ACOPLAMENTO DE VASERSTEIN E ASSOCIAÇÃO
DE SISTEMAS MARKOVIANOS DE PARTÍCULAS

PABLO AUGUSTO FERRARI

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: PROF.DR. ANTONIO GALVES

Durante a realização deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro
do CAPES.

- São Paulo, novembro de 1978 -

A realização desta tese foi possível graças a uma série de fa
tores. Dentre os acadêmicos gostaria de assinalar os dois mais importan
tes. A primeira etapa foi meu estudo de Teoria de Probabilidades, reali-
zado na Universidad Nacional de Córdoba, com Oscar Bustos, com quem ad-
quiri as primeiras intuições probabilísticas.

A segunda etapa, já no IME, foi o trabalho no grupo de Siste
mas Markovianos de Partículas, iniciado por Carlos Alberto Barbosa Dan-
tas, onde estabelecemos o primeiro contato com tais processos. O seminá-
rio feito com Frank Spitzer, e as longas discussões sobre diferentes con
jecturas com Claude Kipnis alimentaram a fonte de novas idéias.

O trabalho com Antonio foi, ao começo um pouco estranho para
mim, pois assumiu a forma de diálogo, isto é, resultados a serem demons-
trados ou, em caso contrário, de contra exemplos a serem encontrados.
Mas esse método, com o qual logo me familiarizei, não só nos permitiu a
bordar uma série de problemas teóricos, como também, é graças a ele que
esta tese contém um pequeno resultado original. Trata-se da equivalên-
cia entre as condições suficientes para ergodicidade, fornecidas respec-
tivamente pelos métodos de acoplamento de Vaserstein e de associação, con
jecturada por Antonio, e demonstrada aqui.

A comparação dos acoplamentos de Vaserstein e Forte, com um
contra-exemplo que mostra que são diferentes é resultado do mesmo proce-
dimento.

Digamos, por último, que a excelente apresentação é devida ao
trabalho de datilografia do Sr. João Baptista Esteves de Oliveira.

INTRODUÇÃO

Este trabalho é dedicado ao estudo da ergodicidade em Processos de Markov definidos sobre espaço de estados não enumeráveis do tipo $E = \prod_{i \in S} E_i$, onde os E_i são finitos, S enumerável, e $\epsilon = \otimes_{i \in S} \epsilon_i$ a σ -álgebra correspondente.

Sobre E é definido um núcleo de transição

$$P: E \times \epsilon \longrightarrow [0,1],$$

que será da forma $P(\xi, \cdot) = \otimes_{i \in S} P_i(\xi, \cdot)$, onde $P_i: E \times \epsilon \longrightarrow [0,1]$, para todo $\xi \in E$. Em geral cada P_i dependerá só de um número finito de coordenadas, digamos $F_i \subset S$, F_i finito, ou seja se $\xi, \eta \in E$ tal que $\xi(k) = \eta(k)$, $\forall k \in F_i$ teremos $P_i(\xi, \cdot) \equiv P_i(\eta, \cdot)$.

Sobre E é definido o conjunto $C(E)$, das funções reais limitadas, aproximáveis uniformemente por funções mensuráveis cilíndricas (que dependem de um número finito de coordenadas). Se munirmos E da topologia produto, $C(E)$ será o espaço das funções contínuas (Teorema de aproximação de Stone Weisstrass).

Se $m(E)$ é o conjunto de medidas de probabilidades definidas sobre (E, ϵ) , e se (μ_n) é uma sequência de elementos

de $m(\epsilon)$, diremos que $\mu_n \xrightarrow{\text{fr}} \mu$ em $m(\epsilon)$ (μ_n converge fracamente para μ) onde $\mu \in m(\epsilon)$ se $\mu_n f \xrightarrow{n} \mu f$ para toda função $f \in C(E)$. (Notação: $\mu f = \int_E \mu(d\eta) f(\eta)$).

Dado um núcleo de transição $P: E \times E \longrightarrow [0,1]$, de Feller (i.e., $Pf \in C(E) \forall f \in C(E)$), queremos achar condições para a convergência fraca, das medidas νP^n

$$(\nu P^n(A) = \int_E \nu(d\eta) P^n(\eta, A); A \in E)$$

para uma certa $\mu \in m(E)$ para toda medida inicial $\nu \in m(E)$. A existência de uma única μ tal que $\nu P^n \xrightarrow{\text{fr}} \mu$, $\forall \nu \in m(E)$ chamaremos de ergodicidade.

Se esta convergência é uniforme em m então isso é equivalente à convergência uniforme em E de $P^n f \longrightarrow \text{cte}$, onde $P^n f$ é definida como $P^n f(\xi) = \int_E P^n(\xi, d\eta) f(\eta)$.

(Notemos que se $P(\xi, \cdot) = \sum_{i \in S} P_i(\xi, \cdot)$ e cada P_i depende de um número finito de coordenadas então P é de Feller.)

O núcleo deste trabalho é o capítulo 3 onde é dada uma condição suficiente para ergodicidade de processos como os descritos.

A técnica usada para chegar nesta condição é baseada no chamado "acoplamento de medidas". Uma medida γ em E^2 é um acoplamento de $\mu, \nu \in m(E)$, se γ têm como projeções as medidas μ e ν .

O acoplamento é usado também para introduzir a cha

mada "distância de Vasertein" e depois provar a equivalência desta métrica com a distância de Prohorov, a qual é compatível com a convergência fraca das medidas.

É importante notar aqui que o critério clássico de Ergodicidade, chamado de "Condição de Doeblin" não é aplicável à processos deste tipo.

No capítulo 2 é considerada uma família de processos que foram chamados por Holley e Liggett [9] de processos de proximidade. Estes processos têm um estado absorvente, e para eles existe outra técnica para achar uma condição suficiente para ergodicidade que é chamada de associação. A construção do processo associado e as consequências mais importantes desta outra técnica estão também descritas neste capítulo. Para maiores referências com respeito à noção de associação ver [9].

Na seção 4 do capítulo 3 é demonstrada a equivalência das condições suficientes para ergodicidade dos processos de proximidade, dadas pelo método de associação e pela técnica de acoplamento. Esta demonstração é um resultado original.

No capítulo 1 se fornece, sobre a base de um trabalho de Griffeath [3], um resumo dos resultados ergódicos no caso de espaço de estados enumerável. Aqui existe a noção de tempo de encontro de dois processos acoplados, a partir da qual é possível demonstrar a ergodicidade.

No capítulo 3 é dada uma definição similar de tempo de encontro, levando em conta o caráter não enumerável do espaço de estados. Ou seja, se $F \in \mathcal{E}$ é um conjunto finito de coordenadas, definimos T_F como a variável aleatória que indica o primeiro instante em que um processo acoplado atinge a diagonal, no conjunto F .

Demonstramos que a condição suficiente para ergodicidade, é também suficiente para que T_F seja finito com probabilidade 1.

Conjeturamos que $P(T_F < \infty) = 1$ é suficiente para a ergodicidade do processo. Se isto for verdade obteríamos uma outra demonstração da condição suficiente para ergodicidade, semelhante à que se faz no caso de um espaço enumerável.

A demonstração desta conjectura não está feita aqui e a questão permanece aberta.

Por último assinalemos que no capítulo 3 é exibido um exemplo que mostra a diferença entre o acoplamento de Vaserstein e o acoplamento forte que aparece em conexão com a noção de associação.

NOTAÇÃO

(Ω, A, P) - espaço de probabilidade

(E, ϵ) - espaço mensurável dos estados

S - conjunto enumerável das coordenadas

$E = \prod_{i \in S} E_i$ $\epsilon = \otimes_{i \in S} \epsilon_i$ $\hat{E} = P_f(S)$ - partes finitas de S .

$\xi, \eta, \zeta, \rho \in E$ - configurações

$h, i, j, k, \ell \in S$ - coordenadas

$A, B, C, \epsilon \in \epsilon$ - Conjuntos mensuráveis

$F, G, I, J \in \hat{E}$ - subconjuntos finitos de coordenadas

$E_I = \prod_{i \in I} E_i$, se $\eta \in E$, $\eta(I) \in E_I$ definido por $\eta(I)(i) = \eta(i)$, $\forall i \in I$.

Se $A \subset E_I$, será identificado com o conjunto $A' \subset E$ definido

$$A' = \{\eta \in E; \eta(I) \in A\}$$

$$C_k = \{\eta \in E: \eta(k) = 1\}$$

$$C_F = \{\eta \in E: \eta(k) = 1 \quad \forall k \in F\}$$

Sobre E é definido $C(E)$: funções limitadas aproximáveis uniformemente por funções mensuráveis cilíndricas

$P: E \times \epsilon \longrightarrow [0, 1]$, núcleo de transição tal que $Pf \in C(E)$,

$\forall f \in C(E)$ (Feller).

$\{\xi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - processo de Markov de núcleo P.

Para a construção do acoplamento definimos

$$\tilde{E} = E \times E, \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon \otimes \epsilon$$

$$\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \tilde{E}$$

$$A, B, C \in \tilde{E}$$

$$\Delta \in \tilde{E} \text{ definida por } \Delta = \{(\xi, \xi), \xi \in E\}$$

$$\Delta_k \in \tilde{E} \text{ definida por } \Delta_k = \{(\xi, \eta), \xi(k) = \eta(k)\}$$

$$\Delta_F \in \tilde{E} \text{ definida por } \Delta_F = \{(\xi, \eta), \xi(k) = \eta(k)\} \quad F \in \mathcal{F}$$

$m(E)$ - medidas de probabilidade definidas sobre (E, ϵ)

$$\mu, \nu \in m(E)$$

$$\|\mu - \nu\| = \sup_{A \in \tilde{E}} |\mu(A) - \nu(A)|$$

$$(\mu - \nu)^+ \in m(E) \text{ definida por } (\mu - \nu)^+(B) = \sup_{A \subset B} (\mu(A) - \nu(A))$$

$$(\mu - \nu)^- = (\nu - \mu)^+ \text{ (por definição)}$$

$$\text{teremos também que } (\mu - \nu)^+(E) = (\nu - \mu)^+(E) = \|\mu - \nu\|.$$

CAPÍTULO 1

ERGODICIDADE E ACOPLAMENTO EM CADEIAS DE MARKOV,

COM ESPAÇO DOS ESTADOS ENUMERÁVEIS

Seja $\{\xi^n_\xi\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma cadeia de Markov com espaço dos estados E enumerável e estado inicial $\xi \in E$. Seja $P = (P(\xi, \eta))_{\xi, \eta \in E}$ a matriz de transição.

