MEDIDAS INVARIANTES PARA O PROCESSO
DE EXCLUSÃO SIMPLES MARCADO

PABLO AUGUSTO FERRARI

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: DR. ENRIQUE DANIEL ANDJEL

SÃO PAULO, JULHO DE 1982.

Ā Gê.

AGRADECIMENTOS

- Ao Enrique pela sua disponibilidade excepcional ao longo deste trabalho.
- A Antonio Galvez que me entusiasmou para estudar estes temas, e discutiu algumas partes deste trabalho comigo.
- A Claude Kipnis, por algumas discussões mantidas.
- A T.E. Harris, por ter sugerido referências.
- A Luzia do Carmo Namiki e Regina Helena da Silva pela esmerada datilografia.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho é estudado o processo de exclusão simples marcado, ou "visto de uma partícula".

No capítulo 1 é provada a existência deste processo para espaço de estados $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e função de transição de probabilidade $p(x,y)$, tal que $\sup_y \sum_x p(x,y) < \infty$. No capítulo 2 é estudado o conjunto das medidas invariantes para o processo, e definidas a partir de medidas invariantes por traslações, onde o processo é construído em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ usando uma função de transição $p(x,y)$ invariante por traslações. No capítulo 3 é estudado o conjunto das medidas invariantes para o processo em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, com $p(x,x+1)=p$, $p(x,x-1)=q$, $p+q=1$.

Por último, no capítulo 4 são estabelecidos domínios de atração das medidas invariantes estudadas no capítulo 2, sob as condições do capítulo 3.

CAPÍTULO I

O PROCESSO DE EXCLUSÃO SIMPLES MARCADO

Seja S um conjunto enumerável, $p(x,y)$ uma função de transição de probabilidade para uma cadeia de Markov em S . Spitzer, em [13] introduziu no espaço $X = \{0,1\}^S$ o processo de exclusão simples que pode ser intuitivamente descrito da seguinte forma: em cada ponto de S existe (ou não) inicialmente uma partícula. Cada partícula espera um tempo exponencial de parâmetro 1 e salta de acordo com a função $p(x,y)$. O salto se realiza se não existir partícula no ponto de destino. A existência deste processo foi provada por Liggett em [6], sob a condição que $\sup_y \sum_x p(x,y) < \infty$. O sistema resultante é um processo de Markov com espaço de estados $X = \{0,1\}^S$ cujo gerador infinitesimal é o fechamento em $C(X)$ do operador Ω definido para o conjunto F das funções reais cilíndricas em X (que dependem de um número finito de coordenadas):

$$(1.1) \quad \Omega f(n) = \sum_{x,y} p(x,y) \left[f(n_{xy}) - f(n) \right]$$

onde

$$(1.2) \quad \eta_{xy}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{se } \eta(x)[1-\eta(y)] = 0 \quad \text{ou } z \neq x, z \neq y \\ \eta(x) & \text{se } \eta(x)[1-\eta(y)] = 1 \quad \text{e } z = y \\ \eta(y) & \text{se } \eta(x)[1-\eta(y)] = 1 \quad \text{e } z = x \end{cases}$$

Vamos definir agora um processo auxiliar no espaço $X' = \{0,1\}^S \times \bar{S}$, onde $\bar{S}$ é a compactificação de Alexandrof de S . Um elemento de X' é um par (η, u) , $\eta \in \{0,1\}^S$, $u \in \bar{S}$.

Diremos que uma função $h: X' \rightarrow \mathbb{R}$ é cilíndrica se existe um conjunto $A \subset S$, finito, tal que se $\eta(x) = \zeta(x) \quad \forall x \in A$ e $u = v$ ou $u, v \notin A$, então $h(\eta, u) = h(\zeta, v)$. Chamaremos F' ao conjunto das funções cilíndricas em X' .

Sejam U_{xy} e M_{xy} dois operadores lineares definidos em $C(X')$ da seguinte forma:

$$U_{xy} h = h(\eta_{xy}, u_{xy}) - h(\eta, u)$$

$$M_{xy} h = p(x, y) h$$

onde η_{xy} está definido na eq. (1.2) e

$$(1.3) \quad u_{xy} = \begin{cases} u & \text{se } \eta(y) = 1 \\ y & \text{se } \eta(y) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ou } u \neq x \\ \text{e } u = x \end{matrix}$$

Seja $A_n = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : |x_i| \leq n\}$. Seja Ω'_n o gerador definido por:

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad \Omega'_n h(n, u) &= \sum_{x, y \in A_n} M_{xy} U_{xy} h(n, u) = \\
 &= \sum_{x, y \in A_n} p(x, y) \left[h(n_{xy}, u_{xy}) - h(n, u) \right]
 \end{aligned}$$

Seja

$$C = \{h: X' \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{x, y} \|U_{xy} h\| p(x, y) < \infty\}$$

C é um espaço linear ($f, g \in C \Rightarrow af+bg \in C$), e podemos definir

$$\Omega'_0 h = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega'_n h$$

Seja Ω' o fechamento de Ω'_0 . Pode-se demonstrar que Ω' é um operador linear, usando o fato de que C é denso em $\mathcal{D}(\Omega')$ e o Lema 3.3 de [10].

Definição 1.5: Se Ω é um operador linear sobre um espaço de funções, seja $\mathcal{D}(\Omega)$ o seu domínio e $R(\Omega)$ a sua imagem.

Diremos que um operador Ω é o gerador de um semigrupo $S(t)$, ou que Ω gera $S(t)$ se:

$$(1) \quad S(t)f = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \frac{t}{n} \Omega)^{-n} f \quad \text{para } f \in R(I - \lambda \Omega), \text{ para}$$

$$(2) \quad \Omega f = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} \quad \text{para } f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

λ pequeno

Como o espaço de estados é enumerável para o operador Ω'_n , este gera um único semigrupo $S'_n(t)$, e teremos o seguinte teorema de existência para o operador Ω' :

Teorema 1.6: Ω' gera um único semigrupo fortemente contínuo de contrações $S'(t)$. Se $S'_n(t)$ é o semigrupo gerado por Ω'_n , temos

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \|S'_n(t)h - S'(t)h\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ para toda } h \in C(X')$$

Para demonstrar o teorema 1.6 devemos introduzir algumas definições. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Seja L um operador linear definido sobre X . Seja $\mathcal{D}(L) \subset X$ o domínio deste operador. Diremos que L é dissipativo se $f - \lambda Lf = g \Rightarrow \|f\| \leq \|g\| \quad \forall f \in \mathcal{D}(L) \text{ e } \lambda > 0$. Diremos que um operador L é fechado se $\text{graf}(L) = \{(f, Lf) \in X \times X, f \in \mathcal{D}(L)\}$ é fechado em $X \times X$. Seja $R(L) = \{Lf : f \in \mathcal{D}(L)\}$.

Para demonstrar a primeira parte do teorema 1.6 usaremos o seguinte:

Teorema de Hille Yosida, [14]

Se valem as seguintes hipóteses:

- 1) $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em X
- 2) Ω é dissipativo e fechado
- 3) $R(I - \lambda \Omega) = X$ para todo λ suficientemente pequeno.

então: Ω gera um único semigrupo fortemente contínuo de contra-

ções em X , que chamaremos $S(t)$.

Sejam L e M , dois operadores lineares sobre X , o operador $[L,M] = LM - ML$, e

$$\gamma(L,M) = \sup_{f \in X} \frac{\|[L,M]f\|}{\|Lf\| + \|Mf\|}$$

Note que $\gamma(L,M) \leq \max(\|L\|, \|M\|)$, e que $\gamma(L,M)=0$ se L e M comutam.

$$\text{Seja } U_{xy} h = h(\eta_{xy}, u_{xy}) - h(\eta, u)$$

$$M_{xy} h = p(x,y) h$$

Lema 1.7: $\exists$ uma constante K tal que, para todo $z, w \in S$

$$1) \sum_{xy} p(x,y) \gamma(U_{xy}, U_{zw}) \leq K$$

$$2) \sum_{xy} p(x,y) \|[U_{xy}, M_{zw}]\| \leq K p(z,w)$$

Demonstração: Dado que $\|U_{xy}\| \leq 2 \forall x,y \in \mathbb{Z}^d$, que $\{x,y\} \cap \{z,w\} = \emptyset$ implica $\gamma(U_{xy}, U_{zw})=0$ e que $\sup_y \sum_x p(x,y) < \infty$, a primeira desigualdade sai obviamente.

Para obter a segunda desigualdade, basta notar que U_{xy} e M_{zw} comutam para todo par $\{x,y\}, \{z,w\}$.

Demonstração do teorema 1.6: Usando técnicas de [6] é fácil ver que $C \supset F$, por

tanto que $\mathcal{D}(\Omega')$ é denso em X ; e que Ω' é dissipativo. Para a terceira condição do teorema de Hille Yosida basta usar o Lema 1.7 e o teorema 2.2 de [6]. Satisfeitas as condições do teorema de Hille Yosida, temos demonstrada a existência e unicidade do semigrupo $S'(t)$.

