ANÁLISE SEQUENCIAL ASSINTÓTICA
PARA ELIPSÓIDES DE CONFIANÇA
DE TAMANHO FIXO

JOSEMAR RODRIGUES

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
ESTATÍSTICA

ORIENTADOR:

PROF. DR. CARLOS ALBERTO BARBOSA DANTAS

- SÃO PAULO, JANEIRO DE 1977 -

Aos meus pais,
à minha esposa,
e aos meus filhos

Eric

e

Alex,

pelo incentivo

AGRADECIMENTOS

Ao terminarmos este trabalho, não poderíamos deixar de agradecer os meus colegas do Departamento de Estatística, que de uma forma direta ou indireta nos auxiliaram.

Em especial, ao Professor Dr. Carlos Alberto Barbosa Dantas, que possibilitou minha vinda a este Departamento, pelos cursos ministrados que foram úteis para a minha formação e pela orientação e incentivo durante o desenvolvimento desta tese.

Agradeço ao colega Eduardo Bonilha de Toledo Leite que, gentilmente elaborou o programa para o computador.

Quero agradecer, também, ao Prof. Dr. Djalma Galvão Carneiro Pessoa pelos meus primeiros contactos com a área de Análise Sequencial Assintótica que foram indispensáveis para a formulação do problema aqui proposto.

Ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira, os meus agradecimentos pelo excelente trabalho de datilografia.

ABSTRACT

Chow and Robbins [4] have considered the problem of finding a confidence interval of prescribed width $2d$ and prescribed coverage probability α for the unknown mean μ of a population having fixed distribution function F with unknown, but finite, variance $\sigma^2 > 0$. Since no fixed sample procedure can possibly work, they consider a certain class of sequential procedures and show that the members of this class are asymptotically "consistent" (i.e., cover μ with probability α) and asymptotically "efficient" (i.e., have expected sample size equal to the smallest sample size one could use if σ^2 were known) as d goes to zero. The purpose of this dissertation is to extend these results to the problem of obtaining confidence ellipsoids with given length and confidence level for the parameter θ of a family distributions P_θ , $\theta \in \Theta$. We wish to find a region R in $\Theta \subset R^p$ (p -dimensional Euclidean space) such that:

- i) maximum diameter of $R \leq 2d$;
- ii) $P_\theta[\theta \in R] \geq \alpha$, $\forall \theta \in \Theta$.

Several authors, including Albert [1], Gleser [2] and Srivastava [11], have contributed to the solution of this problem. In [5], Gleser applied the stopping rule of Chow and Robbins to the problem of constructing fixed size confidence sets for linear regression parameter. Gleser's confidence regions are spheres, centered at the least squares estimate of the regression parameter. In this dissertation we consider sequential procedures whose sample size N depends on d ; $N(d) \rightarrow \infty$ a.s. as $d \rightarrow 0$.

We construct a confidence ellipsoid $R(\hat{\theta}_n; d)$ such that:

i) the maximum diameter of $R(\hat{\theta}_n; d) = 2d$;

ii) $\lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta}[\theta \in R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)] = \alpha$,

where $\hat{\theta}_n$ is the maximum likelihood estimator of θ . The following sequential procedure is proposed in this dissertation:

a) Stopping time:

$$N(d) = \inf \left\{ n \ (n \geq n_0) : n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2} \right\},$$

where $\lambda(\theta)$ = the largest eigenvalue of the Fisher's information matrix $A(\theta)$, a is such that

$$P_{\theta}[\chi^{(2)}(p) \leq a^2] = \alpha$$

and n_0 is a fixed integer $> p$.

b) Confidence ellipsoid:

$$R(\hat{\theta}_n; d) = \{ \theta : (\hat{\theta}_n - \theta)' \lambda(\hat{\theta}_n) A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta) \leq d^2 \}, \text{ where } \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p.$$

The procedure: Take $N(d)$ observations and use $R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)$ as the confidence region.

This sequential procedure is obtained under a strong assumption concerning the large sample behavior of Fisher's information matrix $A(\hat{\theta}_n)$. Specifically, it is assumed that

$$A(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{a.s. P_{\theta}} A(\theta).$$

The stopping time depend, in fact, upon the eigenvalues of $A(\hat{\theta}_n)$. The following properties are proved:

a) $\lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta}[\theta \in R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)] = \alpha$ (asymptotic "consistency");

$$b) \lim_{d \rightarrow 0} \frac{E_{\theta}(N(d))}{n_0^*} = 1, \text{ where } n_0^* = \frac{a^2 \lambda(\theta)}{d^2} \text{ (asymptotic "efficiency").}$$

In the appendix we present the results of a simulation in which the performance of the sequential procedure for normal population is investigated. Tables are constructed with numerical computation of the procedure proposed for several values of d and σ . Of special interest of course are the values of

$$\beta = \inf_d P_{\theta_0} [\theta_0 \in R(\theta_{N(d)}; d)], \text{ where } \theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2),$$

which was displayed in table for various values n_0 . There is not a unique sequential procedure which jointly reduces the number of observations and increases β due to ignorance θ_0 .

Since we would like to have β as large as possible and n as small as possible the compromise should be determined by the conditions of the problem which the researcher is trying to solve.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	1
CAP.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	7
CAP.2 - PRELIMINARES E NOTAÇÕES.	9
CAP.3 - SUPOSIÇÕES SOBRE A FUNÇÃO DE DENSIDADE $f(x; \theta)$	12
CAP.4 - UM PROCEDIMENTO SEQUENCIAL	14
CAP.5 - PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DO PROCEDIMENTO SEQUENCIAL S_d	18
CAP.6 - APLICAÇÕES DO PROCEDIMENTO SEQUENCIAL $S_d = \{N(d), \{\hat{\theta}_n\}_{n>1}\}$	31
6.1 - Uma aplicação em testes de hipóteses	31
6.2 - Um procedimento sequencial assintótico para comparar uma categoria experimental com uma categoria de con- trole.	32
6.3 - Método geral para obtenção de um procedimento sequen- cial	36
CAP.7 - UM LIMITE INFERIOR PARA MÉDIA AMOSTRAL ASSINTÓTICA	39
CAP.8 - UM PROCEDIMENTO ASSINTOTICAMENTE MINIMAX	47
APÊNDICE I - UMA SIMULAÇÃO DO PROCEDIMENTO SEQUENCIAL S_d PARA POPU- LAÇÃO NORMAL.	49
APÊNDICE II - PROGRAMA UTILIZADO NA SIMULAÇÃO DO PROCEDIMENTO SEQUEN- CIAL S_d PARA POPULAÇÃO NORMAL	56
REFERÊNCIAS.	60

INTRODUÇÃO

O problema de construir regiões de confiança sequencialmente foi considerado inicialmente, por Wald em [14] da seguinte forma:

Seja $\{X_i\}$ (1,2,...) uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição dependendo do parâmetro desconhecido θ , pertencente ao espaço paramétrico Θ . Segundo Wald, o problema de construir regiões de confiança sequencialmente está caracterizado por uma regra de parada, para decidir se continuamos ou não, o processo de amostragem e, por uma função das observações cujos valores estão em uma classe especificada de subconjuntos de Θ . A classe de subconjuntos de Θ é escolhida a priori, dependendo dos objetivos da estimação. Por exemplo, podemos estar interessados na classe de todos os intervalos de comprimento fixo $2d$ ($d>0$) ou na classe de todos elipsóides ou esferas de diâmetro fixo $2d$. A condição exigida é que a probabilidade que um elemento desta classe contenha o parâmetro θ seja maior ou igual ao coeficiente de confiança α fixo a priori para todo $\theta \in \Theta$. Diversos autores contribuíram para a solução deste problema como Stein e Wald em [9], Chow e Robbins em [4], Pessoa em [8], Albert em [11], Gleser em [5] e Srivastava em [10].

Em [9], Stein e Wald introduziram um critério de otimização que consiste em minimizar o limite superior (em relação a média) do número médio de observações. São considerados na bibliografia citada três critérios de otimização que são os seguintes:

- i) Um procedimento sequencial é ótimo se minimiza a $P_0(\theta \notin I_N) + E_0(N)$, onde $I_N = (Y_N - d, Y_N + d)$, N é uma regra de parada e Y_n é uma estatística que depende das n primeiras observações.
- ii) Um procedimento sequencial é ótimo se maximiza a $P_0(\theta \in I_N)$ sujeito a condição que a $E_0(N) \leq k$, $\forall \theta$.
- iii) Um procedimento sequencial é ótimo se minimiza a $E_0(N)$ sujeito a condição que $P_0(\theta \in I_N) \geq \alpha$, $\forall \theta$.

Em [9], Stein e Wald utilizaram o critério (ii) para obter um procedimento ótimo para o problema de construir sequencialmente um intervalo de confiança de tamanho fixo, para a média de uma população normal com variância conhecida e coeficiente de confiança α . Motivado por [9], Pessoa introduziu em [8] o conceito de procedimento assintoticamente minimax. Para obtê-lo utilizou o critério (iii) para d tendendo a zero. Em [4] Chow e Robbins introduziram uma teoria sequencial assintótica para o problema de construir intervalos de confiança, de tamanho fixo $2d$ ($d > 0$) e, coeficiente de confiança α para média de uma população uni-dimensional com variância desconhecida. A solução do seguinte problema motivou o procedimento proposto em [4]:

Seja $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e, identicamente distribuídas. Suponhamos que a média μ da população é desconhecida e, queremos estimar μ através de um intervalo de confiança de comprimento $2d$ e probabilidade de cobertura α . Se a variância σ^2 é conhecida e d é pequeno em relação a σ^2 , o intervalo de con-

fiança é construído da seguinte forma:

Definamos

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ e } S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

e escolhemos a t.q.

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} d(x) = \alpha.$$

Seja n = menor inteiro $\geq \frac{a^2 \sigma^2}{d^2}$. Tomamos então n observações da população e construímos o intervalo $I_n = (\bar{X}_n - d, \bar{X}_n + d)$.

É fácil verificar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\mu}(\mu \in I_n) = \alpha.$$

Se a variância σ^2 é desconhecida, motivados pela solução anterior Chow & Robbins definiram o seguinte procedimento sequencial:

N = menor $n \geq n_0$ tal que $n \geq \frac{a^2 S_n^2}{d^2}$ e estimamos μ através do intervalo $I_N = (\bar{X}_N - d, \bar{X}_N + d)$.

Eles estudaram o comportamento assintótico deste intervalo quando $d \rightarrow 0$, e provaram que:

$$\lim_{d \rightarrow 0} P_{\mu}[\mu \in I_N] = \alpha \quad (\text{consistência assintótica})$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{d^2 E_{\mu}(N)}{a^2 \sigma^2} = 1 \quad (\text{eficiência assintótica}).$$

Em [8], Pessoa estudou a consistência assintótica no sentido de Chow & Robbins para o problema de construir um intervalo de confiança de tamanho fixo $2d$ para o parâmetro θ de uma distribuição de probabilidade P_{θ} , ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$), com coeficiente de confiança fixo. A solução proposta em [8] para es

te problema é a seguinte:

$$N = \inf \left\{ n \geq n_0 \text{ tal que } n \geq \frac{a^2}{d^2 A(\hat{\theta}_n)} \right\},$$

onde

$$A(\theta) = E_{\theta} \left(\frac{d \log f(x; \theta)}{d\theta} \right)^2 \text{ e } f(x; \theta)$$

é a função de densidade da variável aleatória X em relação a medida de Lebesgue. Se $N=K$, então estimamos θ através do intervalo $(\hat{\theta}_K - d, \hat{\theta}_K + d)$, onde $\hat{\theta}_K$ é o estimador de máxima verossimilhança para θ baseado nas K primeiras observações. Este procedimento proposto com algumas modificações introduzidas é assintoticamente ótimo (ver [8]).

Em [6], Khan estudou a consistência assintótica e a eficiência assintótica no sentido de Chow & Robbins para o problema de obter intervalos de confiança de tamanho $2d$ para θ_1 em presença de um parâmetro desconhecido θ_2 , com probabilidade de cobertura α . Sob condições de regularidades, Khan definiu o seguinte procedimento: observamos $X_1, X_2, \dots$ sequencialmente e paramos no instante n tal que

$$n \geq \frac{a^2}{d^2} \lambda_{11}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$$

e estimamos θ_1 através do intervalo $I_n = (\hat{\theta}_n - d, \hat{\theta}_n + d)$, onde $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são estimadores de máxima verossimilhança de θ_1 e θ_2 , respectivamente, $(\lambda_{ij}(\theta_1, \theta_2)) = (l_{ij})^{-1}$,

$$l_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2 \log f(x; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], \quad i, j=1, 2 \text{ e } f(x; \theta_1, \theta_2)$$

é a função de densidade da variável aleatória X em relação a medida de Lebesgue. Khan provou que:

$$\lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta}[\theta_1 \in I_N] = \alpha \quad (\text{consistência assintótica})$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{E(N)}{n_0} = 1 \quad (\text{eficiência assintótica}),$$

$$\text{onde } n_0 = \frac{a^2}{d^2} \lambda_{11}(\theta_1, \theta_2).$$

Para provar a eficiência assintótica ele necessitou da condição $E_{\theta}[\sup_n \lambda_{11}(\hat{\theta}_1(n), \hat{\theta}_2(n))] < \infty$. O procedimento proposto por Khan é assintoticamente minimax (ver [8]). Motivado por [6] propõe-se neste trabalho o problema de construir elipsóides de tamanho fixo $2d$ para o parâmetro $\theta, \theta \in \mathbb{R}^p$ de uma distribuição de probabilidade P_{θ} . Diversos autores têm contribuído para a solução deste problema como Albert em [1], Gleser em [5] e Srivastava em [10]. Albert em [1] estendeu a teoria assintótica de Chow & Robbins para o problema de construir elipsóides de tamanho fixo para os parâmetros de um modelo de regressão. A regra de parada proposta por Albert depende dos auto-valores da matriz de covariância dos estimadores de mínimos quadrados. Em [5], Gleser aplicou a regra de parada de Chow & Robbins para o problema de construir esferas de confiança de tamanho fixo para os parâmetros de um modelo de regressão. As esferas de Gleser estão centradas nos estimadores de mínimos quadrados. Em [10], Srivastava estendeu a teoria assintótica de Chow & Robbins para o problema de construir regiões de confiança de tamanho fixo e probabilidade de cobertura α para o vetor de médias de uma população multivariada.

