}}{\frac{A}{S_{xx}} + \frac{B}{S_{xx}}} \quad \text{em que}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$$

A estimativa $\bar{b}$ foi obtida através do método dos mínimos quadrados.

Seja

$$R = \sum_{i=1}^{k_A} \left[y_j^A - \bar{y}_A - b(x_i^A - \bar{x}) \right]^2 + \sum_{i=1}^{k_B} \left[y_i^B - \bar{y}_B - b(x_i^B - \bar{x}) \right]^2$$

O estimador $\bar{b}$ é a solução da equação

$$\frac{\partial R}{\partial b} = 0$$

$\bar{b}$ tem distribuição assintoticamente Normal com média β e variância

$$V(b) = \frac{1}{\frac{A}{S_{xx}} + \frac{B}{S_{xx}}}$$

As equações para as retas de regressão teóricas com o mesmo coeficiente angular são:

$$Y_A = \bar{y}_A + \beta(x - \bar{x}_A)$$

$$Y_B = \bar{y}_B + \beta(x - \bar{x}_B)$$

Passaremos agora ao

- ii) Teste de igualdade do coeficiente linear
Testaremos as hipóteses

$$H_0: \bar{y}_A - \beta \cdot \bar{x}_A = \bar{y}_B - \beta \cdot \bar{x}_B \text{ ou } \beta = \frac{\bar{y}_A - \bar{y}_B}{\bar{x}_A - \bar{x}_B}$$

$$H_1: \beta \neq (\bar{y}_A - \bar{y}_B) / (\bar{x}_A - \bar{x}_B)$$

A estatística

$$\hat{b} = \frac{\hat{\bar{y}}_A - \hat{\bar{y}}_B}{\hat{\bar{x}}_A - \hat{\bar{x}}_B}$$

é um estimador não tendencioso de β
 $\hat{b}$ representa o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(\bar{x}_A, \hat{\bar{y}}_A)$ e $(\bar{x}_B, \hat{\bar{y}}_B)$. $\bar{b}$ e $\hat{b}$ são esto —

casticamente independentes porque $\bar{b}$ foi calculada através da variação dentro da amostra e $\hat{b}$, através da variação entre as amostras. Se as retas de regressão teóricas são idênticas, então a variação entre $\hat{b}$ e $\bar{b}$ será provavelmente aleatória.

Como a variância de $\hat{b}$ é igual a

$$V(\hat{b}) = \frac{1}{(\bar{x}_A - \bar{x}_B)^2} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^k n_i^A w_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^k n_i^B w_i} \right)$$

temos

$$V(\hat{b} - \bar{b}) = \frac{1}{(\bar{x}_A - \bar{x}_B)^2} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^k n_i^A w_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^k n_i^B w_i} \right) + \frac{1}{\frac{A}{S_{xx}} + \frac{B}{S_{xx}}}$$

Testar H_0 equivale a testar se as duas retas são idênticas. Então sob H_0 ,

$$v = (\hat{b} - \bar{b}) / \sqrt{V(\hat{b} - \bar{b})}$$

tem distribuição assintoticamente Normal com média 0 e variância 1.

Através da estatística v podemos testar as hipóteses propostas.

2. DISTRIBUIÇÃO DE TOLERÂNCIA DA MISTURA DE DOIS ESTÍMULOS INDEPENDENTES

2.1. Determinação da distribuição de tolerância de uma mistura a partir da distribuição de tolerância de seus componentes.

Daremos primeiramente algumas definições e notações que serão utilizadas através deste capítulo.

Consideraremos que as unidades experimentais são compostas de diversos sistemas.

Definição 1: Denomina-se mistura de estímulos, a dois ou mais estímulos que são aplicados simultaneamente a unidades experimentais.

Denotaremos a mistura de dois estímulos A e B por (A; B), o nível transformado do estímulo A por x_1 , o nível transformado do estímulo B por x_2 e os níveis da mistura por (x_1, x_2)

Definição 2: Dizemos que dois estímulos tem ações independentes, (são independentes) se eles agem sobre sistemas distintos e a ação de um estímulo não interfere na ação do outro [10]

Pela definição 2 vemos que se aplicarmos um nível (x_1, x_2) da mistura de estímulos independentes (A,B) a uma unidade experimental ela irá responder ao estímulo se a sua tolerância a A é inferior a x_1 ou se a sua tolerância a B é inferior a x_2 .

A distribuição de tolerância de uma mistura de estímulos independentes (A,B) não é unicamente determinada através das distribuições de tolerâncias de A e B em separado. É necessário conhecer também o quanto a tolerância a A está correlacionada à tolerância a B na população em que se está trabalhando. Observe-se que se a tolerância ao estímulo A é completa e positivamente correlacionada à tolerância do estímulo B, então uma

unidade experimental muito tolerante ao estímulo A será também muito tolerante ao estímulo B. Se a tolerância ao estímulo A é completa e negativamente correlacionada à tolerância do estímulo B, uma unidade experimental muito tolerante a A será pouco tolerante a B e vice-versa. Se a correlação é incompleta e o indivíduo é muito tolerante ao estímulo A, existirá uma probabilidade, maior ou menor, de acordo com o grau de correlação, da unidade ser muito tolerante ao estímulo B.

Estudaremos primeiramente, a distribuição da mistura, nos casos em que o coeficiente de correlação, ρ , é igual a -1, 1 e 0, utilizando as distribuições de tolerância de A e B, segundo Plackett e Hewlett [10].

Sejam p_1 e p_2 as proporções de respostas provocadas, respectivamente, pelos níveis x_1 de A e x_2 de B, quando aplicados a lotes de unidades experimentais. Seja p a proporção de resposta obtida quando se aplica o nível (x_1, x_2) da mistura de estímulos independentes (A, B) a um lote de unidades experimentais. Então,

- a) Se $\rho = 1$, o estímulo A irá provocar resposta em $p_1\%$ das unidades experimentais menos resistentes a esse estímulo e $p_2\%$ das unidades experimentais menos resistentes a B irão responder a este estímulo.