Para a parte de convergência de $S'_n(t)$ basta aplicar o teorema 3 de [5].-

A seguir, vamos definir o processo de exclusão simples marcado. Se Y é um conjunto, seja $M(Y)$ o conjunto de medidas de probabilidade definidas sobre Y . Necessitaremos o seguinte:

Lema 1.8: Seja $\mu' \in M(X')$, tal que, se $B = \{(\eta, u) \in X' : u \neq \infty\}$ e $\mu'(B)=1$, então $\mu'S'(t)(B)=1$, $\forall t \geq 0$.

Demonstração: É fácil ver que para todo $n \geq 0$ $\mu'S'_n(t)(B)=1$, onde $S'_n(t)$ é o semigrupo gerado por Ω'_n , definido na eq. (1.4). O lema segue como consequência do teorema (1.6).-

A partir de agora, consideraremos S como um grupo abeliano enumerável

$$X = \{0,1\}^S, \quad X' = \{0,1\}^S \times \bar{S}, \quad \hat{X} = X \cap \{\eta : \eta(0)=1\}$$

Seja $\mu' \in M(X')$, satisfazendo as condições do lema (1.8). Seja $\gamma \in M(\hat{X})$ satisfazendo

$$\int \gamma(d\eta) f(\eta) = \int \mu'(d(\eta, u)) f(\eta-u) ; \quad (\eta-u)(z) = \eta(z+u)$$

Esta medida existe e é única pois o funcional $\Lambda f = \int \mu'(d(\eta, u)) f(\eta - u)$ é linear e positivo, portanto satisfaz as condições do teorema de representação de Riesz.

Teorema 1.9:

- 1) Existe uma única medida de Borel, que chamaremos $\gamma^{\hat{S}}(t)$, em $M(\hat{X})$, tal que, para toda $f \in C(\hat{X})$ vale a seguinte igualdade:

$$\int \gamma^{\hat{S}}(t)(d\eta) f(\eta) = \int \mu'S'(t)(d(\eta, u)) f(\eta - u)$$

- 2) Seja $\hat{S}(t)$ o operador definido sobre $C(\hat{X})$ pela equação:

$$\hat{S}(t)f(\eta) = \int \delta_{\eta} \hat{S}(t)(d\xi)f(\xi)$$

Então a família $\{\hat{S}(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações positivas em $C(\hat{X})$.

- 3) Seja $\hat{\Omega}$ o gerador infinitesimal definido pela seguinte equação:

$$(1.10) \quad \hat{\Omega}f(\eta) = \sum_{x, y \neq 0} p(x, y) \left[f(\eta_{xy}) - f(\eta) \right] + \sum_{\substack{y \neq 0 \\ \eta(y)=0}} p(0, y) \left[f(\eta_{0y}) - f(\eta) \right]$$

onde η_{xy} está definido na eq. (1.2) e $\eta - u$ na eq. (1.8).

Então $\hat{\Omega}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{S}(t)f - f}{t}$ para $f \in \hat{F}$, onde $\hat{F}$ é conjunto das funções cilíndricas definidas em $\hat{X}$.

4) Existe uma única medida de Borel $\gamma \hat{S}_n(t)$ tal que

$$\int \gamma \hat{S}_n(t) (d\eta) f(\eta) = \int \mu' S'_n(t) (d(\eta, u)) f(\eta - u)$$

e, se $\hat{S}_n(t) f(\eta) = \int \delta_\eta \hat{S}_n(t) (d\xi) f(\xi)$

então $\| \hat{S}_n(t) - \hat{S}(t) \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Demonstração:

1) É consequência do teorema de representação de Riesz, desde que o funcional Λ_t , definido por:

$$\Lambda_t f = \int \mu' S'(t) d(\eta, u) f(\eta - u)$$

é linear e positivo.

2) É fácil ver que $\hat{S}(t)$ é um operador linear positivo e fortemente contínuo, usando a parte (1) deste teorema e o fato de que $S'(t)$ é um operador linear fortemente contínuo. Vejamos que $\hat{S}(t)$ é uma contração:

$$\begin{aligned} \| \hat{S}(t) f \| &= \sup_{\eta} | \hat{S}(t) f(\eta) | = \sup_{\eta} \left| \int \delta_{\eta} \hat{S}(t) (d\xi) f(\xi) \right| = \\ &= \sup_{\eta} \left| \int \delta_{\eta, 0} S'(t) (d(\xi, u)) f(\xi - u) \right| = \sup_{\eta} \left| \int \delta_{\eta, 0} (d(\xi, u)) S'(t) f(\xi - u) \right| \\ &\leq \sup_{\eta} \left| \int \delta_{\eta, 0} (d(\xi, u)) \sup_{\zeta, v} | S'(t) f(\zeta - v) | \right| = \end{aligned}$$

$$= \sup_{\zeta, v} |S'(\zeta)f(\zeta-v)| \leq \sup_{\zeta, u} |f(\zeta-u)| = \sup_{\eta} |f(\eta)| = \|f\|$$

$$3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{S}(t)f(\eta) - f(\eta)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\int \delta_{\eta} \hat{S}(t)(d\xi)f(\xi) - \int \delta_{\eta}(d\xi)f(\xi) \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left| \int \delta_{\eta,0} S'(t)(d(\xi, u))f(\xi-u) - \int \delta_{\eta,0}(d(\xi, u))f(\xi-u) \right| =$$

$$= \int \delta_{\eta,0}(d(\xi, u)) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [S'(t)f(\xi-u) - f(\xi-u)] =$$

$$= \int \delta_{\eta,0}(d(\xi, u)) \sum_{xy} p(x, y) [f(\xi_{xy} - u_{xy}) - f(\xi-u)] =$$

$$= \sum_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} p(x, y) [f(\eta_{xy}) - f(\eta)] + \sum_{y \neq 0} p(0, y) [f(\eta_{0y} - y) - f(\eta)] =$$

$$= \hat{\Omega}f(\eta).$$

4) Direta usando o teorema 1.6 e a primeira parte deste teorema.

Sejam $M(X)$, $[M(\hat{X})]$ o conjunto das medidas de probabilidade definidas sobre $X[\hat{X}]$. Sejam $I \subset M(X)$ e $\hat{I} \subset M(\hat{X})$ os conjuntos:

$$(1.8) \quad I = \{\mu : \mu S(t) = \mu\}$$

$$\hat{I} = \{\hat{\mu} : \hat{\mu} \hat{S}(t) = \hat{\mu}\}$$

Os conjuntos I e $\hat{I}$ são convexos, compactos na topologia fraca de medidas, e não vazios, portanto, pelo teorema de Krein-Millman, para identificá-los, basta descrever o conjunto de suas medidas extremais, I_e e $\hat{I}_e$. Liggett, em [7], descreveu o conjunto I_e em alguns casos particulares. Nos capítulos seguintes identificaremos $\hat{I}_e$ em alguns casos particulares.

CAPÍTULO II

O CASO DE INVARIÂNCIA POR TRASLAÇÕES

Ao longo deste capítulo consideraremos $S = \mathbb{Z}^d, p(x,y)$ tal que $p(x,y) = p(0,y-x)$ e o conjunto $S \subset M(X)$ das medidas invariantes por traslações.

Se $\mu \in S$, existe uma única medida $\hat{\mu}$ que satisfaz

$$(2.1) \quad \int \hat{\mu}(d\eta) f(\eta) = \frac{1}{|\Lambda| \alpha(\mu)} \int \mu(d\eta) \sum_{x \in \Lambda} f(\eta-x) \eta(x)$$

$\forall f$ cilíndrica e $\Lambda \subset S$, finito, onde $\alpha(\mu) = \int \eta(0) \mu(d\eta)$, é chamada intensidade de μ .

$\hat{\mu}$ é chamada medida de Palm de μ , (ver [11]), e tem a propriedade de que $\hat{\mu}\{\eta: \eta(0) = 1\} = 1$. A medida $\hat{\mu}$ pode ser entendida também como a medida μ condicionada ao fato de ter uma partícula em $x=0$.

Seja agora

$$(2.2) \quad \hat{S} = \{v \in M(\hat{X}) : \int v(d\eta) f(\eta) = \int v(d\eta) f(\eta-x) \eta(x), \\ \forall x \in S, \forall f \in C(\hat{X})\}.$$

Como $\eta-x$ pode não pertencer ao domínio de f , estende mos a definição de f da seguinte forma: $f(\eta-x) = 0$ se $(\eta-x)(0)=0$.

Temos que, ver referência [12], S é homeomorfo a $\hat{S}$ na topologia fraca de medidas. Mas precisamente, para todo $\nu \in \hat{S} \exists! \mu \in S$ tal que $\nu = \hat{\mu}$ e $\mu_n \Rightarrow \mu \iff \hat{\mu}_n \Rightarrow \hat{\mu}$.

