ESTIMAÇÃO E PREVISÃO BAYESIANAS
EM DADOS AGRUPADOS

Sílvia Lopes de Paula Ferrari

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ESTATÍSTICA
ORIENTADOR: PROF. DR. HELENO BOLFARINE

- São Paulo, agosto de 1987 -

Aos meus pais

Lucy e Edinêsio

Ao meu marido

Alessandro

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. *Heleno Bolívarine*, pela sugestão do tema e pela dedicação com que me orientou.

Ao Prof. Dr. *José Galvão Leite*, pela colaboração na fase final do trabalho.

A *Rinaldo Artes*, pela enorme contribuição na parte computacional.

A *Lúcia Pereira Barroso*, *Mônica Carneiro Sandoval* e *Denise Aparecida Botter*, pela amizade.

Aos demais professores do IME-USP, pela minha formação.

A *Antonia Soares*, pelo excelente trabalho de datilografia.

A *Silvia Regina S.D.T. Oliveira* e *Maria Cristina Martínez Bonesio*, pela elaboração das referências bibliográficas.

Finalmente, a todos aqueles que colaboraram para a realização deste trabalho.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO 1 - ESTIMAÇÃO BAYESIANA NO MODELO GERAL	04
1.1. Introdução	04
1.2. Estimadores de α baseados em sua distribuição a posteriori.....	06
1.2.1. Variância da distribuição a priori conhecida	07
1.2.2. Variância da distribuição a priori desconhecida	15
1.3. Cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace....	19
1.3.1. Variância da distribuição a priori conhecida	21
1.3.2. Variância da distribuição a priori desconhecida	23
1.4. Comentários	25
1.5. Casos particulares e extensões	26
CAPÍTULO 2 - ALGUNS MODELOS ESPECIAIS	28
2.1. O modelo binomial	28
2.1.1. Variância da distribuição a priori conhecida	29
2.1.2. Variância da distribuição a priori desconhecida	31
2.1.3. Cálculo dos momentos a poste- riori aproximados pelo método de Laplace	32

2.2.	O modelo de Poisson	32
2.2.1.	Variância da distribuição a priori conhecida	33
2.2.2.	Variância da distribuição a priori desconhecida	35
2.2.3.	Cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace	36
2.3.	O modelo normal	36
2.3.1.	Variâncias conhecidas	37
2.3.2.	Variâncias desconhecidas	38
2.3.3.	Cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace	42

CAPÍTULO 3 - PREVISÃO BAYESIANA EM AMOSTRAGEM EM DOIS

ESTÁGIOS	44
3.1. Introdução	44
3.1.1. O enfoque de superpopulação para populações finitas	44
3.1.2. Amostragem em dois estágios...	45
3.2. O modelo geral	45
3.2.1. Variância da distribuição a priori conhecida	49
3.2.2. Variância da distribuição a priori desconhecida	52
3.3. Cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace....	54
3.3.1. Variância da distribuição a priori conhecida	54
3.3.2. Variância da distribuição a priori desconhecida	56

3.4.	Alguns modelos especiais	58
3.4.1.	O modelo binomial	58
3.4.2.	O modelo de Poisson	59
3.4.3.	O modelo normal	59
3.4.3.1.	Variâncias conhecidas	60
3.4.3.2.	Variâncias desconhecidas	63
CAPÍTULO 4 -	APLICAÇÕES EM AMOSTRAS SIMULADAS	68
4.1.	Introdução	68
4.2.	Estimação no modelo binomial	69
4.3.	Estimação no modelo de Poisson	75
4.4.	Estimação no modelo normal	77
4.5.	Previsão em amostragem em dois estágios	78
4.5.1.	Previsão no modelo binomial...	79
4.5.2.	Previsão no modelo de Poisson.	83
4.5.3.	Previsão no modelo normal	84
APÊNDICE 1 -	Cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace	86
APÊNDICE 2 -	Saída e listagem do programa que calcula as estimativas modais de θ . Modelo binomial	90
APÊNDICE 3 -	Saída e listagem do programa que calcula as estimativas de θ baseadas no método de Laplace. Modelo binomial	97

APÊNDICE 4 - Saída e listagem do programa que calcula as estimativas modais de θ . Modelo de Poisson	103
APÊNDICE 5 - Saída e listagem do programa que calcula as estimativas modais de θ baseadas no método de Laplace. Modelo de Poisson	110
APÊNDICE 6 - Saída e listagem do programa que calcula as estimativas de θ . Modelo normal	116
APÊNDICE 7 - Amostragem em dois estágios - Populações e amostras simuladas. Modelo binomial	123
APÊNDICE 8 - Amostragem em dois estágios - Populações e amostras simuladas. Modelo de Poisson	125
APÊNDICE 9 - Amostragem em dois estágios - Populações e amostras simuladas. Modelo normal	127
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	129

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia Bayesiana de estimação em dados agrupados e de previsão em amostragem em dois estágios.

A expressão "dados agrupados" é utilizada para caracterizar a seguinte situação: n populações distintas são consideradas e de cada uma delas é retirada uma amostra aleatória formando, portanto, n grupos de dados. O interesse é estimar simultaneamente as médias $\theta_1, \dots, \theta_n$ associadas a cada uma das n populações.

É comum, na prática, nos depararmos com situações em que é razoável supor que a distribuição dos dados é binomial, Poisson ou normal. Assim, apresentaremos uma metodologia em que a distribuição dos dados pertence à família exponencial de distribuições, da qual as distribuições acima são simplesmente casos particulares. Especificamente, assumiremos que Y_{ij} , a j -ésima observação da i -ésima amostra tem função de densidade (ou de probabilidade) da forma

$$\pi(y_{ij}/\alpha_i, \phi_i) \propto \exp\{\phi_i[\alpha_i y_{ij} - a(\alpha_i)]\}$$

onde $a(\cdot)$ é uma função conhecida e derivável até segunda ordem, $\phi_i > 0$ é conhecido e chamado de parâmetro de escala e α_i , denominado parâmetro canônico ou natural, é uma função do parâmetro de interesse θ_i .

Assumiremos ainda a seguinte estrutura a priori em dois estágios para os parâmetros canônicos:

Estágio 1. $\alpha_i/\mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1, \dots, n$, independentes.

Estágio 2. $\pi(\mu) \propto \text{constante}$, σ^2 conhecida, e para o caso em que σ^2 é desconhecida,

$$\frac{v\lambda}{\sigma^2} \mid v, \lambda \sim \chi_v^2 \quad , \quad v > 0 \quad , \quad \lambda > 0 \quad ,$$

onde μ e σ^2 , dados v e λ , são independentes. Esta estrutura a priori parece ser razoável em muitas situações e daremos justificativas para a sua utilização.

Os parâmetros de interesse, ou seja, $\theta_1, \dots, \theta_n$, serão estimados através da distribuição a posteriori de $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ por métodos aproximados dentre os quais um método baseado em aproximações de Laplace para integrais.

Quanto à previsão Bayesiana em amostragem em dois estágios, o enfoque utilizado será o de superpopulação, sendo que a distribuição dos dados será também da família exponencial e a estrutura a priori, a mesma citada anteriormente. Proporemos previsores para combinações lineares dos elementos da população como, por exemplo, o total e a média populacionais.

No Capítulo 1 trataremos do problema de estimação no modelo geral, isto é, aquele em que a distribuição dos dados pertence à família exponencial de distribuições. Serão propostas aproximações para a distribuição a posteriori de α e para os estimadores dos parâmetros de interesse $\theta_1, \dots, \theta_n$.

No Capítulo 2 todos os resultados encontrados no Capítulo 1 serão aplicados às distribuições binomial, Poisson e normal. Nesta última será feita uma extensão ao caso em que as variâncias populacionais são desconhecidas.

No Capítulo 3 apresentaremos uma metodologia de previsão Bayesiana em amostragem em dois estágios tanto para o modelo geral quanto para os casos particulares em que a distribuição dos dados é binomial, Poisson ou normal. Para a distribuição normal será feita uma extensão para a situação em que as variâncias populacionais são desconhecidas.

Finalmente, no Capítulo 4 apresentaremos resultados numéricos baseados em amostras simuladas, bem como faremos comparações entre as diversas aproximações propostas.

CAPÍTULO 1

ESTIMAÇÃO BAYESIANA NO MODELO GERAL

1.1. Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar uma metodologia de estimação Bayesiana em dados agrupados. A situação que se apresenta é a seguinte: n populações são consideradas; de cada uma é retirada uma amostra; denotamos as n amostras através dos vetores $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ e seus tamanhos, respectivamente, por $m_1, \dots, m_n$; assumimos que, dado θ_i , Y_{ij} , a j -ésima observação da i -ésima amostra, tem média θ_i e nosso objetivo é estimar, simultaneamente, $\theta_1, \dots, \theta_n$; assumimos também que, dados α_i e ϕ_i , Y_{ij} tem função de densidade (ou de probabilidade) da família exponencial de distribuições, isto é,

$$\pi(Y_{ij} | \alpha_i, \phi_i) = \exp\{\phi_i [Y_{ij}\alpha_i - a(\alpha_i)]\} b(Y_{ij}, \phi_i) \quad (1.1)$$

onde $a(\cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$ são funções conhecidas, $a(\cdot)$ é derivável até segunda ordem, $\phi_i > 0$ é conhecido e chamado parâmetro de escala e α_i é chamado parâmetro canônico ou natural.

Dois resultados bastante úteis e válidos para o modelo acima são

$$\begin{aligned} E[Y_{ij} / \alpha_i] &= a'(\alpha_i) = \theta_i \quad \text{e} \\ \text{Var}[Y_{ij} / \alpha_i] &= \frac{a''(\alpha_i)}{\phi_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (*)$$

(*) $a'(\cdot)$ e $a''(\cdot)$ denotam, respectivamente, as derivadas de primeira e segunda ordem da função $a(\cdot)$.

Este modelo é um particular Modelo Linear Generalizado definido, por exemplo, em McCullagh e Nelder (1983) e Cordeiro (1986). Alguns resultados sobre inferência Bayesiana nos Modelos Lineares Generalizados são encontrados em West (1985).

Três importantes distribuições, dentre outras, são casos particulares do modelo em (1.1) (que chamaremos de MODELO GERAL):

i) Distribuição binomial

Tomando $\phi_i = 1$, $\alpha_i = \log[\theta_i/(1-\theta_i)]$, $0 < \theta_i < 1$, $a(\alpha_i) = \log(1+e^{\alpha_i})$ e y_{ij} igual a zero ou um, temos que y_{ij} , dado θ_i , tem distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso θ_i ou, equivalentemente, que $Y_i = \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}$, dados θ_i e m_i , tem distribuição binomial com probabilidades de sucesso θ_i e índice m_i , que denotamos por

$$Y_i/m_i, \theta_i \sim B(m_i, \theta_i) \quad , \quad i = 1, \dots, n .$$

ii) Distribuição de Poisson

Para obter a distribuição de Poisson com média θ_i , basta tomar $\phi_i = 1$, $\alpha_i = \log \theta_i$, $a(\alpha_i) = e^{\alpha_i}$ e y_{ij} inteiro não negativo. Neste caso, utilizamos a seguinte notação:

$$Y_{ij}/\theta_i \sim P(\theta_i) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad j = 1, \dots, m_i .$$

iii) Distribuição normal

A distribuição normal com média θ_i e variância σ_i^2 é obtida tomando-se $\phi_i = 1/\sigma_i^2$, $\alpha_i = \theta_i$ e $a(\alpha_i) = \sigma_i^2/2$.

Neste caso, a notação utilizada é:

$$Y_{ij}/\theta_i, \sigma_i^2 \sim N(\theta_i, \sigma_i^2).$$

Na realidade, o que desenvolvemos neste capítulo é uma generalização do estudo feito por Leonard (1972) para dados binomiais agrupados, isto é, estudamos o modelo geral do qual o modelo binomial é um caso particular.

1.2. Estimadores de α baseados em sua distribuição a posteriori

Consideremos n amostras aleatórias independentes $Y_1, \dots, Y_n$ com $m_1, \dots, m_n$ observações respectivamente tais que a função de densidade (ou de probabilidade) de Y_{ij} , a j -ésima observação da i -ésima amostra, seja da forma

$$\pi(Y_{ij}/\alpha_i, \phi_i) \propto \exp\{\phi_i[Y_{ij}\alpha_i - a(\alpha_i)]\} \quad (1.2)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m_i,$$

onde α_i , $a(\cdot)$ e ϕ_i estão definidos em (1.1).

A função de verossimilhança de α é, portanto,

$$L(\alpha/Y_1, \dots, Y_n, \phi) \propto \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_i} \exp\{\phi_i[Y_{ij}\alpha_i - a(\alpha_i)]\} = \quad (1.3)$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^n \phi_i[Y_i\alpha_i - m_i a(\alpha_i)]\right\}$$

onde $Y_i = \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$, $i=1, \dots, n$, $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\phi^T = (\phi_1, \dots, \phi_n)$.

1.2.1. Variância da distribuição a priori conhecida

Tomemos a seguinte estrutura a priori em dois estágios:

$$\text{Estágio 1. } \alpha_i / \mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ , } i=1, \dots, n \text{ ,} \quad (1.4)$$

independentes;

$$\text{Estágio 2. } \pi(\mu) \propto \text{constante.} \quad (1.5)$$

Estudamos, em primeiro lugar, o caso em que σ^2 é conhecida. A seguir, proporemos também uma distribuição a priori para σ^2 .

A distribuição a priori de α acima é permutável no sentido dado por De Finetti (1964), isto é, invariante sob a permutação dos índices. A suposição de permutabilidade é válida quando se tem a mesma informação a priori sobre cada α_i e, da mesma forma, sobre cada par (α_i, α_j) , $i \neq j$, e o mesmo para cada tripla $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$, $i \neq j \neq k$, e assim sucessivamente. Deste modo, a metodologia que apresentaremos só deve ser aplicada se esta suposição é válida, caso contrário, uma outra distribuição a priori mais conveniente deve ser considerada. Na verdade, estamos utilizando uma forma particular de distribuição permutável, isto é, aquela em que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ formam uma amostra aleatória de uma distribuição normal cuja variância σ^2 é conhecida e cuja média μ tem ainda uma distribuição imprópria proporcional a uma constante. Embora esta seja imprópria, a distribuição a posteriori será própria e, portanto, não há porque se preocupar.

Na realidade, as distribuições a priori considera - das foram escolhidas pelas facilidades técnicas que elas pro - porcionam. No entanto, não vemos nenhum inconveniente em u - tilizá-las. Tomemos por exemplo o caso da distribuição bino - mial em que é usual se tomar uma distribuição a priori beta para os parâmetros $\theta_1, \dots, \theta_n$. Agora, se lembrarmos que se α_i tem distribuição normal, então θ_i tem aproximadamente distri - buição beta (Leonard, 1972), vemos que é perfeitamente plau - sível assumir que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sejam normalmente distribuídos. Uma breve discussão sobre o uso de prioris normais é encon - trada em West (1985, Seção 4.1).

Ainda cabe observar que os estimadores que propore - mos para um particular α_i serão baseados nas observações de t_o das as n amostras e não sônas da i -ésima . Isto é realmente de se esperar uma vez que assumimos a priori que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ formam uma amostra aleatória de uma mesma distribuição e, por - tanto, as observações que fornecem informação sobre α_i devem também fornecer sobre α_j , $i \neq j$.

Assim, dadas a função de verossimilhança em (1.3) e a estrutura a priori em (1.4) e (1.5) é fácil encontrar a função de densidade a posteriori conjunta de α e μ , isto é,

$$\pi(\alpha, \mu / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \phi, \sigma^2) \propto L(\alpha / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \phi) \times \\ \times \pi(\alpha / \mu, \sigma^2) \cdot \pi(\mu) \quad (1.6)$$

$$\propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \phi_i [y_i \alpha_i - m_i a(\alpha_i)] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \mu)^2 \right\}$$

A integração de (1.6) em relação a μ produz a função de densidade a posteriori marginal de α abaixo:

$$\pi(\alpha/\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n, \phi, \sigma^2) \propto \exp\left\{ \sum_{i=1}^n \phi_i [y_i \alpha_i - m_i a(\alpha_i)] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_*)^2 \right\} \quad (1.7)$$

onde $\alpha_* = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{n}$. É fácil ver que (1.7) é o produto da função de verossimilhança por uma função de densidade normal multivariada.

O estimador de Bayes de α (com relação à perda quadrática) é a média da distribuição a posteriori acima. O cálculo desta média é bastante complicado pelo fato de envolver integrações que nem sempre podem ser resolvidas analiticamente. Para evitar esta dificuldade estimamos α através da moda da distribuição a posteriori. Para encontrar tal estimador basta maximizar (1.7) em relação a α . Assim, derivando o logaritmo da função de densidade a posteriori e igualando a zero, temos que os estimadores modais são dados pela solução do sistema de equações:

$$a'(\alpha_i) = \frac{y_i}{m_i} - \frac{\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_*}{m_i \phi_i \sigma^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.8)$$

$$\text{onde } \tilde{\alpha}_* = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\alpha}_i}{n}.$$

Como foi observado na Seção 1.1, $a'(\alpha_i)$ é a média θ_i de Y_{ij} e, portanto, $a'(\tilde{\alpha}_i) = \tilde{\theta}_i$ é um estimador natural de θ_i , o parâmetro de interesse. Quando σ^2 ou m_i (ou ambos) é razoavelmente grande, $\tilde{\theta}_i$ nada mais é do que a média das

observações do i -ésimo grupo. O mesmo ocorre quando ϕ_i é grande (deve-se lembrar que ϕ_i é inversamente proporcional a $\text{Var}[Y_{ij}/\alpha_i]$). Nestes casos a influência da estrutura a priori é praticamente nula.

Dependendo da função $a(\cdot)$, a solução de (1.8) só pode ser encontrada por um processo iterativo. O método de Newton Raphson em n dimensões (Box, Davies e Swan, 1969, pg. 36) pode ser usado. Este método implica na solução iterativa do sistema de equações

$$\alpha_{(k+1)} = \alpha_{(k)} + \mathbf{C}_{(k)}^{-1} \mathbf{c}_{(k)} \quad (1.9)$$

onde $\alpha_{(k)}$ denota o vetor α resultante da k -ésima iteração do processo, $\mathbf{C}_{(k)}$ denota a matriz cujo elemento (i,j) é

$$C_{ij(k)} = - \frac{\partial^2 \log \pi(\alpha/\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n, \phi, \sigma^2)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \Big|_{\alpha=\alpha_{(k)}}, \quad i, j=1, \dots, n$$

e $\mathbf{c}_{(k)}$ denota o vetor cujo elemento i é

$$c_{i(k)} = \frac{\partial \log \pi(\alpha/\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n, \phi, \sigma^2)}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha=\alpha_{(k)}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Estabelecendo o vetor inicial $\alpha_{(0)}$, $\alpha_{(1)}$ pode ser calculado através de (1.9); com este novo vetor, $\alpha_{(2)}$ pode ser agora calculado e assim, sucessivamente, até a obtenção de convergência (o que não é garantido), isto é, até que

$$\left| \frac{\alpha_{i(k+1)} - \alpha_{i(k)}}{\alpha_{i(k)}} \right|, \quad i=1, \dots, n$$

seja suficientemente pequeno.

Assim, para encontrar a solução de (1.8) basta utilizar o método de Newton Raphson com

$$c_{i(k)} = \phi_i y_i - m_i \phi_i a'(\alpha_i(k)) - \frac{\alpha_i(k) - \alpha_*(k)}{\sigma^2}, \quad (1.10)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

e com o elemento (i,j) da matriz $\mathbf{C}_{(k)}$ dado por

$$C_{ij(k)} = \frac{\delta_{ij}}{u_i(k)} - \frac{1}{n\sigma^2}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

onde $u_i(k) = \left(m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n$

e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (*)$$

A inversa da matriz $\mathbf{C}_{(k)}$, que denotamos por $\mathbf{D}_{(k)}$, tem os seguintes elementos:

$$D_{ij(k)} = u_i(k) \delta_{ij} + \frac{u_i(k) u_j(k)}{n(\sigma^2 - u_*(k))}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

onde $u_*(k) = \sum_{i=1}^n \frac{u_i(k)}{n}$. Logo, não é necessário inverter

numericamente a matriz $\mathbf{C}_{(k)}$ mas sim substituir $\mathbf{C}_{(k)}^{-1}$ por $\mathbf{D}_{(k)}$.

É possível, em grandes amostras, aproximar a função de densidade a posteriori por uma normal multivariada com média igual à moda a posteriori e matriz de covariância dada pelo inverso da matriz de informação observada a posteriori calculada no ponto modal. Esta aproximação é justificada ex

---

(*) - A função indicadora δ será utilizada em todo o trabalho.

pandindo-se a função de densidade a posteriori em torno da moda a posteriori através de uma série de Taylor e truncando após o termo quadrático da expansão (Zellner, 1971). A média e a matriz de covariância desta distribuição aproximada são obtidas, respectivamente, através do vetor $\alpha_{(k)}$ e da matriz $D_{(k)}$ da última iteração do processo de Newton Raphson. Assim, podem ser feitas inferências aproximadas sobre o vetor de parâmetros α como, por exemplo, construir intervalos de credibilidade para cada α_i ou para diferenças do tipo $\alpha_i - \alpha_j$ ($i \neq j$).