Se $p_1 \geq p_2$, as $p_2\%$ unidades experimentais menos resistentes ao estímulo B pertencem às $p_1\%$ unidades experimentais menos tolerantes ao estímulo A. Temos o mesmo raciocínio quando $p_2 \geq p_1$. Portanto a relação existente entre p , p_1 e p_2 é

$$p = p_1 \quad \text{se} \quad p_1 \geq p_2 \quad (2.1.1)$$

$$p = p_2 \quad \text{se} \quad p_2 \geq p_1 \quad (2.1.2)$$

- b) Se $\rho = 0$, os estímulos A e B são estocasticamente independentes, de modo que a probabilidade de resposta à mistura é dada por:

$$p = p_1 + p_2 - p_1 p_2 \quad (2.1.3)$$

Então $p \geq p_1$ e $p \geq p_2$, logo, a mistura (A,B) de estímulos independentes é mais potente do que os estímulos A e B.

- c) Se $\rho = -1$ e $p_1 + p_2 \leq 1$, o conjunto das unidades experimentais não tolerantes ao nível x_1 de A e o conjunto das unidades experimentais não tolerantes ao nível x_2 de B são mutuamente exclusivos. Assim

$$p = p_1 + p_2 \quad \text{se} \quad p_1 + p_2 \leq 1 \quad (2.1.4)$$

Se $\rho = -1$ e $p_1 + p_2 \geq 1$, todas as unidades experimentais irão responder ao estímulo (x_1, x_2) de (A,B), então

$$p = 1 \quad \text{se} \quad p_1 + p_2 \geq 1 \quad (2.1.5)$$

Logo, a potência da mistura é superior à potência dos estímulos A e B.

Para o caso em que a correlação entre as tolerâncias é incompleta, Bliss [3] propôs o seguinte modelo,

$$p = p_1 + p_2(1 - p_1)(1 - \rho)$$

que é incompleto porque só é válido para $0 \leq \rho \leq 1$.

Hewlett e Plackett [10] pesquisaram sobre a possibilidade de representar p como um polinômio em ρ cujos coeficientes fossem combinações lineares de p_1 e p_2 e concluíram que seria impossível. Tornou-se então necessária a construção de um modelo que envolvesse ρ e que fosse válida para $-1 \leq \rho \leq 1$. Desta forma Hewlett e Plackett [10] propuseram o uso da distribuição Normal bidimensional.

2.2. Uso da distribuição Normal como distribuição de tolerância da mistura de dois estímulos independentes

Suporemos que a distribuição de tolerância da mistura de dois estímulos independentes (A,B) é normal bidimensional, isto é, sua função de densidade é dada por.

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 + \frac{2\rho(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \right] \right\} \quad (2.2.1)$$

em que

$-\infty < x_1 < +\infty$, $-\infty < x_2 < +\infty$ e σ_1 , σ_2 , μ_1 , μ_2 , ρ são parâmetros tais que,

$\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 > 0$; $-\infty < \mu_1 < +\infty$; $-\infty < \mu_2 < +\infty$ e $-1 < \rho < 1$

A partir de dados quantais os parâmetros μ_1 , σ_1 , μ_2 e σ_2 são estimados através das distribuições marginais, usando o método de probitos descrito no capítulo 1. Suponhamos que tenhamos encontrado as estimativas: μ_1^0 , μ_2^0 , σ_1^0 , σ_2^0 a partir de amostras cujo tamanho seja tal que as aproximações: $\mu_1 \doteq \mu_1^0$, $\mu_2 \doteq \mu_2^0$, $\sigma_1 \doteq \sigma_1^0$ e $\sigma_2 \doteq \sigma_2^0$ possam ser consideradas razoáveis com grande probabilidade.

Fazendo a transformação

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_1^0}{\sigma_1^0} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu_2^0}{\sigma_2^0}$$

obtemos em (2.2.1)

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} (z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2) \right\} \quad (2.2.2)$$

então se aplicarmos um nível (x_1, x_2) da mistura (A,B) de

estímulos independentes a uma unidade experimental, a pro babilidade dela responder ao estímulo é

$$P = \int_{-\infty}^{z_1} \int_{z_2}^{+\infty} f(u,v) du dv + \int_{z_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z_2} f(u,v) du dv + \\ + \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} f(u,v) du dv$$

A probabilidade de não resposta ao estímulo é

$$Q = 1 - P =$$

$$= \int_{z_1}^{+\infty} \int_{z_2}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)\right] du dv \quad (2.2.3)$$

Na figura 1 temos no plano a secção da distri buição Normal bidimensional por planos paralelos aos eixos dos u e v, que se cortam no ponto T.

O volume sob a normal bidimensional que está so- bre o setor KTS representa (2.2.3).

Quando $\rho = 1$ a distribuição Normal bidimensional reduz-se a uma distribuição Normal unidimensional, em que as massas de probabilidade encontram-se distri buidas sobre a reta $u=v$ da figura 1.

A figura 2a mostra a distribuição Normal que se en- contra sobre a reta $u=v$ da figura 1. Nessa mesma figura vemos que $z_2 > z_1$ portanto $p_2 > p_1$ e $p = p_2$. Da mesma forma, se $z_1 \geq z_2$ teríamos $p = p_1$. Esses resultados foram encontrados em (2.1.1) e (2.1.2).

Quando $\rho = -1$, a distribuição Normal bidimensional re-

Fig. 1

Fig. 2 a

Fig 2 b

duz-se a uma distribuição Normal unidimensional, cuja massa de probabilidade encontra-se distribuída sobre a reta $u = -v$ da figura 1. Essa distribuição tem a forma da figura 2b. Para o nível (z_1, z_2) temos que $p=1$, como pode ser visto na figura 1, pois $p_1 + p_2 \geq 1$. Para o nível $(-z_1, -z_2)$ temos que $p = p_1 + p_2$ como pode ser visto na figura 1. Temos assim (2.1.4) e (2.1.5)

Quando $\rho = 0$ temos

$$q = \int_{z_1}^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du \int_{z_2}^{+\infty} \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv = q_1 q_2$$

portanto

$$p = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

que foi o resultado obtido em (2.1.3)

2.3. Estimação de ρ

Suponhamos que k níveis da mistura (A,B) de estímulos independentes são aplicados a k lotes de unidades experimentais de tamanhos $n_1, n_2, \dots, n_k$. O estimador de máxima verossimilhança de ρ é, de acordo com (1.4.2), a solução da equação

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i(p_i - P_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial P_i}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \rho} = 0 \quad (2.3.1)$$

em que Q é dado por (2.2.3)

A função $\partial L / \partial \rho$ só assume valores reais para $\rho \in (-1; 1)$ e é decrescente nesse intervalo pois $\partial^2 L / \partial \rho^2 < 0$ de acordo com (2.3.3). Suponhamos que ρ^* seja o parâmetro verdadeiro da população. Então para um mesmo nível (x_1, x_2) , quando $\rho < \rho^* - \delta$ ($\delta > 0$) P aumenta logo Q diminui e $\partial L / \partial \rho$ é positivo. Para $\rho > \rho^* + \delta$ P diminui e portanto Q aumenta fazendo com que $\partial L / \partial \rho < 0$. Portanto no intervalo $(\rho^* - \delta; \rho^* + \delta)$ a função $\partial L / \partial \rho$ tem sempre uma raiz e ela é única.