Definição - $\delta^{(n)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{\zeta \in E} |P^n(\xi, \zeta) - P^n(\eta, \zeta)|$

$$\alpha^n(\xi, \eta) = \sum_{\zeta \in E} (P^n(\xi, \zeta) \wedge P^n(\eta, \zeta))$$

Observação - $\alpha^n(\xi, \eta) = 1 - \delta^n(\xi, \eta)$; pois

$$P^n(\xi, \zeta) \wedge P^n(\eta, \zeta) = \frac{1}{2} (P^n(\xi, \zeta) + P^n(\eta, \zeta) - |P^n(\xi, \zeta) - P^n(\eta, \zeta)|)$$

somando sobre ξ obtemos a expressão desejada.

Definição - A cadeia de Markov $\{\xi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é fracamente ergódica se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^n(\xi, \eta) = 0, \quad \forall \xi, \eta \in E.$$

Observação -

$$\delta^n(\xi, \eta) = \sup_{A \in E} |P^n(\xi, A) - P^n(\eta, A)| = \|P^n(\xi, \cdot) - P^n(\eta, \cdot)\|$$

ou seja, a ergodicidade fraca é equivalente à perda progressiva da memória relativa ao estado inicial.

Seja agora $B^n = \tau(\xi^n, \xi^{n+1}, \dots)$ a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $\{\xi^t\}$, $t \geq n$. Chamamos $B^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B^n$ a σ -álgebra terminal da cadeia. Dizemos que B^∞ é trivial se $P(\xi, A) = P(\eta, A) = 0$ ou 1 para todo par $\xi, \eta \in E$ e todo $A \in B^\infty$.

Seja ν uma medida de probabilidade em E tal que $P(\xi^0 \in A) = \nu(A)$, neste caso diremos que o processo tem medida inicial ν . Nesse caso a lei do processo no instante 1 é a medida νP assim definida, para todo $\xi \in E$:

$$\nu P(\xi) = \sum_{\eta \in E} \nu(\eta) P(\eta, \xi).$$

TEOREMA DE OREY:

Proposição - Seja $\xi^{(n)}$ uma cadeia de Markov. As seguintes condições são equivalentes:

- i) ξ^n tem σ -álgebra final trivial;
- ii) $\forall \nu$, medida de probabilidade em $E, A \in B$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in B^n} |\nu P(A \cap B) - \nu P(A) \nu P(B)| = 0$$

iii) ξ^n é fracamente ergódico.

iv) As funções harmônicas e limitadas são constantes, ou seja, se $f: E \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e tal que

$$f(\xi, \eta) = \sum_{\eta \in E} P(\xi, \eta) f(\eta, \eta+1)$$

então f é constante.

Observação - f com as propriedades de iv é chamada de harmônica no espaço-tempo. Os núcleos que satisfazem a condição ii são chamadas de misturadores ("mixing") e dá uma ideia de como funciona a perda assintótica de memória.

Teorema - Se ξ^n é um passeio aleatório aperiódico, ou uma cadeia de Markov recorrente irreduzível, então B^∞ é trivial.

Teorema - Todo passeio aleatório aperiódico é fracamente ergódico.

Teorema (Orey) - Toda cadeia de Markov aperiódica e irreduzível é fracamente ergódica.

ACOPLAMENTO DE CADEIAS DE MARKOV

Se $\mu, \nu \in m(E)$ definimos $\gamma \in m(E \times E)$ como um acoplamento de μ, ν se $\gamma(E \times A) = \nu(A)$, $\gamma(A \times E) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{E}$, e notaremos $\gamma = \mu * \nu$.

Em geral $P(\xi, \cdot)$ e $P(\eta, \cdot)$ definem duas medidas em E , donde podemos definir o núcleo acoplado $\tilde{P}((\xi, \eta), \cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ como:

$$\tilde{P}((\xi, \eta), \cdot) = P(\xi, \cdot) * P(\eta, \cdot).$$

que tem todas as propriedades de um núcleo de transição.

Notaremos $\tilde{\xi}_{\xi, \eta}^n$ o processo sobre $\tilde{E}$ que tem núcleo de transição $\tilde{P}$ e estado inicial (ξ, η) .

No caso de E enumerável faremos mais uma restrição

a $\tilde{P}$ que é a seguinte:

$$\mathbb{P}(\tilde{\xi}^n \in \Delta^c / \tilde{\xi}^{n-1} \in \Delta) = 0$$

ou seja, os processos acoplados permanecem colados depois de se encontrarem.

ACOPLAMENTO E TEMPO DE ENCONTRO

Seja $T_{\xi, \eta}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma variável aleatória definida por:

$$T_{\xi, \eta}(\omega) = \inf\{t \geq 0, \tilde{\xi}_{\xi, \eta}^t(\omega) \in \Delta\}$$

onde $\{\tilde{\xi}_{\xi, \eta}^t\}$ é um processo em $E \times E$ de estado inicial (ξ, η) e núcleo de transição $\tilde{P}((\xi, \eta), \cdot) = P(\xi, \cdot) * P(\eta, \cdot)$.

Proposição - Seja $\{\xi^n\}$ uma cadeia de Markov de núcleo $P(\cdot, \cdot)$ e $\tilde{\xi}^n$ uma cadeia de Markov de núcleo $\tilde{P}$. Se $\mathbb{P}(T_{\xi, \eta} < \infty) = 1$ para todo par $(\xi, \eta) \in \hat{E}$, então ξ^n é fracamente ergódica.

Demonstração

$$(1) \quad \tilde{P}^n((\xi, \eta), (\zeta, \zeta)) \leq \inf[P^n(\xi, \zeta); P^n(\eta, \zeta)],$$

pois as projeções de $\tilde{P}^n((\xi, \eta), \cdot)$ são $P^n(\xi, \cdot)$ e $P^n(\eta, \cdot)$.

Somando as desigualdades (1) para todo $\zeta \in E$, teremos:

$$\tilde{P}^n((\xi, \eta), \Delta) \leq \sum_{\zeta} \inf(P^n(\xi, \zeta), P^n(\eta, \zeta)) = \alpha^n(\xi, \eta)$$

mas $\tilde{P}^n((\xi, \eta), \Delta) = \mathbb{P}(\tilde{\xi}_{\xi, \eta}^n \in \Delta) = \mathbb{P}(T_{\xi, \eta} \leq n)$, o que implica

$$\mathbb{P}(T_{\xi, \eta} \leq n) \leq \alpha^n(\xi, \eta),$$

que por sua vez implica

$$\liminf_n \mathbb{P}(T_{\xi,\eta} \leq n) \leq \liminf_n \alpha^n(\xi,\eta)$$

como $\liminf_n \mathbb{P}(T_{\xi,\eta} \leq n) = 1$ teremos que $\alpha^n(\xi,\eta) \xrightarrow{n} 1$, logo $\delta^n(\xi,\eta) \xrightarrow{n} 0$.

Isso significa que $\{\xi^n\}$ é fracamente ergódica.

EXEMPLOS DE ACOPLAMENTOS

a) O acoplamento clássico

Seja $\tilde{\xi}^n$ uma cadeia de Markov em $\tilde{E}$ com núcleo de transição $\tilde{P}$, dado em termos de P da seguinte forma:

- $\tilde{P}((\xi,\xi),(\eta,\eta)) = P(\xi,\eta)$
- $\tilde{P}((\xi,\eta),(\zeta,\rho)) = P((\xi,\zeta) \cdot P(\eta,\rho))$

O processo $\tilde{\xi}^n$ representa a evolução de duas cópias independentes de ξ^n , até que as cópias atinjam o mesmo estado, a partir desse momento as cópias permanecem coladas, com o mesmo núcleo de transição.

b) Acoplamento de Vaserstein

Seja ξ^n uma cadeia de Markov sobre E com núcleo P . Seja $\tilde{\xi}^n$ o processo acoplado, sobre $E \times E$, com núcleo $\tilde{P}$ definido por:

- $\tilde{P}((\xi,\xi),(\zeta,\zeta)) = P(\xi,\zeta)$
- $\tilde{P}((\xi,\eta),(\zeta,\zeta)) = \inf[P(\xi,\zeta), P(\eta,\zeta)]$.

$$- \tilde{P}((\xi, \eta), (\zeta, \rho)) = \frac{[P(\xi, \zeta) - P(\eta, \zeta)]^+ \cdot [P(\xi, \rho) - P(\eta, \rho)]^-}{\|P(\xi, \cdot) - P(\eta, \cdot)\|}$$

O acoplamento de Vaserstein é apropriado para estudar a ergodicidade uniforme. Estudaremos em detalhe este acoplamento na seção 3.1.

Definição - Seja $\delta^{(n)} = \sup_{\xi, \eta \in E} \delta^n(\xi, \eta)$. Diremos que ξ^n é uniformemente ergódica se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^{(n)} = 0.$$

Proposição - Seja ξ^n uma cadeia de Markov. As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) ξ^n é uniformemente ergódica no espaço E.
- ii) $\alpha^{(n)} = \inf_{\xi, \eta} \alpha^n(\xi, \eta) > 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.
- iii) Existem constantes C e $\rho < 1$ tal que

$$\delta^{(n)} \leq C \rho^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observação - A parte iii) desta proposição é uma expressão de ergodicidade geométrica, uma forma mais rápida de convergência que a fornecida pelo acoplamento clássico. Ou seja que este último é mais "fraco" que o de Vaserstein, no sentido que a probabilidade de ir de uma configuração qualquer para a diagonal é sempre menor no acoplamento clássico:

$$\tilde{P}((\xi, \eta), (\zeta, \zeta)) = P(\xi, \zeta) \cdot P(\eta, \zeta) \text{ no clássico}$$

$$e \quad \tilde{P}((\xi, \eta), (\zeta, \zeta)) = \inf[P(\xi, \zeta), P(\eta, \zeta)]$$

$$e \quad \inf(a, b) \leq a \cdot b \text{ se } 0 \leq a, b \leq 1.$$

Ou seja que, processos acoplados segundo Vaserstein podem alcançar a diagonal em um tempo finito com probabilidade 1, sem que isso ocorra com duas cópias acopladas classicamente.