Para evitar a utilização de métodos iterativos e visualizar melhor a forma do estimador de α , seria interessante encontrarmos uma solução explícita aproximada para o sistema de equações em (1.8). Esta pode ser obtida se fizermos uma aproximação normal para a função de verossimilhança de α .

A função de verossimilhança de α pode ser aproximada, em grandes amostras, por uma densidade normal multivariada com vetor de médias igual à estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}^T = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)$ e matriz de covariância dada pelo inverso da matriz cujo elemento (i, j) é

$$-\frac{\partial^2 \log L(\alpha/\mathbf{y})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \Big|_{\alpha=\hat{\alpha}}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Esta aproximação é justificada expandindo-se a função de verossimilhança numa série de Taylor em torno de $\hat{\alpha}$ e truncando após o termo quadrático da expansão (Zellner, 1971).

É fácil ver que

$$\hat{\alpha}_i = a^{-1} \left(\frac{y_i}{m_i} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

$(a'^{-1}(\cdot))$ denota a função inversa de $a'(\cdot)$) e que a matriz de covariância tem elementos da diagonal principal dados por

$$v_i = [m_i \phi_i a''(\hat{\alpha}_i)]^{-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

e os demais iguais a zero.

Assim, com esta função de verossimilhança aproximada e assumindo a estrutura a priori dada por (1.4) e (1.5), temos que a função de densidade a posteriori é

$$\pi^*(\alpha/\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \phi, \sigma^2) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^2}{v_i} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_*)^2\right\}.$$

Esta é uma densidade normal multivariada uma vez que o termo exponencial é uma função quadrática de α_i . Encontrar a média a posteriori é bastante simples uma vez que, na distribuição normal, a média é igual à moda. Então, derivando o logaritmo da função de densidade π^* acima e igualando a zero temos:

$$-\frac{(\tilde{\alpha}_i^* - \hat{\alpha}_i)}{v_i} - \frac{(\tilde{\alpha}_i^* - \tilde{\alpha}_*)}{\sigma^2} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Após alguns cálculos obtemos

$$\tilde{\alpha}_i^* = \frac{\frac{\hat{\alpha}_i}{v_i} + \frac{\hat{\alpha}_*}{\sigma^2}}{\frac{1}{v_i} + \frac{1}{\sigma^2}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.12)$$

onde

$$\hat{\alpha}_* = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\hat{\alpha}_i}{\sigma^2 + v_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2 + v_i}}.$$

Logo $\tilde{\alpha}_i^*$ é uma média ponderada entre $\hat{\alpha}_i$, o estimador de máxima verossimilhança de α_i e $\hat{\alpha}_.$, com pesos iguais aos inversos de v_i e σ^2 respectivamente. (1.12) pode ser reescrita como

$$\tilde{\alpha}_i^* = d_i \hat{\alpha}_i + (1 - d_i) \hat{\alpha}_. ,$$

onde $d_i = \sigma^2 / (\sigma^2 + v_i)$ e $\hat{\alpha}_. = (\sum_{i=1}^n d_i \hat{\alpha}_i) / \sum_{i=1}^n d_i$. As estimativas dos α_i 's são então "contraídas" em direção a $\hat{\alpha}_.$ e esta contração é bem mais acentuada quando σ^2 é pequena quando comparada com v_i (note-se que $0 \leq d_i \leq 1$).

Denotemos por $\tilde{C}^*$ a matriz cujos elementos são

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ij}^* &= - \frac{\partial^2 \log \pi^*(\alpha / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \phi, \sigma^2)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \Big|_{\alpha = \tilde{\alpha}^*} \\ &= \frac{\delta_{ij}}{z_i} - \frac{1}{n\sigma^2} , \quad i, j = 1, \dots, n , \end{aligned}$$

onde

$$z_i = v_i \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + v_i} = v_i d_i , \quad i = 1, \dots, n .$$

A inversa da matriz $\tilde{C}^*$, denotada por $\tilde{D}^*$, é a matriz de covariância da distribuição a posteriori aproximada e tem elementos dados por:

$$\tilde{D}_{ij}^* = z_i \delta_{ij} + \frac{z_i z_j}{n(\sigma^2 - z_.)} \quad (1.13)$$

onde

$$z_. = \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{n} .$$

Com esta aproximação podemos fazer inferências aproximadas sobre o vetor de parâmetros α , com a vantagem de que temos expressões explícitas para os estimadores de α_i , $i=1, \dots, n$. No Capítulo 5 faremos comparações numéricas entre as duas aproximações propostas.

1.2.2. Variância da distribuição a priori desconhecida

Analizamos agora o caso mais comum na prática, ou seja, aquele em que σ^2 , a variância da distribuição a priori, é desconhecida. Tomemos a estrutura a priori da seguinte forma:

Estágio 1. $\alpha_i/\mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$,
independentes. (1.14)

Estágio 2. $\pi(\mu) \propto \text{constante}$ e

$$\frac{v\lambda}{\sigma^2}, \lambda \sim \chi_v^2, \quad v > 0, \lambda > 0 \quad (1.15)$$

onde μ e σ^2 , dados v e λ , são independentes. Aqui, λ é o valor que se espera, a priori, para a variância σ^2 , enquanto que v é uma medida de precisão, ou seja, de quanta certeza se tem a priori de que λ é um valor razoável para σ^2 . Quando $v \rightarrow 0$, tem-se a priori usual (e imprópria) proporcional a σ^{-2} . Quando se tem pouca ou nenhuma informação sobre σ^2 , seria natural tomar $v = 0$ e, neste caso, não haveria necessidade de especificar um valor para λ . No entanto, a distri-

buição a posteriori também seria imprópria, como veremos a seguir. Então, neste caso, deve-se tomar v bastante pequeno e, portanto, o valor especificado para λ praticamente não influenciará os resultados. Uma discussão sobre as propriedades da distribuição assumida para σ^2 , isto é, χ^2 -invertida, é encontrada em Lindley (1965, Seção 5.3).

A função de densidade a priori de σ^2 é

$$\pi(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}(v+2)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{v\lambda}{\sigma^2}\right\}.$$

A função de densidade a posteriori conjunta de α , μ e σ^2 é dada por

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \mu, \sigma^2 / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, v, \lambda, \phi) &\propto L(\alpha / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \phi) \pi(\alpha / \mu, \sigma^2) \pi(\mu) \pi(\sigma^2 / v, \lambda) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}(v+n+2)} \exp\left\{\sum_{i=1}^n \phi_i [y_i \alpha_i - m_i a(\alpha_i)] - \frac{1}{2\sigma^2} \left[v\lambda + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \mu)^2\right]\right\}. \end{aligned}$$

Integrando-se a função acima com respeito a μ temos

$$\pi(\alpha, \sigma^2 / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, v, \lambda, \phi) \propto (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}(v+n+1)} \exp\left\{\sum_{i=1}^n \phi_i [y_i \alpha_i - m_i a(\alpha_i)] - \frac{1}{2\sigma^2} \left[v\lambda + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i)^2\right]\right\}.$$

A integração com respeito a σ^2 é bastante simples se usarmos o seguinte resultado:

$$\int_0^\infty (\sigma^2)^{-q} \exp\left\{-\frac{Q}{\sigma^2}\right\} d\sigma^2 \propto Q^{-(q-1)}$$

Fazendo a integração com respeito a σ^2 , temos

$$\pi(\alpha / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, v, \lambda, \phi) \propto \left[v\lambda + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i)^2\right]^{-\frac{1}{2}(v+n-1)} \exp\left\{\sum_{i=1}^n \phi_i [y_i \alpha_i - m_i a(\alpha_i)]\right\}. \quad (1.16)$$

A função de densidade acima é proporcional ao produto da função de verossimilhança por uma função de densidade t multivariada. Note-se que v não pode ser igual a zero, pois, neste caso, o primeiro fator do produto em (1.15) tenderia a ∞ quando $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$. Isto demonstra o que foi dito acima, ou seja, que se uma densidade a priori proporcional a σ^2 fosse tomada, a densidade a posteriori seria imprópria.

Derivando o logaritmo de $\pi(\alpha/y_1, \dots, y_n, v, \lambda, \phi)$ com respeito a α_i , $i = 1, \dots, n$ e igualando a zero, obtemos o sistema de equações abaixo cuja solução fornece as estimativas modais:

$$a'(\tilde{\alpha}_i) = \frac{y_i}{m_i} - \frac{\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_\cdot}{m_i \phi_i \tilde{\sigma}^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.17)$$

onde

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{v\lambda + \sum_{i=1}^n (\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_\cdot)^2}{v + n - 1} \quad (1.18)$$

e

$$\tilde{\alpha}_\cdot = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\alpha}_i}{n}.$$

As equações dadas em (1.17) são semelhantes às dadas em (1.8) (caso em que σ^2 é conhecida) com σ^2 substituída por $\tilde{\sigma}^2$. É interessante notar também que quando $v \rightarrow \infty$ as equações dadas em (1.17) se reduzem às dadas em (1.8) com $\tilde{\sigma}^2$ substituída por λ .

Para se resolver o sistema de equações em (1.17) basta utilizar o método de Newton Raphson em (1.9) com

$$c_i(k) = \phi_i y_i - m_i \phi_i a'(\alpha_i(k)) - \frac{\alpha_i(k) - \alpha_*(k)}{\sigma^2(k)}, \quad (1.19)$$

$$i = 1, \dots, n$$

e

$$C_{ij}(k) = (m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma^2(k)}) \delta_{ij} - \frac{1}{n\sigma^2(k)} - \\ - 2 \frac{(\alpha_i(k) - \alpha_*(k))(\alpha_j(k) - \alpha_*(k))}{\sigma^4(k) (v+n-1)}, \quad (1.20)$$

$$i, j = 1, \dots, n.$$

Se assumirmos a aproximação normal da função de densidade a posteriori, temos que $C_{(k)}^{-1}$ e $\alpha_{(k)}$ calculados na última iteração são, respectivamente, a matriz de covariância e o vetor de médias desta densidade. Podemos, portanto, fazer inferências aproximadas sobre o vetor de parâmetros α . Leonard (1972) observa que esta aproximação não parece ser muito boa no caso em que σ^2 é desconhecida, porém podemos utilizá-la como um método preliminar por sua simplicidade para inferir sobre α . Na Seção 1.3 fornecemos um método mais acurado de estimação aproximada.

Procedendo como na seção anterior, podemos aproximar a função de verossimilhança por uma função de densidade normal multivariada. Neste caso, obtemos a densidade a posteriori aproximada de α proporcional a

$$[v\lambda + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_*)^2]^{-\frac{1}{2}(v+n-1)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^2}{v_i}\right\}.$$

É bastante simples encontrar as equações que fornecem a moda a posteriori mas, neste caso em que σ^2 é desconhe

cida, as equações que levam às estimativas modais não têm soluções explícitas.

1.3. Cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace

Tierney e Kadane (1986) descrevem um procedimento para calcular médias, variâncias e covariâncias a posteriori aproximadas de funções positivas e contínuas dos parâmetros. O procedimento, baseado no método de Laplace para integrais, é bastante simples e envolve somente algumas maximizações e derivações. O procedimento está descrito no Apêndice 1.

Seja $g(\cdot)$ uma função positiva e contínua, definida no espaço paramétrico. A média a posteriori de $g(\theta)$ pode ser aproximada por

$$\hat{E}[g(\theta)/\mathbf{y}] = \frac{\gamma^*}{\gamma} \frac{g(\theta^*) \pi(\theta^*) L(\theta^*/\mathbf{y})}{\pi(\tilde{\theta}) L(\tilde{\theta}/\mathbf{y})}$$

onde $L(\theta/\mathbf{y})$ é a função de verossimilhança, $\pi(\theta)$ é a função de densidade a priori do parâmetro θ , $\mathbf{y}$ é o vetor de observações, $\tilde{\theta}$ é a moda a posteriori, isto é, a moda de $\pi(\theta)L(\theta/\mathbf{y})$, θ^* é a moda de $g(\theta)\pi(\theta)L(\theta/\mathbf{y})$,

$$\gamma^2 = - \left[\frac{d^2 \log(\pi(\theta)L(\theta/\mathbf{y}))}{d\theta^2} \right]_{\theta=\tilde{\theta}}^{-1} \quad \text{e}$$

$$\gamma^{*2} = - \left[\frac{d^2 \log(g(\theta)\pi(\theta)L(\theta/\mathbf{y}))}{d\theta^2} \right]_{\theta=\theta^*}^{-1}.$$

No caso multivariado, $\theta^T = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ e

$$\hat{E}[g(\theta)/\mathbf{y}] = \left(\frac{\det \mathbf{D}^*}{\det \mathbf{D}} \right)^{1/2} \frac{g(\theta^*) \pi(\theta^*) L(\theta^*/\mathbf{y})}{\pi(\tilde{\theta}) L(\tilde{\theta}/\mathbf{y})} \quad (1.21)$$

onde $\tilde{\theta}$ e θ^* são as modas de $\pi(\theta) L(\theta/\mathbf{y})$ e $g(\theta) \pi(\theta) L(\theta/\mathbf{y})$ respectivamente, $\mathbf{D}$ é a inversa da matriz cujo elemento (i, j) é

$$- \left. \frac{\partial^2 \log(\pi(\theta) L(\theta/\mathbf{y}))}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\theta=\tilde{\theta}}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

e $\mathbf{D}^*$ é a inversa da matriz cujo elemento (i, j) é

$$- \left. \frac{\partial^2 \log(g(\theta) \pi(\theta) L(\theta/\mathbf{y}))}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\theta=\theta^*}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Para se obter uma aproximação para a variância de $g(\theta)$ basta tomar

$$\hat{\text{Var}}[g(\theta)/\mathbf{y}] = \hat{E}[(g(\theta))^2/\mathbf{y}] - \hat{E}^2[g(\theta)/\mathbf{y}] \quad (1.22)$$

e utilizar a aproximação para a média a posteriori de $g(\theta)$ e de $(g(\theta))^2$.

Analogamente, uma aproximação para a covariância de duas funções positivas $g(\theta)$ e $h(\theta)$ é obtida por

$$\begin{aligned} \hat{\text{Cov}}[g(\theta), h(\theta)/\mathbf{y}] &= \hat{E}[g(\theta)h(\theta)/\mathbf{y}] - \\ &- \hat{E}[g(\theta)/\mathbf{y}] \hat{E}[h(\theta)/\mathbf{y}]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

A aplicação desta metodologia ao modelo geral estudado nas seções anteriores é imediata. O cálculo aproximado dos momentos a posteriori de α_i , $i=1, \dots, n$, não pode ser efetuado pois α_i não é exclusivamente positivo. Porém, como foi visto na Seção 1.1, $a'(\alpha_i)$ é igual à média θ_i de Y_{ij} dado α_i e, além disto, nas distribuições binomial e Poisson $a'(\alpha_i)$ é positiva. Na seção seguinte passamos a calcular então os momentos a posteriori aproximados de $a'(\alpha_i)$, isto é, apresentamos uma aproximação para o estimador de Bayes de θ_i .

1.3.1. Variância da distribuição a priori conhecida

Através de (1.21) podemos calcular a média a posteriori aproximada de $a'(\alpha_\ell)$, $\ell = 1, \dots, n$. Para tal, basta tomar $g(\alpha) = a'(\alpha_\ell)$ e notar que $\pi(\alpha)L(\alpha/\mathbf{Y})$ é proporcional à função de densidade a posteriori marginal de α , tendo eliminado μ por integração (ver (1.7)). Assim, após alguns cálculos obtemos a seguinte aproximação para a média a posteriori de $a'(\alpha_\ell)$:

$$\begin{aligned} \hat{E}[a'(\alpha_\ell)/\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n, \phi, \sigma^2] &= \left(\frac{\det \mathbf{D}^*}{\det \mathbf{D}} \right)^{1/2} a'(\alpha_\ell^*) \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[-\frac{(\alpha_i^* - \tilde{\alpha}_i)^2}{2\sigma^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_i)^2}{2\sigma^2} + \phi_i Y_i (\alpha_i^* - \tilde{\alpha}_i) - m_i \phi_i (a(\alpha_i^*) - a(\tilde{\alpha}_i)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\ell = 1, \dots, n,$$

onde $\tilde{\alpha}_i$, $i=1, \dots, n$, é obtido através do método de Newton Raphson em (1.9) com $c_{i(k)}$ e $\mathbf{C}_{(k)}^{-1} = \mathbf{D}_{(k)}$ dados por (1.10) e (1.11) respectivamente; α_i^* , $i=1, \dots, n$, também é obtido por este método com

$$c_i(k) = \phi_i y_i - m_i \phi_i a'(\alpha_i(k)) - \frac{\alpha_i(k)^{-\alpha_i(k)}}{\sigma^2} + \frac{\delta_{i\ell} a''(\alpha_i(k))}{a'(\alpha_i(k))}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.25)$$

e com os elementos de $\mathbf{C}_{(k)}^{-1} = \mathbf{D}_{(k)}^*$ dados por

$$D_{ij}^*(k) = w_i(k) \delta_{ij} + \frac{w_i(k) w_j(k)}{n(\sigma^2 - w_{\cdot}(k))}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

sendo

$$w_i(k) = \left(\delta_{i\ell} a_i(k) + m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-1}, \quad (1.26)$$

$$w_{\cdot}(k) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i(k)}{n}$$

e

$$a_i(k) = - \frac{a'''(\alpha_i(k)) a'(\alpha_i(k)) - [a''(\alpha_i(k))]^2}{[a'(\alpha_i(k))]^2}, \quad (1.27)$$

$$i = 1, \dots, n$$

e onde $\mathbf{D}$ e $\mathbf{D}^*$ são, respectivamente, iguais às matrizes $\mathbf{D}_{(k)}$ e $\mathbf{D}_{(k)}^*$ obtidas na última iteração das aplicações do método de Newton Raphson.

Convém notar que o cálculo acima envolve derivadas de $a(\alpha_i)$ até terceira ordem, porém, em diversas distribuições, como a binomial e a Poisson estas derivadas existem e são calculadas com facilidade.

Para calcular a covariância a posteriori aproximada de $a'(\alpha_{\ell})$ e $a'(\alpha_q)$ é necessário calcular a média a posteriori aproximada de produto $a'(\alpha_{\ell}) a'(\alpha_q)$ e efetuar o cálculo proposto em (1.23). Se o interesse for calcular a variância de $a'(\alpha_{\ell})$, basta tomar $\ell = q$, calcular, portanto, a média a

posteriori aproximada de $[a'(\alpha_\ell)]^2$ e fazer o cálculo dado em (1.22).

A média a posteriori aproximada de $a'(\alpha_\ell)a'(\alpha_q)$, $\ell, q = 1, \dots, n$, é dada por (1.24) com $a'(\alpha_\ell^*)$ substituído por $a'(\alpha_q^*)a'(\alpha_q^*)$ e (1.25) e (1.26) substituídos, respectivamente, por

$$c_i(k) = \phi_i Y_i - m_i \phi_i a'(\alpha_i(k)) - \\ - \frac{\alpha_i(k) - \alpha_*(k)}{\sigma^2} + \frac{(\delta_{i\ell} + \delta_{iq}) a''(\alpha_i(k))}{a'(\alpha_i(k))},$$

$$i = 1, \dots, n$$

e

$$w_i(k) = [(\delta_{i\ell} + \delta_{iq}) a_i(k) + m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma^2}]^{-1},$$

$$i = 1, \dots, n.$$

1.3.2. Variância da distribuição a priori desconhecida

O cálculo dos momentos a posteriori aproximados pode ser efetuado também quando σ^2 é desconhecida. O procedimento é análogo ao utilizado na seção anterior, com a diferença básica de que se deve calcular a função de densidade a posteriori marginal de α através de integrações com respeito a μ e σ^2 como foi feito na Seção 1.3 (ver (1.16)). Após alguns cálculos obtemos a seguinte aproximação para a média a posteriori de $a'(\alpha_\ell)$:

$$\begin{aligned} \hat{E} [a'(\alpha_\ell) / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \theta, v, \lambda] &= \left(\frac{\det \mathbf{D}^*}{\det \mathbf{D}} \right)^{1/2} a'(\alpha_\ell^*) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2}(v+n-1) [\log[v\lambda + \sum_{i=1}^n (\alpha_i^* - \alpha_i^*)] - \log[v\lambda + \sum_{i=1}^n (\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_i^*)^2]] \right\} + \quad (1.28) \\ &+ \sum_{i=1}^n [\phi_i y_i (\alpha_i^* - \tilde{\alpha}_i) - m_i \phi_i (a(\alpha_i^*) - a(\tilde{\alpha}_i))] \}, \quad \ell = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}_i$, $i=1, \dots, n$, é obtido através do método de Newton Raphson em (1.9) com $c_i(k)$ e $C_{ij}(k)$ dados por (1.19) e (1.20); $\tilde{\alpha}_i^*$, $i=1, \dots, n$, também é obtido pelo mesmo método com

$$\begin{aligned} c_i(k) &= \phi_i y_i - m_i \phi_i a'(\alpha_i(k)) - \frac{\alpha_i(k)^{-\alpha_i(k)}}{\sigma_{(k)}^2} + \\ &+ \frac{\delta_{i\ell} a''(\alpha_i(k))}{a'(\alpha_i(k))}, \quad i=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.29)$$

e os elementos de $\mathbf{C}_{(k)}$ dados por

$$\begin{aligned} C_{ij}(k) &= (\delta_{i\ell} a_i(k) + m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma_{(k)}^2}) \delta_{ij} - \frac{1}{n \sigma_{(k)}^2} - \\ &- \frac{2(\alpha_i(k)^{-\alpha_i(k)})(\alpha_j(k)^{-\alpha_j(k)})}{\sigma_{(k)}^4 (v+n-1)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.30)$$

com

$$\sigma_{(k)}^2 = \frac{v\lambda + \sum_{i=1}^n (\alpha_i(k) - \alpha_i^*)^2}{v+n-1},$$

e onde $a_i(k)$ é obtido por (1.27) e $\mathbf{D}$ e $\mathbf{D}^*$ são, respectivamente, iguais às matrizes inversas calculadas na última iteração das aplicações do método de Newton Raphson para o cálculo de $\tilde{\alpha}$ e α^* .