Seja

$$\Psi(z_1, z_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2)\right\}$$

Então,

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \rho} = \int_{z_1}^{+\infty} \int_{z_2}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi(z_1, z_2, \rho) dz_2 dz_1$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(z_1, z_2, \rho)}{\partial \rho} &= \frac{\partial^2 \Psi(z_1, z_2, \rho)}{\partial z_1 \partial z_2} = \\ &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2)\right\}. \end{aligned}$$

$$\cdot \left[\rho + \frac{z_1 z_2 - \rho(z_1^2 + z_2^2 - \rho z_1 z_2)}{(1 - \rho^2)} \right]$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial \rho} &= \int_{z_1^1}^{+\infty} \int_{z_2^1}^{+\infty} \frac{\partial^2 \psi(z_1, z_2, \rho)}{\partial z_1 \partial z_2} dz_1 dz_2 = \\ &= \int_{z_2^1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z_2} \left[\int_{z_1^1}^{+\infty} \frac{\partial \psi(z_1, z_2, \rho)}{\partial z_1} dz_1 \right] dz_2 = \\ &= \int_{z_2^1}^{+\infty} - \frac{\partial \psi(z_1^1, z_2, \rho)}{\partial z_2} dz_2 = \psi(z_1^1, z_2^1, \rho) \end{aligned}$$

Logo, temos em (2.3.1)

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^k n_i \psi(z_1^i, z_2^i, \rho) \frac{(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} = 0 \quad (2.3.2)$$

A equação (2.3.2) é não linear e dificilmente explícita. Portanto, determinaremos uma estimativa de ρ através do método iterativo de Newton.

Seja r_0 uma estimativa inicial de ρ . Através do método de Newton determinamos sucessivamente as estimativas $r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}, \dots$ de ρ que convergem para a estimativa de máxima verossimilhança de ρ . A estimativa r_k da k -ésima iteração é dada pela expressão

$$r_{k+1} = r_k - \frac{\left[\partial L / \partial \rho \right]_{\rho = r_k}}{\left[\partial^2 L / \partial \rho^2 \right]_{\rho = r_k}}$$

em que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} = - \sum_{i=1}^k \frac{n_i [\Psi(z_1^i, z_2^i, \rho)]^2}{P_i Q_i} \quad (2.3.3)$$

de acordo com (1.4.6)

Encerra-se o processo quando a precisão desejada é alcançada.

A rapidez da convergência do método de Newton depende do valor inicial r_0 . Quanto mais próximo r_0 estiver da raiz da equação, mais rápida a convergência. Para determinar r_0 podemos utilizar o método usado por Hewlett e Plackett [8] para estimar ρ , que consiste em calcular o valor de $\partial L / \partial \rho$ para valores distintos de ρ de tal forma que tenhamos $\partial L / \partial \rho < 0$ e $\partial L / \partial \rho > 0$. Obtemos então r_0 através de interpolação numérica. Podemos também obter r_0 fazendo uma pesquisa de sinal ou simplesmente colocar sempre $r_0 = 0$ porque para este valor inicial a convergência do processo é garantida devido à forma de $\partial L / \partial \rho$ (gráfico 1) como verificaremos no próximo capítulo.

Como já vimos em (1.4) o estimador $\underline{r}$ de ρ tem distribuição assintoticamente Normal com média ρ e variância.

$$V(r) = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} \right]_{\rho=r}^{-1}$$

Usando a distribuição assintótica de r podemos obter um intervalo de confiança para ρ .

GRÁFICO 1

GRÁFICO DA FUNÇÃO $\frac{\partial L}{\partial \varrho}$ PARA OS DADOS
DA TABELA 2-a

2.4. Teste de aderência

Determinada uma estimativa de ρ , interessa-nos decidir se a distribuição de tolerância encontrada adere bem aos dados observados. Isto é, interessa-nos testar as hipóteses

$$H_0: f(z_1, z_2, \rho) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} (z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2)}$$

$$H_1: f(z_1, z_2, \rho) \neq \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} (z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2)}$$

Usando o mesmo raciocínio de (1.6) temos que sob H_0 a estatística

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (p_i - P_i)^2}{P_i Q_i} \quad (2.4.1)$$

tem distribuição qui-quadrado com $(k-1)$ graus de liberdade porque ρ foi estimado a partir das k observações.

A região crítica do teste é dada por

$$(\chi^2_{(k-1, 1-\gamma)}; +\infty)$$

ao nível de significância de $\gamma\%$

2.5. Roteiro para a análise da mistura de dois estímulos independentes

- a) Fazemos observações de k_1 e k_2 doses dos estímulos A e B, respectivamente e de k_3 doses da mistura (A,B) de estímulos independentes. Temos portanto, $k = k_1 + k_2 + k_3$ lotes experimentais.
- b) Calculam-se as retas de regressão para os estímulos A e B usando o método de probitos apresentado no ca

pítulo 1. Estimamos então a partir dos parâmetros das retas as médias μ_1 e μ_2 e as variâncias σ_1 e σ_2 .

- c) Procedemos a um teste qui-quadrado para testar a normalidade da distribuição de tolerância de A e B. Se a normalidade de pelo menos uma das marginais fôr rejeitada, abandonamos a hipótese de que a distribuição de tolerância da mistura é Normal bidimensional.
- d) Verificamos se as proporções observadas de resposta p estão no domínio certo para ação de estímulos independentes, isto é, a posição de p com relação ao máximo de (p_1, p_2) (correlação completa positiva) e o mínimo de $(p_1 + p_2; 1)$ (correlação completa negativa)
- 1) Se todos os p estão entre o máx $(p_1; p_2)$ e o mín. $(p_1 + p_2; 1)$, estima-se ρ e procede-se a um teste qui-quadrado.
 - 2) Se todos os p estão acima do mín. $(p_1 + p_2; 1)$, procede-se a um teste χ^2 com $\rho = -1$. Se χ^2 não é significativo então $\rho = -1$, caso contrário a ação dos estímulos quase certamente não é independente.
 - 3) Se todos os p estão abaixo do máx $(p_1; p_2)$, procedemos a um teste χ^2 com $\rho = +1$. Se χ^2 é significativo então a ação dos estímulos quase certamente não é independente, caso contrário temos $\rho = +1$.
 - 4) Se alguns valores de p estão entre mín $(p_1 + p_2; 1)$ e máx (p_1, p_2) , estimamos ρ e fazemos um teste χ^2 . Se χ^2 não fôr significativo então não há evidências para dizer que as ações dos estímulos não são independentes, caso contrário consideramo-las não-independentes.