Seja $S(t)$ o semigrupo introduzido no teorema 1.9, usando a função $p(x,y)$ como no início deste capítulo. Seja $\tilde{S}(t)$ o semigrupo gerado pelo gerador Ω da eq. (1.1), com a mesma função $p(x,y)$. Os resultados principais deste capítulo são:

Teorema 2.3: Se $\mu \in S$, então $\hat{\mu} \tilde{S}(t) = (\mu S(t))^\wedge$.

Teorema 2.4: $(\tilde{I} \cap \hat{S})_e = \{\hat{\nu}_\rho : 0 \leq \rho \leq 1\}$ onde ν_ρ é a medida produto de Bernoulli de parâmetro ρ .

O teorema 2.3 é uma extensão do teorema (6.5) de [4] e do teorema (6.5) de [12]. Nestes dois artigos a demonstração do teorema é feita para processos onde cada partícula pode ser identificada em cada instante t do processo, o que não é feito na construção de Liggett do processo de exclusão simples em $\mathbb{Z}^d$ com $p(x,y) \neq 0$ para $|x-y| > 1$.

Para resolver este problema construímos o processo identificando apenas uma partícula, (ver cap. I) e demonstraremos o teorema usando esta construção.

Intuitivamente o teorema 2.3 diz que se começarmos com a medida de Palm $\hat{\mu}$ de uma medida invariante por traslações μ , e um processo invariante por traslações (que é o caso de $S(t)$, pois $p(x,y)$ é invariante por traslações), a medida "vista da partícula" $\hat{\mu}\hat{S}(t)$ no instante t é a medida de Palm de $\mu S(t)$ obtida no processo normal $S(t)$, começando com a medida μ .

O teorema 2.4 identifica o conjunto de medidas invariantes para $\hat{S}(t)$, que são medidas de Palm de medidas μ invariantes por traslações. As medidas extremas de $(\hat{I} \cap \hat{S})$ são as medidas de Palm das medidas produto de Bernoulli de parâmetro $\rho, 0 \leq \rho \leq 1$, que são as extremas de $\hat{I} \cap S$ para o processo de exclusão simples normal.

Para demonstrar o teorema 2.3 precisaremos dois lemas que estabelecem relações entre os processos $S(t)$, $S'(t)$ e $\hat{S}(t)$. Vamos construir no mesmo espaço de probabilidade (Ω, A, P) uma versão de cada um dos processos finitos $S_n(t)$, $S'_n(t)$ e $\hat{S}_n(t)$, tal como foram definidos no capítulo 1.

Seja o conjunto

$$A_n = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : |x_i| \leq n, \quad i=1, \dots, d\}$$

Seja $\{t_{x,y}^k\}_{k \geq 0}$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, uma seqüência de variáveis aleatórias com as seguintes propriedades: $t_{x,y}^0 \equiv 0$; $t_{xy}^k - t_{xy}^{k-1}$ tem distribuição exponencial de parâmetro $p(x,y)$. (Ω, A, P) é o espaço produto gerado por $\{t_{x,y}^k\}_{k \geq 0, x,y \in \mathbb{Z}^d}$.

Vamos definir uma seqüência de variáveis aleatórias

$\{T_k\}_{k \geq 0}$ da seguinte forma:

$$T_0 \equiv 0; \quad T_i = \min_{x,y \in A_n} \{t_{xy}^k : t_{xy}^k > T_{i-1}\}$$

Para cada $\omega \in \Omega$, construiremos uma realização conjunta dos processos $\xi[t]$, $\xi'[t] = (\xi, u)[t]$ e $\hat{\xi}[t]$. Note os colchetes para indicar o tempo, em oposição aos parêntesis para indicar ocupação ou não de um ponto.

Seja $\eta \in X$, tal que $\eta(z)=1$. Como $\eta-Z \in \hat{X}$ podemos definir

$$\xi[0] \equiv \eta; (\xi, u)[0] \equiv (\eta, Z); \quad \hat{\xi}[0] \equiv \eta - Z.$$

Suponhamos agora que estão definidos

$$\xi[\bar{T}_{i-1}], (\xi, u)[\bar{T}_{i-1}], \hat{\xi}[\bar{T}_{i-1}]$$

Seja o par (x,y) tal que $T_i = t_{xy}^k$, então

$$\xi[\bar{T}_i] = \left\{ \xi[\bar{T}_{i-1}] \right\}_{xy}, \quad \xi_{xy} \text{ definido como na eq. (1.2).}$$

$$(\xi, u)[\bar{T}_i] = \left\{ (\xi, u)[\bar{T}_{i-1}] \right\}_{xy}, \text{ onde } \left\{ \xi, u \right\}_{xy} = (\xi_{xy}, u_{xy}) \text{ foram definidos nas eqs. (1.2) e (1.3).}$$

$$\hat{\xi}[\bar{T}_i] = \xi[\bar{T}_i] - u[\bar{T}_i]$$

E, para todo $t \geq 0$, indutivamente:

$$\xi[t] = \xi[\bar{T}_i]; (\xi, u)[t] = (\xi, u)[\bar{T}_i], \quad \xi[t] = \xi[\bar{T}_i], \quad [\bar{T}_i] \leq t < T_{i+1}.$$

É fácil ver que, se δ_η , $\delta_{\eta,z}$, $\delta_{\eta-z}$ são medidas em X , X' e $\hat{X}$ respectivamente que concentram massa nas configurações η , (η,z) e $\eta-z$, para η tq $\eta(z)=1$, respectivamente, então:

$$(2.5) \quad E^\eta f(\xi[t]) = \int \delta_\eta S_\eta(t) (d\xi) f(\xi) ,$$

$$(2.6) \quad E^{\eta,z} h((\xi,z)[t]) = \int \delta_{\eta,z} S'_\eta(t) (d(\xi,u)) h(\xi,u) \quad e$$

$$(2.7) \quad E^{\eta-z} g(\hat{\xi}[t]) = \int \delta_{\eta-z} \hat{S}_\eta(t) (d\xi) g(\xi) .$$

para toda $f \in C(X)$, $h \in C(X')$ e $g \in C(\hat{X})$.

Se $\omega = \{t_{x,y}^k\}_{xy,k}$ e definimos $\omega-a = \{t_{x+a,y+a}^k\}$, co

mo $p(xy) = p(o,y-x)$ teremos que:

$$(2.8) \quad P(\omega \in C) = P(\omega-a \in C), \quad \forall \quad C \in \mathcal{A}.$$

Lema 2.9 - Seja $\eta \in X$, $f \in C(X)$, então

$$\begin{aligned} \eta(o) \int \delta_{\eta,o} S'_\eta(t) d(\xi,u) f(\xi-z) 1_{u=z} &= \\ &= (\eta-z)(-z) \int \delta_{\eta-z,-z} S'_\eta(t) d(\xi,u) f(\xi) 1_{u=0} \end{aligned}$$

Demonstração

Seja $(\xi,u)[t]$ o processo construído na caixa A_n , como foi feito na eq. (1.4). Este processo satisfaz a eq.(2.6)

Seja $(\xi_a, u_a)[t]$ o processo construído da mesma for

ma que $(\xi, u)[t]$ mas na caixa $A_n - a = \{x \in \mathbb{Z}^d : x+a \in A_n\}$.

Seja $S_n'^a(t)$ o semigrupo construído a partir do gerador $\Omega_n'^a$, na caixa $A_n - a$, onde

$$\Omega_n'^a h(\xi, u) = \sum_{x, y \in A_n - a} p(x, y) f(\xi_{xy}, u_{xy}) - f(\xi, u).$$

É fácil ver que $\|S_n'^a(t) - S'(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, pelo teorema 1.6, e que, se $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\eta(0) = 1$,

$$(2.10) \quad E^{\eta-a; a} h((\xi, z)[t]) = \int \delta_{\eta-a; a} S_n'^a(t) (d(\xi, u)) h(\xi, u)$$

Por outro lado, para quase todo ω

$$(2.11) \quad (\xi^\eta, u^0) [t, \omega] - a = (\xi_a^{\eta-a}, u_a^a) [t, \omega-a]$$

onde

$$(\xi^\eta, u^a) [0, \omega] \equiv (\eta, a) \quad \forall \omega \quad \text{e} \quad (\xi, u) - a = (\xi-a, u+a)$$

Mas usando as eqs. (2.11) e (2.8) obtemos:

$$E^{\eta, 0} h[(\xi, u)[t] - a] = E^{\eta-a, a} h[(\xi_a, u_a)[t]]$$

ou seja

$$(2.12) \quad \int \delta_{\eta, 0} S_n'(t) (d(\xi, u)) h(\xi-a, u+a) = \int \delta_{\eta-a, a} S_n'^a(t) (d(\xi, u)) h(\xi, u).$$

Mas, pelo teorema (1.6), e usando $h(\xi, u) = f(\xi) 1_{u=0}$

$$(2.13) \quad \int \delta_{\eta,0} S'(t) (d(\xi,u)) f(\xi-u) 1_{u=-a} = \int \delta_{\eta-a,a} S'(t) (d(\xi,u)) f(\xi) 1_{u=0}.$$

Corolário 2.14 a) $\mu \in S \Rightarrow \mu S(t) \in S$; b) $\alpha(\mu S(t)) = \alpha(\mu)$.