Neste trabalho procura-se estender alguns resultados obtidos em [6] e [8] para o problema de construir elipsóides de tamanho fixo com probabilidade de cobertura α .

O trabalho está dividido em 8 capítulos e mais dois apêndices. No Capítulo 1, formulamos o problema e no capítulo

lo 2 introduzimos notações e alguns resultados que são utilizados. O capítulo 3 contém as suposições sobre a função de densidade para garantir a existência e consistência forte do estimador de máxima verossimilhança. O capítulo 4 contém definições e um procedimento sequencial para construir elipsóides. No capítulo 5, introduzimos as propriedades assintóticas no sentido de Chow & Robbins. No capítulo 6, damos uma aplicação do procedimento proposto no capítulo 4, para o problema de testes de hipóteses sequenciais e comparação de 2 populações. Motivado por Khan [6], introduzimos neste capítulo um método geral para obtenção de regras de parada para elipsóides de confiança de tamanho fixo, em presença de parâmetros desconhecidos. No capítulo 7, fizemos uma extensão das demonstrações de alguns lemas da seção 2 de [8] para obter um limite inferior para a média amostral assintótica de procedimentos que tem o limite de sua probabilidade de cobertura não inferior a α quando $d \rightarrow 0$, sugerindo desta forma o procedimento proposto no capítulo 4. No capítulo 8 provamos que o procedimento proposto no capítulo 4 é assintoticamente minimax quando o maior auto-valor da matriz de informação de Fisher é limitado superiormente em θ . Finalmente, no apêndice 1, com o objetivo de observar o comportamento assintótico do procedimento sequencial, proposto no capítulo 4, foi feita uma simulação do procedimento sequencial para uma população normal. E, no apêndice 2, temos o programa utilizado na simulação.

1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Na introdução apresentamos informalmente o problema de construir elipsóides de tamanho fixo com probabilidade de cobertura α . Neste capítulo vamos formular o problema de uma forma mais precisa.

Seja $X_1, X_2, \dots$, uma sequência de variáveis aleatórias, identicamente distribuídas, definidas no mesmo espaço mensurável (Ω, A) , onde Ω é um conjunto abstrato e A é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Suponhamos que X_1 está distribuída de acordo com uma lei de probabilidade P_θ em (R, B) onde R é a reta real, B é a σ -álgebra de Borel em R e $\theta \in \Theta \subset R^p$ (R^p é o espaço Euclidiano de dimensão p e Θ , o espaço paramétrico). Neste trabalho vamos supor que P_θ está dominada por alguma medida μ σ -finita em (R, B) para todo $\theta \in \Theta$. Seja

$$\frac{dP_\theta}{d\mu} = f(x; \theta)$$

a função de densidade de X_1 se θ é o parâmetro verdadeiro. Deseja-se obter um elipsóide de confiança R_n no espaço Euclidiano de dimensão p tal que $P_\theta(\theta \in R_n) = \alpha$ e o eixo maior de R_n seja menor ou igual a $2d$. Como um procedimento não sequencial não satisfaz as condições exigidas, consideraremos um procedimento sequencial cujo tamanho da amostra (variá-

vel aleatória) N depende de d e

$$\lim_{d \rightarrow 0} N(d) = \infty \text{ (q.t.p.)}.$$

Portanto, podemos reformular o problema, do ponto de vista sequencial, da seguinte forma: deseja-se obter um elipsóide de confiança R_n tal que

- i) o eixo maior de $R_n \leq 2d$.
- ii) $\lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta}(\theta \in R_{N(d)}) = \alpha$.

2. PRELIMINARES E NOTAÇÕES

Indicamos por $\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ o estimador de máxima-verossimilhança de θ baseado nas n primeiras observações, isto é $\hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$ é definido como sendo um valor de θ tal que:

$$\sum_{i=1}^n \phi(x_i; \hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)) = \max_{\theta \in \Theta} \left\{ \sum_{i=1}^n \phi(x_i; \theta) \right\},$$

onde

$$\phi(x_i; \theta) = \log f(x_i; \theta) \quad \text{e} \quad x_i = X_i(\omega) \quad \text{para} \quad \omega \in \Omega, \quad (i=1, \dots, p).$$

Indicamos por $E_\theta(X)$ o valor esperado de X quando θ é o parâmetro verdadeiro, isto é,

$$E_\theta(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x; \theta) \mu(dx).$$

Indicamos por $A(\theta) = (\ell_{ij}(\theta))$, $i, j=1, \dots, p$, a matriz de informação de Fisher, onde

$$\ell_{ij}(\theta) = -E_\theta \left[\frac{\partial^2 \phi(X_1; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] < \infty, \quad i, j=1, \dots, p \quad \text{e} \quad \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$$

Indicamos por $A(\hat{\theta}_n)$ a matriz de Fisher onde θ é

substituído por $\hat{\theta}_n$, $\lambda_j(\theta)$, ($j=1, \dots, p$) os auto-valores da matriz $A(\theta)$ e $\lambda_j(\hat{\theta}_n)$, ($j=1, \dots, p$) os auto-valores da matriz $A(\hat{\theta}_n)$. Indicamos por $N(\mu, V)$ a distribuição normal multivariada com média μ e matriz de covariância V . Indicamos por

$$\|B\| = \sqrt{\lambda_{\max}(B'B)}$$

a norma da matriz B , onde B é uma matriz qualquer e $\lambda_{\max}(B'B)$ é o maior auto-valor da matriz $B'B$.

LEMA 2.1

Se

$$A(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{q.t.p.P_\theta} A(\theta), \text{ então } \lambda_j(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{q.t.p.P_\theta} \lambda_j(\theta), \quad (j=1, \dots, p).$$

PROVA

Seja $(-1)^P Y^P + c_1(\theta) Y^{P-1} + \dots + c_{p-1}(\theta) Y + c_p(\theta) = 0$ o polinômio característico de $A(\theta)$, onde $c_i(\theta)$, ($i=1, \dots, p$) é obtido como somas e produtos de elementos da matriz $A(\theta)$ e

$$(-1)^P Y^P + c_1(\hat{\theta}_n) Y^{P-1} + \dots + c_{p-1}(\hat{\theta}_n) Y + c_p(\theta) = 0$$

o polinômio característico da matriz $A(\hat{\theta}_n)$, onde $c_i(\hat{\theta}_n)$ ($i=1, \dots, p$) é obtido como somas e produtos de elementos da matriz $A(\hat{\theta}_n)$. Como

$$A(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{q.t.p.P_\theta} A(\theta) \Rightarrow c_i(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{q.t.p.P_\theta} c_i(\theta) \text{ para } i=1, \dots, p$$

Como

$$(-1)^P (\lambda_j(\hat{\theta}_n))^{P+c_1(\hat{\theta}_n)} (\lambda_j(\hat{\theta}_n))^{P-1} + \dots + c_p(\hat{\theta}_n) = 0$$

$$\Rightarrow (-1)^P (\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_j(\hat{\theta}_n))^{P+c_1(\theta)} (\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_j(\hat{\theta}_n))^{P-1} + \dots + c_p(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_j(\hat{\theta}_n)$$

é o auto-valor da matriz $A(\theta)$ para $j=1, \dots, p$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_j(\hat{\theta}_n) = \lambda_j(\theta), \quad j=1, \dots, p. \quad (\text{q.t.p. } P_\theta)$$

3. SUPOSIÇÕES SOBRE A FUNÇÃO DE DENSIDADE

$$\underline{f(X;\theta)}$$

De acordo com [3], vamos fazer as seguintes suposições:

- a: θ é um subconjunto aberto de R^p ;
- b: $\frac{\partial \phi(x;\theta)}{\partial \theta_j}$, $\frac{\partial^2 \phi(x;\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ existem e são contínuas em θ para todo x ($i, j=1, \dots, p$);
- c: $E_\theta \left[\sup \left\{ \left| \frac{\partial^2 \phi(X_1; s)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right| : \|s - \theta\| < \epsilon(\theta), s \in \theta \right\} \right] < \infty$ para algum $\epsilon(\theta)$ para $\forall \theta \in \theta$ e $i, j=1, 2, \dots, p$;
- d: $E_\theta \left[\sup \left\{ \phi(X_1; s) - \phi(X_1; \theta) : \|s - \theta\| > \epsilon, s \in \theta \right\} \right] < 0$ para $\forall \theta \in \theta$ e $\epsilon > 0$;
- e: $l_{ij}(\theta)$ é contínua em θ para todo $\theta \in \theta$;
- f: A matriz $A(\theta)$ é definida positiva para $\forall \theta \in \theta$.

OBSERVAÇÕES:

- i) As suposições b e c implicam que:

$$E_\theta \left[\frac{\partial \phi(X_1; \theta)}{\partial \theta_j} \right] = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq p \text{ e}$$

$$l_{ij}(\theta) = -E_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \Phi(X_1; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] = E_{\theta} \left[\frac{\partial \Phi(X_1; \theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \Phi(X_1; \theta)}{\partial \theta_j} \right].$$

- ii) A suposição d implica na existência e consistência forte do estimador de máxima-verossimilhança.
- iii) Como $A(\theta)$ é simétrica, então

$$A(\theta) = \sum_{j=1}^p \lambda_j(\theta) H_j H_j'$$

onde H_j são auto-vetores (colunas) normalizadas da matriz $A(\theta)$. Baseado na decomposição expectral da matriz $A(\theta)$ definimos

$$A^{1/2}(\theta) = \sum_{j=1}^p \lambda_j^{1/2}(\theta) H_j H_j'.$$

Como $\lambda_j(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{q.t.p.} \lambda_j(\theta)$ ($j=1, \dots, p$), então

$$A^{1/2}(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{q.t.p.} A^{1/2}(\theta).$$

4. UM PROCEDIMENTO SEQUENCIAL

O objetivo desta seção é construir um elipsóide de confiança de tamanho fixo para o parâmetro $\theta \in \Theta$, através de um procedimento sequencial. Para isto vamos provar o seguinte teorema:

TEOREMA 4.1

Sob as suposições a - f temos que

$$(\hat{\theta}_n - \theta) n A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta)' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \chi^{(2)}(p).$$

PROVA:

Sob as suposições a - f temos por [13] que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, A^{-1}(\theta)).$$

Seja

$$U_n = A^{1/2}(\hat{\theta}_n) n^{1/2} (\hat{\theta}_n - \theta)', \text{ logo } (\hat{\theta}_n - \theta) n A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta)' = U_n' U_n.$$

Como $A^{1/2}(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.t.p.} A^{1/2}(\theta)$, então $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} N(0, I)$, logo

$$U_n' U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \chi^{(2)}(p).$$

DEFINIÇÃO 4.1 - Definimos como *elipsóide de centro em $x_0 \in \mathbb{R}^p$* a seguinte região F_K em $\mathbb{R}^p$:

$$F_K = \left\{ x \in \mathbb{R}^p: (x-x_0)G(x-x_0)' = K^2 \right\},$$

onde G é uma matriz *simétrica, definida positiva* e K uma constante.

OBSERVAÇÃO:

Por [1] o comprimento do *semi-eixo maior* do elipsóide F_K é a raiz quadrada do maior auto-valor da matriz $K^2 G^{-1}$.

Motivado por [1] vamos introduzir as seguintes definições:

DEFINIÇÃO 4.2 - Uma *região de confiança em θ* com *coeficiente de confiança α* (para n suficientemente grande) é definida como:

$$R(\hat{\theta}_n; a) = \left\{ \theta \in \Theta: (\hat{\theta}_n - \theta) n A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta)' \leq a^2 \right\},$$

onde a é escolhido tal que $P_\theta[\chi^{(2)}(p) \leq a^2] = \alpha$.

OBSERVAÇÃO:

Pelo teorema 4.1 $P_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta) n A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta)' \leq a^2] \approx \alpha$ para n suficientemente grande.

DEFINIÇÃO 4.3 - Definimos como *tamanho da região de confiança $R(\hat{\theta}_n; a)$* com *coeficiente de confiança α* , ao comprimento do eixo maior do elipsóide definido pela equação

$$(\hat{\theta}_n - \theta) n A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta)' = a^2$$

OBSERVAÇÃO: Pela observação da definição 4.1 concluímos que o tamanho da região de confiança $R(\hat{\theta}_n; a)$, é o dobro da raiz quadrada do maior auto-valor da matriz $a^2 (n A(\hat{\theta}_n))^{-1}$, ou melhor, é igual a

$$2 \sqrt{\frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{n}},$$

onde

$$\lambda(\hat{\theta}_n) = \lambda_{\max}(A^{-1}(\hat{\theta}_n)) = \max\{\lambda_1^{-1}(\hat{\theta}_n), \dots, \lambda_p^{-1}(\hat{\theta}_n)\}.$$

Notamos que o tamanho da região de confiança é uma variável aleatória, logo podemos ter grandes regiões. Como estamos interessados em construir regiões de confiança de tamanho fixo, vamos adotar a seguinte regra:

Continuamos a amostragem para cada n quando

$$\sqrt{\frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{n}} > d$$

e paramos no primeiro instante em que

$$\sqrt{\frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{n}} \leq d$$

ou que é equivalente, ao primeiro instante n em que

$$n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2}.$$

Logo podemos definir $N(d)$ como sendo a seguinte regra:

$$N(d) = \inf\left\{n \ (n \geq n_0) : n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2}\right\},$$

onde n_0 é um inteiro fixo $> p$.