Pode ser verificado o fato que o acoplamento de Vaserstein é o acoplamento Markoviano que da mais alta probabilidade de ir para a diagonal, desde uma configuração qualquer.

Griffeath, em [3], mostra a existência de um acoplamento não markoviano, que chama de Maximal, que satisfaz o seguinte:

$$\tilde{P}^n((\xi, \eta), (\zeta, \zeta)) = \inf[P^n(\xi, \zeta), P^n(\eta, \zeta)].$$

Para este acoplamento vale a igualdade:

$$\mathbb{P}(T_{\xi, \eta} \leq n) = \alpha^n(\xi, \eta) = \sum_{\zeta} [P^n(\xi, \zeta) \wedge P^n(\eta, \zeta)]$$

donde se segue que

$$\mathbb{P}(T_{\xi, \eta} < \infty) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \delta^n(\xi, \eta)$$

O que significa que o processo $\tilde{\xi}^n$ alcança a diagonal num tempo finito com probabilidade 1 se e somente se $(\xi^n)_n$ é fracamente ergódico.

CAPÍTULO 2

ASSOCIAÇÃO PARA PROCESSOS DE PROXIMIDADE

2.1 - INTRODUÇÃO

Seja S um conjunto enumerável, E definido como $E = \{0,1\}^S$, $\hat{E} = P_f(S)$, o conjunto das partes finitas de S . Seja $C_F = \{\xi \in E, \xi(k) = 1, k \in F\}$ definido para todo $F \in \hat{E}$. Consideremos P um núcleo de transição definido sobre $E \times \epsilon$. $\hat{P}$ um núcleo de transição definido sobre o espaço enumerável $\hat{E}$:

$$\hat{P}: \hat{E} \times \hat{E} \longrightarrow [0,1].$$

Diremos que P e $\hat{P}$ são dois núcleos associados se vale a seguinte igualdade:

$$P(\xi, C_F) = \sum_{I \in \hat{E}} \hat{P}(F, I) 1_{C_F}(\xi)$$

para todo $\xi \in E$, $F \in \hat{E}$.

A família $\{C_F\}_{F \in \hat{E}}$ é geradora da σ -álgebra ϵ , donde o conhecimento do núcleo $\hat{P}$ é suficiente para definir totalmente o núcleo $P(\xi, \cdot)$, $\forall \xi$. Note-se que o núcleo $\hat{P}$ está defi

nido num espaço enumerável, espaço no qual pode ser caracterizado exaustivamente. Neste capítulo forneceremos dois núcleos associados e mostraremos como a ergodicidade do processo de núcleo $\hat{P}$ (o que é simples de ser provado) implica na ergodicidade do processo de núcleo P .

2.2 - O PROCESSO DE PROXIMIDADE

Seja $q: \hat{E} \rightarrow [0,1]$ uma aplicação tal que $\sum_{F \in \hat{E}} q(F) = 1$.

Seja P um núcleo de transição $P: E \times E \rightarrow [0,1]$ definido:

$$P(\xi, C_F) = \sum_{k \in F} P(\xi, C_k)$$

onde

$$P(\xi, C_k) = \sum_{I \in \hat{E}} q(I) \prod_{j \in I} \xi(j+k)$$

com a convenção: $\prod_{j \in \emptyset} \xi(j+k) = 1$.

Exemplo (Modelo de Toom)

Seja $S = \mathbb{Z}$, $E = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, seja θ tal que $0 \leq \theta \leq 1$, seja $q: \hat{E} \rightarrow [0,1]$ definida como:

$$q(F) = \begin{cases} 1-\theta & \text{se } F = \{-1,0\} \\ \theta & \text{se } F = \emptyset \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

então $P(\xi, C_k) = \theta \prod_{j \in \emptyset} \xi(j+k) + (1-\theta) \prod_{j \in \{-1,0\}} \xi(j+k) = \theta + (1-\theta)\xi(k-1)\xi(k)$.

2.3 - O PROCESSO DE RAMIFICAÇÃO COM INTERFERÊNCIA

Sobre $\hat{E}$ vamos definir um núcleo de transição da seguinte forma

$$\hat{P}(F, I) = \sum \left\{ \prod_{k \in F} q(J_k) \right\}; F, I \in \hat{E}$$

onde a soma é feita sobre as famílias

$$\left\{ \{J_k\}_{k \in F} \subset \hat{E}; \bigcup_{k \in F} (J_k + k) = I \right\}$$

e chamaremos de *processo de ramificação com interferência* aquele que tenha $\hat{P}$ como núcleo de transição. (Esses processos bem como os de proximidade foram estudados por Holley e Liggett em [9]).

2.4 - ASSOCIAÇÃO DOS PROCESSOS

Pode-se demonstrar diretamente a associação destes dois processos, mas isso é feito de forma mais elegante e intuitiva introduzindo certas variáveis aleatórias.

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e

$$J_{k,n}: \Omega \longrightarrow \hat{E}, \quad k \in S, \quad n \in \mathbb{N}$$

uma sequência de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, de lei:

$$\mathbb{P}(J_{k,n} = F) = q(F), \quad \forall k \in S, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definição - Seja $H: \Omega \times E \longrightarrow E$ definida por:

$$H(\omega, \xi)(k) = \prod_{j \in J_k(\omega)} \xi(k+j)$$

Seja $\hat{H}: \Omega \times \hat{E} \longrightarrow \hat{E}$ definida por:

$$\hat{H}(\omega, F) = \bigcup_{k \in F} [J_k(\omega) + k]$$

LEMA 2.1 - $P(\xi, C_F) = \int_{\Omega} 1_{C_F}(H(\omega, \xi)) P(d\omega)$

Demonstração

$$P(\xi, C_F) = \prod_{k \in F} P(\xi, C_k) = \prod_{k \in F} \sum_{I \in \hat{E}} q(I) \prod_{j \in I} \xi(j+k)$$

por outro lado

$$\int_{\Omega} 1_{C_F}(H(\omega, \xi)) P(d\omega) = \int_{\Omega} \prod_{k \in F} 1_{C_k}(H(\omega, \xi)) P(d\omega) =$$

como $\{1_{C_k}(H(\omega, \xi))\}_k$ são variáveis aleatórias independentes.

$$\begin{aligned} &= \prod_{k \in F} \sum_{I \in \hat{E}} \int_{\{J_k=I\}} 1_{C_k}(H(\omega, \xi)) P(d\omega) = \\ &= \prod_{k \in F} \sum_{I \in \hat{E}} \int_{\{J_k=I\}} \prod_{j \in J_k(\omega)} \xi(k+j) dP(\omega) = \\ &= \prod_{k \in F} \sum_{I \in \hat{E}} q(I) \prod_{j \in I} \xi(k+j), \end{aligned}$$

o que demonstra o lema.

LEMA 2.2 - $1_{C_F}(H(\omega, \xi)) = 1_{C_{\hat{H}(\omega, F)}}(\xi)$

Demonstração

$$\begin{aligned}
 1_{C_F}(H(\omega, \xi)) &= \prod_{k \in F} H(\omega, \xi)(k) = \prod_{k \in F} \prod_{j \in J_k(\omega)} \xi(k+j) = \\
 &= \prod_{k \in F} \prod_{j \in (J_k(\omega) + k)} (j) = \prod_{j \in \bigcup_{k \in F} (J_k(\omega) + k)} = \\
 &= 1_{C_{\hat{H}(\omega, F)}}(\xi).
 \end{aligned}$$

LEMA 2.3 - $\hat{P}(F, G) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega, \hat{H}(\omega, F) = G\}$

Demonstração

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\{\omega \in \Omega; \hat{H}(\omega, F) = G\} &= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \bigcup_{k \in F} (J_k(\omega) + k) = G\} = \\
 &= \sum \mathbb{P}\{\omega \in \Omega; J_k(\omega) = J_k, \bigcup_{k \in F} (J_k + k) = G\}
 \end{aligned}$$

onde a soma é feita sobre todas as famílias $\{J_k\}_{k \in F} \subset \hat{E}$.

$$= \hat{P}(F, G).$$

Observação - No processo de núcleo P cada coordenada k da nova configuração escolhe de acordo a lei q um conjunto $F \in \hat{E}$ e verifica se ξ (a configuração antiga) nesse conjunto traslado no ponto k tem todas as coordenadas com valor 1. Neste caso na coordenada k é colocado o valor 1, caso contrário é colocado 0.

No processo de núcleo $\hat{P}$, para cada coordenada k do conjunto F é escolhido aleatoriamente um conjunto $J_k \in \hat{E}$ com probabilidade $q(J_k)$. A união destes $J_k + k$ será o novo valor assumido pelo processo.

Proposição 2.4 - Os processos de núcleos P e $\hat{P}$ são associados.

Demonstração -

$$P(\xi, C_F) = \int_{\Omega} 1_{C_F}(H(\omega, \xi)) P(d\omega) =$$

aplicando o lema 1.2:

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} 1_{\hat{H}(\omega, F)}(\xi) P(d\omega) = \sum_{I \in \hat{E}} \int_{\{\omega: \hat{H}(\omega, F)=I\}} 1_{C_I}(\xi) P(d\omega) \\ &= \sum_{I \in \hat{E}} 1_{C_I}(\xi) P(\hat{H}(\omega, F)=I) = \sum_{I \in \hat{E}} \hat{P}(F, I) 1_{C_I}(\xi) \end{aligned}$$

Corolário - $P^n(\xi, C_F) = \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^n(F, J) 1_{C_J}(\xi)$

Demonstração - Recorrência, para $n=1$ o resultado vale pela fórmula de associação. Suponhamos vale a igualdade para $n-1$.

$$\begin{aligned} P^n(\xi, C_F) &= \int_E P^{n-1}(\xi, d\eta) P(\eta, C_F) = \\ &= \int_E P^{n-1}(\xi, d\eta) \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}(F, J) 1_{C_J}(\eta) = \end{aligned}$$

Pelo teorema de Fubini (todas as funções são positivas):

$$\begin{aligned} &= \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}(F, J) \int_E P^{n-1}(\xi, d\eta) 1_{C_J}(\eta) = \\ &= \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}(F, J) P^{n-1}(\xi, C_J) = \end{aligned}$$

por recorrência:

$$= \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}(F, J) \sum_{I \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(J, I) 1_{C_I}(\xi) =$$

Aplicando novamente o teorema de Fubini

$$\begin{aligned} & \sum_{I \in \hat{E}} \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}(F, J) \hat{P}^{n-1}(J, I) 1_{C_I}(\xi) = \\ & = \sum_{I \in \hat{E}} \hat{P}^n(F, I) 1_{C_I}(\xi). \end{aligned}$$

Observação - Este resultado é usado para mostrar a equivalência entre as condições suficientes fornecidas por acoplamento e associação.