2.6. Alternativas para a estimação de μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 e ρ

De acordo com (1.4.2) os estimadores de máxima verossimilhança de μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 e ρ são as soluções do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_2} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_1} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_2} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \rho} = 0 \end{array} \right. \quad (2.6.1)$$

A solução desse sistema pode ser obtida através do método iterativo de Newton. Desenvolvendo as equações de (2.6.1) em séries de Taylor até as derivadas de 1ª ordem e considerando que em (1.4.8) obtivemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \phi} - \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial P_i}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial P_i}{\partial \phi} \right) = - \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \phi} \right)$$

Chegamos ao sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} = \delta_1 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} \right)^2 + \\ + \delta_2 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right) + \delta_3 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right) + \\ + \delta_4 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} \right) + \delta_5 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \rho} \right) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right) &= \delta_1 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} \right) + \\ &+ \delta_2 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right)^2 + \delta_3 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right) + \\ &+ \delta_4 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} \right) + \delta_5 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \rho} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right) = \delta_1 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} \right) + \quad (2.6.2)$$

$$\begin{aligned} &+ \delta_2 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right) + \delta_3 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right)^2 + \\ &+ \delta_4 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} \right) + \delta_5 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \rho} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} \right) &= \delta_1 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} \right) + \\ &+ \delta_2 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right) + \delta_3 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right) + \\ &+ \delta_4 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} \right)^2 + \delta_5 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_2} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \rho} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{n_i(q_i - Q_i)}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \rho} \right) &= \delta_1 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_1} \right) + \\ &+ \delta_2 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \mu_2} \right) + \delta_3 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_i Q_i} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \sigma_1} \right) + \end{aligned}$$

$$\left[+ \delta_4 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_1 Q_1} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \sigma_2} \right) + \delta_5 \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{P_1 Q_1} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial \rho} \right)^2 \right]$$

Se $\mu_1^0, \mu_2^0, \sigma_1^0, \sigma_2^0$ e ρ^0 são estimativas iniciais de $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ e ρ respectivamente, usamos esses valores para resolver o sistema (2.6.2) obtendo assim as estimativas refinadas,

$$\mu_1^1 = \mu_1^0 + \delta_1; \quad \mu_2^1 = \mu_2^0 + \delta_2; \quad \sigma_1^1 = \sigma_1^0 + \delta_3$$

$$\sigma_2^1 = \sigma_2^0 + \delta_4; \quad \rho^1 = \rho^0 + \delta_5$$

Com essas novas estimativas resolvemos novamente (2.6.2) obtendo novas aproximações das estimativas de máxima verossimilhança. Esse processo se repete até obtermos a precisão desejada.

Outro processo de resolver o sistema (2.6.1) foi proposto por Moore-Zeigler [9]. Consiste em fazer uma equivalência entre as equações de máxima-verossimilhança de (2.6.1) e as equações normais de uma regressão não linear.

Supondo-se independência e variâncias não necessariamente iguais, o modelo de regressão não linear pode ser apresentado da seguinte forma:

$$y_1 = g(z_1, \beta) + e_1 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

em que

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

O estimador de mínimos quadrados de β é obtido minimizando-se

$$Q = \sum_{i=1}^m W_i [y_i - g(z_i, \beta)]^2$$

em que W_i é o peso associado à i -ésima observação e é geralmente o recíproco da variância de e_i .

A condição necessária de mínimo é:

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_l} = - \sum_{i=1}^m w_i [y_i - g(z_i, \beta)] \frac{\partial g(z_i, \beta)}{\partial \beta_l} = 0 \quad (2.6.3)$$

$$l = 1, 2, \dots, n$$

Podemos então fazer a seguinte equivalência entre (2.6.3) e (2.6.1)

$$\left[Q_1(\theta) \leftrightarrow g(z_1, \beta) \right]; \quad \left[q_1 = y_1 \right]; \quad \left[w_1 \leftrightarrow n_1 / P_1 Q_1 \right]$$

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$$

Desta forma (2.6.1) pode ser considerada como o sistema de equações normais da regressão não-linear ponderada

$$q_1 = Q_1(\theta) + \varepsilon_1 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$E(\varepsilon_1) = 0; V(\varepsilon_1) = n_1 / P_1 Q_1$$

e pode ser resolvido como tal.

θ pode ser estimado através do método da linearização.

A estimação dos cinco parâmetros através desses dois métodos apresentados, envolve o cálculo de $\partial Q / \partial \mu_1$, $\partial Q / \partial \mu_2$, $\partial Q / \partial \sigma_1$, $\partial Q / \partial \sigma_2$, que é bastante elaborado.

3. APLICAÇÃO

3.1. Simulação

Simulamos em computador cinco experiências que consistiram em:

- i) Aplicar seis níveis do estímulo A, com distribuição de tolerância $N(1,8; 0,5)$ em 6 lotes de unidades experimentais cada um com 20 unidades e verificar após o número de unidades que responderam a cada nível.
- ii) Realizar a mesma experiência do item (i) com o estímulo B com distribuição de tolerância $N(2,5; 0,5)$.
- iii) Realizar três vezes a seguinte experiência:

Aplicar a 32 lotes, cada um com 40 unidades experimentais, níveis da mistura de estímulos independentes (A; B) com distribuição de tolerância Normal bi dimensional com parâmetros.

a) $\mu_1 = 1,8; \mu_2 = 2,5; \sigma_1 = \sigma_2 = 0,5; \rho = -0,8$

b) $\mu_1 = 1,8; \mu_2 = 2,5; \sigma_1 = \sigma_2 = 0,5; \rho = 0,1$

c) $\mu_1 = 1,8; \mu_2 = 2,5; \sigma_1 = \sigma_2 = 0,5; \rho = 0,6$

e verificar após o número de unidades experimentais que responderam a cada nível.