DEFINIÇÃO 4.4 - Definimos como *elipsóide de confiança* a seguinte região em θ :

$$R(\hat{\theta}_n; d) = \left\{ \theta \in \Theta : (\hat{\theta}_n - \theta)' \lambda(\hat{\theta}_n) A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta) \leq d^2 \right\}.$$

OBSERVAÇÕES:

1. Concluimos da definição 4.3, que o tamanho do elipsóide de confiança $R(\hat{\theta}_n; d)$ é o comprimento do eixo maior do elipsóide definido pela equação:

$$(\hat{\theta}_n - \theta) \lambda(\hat{\theta}_n) A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta)' = d^2.$$

2. Concluimos pela observação da definição 4.1 que o tamanho do elipsóide de confiança $R(\hat{\theta}_n; d)$ é igual a

$$2 \cdot \sqrt{\frac{d^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{\lambda(\hat{\theta}_n)}} = 2d,$$

logo $2d$ é o tamanho do elipsóide de confiança $R(\hat{\theta}_n; d)$.

3. Chamamos $\hat{\theta}_n$ de centro do elipsóide de confiança $R(\hat{\theta}_n; d)$.

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL:

Um elipsóide de confiança de tamanho fixo para $\theta \in \Theta$ é construído através de um *procedimento sequencial* que é caracterizado pela regra $N(d)$ e pelos *estimadores* $\{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1}$ que são os centros dos elipsóides $R(\hat{\theta}_n; d)$. Em outras palavras, se $N(d) = K$, estimamos o parâmetro $\theta \in \Theta$ através do elipsóide de confiança $R(\hat{\theta}_K; d)$.

NOTAÇÃO:

$$S_d = \{N(d); \{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1}\}.$$

Na seção seguinte iremos estudar algumas propriedades asintóticas do *procedimento sequencial* S_d .

5. PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DO PROCEDIMENTO SEQUENCIAL S_d

Uma propriedade importante é dada pelo seguinte lema:

LEMA 5.1

Sob as suposições a - f o procedimento sequencial

$$S_d = \{N(d); \{\hat{\theta}_n\}_{n>1}\}$$

termina com propriedade 1.

PROVA

$$P_\theta[N(d)=\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta[N(d) > n] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta\left[n < \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2}\right]$$

Sob as suposições a - g e pelo lema 2.1 temos que

$$\lambda(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{q.t.p.(P_\theta)} \lambda(\theta),$$

onde $\lambda(\theta) = \max\{\lambda_1^{-1}(\theta), \dots, \lambda_p^{-1}(\theta)\}$ logo, $P_\theta[N(d)=\infty] = 0$.

Para provar algumas propriedades assintóticas do procedimento sequencial $S_d = \{N(d); \{\theta_n\}_{n>1}\}$, vamos enunciar os lemas 5.2 e 5.3 que estão provados em [4] e o lema 5.4 que es

tã provado em [2].

LEMA 5.2 (Chow e Robbins [4])

Seja y_n ($n=1, \dots$) uma sequência qualquer de variáveis aleatórias tal que $y_n \geq 0$ (q.t.p.),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 \text{ (q.t.p.)}$$

e $f(n)$ uma sequência qualquer de constantes tal que

$$f(n) \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(n-1)} = 1.$$

Para cada $t > 0$ definamos

$$N = N(t) = \inf \left\{ K: K > 1: y_K \leq \frac{f(K)}{t} \right\}.$$

Então N está bem definida, é uma função não decrescente de t ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} E_{\theta} N(t) = \infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(N)}{t} = 1 \text{ (q.t.p.)}.$$

LEMA 5.3 (Chow e Robbins [4])

Se as condições do lema 5.2 estão satisfeitas e se

$$E_{\theta}(\sup_n y_n) < \infty,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_{\theta} f(N(t))}{t} = 1.$$

Antes de enunciar o lema 5.4, seja $\{Y_n; n=1,2,\dots\}$ um processo estocástico satisfazendo as seguintes condições:

c.1 - Convergência em lei de Y_n - Para todos os pontos x de continuidade da $F(x)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta} [Y_n \leq x \omega_n] = F(x),$$

onde ω_n são números não negativos.

c.2 - Continuidade Uniforme em Probabilidade de Y_n - Para qualquer $\epsilon > 0$ e $\eta > 0$, $\exists$ um valor v (grande) e um valor c (pequeno) tal que

$$\sup_{n \geq v} P_{\theta} \left[\max_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} |Y_n - Y_{n'}| > \epsilon \right] \leq \eta, \quad \forall \theta.$$

LEMA 5.4 (Anscombe [2])

Seja $\{N(t); t \geq 0\}$ um processo estocástico assumindo valores inteiros e suponhamos que $g(\cdot)$ seja uma função não-decrescente, assumindo valores inteiros, tal que tende ao infinito quando t tende ao infinito e

$$\frac{N(t)}{g(t)} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} 1$$

em probabilidade. Se $\{Y_n: n \geq 1\}$ é um processo estocástico satisfazendo c.1 e c.2 então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\theta} [Y_{N(t)} \leq x \omega_{N(t)}] = F(x)$$

para todos os pontos x de continuidade da $F(x)$.

TEOREMA 5.1

Sob as suposições a - f temos as seguintes propriedades para o procedimento sequencial

$$S_d = \{N(d); \{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1}\}:$$

a. $\lim_{d \rightarrow 0} N(d) = \infty$ (q.t.p.)

b. $\lim_{d \rightarrow 0} E_{\theta}(N(d)) = \infty$

c. $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{d^2 N(d)}{a^2 \lambda(\theta)} = 1$ (q.t.p.)

d. $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{d^2 E_{\theta}[N(d)]}{a^2 \lambda(\theta)} = 1$ se

$$E_{\theta} \left[\sup_n \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{\lambda(\theta)} \right] < \infty, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (\text{eficiência assintótica}).$$

PROVA

Temos que $N(d) = \inf \left\{ n: n \geq n_0 \text{ tal que } n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2} \right\}$

Seja

$$f(n) = n, \quad t = \frac{a^2 \lambda(\theta)}{d^2} \text{ e } y_n = \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{\lambda(\theta)}.$$

Os resultados a, b e c seguem direto do lema 5.2. O resultado d é uma consequência direta do lema 5.3.

OBSERVAÇÃO - Seja $Y_n = (\hat{\theta}_n - \theta) A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta)'$, mostraremos a seguir que a sequência $\{Y_n: n=1, 2, \dots\}$ satisfaz a condição de integrabilidade uniforme em probabilidade.

TEOREMA 5.2

Sob as suposições a - f a sequência de variáveis aleatórias $\{Y_n, n=1, 2, \dots\}$ satisfaz a condição c.2.

PROVA

Seja

$$U_n = [A(\hat{\theta}_n)]^{1/2} (\hat{\theta}_n - \theta)', \text{ logo } Y_n = U_n' \cdot U_n.$$

$$Y_n - Y_{n'} = U_n' U_n - U_{n'}' U_{n'} = -(U_n' - U_{n'}')(U_n - U_{n'}) - U_n'(U_n - U_{n'}) - (U_n' - U_{n'}')U_{n'},$$

logo

$$\begin{aligned} |Y_n - Y_{n'}| &\leq |(U_n' - U_{n'}')(U_n - U_{n'})| + 2|U_n'(U_n - U_{n'})| \leq \\ &\leq \|(U_n' - U_{n'}')\| \|U_n - U_{n'}\| + 2\|U_n\| \|U_n - U_{n'}\|, \end{aligned}$$

logo, o

$$\sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} |Y_n - Y_{n'}| \leq \sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} \{ \|(U_n' - U_{n'}')\|^2 + 2\|U_n\| \|U_n - U_{n'}\| \} \quad (1.1)$$

Devido a normalidade assintótica de $\sqrt{n}U_n$, dado $\eta > 0$ e $\epsilon > 0$ podemos escolher v e K suficientemente grande tal que:

$$P_\theta \left[\|U_n\| > \frac{K\epsilon^{1/2}}{n^{1/2}} \right] \leq \eta, \quad n \geq v \quad (1.2)$$

Para verificar que $\{Y_n : n=1, 2, \dots\}$ satisfaz c.2 é suficiente mostrar que para $\forall \epsilon > 0$ e $\eta > 0$ existem v e c tal que:

$$\sup_{n \geq v} P_\theta \left\{ \sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} \|U_{n'} - U_n\| > \frac{\epsilon^{1/2}}{n^{1/2}} \right\} \leq \eta \quad (1.3)$$

Vamos reescrever (1.3) da seguinte forma:

$$\sup_{n \geq v} P_\theta \left\{ \sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} \|U_{n'} - U_n\| \geq \min \left[\frac{1}{4K}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \frac{\epsilon^{1/2}}{n^{1/2}} \right\} \leq \frac{\eta}{3} \quad (1.4)$$

Por (1.1), (1.2) e (1.4) temos que:

$$\begin{aligned}
 & P_{\theta} \left\{ \sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} |Y_n - Y_{n'}| > \frac{\varepsilon}{n} \right\} \leq P_{\theta} \left\{ \sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} \|U_{n'} - U_n\|^2 \geq \frac{\varepsilon}{2n} \right\} + \\
 & + P_{\theta} \left\{ \sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} 2\|U_n\| \|U_{n'} - U_n\| \geq \frac{\varepsilon}{2n} \right\} \leq P_{\theta} \left\{ \sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} \|U_{n'} - U_n\|^2 \geq \frac{\varepsilon}{2n} \right\} + \\
 & + P_{\theta} \left[\|U_n\| \geq \frac{K\varepsilon^{1/2}}{n^{1/2}} \right] + P_{\theta} \left\{ \sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} \|U_{n'} - U_n\| \geq \frac{\varepsilon^{1/2}}{4Kn^{1/2}} \right\} \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta.
 \end{aligned}$$

para $n \geq v$, logo a condição c.2 está satisfeita. Vamos agora provar (1.3).

$$\begin{aligned}
 & P_{\theta} \left\{ \sup_{(1-c)n \leq n' \leq (1+c)n} \|U_{n'} - U_n\| > \frac{\varepsilon^{1/2}}{n^{1/2}} \right\} \leq P_{\theta} \left\{ \sup_{n \leq n' \leq (1+c)n} \|U_{n'} - U_n\| > \frac{\varepsilon^{1/2}}{n^{1/2}} \right\} + \\
 & + P_{\theta} \left\{ \sup_{(1-c)n \leq n' \leq n} \|U_{n'} - U_n\| > \frac{\varepsilon^{1/2}}{n^{1/2}} \right\}, \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

logo é suficiente mostrar que para $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall \eta > 0 \exists v$ (grande) e c positivo tal que ambos os termos de (1.5) sejam dominados por $\eta/2$ para $n \geq v$. Demonstraremos em detalhes para o primeiro termo de (1.5).

$$U_{n'} - U_n = A^{1/2}(\hat{\theta}_{n'}) (\hat{\theta}_{n'} - \hat{\theta}_n)' + A^{1/2}(\hat{\theta}_{n'}) [A^{1/2}(\hat{\theta}_n) - A^{1/2}(\hat{\theta}_{n'})] U_n. \quad (1.6)$$

Por (1.6) temos que:

$$\begin{aligned}
 & P_{\theta} \left\{ \sup_{n \leq n' \leq (1+c)n} \|U_{n'} - U_n\| > \varepsilon^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \leq P_{\theta} \left\{ \sup_{n \leq n' \leq (1+c)n} \|A^{1/2}(\hat{\theta}_{n'}) (\hat{\theta}_{n'} - \hat{\theta}_n)'\| > \right. \\
 & \left. > \frac{\varepsilon^{1/2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} + P_{\theta} \left\{ \sup_{n \leq n' \leq (1+c)n} \|A^{1/2}(\hat{\theta}_{n'}) [A^{1/2}(\hat{\theta}_n) - A^{1/2}(\hat{\theta}_{n'})] U_n\| > \frac{\varepsilon^{1/2}}{2\sqrt{n}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Por [2], (1.2) e $A(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{q.t.p.} A(\theta)$ temos que:

$$P_{\theta} \left\{ \sup_{n \leq n' \leq (1+c)n} \|U_{n'} - U_n\| > \varepsilon^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \leq \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \frac{\eta}{2}, \text{ para } n \geq v.$$

TEOREMA 5.3 - Sob as suposições a - f temos que:

$$\lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta} [\theta \in R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)] = \alpha \text{ (consistência assintótica).}$$

PROVA

Seja $Y_n = (\hat{\theta}_n - \theta) A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta)'$. Pelo teorema 4.1 temos que $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ satisfaz c.1 para $\omega_n = 1/n$ e pelo teorema 5.2 temos que $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ também satisfaz a condição c.2. Seja

$$N(t) = \inf \left\{ n \ (n \geq n_0) : \frac{f(n)}{t} \geq y_n \right\},$$

onde

$$t = \frac{a^2 \lambda(\theta)}{d^2}, \quad f(n) = n \text{ e } y_n = \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{\lambda(\theta)},$$

logo $N(t) \equiv N(d)$. Definamos $g(t) = n_t$, onde n_t é o maior inteiro menor ou igual a t . Como

$$\frac{N(t)}{t} \leq \frac{N(t)}{g(t)} \leq \frac{1}{\frac{t}{N(t)} - \frac{1}{N(t)}},$$

então pelas propriedades a e c do teorema 5.1 temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{g(t)} = 1 \quad (q.t.p.P_{\theta}).$$

Pelo lema 5.4 e pelo item c do teorema 5.1 temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta} [\theta \in R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)] &= \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta} [N(d) (\hat{\theta}_{N(d)} - \theta) A(\hat{\theta}_{N(d)}) (\hat{\theta}_{N(d)} - \theta)' \leq \lambda^{-1}(\hat{\theta}_{N(d)}) d^2 N(d)] = \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta} [N(d) Y_{N(d)} \leq \lambda^{-1}(\hat{\theta}_{N(d)}) d^2 N(d)] = \lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta} [Y_{N(d)} \leq a^2 \omega_{N(d)}] = \alpha. \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 5.1

A sequência de variáveis aleatórias $\{d^2N(d)\}_{d>0}$, onde $N(d)$ é a regra de parada definida no capítulo 4, é uniformemente integrável em d se:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\{d^2N(d) > A\}} d^2N(d) dP_{\theta} = 0, \quad \forall d > 0 \text{ e } \forall \theta \in \Theta.$$

OBSERVAÇÃO

A eficiência assintótica do procedimento sequencial S_d pode ser verificada se substituirmos a condição

$$E_{\theta} \left[\sup_n \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{\lambda(\theta)} \right] < \infty, \quad \forall \theta \in \Theta$$

por $\{d^2N(d)\}_{d>0}$ uniformemente integrável em d .