Demonstração: Direta, usando $h(\xi,u)=f(\xi)$ ou seja, projecção de X' sobre X na eq. (2.12) e o fato de μ ser invariante por translações.

Lema 2.15. Seja $\mu \in S$, então

$$\frac{1}{\alpha(\mu)} \int \mu(d\eta) \sum_z \eta(z) \int \delta_{\eta,z} S'(t) d(\xi,u) f(\xi) 1_{u=0} = \left[\mu S(t) \right]^\wedge f.$$

Demonstração. Seja $\eta \in X$ uma configuração fixa. Sejam $\xi[t]$ e $(\xi,u)[t]$ as versões dos processos $S(t)$ e $S'(t)$ na caixa A_n , que satisfazem as eqs. (2.6) e (2.7). Então

$$\sum_z \eta(z) E^{\eta,z} \left[f(\xi[t]) 1_{u(t)=0} \right] = E^{\eta} \left[f(\xi[t]) \cdot \xi(0) \right]$$

o que é equivalente a:

$$\sum_z \eta(z) \int \delta_{\eta,z} S'_n(t) d(\xi,u) f(\xi) 1_{u=0} = \int \delta_{\eta} S_n(t) (d(\xi)) f(\xi) \xi(0)$$

Usando o teorema (1.6), esta equação vale para $S'(t)$ e $S(t)$. Integrando ambos os membros em relação a $\mu \in S$, e usando o corolário (2.14) e a eq. (2.1), obtemos o lema.

Demonstração do teorema 2.3. Seja $\mu \in S$.

$$\hat{\mu}\hat{S}(t)f = \int \hat{\mu}(d\eta) \int \delta_{\eta} \hat{S}(t)(d\xi) f(\xi)$$

Agora, usando a eq. (2.1) para $A=\{0\}$, e a definição de $\hat{S}(t)$,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}\hat{S}(t)f &= \frac{1}{\alpha(\mu)} \int \mu(d\eta)\eta(o) \int \delta_{\eta,o} S'(t)(d(\xi,u)) f(\xi-u) \\ &= \frac{1}{\alpha(\mu)} \int \mu(d\eta) \sum_z \eta(o) \int \delta_{\eta,o} S'(t)(d(\xi,u)) f(\xi-z) 1_{u=z} \end{aligned}$$

Usando o lema 2.9:

$$\hat{\mu}\hat{S}(t)f = \frac{1}{\alpha(\mu)} \int \mu(d\eta) \sum_z (\eta-z)(-z) \int \delta_{\eta-z,-z} S'(t)(d(\xi,u)) f(\xi) 1_{u=0}$$

Considerando que $\mu \in S$, se $\eta' = \eta - z$ e depois $\eta = \eta'$, temos

$$\begin{aligned} \hat{\mu}\hat{S}(t)f &= \frac{1}{\alpha(\mu)} \int \mu(d\eta) \sum_z \eta(z) \int \delta_{\eta,z} S'(t)(d(\xi,u)) f(\xi) 1_{u=0} = \\ &= \left[\mu S(t) \right]^{\wedge} f, \text{ aplicando o lema (2.15).} \end{aligned}$$

Demonstração do teorema 2.4. Seja $\gamma \in (\hat{I} \cap \hat{S})_e$.

Como $\gamma \in \hat{S}$ então existe uma única $\mu \in S$ tal que $\gamma = \hat{\mu}$. [11].

Como $\gamma \in \hat{I}$ então $\gamma \hat{S}(t) = \gamma$ ou seja

$$(2.16) \quad \hat{\mu}^{\hat{S}}(t) = \hat{\mu}$$

Por outro lado como $\mu \in S$, pelo teorema 2.3 temos que

$$(2.17) \quad \hat{\mu}^{\hat{S}}(t) = (\mu S(t))^{\wedge}$$

e usando (2.16) e (2.17) temos que

$(\mu S(t))^{\wedge} = \hat{\mu}$, o que implica $\mu S(t) = \mu$ pela unicidade da medida de Palm em S , e portanto $\mu \in I$.

Mas se $\mu \in \mathcal{M} \cap S$, por [7], então $\mu = \int v_{\rho} g(d\rho)$ onde g é uma medida de probabilidade em $[0,1]$.

Se $\alpha(\mu)$ é a intensidade de μ ,

$$\hat{\mu} = \int \frac{\rho}{\alpha(\mu)} \hat{v}_{\rho} g(d\rho) = \int \hat{v}_{\rho} g_1(d\rho)$$

Mas

$$\hat{\mu} \in (\hat{I} \cap \hat{S})_e \quad e \quad \hat{v}_{\rho} \in (\hat{I} \cap \hat{S})_e \quad \forall \rho \implies \exists \rho_0 \quad \text{tal que}$$

$$g_1(\rho) = 1_{\rho_0}(\rho) \text{ portanto } \mu = v_{\rho_0}, \text{ e } \hat{\mu} = \hat{v}_{\rho_0}$$

CAPÍTULO III

O CASO DE INTERAÇÃO COM O VIZINHO

MAIS PRÓXIMO EM $\mathbb{Z}$

III.1 Definições e Resultados

Ao longo deste capítulo consideraremos:

$$(3.1) \quad S = \mathbb{Z}, \quad p(x, x+1)=p, \quad p(x, x-1)=q, \quad \forall x \in \mathbb{Z}, \quad p+q=1.$$

Consideraremos também os sub-espacos $X_{\infty}, X_{\infty}^{+}, X_{\infty}^{-} \subset X$ definidos por:

$$X_{\infty} = \{ \eta \in X : \sum_{x=0}^{\infty} \eta(x) = \sum_{x=0}^{-\infty} \eta(x) = \infty \}$$

$$X_{\infty}^{+} = \{ \eta \in X : \sum_{x=0}^{\infty} \eta(x) = \infty ; \sum_{x=0}^{-\infty} \eta(x) < \infty \}$$

$$X_{\infty}^{-} = \{ \eta \in X : \sum_{x=0}^{-\infty} \eta(x) = \infty ; \sum_{x=0}^{\infty} \eta(x) < \infty \}$$

$$X_0 = \{ \eta \in X : \sum_{x=0}^{-\infty} \eta(x) < \infty ; \sum_{x=0}^{+\infty} \eta(x) < \infty \}$$

É claro que $X = X_\infty \cup X_\infty^+ \cup X_\infty^- \cup X_0$

Definiremos também $M_\infty [M_\infty^+, M_\infty^-, M_0]$, a família das medidas que concentram massa no conjunto $X_\infty [X_\infty^+, X_\infty^-, X_0]$.

Lema 3.2. Se $\mu \in M_\infty [M_\infty^+, M_\infty^-, M_0]$ e é tal que $\mu\{\eta: \eta(o)=1\}=1$; $\hat{S}(t)$ é construído com $p(x,y)$ que satisfaz (3.1), então, para todo $t \geq 0$.

$$\mu \hat{S}(t) \in M_\infty [M_\infty^+, M_\infty^-, M_0]$$

Demonstração Direta, usando as aproximações finitas $\hat{S}_n(t)$ de $\hat{S}(t)$.

Seja agora

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{I}_{0,\infty} = \hat{I} \cap [M_\infty \cup M_0] \\ \hat{I}_\infty^+ = \hat{I} \cap M_\infty^+ \\ \hat{I}_\infty^- = \hat{I} \cap M_\infty^- \end{array} \right.$$

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 3.4. Sob as condições (3.1) e a notação (3.3) temos que

$$\hat{I}_e = \left(\hat{I}_{0,\infty} \right)_e \cup \left(\hat{I}_\infty^+ \right)_e \cup \left(\hat{I}_\infty^- \right)_e$$

onde

$$(3.5) \quad a) \quad (\hat{I}_{0,\infty})_e = \{\hat{v}_\rho; 0 < \rho \leq 1\} \cup \{\hat{0}\}$$

$$(3.6) \quad b) \quad (\hat{I}_\infty^+)_e = \{\gamma_{\rho,n}^+; 0 \leq \rho \leq 1, n \geq 0\}$$

$$(3.7) \quad c) \quad (\hat{I}_\infty^-)_e = \{\gamma_{\rho,n}^-; 0 \leq \rho \leq 1, n \geq 0\}$$

Onde $\hat{I}_\infty^- = \phi$ se $p \geq q$ e $\hat{I}_\infty^+ = \phi$ se $q \geq p$.