A média a posteriori aproximada de $a'(\alpha_\ell)a'(\alpha_q)$, necessária ao cálculo das variâncias e covariâncias, é dada por (1.28) com $a'(\alpha_\ell^*)$ substituído por $a'(\alpha_\ell^*)a'(\alpha_q^*)$ e (1.29) e (1.30) substituídos, respectivamente, por

$$c_{i(k)} = \phi_i y_i - m_i \phi_i a'(\alpha_i(k)) - \frac{\alpha_i(k) \alpha_{\cdot}(k)}{\sigma^2(k)} + \\ + \frac{(\delta_{i\ell} + \delta_{iq}) a''(\alpha_i(k))}{a'(\alpha_i(k))}, \quad i=1, \dots, n$$

e

$$C_{ij(k)} = [(\delta_{i\ell} + \delta_{iq}) a_i(k) + m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma^2(k)}] \delta_{ij} - \\ - \frac{1}{n\sigma^2(k)} - \frac{2(\alpha_i(k) - \alpha_{\cdot}(k))(\alpha_j(k) - \alpha_{\cdot}(k))}{\sigma^4(k)(v+n-1)},$$

$$i, j=1, \dots, n.$$

1.4. Comentários

Na Seção 1.2 foram propostas duas aproximações para a função de densidade a posteriori de α . No entanto, em geral, o interesse é fazer inferências sobre $\theta_i = a'(\alpha_i)$ e não sobre α_i , uma vez que θ_i é a média de Y_{ij} dado α_i . Foi então proposto na Seção 1.2. encontrar a moda a posteriori de α , denotada por $\tilde{\alpha}^T = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ e estimar θ_i por $\tilde{\theta}_i = a'(\tilde{\alpha}_i)$. O mesmo raciocínio se aplica para fazer inferências aproximadas sobre θ_i . Por exemplo, determinado um Intervalo de Credibilidade (α_i^0, α_i^1) para α_i , pode-se encontrar um Intervalo de Credibilidade aproximado para θ_i da forma (θ_i^0, θ_i^1) onde $\theta_i^0 = a'(\alpha_i^0)$ e $\theta_i^1 = a'(\alpha_i^1)$. Este tipo de procedimento não é

recomendável pois os erros cometidos não são controlados. Na Seção 1.3. propomos então aproximações mais acuradas sobre os momentos a posteriori de $a'(\alpha_i)$ e, em nossa opinião é melhor trabalhar com estas aproximações do que com as propostas na Seção 1.2. No entanto, não se faz nenhuma aproximação para a função de densidade a posteriori de $a'(\alpha_i)$ e, consequentemente, não é possível fazer inferências aproximadas sobre θ_i . Porém o fato de se encontrar aproximações para a média, a variância e a covariância a posteriori já é de grande utilidade na prática.

1.5. Casos particulares e extensões

Toda a metodologia descrita nas seções anteriores é baseada na estrutura a priori em dois estágios:

Estágio 1. $\alpha_i/\mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1, \dots, n$,
independentes.

Estágio 2. $\pi(\mu) \propto \text{constante}$,

$\frac{v\lambda}{\sigma^2}/v, \lambda \sim \chi_v^2$, $v > 0$, $\lambda > 0$, onde μ e σ^2 , dados v e λ , são independentes. Foi estudado também o caso em que a variância σ^2 do primeiro estágio é conhecida. Uma situação também de interesse é aquela em que μ e σ^2 são ambas conhecidas ou que μ é conhecida e σ^2 é desconhecida. Ou ainda pode-se pensar numa distribuição informativa para μ do tipo:

$$\mu/\mu_0, \sigma_0^2 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2) .$$

com, digamos, μ_0 conhecido e σ_0^2 desconhecida com a seguinte distribuição a priori:

$$\frac{\nu_0 \lambda_0}{\sigma_0^2} / \nu_0, \lambda_0 \sim \chi_{\nu_0}^2, \nu_0 > 0, \lambda_0 > 0 .$$

Os resultados para estas situações são obtidos de forma absolutamente análoga à descrita nas seções anteriores e, portanto, serão omitidos.

oOo

CAPÍTULO 2

ALGUNS MODELOS ESPECIAIS

2.1. O modelo binomial

Consideremos n populações das quais são retiradas amostras aleatórias independentes de tamanhos $m_1, \dots, m_n$ respectivamente. Suponhamos que cada variável aleatória Y_{ij} , $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m_i$, dado θ_i , tenha distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso θ_i . Logo, $Y_i = \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$, dados m_i e θ_i , tem distribuição binomial com índice m_i e probabilidade de sucesso θ_i , que denotamos por

$$Y_i/m_i, \theta_i \sim B(m_i, \theta_i), \quad i=1, \dots, n.$$

Um estudo sobre estimação Bayesiana neste modelo é encontrada em Leonard (1972) e Leonard (1976).

A função de probabilidade de Y_i é um caso particular de (1.2) com $\alpha_i = \log(\theta_i/(1-\theta_i))$, $0 < \theta_i < 1$ (ou, equivalentemente, $\theta_i = e^{\alpha_i}/(1+e^{\alpha_i})$), $a(\alpha_i) = \log(1+e^{\alpha_i})$ e $\phi_i = 1$, $i=1, \dots, n$ (evidentemente, y_i é um inteiro compreendido entre zero e m_i). Logo, de (1.3), temos que a função de verossimilhança de α é

$$L(\alpha/y_1, \dots, y_n) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^n [y_i \alpha_i - m_i \log(1+e^{\alpha_i})]\right\}.$$

2.1.1. Variância da distribuição a priori conhecida

Consideremos a estrutura a priori estabelecida em (1.4) e (1.5). Na análise de dados binomiais é comum a utilização de uma distribuição a priori beta para θ_i . Portanto, é razoável utilizar uma distribuição a priori normal para os α_i 's uma vez que se α_i tem distribuição normal então $\theta_i = e^{\alpha_i} / (1 + e^{\alpha_i})$ tem aproximadamente distribuição beta (Leonard, 1972).

Por (1.7) temos que a função de densidade a posteriori de α é

$$\pi(\alpha/y_1, \dots, y_m, \sigma^2) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^n [y_i \alpha_i - m_i \log(1 + e^{\alpha_i}) - \frac{1}{2\sigma^2} (\alpha_i - \alpha_*)^2]\right\}$$

e de (1.8) segue que as modas a posteriori são dadas pela solução do sistema de equações:

$$\frac{e^{\tilde{\alpha}_i}}{1 + e^{\tilde{\alpha}_i}} = \frac{y_i}{m_i} - \frac{\tilde{\alpha}_i - \alpha_*}{m_i \sigma^2}, \quad i=1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Como $\theta_i = e^{\alpha_i} / (1 + e^{\alpha_i})$, um estimador natural de θ_i é

$$\tilde{\theta}_i = e^{\tilde{\alpha}_i} / (1 + e^{\tilde{\alpha}_i}).$$

Para encontrar a solução de (2.1) pode-se utilizar o método de Newton Raphson em (1.9), bastando tomar

$$c_{i(k)} = y_i - m_i \frac{e^{\alpha_{i(k)}}}{1 + e^{\alpha_{i(k)}}} - \frac{\alpha_{i(k)} - \alpha_*(k)}{\sigma^2}, \quad i=1, \dots, n \quad (2.2)$$

e o elemento (i, j) da matriz $C_{(k)}^{-1}$ igual a

$$D_{ij}(k) = u_i(k) \delta_{ij} + \frac{u_i(k) u_j(k)}{n(\sigma^2 - u_{\cdot}(k))}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

onde

$$u_i(k) = \left(m_i \frac{e^{\alpha_i(k)}}{(1 + e^{\alpha_i(k)})^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-1}, \quad i=1, \dots, n.$$

Como na Seção 1.2.1 podemos aproximar a função de densidade a posteriori por uma normal multivariada com vetor de médias $\alpha_{(k)}$ e matriz de covariância $C_{(k)}^{-1}$ obtidos na última iteração do processo de Newton Raphson. Na opinião de Leonard (1972) esta aproximação é razoavelmente acurada numa grande região do espaço paramétrico desde que y_i e $m_i - y_i$ não sejam pequenos.

Agora, assumindo uma aproximação normal para a função de verossimilhança temos, por (1.12) que as médias a posteriori aproximadas são

$$\tilde{\alpha}_i^* = \frac{\frac{\hat{\alpha}_i}{v_i} + \frac{\hat{\alpha}_{\cdot}}{\sigma^2}}{\frac{1}{v_i} + \frac{1}{\sigma^2}}, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.4)$$

onde

$$\hat{\alpha}_i = \log y_i - \log (m_i - y_i), \quad i=1, \dots, n,$$

$$v_i = \frac{1}{y_i} + \frac{1}{m_i - y_i}, \quad i=1, \dots, n$$

e

$$\hat{\alpha}_{\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\hat{\alpha}_i}{\sigma^2 + v_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2 + v_i}}.$$

Por (1.13) pode-se encontrar a matriz de covariância da distribuição a posteriori aproximada e fazer inferências aproximadas sobre o vetor de parâmetros α .

2.1.2. Variância da distribuição a priori desconhecida.

Consideremos agora a estrutura a priori (1.14) e (1.15). Neste caso, a função de densidade a posteriori de α é, por (1.16),

$$\pi(\alpha/y_1, \dots, y_n, v, \lambda) \propto [v\lambda + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_0)^2]^{-\frac{1}{2}(v+n-1)} \times \\ \times \exp\left\{\sum_{i=1}^n [y_i \alpha_i - m_i \log(1 + e^{\alpha_i})]\right\}.$$

Por (1.17) e (1.18), as modas a posteriori são obtidas pela solução do sistema de equações dado em (2.1) com σ^2 substituída por $\tilde{\sigma}^2$.

É possível utilizar o mesmo processo iterativo proposto em (1.9) para encontrar as modas a posteriori, bastando substituir $c_i(k)$ e $c_{ij}(k)$, respectivamente, por

$$y_i^{-m_i} \frac{e^{\alpha_i(k)}}{1 + e^{\alpha_i(k)}} - \frac{\alpha_i(k)^{-\alpha_0(k)}}{\sigma^2(k)}, \quad i=1, \dots, n \quad (2.5)$$

e

$$\left(m_i \frac{e^{\alpha_i(k)}}{(1 + e^{\alpha_i(k)})^2} + \frac{1}{\sigma^2(k)} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{n\sigma^2(k)} - \frac{2(\alpha_i(k)^{-\alpha_0(k)})(\alpha_j(k)^{-\alpha_0(k)})}{\sigma^4(k)(v+n-1)} \quad (2.6) \\ i, j = 1, \dots, n.$$

As aproximações propostas na Seção 1.2.2 podem ser também facilmente aplicadas ao caso de dados binomiais.

2.1.3. Cálculo dos momentos aproximados pelo método de Laplace

Na distribuição binomial, a média de Y_{ij} dado α_i é $e^{\alpha_i}/(1+e^{\alpha_i})$. Esta é uma função positiva e contínua de α_i e, portanto, o procedimento do cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace pode ser usado. O cálculo destes momentos será omitido aqui. Para obtê-los basta lembrar que $a(\alpha_i) = \log(1+e^{\alpha_i})$ e $\phi_i=1$, $i=1, \dots, n$ e utilizar os resultados das seções 1.3.1. e 1.3.2.

2.2. O modelo de Poisson

Consideremos n populações das quais são retiradas amostras aleatórias independentes $Y_1, \dots, Y_n$ de tamanhos $m_1, \dots, m_n$ respectivamente. Suponhamos que, dado θ_i , Y_{ij} tenha distribuição de Poisson com média θ_i que denotamos por:

$$Y_{ij}/\theta_i \sim P(\theta_i), \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m_i.$$

Um estudo sobre estimação Bayesiana neste modelo é encontrada em Leonard (1976).

A função de probabilidade de Y_{ij} é um caso particular de (1.2) com $\alpha_i = \log \theta_i$ (ou, equivalentemente, $\theta_i = e^{\alpha_i}$), $\phi_i = 1$ e $a(\alpha_i) = e^{\alpha_i}$, $i=1, \dots, n$ (e, evidentemente, y_i é um inteiro não negativo).

De (1.3) temos que a função de verossimilhança de α é

$$L(\alpha/y_1, \dots, y_n) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^n (y_i \alpha_i - m_i e^{\alpha_i})\right\}$$

onde

$$y_i = \sum_{j=1}^n y_{ij}, \quad i=1, \dots, n.$$

2.2.1. Variância da distribuição a priori conhecida

Tomemos a estrutura a priori dada em (1.4) e (1.5). Note-se que estamos assumindo uma distribuição a priori log-normal para θ_i .

De (1.7) segue que a função de densidade a posteriori de α é

$$\pi(\alpha/y_1, \dots, y_n, \sigma^2) \propto \exp\left\{\sum_{i=1}^n (y_i \alpha_i - m_i e^{\alpha_i}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_*)^2\right\}$$

e de (1.8) que as modas a posteriori são dadas pela solução do sistema de equações

$$e^{\tilde{\alpha}_i} = \frac{y_i}{m_i} - \frac{\tilde{\alpha}_i - \alpha_*}{m_i \sigma^2}, \quad i=1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Como $\theta_i = e^{\alpha_i}$, um estimador natural de θ_i é $\tilde{\theta}_i = e^{\tilde{\alpha}_i}$.

O método de Newton Raphson em (1.9) pode ser usado para encontrar a solução de (2.7) bastando tomar

$$c_i(k) = y_i - m_i e^{\alpha_i(k)} - \frac{\alpha_i(k) - \alpha_*(k)}{\sigma^2}, \quad i=1, \dots, n$$

e o elemento (i,j) da matriz $C_{(k)}^{-1}$ igual a

$$D_{ij}(k) = u_i(k) \delta_{ij} + \frac{u_i(k) u_j(k)}{n(\sigma^2 - u_{\cdot}(k))}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

onde

$$u_i(k) = \left(m_i e^{\alpha_i(k)} + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Como foi citado na Seção 1.2.1, é possível aproximar a função de densidade a posteriori por uma normal multivariada com vetor de médias $\alpha_{(k)}$ e matriz de covariância $C_{(k)}^{-1}$ obtidos na última iteração do processo de Newton Raphson.

Se assumirmos uma aproximação normal para a função de verossimilhança, segue de (1.12) que as médias a posterioria aproximadas são

$$\tilde{\alpha}_i^* = \frac{\frac{\hat{\alpha}_i}{v_i} + \frac{\hat{\alpha}_{\cdot}}{\sigma^2}}{\frac{1}{v_i} + \frac{1}{\sigma^2}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.8)$$

onde $\hat{\alpha}_i = \log y_i - \log m_i$, $i = 1, \dots, n$,

$$v_i = \frac{1}{y_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

e

$$\hat{\alpha}_{\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\hat{\alpha}_i}{\sigma^2 + v_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2 + v_i}}$$

Finalmente, por (1.13) pode-se encontrar a matriz de covariância da distribuição a posteriori aproximada e fazer inferências aproximadas sobre o vetor de parâmetros α .

2.2.2. Variância da distribuição a priori desconhecida

Tomando a estrutura a priori em (1.14) e (1.15) quando σ^2 é desconhecida temos, por (1.16), que a função de densidade a posteriori de α é

$$\pi(\alpha/\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \nu, \lambda) \propto [\nu\lambda + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{\cdot})^2]^{-\frac{1}{2}(\nu+n-1)} \times \\ \times \exp\left\{ \sum_{i=1}^n (y_i \alpha_i - m_i e^{\alpha_i}) \right\}.$$

De (1.17) e (1.18) segue que as modas a posteriori são obtidas pela solução do sistema de equações dado em (2.7) com σ^2 substituída por $\tilde{\sigma}^2$.

O processo iterativo em (1.9) é utilizado com $c_i(k)$ e $C_{ij}(k)$ substituídos, respectivamente, por

$$y_i - m_i e^{\alpha_i(k)} = \frac{\alpha_i(k) - \alpha_{\cdot}(k)}{\sigma^2(k)}$$

e

$$\left(m_i e^{\alpha_i(k)} + \frac{1}{\sigma^2(k)} \right) \delta_{ij} = \frac{1}{n\sigma^2(k)} - \frac{2(\alpha_i(k) - \alpha_{\cdot}(k))(\alpha_j(k) - \alpha_{\cdot}(k))}{\sigma^4(k)(\nu+n-1)},$$

$$i, j = 1, \dots, n.$$

As aproximações propostas na Seção 1.2.2. podem ser também aplicadas a dados provindos da distribuição de Poisson.

2.2.3. Cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace

A média de Y_{ij} dado α_i é, na distribuição de Poisson, igual a e^{α_i} . Como esta é uma função positiva de α_i , o procedimento do cálculo dos momentos aproximados pelo método de Laplace pode ser utilizado. Para obter estes momentos basta lembrar que $a(\alpha_i) = e^{\alpha_i}$ e $\phi_i = 1$, $i=1, \dots, n$ e utilizar os resultados das seções 1.3.1 e 1.3.2.

2.3. O modelo normal

Consideremos n populações das quais são retiradas amostras aleatórias independentes $Y_1, \dots, Y_n$ de tamanhos $m_1, \dots, m_n$ respectivamente. Suponhamos que, dados θ_i e σ_i^2 , Y_{ij} tenha distribuição normal com média θ_i e variância σ_i^2 (assumida, a princípio, conhecida) que denotamos por

$$Y_{ij} | \theta_i, \sigma_i^2 \sim N(\theta_i, \sigma_i^2) \quad , \quad i=1, \dots, n \quad , \quad j=1, \dots, m_i.$$

A função de densidade de Y_{ij} , dados θ_i e σ_i^2 , é um caso particular de (1.2) com $\alpha_i = \theta_i$, $\phi_i = 1/\sigma_i^2$ e $a(\alpha_i) = \alpha_i^2/2$.

De (1.3) segue que a função de verossimilhança de θ (lembrando que $\alpha_i = \theta_i$, $i=1, \dots, n$) é

$$L(\theta | Y_1, \dots, Y_n) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i \theta_i - m_i \frac{\theta_i^2}{2}) \right\}$$

onde $y_i = \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$, $i=1, \dots, n$.

2.3.1. Variâncias conhecidas

Vamos assumir, nesta seção, que as variâncias σ^2 e σ_i^2 , $i=1, \dots, n$, são todas conhecidas. Tomemos a estrutura a priori dada em (1.4) e (1.5). Como $\alpha_i = \theta_i$, $i=1, \dots, n$, estamos assumindo uma distribuição a priori normal para θ_i .