TEOREMA 5.4

Se as condições a - f estão satisfeitas e $\{d^2N(d)\}_{d>0}$ é uniformemente integrável em d , então

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{d^2 E_{\theta}(N(d))}{a^2 \lambda(\theta)} = 1.$$

PROVA

Pelo teorema 5.1.c e pelo teorema de convergência de momentos (ver [7], pg.184) o resultado é verificado.

EXEMPLO 5.1

Seja $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, onde o par $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2)$ é desconhecido. O nosso objetivo é construir um *elipsóide de confiança* de tamanho fixo $2d$ para o par (μ_0, σ_0^2) , portanto seja:

$$\theta = (\mu, \sigma^2), \text{ onde } \theta_1 = \mu \text{ e } \theta_2 = \sigma^2,$$

$$\hat{\theta}_n = (\bar{X}_n, S_n^2), \text{ onde } \bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

e

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{n},$$

$$l_{11}(\theta_0) = \frac{1}{\sigma^2}, \quad l_{22}(\theta_0) = \frac{1}{2\sigma_0^4}, \quad l_{12}(\theta_0) = l_{21}(\theta_0) = 0,$$

$$A(\hat{\theta}_n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_n^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2S_n^4} \end{bmatrix}, \quad \lambda(\theta_0) = \max\{\sigma_0^2, 2\sigma_0^4\}$$

e

$$\lambda(\hat{\theta}_n) = \max\{S_n^2, 2S_n^4\}.$$

$$N(d) = \inf\left\{n: (n \geq n_0) \text{ tal que } n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2}\right\},$$

onde a é escolhido tal que

$$P_{\theta_0}[X^{(2)}(2) \leq a^2] = \alpha$$

e

$$R(\hat{\theta}_n; d) = \left\{ (\mu, \sigma^2) : \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{S_n^2} (\bar{X}_n - \mu)^2 + \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{2S_n^4} (S_n^2 - \sigma^2)^2 \leq d^2 \right\}.$$

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL:

Se $N(d) = K$ estimamos o par (μ_0, σ_0^2) através do elipsóide $R(\hat{\theta}_K; d)$.

Pelo teorema 5.3 o procedimento sequencial

$$S_d = \left\{ N(d), \{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1} \right\} \text{ é assintoticamente consistente.}$$

Por [6], se $0 < \sigma^2 < \infty$ então

$$E_{\theta} \left[\sup_n \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{\lambda(\theta)} \right] < \infty, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

logo pelo teorema 5.1, o procedimento sequencial

$$S_d = \left\{ N(d); \{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1} \right\}$$

é assintoticamente eficiente.

EXEMPLO 5.2

Seja $X \sim f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, tal que as condições a - f do capítulo 3 estejam satisfeitas. Se $\hat{\theta}_n$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ temos que:

$$A(\theta) = E_{\theta} \left(\frac{d \log f(x; \theta)}{d\theta} \right)^2$$

e

$$\lambda(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{A(\hat{\theta}_n)},$$

logo

$$N(d) = \inf \left\{ n \quad (n \geq n_0) : \geq \frac{a^2}{d^2 A(\hat{\theta}_n)} \right\},$$

onde a é escolhido tal que

$$P_{\theta} [\chi^{(2)}(1) \leq a^2] = \alpha$$

e

$$R(\hat{\theta}_n; d) = \left\{ \theta \in \Theta : (\hat{\theta}_n - \theta)^2 \leq d^2 \right\} = [\hat{\theta}_n - d, \hat{\theta}_n + d].$$

O procedimento sequencial acima coincide com o procedimento formulado em [8]. Pessoa [8] provou que este procedimento é consistente no sentido de Chow & Robbins e assintoticamente minimax.

EXEMPLO 5.3

Consideremos a seguinte distribuição multinomial:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{K+1}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{K+1}) = \theta_1^{x_1} \cdot \theta_2^{x_2} \cdot \dots \cdot \theta_{K+1}^{x_{K+1}},$$

onde

$$x_i = 0, 1; \quad \sum_{i=1}^{K+1} x_i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{K+1} \theta_i = 1.$$

O nosso objetivo é construir um elipsóide de confiança de tamanho fixo $2d$ para o parâmetro $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{K+1})$.

A matriz de informação de Fisher é a seguinte:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_{K+1}} & \frac{1}{\theta_{K+1}} & \dots & \frac{1}{\theta_{K+1}} \\ \frac{1}{\theta_{K+1}} & \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_{K+1}} & \dots & \dots \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{\theta_{K+1}} & \dots & \dots & \frac{1}{\theta_K} + \frac{1}{\theta_{K+1}} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}(\hat{\theta}_n) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1) & -\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 & \dots & -\hat{\theta}_1\hat{\theta}_K \\ -\hat{\theta}_2\hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2) & \dots & -\hat{\theta}_2\hat{\theta}_K \\ & & \ddots & \\ -\hat{\theta}_K\hat{\theta}_1 & \dots & \dots & \hat{\theta}_K\hat{\theta}_{K-1} & -\hat{\theta}_K(1-\hat{\theta}_K) \end{bmatrix}$$

onde

$$\hat{\theta}_i = \frac{n_i}{n}, \quad i=1, \dots, K+1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{K+1} n_i = n.$$

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL:

$$N(d) = \inf \left\{ n \ (n \geq n_0) : n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2} \right\},$$

onde

$$\lambda(\hat{\theta}_n) = \lambda_{\max}(A^{-1}(\hat{\theta}_n))$$

e

$$R(\hat{\theta}_n; d) = \left\{ \theta : (\hat{\theta}_n - \theta)' \lambda(\hat{\theta}_n) A(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \theta) \leq d^2 \right\}.$$

6 - APLICAÇÕES DO PROCEDIMENTO SEQUENCIAL $S_d = \{N(d); \{\hat{\theta}_n\}\}_{n \geq 1}$

6.1 - UMA APLICAÇÃO EM TESTES DE HIPÓTESES

O procedimento de construir elipsóides de tamanho fixo pode ser perfeitamente adaptado ao problema de construir testes sequenciais. Suponhamos que queremos testar a hipótese,

$H_0: \theta = \theta_0$, onde θ_0 é conhecido; contra a alternativa

$$H_a: (\theta - \theta_0)(\theta - \theta_0)' > (2r)^2,$$

com a condição que o elipsóide de confiança $R(\hat{\theta}_n; d)$ esteja dentro de uma esfera de raio r ($d < r$).

PROCEDIMENTO DO TESTE

Se $N(d) = K$, aceitamos H_0 se $\theta_0 \in R(\hat{\theta}_K; d)$ e rejeitamos H_0 se $\theta_0 \notin R(\hat{\theta}_K; d)$. O nível de significância do teste é dado por:

$$P[\text{rejeitar } H_0 / \theta = \theta_0] = 1 - P[\theta_0 \in R(\hat{\theta}_{N(d)}; d) / \theta = \theta_0] = 1 - \alpha(d; \theta_0),$$

onde,

$$\alpha(d; \theta_0) = P_{\theta_0}[\theta_0 \in R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)].$$

Se as suposições a - f estão satisfeitas, então pelo teorema 5.3 temos que

$$\lim_{d \rightarrow 0} \alpha(d; \theta_0) = \alpha,$$

logo:

$$\lim_{d \rightarrow 0} P[\text{rejeitar } H_0 / \theta = \theta_0] = 1 - \alpha.$$

Seja $\theta_1 \in \Theta$ tal que $(\theta_1 - \theta_0)(\theta_1 - \theta_0)' > (2r)^2$ então θ_1 e θ_0 não pertencem simultaneamente a $R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)$, logo:

$$P[\text{rejeitar } H_0 / \theta = \theta_1] \geq P_{\theta_1}[\theta_1 \notin R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)],$$

portanto:

$$P[\text{rejeitar } H_0 / \theta = \theta_1] \geq \alpha(d; \theta_1),$$

ou seja, $\lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta}[\text{rejeitar } H_0 | \theta = \theta_1] \geq \alpha.$

6.2 - UM PROCEDIMENTO SEQUENCIAL ASSINTÓTICO PARA COMPARAR UMA CATEGORIA EXPERIMENTAL COM UMA CATEGORIA DE CONTROLE

Suponhamos que temos uma população (categoria experimental) com densidade $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$, e uma população de controle (categoria de controle) com densidade $f(x; \theta_0)$, θ_0 conhecido.

Sejam:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_a: \theta = \theta_0 + \delta,$$

onde δ é um vetor $1 \times p$ de componentes positivas fixadas pelo pesquisador. Consideremos:

D_0 = a decisão de que a categoria experimental não é melhor que a categoria de controle, isto é, $\theta \leq \theta_0$.

D_1 = a decisão de que a categoria experimental é melhor que a categoria de controle, isto é, $\theta > \theta_0$.

Vamos desenvolver um procedimento sequencial para escolher uma das duas decisões (D_0, D_1) tal que

$$\lim_{d \rightarrow 0} P[D_0/H_0] \geq \alpha,$$

onde $d^2 = \delta\delta'$ e α é uma constante especificada pelo pesquisador.

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL

- i) Cada observação é feita em sequência na categoria experimental e paramos com a seguinte regra:

$$N(d) = \inf \left\{ n; (n \geq n_0) : n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2} \right\}$$

onde n_0 é um inteiro fixo $> p$;

- ii) Se $N(d) = K$, então escolhemos uma das decisões acima da seguinte forma:

a) Se $(\hat{\theta}_K - \theta_0)(\hat{\theta}_K - \theta_0)' \leq d^2$, escolhemos D_0 ;

b) Se $(\hat{\theta}_K - \theta_0)(\hat{\theta}_K - \theta_0)' > d^2$, escolhemos D_1 .

TEOREMA 6.2.1

Se as suposições a - f estão satisfeitas temos as seguintes propriedades assintóticas para o procedimento sequencial:

- a) $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{d^2 N(d)}{a^2 \lambda(\theta)} = 1 \quad \text{q.t.p.}$
- b) $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{d^2 E_{\theta}[N(d)]}{a^2 \lambda(\theta)} = 1, \text{ se } E_{\theta}[\sup_n \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{\lambda(\theta)}] < \infty, \forall \theta \in \Theta.$
- c) $\lim_{d \rightarrow 0} P[D_0/H_0] \geq \alpha$

PROVA

A prova de a e b são exatamente análogas as provas de c e d do teorema 5.1. Vamos agora provar c, usando o fato de que,

$$\sup_{uu'=1} uA^{-1}(\hat{\theta}_n)u' = \lambda(\hat{\theta}_n).$$

$$P[D_0/H_0] = P[(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)'(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)' \leq d^2/H_0] =$$

$$= P[uN(d)(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)'(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)u' \leq N(d)d^2, \forall u: uu'=1/H_0] =$$

$$= P[\frac{uN(d)(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)'(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)u'}{\lambda(\hat{\theta}_{N(d)})} \leq \frac{N(d)d^2}{\lambda(\hat{\theta}_{N(d)})}, \forall u: uu'=1/H_0] \geq$$

$$\geq P[\frac{uN(d)(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)'(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)u'}{uA^{-1}(\hat{\theta}_{N(d)})u'} \leq \frac{N(d)d^2}{\lambda(\hat{\theta}_{N(d)})}, \forall u: uu'=1/H_0] =$$

$$= P[\sup_{uu'=1} \frac{uN(d)(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)'(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)u'}{uA^{-1}(\hat{\theta}_{N(d)})u'} \leq \frac{N(d)d^2}{\lambda(\hat{\theta}_{N(d)})}/H_0] =$$

$$= P[N(d)(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)'A(\hat{\theta}_{N(d)})(\hat{\theta}_{N(d)} - \theta_0)' \leq \frac{N(d)d^2}{\lambda(\hat{\theta}_{N(d)})}/H_0] =$$

$$= P_{\theta_0}[\theta_0 \in R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)], \text{ logo pelo Teorema 5.2 temos que}$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} P[D_0/H_0] \geq \alpha.$$

EXEMPLO 6.2.1

Suponhamos que temos uma categoria experimental cuja variável aleatória tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 (desconhecidas) e uma categoria de controle também normal com média μ_0 e variância σ_0^2 (conhecidas). Logo:

$$H_0: (\mu, \sigma^2) = (\mu_0, \sigma_0^2)$$

$$H_a: (\mu, \sigma^2) = (\mu_0 + \delta_1, \sigma_0^2 + \delta_2),$$

onde $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ e

D_0 = a decisão de que $(\mu, \sigma^2) \leq (\mu_0, \sigma_0^2)$

D_1 = a decisão de que $(\mu, \sigma) > (\mu_0, \sigma_0^2)$.