Os resultados das simulações das experiências (i) e (ii) encontram-se na Tabela 1 e os resultados das simulações das experiências descritas em (iii), na Tabela 2.

3.2. Estimação de $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ e ρ

A partir dos resultados da simulação, estimamos os parâmetros da distribuição Normal bidimensional.

Usamos o método iterativo descrito em (1.5) para estimar os parâmetros μ_1, μ_2, σ_1 e σ_2 . Aplicando o método

dos mínimos quadrados aos valores da Tabela 1 encontramos as estimativas iniciais

$a_0 = 2,207$ e $b_0 = 1,456$ para os parâmetros da reta de probitos do estímulo A e

$a_0 = 1,422$ e $b_0 = 1,477$ para os parâmetros da reta de probitos do estímulo B.

Com esses valores iniciamos o processo iterativo e o critério de parada adotado foi:

$$|b_1 - b_{1-1}| \leq 0,01 \quad \text{e} \quad |a_1 - a_{1-1}| \leq 0,01$$

Os cálculos foram feitos em computador e encontramos as seguintes retas de probitos de A e B, respectivamente,

$$Y_1 = 1,949 + 1,671 x_1 \quad (3.2.1)$$

e

$$Y_2 = 0,949 + 1,648 x_2 \quad (3.2.2)$$

Temos, então, de (1.5.1) as seguintes estimativas para μ_1 , μ_2 , σ_1 e σ_2 .

$$\hat{\mu}_1 = \frac{5 - 1,949}{1,671} = 1,83 \quad ; \quad \hat{\sigma}_1 = \frac{1}{1,671} = 0,598 \quad (3.2.3)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{5 - 0,949}{1,648} = 2,46 \quad ; \quad \hat{\sigma}_2 = \frac{1}{1,648} = 0,607 \quad (3.2.4)$$

Antes de estimarmos ρ fizemos testes de aderência de acordo com (1.6.2) para verificarmos a normalidade das distribuições de tolerância das marginais A e B.

Encontramos para a reta (3.2.1) o seguinte valor do qui-quadrado

$$Q_{11} = 4,159$$

Como o valor tabelado da distribuição qui-quadrado com quatro graus de liberdade, ao nível de significância de 5% é

$$\chi^2(4; 0,95) = 9,49$$

aceitamos a hipótese de normalidade da distribuição de to

lerância de A, pois $Qui < \chi^2(4, 0,95)$

Para a reta (3.2.2) encontramos $Qui = 3,814$ então, como $Qui < \chi^2(4; 0,95)$ aceitamos a hipótese de normalidade da distribuição de tolerância de B.

Como aceitamos a hipótese de que as distribuições de tolerância de ambos estímulos são Normais, passamos à estimativa de ρ .

A estimativa de ρ foi obtida através do processo apresentado em (2.3). O valor inicial do processo foi encontrado fazendo uma pesquisa de sinal. Como $\partial L / \partial \rho$ é sempre decrescente (gráfico 1), a pesquisa foi feita da seguinte maneira:

Calculamos $\partial L / \partial \rho$ para valores de ρ a partir de $-0,9$, de décimo em décimo, até encontrarmos $\partial L / \partial \rho < 0$. Esse valor de ρ foi tomado como valor inicial do processo iterativo de Newton.

Encontramos as seguintes estimativas para os dados da Tabela 2.

- (a) $\hat{\rho} = -0,86$
- (b) $\hat{\rho} = -0,05$
- (c) $\hat{\rho} = 0,3$

3.3. Teste de Aderência

Realizamos após, um teste de aderência, usando a distribuição qui-quadrado.

Os valores calculados através da fórmula (2.4.1) para os dados da Tabela 2 foram:

- a) $Qui = 25,027$
- b) $Qui = 30,446$
- c) $Qui = 32,219$

O valor tabelado da distribuição Qui-quadrado com 31 graus de liberdade, ao nível de significância de 5% é

$$\chi^2(31; 0,95) \approx 43,8$$

Temos portanto que $Qui < \chi^2(31; 0,95)$ para (a), (b)

e (c); aceitamos a hipótese de que os dados da Tabela 2, provêm de populações com distribuição Normal bidimensional.

3.4. Convergência do processo iterativo de Newton

Devido à forma da função (gráfico 1)

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (q_i - Q_i)}{Q_i P_i} \psi_i$$

a convergência do método de Newton é bem rápida para a de terminação da sua raiz.

Para verificar a rapidez da convergência iniciamos o processo iterativo de Newton com $\rho_0 = 0$. A estimativa $\hat{\rho} = -0,86$ para os dados da tabela 2-a foi obtida após 6 iterações. Como o processo de obtenção do valor inicial descrito em (3.2) essa mesma estimativa foi obtida após 3 iterações.

A estimativa $\hat{\rho} = -0,05$ para os dados da tabela 2-b foi obtida após 6 iterações, usando $\rho_0 = -0,98$, e com o processo descrito em (3.2) a convergência foi obtida após duas iterações.

Tabela 1

Resultados da simulação de amostras de estímulos com distribuição de tolerância $N(\mu; \sigma)$

$X_1: N(1,8; 0,5)$			$X_2: N(2,5; 0,5)$		
Nível	Tamanho do lote	Número de respostas	Nível	Tamanho do lote	Número de respostas
0,8	20	0	1,4	20	0
1,2	20	4	1,8	20	5
1,5	20	6	2,2	20	5
1,9	20	13	2,7	20	13
2,2	20	12	3,0	20	17
2,5	20	18	3,3	20	18

Tabela 2

Resultados da simulação de amostras de misturas de dois
estímulos independentes com distribuição Normal Bi-
dimensional com $\mu_1 = 1,8$; $\mu_2 = 2,5$; $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ e
 ρ de acordo com a tabela