Por (1.7) temos que a função de densidade a posteriori de θ é

$$\pi(\theta | y_1, \dots, y_n, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2, \sigma^2) \propto \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i \theta_i - m_i \frac{\theta_i^2}{2}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\theta_i - \theta_*)^2 \right\}$$

onde $\theta_* = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i}{n}$. Esta é uma função de densidade normal multivariada, logo as modas e as médias a posteriori coincidem. Podemos, portanto, encontrar os estimadores de Bayes de θ_i , $i=1, \dots, n$ (em relação à perda quadrática) já que estes são dados pelas médias da distribuição a posteriori. De (1.8) segue que

$$\tilde{\theta}_i = \frac{y_i}{m_i} - \sigma_i^2 \frac{\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta}_*}{m_i \sigma^2}, \quad i=1, \dots, n,$$

onde

$$\tilde{\theta}_* = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\theta}_i}{n}.$$

É fácil mostrar que

$$\tilde{\theta}_* = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma^2 + \sigma_i^2 / m_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2 + \sigma_i^2 / m_i}},$$

onde $\bar{y}_i = y_i/m_i$. Logo, $\tilde{\theta}_\cdot$ é uma média ponderada das médias das amostras com pesos iguais aos inversos de $\sigma^2 + \sigma_i^2/m_i$. Outra forma de escrever $\tilde{\theta}_i$ é

$$\tilde{\theta}_i = d_i \bar{y}_i + (1-d_i) \tilde{\theta}_\cdot, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.9)$$

onde $d_i = \sigma^2 / (\sigma^2 + \sigma_i^2/m_i)$. Isto mostra uma contração em direção a $\tilde{\theta}_\cdot$, que será tanto maior quanto menor for d_i , o que ocorre quando σ^2 é pequena quando comparada com σ_i^2/m_i .

A matriz de covariância a posteriori D , por (1.11), tem elementos dados por

$$D_{ij} = u_i \delta_{ij} + \frac{u_i u_j}{n(\sigma^2 - u_\cdot)}, \quad i, j=1, \dots, n,$$

onde

$$u_i = \left(\frac{m_i}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-1}.$$

As aproximações feitas na Seção 1.2.1 não são necessárias aqui, uma vez que a distribuição a posteriori é normal multivariada.

2.3.2. Variâncias desconhecidas

Na seção anterior, supusemos σ_i^2 , $i=1, \dots, n$ e σ^2 conhecidas. Podemos supor apenas σ^2 desconhecida e proceder a análise como na Seção 1.2.2 porém, na prática, é comum não se conhecer também σ_i^2 . Nesta situação, vamos assumir a seguinte estrutura a priori:

Estágio 1. $\theta_i | \mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1, \dots, n$,
independentes.

Estágio 2. $\pi(\mu) \propto \text{constante}$,

$$\frac{v\lambda}{\sigma^2} / v, \lambda \sim \chi_v^2, \quad v > 0, \lambda > 0,$$

$$\frac{v_i \lambda_i}{\sigma_i^2} / v_i, \lambda_i \sim \chi_{v_i}^2, \quad v_i > 0, \lambda_i > 0, \quad i=1, \dots, n,$$

onde, dados $v, \lambda, v_i, \lambda_i$, $i=1, \dots, n$, μ, σ^2 e σ_i^2 , $i=1, \dots, n$,
são independentes.

Este assunto é tratado por Lindley e Smith (1972). Eles propõem que seja calculada a função de densidade conjunta de todas as quantidades desconhecidas e, em lugar de eliminar as variâncias σ^2 e σ_i^2 , $i=1, \dots, n$, por integração, encontrar uma moda conjunta $\tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}_i^2, \tilde{\theta}_i$, $i=1, \dots, n$. Não utilizamos este procedimento pois a integração com respeito às variâncias é bastante simples de ser efetuada e portanto, encontrar a moda conjunta em lugar da marginal de θ , é uma aproximação desnecessária. A análise como fazemos nesta seção é encontrada em Lindley (1971).

A função de densidade a posteriori conjunta de $\theta, \mu, \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ é dada por

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \mu, \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2 / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, v, \lambda) &\propto \\ &\propto L(\theta, \mu, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2, \sigma^2 / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \times \\ &\times \pi(\theta / \mu, \sigma^2) \pi(\mu) \pi(\sigma^2 / v, \lambda) \prod_{i=1}^n \pi(\sigma_i^2 / v_i, \lambda_i) \end{aligned}$$

$$\propto \prod_{i=1}^n (\sigma_i^2)^{-\frac{1}{2}(v_i+m_i+2)} (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}(v+n+2)} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{v_i \lambda_i + S_i^2 + m_i (\bar{y}_i - \theta_i)^2}{2\sigma_i^2} - \frac{v\lambda + \sum_{i=1}^n (\theta_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

onde $S_i^2 = \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$, $i=1, \dots, n$, $\mathbf{v}^T = (v, v_1, \dots, v_n)$ e $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

A integração com respeito a μ produz

$$\pi(\boldsymbol{\theta}, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2, \sigma^2 / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \propto$$

$$\prod_{i=1}^n (\sigma_i^2)^{-\frac{1}{2}(v_i+m_i+2)} (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}(v+n+1)}$$

$$\times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{v_i \lambda_i + S_i^2 + m_i (\bar{y}_i - \theta_i)^2}{2\sigma_i^2} - \frac{v\lambda + \sum_{i=1}^n (\theta_i - \theta_*)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

A integração com respeito a $\sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ fornece a função de densidade a posteriori marginal de $\boldsymbol{\theta}$ que é dada por

$$\pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \propto [v\lambda + \sum_{i=1}^n (\theta_i - \theta_*)^2]^{-\frac{1}{2}(v+n-1)} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n [v_i \lambda_i + S_i^2 + m_i (\bar{y}_i - \theta_i)^2]^{-\frac{1}{2}(v_i+m_i)}.$$

Este é o produto de funções de densidade t multivariadas. Como já citado, não se pode tomar $v=0$ pois, neste caso, a distribuição a posteriori não é própria. No

entanto, é possível tomar $v_1, \dots, v_n$ iguais a zero, correspondendo a priori não informativas para $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Assim, não é necessário especificar valores para $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Agora, basta maximizar a função acima com relação a θ para encontrar a moda a posteriori. É fácil mostrar que ela é dada por

$$\tilde{\theta}_i = \tilde{d}_i \bar{y}_i + (1 - \tilde{d}_i) \tilde{\theta}. \quad (2.10)$$

onde

$$\tilde{d}_i = \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2 / m_i}, \quad i=1, \dots, n,$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{v\lambda + \sum_{i=1}^n (\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta})^2}{v+n-1}, \quad \tilde{\sigma}_i^2 = \frac{v_i \lambda_i + S_i^2 + m_i (\bar{y}_i - \tilde{\theta}_i)^2}{v_i + m_i},$$

$$i=1, \dots, n,$$

e

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{y}_i}{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2 / m_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2 / m_i}}.$$

Note-se que os estimadores modais obtidos aqui são semelhantes àqueles em que se supunham conhecidas as variâncias, porém, com $\sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ substituídas por $\tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}_1^2, \dots, \tilde{\sigma}_n^2$ respectivamente.

A solução de (2.10) pode ser obtida pelo método de Newton Raphson descrito na Seção 1.2.1, o que implica na solução iterativa de (1.9) com $\alpha_{ij}(k)$, $C_{ij}(k)$ e $c_i(k)$ substituídos, respectivamente, por $\theta_{ij}(k)$,

$$c_{i(k)} = \frac{y_i}{\sigma_{i(k)}^2} - \frac{m_i \theta_{i(k)}}{\sigma_{i(k)}^2} - \frac{\theta_{i(k)} - \theta_{\cdot(k)}}{\sigma_{\cdot(k)}^2}, i=1, \dots, n$$

e

$$c_{ij(k)} = \left(\frac{m_i}{\sigma_{i(k)}^2} - \frac{2m_i^2 (\bar{y}_i - \theta_{i(k)})^2}{(v_i + m_i) \sigma_{i(k)}^4} + \frac{1}{\sigma_{\cdot(k)}^2} \right) \delta_{ij} - \\ - \frac{1}{n \sigma_{\cdot(k)}^2} - 2 \frac{(\theta_{i(k)} - \theta_{\cdot(k)})(\theta_{j(k)} - \theta_{\cdot(k)})}{(v+n-1) \sigma_{\cdot(k)}^4},$$

$$i, j = 1, \dots, n.$$

As aproximações propostas na Seção 1.2.2 podem ser facilmente aplicadas aqui, isto é, ao problema de dados normais agrupados.

Uma situação bastante comum na prática é aquela em que $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_n^2$, isto é, assume-se a priori que as variâncias "dentro" das populações são iguais. Comumente esta variância é denotada por σ_w^2 (within variance) e a que chamamos de σ^2 é denotada por σ_b^2 (between variance). A análise desta situação é semelhante à que fizemos acima e portanto será omitida.

2.3.3. Cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace

Na Seção 2.3.1 ficou claro que no caso em que as variâncias são conhecidas não há necessidade de se fazer aproximações para a função de densidade a posteriori pois mostramos que esta é normal multivariada, porém, quando as variâncias são desconhecidas estas aproximações são necessárias.

Infelizmente, o procedimento cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace proposto por Tierney e Kadane (1986) só é válido para funções positivas dos parâmetros. Na situação presente, θ_1 pode ser negativa e consequentemente não se pode utilizar tal procedimento. Uma solução é, portanto, utilizar o estimador modal proposto na seção anterior. Outra solução para o problema é dada em Andrade e Bolfarine (1986).

oOo

CAPÍTULO 3

PREVISÃO BAYESIANA EM AMOSTRAGEM EM DOIS ESTÁGIOS

3.1. Introdução

3.1.1. O enfoque de superpopulação para populações finitas

Uma população finita consiste de N unidades rotuladas pelos inteiros $1, \dots, N$. À i -ésima unidade da população está associado um valor desconhecido y_i . O enfoque de superpopulação assume que $y_1, \dots, y_N$ são realizações das variáveis aleatórias $Y_1, \dots, Y_N$ respectivamente, com uma certa distribuição de probabilidades conjunta. Como $y_1, \dots, y_N$ são desconhecidos, é de interesse prever funções destas quantidades como, por exemplo, o total populacional $\sum_{i=1}^N y_i$ e a média populacional $\sum_{i=1}^N y_i / N$.

Sobre a teoria geral da previsão em populações finitas citamos a seguinte bibliografia: Rodrigues e Bolfarine (1984), Cassel, Sarndal e Wretman (1977), Rodrigues, Bolfarine e Rogatko (1985), Sandoval (1987) e Elian (1984), os dois últimos tratando somente de previsão linear.

3.1.2. Amostragem em dois estágios

Para trabalhar com amostragem em dois estágios é necessário utilizar uma notação distinta da acima mencionada. Consideremos N vetores aleatórios $Y_1, \dots, Y_N$ de dimensões $M_1, \dots, M_N$ respectivamente. Y_{ij} é, portanto, a j -ésima variável aleatória do vetor Y_i e y_{ij} é a sua realização. Assim, a população é constituída de N grupos (comumente chamados de clusters ou conglomerados), cada qual com M_i elementos, $i=1, \dots, N$. No primeiro estágio, uma amostra de n dos N grupos é selecionada. No segundo, m_i dos M_i elementos do i -ésimo grupo (caso este tenha sido selecionado no primeiro estágio) são selecionados e constituem a amostra final.

Scott e Smith (1969) trabalham com amostragem em dois estágios onde $Y_{i1}, \dots, Y_{iM_i}$, $i=1, \dots, N$, dados μ_i e σ_i^2 , são independentes e têm distribuição normal com média μ_i e variância σ_i^2 . Assumem ainda distribuições a priori para os parâmetros acima. Neste capítulo, desenvolvemos uma teoria Bayesiana em amostragem em dois estágios, onde a distribuição que relaciona os elementos da população é o modelo geral descrito na Seção 1.1 e as distribuições a priori são as estabelecidas naquela mesma seção. A seguir serão feitas aplicações aos modelos binomial, Poisson e normal.

3.2. O modelo geral

Consideremos uma população finita dividida em N grupos. O i -ésimo grupo possui M_i elementos com valores

$Y_{i1}, \dots, Y_{iM_i} (Y_i)$. No primeiro estágio uma amostra de n grupos é selecionada ($n \leq N$). No segundo estágio são selecionadas amostras de tamanhos m_i ($m_i \leq M_i$) de cada um dos grupos selecionados no primeiro estágio.

Fazemos as seguintes suposições acerca do modelo para os elementos da população:

i. Os M_i elementos do i -ésimo grupo, dados α e ϕ , são observações independentes tais que a função de densidade (ou de probabilidade) de Y_{ij} é dada em (1.2), isto é,

$$\pi(Y_{ij}/\alpha_i, \phi_i) \propto \exp\{\phi_i[Y_{ij}\alpha_i - a(\alpha_i)]\},$$

$$i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, m_i,$$

$$\text{com } \phi_i > 0, \text{ conhecido;}$$

ii. $\alpha_i/\mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1, \dots, N$, independentes e $\pi(\mu) \propto \text{constante}$, σ^2 conhecida.

Na realidade as suposições acima são exatamente aquelas que foram feitas no Capítulo 1, onde trabalhamos com populações supostamente infinitas. A suposição ii nada mais é do que a estrutura a priori em dois estágios tomada anteriormente. Em primeiro lugar, suporemos σ^2 conhecida e, a seguir, assumiremos uma distribuição a priori também para σ^2 . Deve-se notar que estas suposições são equivalentes a especificar uma superpopulação da qual uma população finita foi retirada.

Para facilitar a notação, denotamos por s o conjunto dos índices i dos grupos selecionados no primeiro estágio e por s_i ($i \in s$), o conjunto dos índices j dos elementos selecionados no segundo estágio.

Nosso interesse é fazer previsões para quantidades do tipo

$$T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} Y_{ij} ,$$

ou seja, uma combinação linear dos valores dos elementos da população. Por exemplo, tomando $p_{ij} = 1$ e $p_{ij} = 1 / \sum_{i=1}^N M_i$ temos, respectivamente, o total e a média populacionais. Do ponto de vista Bayesiano, assumindo perda quadrática, estas quantidades devem ser previstas por

$$\begin{aligned} E[T/\mathbf{y}_{(s)}] &= E\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} Y_{ij} / \mathbf{y}_{(s)}\right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} E[Y_{ij} / \mathbf{y}_{(s)}] \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{y}_{(s)}$ denota a amostra observada, isto é, a previsão é feita com base na média a posteriori de T dada a amostra observada. Evidentemente, se Y_{ij} pertence à amostra, a média a posteriori de Y_{ij} é Y_{ij} . Nosso objetivo, portanto, é encontrar a média a posteriori de Y_{ij} (ou aproximações, quando não for possível encontrar o valor exato) para elementos fora da amostra.

O cálculo da média a posteriori de Y_{ij} é facilitado pelo seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 E[Y_{ij}/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2] &= E[E[Y_{ij}/\alpha, \mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2]/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2] = \\
 &= \begin{cases} Y_{ij}, & i \in S \text{ e } j \in S_i \\ E[a'(\alpha_i)/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2], & i \in S \text{ e } j \notin S_i \text{ , ou } i \notin S \end{cases} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Logo, será necessário encontrar a distribuição a posteriori de α e calcular a média de $a'(\alpha_i)$ nesta distribuição. Na realidade, este cálculo, em geral, não pode ser feito de forma exata. Uma solução é aproximar $E[a'(\alpha_i)/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2]$ por $a'(\tilde{\alpha}_i)$ onde $\tilde{\alpha}_i$ é a moda a posteriori de α_i (exatamente como foi feito nos capítulos anteriores). Outra solução é calcular a média a posteriori aproximada de $a'(\alpha_i)$ baseado no método de Laplace (Seção 1.3).

O cálculo da covariância a posteriori de Y_{ij} e $Y_{\ell q}$, necessário para calcular a variância a posteriori de T , é facilitado pelo resultado

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[Y_{ij}, Y_{\ell q}/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2] &= E[\text{Cov}[Y_{ij}, Y_{\ell q}/\alpha, \mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2]/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2] + \\
 &+ \text{Cov}[E[Y_{ij}/\alpha, \mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2], E[Y_{\ell q}/\alpha, \mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2]/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2] = \\
 &= \begin{cases} \text{Cov}[a'(\alpha_i), a'(\alpha_\ell)/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2], \\ \quad (i, j) \neq (\ell, q) \text{ e } (i, j), (\ell, q) \notin S \quad (*) \\ \\ E\left[\frac{a''(\alpha_i)}{\phi_i}/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2\right] + \text{Var}[a'(\alpha_i)/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2], \\ \quad (i, j) = (\ell, q) \text{ e } (i, j), (\ell, q) \notin S \\ \\ 0, & (i, j) \in S \quad \text{ ou } \quad (\ell, q) \in S \end{cases} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

(*) S denota o conjunto $\{(i, j): i \in S, j \in S_i\}$.

Logo, o cálculo da covariância acima é unicamente baseado na distribuição a posteriori de α . Nas seções seguintes passaremos a encontrar esta distribuição e a propor aproximações para as médias e covariâncias a posteriori.

3.2.1. Variância da distribuição a priori conhecida

Sob as suposições feitas na Seção 3.2 (com σ^2 conhecida), a função de densidade a posteriori de α e μ é dada por

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \mu / Y_{(s)}, \phi, \sigma^2) \propto \exp\left\{ \sum_{i \in s} \phi_i [y_i \alpha_i - m_i a(\alpha_i)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \mu)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $y_i = \sum_{j \in s_i} y_{ij}$, $i \in s$.

Integrando (3.4) em relação a μ temos a função de densidade a posteriori marginal de α ,

$$\begin{aligned} \pi(\alpha / Y_{(s)}, \phi, \sigma^2) \propto \exp\left\{ \sum_{i \in s} \phi_i [y_i \alpha_i - m_i a(\alpha_i)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_*)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $\alpha_* = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{N}$.

Como já foi visto na seção anterior é necessário encontrar a média a posteriori de $a'(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, N$. Como esta não pode ser calculada de forma exata, encontraremos a moda $\tilde{\alpha}^T = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_N)$ de (3.5) e utilizaremos a moda a poste

riori de $a'(\alpha_i)$, isto é, $a'(\tilde{\alpha}_i)$, em lugar de sua média a posteriori. Na Seção 3.3 será proposta uma outra aproximação baseada no método de Laplace, tal como foi descrito na Seção 1.3.

As modas de (3.5) são obtidas pela solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} a'(\tilde{\alpha}_i) = \frac{y_i}{m_i} - \frac{\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_\cdot}{m_i \phi_i \sigma^2}, & i \in S \\ \tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_\cdot, & i \notin S \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $\tilde{\alpha}_\cdot = \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\alpha}_i}{N}$.

É claro que dependendo da função $a'(\cdot)$ a solução acima só pode ser encontrada por métodos iterativos. O método de Newton Raphson em (1.9) pode ser usado, bastando tomar

$$c_i(k) = \begin{cases} \phi_i y_i - m_i \phi_i a'(\alpha_i(k)) - \frac{\alpha_i(k) - \alpha_\cdot(k)}{\sigma^2}, & i \in S \\ - \frac{\alpha_i(k) - \alpha_\cdot(k)}{\sigma^2}, & i \notin S \end{cases} \quad (3.7)$$

e a matriz $C_{(k)}^{-1} = D_{(k)}$ com elementos dados por

$$D_{ij}(k) = u_i(k) \delta_{ij} + \frac{u_i(k) u_j(k)}{N(\sigma^2 - u_\cdot(k))}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (3.8)$$

onde

$$u_i(k) = \begin{cases} \left(m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-1}, & i \in S \\ \sigma^2, & i \notin S \end{cases}$$

$$e \ u. (k) = \sum_{i=1}^N \frac{u_i(k)}{N} .$$

Assim, encontrado o vetor $\tilde{\alpha}$, um previsor Bayesiano

$$\text{aproximado de } T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} Y_{ij} \quad \text{é}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T} = & \sum_{i \in S} \sum_{j \in S_i} p_{ij} Y_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S_i} p_{ij} a'(\tilde{\alpha}_i) + \\ & + \sum_{i \notin S} \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} a'(\tilde{\alpha}_.) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

$\tilde{T}$ é, portanto, a soma de três parcelas: a primeira corresponde aos elementos da amostra, a segunda, aos elementos fora da amostra porém pertencentes aos grupos selecionados e a terceira, aos elementos dos grupos não selecionados.

É possível fazer uma aproximação normal para a função de verossimilhança (ver Seção 1.2.1). Neste caso, encontra-se a média a posteriori aproximada ($\tilde{\alpha}^*$) de α sem necessidade de um processo iterativo. Não é difícil mostrar que a distribuição a posteriori aproximada é normal multivariada e que $\tilde{\alpha}_i^*$ é dado por

$$\tilde{\alpha}_i^* = \begin{cases} \frac{\frac{\hat{\alpha}_i}{v_i} + \frac{\hat{\alpha}_.}{\sigma^2}}{\frac{1}{v_i} + \frac{1}{\sigma^2}}, & i \in S \\ \hat{\alpha}_. & i \notin S \end{cases}$$

onde $\hat{\alpha}_i = a'^{-1} \left(\frac{Y_i}{m_i} \right)$, $i \in S$, $v_i = [m_i \phi_i a''(\hat{\alpha}_i)]^{-1}$, $i \in S$, e

$$\hat{\alpha}_\bullet = \frac{\sum_{i \in S} \frac{\hat{\alpha}_i}{\sigma^2 + v_i}}{\sum_{i \in S} \frac{1}{\sigma^2 + v_i}}.$$

Logo, um previsor Bayesiano aproximado de T é dado por (3.9) com $a'(\tilde{\alpha}_i)$ e $a'(\tilde{\alpha}_\bullet)$ substituídos, respectivamente, por $a'(\tilde{\alpha}_i^*)$ e $a'(\hat{\alpha}_\bullet)$.