2.5 - UMA VERSÃO DO PROCESSO COM NÚCLEO DE TRANSIÇÃO $\hat{P}(\cdot, \cdot)$

Para cada $F \in \hat{E}$ definimos $(X_n^F)_{n=0,1,\dots}$ uma sequência de variáveis aleatórias, assumindo valores em $\hat{E}$ da seguinte maneira:

$$X_0^F(\omega) \equiv F; X_{n+1}^F(\omega) = \hat{H}(\omega, X_n^F) = \bigcup_{k \in X_n^F(\omega)} [J_{k,n}(\omega) + k]$$

então $(X_n^F)_n$ é uma versão da cadeia de Markov em $\hat{E}$ de núcleo $\hat{P}(\cdot, \cdot)$ e de configuração inicial F .

Observação -

$$X_1^{\{k\}} \text{ têm lei } \mathbb{P}(X_1^{\{k\}} = F) = q(F+k)$$

$$X_n^{\{k\}} \text{ tem lei } \mathbb{P}(X_n^{\{k\}} = F) = \sum_{J \in \hat{E}} \mathbb{P}(X_{n-1}^{\{k\}} = J) \mathbb{P}(X_n^{\{k\}} = F / X_{n-1}^{\{k\}} = J)$$

$$= \sum_{J \in \hat{E}} P(X_{n-1}^{\{k\}} = J) \hat{P}(J, F)$$

Lema - $E \text{ card } X_n^{\{k\}} = \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(\{k\}, J) \sum_{F \in \hat{E}} \text{card } F \hat{P}(J, F)$

Demonstração

$$E \text{ card } X_n^{\{k\}} = \sum_{F \in \hat{E}} \text{card } F P(X_n^{\{k\}} = F) =$$

$$= \sum_{F \in \hat{E}} \text{card } F \sum_{J \in \hat{E}} P(X_{n-1}^{\{k\}} = J) \cdot \hat{P}(J, F) =$$

usando o teorema de Fubini (todas as funções são positivas):

$$= \sum_{J \in \hat{E}} P(X_{n-1}^{\{k\}} = J) \sum_{F \in \hat{E}} \text{card } F \hat{P}(J, F) =$$

$$= \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(\{k\}, J) \sum_{F \in \hat{E}} \text{card } F \hat{P}(J, F) .$$

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE $(X_n^F)_n$

Vamos estudar o comportamento da esperança do cardinal de (X_n^F) quando n cresce. Se esta esperança converge para zero, poderemos afirmar que $X_n^F \xrightarrow{qs} \emptyset$, $\forall F$, o que daria a ergodicidade deste processo.

Lema 2.4 - Se $E(\text{card } J_{k,n}) < 1$ então $X_n^F \xrightarrow{qs} \emptyset$, $\forall F \in \hat{E}$.

Demonstração - Dado que $X_{n+1}^F(\omega) = \bigcup_{k \in X_n^F(\omega)} [J_{k,n}(\omega) + k]$

temos que $\text{card } X_{n+1}^F(\omega) \leq \sum_{k \in X_n^F(\omega)} \text{card}(J_{k,n}(\omega) + k)$

$$= \sum_{k \in X_n^F(\omega)} \text{card}(J_{k,n}(\omega))$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\text{card}(X_{n+1}^F)] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{card } X_n^F) \cdot \mathbb{E}(\text{card } J_{k,n})$$

e por recorrência:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\text{card}(X_n^F)] \leq \mathbb{E}(\text{card } X_0^F) [\mathbb{E} \text{card } J_{k,n}]^n$$

$$= (\text{card } F) \cdot [\mathbb{E} \text{card } J_{k,n}]^n$$

ou seja $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\text{card } X_n^F] \xrightarrow{n} 0$ se $\mathbb{E}(\text{card } J_{k,n})$ como card é uma função positiva teremos que $(\text{card } X_n^F)_n \xrightarrow{qs} 0$ o que implica que $X_n^F \xrightarrow{qs} \emptyset$.

Observação - $\mathbb{E}(\text{card } J_{k,n}) = \sum_{I \in \hat{E}} q(I) \text{card}(I)$.

Definição - Seja ε_1 uma medida sobre E tal que

$$\varepsilon_1\{n: n(k)=1 \forall k\} = 1$$

(massa de Dirac).

Lema 2.5 - Se $X_n^F \xrightarrow{qs} \emptyset$ então $\mu P^n \xrightarrow{n} \varepsilon_1 \forall \mu$ definida sobre (E, ε) , no sentido de convergência fraca.

Demonstração - Basta provar que para todo $F \in \hat{E}$ $\mu P^n(C_F) \xrightarrow{n} 1$

$$\mu P^n(C_F) = \int_E \mu(d\xi) P^n(\xi, C_F) =$$

pela fórmula de associação:

$$= \int_E \mu(d\xi) \sum_{I \in \hat{E}} \hat{P}^{(n)}(F, I) 1_{C_I}(\xi) =$$

$$= \int_E \mu(d\xi) P(\xi \in C_{X_n^F})$$

$$\text{agora } P(\xi \in C_{X_n^F}) \xrightarrow{\frac{qc}{n}} P(\xi \in C_\emptyset) = 1$$

$$\Rightarrow \int_E \mu(d\xi) P^n(\xi, C_F) \xrightarrow{n} 1$$

$\Rightarrow \mu P^n \longrightarrow \varepsilon_1$ (sobre os conjuntos cilíndricos, ou seja sobre as funções aprox unif. por funções cilíndricas).

$$\Rightarrow \mu P^n \xrightarrow{\text{frac}} \varepsilon_1.$$

Exemplo - Modelo de Toom - Neste modelo que vimos na introdução deste capítulo teremos erodicidade se

$$\sum_{F \in \hat{E}} q(F) \text{ card } F < 1$$

ou seja se $(1-\theta) \cdot 2 < 1$, ou seja se $\theta > \frac{1}{2}$.

CAPÍTULO 3

ACOPLAMENTO E ERGODICIDADE

3.1 - ACOPLAMENTO DE VASERSTEIN

Sejam μ, ν medidas de probabilidade sobre (E, ϵ) , definimos $\|\mu - \nu\| = \sup_{A \in \epsilon} |\mu(A) - \nu(A)|$ que é igual a $(\mu - \nu)^+(E) = (\mu - \nu)^-(E)$.

Se $f \in C(E)$ definimos $[f] = \sup_{\xi, \eta} |f(\xi) - f(\eta)|$, chamaremos $(\tilde{E}, \tilde{\epsilon})$ a $(E \times E, \epsilon \otimes \epsilon)$, e $\Delta \in \tilde{\epsilon}$ será $\Delta = \{(\xi, \xi), \xi \in E\}$.

Se $\tilde{A} \in \epsilon \times \epsilon$, definimos $\tilde{A}_\Delta = \{\xi \in E; (\xi, \xi) \in \tilde{A}\} \in \epsilon$ $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ serão pontos de $\tilde{E}$.

Proposição 3.1 - (Acoplamento de Vaserstein)

Sejam μ, ν medidas de probabilidade definidas sobre E ; então existe $\gamma: \tilde{\epsilon} \rightarrow [0, 1]$ tal que

- i) $\mu(B \times E) = \mu(B)$, $\nu(E \times B) = \nu(B)$ para todo $B \in \epsilon$
- ii) $\gamma(\Delta^c) \leq \|\mu - \nu\|$

Demonstração

- a) Caso E enumerável.

defina

$$\gamma(\xi, \xi) = \mu(\xi) \wedge \nu(\xi) = [\mu - (\mu - \nu)^+] (\xi)$$

neste caso teremos:

$$\gamma(\Delta) = \sum_{\xi \in E} \mu(\xi) \wedge \nu(\xi) = 1 - (\mu - \nu)^+(E) = 1 - \|\mu - \nu\|$$

ou seja que $\gamma(\Delta^c) = \|\mu - \nu\|$

Fora de Δ pomos:

$$\gamma(\cdot, \cdot) = \frac{(\mu - \nu)^+ \ominus (\mu - \nu)^-}{\|\mu - \nu\|}$$

com esta definição é satisfeita a condição ii), pois:

$$\begin{aligned} \gamma(\{\xi\} \times E) &= \sum_{\eta \in E} \gamma(\xi, \eta) = \\ &= \mu(\xi) \wedge \nu(\xi) + \frac{(\mu - \nu)^+(\xi)}{\|\mu - \nu\|} (\mu - \nu)^-(E) = \mu(\xi) \end{aligned}$$

e, por outro lado

$$\gamma(E, \eta) = \nu(\eta)$$

b) Caso geral

Seja $\tilde{A} \in \epsilon \times \epsilon$

Seja $\tilde{A}_\Delta = \{\xi \in E / (\xi, \xi) \in \tilde{A}\} \in \epsilon$

Definimos:

$$\gamma(\tilde{A}) = [\mu - (\mu - \nu)^+] (\tilde{A}_\Delta) + \frac{1}{\|\mu - \nu\|} [(\mu - \nu)^+ \ominus (\nu - \mu)^+] (\tilde{A})$$

então teremos

i) $\gamma(A \times E) = [\mu - (\mu - \nu)^+] (A) + (\mu - \nu)^+(A) = \mu(A)$

$\gamma(E \times A) = \nu(A)$

ii) Se $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{E}}$, $A \supset \Delta$ (ou seja $A_{\Delta} = E$), teremos

$$\gamma(\tilde{A}) \geq [\mu - (\mu - \nu)^+] (\tilde{A}_{\Delta}) = 1 - (\mu - \nu)^+(E) = 1 - \|\mu - \nu\|$$

ou seja

$$\gamma(\tilde{A}^c) \leq \|\mu - \nu\| \implies \gamma(\Delta^c) \leq \|\mu - \nu\|$$

Notação - Neste caso notaremos $\gamma = \mu * \nu$.