Nível	Tama nho do lote	ρ			Nível	Tama nho do lote	ρ		
		(a) -0,8	(b) 0,1	(c) 0,6			(a) -0,8	(b) 0,1	(c) 0,6
(0,8;1,4)	40	1	1	1	(1,9;2,2)	40	28	24	21
(0,8;1,8)	40	5	5	4	(1,9;2,7)	40	39	32	30
(0,8;1,7)	40	25	24	23	(1,9;3,0)	40	40	38	37
(0,8;3,0)	40	37	36	35	(1,9;3,3)	40	40	39	39
(0,8;3,3)	40	38	38	37	(2,2;1,4)	40	30	30	30
(1,2;1,4)	40	3	3	3	(2,2;1,8)	40	33	32	30
(1,2;2,2)	40	17	16	15	(2,2;2,2)	40	38	38	35
(1,2;3,0)	40	37	36	36	(2,2;2,7)	40	40	37	34
(1,5;1,4)	40	10	10	9	(2,2;3,0)	40	40	37	36
(1,5;1,8)	40	19	17	17	(2,2;3,3)	40	40	40	40
(1,5;2,2)	40	21	18	16	(2,2;1,4)	40	37	37	37
(1,5;2,7)	40	33	24	23	(2,5;1,8)	40	36	36	36
(1,5;3,0)	40	38	36	36	(2,5;2,2)	40	39	37	37
(1,5;3,3)	40	37	36	36	(2,5;2,7)	40	40	39	37
(1,9;1,4)	40	26	25	25	(2,5;3,0)	40	40	39	38
(1,9;1,8)	40	28	27	27	(2,5;3,3)	40	40	40	40

APÊNDICE

PROGRAMA I

Finalidade do programa

O programa calcula estimativas para os parâmetros α e β da reta de probitos através do método iterativo de Newton.

Diretrizes do Programa

O programa foi escrito em linguagem FORTRAN IV, do computador IBM 1130 que é uma variação do FORTRAN IV (ASA) padronizado internacionalmente e aceito pela maior parte dos computadores.

A listagem do programa encontra-se na figura 3 e é composta de uma função (Q GAUS) e um programa principal.

A função QGAUS calcula o valor da integral

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad x \in \mathbb{R}$$

A precisão dessa função é da ordem de 5×10^{-8}

Dados necessários

A figura 4 apresenta uma tabela dos símbolos utilizados para referenciar os dados.

Na figura 5 apresentamos o formato em que devem ser perfurados os cartões de dados, bem como a ordem em que devem ser colocados esses cartões no maço de cartões que será levado ao computador.

Resultados fornecidos

Na figura 6 são apresentados os resultados fornecidos

pelo computador.

Além das estimativas A e B também são fornecidos valores adicionais para realizar-se um teste de aderência, calcular variâncias e intervalos de confiança.

As variáveis apresentadas em 'Valores Adicionais' são:

QUI = valor do qui-quadrado

$$SNW = \sum_{i=1}^k n_i w_i$$

$$SNWX = \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i$$

$$SNWX2 = \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i^2$$

$$SNWY = \sum_{i=1}^k n_i w_i y_i$$

$$SNWY2 = \sum_{i=1}^k n_i w_i y_i^2$$

$$SNWXY = \sum_{i=1}^k n_i w_i x_i y_i$$

Precisão do programa

A precisão de A e B é fixada pelo usuário. Na listagem apresentada a precisão para A e B são iguais ou superiores a um centésimo.

Capacidade do programa

O programa apresentado na listagem da figura 3 admite até no máximo 100 níveis. Entretanto, uma ligeira modificação no comando DIMENSION pode aumentar a capacidade do programa até o máximo permitido pela memória do computador.

Figura 3

** LISTAGEM DO DECK **

```
// JOB T
// FOR
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
FUNCTION QGAUS(T)
  QGAUS=0.3989422804*EXP(-(T**2)/2.)
  IF(T)10,20,20
10 E=-T
  H=1./(1.+0.2316419*T)
  QGAUS=QGAUS*H*(0.31738153+H*(-0.356563782+H*(1.781477937+H*(-1.821
1255978+1.330274429*H))))
  QGAUS=1-QGAUS
  RETURN
20 H=1./(1.+0.2316419*T)
  QGAUS=QGAUS*H*(0.31738153+H*(-0.356563782+H*(1.781477937+H*(-1.821
1255978+1.330274429*H))))
  RETURN
END

// DUP
*STORE WS UA QGAUS
// FOR
*IOCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
DIMENSION X(100),N(100),K(100)
8 READ(2,100)A0,B0,ITR
IF(ITR)1000,1,1000
1 M=0
WRITE(5,104)
2 M=M+1
READ(2,101)X(M),N(M),K(M),LEIT
IF(LEIT)3,2,3
3 SW=0
SWY=0
SWX=0
SWXY=0
SWXQ=0
SWYQ=0
DO 4 I=1,M
Y=A0+B0*X(I)
Z=0.3989423*EXP(-0.5*((Y-5)**2))
Q=QGAUS(Y-5)
P=1-Q
W=N(I)*(Z**2)/(P*Q)
SW=SW+W
WY=Y+(FLOAT(K(I))/N(I)-P)/Z
SWX=SWX+W*X(I)
SWY=SWY+W*Y
SWXY=SWXY+W*X(I)*Y
SWXQ=SWXQ+W*(X(I)**2)
SWYQ=SWYQ+W*(Y**2)
4 YM=SWY/SW
XM=SWX/SW
DEN=SWXQ-(SWX**2)/SW
B=(SWXY-XM*SWY)/DEN
A=YM-B*XM
IF(ABS(A-A0)-0.01)5,5,7-
5 IF(ABS(B-B0)-0.01)6,6,7
6 QUI=(SWYQ-(SWY**2)/SW)-((SWXY-(SWX*SWY)/SW)**2)/(SWXQ-(SWX**2)/SW)
WRITE(5,102)A,B,QUI,SW,SWX,SWXQ,SWY,SWYQ,SWXY
GO TO 8
7 A0=A
B0=B
GO TO 3
1000 CALL EXIT
100 FORMAT(2F10.0,(I1)
101 FORMAT(F10.0,2I10,(I5)
102 FORMAT(1H0,40X,E14.7,14X,E14.7,6 /,148X,'VALORES ADICIONAIS',///,2
10X,QUI='E14.7,2X,SNW='E14.7,2X,SNWX='E14.7,2X,SNWX2='E14.7
2,/,25X,SNWY='E14.7,2X,SNWY2='E14.7,2X,SNWXY='E14.7)
104 FORMAT(1H1,6 /,30X,'VALORES DAS ESTIMATIVAS DOS COEFICIENTES DA R
1ETA DE PROBITOS',///,45X,'-A-',24X,'-B-')
END
```