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL:

$$i) N(d) = \inf \left\{ n : (n \geq n_0) : n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2} \right\}, \text{ onde}$$

$$\lambda(\hat{\theta}_n) = \max\{S_n^2, 2S_n^4\} \text{ e } d^2 = \delta\delta'.$$

ii) Se $N(d) = K$, escolhemos D_0 se,

$$(\bar{X} - \mu_0)^2 + (S_X^2 - \sigma_0^2)^2 \leq d^2, \text{ e } D_1 \text{ se,}$$

$$(\bar{X} - \mu_0)^2 + (S_X^2 - \sigma_0^2)^2 > d^2.$$

OBSERVAÇÕES:

1. O procedimento sequencial proposto nesta seção foi motivado pela solução dada por Srivastava em [11],
2. Nesta seção aplicamos a teoria sequencial de Chow e Robbins

3. Este problema pode ser extendido para $K+1$ populações, onde uma população é de controle e as demais são populações experimentais. (Ver [11]).

6.3 - MÉTODO GERAL PARA OBTENÇÃO DE UM PROCEDIMENTO SEQUENCIAL

Consideremos o problema de obter-se um elipsóide de confiança de tamanho fixo $2d$ para θ^* em presença do parâmetro desconhecido θ^{**} , onde

$$\theta^* = (\theta_1, \dots, \theta_r) \text{ e } \theta^{**} = (\theta_{r+1}, \dots, \theta_p) \text{ (} r < p \text{)}.$$

Para isto, consideremos:

$$A^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}(\theta) & \Lambda_{12}(\theta) \\ \Lambda_{21}(\theta) & \Lambda_{22}(\theta) \end{bmatrix}$$

onde $\Lambda_{11}(\theta)$ é uma matriz $r \times r$.

Motivado pelo procedimento sequencial construído na seção 4 vamos propor nesta seção um método geral para obter-se uma regra de parada para o problema acima.

MÉTODO GERAL:

O procedimento sequencial está caracterizado pelos seguintes elementos:

1. Regra de parada

$$N^*(d) = \inf \left\{ n \text{ (} n \geq n_0 \text{)} : n \geq \frac{a^2 \lambda(\tilde{\theta}_n^*)}{d^2} \right\},$$

onde n_0 é um inteiro fixo $> r$ e a é escolhido tal que

$$P_{\theta^*}[\chi^{(2)}(r) \leq a^2] = \alpha.$$

2. Elipsóide de confiança

$$R(\hat{\theta}_n^*; d) = \{\theta^*: (\hat{\theta}_n^* - \theta^*)' \lambda(\hat{\theta}_n^*) \Lambda_{11}^{-1}(\hat{\theta}_n^*) (\hat{\theta}_n^* - \theta^*) \leq d^2\},$$

onde $\lambda(\hat{\theta}_n^*) = \lambda_{\max}(\Lambda_{11}(\hat{\theta}_n^*))$.

EXEMPLO 6.3.1

Sejam $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ ($0 < \sigma_0^2 < \infty$), $\theta^* = \mu$, $\theta^{**} = \sigma^2$ e $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2)$.
Pelo exemplo 5.1 temos que

$$\Lambda_{11}^{-1}(\theta_0) = \frac{1}{\sigma_0^2}, \quad \Lambda_{11}^{-1}(\hat{\theta}_n^*) = \frac{1}{S_n^2} \text{ e } \hat{\theta}_n^* = \bar{X}_n,$$

logo

$$\lambda(\hat{\theta}_n^*) = S_n^2, \quad N^*(d) = \inf \left\{ n \ (n \geq n_0) : n \geq \frac{a^2 S_n^2}{d^2} \right\},$$

onde n_0 é um inteiro > 1 e a é escolhido tal que

$$P_{\theta_0} [\chi^{(2)}(1) \leq a^2] = \alpha.$$

Logo,

$$R(\hat{\theta}_n^*; d) = \{\mu: (\bar{X}_n - \mu)^2 \leq d^2\} = [\bar{X}_n - d, \bar{X}_n + d].$$

Se $N^*(d) = K$, estimamos a média μ_0 através do intervalo $[\bar{X}_K - d, \bar{X}_K + d]$, em presença da variância desconhecida σ_0^2 .

EXEMPLO 6.3.2 - No exemplo anterior se $\theta^* = \sigma^2$ e $\theta^{**} = \mu$, então,

$$A(\theta_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sigma_0^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_0^2} \end{bmatrix}, \quad \lambda(\hat{\theta}_n^*) = 2S_n^4, \quad \hat{\theta}_n^* = S_n^2,$$

$$N^*(d) = \inf \left\{ n \ (n \geq n_0) : n \geq \frac{a^2 2S_n^4}{d^2} \right\},$$

onde $n_0 > 1$ e

$$R(\hat{\theta}_n^*), d) = \{\sigma^2 : (S_n^2 - \sigma^2)^2 \leq d^2\} = [S_n^2 - d, S_n^2 + d]$$

Se $N^*(d) = K$ estimamos a variância σ_0^2 através do intervalo $[S_K^2 - d, S_K^2 + d]$ em presença da média desconhecida μ_0 .

OBSERVAÇÃO:

Os procedimentos formulados nos exemplos 6.3.1 e 6.3.2 coincidem com os procedimentos formulados por Khan em [6]. Khan provou que estes procedimentos são eficientes e consistentes no sentido de Chow & Robbins.

7. UM LIMITE INFERIOR PARA A MÉDIA AMOSTRAL ASSINTÓTICA

Seja $T(d)$ uma regra de parada e $Z_n = Z_n(X_1, \dots, X_n)$ uma estatística de dimensão p baseada nas n primeiras observações. Se $T(d) = K$, o procedimento

$$S_d = \left\{ T(d); \{Z_n\}_{n \geq 1} \right\}$$

utiliza o elipsóide $R(Z_K; d)$ para estimar o parâmetro $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ onde,

$$R(Z_K; d) = \{ \theta \in \Theta \text{ tal que } (Z_K - \theta)' A(Z_K) \lambda(Z_K) (Z_K - \theta) \leq d^2 \},$$

Denotemos S a classe de todos procedimentos definidos acima e $S_\alpha \subset S$, onde S_α é a classe de todos procedimentos, satisfazendo:

$$(7.1) \quad \liminf_{d \rightarrow 0} P_\theta [\| \lambda^{1/2}(Z_{T(d)}) A^{1/2}(Z_{T(d)}) (Z_{T(d)} - \theta)' \| \leq d] \geq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

DEFINIÇÃO 7.1 - Um procedimento

$$S_d^* = \left\{ T^*(d); \{Z_n^*\}_{n \geq 1} \right\}$$

em S_α é assintoticamente minimax, se

$$\liminf_{d \rightarrow 0} \frac{\sup_{\theta} E_{\theta}[T(d)]}{\sup_{\theta} E_{\theta}[T^*(d)]} \geq 1$$

para qualquer procedimento $S_d = \{T(d); \{Z_n\}\}_{n \geq 1}$ em S_n .

O nosso objetivo neste capítulo é obter o lema 7.4 que será utilizado no capítulo 8 para provar que o procedimento sequencial introduzido no capítulo 4 é assintoticamente minimax.

A definição 7.1 é uma extensão da definição dada por Pessoa em [8]. De acordo com [3] vamos acrescentar as seguintes suposições, entre as suposições feitas no capítulo 3.

g: Seja Ψ a distribuição a priori em Θ , munida da σ -álgebra de Borel. Ψ tem densidade ψ com respeito a a medida de Lebesgue em Θ , ou melhor,

$$\int_{\Theta} \psi(\theta) d\theta = 1,$$

onde ψ é contínua, positiva e limitada em Θ .

h: Se $t \neq \theta$, então

$$\int |f(x_1, \theta) - f(x_1, t)| \mu(dx_1) > 0.$$

Seja

$$c(d, \theta) = \frac{d^2 g(a^2)}{\lambda(\theta)}$$

onde a é escolhido tal que,

$$P_{\theta}[X^{(2)}(p) \leq a^2] = \alpha \quad \text{ou} \quad \int_0^{a^2} g(x) dx = \alpha,$$

onde $g(x)$ é a densidade de uma variável aleatória com dis-

tribuição $\chi^{(2)}(p)$ e $\lambda(\theta) = \lambda_{\max}(A^{-1}(\theta))$.

Para cada procedimento $S_d \in \mathcal{S}$ consideremos a seguinte expressão:

$$\int P_{\theta}[\|\lambda^{1/2}(\theta)A^{1/2}(\theta)(\theta - Z_{T(d)})'\| > d] \psi(\theta) d\theta + \int c(d; \theta) E_{\theta}[T(d)] \psi(\theta) d\theta.$$

Seja:

$$Y_{n,d} = \min_{\delta} \left\{ \int_{\Theta} I[\|\lambda^{1/2}(\theta)A^{1/2}(\theta)(\theta - \delta)'\| > d] \cdot \psi(\theta/x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta, \delta \in \mathbb{R}^p \right\}$$

onde $\psi(\theta/x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a densidade a posteriori de θ dado $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Vamos supor que para cada $x_1, x_2, \dots, x_n$ o mínimo é atingido e que existe uma versão mensurável $\tilde{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$ da função de decisão minimizante. Estaremos, agora, interessados no comportamento assintótico de $Y_{n,d}$ quando $n \rightarrow \infty$ e $d \rightarrow 0$ si simultaneamente.

LEMA 7.1

Se as suposições a - h estão satisfeitas, então

$$\int_{\{\|n^{1/2}\lambda^{1/2}(\theta)A^{1/2}(\theta)(\theta - \tilde{\theta}_n)'\| \leq b\}} \psi(\theta/x) d\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - H(\lambda^{-1/2}(\theta)b)$$

(q.t.p. P_{θ})

onde, $H(y) = \int_{y^2}^{\infty} g(x) dx$.

PROVA

Seja $t_n = n^{1/2}(\theta - \hat{\theta}_n)$ e $v_n = n^{1/2}(\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n)$.

Das suposições a - h, temos pelo teorema 2.2 de [3] que

$$(1) \int_{\{\|\lambda^{1/2}(n^{-1/2}t_n + \hat{\theta}_n)A^{1/2}(n^{-1/2}t_n + \hat{\theta}_n)t'_n\| \leq b\}} \psi^*(t_n/x_1, \dots, x_n) dt_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - H(\lambda^{1/2}(\theta)b) \quad (q.t.p.P_\theta)$$

onde $\psi^*(t_n/x_1, \dots, x_n)$ é a densidade condicional a posteriori de t_n dado $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\begin{aligned} & \int_{\{\|n^{1/2}\lambda^{1/2}(\theta)A^{1/2}(\theta)(\theta - \tilde{\theta}_n)'\| \leq b\}} \psi(\theta/x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta = \\ & = \int_{\{\|\lambda^{1/2}(n^{-1/2}t_n + \hat{\theta}_n)A^{1/2}(n^{-1/2}t_n + \hat{\theta}_n)(v_n - t_n)'\| \leq b\}} \psi^*(t_n/x_1, \dots, x_n) dt_n. \end{aligned}$$

Por (1) dado $\varepsilon > 0 \exists N(x_1, \dots, x_n; b)$ tal que para todo $n \geq N$

$$\begin{aligned} & \int_{\{\|\lambda^{1/2}(n^{-1/2}t_n + \hat{\theta}_n)A^{1/2}(n^{-1/2}t_n + \hat{\theta}_n)(v_n - t_n)'\| \leq b\}} \psi^*(t_n/x_1, \dots, x_n) dt_n \leq \\ & \leq \int_{\{\|\lambda^{1/2}(\theta)A^{1/2}(\theta)(v_n - t)'\| \leq b\}} \phi(t; A^{-1}(\theta)) dt + \varepsilon/2 \leq \quad (*) \\ & \leq \int_{\{\|\lambda^{1/2}(\theta)A^{1/2}(\theta)t'\| \leq b\}} \phi(t; A^{-1}(\theta)) dt + \varepsilon/2 \leq \\ & \leq \int_{\{\|\lambda^{1/2}(n^{-1/2}t_n + \hat{\theta}_n)A^{1/2}(n^{-1/2}t_n + \hat{\theta}_n)t'_n\| \leq b\}} \psi^*(t_n/x_1, \dots, x_n) dt_n + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando $n \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que:

(*) - Indicamos por $\phi(t; A^{-1}(\theta))$ a função de densidade da $N(0; A^{-1}(\theta))$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\|n^{-1/2} \lambda^{1/2}(\theta) A^{1/2}(\theta) (\theta - \tilde{\theta}_n)' \| \leq b\}} \psi(\theta/x_1, \dots, x_n) d\theta &\leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\| \lambda^{1/2} (n^{-1/2} t_n + \hat{\theta}_n) A^{1/2} (n^{-1/2} t_n + \hat{\theta}_n) t_n' \| \leq b\}} \psi^*(t_n/x_1, \dots, x_n) dt_n. \end{aligned}$$

Como a desigualdade é válida no outro sentido, o lema fica provado.