3.2 - APLICAÇÃO AO CASO UNIDIMENSIONAL

Consideremos agora $|S| = 1$, seja $[f] = \sup_{\xi, \eta} |f(\xi) - f(\eta)|$

Lema 3.2 - Seja $f \in C(E)$, então

$$\left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| \leq [f] \|\mu - \nu\|$$

Demonstração - $\left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| =$

$$= \left| \int (f(\xi) - f(\eta)) \gamma(d\xi d\eta) \right| \leq [f] \gamma\{(\xi, \eta) / f(\xi) - f(\eta) \neq 0\} \leq$$

$$\leq [f] \gamma(\Delta^c) \leq [f] \|\mu - \nu\| \quad (\text{por proposição 2.1}).$$

3.3 - O TEOREMA DE DOBRUSHIN VASERSTEIN

Este teorema fornece uma condição suficiente para ergodicidade no caso de S enumerável e P um núcleo de Feller.

Definição - Sejam μ, ν . medidas de probabilidade definidas sobre $\mathcal{E}$. $k \in S$ uma coordenada, definimos:

$$\rho_k(\mu, \nu) = \sup_{\substack{A \subset E_k \\ B, C \subset E_{[1, k-1]}}} |\mu(A/B) - \nu(A/C)|$$

Se μ, ν são medidas produto sobre E , teremos

$$\rho_k(\mu, \nu) = \sup_{A \in E_k} |\mu(A) - \nu(A)|$$

ou seja que ρ_k é a distância entre μ e ν projetadas na coordenada k .

Proposição 3.3 - Existe γ , medida de probabilidade definida sobre $\tilde{E}$, com projeções μ, ν tal que

$$\gamma(\Delta_k^c) \leq \rho_k(\mu, \nu)$$

Demonstração

a) Suponhamos que μ e ν são medidas produto, ou seja se

$$\mu = \bigotimes_{k \in S} \mu_k \quad \nu = \bigotimes_{k \in S} \nu_k$$

definimos $\gamma_k = \mu_k * \nu_k$ e teremos graças ao acoplamento de Vasserstein que:

$$\gamma_k(\Delta_k^c) \leq \rho_k(\mu, \nu)$$

$$\text{Definimos } \gamma = \bigotimes_{k \in S} \gamma_k.$$

b) Se μ e ν são medidas de probabilidade qualquer consideramos $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\tilde{E} = \prod_{i=0}^{\infty} (E_i \times E_i)$$

Se $A \in E_i$, definimos $\mu_i(A) = \mu(E \times \dots \times A \times E \times \dots)$ μ_i é a projeção de μ na coordenada i .

Definimos agora $\gamma^0 = \mu_0 * \nu_0$ sobre $E_0 \times E_0$.

Suponhamos ter γ^n definida sobre $\prod_{i \leq n} (E_i \times E_i)$.

Podemos então escolher versões de

$$\mu(d\xi_{n+1}/F_n)$$

$$\nu(d\eta_{n+1}/F_n)$$

onde $F_n = \tau(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ $\tilde{F}_n = F_n \otimes F_n$ tal que se satisfaça:

$$\|\mu(\cdot/F_n)(\xi_0, \dots, \xi_n) - \nu(\cdot/F_n)(\eta_0, \dots, \eta_n)\| \leq \rho_{n+1}(\mu, \nu)$$

então definimos

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}(d\xi_{n+1}, d\eta_{n+1}/\tilde{F}_n)(\xi_0, \dots, \xi_n, \eta_0, \dots, \eta_n) &= \\ &= \mu(d\xi_{n+1}/F_n)(\xi_0, \dots, \xi_n) * \nu(d\eta_{n+1}/F_n)(\eta_0, \dots, \eta_n) \end{aligned}$$

Consideremos γ_{n+1} como probabilidade de transição para definir γ^{n+1} sobre $\prod_{i \leq n+1} (E_i \times E_i)$.

Podemos então definir γ sobre os conjuntos cilíndricos.

Seja $\tilde{A}_k \in \varepsilon \times \varepsilon$, $\tilde{A}_k \subset \tilde{E}_k$, um conjunto cilíndrico que depende só da coordenada k .

Definimos

$$\begin{aligned} \gamma(\tilde{A}_k) &= \gamma^k(\tilde{A}_k) = \\ &= \int_{\tilde{E}_0} \dots \int_{\tilde{E}_{n-1}} \int_{\tilde{A}_k} \gamma_k(d\tilde{\xi}_k/\tilde{F}_{k-1})(\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_{k-1}) \cdot \\ &\quad \cdot \gamma_{k-1}(d\tilde{\xi}_{k-1}/\tilde{F}_{k-2})(\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_{k-2}) \dots \gamma_0(\tilde{\xi}_0) \end{aligned}$$

A medida γ construída desta forma tem projeções μ e ν , pois se $A_k \subset E_k$ teremos que

$$\begin{aligned} \gamma(E \times A_k) &= \int_{\tilde{E}_0} \dots \int_{E_{k-1}} \int_{E \times A_k} \gamma_k(d\tilde{\xi}_k / F_{k-1})(\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_{k-1}) \cdot \\ &\quad \cdot \gamma_{k-1}(d\tilde{\xi}_{k-1} / F_{k-2})(\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_{k-2}) \dots \gamma_0(d\tilde{\xi}_0) = \\ &= \nu(A_k), \end{aligned}$$

e da mesma forma $\gamma(A_k \times E) = \mu(A_k)$.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \gamma(\Delta_{k+1}^c) &= \gamma^{k+1}(\tilde{E}_0 \times \dots \times \tilde{E}_k \times \Delta_{k+1}^c) = \\ &= \int_{\tilde{E}_0 \times \dots \times \tilde{E}_k} \int_{\tilde{E}_{k+1}} \gamma_{k+1}(\Delta_{k+1}^c / \xi_0, \dots, \xi_k, \eta_0, \dots, \eta_k) \cdot \\ &\quad \cdot \gamma^k(d\xi_0, \dots, d\xi_k, d\eta_0, \dots, d\eta_k) \leq \\ &\leq \int_{\tilde{E}_0} \dots \int_{\tilde{E}_k} \|\mu_{k+1}(\cdot / \xi_0, \dots, \xi_k) - \nu_{k+1}(\cdot / \eta_0, \dots, \eta_k)\| \cdot \\ &\quad \cdot \gamma^k(d\xi_0, \dots, d\xi_k, d\eta_0, \dots, d\eta_k) = \\ &= \rho_{k+1}(\mu, \nu) \int_{\tilde{E}_0 \times \dots \times \tilde{E}_k} \gamma^k(d\xi_0, \dots, d\xi_k, d\eta_0, \dots, d\eta_k) = \\ &= \rho_{k+1}(\mu, \nu) \\ \Rightarrow \gamma(\Delta_{k+1}^c) &\leq \rho_{k+1}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Corolário 3.4 -

$$f \in C(B) \implies \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| \leq \sum_{k \in S} \rho_k(f) \rho_k(\mu, \nu)$$

Demonstração -

Seja $\phi(\xi, \eta) = f(\xi) - f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\xi, \eta)$, definida:

$$\phi_k(\xi, \eta) = f(\xi_k) - f(\xi_{k-1}) \text{ onde } \xi_k(i) = \begin{cases} \xi(i) & \text{se } i < k \\ \eta(i) & \text{se } i \geq k \end{cases}$$

$|\phi_k| \leq \rho_k(f) I_{\Delta_k^C}$ ou seja $|\phi_k(\xi, \eta)| \leq \rho_k(f) I_{\Delta_k^C}(\xi, \eta)$, então

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k| d\gamma \leq \sum_{k \in S} \rho_k(f) \int I_{\Delta_k^C}(\xi, \eta) \gamma(d\xi, d\eta) = \\ &= \sum_k \rho_k(f) \gamma(\Delta_k^C) \sum_k \rho_k(f) \rho_k(\mu, \nu). \end{aligned}$$

pela proposição 3.3.

Definição - $\rho_{i,k} = \sup_{\substack{\xi(k)=\eta(k) \\ \forall k \neq i}} \rho_k(P(\xi, \cdot)P(\eta, \cdot))$

Observações - $\rho_{i,k}$ "mede" a influência da coordenada i sobre a coordenada k . Se há independência $\rho_{i,k} = 0$.

Seja $M = (\rho_{i,k})_{i,k \in S}$ a matriz das influências.

Seja $M^n = M^{n-1} \cdot M$ (produto matricial).

Corolário 3.5 -

$$\rho_k(Pf) \leq \sum_{h \in S} M_{k,h}(P) \rho_h(f)$$

Demonstração

$$\rho_k(Pf) = \sup_{\substack{\xi(j)=\eta(j) \\ j \neq k}} |Pf(\xi) - Pf(\eta)| \leq$$

pelo Corolário 3.4:

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{\substack{\xi(j)=\eta(j) \\ j \neq k}} \sum_{h \in S} \rho_h(f) \rho_h(P(\xi, \cdot) - P(\eta, \cdot)) \leq \\ &\leq \sum_{h \in S} \rho_h(f) \sup_{\substack{\xi(j)=\eta(j) \\ j \neq k}} \rho_h(P(\xi, \cdot) - P(\eta, \cdot)) = \\ &= \sum_{h \in S} \rho_h(f) \rho_{k,h}(P) = M_k \rho(f) \end{aligned}$$

onde $M_k = (M_{k,h})_{h \in S}$ é um vetor fila.

Corolário 3.6 - $\rho(P^n f) \leq M^n \rho(f)$ onde M^n é a potência n-ésima da matriz M , e o produto $M^n \rho$ é um produto da matriz M^n com o vetor coluna $\rho(f)$.