$\hat{v}_\rho$ é a medida de Palm de v_ρ , produto de medidas de Bernoulli de parâmetro ρ , e $\hat{0}$ concentra massa em $\{\eta \in \hat{X}; \eta(z)=0, z \neq 0\}$.

Se $\eta \in X_\infty^+$, podemos representar $\eta = \{x_1, x_2, \dots\} \in \mathbb{Z}$ onde $x_1 < x_2 < \dots$ então, definimos:

$$(3.7.a) \quad \gamma_{\rho,n}^+ \{\eta: X_m - X_{m-1} = k\} = \rho_m^k (1 - \rho_m), \quad \forall n \geq 0.$$

$$(3.7.b) \quad \text{onde } \rho_m = \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1} + \rho \left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+1}\right]$$

e, se

$$(3.7.c) \quad A_n = \{\eta: \sum_{x < 0} \eta(x) = n\}, \text{ então}$$

$$\gamma_{\rho,n}^+ (A_n) = 1 \quad \forall \rho : 0 \leq \rho \leq 1.$$

Observação: Note-se que para $\rho = 0$, as medidas $\gamma_{\rho,r}^+$ para o processo de exclusão simples marcado correspondem às medidas μ_n de Liggett [7], para exclusão simples, vistas da r -ésima partícula. O mesmo acontece com $\gamma_{\rho,r}^-$, que são definidas de forma simétrica.

III.2 Demonstração do teorema 3.4.a

Para demonstrar esta parte do teorema vamos apresentar uma correspondência existente entre o processo de exclusão simples marcado e um caso particular do processo de interação por sobreposição. O processo de interação por sobreposição foi introduzido por Spitzer em [13], sua existência foi provada por Liggett em [9], e pode ser descrito intuitivamente da seguinte forma:

Em cada ponto x de um conjunto enumerável S temos um número k de partículas. Com intensidade $g(k)$ uma partícula escolhida ao acaso dentre as k que estão em x pula para outro ponto y de acordo com uma função de transição de probabilidade $p(x,y)$ definida em $S \times S$, independentemente do número de partículas existentes em x e y . O caso que nos interessa é quando $S = \mathbb{Z}$, $g(k) \equiv 1$, $p(x, x+1) = q$, $p(x, x-1) = p$, $\forall x$, $p + q = 1$.

O gerador A deste processo está descrito abaixo. Se h é uma função cilíndrica, definida em $Y = \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, e $\xi \in Y$ então:

$$(3.8) \quad A h(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left[q (h(\xi_{x,x+1}) - h(\xi)) + p (h(\xi_{x,x-1}) - h(\xi)) \right]$$

onde

$$\xi_{xy}(z) = \begin{cases} \xi(z) - 1 & \text{se } z = x \text{ e } \xi(x) > 0 \\ \xi(z) + 1 & \text{se } z = y \text{ e } \xi(x) > 0 \\ \xi(z) & \text{se } z \neq x, z \neq y \\ & \text{ou } \xi(x) = 0 \end{cases}$$

De acordo com [9], este gerador gera um semigrupo $R(t)$, e podemos definir em $M(Y)$ (o conjunto das medidas definidas em Y) o conjunto $I(\Lambda) = \{\beta \in M(Y) : \beta \wedge f = 0 \quad \forall f \in C(Y)\}$ das medidas invariantes para $R(t)$. Como consequência do teorema 1.11 de [2] temos:

(3.9) $I_e(\Lambda) = \{\beta_\rho : 0 \leq \rho \leq 1\}$, onde β_ρ é a medida produto que satisfaz $\beta_\rho\{\xi : \xi(x) = k\} = \rho^k(1-\rho)$, para $x \in S$.

Seja $X_\infty^0 = \{\eta \in X_\infty : \eta(0) = 1\}$. Vamos introduzir agora uma correspondência entre os espaços X_∞^0 e Y . Seja $\eta \in X_\infty^0$ e $\xi \in Y$. Definimos $\eta(\xi) \in X_\infty^0$ como a configuração que satisfaz

$$(3.10) \quad \eta(\xi)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists n \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ tq } \sum_{y=0}^n (\xi(y) + 1) = x \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

de outra parte, seja $\eta \in X_\infty^0$ e seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $x_0 = 0$,

$x_i = \min \{x > x_{i-1} : \eta(x) = 1\}$ para $i > 0$, $x_i = \max \{x < x_{i+1} : \eta(x) = 1\}$ para $i < 0$, então definimos $\xi(\eta)$ por:

$$\xi(\eta)(u) = x_{u+1} - x_u - 1 \quad \forall u \in \mathbb{Z}.$$

Seja $f: X_\infty^0 \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: Y \rightarrow \mathbb{R}$ cilíndricas.

Definimos $f_\eta: Y \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_\xi: X_\infty^0 \rightarrow \mathbb{R}$ como as funções que satisfazem

$$(3.11) \quad (f_\eta)(\xi) = f(\eta(\xi)) \quad \text{e} \quad (h_\xi)(\eta) = h(\xi(\eta))$$

Seja $\hat{S}(t)$ o semigrupo definido no teorema (1.9), construído com $p(x,y)$ que satisfaz (3.1). Neste caso o gerador $\hat{\Omega}$ introduzido no teorema (1.9) será:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \hat{\Omega}f(\eta) = & \sum_{x \neq 0} \{ \eta(x)(1-\eta(x+1)) p[f(\eta_{x,x+1}) - f(\eta)] + \\ & + \eta(x)(1-\eta(x-1)) q[f(\eta_{x,x-1}) - f(\eta)] \} + \\ & + \eta(1) p[f(\eta_{0,1}-1) - f(\eta)] + \eta(-1) q[f(\eta_{0,1}+1) - f(\eta)] \end{aligned}$$

Temos então o seguinte

Lema (3.13). Se $\hat{\Omega}$ e Λ estão definidos como nas eqs. (3.12) e (3.8), então

$$\hat{\Omega}f(\eta(\xi)) = \Lambda(f\eta)(\xi)$$

$$\hat{\Omega}(h\xi)(\eta) = \Lambda h(\xi(\eta))$$

Nota: um salto à esquerda de uma partícula que está no lugar u no processo de interação por sobreposição equivale a um salto à direita da partícula que ocupa o ponto x_{u+1} em exclusão simples. Um salto à direita de uma partícula que está no lugar u no processo de interação por sobreposição equivale a um salto à esquerda da partícula que ocupa o lugar x_u em exclusão simples. Note-se também que a posição x_n é sempre relativa ao ponto onde se encontra a partícula que originalmente estava no ponto 0.

Demonstração: Direta, usando (3.11).

Agora, se λ é uma medida definida em Y , $\exists$ μ_λ definida sobre X_∞^0 tal que, para toda $h \in C(Y)$,

$$(3.14.a) \quad \mu_\lambda(h\xi) = \lambda h$$

e se μ é uma medida definida em X_∞^0 $\exists$ λ_μ definida em Y tal que para toda $f \in C(X_\infty^0)$,

$$(3.14.b) \quad \lambda_\mu(f\eta) = \mu f.$$

Além disso $\lambda_{\mu_\lambda} = \lambda$ e $\mu_{\lambda_\mu} = \mu$.

Lema 3.15

$$\mu \in \hat{I}_\infty \iff \lambda_\mu \in I(\Lambda)$$

onde $\hat{I}_\infty$ definido na eq. (3.3) e $I(\Lambda)$ na eq. (3.9).

Demonstração: Direta, a partir do lema (3.13) e da eq. (3.14).

Lema 3.16. Se $\mu(X_\infty^0)=1$, então $\mu\hat{S}(t)(X_\infty^0)=1$ e se $\bar{\mu}=\lim_{t \rightarrow \infty} \mu\hat{S}(t)$ então $\bar{\mu}(X_\infty^0)=1$.

Demonstração: Segue das aproximações finitas $\hat{S}_n(t)$ de $\hat{S}(t)$.

Demonstração do Teorema 3.4.a

Consequência da eq. (3.9), e dos lemas (3.15) e (3.16), e do fato que $\hat{I}_0 M_0 = \{0\}$, a medida que concentra massa na configuração que tem uma única partícula em 0.