LEMA 7.2

Se as suposições a - h estão satisfeitas, então

$$\liminf_{d \rightarrow 0} [Y_{T(d), d} + c(d, \theta) T(d)] \geq (1 - \alpha) + a^2 g(a^2).$$

PROVA

Suponhamos que

$$\lim_{d \rightarrow 0} T(d)[w] = \infty$$

Para $w \in \Omega$ tal que $\liminf_{d \rightarrow 0} d^2 T(d)[w] = \infty$, temos trivialmente

$$\liminf_{d \rightarrow 0} [Y_{T(d)[w]}(w) + c(d; \theta) T(d)[w]] \geq 1 - \alpha + a^2 g(a^2).$$

Para w tal que

$$\liminf_{d \rightarrow 0} d^2 T(d)[w] = s < \infty,$$

temos que

$$\liminf_{d \rightarrow 0} [Y_{T(d)[w], d} + c(d; \theta) T(d)[w]] \geq H(\lambda^{-1/2}(\theta) s^{1/2}) + \frac{g(a^2) s}{\lambda(\theta)}$$

A função

$$f(x) = H(\lambda^{-1/2}(\theta) x^{1/2}) + \frac{g(a^2) x}{\lambda(\theta)}$$

atinge o mínimo em $x = a^2 \lambda(\theta)$ e o valor mínimo é $H(a) + a^2 g(a^2)$,
ou,

$$\liminf_{d \rightarrow 0} [Y_{T(d)}[w], d^{[w] + c(d, \theta) T(d)[w]}] \geq H(a) + a^2 g(a^2),$$

ou,

$$\liminf_{d \rightarrow 0} [Y_{T(d)}[w], d^{[w] + c(d, \theta) T(d)[w]}] \geq 1 - \alpha + a^2 g(a^2).$$

Se

$$\lim_{d \rightarrow 0} T(d)[w] < \infty,$$

segue-se que

$$(1 - \alpha) + a^2 g(a^2) \leq 1 - a^2 g(a^2) + a^2 g(a^2) = 1 \implies$$

$$(1 - \alpha) + a^2 g(a^2) \leq 1.$$

OBSERVAÇÕES:

1. A desigualdade $a^2 g(a^2) \leq \alpha$ é válida para $p = 1$ e $p = 2$ pois nestes casos $\phi(x)$ é decrescente.
2. Para $p > 2$, basta escolher a tal que $a^2 g(a^2) \leq \alpha$.

LEMA 7.3

Se as suposições a - h estão satisfeitas, e se

$$\liminf_{d \rightarrow 0} P_{\theta} \{ \| \lambda^{1/2}(\theta) A^{1/2}(\theta) (Z_{T(d)} - \theta)' \| \leq d \} \geq \alpha,$$

então

$$\liminf_{d \rightarrow 0} \int c(d; \theta) E_{\theta} [T(d)] \psi(\theta) d\theta \geq a^2 g(a^2).$$

PROVA:

$$\int P_{\theta}[\|\lambda^{1/2}(\theta)A^{1/2}(\theta)(Z_{T(d)} - \theta)'\| > d] \psi(\theta) d\theta + \int c(d; \theta) E_{\theta}[T(d)] \psi(\theta) d\theta \geq \\ \geq \int E_{\theta}[Y_{T(d)}, d + c(d; \theta)T(d)] \psi(\theta) d\theta.$$

Pelo Lema 7.2

$$\liminf_{d \rightarrow 0} [Y_{T(d)}, d + c(d; \theta)T(d)] \geq 1 - \alpha + a^2 g(a^2).$$

Aplicando Fatou, segue-se que

$$\liminf_{d \rightarrow 0} \int E_{\theta}[Y_{T(d)}, d + c(d, \theta)] \psi(\theta) d\theta \geq 1 - \alpha + a^2 g(a^2)$$

e

$$\limsup_{d \rightarrow 0} \int P_{\theta}[\|\lambda^{1/2}(\theta)A^{1/2}(\theta)(Z_{T(d)} - \theta)'\| > d] \leq 1 - \alpha$$

logo

$$\liminf_{d \rightarrow 0} \int c(d; \theta) E_{\theta}[T(d)] \psi(\theta) d\theta \geq a^2 g(a^2).$$

LEMA 7.4

Se as suposições a - h estão satisfeitas, se

$$\liminf_{d \rightarrow 0} P_{\theta}[\|\lambda^{1/2}(\theta)A^{1/2}(\theta)(Z_{T(d)} - \theta)'\| \leq d] \geq \alpha \text{ e } \lambda(\theta) \leq \lambda_0, \forall \theta \in \Theta$$

então

$$\liminf_{d \rightarrow 0} \sup_{\theta} d^2 E_{\theta}(T(d)) \geq a^2 \sup_{\theta} \lambda(\theta).$$

PROVA:

$$\begin{aligned} \liminf_{d \rightarrow 0} \sup_{\theta} d^2 E_{\theta}[T(d)] &\geq \liminf_{d \rightarrow 0} \int \frac{c(d; \theta) \lambda(\theta) E_{\theta}[T(d)]}{g(a^2)} \psi(\theta) d\theta = \\ &= \liminf_{d \rightarrow 0} \left[\int c(d; \theta) E_{\theta}[T(d)] \psi^*(\theta) d\theta \right] \cdot \frac{1}{g(a^2)} \int \lambda(\theta) \psi(\theta) d\theta, \text{ onde} \end{aligned}$$

$$\psi^*(\theta) = \frac{\frac{\psi(\theta) \lambda(\theta)}{g(a^2)}}{\frac{1}{g(a^2)} \int \lambda(\theta) \psi(\theta) d\theta}.$$

Tomando o sup para todas as prioris e, usando o lema 7.3 segue que:

$$\liminf_{d \rightarrow 0} \sup_{\theta} d^2 E_{\theta}[T(d)] \geq \sup_{\psi} a^2 g(a^2) \frac{1}{g(a^2)} \int \lambda(\theta) \psi(\theta) d\theta = \sup_{\theta} \lambda(\theta).$$

OBSERVAÇÃO - A técnica utilizada na demonstração dos lemas deste capítulo é essencialmente a mesma técnica utilizada por Pessoa em [8].

8. UM PROCEDIMENTO ASSINTOTICAMENTE MINIMAX

O objetivo desta seção é provar que o procedimento formulado na seção 4 é *assintoticamente minimax*.

TEOREMA 8.1

Se as suposições a - h estão satisfeitas e, se

$$\sup_{\theta} \lambda(\theta) = \lambda_0, \text{ então}$$

o procedimento

$$\{N(d), \{\hat{\theta}_n\}_{n>1}\}$$

é *assintoticamente minimax*.

PROVA:

Da definição de $N(d)$ temos que

$$N(d) \leq \frac{a^2 \lambda_0}{d^2} + 1$$

para d pequeno. Logo,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sup_{\theta} d^2 E_{\theta}[N(d)] \leq a^2 \lambda_0.$$

Do lema 7.4 e do teorema 5.2 temos que:

$$\liminf_{d \rightarrow 0} \frac{\sup_{\theta} E_{\theta}[T(d)]}{\sup_{\theta} E_{\theta}[T(d)]} \geq \frac{a^2 \lambda_0}{a^2 \lambda_0} = 1.$$

EXEMPLO 8.1 -

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, ambas com distribuição de Bernoulli com parâmetros p_1 e p_2 respectivamente. O nosso objetivo é obter um procedimento assintoticamente minimax para o par $\theta = (p_1, p_2)$. Para isto, consideremos:

- i) $X_1, X_2, \dots$ e $Y_1, Y_2, \dots$ observações independentes da 1ª e 2ª população.
- ii) $\hat{\theta}_n = (\bar{X}_n, \bar{Y}_n)$. Logo:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1(1-p_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2(1-p_2)} \end{bmatrix} \text{ e } \lambda(\theta) = \max[p_1(1-p_1), p_2(1-p_2)].$$

O procedimento sequencial $S_d = (N(d), \{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1})$ será:

$$N(d) = \inf \left\{ n(n \geq n_0) : n \geq \frac{a^2 \cdot \max[\bar{X}_n(1-\bar{X}_n), \bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)]}{d^2} \right\},$$

$$R(\hat{\theta}_n; d) = \left\{ (p_1, p_2) : \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)(\bar{X}_n - p_1)^2}{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)} + \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)(\bar{Y}_n - p_2)^2}{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)} \leq d^2 \right\}.$$

Como $\lambda(\theta) \leq 1/4$, $\forall \theta \in \Theta$, a suposição do teorema 8.1 está satisfeita, logo, S_d é assintoticamente minimax.

APÊNDICE I

UMA SIMULAÇÃO DO PROCEDIMENTO SEQUENCIAL

S_d PARA POPULAÇÃO NORMAL

Seja X uma variável aleatória com distribuição $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ onde o par $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2)$ é desconhecido. O objetivo deste apêndice é simular o procedimento sequencial

$$S_d = \{N(d), \{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1}\}$$

proposto no exemplo da seção 5, para observar o comportamento das propriedades assintóticas. Para isto foram geradas 200 amostras de várias populações normais, sendo utilizado para estes cálculos um computador Borroughs B-6700 do Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo. Para isto consideremos os seguintes elementos do procedimento sequencial:

$$N(d) = \inf \left\{ n : (n \geq n_0) \text{ tal que } n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2} \right\},$$

onde a é escolhido tal que

$$P[X^{(2)}(2) \leq a^2] = \alpha, \quad \lambda(\hat{\theta}_n) = \max(S_n^2, 2S_n^4),$$

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{n}, \quad \hat{\theta}_n = (\bar{X}_n, S_n^2)$$

e n_0 é um inteiro fixo, maior ou igual a 2.

$$R(\hat{\theta}_n, d) = \left\{ (\mu, \sigma^2) \text{ tal que } \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{S_n^2} (\bar{X}_n - \mu)^2 + \frac{\lambda(\hat{\theta}_n)}{2S_n^4} (S_n^2 - \sigma^2)^2 \leq d^2 \right\}.$$

PROCEDIMENTO SEQUENCIAL:

Se $N(d) = K$ estimamos o par $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2)$ através do elipsóide $R(\hat{\theta}_K; d)$.

a. PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DO PROCEDIMENTO SEQUENCIAL

$$1. \lim_{d \rightarrow 0} P_{\theta_0} [\theta_0 \in R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)] = \alpha \text{ (consistência assintótica)}$$

$$2. \lim_{d \rightarrow 0} \frac{E_{\theta_0}(N(d))}{n_0^*} = 1 \text{ (eficiência assintótica),}$$

onde

$$n_0^* = \frac{a^2 \lambda(\theta_0)}{d^2} \quad \text{e} \quad \lambda(\theta_0) = \max(\sigma_0^2, 2\sigma_0^4).$$

Se σ_0^2 é conhecido, chamaremos n_0^* de tamanho ótimo da amostra. Este valor será útil para comparar com a regra de parada $N(d)$, isto é, iremos comparar um procedimento com amostra de tamanho fixo com um procedimento sequencial.

A eficiência assintótica sugere que o procedimento sequencial S_d comporte-se como se o parâmetro σ_0^2 fosse conhecido para valores pequenos de d .

Seja $I = I(d) = E_{\theta_0}(N(d)) - n_0^*$, isto é, I é a medida do custo das observações devido o fato de desconhecerno σ_0^2 .

Seelbinder [12], provou para um procedimento em dois estágios que $\lim_{d \rightarrow 0} I(d) = 0$. Acreditamos que este resultado seja válido para o caso geral considerado neste apêndice.

b) CONSISTÊNCIA ASSINTÓTICA E EFICIÊNCIA ASSINTÓTICA

Utilizando-se de uma sub-rotina GGNOR do computador Borroughs B-6700, foram geradas 200 seqüências de números pseudos aleatórios para cada valor de d e σ_0 . Para cada seqüência determinamos o valor de N_i , onde

$$N_i = \inf \left\{ n: n \geq 15: n \geq \frac{a^2 \lambda(\hat{\theta}_n)}{d^2} \right\}, i=1,2,\dots,200$$

e verificamos se o elipsóide de confiança $R(\hat{\theta}_{N_i}; d)$ continha ou não o par θ_0 .

$$\bar{N} = \frac{\sum_{i=1}^{200} N_i}{200} = \text{estimador da } E_{\theta_0}(N);$$

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^{200} C_i}{200} = \text{estimador da } P_{\theta_0}[\theta_0 \in R(\hat{\theta}_N; d)],$$

onde

$$C_i = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta_0 \notin R(\hat{\theta}_{N_i}; d) \\ 1 & \text{se } \theta_0 \in R(\hat{\theta}_{N_i}; d) \end{cases}$$

A seguir apresentamos três tabelas que dão uma idéia do comportamento assintótico das propriedades do procedimento sequencial $S_d = \{N(d), \{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1}\}$.