Demonstração - $\rho(Pf) = (\rho_k(Pf))_{k \in S} \leq (M_k \rho(f))_{k \in S} = M \rho(f)$

donde por recorrência

$$\rho(P^n f) \leq M \rho(P^{n-1} f) \leq M^n \rho(f).$$

Teorema 3.7 (de Dobrushin, Vaserstein) - Seja P um núcleo de Feller, definido sobre $E \times E$. Seja $M = (\rho_{i,k}(P))_{i,k \in S}$ de tal forma que $\sum_{i \in S} M_{i,k}^n \xrightarrow{n} 0$, então $(\mu - \nu)P^n \xrightarrow{n} 0$ (fracamente, ou seja $(\mu - \nu)P^n f \rightarrow 0$ para todo $f \in C(E)$).

Demonstração - Seja f cilíndrica, $f \in C(E)$, teremos que:

$$|(\mu - \nu)P^n f| = \left| \int P^n f d\mu - \int P^n f d\nu \right| \leq$$

por Corolário 3.4:

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k \in S} \rho_k(P^n f) D_k(\mu, \nu) \leq \\ &\leq \sum_{k \in S} \rho_k(P^n f) \leq (\text{pois } D_k(\mu, \nu) \leq 1) \end{aligned}$$

por Corolário 3.6:

$$\leq \sum_{k \in S} \sum_{h \in S} M_{k,h}^n \rho_h(f) =$$

aplicando o Teorema de Fubini

$$= \sum_{k \in S} \sum_{h \in S} M_{k,h}^n \rho_h(f)$$

essa soma é finita em h , pois f é cilíndrica então, dado que

$\sum_{k \in S} M_{k,h}^n \xrightarrow{n} 0$, teremos:

$$\sum_{h \in S} \sum_{k \in S} M_{k,h}^n \rho_h(f) \xrightarrow{n} 0.$$

Corolário 3.8 - Se $\sum_{k \in S} M_{k,h} \leq \theta < 1$ para toda coordenada k , então $(\mu - \nu)P^n \xrightarrow{fr} 0$.

Demonstração : $\sum_{k \in S} M_{k,h}^n = \sum_i \sum_h M_{i,h} M_{h,k}^{n-1} =$

por Teorema de Fubini:

$$= \sum_h \left(\sum_i M_{i,h} \right) M_{h,k}^{n-1} \leq \theta \sum_{h \in S} M_{h,k}^{n-1} \leq$$

por recorrência

$$\leq \theta^n \xrightarrow{n} 0.$$

Resumo: A condição suficiente fornecida pelo acoplamento de Vaserstein para ergodicidade é $\sum_{h \in S} \rho_{h,k}(P) < 1$.

Teorema 3.8 - Seja $E = \prod_{i \in S} E_i$, E_i finito para todo i , então existe uma probabilidade μ estacionária para P . A unicidade é equivalente à convergência de $\mu^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \nu P^t \xrightarrow{\text{fr}} \mu$, para toda $\nu \in m(E)$.

Para demonstrar esse teorema é necessário o Teorema de Prohorov, (ver Billingley [5], pág. 37).

Teorema (Prohorov) - Se m é comprimida ("tight") então é relativamente compacto [comprimida é definida por " $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in E$, compacto tal que $\mu(k_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$, para toda $\mu \in m$ "]

Demonstração de 3.8

E é produto enumerável de espaços finitos, ou seja compacto, por tanto $m(E)$ é comprimido, pelo Teorema de Prohorov, $m(E)$ é relativamente compacto, ou seja que toda sequência em m contém uma subsequência que converge em m , então existe $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\mu^\infty \in m$ tal que $\mu^{(n_k)} \xrightarrow{k} \mu^\infty$.

$$\begin{aligned} \mu^\infty P &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n \nu P^t P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1} \frac{1}{n+1} \sum_{t=1}^n \nu P^t = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n \nu P^t = \mu^\infty \end{aligned}$$

então μ^∞ é invariante.

3.4 - ERGODICIDADE E TEMPO DE ENCONTRO

Sejam $\xi, \eta \in E$, $\tilde{\xi} \in E \times E$, $\tilde{\xi} = (\xi, \eta)$

Seja $\tilde{E} \in E$, $A \in \mathcal{E}$

Seja $\tilde{\xi}_{\xi, \eta}^n$ um processo (v.a.) com núcleo de transição $\tilde{P}(\cdot, \cdot): (E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow [0, 1]$ tal que

$$\tilde{P}((\xi, \eta), A \times E) = P(\xi, A)$$

$$\tilde{P}((\xi, \eta), E \times A) = P(\eta, A)$$

$\tilde{\xi}_{\xi, \eta}^n$ tem lei $\mathbb{P}(\tilde{\xi}_{\xi, \eta}^n \in \tilde{A}) = P^n((\xi, \eta), \tilde{A})$, $\tilde{A} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ diremos que $\tilde{\xi}_{\xi, \eta}^n$ é o processo acoplado e que $\tilde{P}$ é o núcleo acoplado.

Definição: (tempo de encontro de duas configurações)

$$T_F^{\xi, \eta} = \inf\{t: \tilde{\xi}_{\xi, \eta}^t \in \Delta_F\}$$

onde $\Delta_F = \{(\xi, \eta) \in E; \xi(k) = \eta(k), k \in F\}$

Observação: $T_F^{\xi, \eta}$ é o primeiro instante em que duas evoluções coincidem no conjunto F , quando evoluem conjuntamente com um núcleo $\tilde{P}$.

Seja agora $\tilde{P}((\xi, \eta), \cdot) = P(\xi, \cdot) * P(\eta, \cdot)$

Proposição: $\sum_{i \in S} \rho_{i, k}(P) < 1 \implies \mathbb{P}(T_k^{\xi, \eta} < \infty) = 1$

Demonstração - Seja $\{\tilde{\xi}^t\}_{t=0}^\infty$ o processo com núcleo $\tilde{P}$, e estado inicial $\xi^0 \equiv (\xi, \eta)$

$$\{T_k^{\xi, \eta} = \infty\} = \bigcap_{t=0}^\infty \{\tilde{\xi}^t \in \Delta_k^c\}$$

$$\mathbb{P}\{T_k^{\xi, \eta} = \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{ \prod_{t=0}^n \tilde{\xi}^t \in \Delta_k^c \right\} =$$

Pela propriedade Markoviana de $\tilde{\xi}^t$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{t=1}^n \mathbb{P}(\tilde{\xi}^t \in \Delta_k^c / \tilde{\xi}^{t-1} \in \Delta_k^c) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\tilde{\xi}^0 \in \Delta_k^c)}_{=1} \right) \leq$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\tilde{\xi} \in \Delta_k^c} \mathbb{P}(\tilde{\xi}, \Delta_k^c) \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\tilde{\xi} \in \Delta_k^c} \int_E \tilde{P}(\tilde{\xi}, d\tilde{\eta}) I_{\Delta_k^c}(\tilde{\eta}) \right)^n \leq$$

Por lema do acoplamento:

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\substack{\tilde{\xi} \in \Delta_k^c \\ \tilde{\xi} = (\xi, \eta)}} \rho_k(P(\xi, \cdot), P(\eta, \cdot)) \right)^n \leq$$

pelo lema que demonstraremos em seguida:

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i \in S} \rho_{i,k}(P) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Lema: $\rho_k(P(\xi, \cdot), P(\eta, \cdot)) \leq \sum_{i \in S} \rho_{i,k}(P)$

Demonstração -

$$\rho_k(P(\xi, \cdot), P(\eta, \cdot)) = |P(\xi, C_k) - P(\eta, C_k)| \leq$$

seja $\xi_i \in E$ tal que $\xi_i(j) = \begin{cases} \xi(j) & j \leq i \\ \eta(j) & j > i \end{cases}$

$$\leq \sum_{i \in S} |P(\xi^i, C_k) - P(\xi^{i+1}, C_k)| \leq$$

ξ^i e ξ^{i+1} diferem no máximo na coordenada i

$$\leq \sum_{i \in S} \sup_{\substack{\xi(j)=\eta(j) \\ j \neq i}} |P(\xi, C_k) - P(\eta, C_k)| = \sum_{i \in S} \rho_{i,k}(P).$$

Corolário: $\sum_{i \in S} \rho_{i,k}(P) < 1 \implies \forall A \in \hat{E} \quad P(T_A^{\xi, \eta} < \infty) = 1$

Demonstração -

$$\begin{aligned} P(T_A^{\xi, \eta} = \infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{t=0}^n \bigcup_{k \in A} \{\tilde{\xi}^t \in \Delta_k^c\}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \bigcup_{k \in A} \bigcap_{t=0}^n \{\tilde{\xi}^t \in \Delta_k^c\} \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in A} P \bigcap_{t=0}^n \{\tilde{\xi}^t \in \Delta_k^c\} \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in A} \left[\sum_{i \in S} \rho_{i,k}(P) \right]^n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

O interessante seria, a partir destes lemas, saber quais são as condições que um processo e um acoplamento devem satisfazer para que se para todo conjunto $F \in \hat{E}$ temos que $P(T_F^{\xi, \eta} < \infty) = 1$, então o sistema seja ergódico.

Observemos, em primeiro lugar, que a probabilidade de dois processos acoplados alcançar a diagonal em tempo finito é zero, no caso de E não enumerável. É por isso que temos definido T_F , o tempo em que os processos acoplados alcançam Δ_F , ou seja coincidem em todas as coordenadas de F .

O problema é que, contrariamente ao que acontece quando E é enumerável, o processo depois de ter alcançado a

diagonal num conjunto finito, pode voltar a sair, e teremos que a convergência fraca para zero de $(\mu-\nu)P^n$ não pode ser demonstrada pelo método clássico.

Gostaríamos de mostrar que se $P(T_F < \infty) = 1$ então

$$\left| \int P^n(\xi, d\xi) f_F(\xi) - \int P^n(\xi, d\xi) f_F(\xi) \right| \xrightarrow{n} 0$$

$\forall f_F$ (f_F depende só das coordenadas do conjunto F).

Ou seja

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_{\{T_F < n\}}(\omega) |f_F(\xi_{\xi}^n(\omega)) - f_F(\xi_{\eta}^n(\omega))| P(d\omega) + \\ & + \int_{\Omega} 1_{\{T_F \geq n\}}(\omega) |f_F(\xi_{\xi}^n(\omega)) - f_F(\xi_{\eta}^n(\omega))| P(d\omega) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

O segundo membro converge para zero desde que $1_{\{T_F \geq n\}} \xrightarrow{q.c.} 0$ e $|f_F(\xi_{\xi}^n(\omega)) - f_F(\xi_{\eta}^n(\omega))|$ está limitado.