III.3 Demonstração do Teorema 3.4.b

Nesta seção vamos introduzir um processo de interação por sobreposição definido em $\mathbb{Z}^+$, que apresenta uma modificação em relação ao processo da seção anterior. A modificação consiste em uma geração e morte de partículas no ponto zero. Isto acontece com taxas q e p , respectivamente

Mais precisamente, se h é uma função cilíndrica definida em $Y^+ = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, o gerador do processo é Λ^+ , definido por

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad \Lambda^+ h(\xi) = & \sum_{n=0}^{\infty} \xi(u) p [h(\xi_{u,u-1}) - h(\xi)] + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \xi(u) q [h(\xi_{u,u+1}) - h(\xi)] + \\
 & + q [h(\xi_{-1,0}) - h(\xi)]
 \end{aligned}$$

onde $\xi_{u,u+\epsilon}$ está definido na eq.(3.8) para $u, u+\epsilon \geq 0$, $\epsilon = \pm 1$, e

$$\xi_{0,-1}(u) = \begin{cases} \xi(u) & \text{se } \xi(u)=0 \text{ ou se } u \geq 1 \\ \xi(0)-1 & \text{se } u=0 \text{ e } \xi(0)>0 \end{cases}$$

$$\xi_{-1,0}(u) = \begin{cases} \xi(u) & \text{se } u \geq 1 \\ \xi(0)+1 & \text{se } u=0 \end{cases}$$

Observação: Como $g(k) \equiv 1$ é limitada e as taxas de nascimento em 0 são limitadas por $q \leq 1$, podemos usar as técnicas de Liggett[6]

para demonstrar a existência deste processo. Chamaremos $R^+(t)$ o semigrupo gerado por Λ^+ .

Vamos estabelecer agora uma relação entre este processo e o processo de exclusão simples marcado, quando a configuração inicial pertence ao conjunto Λ_0 , que foi definido na eq. (3.7.c).

Seja $\eta \in \Lambda_0$, então $\eta = (x_0, x_1, \dots)$ onde $x_0 = 0$ e $x_0 < x_1 < \dots$, seja $\xi \in Y^+$; definimos $\eta(\xi)(x) = 1$ sse $\exists u > 0$ tal que $\sum_{i=0}^u (\xi(i)+1) = x$ ou se $x=0$; e $\xi(\eta)(u) = x_{u+1} - x_u - 1$, $u \geq 0$.

Agora, se $h \in C(Y^+)$ e $f \in C(\Lambda_0)$, definimos $h\xi$ e $f\eta$ como nas eq.(3.11), e se $\lambda \in M(Y^+)$ e $\mu \in M(\Lambda_0)$,

Definimos agora o conjunto $I(\Lambda^+) = \{\lambda : \lambda \Lambda^+ f = 0, \forall f \text{ cilíndrica}\}$, das medidas invariantes para $R^+(t)$.

Lema 3.18: 1) $\hat{\Omega} f(\eta(\xi)) = \Lambda^+(f\eta)(\xi)$

$$\hat{\Omega}(h\xi)(\eta) = \Lambda^+ h(\xi(\eta))$$

2) $\mu \in \hat{I}_\infty^+ \cap M(\Lambda_0)$ sse $\lambda_\mu \in I(\Lambda^+)$,

onde λ_μ é definida como nas eq. (3.14).

Demonstração: Idêntica aos lemas (3.13) e (3.15).

Pelo lema 3.18 basta identificar o conjunto $I(\Lambda^+)$ para conhecer o conjunto $\hat{I}_\infty^+ \cap M(\Lambda_0)$ das medidas invariantes para o processo $\hat{S}(t)$ em Λ_0 .

No resto da seção identificaremos $I(\Lambda^+)$.

Teorema 3.19: Seja Λ^+ definido como na eq. (3.17), então

a) Se $p \leq q$, $I(\Lambda^+) = \emptyset$

b) Se $p > q$, e λ_ρ é a medida produto tal que

$$(3.20.a) \quad \lambda_\rho \{ \xi(m) = k \} = \rho_m^k (1-\rho), \quad n \geq 0 \text{ e}$$

$$(3.20.b) \quad \rho_m = \rho (1 - (\frac{q}{p})^m) + (\frac{q}{p})^m$$

então $I(\Lambda^+)_e = \{ \lambda_\rho : 0 \leq \rho \leq 1 \}$

A demonstração deste teorema será feita através de uma série de lemas.

Lema 3.21: As medidas λ_ρ definidas na eq. (3.20) são invariantes para o processo Λ^+ , se $p > q$.

Demonstração: Consequência do lema 3.8 de [2].

Para demonstrar a parte b) do teorema 3.19 seguiremos a linha da prova do teorema 1.11 de Andjel em [2], ou seja a propriedade que o número de trocas de sinal de $\zeta_t(x) - \xi_t(x)$ não cresce com t se ζ_t e ξ_t estão acoplados naturalmente.

O processo acoplado será definido em $Y^+ \times Y^+ = \bar{Y}$, terá a propriedade de que os processos marginais terão $R^+(t)$ como seus semigrupos; e as partículas das diferentes marginais que ocupam o mesmo ponto saltam juntas.

Se $f : Y^+ \times Y^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função cilíndrica, o semigrupo do processo acoplado $\bar{R}^+(t)$ é construído a partir do seguinte

gerador:

$$\bar{\Lambda}^+ f(\zeta, \xi) = \sum_{x \geq -1} q \cdot [f(\zeta_{x,x+1}, \xi_{x,x+1}) - f(\zeta, \xi)]$$

$$+ \sum_{x \geq 0} p [f(\zeta_{x,x-1}, \xi_{x,x-1}) - f(\zeta, \xi)]$$

onde

$$\xi_{x,x+1}(z) = \begin{cases} \xi(z) & \text{se } z \neq x, x+1 \\ \xi(z)-1 & \text{se } z=x \text{ e } \xi(x) > 0 \\ \xi(z)+1 & \text{se } z=x+1 \text{ e } \xi(x) > 0 \\ 0 & \text{se } z=x \text{ e } \xi(x)=0 \\ \xi(z) & \text{se } z=x+1 \text{ e } \xi(x)=0 \end{cases}$$

para calcular $\xi_{-1,0}$ e $\xi_{0,-1}$, supor $\xi(-1) \equiv \infty$

A existência do processo acoplado pode ser demonstrada usando as técnicas de Liggett [6]. Definimos agora o conjunto $I(\bar{\Lambda}^+) = \{\gamma \in M(\bar{Y}^+) : \forall h \in C(\bar{Y}^+), \int \bar{\Lambda}^+ h(\eta, \xi) \gamma(d(\eta, \xi)) = 0\}$ das medidas invariantes de $R^+(t)$.

Proposição 3.24:

- 1) Se γ é uma medida em $Y^+ \times Y^+$ que satisfaz $\gamma(\zeta \leq \xi) = 1$ então $\gamma \bar{R}^+(t)(\zeta \leq \xi) = 1$ para todo t .
- 2) Se λ_1 e $\lambda_2 \in I(\bar{\Lambda}^+)$, então existe $\gamma_0 \in I(\bar{\Lambda}^+)$ com marginais λ_1 e λ_2 .

- 3) Se λ_1 e $\lambda_2 \in I(\Lambda^+)_e$, então existe $\gamma \in I(\bar{\Lambda}^+)_e$ com marginais λ_1 e λ_2 .
- 4) Se $\gamma \in I(\bar{\Lambda}^+)_e$ e $\gamma\{(\zeta, \xi) : \zeta \geq \xi \text{ ou } \xi \geq \zeta\} = 1$, então $\gamma\{\zeta \geq \xi\} = 1$ ou $\gamma\{\xi \geq \zeta\} = 1$.

Demonstração:

- 1) Seja $h(\zeta, \xi) = 1_{\{\zeta \leq \xi\}}$. Se $\bar{R}_n(t)$ é uma sequência de semigrupos que aproximam $\bar{R}(t)$, temos que $\gamma \bar{R}_n(t)h = 0 \forall n$, e usando o teorema de Trotter-Kust [5], $\gamma \bar{R}(t)h = 0$.
- 2) Seja $\gamma = \lambda_1 \times \lambda_2$. Como as marginais de $\gamma \bar{R}(t)$ são λ_1 e $\lambda_2 \forall t$, a família de medidas,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \gamma \bar{R}(t) dt, \quad T \in (1, \infty), \text{ é comprimida}$$

Se $\{T_n\}$ é uma sequência tal que $\gamma_n = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \gamma \bar{R}(t) dt$ converge fracamente a γ_0 , é fácil ver que $\gamma_0 \in I(\bar{\Lambda}^+)$.