3.2.2. Variância da distribuição a priori desconhecida

Suponhamos agora que σ^2 seja desconhecida e que uma distribuição a priori χ^2 invertida seja adotada como nos capítulos anteriores. Neste caso, a função de densidade a posteriori de α , μ e σ^2 é

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \mu, \sigma^2 / \mathbf{y}_{(s)} \phi, v, \lambda) &\propto (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}(v+N+2)} \times \\ &\times \exp\left\{ \sum_{i \in S} \phi_i [y_i \alpha_i - m_i a(\alpha_i)] - \frac{1}{2\sigma^2} [v\lambda + \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \mu)^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Integrando (3.10) com respeito a μ e σ^2 obtém-se a seguinte função de densidade a posteriori marginal de α :

$$\begin{aligned} \pi(\alpha / \mathbf{y}_{(s)} \phi, v, \lambda) &\propto [v\lambda + \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_\bullet)^2]^{-\frac{1}{2}(v+N-1)} \times \\ &\times \exp\left\{ \sum_{i \in S} \phi_i [y_i \alpha_i - m_i a(\alpha_i)] \right\} \end{aligned} \quad (*)$$

(*) Note-se que não é possível tomar $v = 0$ pois, neste caso, esta função de densidade tenderia a ∞ quando $\alpha_1 = \dots = \alpha_N$.

A moda a posteriori é obtida pela solução do sistema de equações em (3.6) com σ^2 substituída por

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{v\lambda + \sum_{i=1}^N (\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_\cdot)^2}{v+N-1}$$

e o previsor $\tilde{T}$ de T tem a mesma forma de (3.9).

Para encontrar a solução do sistema de equações basta utilizar o método de Newton Raphson em (1.9) com

$$c_{i(k)} = \begin{cases} \phi_i y_i - m_i \phi_i a'(\alpha_i(k)) - \frac{\alpha_i(k)^{-\alpha_\cdot(k)}}{\sigma^2(k)}, & i \in s \\ -\frac{\alpha_i(k) - \alpha_\cdot(k)}{\sigma^2(k)}, & i \notin s \end{cases} \quad (3.11)$$

e

$$c_{ij(k)} = \begin{cases} \left(m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma^2(k)} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{N\sigma^2(k)} - \\ - \frac{2(\alpha_i(k)^{-\alpha_\cdot(k)})(\alpha_j(k)^{-\alpha_\cdot(k)})}{\sigma^4(k)(v+N-1)}, & i \in s \\ \frac{1}{\sigma^2(k)} \delta_{ij} - \frac{1}{N\sigma^2(k)} - \\ - \frac{2(\alpha_i(k)^{-\alpha_\cdot(k)})(\alpha_j(k)^{-\alpha_\cdot(k)})}{\sigma^4(k)(v+N-1)}, & i \notin s \end{cases} \quad (3.12)$$

É possível fazer uma aproximação normal para a função de verossimilhança, porém esta não é de grande utilidade pois, ao contrário do caso em que σ^2 é conhecida, não conduz a solução explícita para o estimador modal de α .

Na seção seguinte encontraremos a média a posteriori aproximada de $a'(\alpha_1), \dots, a'(\alpha_N)$ baseados no método de Laplace para integrais. Assim, por (3.2), será possível encontrar aproximações para a média a posteriori de $y_1, \dots, y_N$ e, consequentemente, para a média a posteriori de T .

3.3. Cálculo dos momentos a posteriori aproximados pelo método de Laplace

O método de Laplace para integrais descrito na Seção 1.3 é facilmente aplicado ao cálculo dos momentos aproximados de $a'(\alpha_1), \dots, a'(\alpha_N)$. Por esta razão omitiremos detalhes sobre a obtenção dos resultados.

3.3.1. Variância da distribuição a priori conhecida

Quando a variância da distribuição a priori é conhecida, a média a posteriori aproximada de $a'(\alpha_\ell)$, obtida pelo método de Laplace, é

$$\begin{aligned} \hat{E}[a'(\alpha_\ell)/\mathbf{y}_{(s)}, \phi, \sigma^2] &= \left(\frac{\det \mathbf{D}^*}{\det \mathbf{D}} \right)^{\frac{1}{2}} a'(\alpha_\ell^*) \times \\ &\times \exp \left\{ \sum_{i=1}^N - \frac{1}{2\sigma^2} [(\alpha_i^* - \alpha_i)^2 - (\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_i)^2] + \right. \\ &+ \left. \sum_{i \in s} [\phi_i y_i (\alpha_i^* - \tilde{\alpha}_i) - m_i \phi_i (a(\alpha_i^*) - a(\tilde{\alpha}_i))] \right\}, \ell = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}_i$, $i=1, \dots, N$, é obtido pelo método de Newton Raphson em (1.9) com $c_{i(k)}$ e $\mathbf{C}_{(k)}^{-1} = \mathbf{D}_{(k)}$ dados em (3.7) e (3.8) respectivamente; α_i^* , $i=1, \dots, N$, também é obtido pelo mesmo método com

$$c_{i(k)} = \begin{cases} \phi_i Y_i - m_i \phi_i a'(\alpha_i(k)) - \\ - \frac{\alpha_i(k) - \alpha_i^*(k)}{\sigma^2} + \frac{\delta_{i\ell} a''(\alpha_i(k))}{a'(\alpha_i(k))}, & i \in S \\ - \frac{\alpha_i(k) - \alpha_i^*(k)}{\sigma^2} + \frac{\delta_{i\ell} a''(\alpha_i(k))}{a'(\alpha_i(k))}, & i \notin S. \end{cases}$$

e com os elementos de $\mathbf{C}_{(k)}^{-1} = \mathbf{D}_{(k)}^*$ dados por

$$D_{ij}^*(k) = w_i(k) \delta_{ij} + \frac{w_i(k) w_j(k)}{N(\sigma^2 - w_{\cdot}(k))}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

$$w_i(k) = \begin{cases} - \left[\delta_{i\ell} a_i(k) + m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma^2} \right]^{-1}, & i \in S \\ \left[\delta_{i\ell} a_i(k) + \frac{1}{\sigma^2} \right]^{-1}, & i \notin S, \end{cases}$$

com $a_i(k)$ dado por (1.27) e onde $\mathbf{D}$ e $\mathbf{D}^*$ são, respectivamente, iguais às matrizes $\mathbf{D}_{(k)}$ e $\mathbf{D}_{(k)}^*$ obtidas na última iteração das aplicações do método de Newton Raphson.

Agora, por (3.1) e (3.2), vemos que é razoável aproximar a média a posteriori de T por

$$\hat{T} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S_i} p_{ij} Y_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \notin S_i} p_{ij} \hat{E}[a'(\alpha_i) / Y_{(s)}, \phi, \sigma^2].$$

Logo, podemos tomar $\hat{T}$ como um previsor Bayesiano aproximado de T .

É possível encontrar também a variância a posteriori aproximada de T da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{\text{Var}}[T/Y(s), \phi, \sigma^2] &= \hat{\text{Var}}\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} Y_{ij} / Y(s), \phi, \sigma^2\right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \sum_{\ell=1}^N \sum_{q=1}^{M_\ell} p_{ij} p_{\ell q} \hat{\text{Cov}}[Y_{ij}, Y_{\ell q} / Y(s), \phi, \sigma^2].\end{aligned}$$

De (3.3) segue que para calcular as covariâncias acima basta encontrar a média e a covariância a posteriori aproximadas, respectivamente, de $a''(\alpha_\ell)$, $\ell=1, \dots, N$ e do par $a'(\alpha_\ell)$ e $a'(\alpha_q)$, $\ell, q = 1, \dots, N$.

3.3.2. Variância da distribuição a priori desconhecida

Quando σ^2 é desconhecida, a média a posteriori aproximada de $a'(\alpha_\ell)$, $\ell=1, \dots, N$, é dada por

$$\begin{aligned}\hat{E}[a'(\alpha_\ell) / Y(s), \phi, v, \lambda] &= \left(\frac{\det \mathbf{D}^*}{\det \mathbf{D}} \right)^{\frac{1}{2}} a'(\alpha_\ell^*) \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(v+N-1) \left[\log[v\lambda + \sum_{i=1}^N (\alpha_i^* - \alpha_i^*)^2] - \log[v\lambda + \sum_{i=1}^N (\tilde{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_i)^2] \right] + \right. \\ &\left. + \sum_{i \in S} [\phi_i Y_i (\alpha_i^* - \tilde{\alpha}_i) - m_i \phi_i (a(\alpha_i^*) - a(\tilde{\alpha}_i))] \right\}, \ell=1, \dots, N,\end{aligned}$$

onde $\tilde{\alpha}_i$, $i=1, \dots, N$, é obtido pelo método de Newton Raphson em (1.9) com $c_i(k)$ e $c_{ij}(k)$ dados por (3.11) e (3.12); α_i^* , $i=1, \dots, N$,

também é obtido pelo mesmo método com

$$c_i(k) = \begin{cases} \phi_i y_i - m_i a'(\alpha_i(k)) - \\ - \frac{\alpha_i(k) - \alpha \cdot(k)}{\sigma^2(k)} + \delta_{i\ell} \frac{a''(\alpha_i(k))}{a'(\alpha_i(k))}, & i \in s \\ - \frac{\alpha_i(k) - \alpha \cdot(k)}{\sigma^2(k)} + \delta_{i\ell} \frac{a''(\alpha_i(k))}{a'(\alpha_i(k))}, & i \notin s \end{cases}$$

e os elementos de $C(k)$ dados por

$$C_{ij}(k) = \begin{cases} \left(\delta_{i\ell} a_i(k) + m_i \phi_i a''(\alpha_i(k)) + \frac{1}{\sigma^2(k)} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{N\sigma^2(k)} - \\ - \frac{2(\alpha_i(k) - \alpha \cdot(k))(\alpha_j(k) - \alpha \cdot(k))}{\sigma^4(k)(v+N-1)}, & i, j \in s \\ \left(\delta_{i\ell} a_i(k) + \frac{1}{\sigma^2(k)} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{N\sigma^2(k)} - \\ - \frac{2(\alpha_i(k) - \alpha \cdot(k))(\alpha_j(k) - \alpha \cdot(k))}{\sigma^4(k)(v+N-1)}, & i \notin s \text{ ou } j \notin s \end{cases}$$

com $\sigma^2(k) = \frac{v\lambda + \sum_{i=1}^N (\alpha_i(k) - \alpha \cdot(k))^2}{v+N-1}$, e onde $a_i(k)$ é ob-

tido por (1.27) e D e D^* são, respectivamente, iguais às matrizes inversas calculadas na última iteração das aplicações do método de Newton Raphson para a obtenção de $\tilde{\alpha}$ e α^* .

Logo, da mesma forma que na seção anterior, vemos que é razoável tomar

$$\hat{T} = \sum_{i \in s} \sum_{j \in s_i} p_{ij} y_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \notin s_i} p_{ij} \hat{E}[a'(\alpha_i)/Y(s), \phi, v, \lambda]$$

como um previsor Bayesiano aproximado de T e que é possível encontrar pelo método de Laplace uma aproximação para a sua variância a posteriori.

3.4. Alguns modelos especiais

3.4.1. O modelo binomial

O processo de amostragem em dois estágios descrito na Seção 3.2 com $\alpha_i = \log[\theta_i/(1-\theta_i)]$, $0 < \theta_i < 1$, $\phi_i=1$ e $a(\alpha_i) = \log(1+e^{\alpha_i})$, $i=1, \dots, N$, é tal que

- i. os M_i elementos do i -ésimo grupo, dados M_i e θ_i , são observações independentes de tal forma que

$$Y_i/M_i, \theta_i \sim B(M_i, \theta_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\text{onde } Y_i = \sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij};$$

- ii. $\log \frac{\theta_i}{1-\theta_i} / \mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1, \dots, N$, independentes,

$$\pi(\mu) \propto \text{constante}$$

e, para σ^2 desconhecida, $\frac{v\lambda}{\sigma^2} / v, \lambda \sim \chi_v^2$, $v > 0$, $\lambda > 0$ e, dados v e λ , μ e σ^2 são independentes.

Todos os resultados obtidos nas seções anteriores, tanto para σ^2 conhecida como desconhecida, podem ser facilmente obtidos na situação acima, isto é, no modelo binomial.

Estes resultados serão omitidos aqui pois para obtê-los basta lembrar que $a(\alpha_i) = \log(1+e^{\alpha_i})$ e $\phi_i = 1$, $i=1, \dots, N$, e utilizar os resultados das seções anteriores.

3.4.2. O modelo de Poisson

Consideremos o processo de amostragem em dois estágios descrito na Seção 3.2, porém com $\alpha_i = \log \theta_i$, $\theta_i > 0$, $\phi_i = 1$ e $a(\alpha_i) = e^{\alpha_i}$, $i=1, \dots, N$, de forma que

- i. os M_i elementos do i -ésimo grupo, dado θ_i , são observações independentes e que

$$Y_{ij}/\theta_i \sim P(\theta_i), \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M_i;$$

- ii. $\log \theta_i / \mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1, \dots, N$, independentes,

$$\pi(\mu) \propto \text{constante}$$

e, para σ^2 desconhecida, $\frac{v\lambda}{\sigma^2} / v, \lambda \sim \chi_v^2$, $v > 0$, $\lambda > 0$ e, dados v e λ , μ e σ^2 são independentes.

Nesta situação, para obter os resultados das seções anteriores basta lembrar que $a(\alpha_i) = e^{\alpha_i}$ e $\phi_i = 1$, $i=1, \dots, N$.

3.4.3. O modelo normal

O processo de amostragem em dois estágios descrito na Seção 3.2 com $\alpha_i = \theta_i$, $\phi_i = 1/\sigma_i^2$ e $a(\alpha_i) = \alpha_i^2/2$ é tal que

- i. os M_i elementos do i -ésimo grupo, dados θ_i e σ_i^2 , são observações independentes de tal forma que

$$Y_{ij}/\theta_i, \sigma_i^2 \sim N(\theta_i, \sigma_i^2) \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, M_i ;$$

- ii. $\theta_i/\mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2) \quad i=1, \dots, N$, independentes,
 $\pi(\mu) \propto \text{constante}$

e σ^2 e σ_i^2 , $i=1, \dots, N$, são, a princípio, consideradas conhecidas. Este modelo é discutido em Scott e Smith (1969).

3.4.3.1. Variâncias conhecidas

Supondo que σ^2 e σ_i^2 , $i=1, \dots, N$, são conhecidas, a distribuição a posteriori de θ (ver (3.5)) é normal multivariada. As médias a posteriori são facilmente obtidas através de (3.6) e são dadas por

$$\tilde{\theta}_i = d_i \bar{y}_i + (1-d_i) \tilde{\theta}_. \quad (3.13)$$

onde

$$d_i = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_i^2/m_i} , & i \in s \\ 0 , & i \notin s \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_. = \frac{\sum_{i \in s} d_i \bar{y}_i}{\sum_{i \in s} d_i}$$

e $\bar{y}_i = \sum_{j \in s_i} \frac{Y_{ij}}{m_i}$. A matriz de covariância a posteriori D é

obtida calculando-se a inversa da matriz de informação a posteriori C . A matriz C tem elementos dados por

$$C_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{u_i} - \frac{1}{N\sigma^2}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

onde

$$u_i = \begin{cases} \left(\frac{m_i}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{-1}, & i \in S \\ \sigma^2, & i \notin S \end{cases}$$

$$e \ u_{\cdot} = \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{N}.$$

Invertendo a matriz acima temos que D , a matriz de covariância a posteriori, tem elementos

$$D_{ij} = u_i \delta_{ij} + \frac{u_i u_j}{N(\sigma^2 - u_{\cdot})}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Seja

$$\xi^2 = \left(\sum_{i \in S} \left(\sigma^2 + \frac{\sigma_i^2}{m_i} \right)^{-1} \right)^{-1}.$$

Então, D_{ij} pode ser escrita como

$$D_{ij} = \begin{cases} (1-d_i)^2 \xi^2 + (1-d_i) \sigma^2, & i=j \\ (1-d_i)(1-d_j) \xi^2, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.14)$$

De posse dos resultados a posteriori acima, podemos propor um predictor $\tilde{T}$ de $T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} Y_{ij}$. Recordando que o predictor Bayesiano de T é sua média a posteriori (ver (3.1) e (3.2)) dada por

$$\begin{aligned}
E[T/\mathbf{Y}(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2] &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} E[Y_{ij}/\mathbf{Y}(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2] = \\
&= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S_i} p_{ij} Y_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S_i} p_{ij} E[a'(\alpha_i)/\mathbf{Y}(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2] + \\
&+ \sum_{i \notin S} \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} E[a'(\alpha_i)/\mathbf{Y}(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2]
\end{aligned}$$

e que $a'(\alpha_i) = \theta_i$, temos que

$$\tilde{T} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S_i} p_{ij} Y_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S_i} p_{ij} \tilde{\theta}_i + \sum_{i \notin S} \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} \tilde{\theta}_i \quad (3.15)$$

A variância a posteriori de T é obtida utilizando-se (3.3) que, no modelo normal, se reduz a

$$\text{Cov}[Y_{ij}, Y_{\ell q} / \mathbf{Y}(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2] = \begin{cases} \text{Cov}[\theta_i, \theta_\ell / \mathbf{Y}(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2], & (i,j) \neq (\ell,q) \text{ e } (i,j), (\ell,q) \notin S \\ \sigma_i^2 + \text{Var}[\theta_i / \mathbf{Y}(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2], & (i,j) = (\ell,q) \text{ e } (i,j), (\ell,q) \notin S \\ 0, & (i,j) \in S \text{ ou } (\ell,q) \in S \end{cases}$$

ou ainda

$$\text{Cov}[Y_{ij}, Y_{\ell q} / \mathbf{Y}(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2] = \begin{cases} D_{i\ell}, & (i,j) \neq (\ell,q) \text{ e } (i,j), (\ell,q) \notin S \\ \sigma_i^2 + D_{ii}, & (i,j) = (\ell,q) \text{ e } (i,j), (\ell,q) \notin S \\ 0, & (i,j) \in S \text{ ou } (\ell,q) \in S \end{cases}$$

com $D_{i\ell}$, $i, \ell = 1, \dots, N$, dado em (3.14).

Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Var}[T/Y(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2] &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} p_{ij} Y_{ij} / Y(s), \sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j \in s_i} p_{ij}^2 (\sigma_i^2 + D_{ii}) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j \in s_i} \sum_{\ell=1}^{N^*} \sum_{q \in s_\ell}^* p_{ij} p_{\ell q} D_{i\ell}
\end{aligned}$$

onde a somatória dupla $\sum_{\ell=1}^{N^*} \sum_{q \in s_\ell}^*$ exclui as parcelas em que $(i, j) = (\ell, q)$.

Scott e Smith (1969) mostram que $\tilde{T}$ em (3.15) é o previsor que minimiza o erro quadrático médio na classe de todos os previsores lineares de T . Uma extensão deste resultado para o caso de mais de dois estágios é discutida em Malec e Sedransk (1985).

3.4.3.2. Variâncias desconhecidas

Na seção anterior supusemos $\sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2$ conhecidas. Eliminemos agora esta suposição e tomemos distribuições a priori χ^2 invertidas para estes parâmetros como proposto na Seção 2.3.2.

Nesta situação, a função de densidade a posteriori de θ é

$$\begin{aligned}
\pi(\theta/Y(s), \nu, \lambda) &\propto [\nu\lambda + \sum_{i=1}^N (\theta_i - \theta_*)^2]^{\frac{1}{2}(\nu+N-1)} \times \\
&\times \prod_{i \in s} [v_i \lambda_i + S_i^2 + m_i (\bar{Y}_i - \theta_i)^2]^{\frac{1}{2}(v_i + m_i)} \quad (*)
\end{aligned}$$

(*) - Pode-se notar que é possível tomar $v_i = 0$, $i=1, \dots, N$, porém ν deve ser positivo uma vez que se ν for igual a zero esta função de densidade tenderia a ∞ quando $\theta_1 = \dots = \theta_N$.

onde

$$s_i^2 = \sum_{j \in i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \quad i \in S.$$

A moda a posteriori de θ é obtida pela solução do sistema de equações

$$\tilde{\theta}_i = \tilde{d}_i \bar{y}_i + (1 - \tilde{d}_i) \tilde{\theta}_., \quad (3.15)$$

onde

$$\tilde{d}_i = \begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}_i^2 / m_i}, & i \in S \\ 0, & i \notin S \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \frac{v\lambda + \sum_{i=1}^N (\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta}_.)^2}{v+N-1}, \quad \sigma_i^2 = \frac{v_i \lambda_i - S_i^2 + m_i (\tilde{\theta}_i - \bar{y}_i)^2}{v_i + m_i}, \quad i \in S \text{ e}$$

$$\tilde{\theta}_. = \frac{\sum_{i \in S} \tilde{d}_i \bar{y}_i}{\sum_{i \in S} \tilde{d}_i}.$$

Note-se que estes estimadores modais são semelhantes àqueles em que se supunha que as variâncias eram conhecidas, porém com σ^2 e σ_i^2 , $i \in S$, substituídas por $\tilde{\sigma}^2$ e $\tilde{\sigma}_i^2$, $i \in S$, respectivamente.