Fica em aberto a conjectura de quais são as condições para que o primeiro membro convirja, desde que $1_{\{T_F < n\}}(\omega) \neq 0$ q.c. como no caso enumerável.

3.5 - A DISTÂNCIA DE VASERSTEIN

Seja $D(\cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \{0, 1\}$ definida por $D(\cdot, \cdot) = I_{\Delta} c(\cdot, \cdot)$, a métrica discreta sobre (E, ε) .

Se γ é uma medida definida sobre $E \times E$, com projeções μ, ν , teremos:

$$|\mu(A) - \nu(A)| \leq \int_{E \times E} |I_A(\xi) - I_A(\eta)| \gamma(d\xi, d\eta) \leq$$

$$\leq \gamma(\Delta^C) = \int I_{\Delta^C} d\gamma = \int D d\gamma.$$

donde $\|\mu - \nu\| \leq \gamma(\Delta^C) = \int D d\gamma.$

Mas, aplicando o teorema do acoplamento podemos achar γ , com projeções μ e ν tal que

$$\gamma(\Delta^C) \leq \|\mu - \nu\|$$

ou seja

$$\|\mu - \nu\| = \min \left\{ \int D d\gamma; \gamma: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow [0,1], \text{ com projeções } \mu \text{ e } \nu \right\}$$

Em geral, se D é uma métrica limitada qualquer, definiremos a distância de Vaserstein entre duas medidas de probabilidade da seguinte forma:

$$D_V(\mu, \nu) = \inf \left\{ \int D(\cdot, \cdot) d\gamma; \gamma: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow [0,1] \text{ com projeções } \mu \text{ e } \nu \right\}$$

Expressões desta distância: $D_V(\mu, \nu) = \sup_{[f]_D \leq 1} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|$; onde

$$[f]_D = \sup_{\xi, \eta} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{D(\xi, \eta)}$$

Wallender: Se $E = \mathbb{R}$, $D(\xi, \eta) = |\xi - \eta| \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_V(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi) - G(\xi)| d\xi, \text{ onde:}$$

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \mu(d\eta) \quad G(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \nu(d\eta)$$

3.6 - COMPARAÇÃO COM A DISTÂNCIA DE PROHOROV

Seja D uma métrica em E .

Definição: $D_p(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0 : \mu(A) \leq (A^\epsilon) + \epsilon, \nu(A) \leq \mu(A^\epsilon) + \epsilon, A \in \mathcal{E}\}$

onde $A^\epsilon = \{\xi \in E; D(\xi, A) < \epsilon\}$; D_p é a chamada distância de Prohorov. (Billingsley, p.238).

Lema (Strassen): $D_p(\mu, \nu) = \inf\{\epsilon > 0; \exists \gamma \text{ sobre } \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \text{ com projeções } \mu \text{ e } \nu, \text{ e } \gamma(D(\cdot, \cdot) > \epsilon) \leq \epsilon\}$.

Consequência:

1) Seja γ uma medida em $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $\epsilon > 0$, D uma métrica em E . Suponhamos que $\sqrt{\int D d\gamma} \leq \epsilon$, então $\gamma(D > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} \int D d\gamma \leq \epsilon$, pelo teorema de Chebychev.

Então $D_p(\mu, \nu) \leq \sqrt{\int D d\gamma}$ o que implica $D_p(\mu, \nu) \leq \sqrt{D_V(\mu, \nu)}$

2) Seja agora $D_p(\mu, \nu) = \epsilon$, e seja γ satisfazendo as condições de Strassen ($\gamma(D > \epsilon) \leq \epsilon$), teremos:

$$\begin{aligned} D_V(\mu, \nu) &\leq \int D d\gamma \leq \\ &\leq \epsilon + \|D\| \gamma(D > \epsilon) \leq \\ &\leq D_p(\mu, \nu) (1 + \|D\|) \end{aligned}$$

o que mostra que são equivalentes.

3.7 - ACOPLAMENTO NOS MODELOS DO VOTANTE GENERALIZADO

Nesta seção vamos mostrar a equivalência das condições suficientes para ergodicidade, fornecidas pelos métodos de acoplamento e associação para núcleos de transição do tipo dos usados no capítulo 2.

Seja $E = \{0, 1\}^S$ $\hat{E} = P_f(s)$

Seja $M(P) = (\rho_{i,k}(P))_{i,k \in S}$

$$\text{onde } \rho_{i,k}(P) = \sup_{\substack{\xi(j)=\eta(j) \\ j \neq i}} \sup_{D \in E_k} |P^t(\xi, D) - P^t(\eta, D)|$$

Seja $P(\xi, d\eta)$ definido como medida produto sobre as coordenadas da seguinte forma

$$P(\xi, C_k) = \sum_{F \in \hat{E}} q(F) \left[\prod_{h \in F} \xi(h+k) \right]$$

onde $C_k = \{\xi \in E; \xi(k)=1\}$ e $q \geq 0$ tal que $\sum_{F \in \hat{E}} q(F) = 1$.

Lembremos que X_F^n era o processo associado de estado inicial F .

Lema: $\sum_{i \in S} \rho_{i,k}(P) = E \text{ card } X_{\{k\}}^1 = \sum_{F \in \hat{E}} q(F) \text{ card } F$

Demonstração

$$|P(\xi, C_k) - P(\eta, C_k)| = \left| \sum_{F \in \hat{E}} q(F) \prod_{j-k \in F} \xi(j) - \sum_{F \in \hat{E}} q(F) \prod_{j-k \in F} \eta(j) \right| =$$

quando $\xi(h) = \eta(h) \forall h \neq i$, e $\xi(i) \neq \eta(i)$, teremos que as duas somatórias diferem só nos termos F tal que $i-k \in F$. Nestes termos uma das duas somatórias é zero, pois $\xi(i) \neq \eta(i)$.

$$= \sum_{\{F: i-k \in F\}} q(F) \prod_{j-k \in F} \xi(j)$$

então

$$\rho_{i,k}(P) = \sup_{\substack{\xi(h)=\eta(h) \\ h \neq i}} \sup_{A \in E_k} |P(\xi, A) - P(\eta, A)| =$$

$$= \sup_{\substack{\xi(h)=\eta(h) \\ h \neq i}} |P(\xi, C_k) - P(\eta, C_k)| =$$

$$= \sup_{\substack{\xi(h)=\eta(h) \\ h \neq i}} \sum_{\{F: i-k \in F\}} q(F) \prod_{j-k \in F} \xi(j) =$$

o supremo é alcançado quando esse produto vale 1.

$$= \sum_{\{F: i-k \in F\}} q(F) = \sum_{F \in \hat{E}} 1_F(i-k) q(F)$$

então:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \rho_{i,k}(P) &= \sum_{i \in S} \sum_{F \in \hat{E}} 1_F(i-k) q(F) = \\ &= \sum_{F \in \hat{E}} q(F) \sum_{i \in S} 1_F(i-k) = \sum_{F \in \hat{E}} q(F) \text{ card } F. \end{aligned}$$

Lema: $\sum_i \rho_{i,k}(P^n) = E \text{ card}(X_{\{k\}}^n)$

Demonstração

$$\rho_{i,k}(P^n) = \sup_{\substack{\xi(h)=\eta(h) \\ h \neq i}} \sup_{A \in E_k} |P^n(\xi, A) - P^n(\eta, A)| =$$

$$= \sup_{\substack{\xi(h)=\eta(h) \\ h \neq i}} |P^n(\xi, C_k) - P^n(\eta, C_k)| =$$

$$= \sup_{\substack{\xi(h)=\eta(h) \\ h \neq i}} \left| \int_E P(\xi, d\zeta) P^{n-1}(\xi, C_k) - \int_E P(\xi, d\zeta) P^{n-1}(\eta, C_k) \right| =$$

o supremo é assumido quando $\xi(i) = 1$ $\eta(i) = 0$ e podemos tirar

o módulo

$$\begin{aligned}
 &= \int_E P(\xi, d\zeta) \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(\{k\}, J) 1_{C_J}(\zeta) - \\
 &- \int_E P(\xi, d\zeta) \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(\{k\}, J) 1_{C_J}(\xi) = \\
 &= \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(\{k\}, J) \left[\int_E P(\xi, d\zeta) 1_{C_J}(\xi) - \int_E P(\eta, d\zeta) 1_{C_J}(\xi) \right] = \\
 &= \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(\{k\}, J) [P(\xi, C_J) - P(\eta, C_J)] = \\
 &= \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(\{k\}, J) \left[\sum_{F \in \hat{E}} \hat{P}(J, F) [1_{C_F}(\xi) - 1_{C_F}(\eta)] \right] =
 \end{aligned}$$

onde $1_{C_F}(\xi) - 1_{C_F}(\eta) \neq 0$ se e somente se $i \in F$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(\{k\}, J) \sum_{F \in \hat{E}} \hat{P}(J, F) \sum_{i \in S} 1_F(i) = \\
 &= \sum_{J \in \hat{E}} \hat{P}^{n-1}(\{k\}, J) \sum_{F \in \hat{E}} \hat{P}(J, F) \text{ card } F =
 \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Associação temos que

$$= E \text{ card } X_{\{k\}}^n.$$

3.8 - EXEMPLOS

Vamos ver a continuação como funciona a condição suficiente para ergodicidade fornecida pelo acoplamento de Va-serstein.

Para os exemplos seguintes (todos tirados de [1]) consideremos $E = \prod_{i \in S} E_i$, S enumerável, $E_i = \{0, 1\}$ o que as seguintes hipóteses são satisfeitas:

a) Diremos que $A \in E_F$, $F \in \hat{E} = P_f(S)$, se $\exists A_F \subset \prod_{k \in F} E_k$ tal que $A = A_F \times \prod_{k \in F^c} E_k$, e chamaremos A de conjunto cilíndrico elementar. Consideremos $P(\xi, A)$ dependendo sô de um conjunto finito de coordenadas $\Gamma(F) \in \hat{E}$, para $A \in E_F$.

b) Vamos considerar o núcleo de transição como

$$P(\xi, \cdot) = \bigotimes_{i \in S} [P(\xi, \cdot)]_i \text{ onde } [P(\xi, \cdot)]_i$$

é uma probabilidade definida sobre E_i , para cada ξ .