- 3) Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in I(\Lambda^+)$ e seja $B = \{\gamma \in I(\bar{\Lambda}^+) : \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ são marginais de } \gamma\}$. Pelo ponto 2), $B \neq \emptyset$. Como B é compacto na topologia fraca, $B_e \neq \emptyset$ pelo teorema de Krein-Millman. Seja $\lambda \in B_e$ e suponhamos $\gamma = a \gamma_1 + (1-a) \gamma_2$, onde γ_1 e $\gamma_2 \in I(\bar{\Lambda}^+)$, e $0 < a < 1$. Como as marginais de γ são extremas, γ_1 e γ_2 devem ter as mesmas marginais que γ , logo γ_1 e $\gamma_2 \in B$, o que implica que $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ porque γ é extremal em B . Então $\gamma \in I(\bar{\Lambda}^+)_e$.
- 4) Seja $A = \{(\zeta, \xi) : \zeta \geq \xi\}$. Suponhamos que $\gamma(A) = b > 0$. Então, e-

xistem duas medidas de probabilidade, γ_1 e γ_2 tq $\gamma_1(\Lambda)=1$, $\gamma_2(Y^+-\Lambda)=1$ e $\lambda = b\lambda_1+(1-b)\lambda_2$. Então $\gamma = b\gamma_1 \bar{S}(t)+(1-b)\gamma_2 \bar{S}(t)$. Pelo ponto 1) desta proposição, $\gamma_1 \bar{S}(t)(\Lambda)=1$, então $\gamma_1 \bar{S}(t)=\gamma$, e como γ é extremal, b deve ser 1. Por um raciocínio simétrico, se $b<1$ então b deve ser 0.-

Nos lemas que se seguem provaremos que o número de trocas de sinal de $\zeta_t(x)-\xi_t(x)$ não cresce com t usando a propriedade de que , se $\lambda \in I(\Lambda^+)_e$ então $\lambda=\lambda_e$ para algum ρ .

Lema 3.25: Seja $\lambda \in I(\Lambda^+)$, $\gamma_\rho \in I(\bar{\Lambda}^+)$ com marginais λ e λ_ρ . Seja f_n o número de trocas de sinal de $\zeta(0)-\xi(0), \dots, \zeta(n)-\xi(n), n \geq 1$ e $a_n = \int (f_{n+1}-f_n) d\gamma_\rho$. Então existe uma subsequencia de a_n que converge a 0.

Demonstração:

Vamos demonstrar por absurdo. Suponhamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $a_n > \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Então $\exists k \geq 0$, tal que $\int (f_{n+k}-f_n) d\gamma_\rho > 4$, $\forall n$, e portanto existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$(3.26) \quad \gamma_\rho \{ \zeta(a) > \xi(a), \zeta(a+1) = \xi(a+1), \dots, \zeta(b-1) = \xi(b-1), \zeta(b) < \xi(b) \} \\ + \gamma_\rho \{ \zeta(a) < \xi(a), \zeta(a+1) = \xi(a+1), \dots, \zeta(b-1) = \xi(b-1), \zeta(b) > \xi(b) \} \\ > \epsilon_1$$

onde $n < a < b \leq n+k$.

Seja $b=a+l$, e

$$B_l = \{ \zeta(a) > \xi(a), \zeta(a+1) = \xi(a+1), \dots, \zeta(a+l) < \xi(a+l) \}$$

$$B_{\ell}^0 = B_{\ell} \{ \zeta(a+\ell) = 0 \}.$$

Seja $h_{\ell}(\eta) = 1_{B_{\ell}}(\eta)$. Pela suposição inicial, $\gamma_{\rho}(B_{\ell}) > \epsilon_{\ell}$. Como γ_{ρ} é invariante e h_{ℓ} cilíndrica temos que

$$\int \bar{\Lambda}^+ h_{\ell}(\eta) \gamma_{\rho}(d\eta) = 0.$$

Mostraremos agora que $\gamma_{\rho}(B_{\ell-1}) > \epsilon_{\ell-1} > 0$.

Os termos negativos de $\int \bar{\Lambda}^+ h_{\ell-1}(\eta) \gamma_{\rho}(d\eta)$ estão limitadas superiormente em valor absoluto por $2 \gamma_{\rho}(B_{\ell-1})$. Um dos termos positivos é $[p \gamma_{\rho}(B_{\ell}^0)]$. Por outro lado, para todo δ existe k tal que $\lambda_{\rho}(\xi(x) > s) < \delta$, então

$$\gamma_{\rho}(\{ \zeta(a+\ell) < s \} \cap B_{\ell}) > \epsilon'$$

Podemos usar agora um raciocínio indutivo no conjunto $(\{ \zeta(a+\ell) < s \} \cap B_{\ell})$, para demonstrar que existe ϵ_2 que não depende nem de n nem de ℓ tal que

$$\gamma_{\rho}(B_{\ell}^0) > \epsilon_2$$

Este raciocínio depende só de s e da taxa de saída das partículas de $(a+\ell)$ que é igual a 1.

Temos, como consequência, que existe $\epsilon_3 = \frac{p}{2} \epsilon_2$, que também não depende nem de n nem de ℓ tal que

$$\gamma_{\rho}(B_{\ell-1}) > \epsilon_3$$

E agora, inductivamente em ℓ , existe ϵ_4 , que não depende de n tal que

$$\gamma_\rho(B_1) > \epsilon_4$$

ou seja:

$$\gamma_\rho\{\zeta(a) > \xi(a), \zeta(a+1) < \xi(a+1)\} > \epsilon_4$$

Usando a mesma indução para o conjunto

$$C_\ell = \{\zeta(a) < \xi(a), \zeta(a+1) = \xi(a+1), \dots, \zeta(a+\ell-1) = \xi(a+\ell-1), \zeta(a+\ell) > \xi(a+\ell)\}$$

deduzimos que (3.26) implica que existe ϵ_5 que não depende de n tal que

$$(3.27) \quad \gamma_\rho\{\zeta(a) > \xi(a), \zeta(a+1) < \xi(a+1)\} + \gamma_\rho\{\zeta(a) < \xi(a), \zeta(a+1) > \xi(a+1)\} > \epsilon_5 > 0$$

Consideremos agora $h_n(\zeta, \xi) = \sum_{x=1}^n |\zeta(x) - \xi(x)|$. Como h_n é cilíndrica, $\int \bar{\Lambda}^+ h_n d\gamma_\rho = 0$. Seja $n=k, r$; então os termos negativos de $\int \bar{\Lambda}^+ h_n d\gamma_\rho$ são, em valor absoluto maiores ou iguais a $2 \min(p, q) \epsilon_5 r$, mas os termos positivos são menores ou iguais a 1. Como r é arbitrário, chegamos a uma contradição.

Lema 3.28: Seja γ_ρ e f_n como no lema (3.25). Então $\gamma_\rho\{(\zeta, \xi) : f_n(\zeta, \xi) = 0\} = 1, \forall n \geq 1$.

Demonstração: Em primeiro lugar vamos demonstrar que

$$(3.29) \quad \gamma_{\rho} \{f_n \leq 2\} = 1, \quad \forall n \geq 1$$

Suponhamos que (3.39) é falso, ou seja, que existem a, b, c, d tal que $a < b < c < d$ e

$$\gamma_{\rho} \{ \zeta(a) < \xi(a), \zeta(b) > \xi(b), \zeta(c) < \xi(c), \zeta(d) > \xi(d),$$

$$\zeta(i) = \xi(i) \text{ para } i = a+1, \dots, b-1, b+1, \dots, c-1, c+1, \dots, d-1 \} > 0$$

Agora, usando um raciocínio indutivo similar ao do lema 3.26 temos

$$\gamma_{\rho} \{ \zeta(a) < \xi(a), \zeta(a+1) > \xi(a+1), \zeta(a+2) < \xi(a+2), \zeta(a+3) > \xi(a+3) \} > \epsilon > 0$$

Mas isto implica, usando novamente um argumento indutivo, que

$$(3.30) \quad \gamma_{\rho} \{ \zeta(a) < \xi(a), 1 = \zeta(a+1), \xi(a+1) = 0, 0 = \zeta(a+2) < \xi(a+2)$$

$$\zeta(a+3) > \xi(a+3) \} +$$

$$+ \gamma_{\rho} \{ \zeta(a) < \xi(a), \zeta(a+1) > \xi(a+1) = 0, 0 = \zeta(a+2), 1 = \xi(a+2),$$

$$\zeta(a+3) > \xi(a+3) \} > 0$$

Agora consideremos uma sequência $a_{n_i} \rightarrow 0$. Como f_{n_i} é cilíndrica $\int \bar{\Lambda}^+ f_{n_i} d\gamma_{\rho} = 0$. Os termos positivos desta integral são tão limitados por a_{n_i} e portanto tem limite 0, quando i tende pa

ra infinito. Mas, de acordo com a expressão (3.30), o valor absoluto dos termos negativos está limitada inferiormente por uma constante maior que zero para $n_i > a+4$. Com esta contradição fica demonstrada a eq. (3.29).

Para demonstrar o lema seja

$$g_k(\zeta, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } f_n(\xi, n) = 0 \quad \forall n \leq k \\ \min \{n : f_n(\xi, n) \geq 1\} & \text{c.c.} \end{cases}$$

Usando novamente um argumento indutivo como g_k é cilíndrica, podemos provar que se $g_k(\zeta, \xi) > 0$ então $\int \gamma_\rho(d(\zeta, \xi)) 1_{g_k(\zeta, \xi)=0} > 0$, $\forall k$, e como o número de trocas de sinal não pode crescer com t , e é no máximo 2, temos que se γ_ρ é invariante $\int \gamma_\rho(d(\zeta, \xi)) g_k(\zeta, \xi) = 0$ para todo $k \geq 0$, o que demonstra o lema.-

Demonstração do teorema 3.19

a) Seja $\lambda \in I(\Lambda^+)$. Seja $h_x(\eta) = \eta(x)$. Como $h_x \in \mathcal{D}(\Lambda^+)$, $\int \Lambda^+ h_x \lambda(d\eta) = 0$, escrevendo os termos do gerador obtemos a seguinte igualdade

$$(3.31) \quad a_x = p a_{x+1} + q a_{x-1} \quad \forall x \geq 0$$

onde $a_x = \int 1_{\eta(x) > 0} \lambda(d\eta)$, e $a_{-1} = 1$.