Figura 4

SÍMBOLOS - SIGNIFICADOS E FORMATOS

- AO - Variável real - primeira estimativa de α
para iniciar o método iterativo de Newton.
Formato de leitura - F10.0
- BO - Variável real - estimativa inicial de β pa
ra principiar o método iterativo de Newton
Formato de leitura - F10.0
- ITR - Variável inteira - variável que indica tér
mino da execução do programa
Formato de leitura - I1
- X(M) - Variável real - M-ésimo nível do estímulo
(já transformado)
Formato de leitura - F10.0
- N(M) - Variável inteira - tamanho do lote ao qual
foi aplicado o m-ésimo nível
Formato de leitura - I10
- K(M) - Variável inteira - número de unidades ex-
perimentais que responderam ao m-ésimo nível
Formato de leitura I10
- LEIT - Variável inteira - variável que indica o
término da leitura dos níveis.
Formato de leitura I5

Fig. 5

DISPOSIÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA DO PROGRAMA I

Figura 6

Resultados obtidos
com o Programa I

VALORES DAS ESTIMATIVAS DOS COEFICIENTES DA RETA DE PROBITOS

-A-

0.1949156E 01

-B-

0.1671507E 01

VALORES ADICIONAIS

QUI= 0.4159240E 01 SNW= 0.5557465E 02 SNWX= 0.9865023E 02 SNWX2= 0.1890041E 03
SNWY= 0.2732183E 03 SNWY2= 0.1386175E 04 SNWXY= 0.5082066E 03

PROGRAMA II

Finalidade do programa

Este programa calcula uma estimativa de ρ através do método iterativo de Newton. O valor inicial de ρ é calculado pelo método descrito em 3.2.

Diretrizes do programa

O programa foi escrito em linguagem FORTRAN IV do computador IBM 1130.

A programação cuja listagem é apresentada na figura 7 engloba 5 funções (FAT, QGAUS, DGAUS, DER, DERI), 1 sub-rotina (BID) e um programa principal.

As funções FAT e DGAUS são funções auxiliares da sub-rotina BID. A função QGAUS é a mesma apresentada no programa I.

A sub-rotina BID calcula o valor da integral

$$L(x, y, \rho) = \int_x^{+\infty} \int_y^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} (u^2 + v^2 - 2\rho uv) \right] du dv$$

usando o seguinte desenvolvimento em série (Abramowitz e Segun) [1]

$$L(x, y, \rho) = Q(h)Q(k) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{(n)}(x) \cdot Z^{(n)}(y)}{(n+1)!} \rho^{n+1} \quad \text{em que}$$

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{e} \quad Q(x) = \int_x^{+\infty} Z(t) dt$$

A precisão dessa sub-rotina é dada pela variável TOL.

As funções DER e DER1 calculam $\partial L / \partial \rho$ e $\partial^2 L / \partial \rho^2$, respectivamente.

Dados necessários

Na figura 8 é apresentada uma tabela dos símbolos utilizados para referenciar os dados, bem como as suas unidades. Na figura 9 é apresentado o formato em que devem ser perfurados os cartões de dados, e a ordem em que devem ser colocados esses cartões no maço de cartões que será levado ao computador.

Resultados fornecidos

Na figura 10 são apresentados os resultados fornecidos pelo computador para um dos exemplos dados no cap.3.

Precisão do Programa

A precisão do programa é fixada pelo usuário. Na listagem apresentada a precisão é igual ou superior a um centésimo.

Capacidade do Programa

O programa apresentado na figura 7 permite o uso de até 100 níveis. Porém, alterando-se o comando DIMENSION, a capacidade pode ser aumentada até o máximo permitido pela memória do computador.