Lembremos que $C_k = \{\eta \in E; \eta(k)=1\}$ e chamaremos

$$O_k = \{\eta \in E; \eta(k)=0\} = C_k^c.$$

EXEMPLO 1

Seja o processo com núcleo de transição:

$$P(\xi, O_k) = \alpha_k + (\beta_k - \alpha_k) \xi(k+1) \quad (0 \leq \alpha_i, \beta_i \leq 1)$$

ou seja que $\Gamma(\{k\}) = \{k+1\}$ então teremos que $\rho_{i,k}(P) = 0$ se $i \neq k+1$; e $\rho_{k+1,k}(P) = |\beta_k - \alpha_k|$, então, de acordo com o Teorema de Varserstein temos que existe uma única probabilidade μ tal que $\nu P^t \rightarrow \mu \quad \forall \nu$ se $\prod_{i=k}^{k+t} |\beta_i - \alpha_i| \rightarrow 0$ para todo $k \in S$, ou seja se $\prod |\beta_i - \alpha_i| \rightarrow 0$.

EXEMPLO 2

Consideremos agora $\Gamma(i) = \{j_i^1, j_i^2, j_i^3\}$ de tal forma que $\Gamma(i) \cap \Gamma(k) = \emptyset$ se $i \neq k$, e definimos

$$P(\xi, O_k) = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} \sin \alpha \left(\frac{3}{2} - \sum_{i \in \Gamma(k)} \xi(i) \right)$$

ou seja

$$P(\xi, O_k) = \begin{cases} \frac{1+\theta}{2} & \text{se em } \xi \text{ há 0 ou 1 zeros nas coordenadas de } \Gamma(k) \\ \frac{1-\theta}{2} & \text{se em } \xi \text{ há 2 ou 3 zeros nas coordenadas de } \Gamma(k) \end{cases}$$

sejam agora

$$A_j^k = \{ \xi \in E / \sum_{i \in \Gamma(k)} \xi(i) = j \} \quad j=0, \dots, 3$$

então

$$\begin{aligned} \mu P(O_k) &= \int \mu(d\xi) P(\xi, O_k) = \\ &= \sum_{j=0}^3 \int_{A_j^k} \mu(d\xi) P(\xi, O_k) = \\ &= \frac{1+\theta}{2} (\mu(A_0^k) + \mu(A_1^k)) + \frac{1-\theta}{2} (\mu(A_2^k) + \mu(A_3^k)) = \end{aligned}$$

se μ é uma medida de Bernoulli, ou seja $\mu(O_k) = \frac{1}{2}$, teremos que $\mu(A_j^k) = \binom{3}{j} (\frac{1}{2})^3$ e que $\mu P(O_k) = \frac{1}{2}$, ou seja que μ estacionário.

O cálculo de $\rho_{i,k}(P)$ fornece

$$\rho_{i,k}(P) = \begin{cases} \theta & \text{se } i \in \Gamma(k) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

de onde, se $M = (\rho_{i,k})_{i,k}$

$\sum_{i \in S} M_{i,k} = 3\theta < 1$ se e somente se $\theta < \frac{1}{3}$ o que fornece uma condição suficiente para ergodicidade.

EXEMPLO 3

$$\text{Seja } P(\xi, O_k) = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} (-1)^{\xi(i) + \xi(i+1)}$$

Se particionamos $E = A_0^k \cup A_1^k$ onde

$$A_0^k = \{\xi \in E; \xi(k) = \xi(k+1)\}$$

$$A_1^k = \{\xi \in E; \xi(k) \neq \xi(k+1)\}$$

obtemos que se μ é uma probabilidade de Bernoulli, como no exemplo anterior, então μ é estacionária.

Se $\theta = 1$ então há outra probabilidade estacionária concentrada no ponto ξ tal que $\xi(k) = 1 \forall k$.

Por outra parte,

$$\rho_{i,k} = \begin{cases} \theta & \text{se } i \in \Gamma(k) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\text{então } \sum_{i \in S} \rho_{i,k} = 2\theta.$$

de onde a condição suficiente para ergodicidade deste processo, fornecida pelo teorema de Dobrushin-Vaserstein é:

$$\theta < \frac{1}{2}$$

EXEMPLO 4

$$\text{Definimos } P(\xi, C_k) = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} \xi(k-1)\xi(k)\xi(k+1)$$

então teremos

$$\rho_{i,k} = \begin{cases} |\frac{\theta}{2}| & \text{se } i \in \Gamma(k) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $\Gamma(k) = \{k-1, k, k+1\}$, de onde:

$$\sum_{i \in S} \rho_{i,k}(P) = |\frac{3}{2} \theta|$$

o que implica que se $|\theta| < \frac{2}{3}$ então o processo é ergódico.

3.9 - ACOPLAMENTO FORTE EM PROCESSOS DE PROXIMIDADE

Lembremos a variável aleatória $H: \Omega \times E \longrightarrow E$,

$$H(\omega, \xi)(k) = \prod_{j \in J_k(\omega)} \xi_j$$

que indica para cada passo do processo o valor que assumiria a coordenada k , de acordo a escolha aleatória de um conjunto de $\hat{E}$. Se neste conjunto todos fossem 1, a coordenada assumiria o valor 1, e em caso contrário assumiria o valor zero.

A lei da variável aleatória $H(\cdot, \xi)$ é $P(\xi, \cdot)$ ou seja: $\mathbb{P}(H(\cdot, \xi) \in C_k) = P(\xi, C_k)$, $\forall k \in S$, o que para cada ξ define a lei de $H(\cdot, \xi)$ em E , como medida produto.

Dadas estas variáveis aleatórias surge naturalmente a idéia do acoplamento forte. Consideremos dois processos evoluindo em forma conjunta; ou seja o vetor aleatório $(H(\cdot, \xi), H(\cdot, \eta))$, e chamaremos $\tilde{P}_{\xi, \eta}^F$, (acoplamento forte de $P(\xi, \cdot)$, $P(\eta, \cdot)$) à lei deste vetor aleatório.

No desenvolvimento de nosso trabalho surgiu a conjectura de se este acoplamento não seria equivalente ao de Vaserstein.

Vamos calcular o núcleo do acoplamento forte

$$\begin{aligned} \tilde{P}^F((\xi, \eta), C_k \times C_k) &= \mathbb{P}[H(\cdot, \xi) \in C_k, H(\cdot, \eta) \in C_k] = \\ &= \mathbb{P}[\omega \in \Omega; \prod_{j \in J_k(\omega)} \xi(j+k) = 1, \prod_{j \in J_k(\omega)} \eta(j+k) = 1] = \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega; \prod_{j \in J_k(\omega)} \xi(j+k)=1, \prod_{j \in J_k(\omega)} \eta(j+k)=1 \cap [\bigcup_{F \in \hat{E}} J_k=F]\} =$$

$$= \sum_{F \in \hat{E}} \mathbb{P}(J_k=F) \cdot \prod_{j \in F} \xi(j+k) \cdot \prod_{j \in F} \eta(j+k) =$$

$$= \sum_{F \in \hat{E}} q(F) \cdot \prod_{j \in F} \xi(j+k) \cdot \prod_{j \in F} \eta(j+k),$$

o que define $\tilde{P}^F((\xi, \eta), \cdot)$ em $\tilde{E}$.

Por outro lado, se $\tilde{P}^V((\xi, \eta), \cdot)$ é o núcleo acoplado segundo Vaserstein, teremos que

$$\tilde{P}^V((\xi, \eta), C_k \times C_k) = \inf[P(\xi, C_k), P(\eta, C_k)] =$$

$$= \inf\left[\sum_{F \in \hat{E}} q(F) \prod_{j \in F} \xi(j+k), \sum_{j \in F} q(F) \prod_{j \in F} \eta(j+k)\right]$$

que em geral será maior ou igual que

$$\sum_{F \in \hat{E}} q(F) \prod_{j \in F} \xi(j+k) \prod_{j \in F} \eta(j+k).$$

No seguinte exemplo construímos um núcleo P de tal forma que essa desigualdade é estrita:

Sejam $0 \leq \theta \leq 1$, $q: \hat{E} \rightarrow [0, 1]$ definida:

$$q(F) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{2} & \text{se } F = \{0\} \text{ ou } \{1\} \\ \theta & \text{se } F = \emptyset \end{cases}$$

Seja ξ tal que $\xi(k) = 0$, $\xi(k+1) = 1$

e η tal que $\eta(k) = 1$, $\eta(k+1) = 0$.

Neste caso teremos:

$$\begin{aligned}\tilde{P}^V((\xi, \eta), C_k \times C_k) &= \min(q(\emptyset) \cdot 1 + q(\{0\}) \cdot 0 + q(\{1\}) \cdot 1; q(\emptyset) \cdot 1 + q(\{0\}) \cdot 1 + q(\{1\}) \cdot 0) = \\ &= \frac{1+\theta}{2}.\end{aligned}$$

e o acoplamento forte fornece:

$$\tilde{P}^F((\xi, \eta), C_k \times C_k) = \sum_{F \in \hat{E}} q(F) \prod_{j \in F} \xi(j+k) \prod_{j \in F} \eta(j+k) = 0$$

ou seja que $\tilde{P}^V((\xi, \eta), C_k \times C_k) > \tilde{P}^F((\xi, \eta), C_k \times C_k)$, o que demonstra que não são equivalentes.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - Vaserstein, L.N., "Markov Processes over denumerable Product of spaces", *Problemy Peredachy Informatsii*, Vol. 5, n^o 3, pp. 64-72, 1969.
- [2] - Follmer, Notas de um curso dado em Paris, março de 1977.
- [3] - Griffeath, D., *A maximal coupling for Markov Chains*, (pre-print).
- [4] - Doob, J.L., *Stochastic Processes*, Wiley, 1965.
- [5] - Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, J. Wiley and Sons, 1968.
- [7] - Neveu, J., *Calcul de Probabilities*, 2^{ame} édition, Masson, 1970.
- [8] - Freedman, O. *Markov Chains*, Holden Day, 1971.
- [9] - Holley, R. and Liggett, T., "Ergodic Theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model", *The Annals of Probability*, 3, 1975.