Propomos então que o previsor Bayesiano de T , isto é, sua média a posteriori, seja aproximado por

$$\tilde{T} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in s_i} p_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{j \in s_i} \tilde{\theta}_i + \sum_{i \notin S} \sum_{j=1}^{M_i} \tilde{\theta}_.$$

onde $\tilde{\theta}_i$ e $\tilde{\theta}_\cdot$ são fornecidos em (3.16).

Para encontrar a solução de (3.16) pode-se utilizar o método de Newton Raphson em (1.9) com

$$c_{i\cdot}(k) = \begin{cases} \frac{y_i}{\sigma_i^2(k)} - \frac{m_i \theta_i(k)}{\sigma_i^2(k)} - \frac{\theta_i(k) - \theta_\cdot(k)}{\sigma^2(k)}, & i \in S \\ - \frac{\theta_i(k) - \theta_\cdot(k)}{\sigma^2(k)}, & i \notin S \end{cases}$$

e

$$c_{ij}(k) = \begin{cases} \left(\frac{m_i}{\sigma_i^2(k)} - \frac{2m_i^2 (\bar{y}_i - \theta_i(k))^2}{\sigma_i^4(k) (v_i + m_i)} + \frac{1}{\sigma^2(k)} \right) \delta_{ij} - \frac{1}{N\sigma^2(k)} - \\ - \frac{2(\theta_i(k) - \theta_\cdot(k))(\theta_j(k) - \theta_\cdot(k))}{\sigma^4(k) (v+N-1)}, & i, j \in S \\ \frac{1}{\sigma^2(k)} \delta_{ij} - \frac{1}{N\sigma^2(k)} - \\ - \frac{2(\theta_i(k) - \theta_\cdot(k))(\theta_j(k) - \theta_\cdot(k))}{\sigma^4(k) (v+N-1)}, & i \notin S \text{ ou } j \notin S. \end{cases}$$

Seria interessante encontrar aproximações para as médias, covariâncias e variâncias a posteriori baseadas no método de Laplace para integrais. Porém, como já havia sido ressaltado anteriormente, este método não se aplica aqui pois θ_i não é exclusivamente positivo.

Scott e Smith (1969) tratam a situação em que as variâncias são desconhecidas da seguinte forma: i) supõem que

$\sigma_1^2 = \dots = \sigma_N^2 = \delta^2$ e que $m_i = m$, $i \in s$; ii) atribuem a seguinte distribuição a priori para as variâncias

$$p(d, \sigma^2, \delta^2) \propto \frac{d}{\sigma^2 \delta^2}$$

onde

$$d = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \delta^2/m}.$$

Esta distribuição tem uma característica indesejável: depende do tamanho da amostra a ser selecionada. Os autores mostram que a média a posteriori de Y_{ij} para elementos fora da amostra é

$$E[Y_{ij}/\mathbf{Y}_{(s)}] = \begin{cases} \hat{d}\bar{y}_i + (1-\hat{d})\bar{y} & , \quad i \in s \\ \bar{y} & , \quad i \notin s \end{cases}$$

onde

$$1 - \hat{d} = \frac{n(m-1)}{r(nm-m-2)} \frac{I_x\left(\frac{n+1}{2}, \frac{nm-m-2}{2}\right)}{I_x\left(\frac{n-1}{2}, \frac{nm-m}{2}\right)},$$

$$r = \frac{n(m-1)x}{n-1},$$

$$x = \frac{m \sum_{i \in s} (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i \in s} \sum_{j \in s_i} (y_{ij} - \bar{y})^2},$$

$$\bar{y}_i = \sum_{j \in s_i} \frac{y_{ij}}{m_i},$$

$$\bar{y} = \sum_{i \in s} \frac{\bar{y}_i}{n}$$

e $I_x(p,q)$ denota a função beta incompleta. Os autores sugerem que seja utilizada a seguinte aproximação:

$$\hat{d} \approx \begin{cases} \frac{r-1}{r} , & r < 1 \\ 0 , & r \geq 1 \end{cases}$$

uma vez que o cálculo exato de $\hat{d}$ é bastante trabalhoso. Este resultado também é citado em Cassel, Sarndal e Wretman (1977) .

oOo

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES EM AMOSTRAS SIMULADAS

4.1. Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar ilustrações numéricas de resultados discutidos nos capítulos anteriores e fazer algumas comparações entre os diversos métodos propostos de estimação e previsão. Para tal, trabalharemos com populações e amostras simuladas. Como supusemos que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são independentes e têm distribuição a priori normal com média μ e variância σ^2 , fixaremos valores para μ e σ^2 e geraremos, através de uma rotina de computador, n observações, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, independentes, segundo esta distribuição especificada. A seguir, como temos $\theta_i = a'(\alpha_i)$, calcularemos os θ_i 's e geraremos n amostras aleatórias de tamanhos $m_1, \dots, m_n$ segundo uma distribuição de Bernoulli com média θ_i . Em seguida, repetiremos o procedimento para as distribuições de Poisson e normal, ambas com média θ_i . Nesta última também estabeleceremos valores para as variâncias $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Em cada uma das três situações citadas, assumiremos a princípio que a variância σ^2 é conhecida (na distribuição normal assumiremos ainda que $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ são também conhecidas) e encontraremos as estimativas pontuais para $\theta_1, \dots, \theta_n$ segundo os diversos métodos aproximados propostos nos capítulos anteriores. Numa segunda etapa, eliminaremos a suposição de conhecimento da(s) variância(s) e novamente estimaremos os parâmetros $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Um procedimento bastante parecido com o descrito acima será utilizado para ilustrar a metodologia de previsão em amostragem em dois estágios e será descrito em detalhes na Seção 4.5.

4.2. Estimação no modelo binomial

Nesta seção ilustramos diversos resultados sobre estimação no modelo binomial apresentados na Seção 2.1. Especificamente, calculamos estimativas pontuais para os parâmetros de interesse $\theta_1, \dots, \theta_n$ baseadas nos seguintes estimadores:

- 1) Estimador usual, isto é, a média amostral;
- 2) Moda da distribuição a posteriori (dada em (2.1)), supondo σ^2 conhecida;
- 3) Média da distribuição a posteriori aproximada obtida através de uma aproximação para a função de verossimilhança (dada em (2.4)), supondo σ^2 conhecida;
- 4) Média aproximada da distribuição a posteriori calculada pelo método de Laplace (Seção 2.1.3), supondo σ^2 conhecida;
- 5) Moda da distribuição a posteriori (Seção 2.1.2), supondo σ^2 desconhecida e
- 6) Média aproximada da distribuição a posteriori calculada pelo método de Laplace (Seção 2.1.3) supondo σ^2 desconhecida e

conhecida (*).

Baseados na suposição a priori de que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são independentes e normalmente distribuídos com média μ e variância σ^2 , fixamos $n=7$, $\mu=0$ e $\sigma^2=1$ e geramos 7 observações independentes segundo a distribuição $N(0,1)$ (**). Desta forma, de posse do vetor $(\alpha_1, \dots, \alpha_7)$ calculamos $\theta_i = e^{\alpha_i} / (1 + e^{\alpha_i})$, $i=1, \dots, 7$. A seguir, geramos 7 amostras aleatórias (de tamanhos m_i pré-fixados) segundo uma distribuição de Bernoulli com média θ_i , $i=1, \dots, 7$, ou, o que é equivalente, geramos 7 observações segundo uma distribuição $B(m_i, \theta_i)$, isto é, binomial com índice m_i e probabilidade de sucesso θ_i (***). Assim, geradas as amostras, passamos à fase de estimação, ou seja, calculamos as estimativas dos parâmetros $\theta_1, \dots, \theta_n$ segundo os estimadores de (1) a (6) citados acima. Para os estimadores (2) e (5) foi utilizado o método iterativo de Newton Raphson (ver (2.2) e (2.3) para σ^2 conhecida e (2.5) e (2.6) para σ^2 desconhecida). Uma listagem do programa, que realiza este método bem como sua saída encontram-se no Apêndice 2. Para os estimadores (4) e (6) baseados no método de Laplace foi feito também um programa de computador que se encontra no Apêndice 3 (e o método de Newton Raphson foi também utilizado) (****).

(*) - Os mesmos estimadores serão utilizados na seção seguinte (Estimação no modelo de Poisson).

(**) - Foi utilizada a subrotina GGNML do IMSL (IMSL Library, 1979).

(***) - Foi utilizada a subrotina GGBN do IMSL.

(****) - Foram utilizadas as subrotinas LINV2F e LINV3F do IMSL para fazer inversões de matrizes e cálculos de determinantes.

Ainda cabe notar um detalhe importante. Quando consideramos σ^2 desconhecida, tomamos uma distribuição a priori χ^2 -invertida. Como já mencionado, esta depende dos parâmetros ν e λ (ver as observações feitas a este respeito nas páginas 15 e 16) e se não há nenhum conhecimento a priori sobre σ^2 , o ideal seria tomar $\nu=0$, porém isto conduziria a uma distribuição a posteriori imprópria. Então para evitar este problema, tomamos $\nu=0,1$ e escolhemos arbitrariamente o valor 2 para o parâmetro λ . Como ν é bastante pequeno, este valor de λ praticamente não influencia os resultados.

As estimativas pontuais baseadas nos estimadores de (1) a (6) encontram-se na Tabela 4.1.

O programa do Apêndice 2 ainda fornece outras informações relevantes além destas estimativas, isto é, fornece a matriz de covariância a posteriori (se supusermos uma aproximação normal para a distribuição a posteriori). Com base nesta matriz é possível construir intervalos de credibilidade (como descrito no Capítulo 1).

Passamos agora a analisar dois aspectos importantes dos resultados obtidos:

- i) a convergência dos processos iterativos e
- ii) a plausibilidade das estimativas e a comparação entre elas.

Tabela 4.1 - Estimativas de θ obtidas em amostras simuladas
Modelo binomial

θ_i	m_i	(1)	σ^2 conhecida			σ^2 desconhecida	
			(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0,469	45	0,467	0,471	0,469	0,471	0,473	0,473
0,268	34	0,206	0,242	0,244	0,243	0,256	0,250
0,799	38	0,868	0,829	0,825	0,828	0,814	0,822
0,530	44	0,636	0,627	0,626	0,626	0,622	0,625
0,440	39	0,359	0,374	0,374	0,375	0,381	0,378
0,598	37	0,595	0,587	0,587	0,587	0,584	0,586
0,464	36	0,472	0,477	0,477	0,477	0,479	0,479

- (1) - Estimador usual (média amostral).
 (2) - Moda da distribuição a posteriori (dada em (2.1)).
 (3) - Média da distribuição a posteriori obtida através de uma aproximação para a função de verossimilhança (ver (2.4)).
 (4) - Média aproximada da distribuição a posteriori calculada pelo método de Laplace (Seção 2.1.3).
 (5) - Moda da distribuição a posteriori (Seção 2.1.2).
 (6) - Média aproximada da distribuição a posteriori calculada pelo método de Laplace (Seção 2.1.3).

A convergência do processo iterativo de Newton Raphson foi considerada alcançada quando

$$\left| \frac{\alpha_i(k+1) - \alpha_i(k)}{\alpha_i(k)} \right| \leq 0,001, \quad i=1, \dots, n,$$

onde $\alpha_i(k)$ é o valor de α_i obtido na k -ésima iteração do processo.

Depois de aplicarmos o processo em muitas amostras simuladas, observamos que a convergência foi alcançada na totalidade dos casos quando o processo foi aplicado à obtenção das estimativas (2) e (4), isto é, a estimativa modal e a baseada no método de Laplace, ambas supondo σ^2 conhecida. Em alguns casos, na obtenção da estimativa modal (5) supondo σ^2 desconhecida, a convergência não foi alcançada. No entanto, notamos que se o número de grupos não for muito grande (5 ou 6) e o tamanho das amostras for razoavelmente grande (superior a 50) a convergência é alcançada em praticamente todos os casos.

Cabe ainda fazer um comentário a respeito do número de iterações necessárias à convergência do processo. Levando em conta que este número pode depender dos valores iniciais $\alpha_i(0)$, $i=1, \dots, n$, procuramos escolher estes valores de forma conveniente. Nos processos iterativos de obtenção das estimativas modais, tomamos $\alpha_i(0) = \log(\theta_i(0)/(1-\theta_i(0)))$ onde $\theta_i(0)$ é a média da i -ésima amostra, exceto nos casos em que $\theta_i(0) = 0$ ou $\theta_i(0) = 1$. Quando isto ocorreu, tomamos $\theta_i(0) = 0,001$ ou $\theta_i(0) = 0,999$. No processo iterativo de obtenção das estimativas baseadas no método de Laplace, tomamos como valores iniciais $\alpha_i(0)$, $i=1, \dots, n$, os valores obtidos na última iteração do processo de obtenção das estimativas modais. Assim procedendo, obtivemos a convergência rapidamente (em geral, em 3 ou 4 iterações).

Passemos agora a analisar as estimativas de $\theta_1, \dots, \theta_n$ obtidas pelos diversos métodos. Lembremos que alguns deles produzem estimativas para $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e não para

$\theta_1, \dots, \theta_n$ diretamente. Neste caso, calculamos $\tilde{\theta}_i = e^{\tilde{\alpha}_i} / (1 + e^{\tilde{\alpha}_i})$, $i=1, \dots, n$, onde denotamos, genericamente, $\tilde{\alpha}_i$ como estimativa de α_i e tomamos $\tilde{\theta}_i$ como estimativa de θ_i . Voltemos então à Tabela 4.1 para analisar os resultados obtidos. Comparando simultaneamente as colunas (2) a (6), correspondentes às estimativas Bayesianas, com a coluna (1), correspondente às estimativas usuais, observamos que as Bayesianas são razoavelmente próximas das usuais. Além disso, é possível observar a "contração" nas estimativas Bayesianas (como mencionado na pg. 14). Observe-se, por exemplo, as diferenças entre a maior e a menor estimativas das colunas (1) e (2). Na coluna (1) obtém-se $0,868 - 0,206 = 0,662$ e na coluna (2), $0,829 - 0,242 = 0,587$ (menor do que 0,662). Daí vemos que, de fato, as estimativas modais (coluna (2)) foram "contraídas". Agora, comparando entre si as colunas (2), (3) e (4), correspondentes ao caso em que σ^2 é conhecida, observamos que os três métodos aproximados de estimação produzem resultados bastante próximos. Lembrando que as estimativas da coluna (3) são obtidas facilmente sem necessidade de processo iterativo, temos então um método rápido e simples de estimação Bayesiana aproximada (no caso em que σ^2 é conhecida). As colunas (5) e (6), correspondentes ao caso em que σ^2 é desconhecida, também se mostram bastante parecidas. Resta ainda comparar as colunas (2) e (5) e também (4) e (6). O interesse nestas comparações é devido à seguinte pergunta: O fato de não se conhecer a variância σ^2 exerce grande influência nas estimativas? A resposta a esta pergunta parece ser negativa, pois em muitos casos analisados esta influência mostrou-se pequena.

4.3. Estimação no modelo de Poisson

Nesta seção procuramos ilustrar alguns resultados apresentados sobre estimação no modelo de Poisson (Seção 2.2). O procedimento seguido aqui é absolutamente análogo ao da seção anterior.

Para gerar $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ fixamos $n=7$, $\mu=1$ e $\sigma^2=1$ e geramos 7 observações independentes segundo a distribuição $N(1,1)$. A partir destas observações calculamos $\theta_i = e^{\alpha_i}$, $i=1, \dots, 7$, e geramos 7 amostras (de tamanhos m_i pré-fixados) segundo uma distribuição de Poisson com média θ_i , $i=1, \dots, 7$ (*). Foram feitos programas de computador para gerar as amostras e calcular as estimativas (ver Apêndice 4 e Apêndice 5). A Tabela 4.2 mostra os resultados obtidos.

O processo iterativo de Newton Raphson, utilizado para obtenção das estimativas modais e as baseadas no método de Laplace, mostrou-se bastante eficiente no sentido de que apresentou convergência rápida (em geral, em 3 ou 4 iterações) em todos os casos em que o aplicamos.

Analizando a Tabela 4.2 e comparando simultaneamente as colunas (2) a (6), correspondentes às estimativas Bayesianas, com a coluna (1), correspondente às estimativas usuais, observamos que as Bayesianas são razoavelmente próximas das usuais, porém mais "contraídas". Comparando as colunas (2), (3) e (4), observamos que os três métodos aproximados de estimação supondo σ^2 conhecida) produzem resultados bastante próximos,

---

(*) - Foi utilizada a subrotina GGPOS do IMSL.

Tabela 4.2 - Estimativas de Θ obtidas em amostras simuladas
Modelo de Poisson

Θ_i	m_i	(1)	σ^2 conhecida			σ^2 desconhecida	
			(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
2,818	40	3,025	3,021	3,022	3,023	3,022	3,023
2,409	32	2,219	2,224	2,224	2,225	2,222	2,223
4,131	36	4,417	4,402	4,402	4,404	4,406	4,407
9,065	29	8,552	8,511	8,511	8,515	8,521	8,524
1,620	39	1,974	1,982	1,982	1,982	1,980	1,980
5,936	42	6,167	6,146	6,147	6,149	6,151	6,154
0,246	30	0,200	0,275	0,289	0,277	0,258	0,257

- (1) - Estimador usual (média amostral).
 (2) - Moda da distribuição a posteriori (dada em (2.7)).
 (3) - Média da distribuição a posteriori obtida através de uma aproximação normal para a função de verossimilhança (dada em (2.8)).
 (4) - Média aproximada da distribuição a posteriori calculada pelo método de Laplace (Seção 2.2.3).
 (5) - Moda da distribuição a posteriori (Seção 2.2.2).
 (6) - Média aproximada da distribuição a posteriori calculada pelo método de Laplace (Seção 2.2.3).

sendo que as estimativas da coluna (3) são facilmente obtidas sem necessidade de processos iterativos. As colunas (5) e (6), correspondentes a σ^2 desconhecida, mostram-se também bastante parecidas. Finalmente, comparando entre si as colunas (2) e (5) e também (4) e (6) vemos que o fato de não se conhecer a variância σ^2 parece, praticamente, não afetar as estimativas.

4.4. Estimação no modelo normal

Nesta seção alguns resultados sobre estimação no modelo normal (Seção 2.3) são ilustrados numericamente. Especificamente, calculamos estimativas pontuais para os parâmetros $\theta_1, \dots, \theta_n$ baseados nos seguintes estimadores:

- (1) Estimador usual, isto é, a média amostral;
- (2) Média da distribuição a posteriori apresentada em (2.9) supondo que as variâncias são conhecidas e
- (3) Moda da distribuição a posteriori apresentada em (2.10) supondo que as variâncias são desconhecidas.

As amostras foram geradas da seguinte forma: geramos $\alpha_1, \dots, \alpha_7$ (o que equivale a gerar $\theta_1, \dots, \theta_7$ já que $\theta_i = \alpha_i$) independentemente segundo uma distribuição $N(10, 4)$. A seguir geramos 7 amostras aleatórias (de tamanhos m_i pré-fixados) segundo uma distribuição $N(\theta_i, \sigma_i^2)$ (fixamos $\sigma_1^2=4$, $\sigma_2^2=5$, $\sigma_3^2=4$, $\sigma_4^2=3$, $\sigma_5^2=4$, $\sigma_6^2=6$, $\sigma_7^2=5$). Foram feitos programas de computador para gerar as amostras e calcular as estimativas (ver Apêndice 6). A Tabela 4.3 mostra os resultados obtidos.

O processo de Newton Raphson, utilizado para a obtenção das estimativas modais, mostrou-se extremamente eficiente pois apresentou convergência bastante rápida (em geral, em 2 iterações) na totalidade dos casos em que o aplicamos.

Analisando a Tabela 4.3 vemos que as estimativas Bayesianas (colunas (2) e (3)) são bem próximas das usuais

(coluna (1)) porém mais "contraídas". Agora comparando entre si as colunas (2) e (3) observamos que o fato de não se conhecer as variâncias parece praticamente não afetar os resultados.

Tabela 4.3 - Estimativas de Θ obtidas em amostras simuladas
Modelo normal

Θ_i	m_i	(1)	Variâncias conhecidas (2)	Variâncias desconhecidas (3)
10,287	25	10,679	10,663	10,671
13,243	20	13,415	13,230	13,349
11,264	22	11,563	11,507	11,532
10,685	23	11,085	11,059	11,073
9,742	30	9,956	9,966	9,961
4,908	25	4,464	4,793	4,635
10,669	21	10,693	10,669	10,677

(1) - Estimador usual (média amostral).