Figura 7

** LISTAGEM DO DECK **

```
// FOR
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
FUNCTION FAT(N)
  IF(N)10,20,30
  10 PAUSE 1111
  RETURN
  20 FAT=1.
  RETURN
  30 FAT=1.
  IF(N-10)40,40,50
  40 DO 41 J=1,N
  AN=FLOAT(J)
  41 FAT=FAT*AN
  RETURN
  50 AN=FLOAT(N)
  FAT=0.9189385332+(AN+0.5)*ALOG(AN)-AN+1./(12.*AN)
  IF(N-30)60,70,70
  60 FAT=EXP(FAT)
  70 RETURN
END

// DUP
*STORE WS UA FAT
// FOR
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
FUNCTION QGAUS(T)
  QGAUS=0.3989422804*EXP(-(T**2.)/2.)
  IF(T)10,20,20
  10 E=-T
  H=1./((1.+0.2316419*E)
  QGAUS=QGAUS*H*(0.31938153+H*(-0.356563782+H*(1.781477937+H*(-1.821
  1255978+1.330274429*H))))
  QGAUS=1-QGAUS
  RETURN
  20 H=1./((1.+0.2316419*T)
  QGAUS=QGAUS*H*(0.31938153+H*(-0.356563782+H*(1.781477937+H*(-1.821
  1255978+1.330274429*H))))
  RETURN
END

// DUP
*STORE WS UA QGAUS
// FOR
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
FUNCTION DGAUS(N,X)
  DGAUS=0.3989422804*EXP(-(X**2.)/2.)
  IF(N)10,10,20
  10 RETURN
  20 K=N/2
  A=(X**(-2.))/2.
  AN=FLOAT(N)
  FN=FAT(N)
  B=(X**AN)/FN
  S=B
  IF(N-1)40,40,21
  21 DO 30 M=1,K
  AM=FLOAT(M-1)
  B=-B*((AN-2*AM)*(AN-2*AM-1.))/(AM+1.)
  B=A*B
  30 S=S+B
  40 IS=1
  DO 50 J=1,N
  50 IS=-IS
  DGAUS=DGAUS*IS*FN*S
  RETURN
END

// DUP
*STORE WS UA DGAUS
// FOR
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE BID(X,Y,R,TOL,N,RESP)
  S=0.
  N=0
  A=R
  1 TEMA=DGAUS(N,X)*DGAUS(N,Y)*A
  S=S+TEMA
  N=N+1
  A=(A*R)/FLOAT(N+1)
  TEMB=DGAUS(N,X)*DGAUS(N,Y)*A
  S=S+TEMB
  IF(N-27)2,2,10
  2 COMP=ABS(TEMA)+ABS(TEMB)
  IF(COMP-TOL)10,10,3
  3 N=N+1
  A=(A*R)/FLOAT(N+1)
  GOTO 1
  10 RESP=DGAUS(X)*QGAUS(Y)*S
  RETURN
END

// DUP
*STORE WS UA BID
```



```

// FOR
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
FUNCTION DER(RD,M,X,Y,N,K)
DIMENSION X(1),Y(1),N(1),K(1)
TOL=0.001
DER=0
DO 1 I=1,M
PSI=(0.1591549431/SQRT(1-RD**2))*EXP((( -0.5)/(1-RD**2))*(X(I)**2+Y
1(I)**2-2*K(I)*X(I)*Y(I)))
CALL BID (X(I),Y(I),RD,TOL,NIT,Q)
P=1-Q
S=(N(I)*PSI*(FLOAT(N(I)-K(I))/N(I)-Q))/(P*Q)
1 DER=DER+S.
RETURN
END

// DUP
*STORE WS UA DER
// FOR
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
FUNCTION DER1(RD,M,X,Y,N,K)
DIMENSION X(1),Y(1),N(1),K(1)
TOL=0.001
DER1=0
DO 1 I=1,M
CALL BID(X(I),Y(I),RD,TOL,NIT,Q)
P=1-Q
PSI=(0.1591549431/SQRT(1-RD**2))*EXP((( -0.5)/(1-RD**2))*(X(I)**2+Y
1(I)**2-2*K(I)*X(I)*Y(I)))
V=-(N(I)*(PSI**2))/(P*Q)
1 DER1=DER1+V
RETURN
END

// DUP
*STORE WS UA DER1
// FOR
*IOCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
DIMENSION X(100),Y(100),N(100),K(100)
TOL=0.001
1 READ(2,100)XM,YM,DX,DY,IFIM
IF(IFIM)9,10,9
10 WRITE(5,102)XM,YM,DX,DY
M=0
2 M=M+1
READ(2,103)X(M),Y(M),N(M),K(M)
X(M)=(X(M)-XM)/DX
Y(M)=(Y(M)-YM)/DY
IF(N(M))3,3,2
3 M=M-1
DO 5 I 1,20
RD=FLOAT(I-10)/10.
A=DER(RD,M,X,Y,N,K)
CALL OVERFL(IESI)
GO TO(5,4,5),IEST
4 IF(A)6,6,5
5 CONTINUE
CALL EXIT
6 A=DER(RD,M,X,Y,N,K)
B=DER1(RD,M,X,Y,N,K)
RO=RO-A/B
IF ABS(A/B -0.01) 7,7,6
7 WRITE(5,101)RO
V=-1./DER1(RD,M,X,Y,N,K)
WRITE(5,105)V
QUI=0
DO 8 I=1,M
CALL BID(X(I),Y(I),RD,TOL,IT,Q)
P=1-Q
8 QUI=QUI+(N(I)*(FLOAT(N(I)-K(I))/N(I)-Q)**2)/(P*Q)
M=M-1
WRITE(5,104)QUI,M
WRITE(5,106)
GO TO 1
9 CALL EXIT
100 FORMAT(4F10.0,I5)
101 FORMAT(1H0,I20,'R=',F5.2)
102 FORMAT(1H1,6(7),I20,'ESTIMACAO DE RD',//,T20,'E(X)=' ,F10.2,I40,'E(
1Y)=' ,F10.2,/,I20,'DPX=' ,F11.2,I40,'DPY=' ,F11.2,/)
103 FORMAT(2F10.0,I215)
104 FORMAT(1H0,I20,'QUI=' ,F8.3,2X,'COM',I3,I1,'GRAUS DE LIBERDADE')
105 FORMAT(1H0,I20,'VARIANCIA=' ,F7.5)
106 FORMAT('1')
END

```

Figura 8

SÍMBOLOS - SIGNIFICADOS E FORMATOS

- XM - Variável real-média estimada do estímulo X
Formato de leitura - F10.0
- YM - Variável real - média estimada do estímulo Y
Formato de leitura - F10.0
- DX - Variável real - desvio padrão estimado do estímulo X
- DY - Variável real - desvio padrão estimado do estímulo Y
- I FIM - Variável inteira - variável que indica término da execução do programa
Formato de leitura - I 5
- X(M) - Variável real - nível do estímulo X que entra no m-ésimo nível da mistura
Formato de leitura - F10.0
- Y(M) - Variável real - nível do estímulo Y que entra no m-ésimo nível da mistura
Formato de leitura - F10.0
- N(M) - Variável real - tamanho do lote ao qual foi aplicado o m-ésimo nível da mistura.
Formato de leitura - I 5
- K(M) - Número de unidades experimentais que responderam ao m-ésimo nível da mistura.

Fig.9
DISPOSIÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA DO PROGRAMA II

Figura 10

Resultados obtidos com o Programa II

ESTIMACAO DE RD

E(X)= 1.83

E(Y)= 2.46

DPX= 0.60

DPY= 0.60

R=-0.86

VARIANCIA=0.00266

QUI= 25.027 COM 31 GRAUS DE LIBERDADE

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABRAMOWITZ, M. & SEGUN, I.A. Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover Publications Inc, p. 940, 1969.
- [2] BLISS, C.I. The method of probits. Science, 79:38-9, 1934.
- [3] BLISS, C.I. The toxicity of poisons applied jointly. Ann. Appl. Biol., 26, 585, 1939.
- [4] CRAMER, H. Métodos matemáticos de estadística. Madrid, Aguilar, S.A de Ediciones, 1963
- [5] FINNEY, D.J. Probit Analysis. Cambridge, Cambridge University Press, 1952.
- [6] GARWOOD, F. The application of maximum likelihood to dosage-mortality curves. Biometrika, 32:46-58, 1941.
- [7] HALD, A. Statistical theory with engineering applications. New York, John Wiley & Sons, Inc, 1952.
- [8] HEWLETT, P.S. & PLACKETT, R.D. Statistical aspects of the independent joint action of poisons, particularly insecticides. II. Examination of data for agreement with the hypothesis. Ann. Appl. Biol, 37: 527-52, 1950.
- [9] MOORE, R.H. & ZEIGLER, R.K. The use of non-linear regression methods for analysing sensitivity and quantal response data. Biometrics, 23:563-66, 1967.
- [10] PLACKETT, R.L. & HEWLETT, P.S. Statistical aspects of the independent joint action of poisons, particularly insecticides. I. The toxicity of a mixture of poisons. Ann. Appl. Biol, 35:347-58, 1948.
- [11] PLACKETT, R.L. & HEWLETT, P.S. Quantal responses to mixtures of poisons. J.R.Stat.Soc, 14(B):141-63, 1952.

- [12] WALD, A. Tests of statistical hypothesis concerning several parameters when the number of observations is large. Trans. Amer. Math. Soc, 54: 426-82, 1943.