TABELA 1 - ESTIMATIVAS DA PROBABILIDADE DE COBERTURA

D	DESVIO PADRÃO					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,10	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	1,000
1,05	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990	0,995
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,975
0,95	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	0,985
0,90	1,000	1,000	0,995	1,000	0,985	0,980
0,85	1,000	0,995	0,995	1,000	0,985	0,975
0,80	1,000	1,000	0,985	1,000	0,990	0,960
0,75	1,000	1,000	1,000	1,000	0,980	0,950
0,70	0,995	1,000	1,000	0,975	0,940	0,950
0,65	1,000	1,000	0,995	0,985	0,950	0,905
0,60	1,000	0,995	0,995	0,975	0,960	0,895
0,55	0,995	0,990	0,965	0,935	0,915	0,910
0,50	0,985	0,980	0,970	0,930	0,875	0,855
0,45	0,990	0,955	0,940	0,895	0,880	0,800
0,40	0,985	0,955	0,885	0,880	0,820	0,840
0,35	0,945	0,905	0,870	0,865	0,795	0,895
0,30	0,840	0,890	0,825	0,825	0,850	0,860
0,25	0,845	0,800	0,895	0,875	0,885	0,915
0,20	0,875	0,845	0,895	0,945	0,915	0,920
0,15	0,860	0,900	0,920	0,925	0,935	0,920

$\alpha = 95\%$ MÉDIA = 0,0 $N_0 = 15$ J = 200

TABELA 2 - ESTIMATIVAS DA E(N)

D	DESVIO PADRÃO					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,10	15,000	15,000	15,000	15,045	15,145	15,595
1,05	15,000	15,000	15,000	15,055	15,240	16,205
1,00	15,000	15,000	15,000	15,050	15,305	16,440
0,95	15,000	15,000	15,010	15,070	15,325	17,375
0,90	15,000	15,000	15,005	15,320	15,950	17,395
0,85	15,000	15,000	15,015	15,100	15,065	18,125
0,80	15,000	15,000	15,030	15,275	16,635	19,560
0,75	15,000	15,015	15,040	16,610	16,950	20,920
0,70	15,000	15,000	15,105	16,070	17,935	23,235
0,65	15,000	15,030	15,305	16,150	18,940	24,480
0,60	15,000	15,010	15,190	17,200	21,865	29,695
0,55	15,000	15,040	15,965	17,670	24,835	34,570
0,50	15,010	15,150	15,185	20,630	26,175	42,125
0,45	15,035	15,275	17,250	22,535	33,100	51,865
0,40	15,115	16,160	19,835	25,650	39,875	67,050
0,35	15,655	17,570	24,115	36,025	56,560	94,325
0,30	17,200	22,645	32,270	45,990	80,185	117,100
0,25	22,470	31,750	46,250	71,705	113,930	178,505
0,20	35,090	49,500	74,050	116,550	186,030	293,580
0,15	61,265	92,405	131,800	210,285	347,365	521,090

$\alpha = 95\%$ MÉDIA = 0,0 $N_0 = 15$ J = 200

TABELA 3 - ESTIMATIVAS DA EFICIÊNCIA ASSINTÓTICA

D	D E S V I O P A D R ã O					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,10	12,117	8,415	6,182	3,709	2,331	1,575
1,05	11,041	7,665	5,633	3,382	2,137	1,491
1,00	10,014	6,954	5,109	3,066	1,947	1,372
0,95	9,038	6,276	4,614	2,771	1,759	1,309
0,90	8,112	5,633	4,140	2,528	1,643	1,176
0,85	7,235	5,025	3,695	2,223	1,476	1,093
0,80	6,409	4,451	3,276	1,992	1,354	1,045
0,75	5,633	3,916	2,882	1,789	1,213	0,982
0,70	4,907	3,408	2,521	1,604	1,118	0,950
0,65	4,231	2,944	2,203	1,390	1,018	0,863
0,60	3,605	2,505	1,863	1,262	1,001	0,892
0,55	3,029	2,109	1,645	1,089	0,956	0,873
0,50	2,505	1,756	1,378	1,051	0,832	0,879
0,45	2,033	1,434	1,190	0,930	0,853	0,876
0,40	1,615	1,199	1,081	0,836	0,811	0,895
0,35	1,280	0,998	1,006	0,899	0,881	0,964
0,30	1,033	0,945	0,989	0,843	0,918	0,880
0,25	0,938	0,920	0,985	0,913	0,906	0,931
0,20	0,937	0,918	1,009	0,950	0,946	0,980
0,15	0,920	0,964	1,010	0,964	0,994	0,978

$\alpha = 95\%$ MÉDIA = 0,0 $N_0 = 15$ $J = 200$

A tabela 1 mostra que existe uma diminuição na probabilidade de cobertura para certos valores de d próximos a $\sigma_0/2$, logo, seja

$$\beta = \inf_{0 < d < \infty} P_{\theta_0} [\theta_0 \in R(\hat{\theta}_{N(d)}; d)].$$

Com o objetivo de controlar o valor de β , simulamos o procedimento sequencial para vários valores de n_0 , resultando a seguinte tabela:

TABELA 4 - ESTIMATIVAS DE β

$\sigma_0 \backslash n_0$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
6	0,670	0,705	0,660	0,660	0,670	0,670
15	0,840	0,800	0,825	0,825	0,795	0,800
17	0,815	0,810	0,835	0,820	0,825	0,825
20	0,790	0,830	0,820	0,815	0,815	0,810
25	0,890	0,875	0,845	0,850	0,880	0,815
30	0,855	0,870	0,860	0,875	0,865	0,850
40	0,920	0,900	0,885	0,895	0,875	0,890

$\alpha = 0,95$ MÉDIA = 0 $J = 200$

A tabela sugere que β seja independente de σ_0 e cresça à medida que n_0 aumenta. É evidente que ao aumentarmos n_0 temos um β maior, porém, com a desvantagem de termos o custo das observações aumentado.

Não existe nenhuma versão de $N(d)$ que reduza simultaneamente, o custo das observações e aumente o valor de β , devido ao fato de desconhecermos θ_0 . O valor de n_0 deve ser escolhido pelo estatístico, tal que o procedimento sequencial comporte-se da melhor forma possível em relação a β .

Comparando a tabela 2 com a tabela 5, observamos que o aumento de $n_0 = 6$ para $n_0 = 15$ implica num aumento pequeno no número de observações para valores de d , correspondentes a β na tabela 1 e 6 respectivamente. O aumento de n_0 não provoca aumento no número médio de observações para valores pequenos de d , porém tem uma influência maior para valores maiores de d .

TABELA 5 - ESTIMATIVAS DA $E(N)$

D	DESVIO PADRÃO					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,10	6,005	6,030	6,195	6,615	7,530	9,120
1,05	6,005	6,075	6,150	6,735	7,805	9,085
1,00	6,000	6,040	6,270	7,030	8,045	10,410
0,95	6,005	6,130	6,325	7,345	8,505	10,525
0,90	6,020	6,105	6,650	7,170	8,680	12,155
0,85	6,010	6,085	6,515	7,675	8,760	11,920
0,80	6,040	6,200	6,795	7,745	10,490	14,080
0,75	6,040	6,305	6,850	8,220	10,160	15,015
0,70	6,070	6,315	7,265	9,135	11,585	17,265
0,65	6,065	6,725	7,495	9,780	13,130	19,465
0,60	6,150	6,845	7,995	10,885	16,915	22,980
0,55	6,380	7,205	8,740	12,765	18,550	29,970
0,50	6,760	8,465	10,870	16,840	24,460	34,495
0,45	7,495	9,370	12,715	18,520	28,985	49,010
0,40	8,930	11,020	16,245	22,695	39,410	60,740
0,35	10,615	15,085	21,755	32,745	55,065	90,050
0,30	13,315	19,620	31,370	47,165	77,460	121,975
0,25	19,730	30,175	44,540	72,020	120,925	181,025
0,20	34,900	50,220	69,890	114,260	183,535	282,870
0,15	63,385	93,495	133,445	208,170	336,655	525,860

$\alpha = 95\%$ MÉDIA = 0,0 $N_0 = 6$ $J = 200$

TABELA 6 - ESTIMATIVAS DA PROBABILIDADE DE COBERTURA

D	DESVIO PADRÃO					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,10	0,995	0,980	0,973	0,955	0,905	0,925
1,05	0,990	0,985	0,960	0,935	0,905	0,915
1,00	0,985	0,960	0,970	0,940	0,870	0,860
0,95	0,965	0,980	0,960	0,885	0,875	0,855
0,90	0,965	0,965	0,925	0,890	0,835	0,830
0,85	0,965	0,915	0,935	0,900	0,835	0,785
0,80	0,950	0,930	0,915	0,820	0,815	0,745
0,75	0,960	0,915	0,875	0,830	0,790	0,740
0,70	0,950	0,895	0,860	0,795	0,805	0,670
0,65	0,925	0,900	0,780	0,820	0,710	0,695
0,60	0,885	0,840	0,800	0,750	0,740	0,705
0,55	0,865	0,840	0,735	0,690	0,670	0,730
0,50	0,845	0,785	0,715	0,770	0,745	0,710
0,45	0,795	0,740	0,660	0,660	0,705	0,720
0,40	0,820	0,705	0,750	0,685	0,740	0,770
0,35	0,725	0,745	0,745	0,745	0,820	0,900
0,30	0,870	0,730	0,800	0,830	0,795	0,865
0,25	0,715	0,755	0,800	0,870	0,895	0,890
0,20	0,865	0,850	0,875	0,895	0,920	0,900
0,15	0,920	0,950	0,935	0,930	0,920	0,915

$\alpha = 95\%$ MÉDIA = 0,0 $N_0 = 6$ J = 200

BURROUGHS 86700 ALGOL COMPILER, VERSION 2.7.380, SATURDAY, 06/28/76, 02:25 AM.

PROCED/SEQUENCIAL
=====

```
$ SET SINGLE CHECK SEG 0000+0010 AUTOBIND
$ BIND = FROM BIB/IMSL/1,BIB/IMSL/2,BIB/IMSL/3
BEGIN
```

```
%
%
%
%
%
PROGRAMA : PROCED/SEQUENCIAL
AUTORES : J. RODRIGUES & E. LEITE
VERSAO : 04
DATA : 28/06/76
```

COMMENT = DECLARACOES ;

FILE FILES(KIND=READER),

FILE6(KIND=PRINTER);

```
ARRAY Y(10:0), SIGMA(10:5), D(10:19), ALFABARRA,NBARRA,EF(10:19,0:5);
INTEGER I,J,K,L,M,DIA,MES,ANO,NO,L1,L2;
BOOLEAN FLAG1,FLAG2;
REAL MI, D2,S2K,S4K2,A,ALFANN,SOMAX,SOMAX2,XBARRA,V,V2,V4,SIGMA1,
LAMBDA,PBARRA,X,X2,FR1,FR2,SIGMA2, SIGMA4,LAMBDATETA,FR3;
DOUBLE SEMENTE;
PROCEDURE GGNOR(SEED,N,R);
ARRAY R(*);
INTEGER N;
DOUBLE SEED;
EXTERNAL
```

```
FORMAT F1 (2F3.1,F4.2,F12.10,3I2),
F2 (F7.5,I6,2I5),
F3 (X9,"PROCEDIMENTO SEQUENCIAL - PROBABILIDADE DE COBERTU",
"RA, CONSISTENCIA E EFICIENCIA ASSINTOTICA",X6,I2,
"/",I2,"/",I2),
F4 (///X19,"PARAMETROS:",///X23,"MI
"SIGMA(10)=",X5,F3.1,///X23,"MI
"A "=",X5,F3.1,///X23,"D(10)
"L "=",X5,F7.5,///X23,"SEMENTE=",X5,F8.6,///X23,
"=",I6,///X23,"J
I6),
"=",I6,///X23,"NO
"=",
```

```
00000000 000:0000:0
00000010 000:0000:0
00000020 000:0000:0
B.0000 IS SEGMENT 00003
00000030 003:0000:1
00000040 003:0000:1
00000050 003:0000:1
00000060 003:0000:1
00000070 003:0000:1
00000080 003:0000:1
00000090 003:0000:1
00000100 003:0000:1
DATA IS 0005 LONG
00000110 003:0000:1
DATA IS 0005 LONG
00000120 003:0000:1
00000130 003:0000:1
00000140 003:0000:1
00000150 003:0000:1
00000160 003:0000:1
00000170 003:0000:1
00000180 003:0000:1
00000190 003:0000:1
00000200 003:0000:1
00000210 003:0000:1
00000220 003:0000:1
GGNOR IS SEGMENT 00004
00000230 003:0000:1
00000240 003:0000:1
00000250 003:0000:1
00000260 003:0000:1
00000270 003:0000:1
DATA IS 0008 LONG
00000280 003:0000:1
00000290 003:0000:1
00000300 003:0000:1
00000310 003:0000:1
00000320 003:0000:1
```

APENDICE 2

```

F5 (//X19,"ERRO = SIGMA{0} MENOR OU IGUAL A ZERO."),
F6 (//X19,"ERRO = D{10} MENOR OU IGUAL A ZERO."),
F7 (X19,"TERMINO FORCADO = K Atingiu LIMITE DE SEGURANCA."),
F8 (X10,"ESTIMATIVAS DA PROBABILIDADE DE COBERTURA"),
F9 (X10,"ESTIMATIVAS DA ECN"),
F10 (X10,"ESTIMATIVAS DA EFICIENCIA ASSINTOTICA"),
F11 (/X54,"ALFA = 95%",X5,"MEDIA = ",F3.1,X5,"NO = ",F3.X5,
      "J = ",I5),
F12 (//X19,"DESvio"),
F13 (X20,"PADRAO",X6,F3.1,S(X10,F3.1)),
F14 (/X13,"D"),
F15 (/X12,F4.2,X11,F10.3,S(X3,F10.3)),
COMMENT = STATEMENTS,

M:=1;
FLAG1:= TRUE;
FLAG2:= TRUE;

% LEITURA DOS PARAMETROS
READ (FILES,F1,M,SIGMA{0},D{0},SEMENTE,DIA,MES,ANO);
READ (FILES,F2,A,J,L,NO);

% IMPRESSAO DOS PARAMETROS
WRITE (FILE6(SKIP 1));
WRITE (FILE6,F3,DIA,MES,ANO);
WRITE (FILE6,F4,M,SIGMA{0},D{0},A,SEMENTE,L,J,NO);

% TESTES DOS PARAMETROS
IF SIGMA{0} LEQ 0 THEN
  BEGIN
    WRITE (FILE6,F5);
    FLAG1:= FALSE;
  END;
IF D{0} LEQ 0.95 THEN
  BEGIN
    WRITE (FILE6,F6);
    FLAG1:= FALSE;
  END;