(2) - Média da distribuição a posteriori (dada em (2.9)).

(3) - Moda da distribuição a posteriori (dada em (2.10)).

4.5. Previsão em amostragem em dois estágios

Apresentaremos nas seções seguintes ilustrações numéricas de resultados discutidos no Capítulo 3. Trabalharemos com populações e amostras simuladas. Inicialmente, gera-

remos $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ segundo uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 . A seguir, calcularemos θ_i (lembrando que $\theta_i = a'(\alpha_i)$) e geraremos independentemente N populações (ou grupos) de tamanhos $M_1, \dots, M_N$ segundo uma distribuição de Bernoulli com média θ_i . O processo será repetido posteriormente para as distribuições de Poisson e normal. Após geradas as populações, serão selecionadas aleatoriamente n entre elas, o que corresponde ao primeiro estágio da amostragem. Em seguida, serão selecionados aleatoriamente m_i , iês, elementos em cada uma das populações sorteadas no primeiro estágio. Desta forma completa-se o segundo estágio da amostragem.

Nosso interesse será prever o total populacional

$$T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij} .$$

4.5.1. Previsão no modelo binomial

Nesta seção ilustramos numericamente diversos resultados obtidos no Capítulo 3 relativos a previsão no modelo binomial. Especificamente, calculamos previsões do total populacional baseados em previsores da forma:

$$\sum_{i \in s} \sum_{j \in s_i} Y_{ij} + \sum_{i \in s} \sum_{j \in s_i} \tilde{\theta}_i + \sum_{i \in s} \sum_{j=1}^{M_i} \tilde{\theta}_i ,$$

onde $\tilde{\theta}_i$ denota, genericamente, qualquer estimador de θ_i , $i=1, \dots, N$. Utilizamos os seguintes estimadores:

(1) Estimador usual, isto é,

$$\hat{\theta}_i = \begin{cases} \bar{y}_i & , \text{ se } i \in s \\ \frac{\sum_{i \in s} \sum_{j \in s_i} y_{ij}}{\sum_{i \in s} m_i} & , \text{ se } i \notin s ; \end{cases}$$

(2) Moda da distribuição a posteriori, supondo σ^2 conhecida;

(3) Média da distribuição a posteriori aproximada obtida através de uma aproximação para a função de verossimilhança, supondo σ^2 conhecida;

(4) Média aproximada da distribuição a posteriori calculada pelo método de Laplace, supondo σ^2 conhecida;

(5) Moda da distribuição a posteriori supondo σ^2 desconhecida e

(6) Média aproximada da distribuição a posteriori calculada pelo método de Laplace supondo σ^2 desconhecida.

O processo de geração dos dados é o seguinte: geramos $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ independentemente segundo uma distribuição $N(0;0,2)$; calculamos $\theta_i = e^{\alpha_i / (1 + e^{\alpha_i})}$, $i=1, \dots, 10$ e geramos 10 populações (grupos) de tamanhos M_i , $i=1, \dots, 10$, pré-fixados, segundo uma distribuição de Bernoulli com média θ_i ; em seguida, selecionamos aleatoriamente 5 grupos, dos quais se

selecionamos amostras aleatórias de tamanhos m_i , iês, também pré-fixados. O Apêndice 7 mostra os dados gerados.

Para o cálculo das estimativas de (2) a (6) acima são necessários processos iterativos. O método de Newton Raphson foi utilizado (como explicado no Capítulo 3). Para a realização do método foram utilizadas as mesmas subrotinas dos programas mencionados na Seção 4.2 (subrotinas BINCON e BINDES do Apêndice 3 e LABICO e LABIDE do Apêndice 4). Para tal convencionamos que para todo iês, isto é, para todo grupo não selecionado, y_i e m_i são iguais a zero (*). A Tabela 4.4 mostra as previsões do total populacional baseados nos diversos estimadores.

Tabela 4.4 - Previsões do total populacional obtidas em populações e amostras simuladas
Modelo binomial

Total Populacional	(1)	σ^2 conhecida			σ^2 desconhecida	
		(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1969	1709	1727	1733	1714	1719	1761

As colunas de (1) a (6) correspondem às previsões baseadas nos estimadores de (1) a (6) citados na página anterior.

(*) - Outra forma de encontrar as estimativas modais pelo método de Newton Raphson é entrar nas subrotinas BINCON e BINDES com as informações sobre m_i e y_i somente dos grupos selecionados e calcular a estimativa de α_i , iês, pela média das estimativas dos α_i 's dos grupos selecionados. Na realidade, é necessário fazer uma pequena modificação na subrotina BINDES: no cálculo de $\sigma_{(k)}^2$ o denominador deve ser substituído por ANI+NTOTAL-1 onde NTOTAL seria uma entrada da subrotina BINDES e indicaria o número total de grupos (selecionados ou não).

Comparando as colunas (2) a (6) com a coluna (1) vemos que as previsões Bayesianas são razoavelmente próximas da usual. Agora, comparando entre si as colunas (2), (3) e (4) observamos que os três métodos de previsão Bayesiana (supondo σ^2 conhecida) produzem resultados bastante próximos, sendo que a previsão da coluna (3) é facilmente obtida sem necessidade de processos iterativos. Da mesma forma, as previsões obtidas supondo σ^2 desconhecida mostram-se também muito próximas. Finalmente, comparando entre si as colunas (2) e (5) e também (4) e (6) vemos que o fato de não se conhecer as variâncias parece quase não afetar os resultados.

Quanto à convergência dos processos iterativos, cabe fazer algumas observações. Em todos os casos em que aplicamos o método de Newton Raphson para obtenção das estimativas modais com σ^2 conhecida, a convergência foi obtida rapidamente (em geral, em 3 ou 4 iterações). Porém o mesmo sucesso não foi obtido quando supusemos σ^2 desconhecida. Em diversos casos a convergência não foi alcançada. No entanto, nas situações em que o número total de grupos e o de grupos selecionados não são muito grandes (por exemplo, 10 grupos dos quais foram selecionados 5) e os tamanhos das amostras são grandes (superiores a 50), a convergência é, na grande maioria dos casos, alcançada rapidamente. Na aplicação do processo iterativo para obtenção das estimativas baseados no método de Laplace, a convergência foi alcançada em praticamente todos os casos em que o apli

camos, porém é bom lembrar que este só pode ser utilizado se as estimativas modais tiverem sido calculadas.

4.5.2. Previsão no modelo de Poisson

Nesta seção fazemos ilustrações numéricas de resultados do Capítulo 3 referentes a previsão do total populacional no modelo de Poisson. Seguimos um procedimento análogo ao utilizado na seção anterior.

O Apêndice 8 mostra os dados gerados e a Tabela 4.5 mostra as previsões do total populacional baseados nos diversos estimadores.

Tabela 4.5 - Previsões do total populacional obtidas em populações e amostras simuladas
Modelo de Poisson

Total Populacional	(1)	σ^2 conhecida			σ^2 desconhecida	
		(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
15582	17016	15468	15474	16386	15692	15773

As colunas (1) a (6) correspondem às previsões baseadas nos estimadores (1) a (6) citados na página 80.

O processo iterativo de Newton Raphson, utilizado para o cálculo das estimativas modais e as baseadas no método de Laplace, mostrou-se bastante eficiente no sentido de que apresentou convergência rápida na totalidade dos casos em que o aplicamos (em geral em 3 ou 4 iterações).

Comparando entre si as colunas (2) e (3) da Tabela 4.5 notamos que estas apresentam resultados bastante próximos, sendo que a previsão dada na coluna (3) é obtida facilmente sem necessidade de processo iterativo. Agora, comparando as colunas (2) e (4) observamos que a previsão obtida pelo método de Laplace está um pouco afastada da previsão baseada nas estimativas modais (ambos supondo σ^2 conhecida), por outro lado, ao se comparar as colunas (5) e (6) correspondentes a σ^2 desconhecida, vemos que as previsões são bem próximas.

4.5.3. Previsão no modelo normal

Nesta seção ilustramos numericamente alguns resultados referentes a previsão do total populacional no modelo normal (Seção 3.4.3). Especificamente, fazemos previsões baseadas nos seguintes estimadores de θ_i , $i=1, \dots, N$:

- (1) Estimador usual;
- (2) Média da distribuição a posteriori supondo que as variâncias são conhecidas;
- (3) Moda da distribuição a posteriori supondo que as variâncias são desconhecidas.

O programa mencionado na Seção 4.4 (Apêndice 6) foi utilizado, porém com algumas modificações. O Apêndice 9 mostra os dados gerados e a Tabela 4.6 mostra as previsões do total populacional baseadas nos estimadores de (1) a (3) acima.

Tabela 4.6 - Previsões do total populacional obtidas em
populações e amostras simuladas
Modelo normal

Total Populacional	(1)	Variâncias conhecidas (2)	Variâncias desconhecidas (3)
65.171,0	65.721,7	65.274,2	65.335,6

As colunas (1) a (3) correspondem às previsões baseadas nos estimadores (1) a (6) citados na página 80.

Comparando as colunas (2) e (3) da Tabela 4.6, com a coluna (1) vemos que as previsões Bayesianas são razoavelmente próximas da usual. Além disto, comparando entre si as colunas (2) e (3) vemos que o fato das variâncias não serem conhecidas parece não afetar muito a previsão (este comportamento foi observado em diversos exemplos que analisamos).

Além disto, o processo iterativo mostrou-se bastante eficiente no sentido de que apresentou convergência rápida (em geral, em 2 iterações).

oOo

APÊNDICE 1

CÁLCULO DOS MOMENTOS A POSTERIORI APROXIMADOS PELO MÉTODO DE LAPLACE

Tierney e Kadane (1986) propõem aproximações para médias, variâncias e covariâncias a posteriori de funções positivas e contínuas dos parâmetros. Estas aproximações são baseadas no método de Laplace para integrais descrito em De Bruijn (1958).

Seja $g(\cdot)$ uma função contínua e positiva definida no espaço paramétrico. A média a posteriori de $g(\theta)$ pode ser escrita como

$$E[g(\theta)/\mathbf{y}] = \frac{\int g(\theta) L(\theta/\mathbf{y}) \pi(\theta) d\theta}{\int L(\theta/\mathbf{y}) \pi(\theta) d\theta} \quad (\text{A.1})$$

onde L é a função de verossimilhança, π é a função de densidade a priori do parâmetro θ e $\mathbf{y}$ é o vetor de observações.

Seja

$$L(\theta/\mathbf{y}) = (\log \pi(\theta) + \log L(\theta/\mathbf{y}))/m$$

e

$$L^*(\theta/\mathbf{y}) = (\log g(\theta) + \log \pi(\theta) + \log L(\theta/\mathbf{y}))/m ,$$

onde m é o tamanho da amostra. A expressão (A.1) pode ser escrita como

$$E[g(\theta)/\mathbf{y}] = \frac{\int \exp\{m L^*(\theta/\mathbf{y})\} d\theta}{\int \exp\{m L(\theta/\mathbf{y})\} d\theta} .$$

Seja $\tilde{\theta}$ a moda de L e $\gamma^2 = -1/L''(\tilde{\theta}/\mathbf{y})$. O método de Laplace produz a seguinte aproximação para o denominador de (A.1):

$$\begin{aligned} \int \exp\{mL(\theta/\mathbf{y})\} &\approx \int \exp\{mL(\tilde{\theta}/\mathbf{y}) - m \frac{(\theta - \tilde{\theta})^2}{2\gamma^2}\} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2\pi\gamma}}{\sqrt{m}} \exp\{mL(\tilde{\theta}/\mathbf{y})\}. \end{aligned}$$

Analogamente, denotando por θ^* a moda de L^* e $\gamma^{*2} = -1/L^{*''}(\theta^*/\mathbf{y})$, obtem-se a seguinte aproximação para o numerador de (A.1):

$$\frac{\sqrt{2\pi\gamma^*}}{\sqrt{m}} \exp\{mL^*(\theta^*/\mathbf{y})\}.$$

Assim, calculando o quociente das duas aproximações, tem-se uma aproximação para a média a posteriori de $g(\theta)$:

$$\hat{E}[g(\theta)/\mathbf{y}] = \frac{\gamma^*}{\gamma} \exp\{m[L^*(\theta^*/\mathbf{y}) - L(\tilde{\theta}/\mathbf{y})]\}$$

ou equivalentemente,

$$\hat{E}[g(\theta)/\mathbf{y}] = \frac{\gamma^*}{\gamma} \frac{g(\theta^*) \pi(\theta^*) L(\theta^*/\mathbf{y})}{\pi(\tilde{\theta}) L(\tilde{\theta}/\mathbf{y})}.$$

No caso multivariado, denotando por θ o vetor de parâmetros, temos a seguinte aproximação:

$$\hat{E}[g(\theta)/\mathbf{y}] = \left(\frac{\det \mathbf{D}^*}{\det \mathbf{D}} \right)^{1/2} \frac{g(\theta^*) \pi(\theta^*) L(\theta^*/\mathbf{y})}{\pi(\tilde{\theta}) L(\tilde{\theta}/\mathbf{y})}$$

onde $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\theta}^*$ são as modas de $\pi(\theta)L(\theta/\mathbf{y})$ e $g(\theta)\pi(\theta)L(\theta/\mathbf{y})$ respectivamente, $\mathbf{D}$ é a inversa da matriz cujo elemento (i,j) é

$$-\frac{\partial^2 \log(\pi(\theta) L(\theta/\mathbf{y}))}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta = \theta^*}$$

e D^* é a inversa da matriz cujo elemento (i, j) é

$$-\frac{\partial^2 \log(g(\theta) \pi(\theta) L(\theta/\mathbf{y}))}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta = \theta^*}$$

$i, j=1, \dots, n$.

Para obter uma aproximação para a variância a posteriori de $g(\theta)$ basta tomar

$$\hat{\text{Var}}[g(\theta)/\mathbf{y}] = \hat{E}[g^2(\theta)/\mathbf{y}] - \hat{E}^2[g(\theta)/\mathbf{y}]$$

e, da mesma forma, para encontrar uma aproximação para a covariância a posteriori de $g(\theta)$ e $h(\theta)$ toma-se

$$\begin{aligned} \hat{\text{Cov}}[g(\theta), h(\theta)/\mathbf{y}] &= \hat{E}[g(\theta)h(\theta)/\mathbf{y}] - \\ &\quad - \hat{E}[g(\theta)/\mathbf{y}]\hat{E}[h(\theta)/\mathbf{y}]. \end{aligned}$$

Como se pode constatar, o método é bastante simples, envolvendo somente algumas maximizações e derivações (no máximo até segunda ordem).

Tierney e Kadane (1986) observam que as aproximações são, em geral, tão acuradas e, em alguns casos, mais acuradas que as aproximações baseadas em expansões da função de verossimilhança até terceira ordem (que, obviamente, requerem cálculo de derivadas de terceira ordem) e afirmam que a principal condição de regularidade necessária à aplicação do

método é que a função de densidade a posteriori seja unimodal. Os autores analisam, em detalhes, as ordens das aproximações.

ooo

APÊNDICE 2 - Saída e listagem do programa que
calcula as estimativas modais de θ .
Modelo binomial

```

2BEGIN JOB BINOMIAL
2CHARGE=NEWTON-RAPHSON
2COMPILE BINOMIAL FORTRAN LIBRARY
2FOOTRAN DATA
  $SET AUTOBIND
  $BIND=FROM EIB/IMSL/2,BIB/IMSL/3,BIE/IMSL/4
    DOUBLE PRECISION DSEED
    DIMENSION M(20),Y(20),GALFA(20),GTETA(20),ALFA(20),ALFG(20)
    READ(5,1) N,AMED,SIGMA2,NITMAX,PRECIS,DSEED
1  FORMAT(1X,I2,F3.0,F3.0,1X,I2,F5.2,F8.3)
    WRITE(6,4) N,AMED,SIGMA2,PRECIS,NITMAX,DSEED
4  FORMAT(" NUMERO DE GRUPOS (N) =",I2,/, " MEDIA DA NORMAL (AMED) =",
  *F3.0,/, " VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) =",F8.4,/,
  * " PRECISAO DESEJADA (PRECIS) =",F7.3,/,
  * " NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) =",I2,/, " SEMENTE= ",E13.8)
    READ(5,2) N,(M(I),I=1,N)
2  FORMAT(*(1X,I2))
    L=N+1
    CALL GGNHL(DSEED,L,ALFG)
    DO 10 I=2,L
      GALFA(I-1)=ALFG(I)*SQRT(SIGMA2)+AMED
10  CONTINUE
    DO 50 I=1,N
      GTETA(I)=EXP(GALFA(I))/(1+EXP(GALFA(I)))
      CALL GBN(DSEED,1,M(I),GTETA(I),Y(I))
50  CONTINUE
    WRITE(6,3) N,(GALFA(I),GTETA(I),Y(I),I=1,N)
20  FORMAT(1X,F5.3,1X,F2.0)
3  FORMAT(/,1X," **** DISTRIBUICAO BINOMIAL - NEWTON-RAPHSON ****",
  *//, " ALFA GERADO          TETA GERADO          M          Y",/,
  *(3X,F8.4,12X,F5.3,9X,I3,8X,I3,/,),/)
    NITMAX=NITMAX-1
    READ(5,5) IOPCAD
5  FORMAT(1X,I1)
    IF(IOPCAD.EQ.0) CALL BINCON(Y,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
    IF(IOPCAD.EQ.1) CALL BINDESC(Y,M,N,NITMAX,PRECIS)
    IF(IOPCAD.NE.2) GO TO 70
    CALL BINCON(Y,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
    CALL BINDESC(Y,M,N,NITMAX,PRECIS)
70  STOP
    END
    SUBROUTINE BINCON(Y,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
C*****
C***** SUBROTINA BINCON (VARIANCIA CONHECIDA)*****
C*****
    REAL Y(20),M(20)
    DIMENSION TETA(20),C(20),U(20),ALFA(20),ALFA2(20),D(20,20),WK(20)
    WRITE(6,11)
11  FORMAT(" METODO DE NEWTON-RAPHSON - VARIANCIA CONHECIDA")
    DO 200 I=1,N
      TETA(I)=Y(I)/FLOAT(M(I))
      IF(TETA(I).EQ.1) TETA(I)=0.999
      IF(TETA(I).EQ.0) TETA(I)=0.001
      ALFA(I)=ALOG(TETA(I)/(1-TETA(I)))
      ALFASO=ALFASO+ALFA(I)
200  CONTINUE
210  ALFASJ=ALFASO/FLOAT(N)

```

```

DC 220 I=1,N
ATETA=EXP(ALFA(I))/(1+EXP(ALFA(I)))
C(I)=Y(I)-FLOAT(H(I))*ATETA-(ALFA(I)-ALFASD)/SIGMA2
U(I)=(FLOAT(P(I))*ATETA/(EXP(ALFA(I))+1)+1/SIGMA2)**(-1)
USOMA=USOMA+U(I)
220 CONTINUE
ALFASD=0.
USOMA=USOMA/FLOAT(N)
DC 230 I=1,N
DC 240 J=I,N
D(I,J)=U(I)*U(J)/(FLOAT(N)*(SIGMA2-USOMA))
C(J,I)=D(I,J)
IF(I.EQ.J) D(I,J)=D(I,J)+U(I)
240 CONTINUE
230 CONTINUE
IPREC=0
USOMA=0.
DC 250 I=1,N
PROD=0.
DC 260 J=1,N
PROD=PROD+D(I,J)*C(J)
260 CONTINUE
ALFA2(I)=ALFA(I)+PROD
IF(ALFA2(I).GT.7.OR.ALFA2(I).LT.-7) ALFA2(I)=C
ALFASD=ALFASD+ALFA2(I)
ALF=ALFA(I)
IF(ALF.EQ.0) ALF=0.001
AUX=ABS((ALFA2(I)-ALFA(I))/ALF)
IF(AUX.GT.PRECIS) IPREC=1
250 CONTINUE
NITER=NITER+1
IF(NITER.LE.NITMAX.OR.IPREC.EQ.0) GO TO 270
WRITE(6,15)
15 FORMAT(/,1X," NAO CONVERGIU ATE O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES")
GO TO 290
270 IF(IPREC.EQ.0.) GO TO 290
DC 280 I=1,N
ALFA(I)=ALFA2(I)
280 CONTINUE
PROD=0.
GO TO 210
290 DC 300 I=1,N
TETA(I)=EXP(ALFA2(I))/(1+EXP(ALFA2(I)))
300 CONTINUE
WRITE(6,17) NITER,N,(ALFA2(I),TETA(I),C(I),I=1,N)
17 FORMAT(/,1X," NUMERO DE ITERACOES = ",I3,/,
*" ALFA ESTIMADO TETA ESTIMADO DERIVADA (VEICOR C) ",/,
** (3X,F8.4,10X,F5.3,5X,E15.3,/,/,)
WRITE(6,550)
550 FORMAT(/,1X," MATRIZ C INVERSA DA ULTIMA ITERACAO",/)
DC 500 I=1,N
WRITE(6,18) N,(D(I,J),J=1,N)
18 FORMAT(* (1X,E9.3),/)
500 CONTINUE
ALFASD=ALFASD/FLOAT(N)
D1=1.
IJOB=4
CALL LINV3F(D,ALFA,IJOB,N,20,D1,D2,WK,JER)
DET=D1*2.0**D2
WRITE(6,19) DET