Reescrevendo (3.31) obtemos:

$$\begin{cases} a_0 = q + p a_1 \\ a_x = a_0 \sum_{k=0}^x \left(\frac{q}{p}\right)^k - \sum_{k=1}^x \left(\frac{q}{p}\right)^k \quad \forall x \geq 1 \end{cases}$$

e que, como $0 \leq a_x \leq 1$,

$$\frac{\sum_{k=1}^x \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\sum_{k=0}^x \left(\frac{q}{p}\right)^k} \leq a_0 \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^x \left(\frac{q}{p}\right)^k} + \frac{\sum_{k=1}^x \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\sum_{k=1}^x \left(\frac{q}{p}\right)^k}$$

Mas $q \geq p \Rightarrow a_0 = 1$ e $a_x = 1 \quad \forall x$, o que implica que $\lambda\{\eta(x)=0\}=0$, e por indução que $\lambda\{\eta(x)=k\}=0 \quad \forall k$. Logo λ não é uma medida de probabilidade em Y . Ou seja, só existem medidas invariantes quando $p > q$.

b) Primeiro vamos mostrar que se $\lambda \in I(\Lambda^+)_e$, existe ρ_0 tq $\lambda \leq \lambda_{\rho}$ para $\rho > \rho_0$ e $\lambda \geq \lambda_{\rho}$ para $\rho < \rho_0$, onde λ_{ρ} foi definida no enunciado deste teorema. Seja ρ tq $0 \leq \rho \leq 1$. Então, pela proposição 3.24.2, existe $\gamma_{\rho} \in I(\bar{\Lambda}^+)$ com marginais λ e λ_{ρ} . Pelo lema 3.28 temos que $\gamma_{\rho}\{\eta \geq \xi \text{ ou } \xi \geq \eta\} = 1$. Seja agora $a_{\rho} = \gamma_{\rho}\{\eta \geq \xi\}$, e suponhamos que $0 < a_{\rho} < 1$; então, $\gamma_{\rho} = a_{\rho} \gamma_{\rho}^1 + (1-a_{\rho}) \gamma_{\rho}^2$, usando a mesma argumentação do lema 3.24.3. Note-se que γ_{ρ}^1 e $\gamma_{\rho}^2 \in I(\bar{\Lambda}^+)$ e que $\gamma_{\rho}^1\{\eta \geq \xi\} = 1$, $\gamma_{\rho}^2\{\eta \leq \xi\} = 1$. Sejam λ_{ρ}^1 e λ_{ρ}^2 as segundas marginais de γ_{ρ}^1 e γ_{ρ}^2 , respectivamente. Suponhamos que $0 < a_{\rho} < 1$; então λ_{ρ}^1 e λ_{ρ}^2 são absolutamente contínuas em relação a λ_{ρ} . E como, pela lei dos grandes números,

$$\lambda_{\rho} \{ \eta : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n \eta(x) = \frac{\rho}{1-\rho} \} = 1, \text{ temos que}$$

$$\lambda_{\rho}^i \{ \eta : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n \eta(x) = \frac{\rho}{1-\rho} \} = 1, \quad i=1,2$$

Por outro lado, como $\lambda_{\rho}^1 \leq \lambda \leq \lambda_{\rho}^2$, também vale que

$$\lambda \{ \eta : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{x=0}^n \eta(x) = \frac{\rho}{1-\rho} \}$$

Portanto, para $\lambda \in I(\Lambda^+)_e$ existe no máximo um $\rho \in [0,1]$ para o qual $0 < a_{\rho} < 1$. Então, existe $\rho_0 \in [0,1]$ tal que $\lambda \geq \lambda_{\rho}$ para $\rho < \rho_0$ e $\lambda \leq \lambda_{\rho}$ para $\rho > \rho_0$, portanto $\lambda = \lambda_{\rho}$ e $I(\Lambda^+)_e = \{ \lambda_{\rho} : 0 \leq \rho \leq 1 \}$

Demonstração do teorema 3.4 b) e c)

Em primeiro lugar, segue do teorema (3.19) a) e do lema (3.18) que se $p \geq q$, $I_{\infty}^{-} = \emptyset$ e que se $q \geq p$, $I_{\infty}^{+} = \emptyset$. Suponhamos que $p > q$, e vejamos que todas as medidas invariantes extremas em M_{∞}^{+} são as descritas na eq. (3.7).

Observe-se que $M_{\infty}^{+} = \bigcup_{n \geq 0} A_n$, onde A_n é o conjunto de medidas que concentram massa no conjunto Λ_n , definido na eq. (3.7.c). Temos, também, que $\gamma \in A_n \Rightarrow \gamma S(t) \in A_n, \forall t$.

Como consequência do teorema (3.19.b) e do lema 3.18 se $\gamma \in A_0$ então $\gamma \in \{ \gamma_{\rho,0}^{+} : 0 \leq \rho \leq 1 \}$. Para completar a demonstração do teorema basta deslocar a origem de coordenadas do pro-

cesso $R^+(t)$, de tal forma que o nascimento e morte de partículas ocorra no ponto $-n$, e deste modo, obter que $A_n \quad I = \{\gamma_{\rho,n}^+ : 0 \leq \rho \leq 1\}$ $\forall n \geq 0$. O caso $p < q$ segue por simetria.

CAPÍTULO IV

DOMÍNIOS DE ATRAÇÃO

Neste capítulo consideraremos um caso dos domínios de atração das medidas invariantes, quando a medida inicial é invariante por traslações.

Seja $S = \mathbb{Z}$, Ω , $S(t)$, $\hat{\Omega}$, $\hat{S}(t)$ como no capítulo 3.

Seja $\mu \in S$, $\alpha(\mu) = \int \mu(d\eta) \eta(o)$.

Teorema 4.1. Se $\mu \in S$, é ergódica com $\alpha(\mu) = \rho_o$ então $\hat{\mu} \hat{S}(t) \Rightarrow \hat{\mu}_{\rho_o}$, onde $\hat{\mu}_{\rho_o}$ é a medida de Palm da medida produto de Bernoulli com parâmetro ρ_o .

Demonstração. Se $\mu \in S$, $\alpha(\mu) = \rho_o$ e $S(t)$ é construído com $p(x, x+1)=p$, $p(x, x-1)=q$, $p+q=1$, temos que por [1]

$$\mu S(t) \xRightarrow[t]{} \nu_{\rho}.$$

Mas, como S é homeomorfo a $\hat{S}$ para a topologia fraca,

temos que $(\mu S(t))^{\wedge}_t \Rightarrow \hat{v}_{\rho}$.

E, pelo teorema 2.3 $\hat{\mu S}(t) = (\mu S(t))^{\wedge}_t \Rightarrow \hat{\mu S}(t) \Rightarrow \hat{v}_{\rho}$.-

Abstract

In this work the simple exclusion process "as seen from a tagged particle" is studied. The existence of the process is proved and sets of invariant measures for the process are determined. Interesting measures appear in the one dimensional case.

- 8 - Liggett, T.M. The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles. Lecture Notes in Mathematics 598, 249-447 (1977).
- 9 - Liggett, T.M. An infinite particle system with zero range interactions. Annals of Probability 1, 240-253
- 10 - Lumen and Philips. Dissipative operators in Banach Space. Pacific J. Math. 11, 679-698 (1961).
- 11 - Neveu, J. Processus ponctuels. Lecture Notes in Mathematics, 598, 249-447 (1977).
- 12 - Port, S.C. and Stone, J.S. Infinite Particle Systems. Transactions of the American Math. Society, 178, 307-340 (1973).
- 13 - Spitzer F. Interaction of Markov processes. Advances in Math. 5, 246-290 (1970).
- 14 - Yosida, K. Functional Analysis. Springer Verlag, 1966.

ÍNDICE

	Página
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - O PROCESSO DE EXCLUSÃO SIMPLES MAR- CADO.	2
CAPÍTULO II - O CASO DE INVARIÂNCIA POR TRASLA- ÇÃO.	12
CAPÍTULO III- O CASO DE INTERAÇÃO COM O VIZINHO MAIS PRÓXIMO EM $\mathbb{Z}$	21
CAPÍTULO IV - DOMÍNIOS DE ATRAÇÃO.	41
BIBLIOGRAFIA	43