```

2 2 2 2

```

DATA IS 0010 LONG
00000330 003:0004:1
DATA IS 0030 LONG
00000340 003:0004:1
DATA IS 0000 LONG
00000350 003:0004:1
DATA IS 0008 LONG
00000360 003:0004:1
DATA IS 0000 LONG
00000370 003:0004:1
00000380 003:0004:1
DATA IS 0013 LONG
00000390 003:0004:1
00000400 003:0004:1
DATA IS 0008 LONG
00000410 003:0004:1
00000420 003:0004:1
00000430 003:0004:1
00000440 003:0004:1
00000450 003:0004:1
00000460 003:0004:1
00000470 003:0004:1
00000480 003:0004:5
00000490 003:0005:3
00000500 003:0006:1
00000510 003:0006:1
00000520 003:0006:1
00000530 003:0006:1
00000540 003:001A:2
00000550 003:0028:2
00000560 003:0028:2
00000570 003:0028:2
00000580 003:0028:2
00000590 003:002C:2
00000600 003:0036:2
00000610 003:0048:2
00000620 003:0048:2
00000630 003:0048:2
00000640 003:0048:2
00000650 003:0049:1
00000660 003:0049:4
00000670 003:004E:2
00000680 003:004F:0
00000690 003:004F:0
00000700 003:0051:1
00000710 003:0051:4
00000720 003:0056:2
00000730 003:0057:0
00000740 003:0057:0

```

```
% PREENCHIMENTO DAS MATRIZES D(1,1) E SIGMA(1,2)
```

```
IF FLAG1 THEN
```

```
  BEGIN
```

```
    FOR LI:=1 STEP 1 UNTIL 19 DO
```

```
      D(1,1):=D(1,1)-0.05;
```

```
      FOR L2:=1 STEP 1 UNTIL 5 DO
```

```
        SIGMA(1,2):=SIGMA(1,2)-0.1;
```

```
      END;
```

```
% ROTINA PRINCIPAL
```

```
FOR LI:=0 STEP 1 WHILE LI LEQ 19 AND FLAG1 DO
```

```
  BEGIN
```

```
    D2:=D(1,1)**2;
```

```
    FR1:=A/D2;
```

```
    FOR L2:=0 STEP 1 WHILE L2 LEQ 5 AND FLAG1 DO
```

```
      BEGIN
```

```
        ALFA:=0;
```

```
        NM:=0;
```

```
        SIGMA1:=SIGMA(1,2);
```

```
        SIGMA2:=SIGMA1**2;
```

```
        SIGMA4:=(SIGMA2**2)**2;
```

```
        LAMBDA TETA:=MAX(SIGMA2, SIGMA4);
```

```
        FR3:=1/(LAMBDA TETA*FR1);
```

```
        FOR I:=1 STEP 1 WHILE I LEQ J AND FLAG1 DO
```

```
          BEGIN
```

```
            SOMAX:=0;
```

```
            SOMAX2:=0;
```

```
            FLAG2:=TRUE;
```

```
            FOR K:=1 STEP 1 WHILE K LEQ L AND FLAG2 DO
```

```
              BEGIN
```

```
                GGNOR(SEMENTE,M,Y);
```

```
                X:=SIGMA1*Y(0)+MI;
```

```
                X2:=X**2;
```

```
                SOMAX:=X+X;
```

```
                SOMAX2:=X2+X2;
```

```
                XBARRA:=SOMAX/K;
```

```
                S2K:=(SOMAX2/K)-(XBARRA**2);
```

```
                S4K2:=(S2K**2)**2;
```

```
                LAMBDA:=MAX(S2K,S4K2);
```

```
                FR2:=FR1*LAMBDA;
```

```
                IF K GEQ NO AND K GEQ FR2 THEN FLAG2:=FALSE;
```

```
              END;
```

```
            K:=K+1;
```

```
            V2:=(LAMBDA/S2K)*((XBARRA-MI)**2);
```

```
            V4:=(LAMBDA/S4K2)*((S2K-SIGMA2)**2);
```

```
00000750 003:0057:0
00000760 003:0057:0
00000770 003:0057:0
00000780 003:0057:2
00000790 003:0057:5
00000800 003:005A:1
00000810 003:0062:1
00000820 003:0065:1
00000830 003:006D:1
00000840 003:006D:1
00000850 003:006D:1
00000860 003:006D:1
00000870 003:0071:1
00000880 003:0071:1
00000890 003:0072:4
00000900 003:0074:0
00000910 003:0078:1
00000920 003:0078:1
00000930 003:0078:5
00000940 003:0079:3
00000950 003:007A:4
00000960 003:007B:3
00000970 003:007C:5
00000980 003:007F:4
00000990 003:0081:2
00001000 003:0085:1
00001010 003:0085:1
00001020 003:0085:5
00001030 003:0086:3
00001040 003:0087:1
00001050 003:0088:1
00001060 003:0088:1
00001070 003:008D:4
00001080 003:008F:4
00001090 003:0090:3
00001100 003:0091:5
00001110 003:0093:1
00001120 003:0094:3
00001130 003:0096:4
00001140 003:0098:0
00001150 003:009A:5
00001160 003:009C:1
00001170 003:009F:1
00001180 003:009F:4
00001190 003:00A1:0
00001200 003:00A3:4
```



```

V:=V2+V4;
IF V LEQ 02 THEN
  PBARRA:=1
ELSE
  PBARRA:=0;
  ALFA:=PBARRA;
  NN:=K;
  IF K+1 GEQ L THEN
    BEGIN
      WRITE (FILE6,F7);
      FLAG:=FALSE;
    END;
  END;
  ALFABARRALL1,L2:=ALFA/J;
  NBARRALL1,L2:=NN/J;
  EF(L1,L2):=FRI*NBARRALL1,L2;
END;
% IMPRESSAO DAS TABELAS
WRITE (FILE6,SKIP 1);
WRITE (FILE6,F8);
WRITE (FILE6,F11,MI,NO,J);
WRITE (FILE6,F12);
WRITE (FILE6,F13,FOR L2:=0 STEP 1 UNTIL 5 DO SIGMA(L2));
WRITE (FILE6,F14);
FOR L1:=0 STEP 1 UNTIL 19 DO
  WRITE (FILE6,F15,D(L1),NBARRALL1,0),ALFABARRALL1,0),ALFABARRALL1,1),
  ALFABARRALL1,2),ALFABARRALL1,3),ALFABARRALL1,4),
  ALFABARRALL1,5);
WRITE (FILE6,SKIP 1);
WRITE (FILE6,F9);
WRITE (FILE6,F11,MI,NO,J);
WRITE (FILE6,F12);
WRITE (FILE6,F13,FOR L2:=0 STEP 1 UNTIL 5 DO SIGMA(L2));
WRITE (FILE6,F14);
FOR L1:=0 STEP 1 UNTIL 19 DO
  WRITE (FILE6,F15,D(L1),NBARRALL1,0),NBARRALL1,1),NBARRALL1,2),
  NBARRALL1,3),NBARRALL1,4),NBARRALL1,5);
WRITE (FILE6,SKIP 1);
WRITE (FILE6,F10);
WRITE (FILE6,F11,MI,NO,J);
WRITE (FILE6,F12);
WRITE (FILE6,F13,FOR L2:=0 STEP 1 UNTIL 5 DO SIGMA(L2));
WRITE (FILE6,F14);
FOR L1:=0 STEP 1 UNTIL 19 DO
  WRITE (FILE6,F15,D(L1),EF(L1,0),EF(L1,1),EF(L1,2),EF(L1,3),
  EF(L1,4),EF(L1,5));
END.

```

H,0000(003) IS 019F LONG
 STACKCODE IS SEGMENT 0010
 STACKCODE(010) IS 0032 LONG
 DATA IS 0034 LONG

00001210 003:00A6:2
 00001220 003:00A7:4
 00001230 003:00A8:1
 00001240 003:00A8:4
 00001250 003:00A9:2
 00001260 003:00AA:3
 00001270 003:00AB:5
 00001280 003:00AD:1
 00001290 003:00AE:2
 00001300 003:00AE:5
 00001310 003:00B3:2
 00001320 003:00B4:0
 00001330 003:00B4:0
 00001340 003:00B4:3
 00001350 003:00B6:5
 00001360 003:00B9:1
 00001370 003:00B9:1
 00001380 003:00B9:4
 00001390 003:00BD:1
 00001400 003:00BD:1
 00001410 003:00BD:1
 00001420 003:00C1:2
 00001430 003:00C6:2
 00001440 003:00D0:2
 00001450 003:00D5:2
 00001460 003:00E4:2
 00001470 003:00E9:2
 00001480 003:00EC:1
 00001490 003:00F6:4
 00001500 003:00FE:4
 00001510 003:0108:1
 00001520 003:010C:2
 00001530 003:0111:2
 00001540 003:011B:2
 00001550 003:0120:2
 00001560 003:012F:2
 00001570 003:0134:2
 00001580 003:0137:1
 00001590 003:0144:2
 00001600 003:0153:1
 00001610 003:0157:2
 00001620 003:015C:2
 00001630 003:0166:2
 00001640 003:0168:2
 00001650 003:017A:2
 00001660 003:017F:2
 00001670 003:0182:1
 00001680 003:0192:0
 00001690 003:019E:1

 NUMBER OF ERRORS DETECTED = 0.
 NUMBER OF SEGMENTS = 14. TOTAL SEGMENT SIZE = 692 WORDS. CORE ESTIMATE = 2178 WORDS. STACK ESTIMATE = 64
 PROGRAM SIZE = 178 CARDS, 1033 SYNTACTIC ITEMS, 48 DISK SEGMENTS.
 PROGRAM FILE NAME: (102MAE)PROCED/SEQUENTIAL.
 COMPILATION TIME = 9.694 SECONDS ELAPSED; 3.105 SECONDS PROCESSING; 0.659 SECONDS I/O.

REFERÊNCIAS

- [1] - Albert, A. (1966) - Fixed size confidence ellipsoids for linear regression parameters", Ann. Math. Statist., pp. 1603-1630.
- [2] - Anscombe, E.J. (1962) - "Large sample theory of sequential estimation", Proc. Cambridge Philos. Soc., 48, pp. 600-607.
- [3] - Bickel, P. & Yahav, J.A. (1969) - "Some contributions to the asymptotic of Bayes solutions", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 11, pp. 257-276.
- [4] - Chow, Y.S. & Robbins, H. (1965) - "On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean", Ann. Math. Statist., 36, pp. 457-462.
- [5] - Gleser, L.J. (1965) - "On the asymptotic theory of fixed-size sequential confidence bounds for linear regression parameters", Ann. Math. Statist., 36, pp. 463-467.
- [6] - Khan, R. A. (1969) - "A general method of determining fixed width confidence intervals", Ann. Math. Statist., 40, n° 2, pp. 704-709.
- [7] - Loève, M. (1960) - "Probability Theory", 2^a edição, New York, Van Nostrand.

- [8] - Pessoa, D.G.C. (1970) - "Asymptotically minimax fixed length confidence intervals", Ph.D.Dissertation, Univ. da Califórnia, Berkeley.
- [9] - Stein, C. & Wald, A. (1947) - "Sequential confidence intervals for mean of a normal distribution with known variance", Ann.Math.Statist., 28, pp.427-433
- [10] - Srivastava, M.S. (1967) - "On fixed-width confidence bounds for regression parameters and mean vector", Ann.Math.Statist., 1, pp.132-140.
- [11] - Srivastava, M.S. (1966) - "Some asymptotically efficient sequential procedures for ranking and slip page problems", Jour.Roy.Statist.Soc., Série B, 28, nº 2, pp. 370-380.
- [12] - Seelbinder, B.M. (1953) - "On Stein's two-stage sampling scheme", Ann.Math.Statist., 24, pp.640-649.
- [13] - Zacks, S. (1971) - "The theory of statistical inference", J. Wiley, New York, pp.247.
- [14] - Wald, A. (1947) - "Sequential Analysis", J. Wiley, New York.

ERRATA

<u>PÁGINA</u>	<u>LINHA</u>	<u>ONDE ESTÁ</u>	<u>DEVE SER</u>
2	14	(ii)	(i)
18	11	a-g	a-f
20	6	$>\epsilon$	$>\epsilon w_n$
20	15	$\leq x w_N(t)$	$\leq x w_g(t)$
24	4	5.2	5.2a
24	17	$\leq a^2 w_N(d)$	$\leq a^2 w_g(t)$
34	15	Teorema 5.2	Teorema 5.3
36	21	$P_{\theta*}$	P_{θ}
40	2	S_n	S_{α}
46	6	$=\sup_{\theta} \lambda(\theta)$	$=a^2 \sup_{\theta} \lambda(\theta)$
48	1	Teorema 5.2	Teorema 5.3
48	2	$\frac{\sup_{\theta} [E_{\theta} T(d)]}{\sup_{\theta} [E_{\theta} T(d)]}$	$\frac{\sup_{\theta} [E_{\theta} T(d)]}{\sup_{\theta} [E_{\theta} N(d)]}$