```

```

19  FORMAT(//," DETERMINANTE DA MATRIZ C INVERSA = ",E15.8,/)
    RETURN
    END
    SUBROUTINE BINDES(Y,M,N,NIMAX,PRECIS)
C*****
C***** SUBROTINA BINDES (VARIANCIA DESCONHECIDA)*****
C*****
    REAL Y(20),WKAREA(400)
    INTEGER M(20)
    DIMENSION TETA(20),ALFA(20),ALFA2(20),C(20),CM(20,20),D(20,20)
    READ(5,20) ANI,ALAMB0
20  FORMAT(1X,F5.3,1X,F2.0)
    WRITE(6,21)
21  FORMAT(//," METODO DE NEWTON-RAPHSON - VARIANCIA DESCONHECIDA")
    WRITE(6,22) ANI,ALAMB0
22  FORMAT(//," NI = ",F5.3,/, " LAMBDA = ",F2.0)
    IF(ANI.EQ.0) WRITE(6,23)
23  FORMAT(//," ***** CUIDADO NI IGUAL A ZERO *****",/)
    IF(ALAMB0.EQ.0) WRITE(6,24)
24  FORMAT(//," ***** CUIDADO LAMBDA IGUAL A ZERO *****",/)
    DO 310 I=1,N
        TETA(I)=Y(I)/FLOAT(M(I))
        IF(TETA(I).EQ.0) TETA(I)=0.001
        IF(TETA(I).EQ.1) TETA(I)=0.999
        ALFA(I)=ALOG(TETA(I)/(1-TETA(I)))
        ALFAS0=ALFAS0+ALFA(I)
310  CONTINUE
        AUX2=ANI+FLOAT(N)-1.
320  ALFAS0=ALFAS0/FLOAT(N)
        AUX=0.
        DO 300 I=1,N
            AUX=AUX+(ALFA(I)-ALFAS0)**2
300  CONTINUE
        VAR=(ANI*ALAMB0+AUX)/AUX2
        DO 330 I=1,N
            ATETA=EXP(ALFA(I))/(1+EXP(ALFA(I)))
            C(I)=Y(I)-FLOAT(M(I))*ATETA-(ALFA(I)-ALFAS0)/VAR
330  CONTINUE
            DO 340 J=1,N
                CM(I,J)=-2*(ALFA(I)-ALFAS0)*(ALFA(J)-ALFAS0)/(AUX2*VAR**2)
                CM(I,J)=CM(I,J)+(-FLOAT(N)*VAR)**(-1)
                CM(J,I)=CM(I,J)
                IF(I.NE.J) GO TO 350
                ATETA=EXP(ALFA(I))/(1+EXP(ALFA(I)))
                AUX=FLOAT(M(I))*ATETA/(1+EXP(ALFA(I)))+VAR**(-1)
                CM(I,J)=CM(I,J)+AUX
350  CONTINUE
340  CONTINUE
        IDGT=1
        CALL LINV2F(CM,N,20,D,IDGT,WKAREA,IER)
        ALFAS0=0.
        IPREC=0
        DO 360 I=1,N
            PROD=0.
            DO 370 J=1,N
                PROD=PROD+D(I,J)*C(J)
370  CONTINUE
            ALFA2(I)=ALFA(I)+PROD
            IF(ALFA2(I).GT.7.0E-7) ALFA2(I)=0

```

```

ALFASO=ALFASO+ALFA2(I)
ALF=ALFACT)
IF(ALF.EQ.0) ALF=0.001
AUX=ABS((ALFA2(I)-ALFA(I))/ALF)
IF (AUX.GT.PRECIS) IPREC=1
360 CONTINUE
NITER=NITER+1
IF(NITER.LE.NITMAX.OR.IPREC.EQ.0) GO TO 390
WRITE(6,33)
33 FORMAT(/," NAO CONVERGIU ATE O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES")
GO TO 410
390 IF(IPREC.EQ.0) GO TO 410
DO 420 I=1,N
ALFA(I)=ALFA2(I)
420 CONTINUE
GO TO 320
410 DO 400 I=1,N
TETA(I)=EXP(ALFA2(I))/(1+EXP(ALFA2(I)))
400 CONTINUE
ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)
AUX=0.
DO 401 I=1,N
AUX=AUX+(ALFA2(I)-ALFASO)**2
401 CONTINUE
VAR=(ANI*ALAMBDA+AUX)/AUX2
WRITE(6,37) NITER,VAR,N,(ALFA2(I),TETA(I),C(I),I=1,N)
37 FORMAT(/," NUMERO DE ITERACOES = ",I3,/, " VARIANCIA = ",
*F9.5,/,/, " ALFA ESTIMADO TETA ESTIMADO DERIVADA (VETOR C)",
*/,*(3X,F8.4,12X,F5.3,5X,E15.3,/,/,)
WRITE(6,650)
650 FORMAT(/,1X," MATRIZ C INVERSA DA ULTIMA ITERACAO",/)
DO 600 I=1,N
WRITE(6,18) N,(D(I,J),J=1,N)
18 FORMAT(*,E9.3,1X,/)
600 CONTINUE
D1=1.
IJOB=4
CALL LINV3F(D,ALFA,IJOB,N,20,D1,D2,WKAREA,IER)
DET=D1*2.0**D2
WRITE(6,777) DET
777 FORMAT(/,," DETERMINANTE DA MATRIZ C INVERSA = ",E15.8)
RETURN
END
?RUN BINOMIAL
?DATA
07 00 1. 30 .001 5209.91
45 34 38 44 39 37 36
2
0.1 2.
?END JCE

```


NUMERO DE GRUPOS (N) = 7
 MEDIA DA NORMAL (AME) = 0.
 VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) = 1.0000
 PRECISAO DESEJADA (PRECIS) = 0.001
 NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) = 30
 SEMENTE = .92099100E+04

**** DISTRIBUICAO BINOMIAL - NEWTON-RAPHSON ****

ALFA GERADO	TETA GERADO	M	Y
-0.1227	0.469	45	21
-1.0068	0.268	34	7
1.3815	0.799	38	33
0.1214	0.530	44	28
-0.2409	0.440	39	14
0.3982	0.598	37	22
-0.1423	0.464	36	17

METODO DE NEWTON-RAPHSON - VARIANCIA CONHECIDA

NUMERO DE ITERACOES = 3

ALFA ESTIMADO	TETA ESTIMADO	DERIVADA (VETOR C)
-0.1157	0.471	-.176E-07
-1.1421	0.242	-.170E-03
1.5790	0.829	.159E-02
0.5173	0.627	.304E-06
-0.5138	0.374	-.656E-07
0.3529	0.587	.109E-06
-0.0917	0.477	-.172E-07

MATRIZ C INVERSA DA ULTIMA ITERACAO

.830E-01	.181E-02	.206E-02	.116E-02	.130E-02	.132E-02	.132E-02
.181E-02	.141E+00	.347E-02	.196E-02	.219E-02	.222E-02	.222E-02
.206E-02	.347E-02	.161E+00	.222E-02	.248E-02	.252E-02	.252E-02
.116E-02	.196E-02	.222E-02	.398E-01	.140E-02	.142E-02	.142E-02
.130E-02	.219E-02	.248E-02	.140E-02	.100E+00	.159E-02	.159E-02
.132E-02	.222E-02	.252E-02	.142E-02	.159E-02	.102E+00	.161E-02
.132E-02	.222E-02	.252E-02	.142E-02	.159E-02	.161E-02	.102E+00

DETERMINANTE DA MATRIZ C INVERSA = .17467768E-06

METODO DE NEWTON-RAPHSON - VARIANCIA DESCONHECIDA

NI = 0.100
 LAMBDA = 2.

NUMERO DE ITERACOES = 3
 VARIANCIA = 0.66893

ALFA ESTIMADO	TETA ESTIMADO	DERIVADA (VETOR C)
-0.1083	0.473	.931E-04
-1.0653	0.256	.282E-03
1.4738	0.814	.650E-02
0.4988	0.622	-.153E-02
-0.4864	0.381	.103E-02
0.3398	0.584	-.111E-02
-0.0838	0.479	.215E-04

MATRIZ C INVERSA DA ULTIMA ITERACAO

.805E-01	.494E-02	-.444E-03	.108E-02	.272E-02	.147E-02	.214E-02
.484E-02	.153E+00	-.271E-01	-.318E-02	.115E-01	-.112E-02	.549E-02
.444E-03	-.271E-01	.185E+00	.108E-01	-.831E-02	.887E-02	-.234E-04
.108E-02	-.318E-02	.108E-01	.877E-01	-.159E-03	.306E-02	.141E-02
.272E-02	.115E-01	-.831E-02	-.159E-03	.989E-01	.731E-03	.316E-02
.147E-02	-.112E-02	.887E-02	.306E-02	.731E-03	.934E-01	.186E-02
.214E-02	.549E-02	-.234E-04	.141E-02	.316E-02	.186E-02	.980E-01

DETERMINANTE DA MATRIZ C INVERSA = .17937067E-06

APÊNDICE 3 - Saída e listagem do programa que
calcula as estimativas de θ ba-
seadas no método de Laplace.

Modelo binomial

```

?BEGIN JOB BINOMIAL;CLASS=12;
?CHARGE=LAPLACE
?FAMILY DISK=CCE005 OTHERWISE PACK
?COMPILE BINOMIAL FORTRAN LIBRARY
?FORTRAN DATA
$SET AUTOBIND
$BIND=FROM BJB/IMSL/2,BJB/IMSL/3,BIB/IMSL/4
DIMENSION M(20),Y(20)
WRITE(6,10)
10 FORMAT(" ***** DISTRIBUICAO BINOMIAL-METODO DE LAPLACE *****",
*)
READ(5,1) N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS
1 FORMAT(1X,I2,1X,F3.0,1X,I3,1X,F5.2)
IF(SIGMA2.EQ.0) WRITE(6,7)
7 FORMAT(/," **** CUIDADO A VARIANCIA NAO PODE SER NULA ****",/)
WRITE(6,4) N,SIGMA2,PRECIS,NITMAX
4 FORMAT(" NUMERO DE GRUPOS (N) =",I2,/,
" VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) =",F3.4,/,
" PRECISAO DESEJADA (PRECIS) =",F7.3,/,
" NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) =",I2,/)
READ(5,2) N,(M(I),I=1,N),N,(Y(I),I=1,N)
2 FORMAT(*(1X,I2),/,*(1X,I2))
WRITE(6,25) N,(M(I),Y(I),I=1,N)
25 FORMAT(" TAMANHO DA AMOSTRA Y",/,*(8X,I2,17X,I4,/)
NITMAX=NITMAX-1
READ(5,5) IOPCAD
5 FORMAT(1X,I1)
IF(IOPCAD.EQ.0) CALL LABICO(Y,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
IF(IOPCAD.EQ.1) CALL LABIDE(Y,M,N,NITMAX,PRECIS)
IF(IOPCAD.NE.2) GO TO 70
CALL LABICO(Y,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
CALL LABIDE(Y,M,N,NITMAX,PRECIS)
70 STOP
END
SUBROUTINE LABICO(Y,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
C*****
C***** SUBROTINA LABICO (VARIANCIA CONHECIDA) *****
C*****
INTEGER M(20)
REAL Y(20)
DIMENSION TETA(20),C(20),U(20),ALFA(20),ALFA2(20),D(20,20),
*ALFCO(20),WK(1000)
WRITE(6,11)
11 FORMAT(" ===== VARIANCIA CONHECIDA =====",/)
READ(5,/) (ALFCO(I),I=1,N),DETNEW
DO 203 I=1,N
ALFEST=ALFEST+ALFCO(I)
203 CONTINUE
ALFEST=ALFEST/FLOAT(N)
WRITE(6,13) N,(ALFCO(I),I=1,N)
13 FORMAT(" ALFA INICIAL (NEWTON - FAPHCN)",/,*(11X,F8.4,/) ,/,
*33X," TETA ESTIMADO")
DO 5000 L=1,N
NITER=0
DO 200 I=1,N
ALFA(I)=ALFCO(I)
ALFASJ=ALFASJ+ALFA(I)

```

```

200 CONTINUE
210 ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)
    DO 220 I=1,N
        ATETA=EXP(ALFA(I))/(1+EXP(ALFA(I)))
        C(I)=0.
        IF(I.EQ.L) C(I)=1./(1+EXP(ALFA(I)))
        C(I)=C(I)+Y(I)-FLOAT(M(I))*ATETA-(ALFA(I)-ALFASO)/SIGMA2
        MAUX=FLOAT(M(I))
        IF(I.EQ.L) MAUX=MAUX+1
        U(I)=(MAUX*ATETA/(1+EXP(ALFA(I)))+1/SIGMA2)**(-1)
        USOMA=USOMA+U(I)
220 CONTINUE
    ALFASO=0.
    USOMA=USOMA/FLOAT(N)
    DO 230 I=1,N
        DO 240 J=I,N
            D(I,J)=U(I)*U(J)/(FLOAT(N)*(SIGMA2-USOMA))
            D(J,I)=D(I,J)
            IF(I.EQ.J) D(I,J)=D(I,J)+U(I)
240 CONTINUE
230 CONTINUE
    JPREC=0
    USOMA=0.
    DO 250 I=1,N
        PROD=0.
        DO 260 J=1,N
            PROD=PROD+D(I,J)*C(J)
260 CONTINUE
        ALFA2(I)=ALFA(I)+PROD
        ALFASO=ALFASO+ALFA2(I)
        ALF=ALFA(I)
        IF(ALF.EQ.0) ALF=0.001
        AUX=ABS(ALFA2(I)-ALFA(I))/ALF
        IF(AUX.GT.FPRECIS) JPREC=1
250 CONTINUE
    NITER=NITER+1
    IF(NITER.LE.NITMAX.OR.JPREC.EQ.0) GO TO 270
    WRITE(6,15) L
15  FORMAT(/,1X," NAO CONVERGIU ATE O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES",
    *      " L = ",13)
    GO TO 290
270 IF(JPREC.EQ.0.) GO TO 290
    DO 280 I=1,N
        ALFA(I)=ALFA2(I)
280 CONTINUE
    GO TO 210
290 D1=1.
    IJOB=4
    CALL _INV3F(0,ALFA,IJOB,N,20,D1,D2,WK,IEF)
    DET=D1*2.0**D2
    ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)
    AUX=0.
    AUX1=0.
    AUX3=0.
    DO 550 I=1,N
        AUX=AUX+(-(ALFA2(I)-ALFASO)**2)+(ALFCO(I)-ALFEST)**2
        AUX1=AUX1+Y(I)*(ALFA2(I)-ALFCO(I))
        AUX3=AUX3+M(I)*(ALOG(1+EXP(ALFA2(I)))-ALOG(1+EXP(ALFCO(I))))
550 CONTINUE
    AUX=AUX/(2*SIGMA2)

```

```

E= SORT (DET/DETNEW)*EXP(ALFA2(L)+AUX+AUX1-AUX3)/(1+EXP(ALFA2(L)))
WRITE(6,19) NITER,L,E
19  FORMAT(" NUMERO DE ITERACOES = ",I3,4X," E( ",I2," ) = ",F8.3)
5000 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE LABIDE(Y,M,N,NITMAX,PRECIS)
C*****
C***** SUBROTINA LABIDE (VARIANCA DESCONHECIDA)*****
C*****
REAL Y(20),WKAREA(500)
INTEGER M(20)
DIMENSION TETA(20),ALFA(20),ALFA2(20),C(20),CM(20,20),D(20,20),
*ALFDES(20)
READ(5,20) ANI,ALAMBDA
20  FORMAT(1X,F5.3,1X,F2.0)
WRITE(6,21)
21  FORMAT(//," ===== VARIANCA DESCONHECIDA =====")
IF(ANI.EQ.0) WRITE(6,23)
23  FORMAT(//," ***** CUIDADO NI IGUAL A ZERO *****",//)
IF(ALAMBDA.EQ.0) WRITE(6,24)
24  FORMAT(//," ***** CUIDADO LAMBDA IGUAL A ZERO *****",//)
WRITE(6,22) ANI,ALAMBDA
22  FORMAT(/," NI = ",F5.3,/, " LAMBDA = ",F2.0,/)
READ(5,/) (ALFDES(I),I=1,N),DETNEW
DO 703 I=1,N
ALFEST=ALFEST+ALFDES(I)
703 CONTINUE
ALFEST=ALFEST/N
WRITE(6,101) N,(ALFDES(I),I=1,N)
101 FORMAT(" ALFA INICIAL (NEWTON-RAPHSON)",/,*(11X,F8.4,/,),/,
*33X," TETA ESTIMADO")
DO 600 C L=1,N
NITER=0
DO 310 J=1,N
ALFA(J)=ALFDES(I)
ALFASO=ALFASO+ALFA(I)
310 CONTINUE
AUX2=FLOAT(N)+ANI-1.
320 ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)
AUX=0.
DO 300 I=1,N
AUX=AUX+(ALFA(I)-ALFASO)**2
300 CONTINUE
VAR=(ANI*ALAMBDA+AUX)/AUX2
DO 330 J=1,N
ATETA=EXP(ALFA(I))/(1+EXP(ALFA(I)))
C(I)=0.
IF(I.EQ.L) C(I)=1./(1+EXP(ALFA(I)))
C(I)=C(I)+Y(J)-FLOAT(M(J))*ATETA-(ALFA(I)-ALFASO)/VAR
330 CONTINUE
DO 340 I=1,N
DO 350 J=I,N
CM(I,J)=-2*(ALFA(I)-ALFASO)*(ALFA(J)-ALFASO)/(AUX2*VAR**2)
CM(I,J)=CM(I,J)+(-FLOAT(N)*VAR)**(-1)
CM(J,I)=CM(I,J)
IF(I.NE.J) GO TO 350
A=0.
IF(I.EQ.L) A=1.
ATETA=EXP(ALFA(I))/(1+EXP(ALFA(I)))

```



```

      AUX=(FLOAT(M(I))+A)*ATETA/(1+EXP(ALFA2(I)))+VAF**(-1)
      CM(I,J)=CM(I,J)+AUX
350  CONTINUE
340  CONTINUE
      IDGT=1
      CALL LINV2F(CM,N,20,D,IDGT,WKAFEA,IEF)
      ALFASO=0.
      IPREC=0
      DO 360 I=1,N
      PROD=0.
      DO 370 J=1,N
      PROD=PROD+D(I,J)*C(J)
370  CONTINUE
      ALFA2(I)=ALFA2(I)+PROD
      ALFASO=ALFASO+ALFA2(I)
      ALF=ALFA(I)
      IF(ALF.EQ.0) ALF=0.001
      ALX=ABS((ALFA2(I)-ALFA(I))/ALF)
      IF (ALX.GT.PRECIS) IPREC=1
360  CONTINUE
      NITER=NITER+1
      IF(NITER.LE.NITMAX.OR.IPREC.EQ.0) GO TO 390
      WRITE(6,33)
33  FORMAT(/," NAO CONVERGIU ATE O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES")
      GO TO 410
390  IF(IPREC.EQ.0) GO TO 410
      DO 420 I=1,N
      ALFA(I)=ALFA2(I)
420  CONTINUE
      GO TO 320
410  AUX=0.
      ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)
      DO 400 I=1,N
      ALX=AUX+(ALFA2(I)-ALFASO)**2
400  CONTINUE
      VAR=(ANJ*ALAMBDA+AUX)/AUX2
      D1=1.
      IJOB=4
      CALL LINV3F(D,ALFA,IJOB,N,20,D1,D2,WKAFEA,IEF)
      DET=D1*2.0**D2
      AUX=ANJ*ALAMED
      AUX1=ANJ*ALAMBDA
      AUX3=0.
      DO 600 I=1,N
      AUX=AUX+(ALFA2(I)-ALFASO)**2
      ALX1=AUX1+(ALFDES(I)-ALFEST)**2
      ALX3=AUX3+Y(I)*(ALFA2(I)-ALFDES(I))
      ALX3=AUX3-M(I)*(ALOG((1+EXP(ALFA2(I)))/(1+EXP(ALFDES(I))))))
600  CONTINUE
      A=1+EXP(ALFA2(L))
      E=SQRT(DET/DETNEW)*EXP(ALFA2(L)-0.5*AUX2*ALOG(AUX/AUX1)+AUX3)/A
      WRITE(6,777) NITER,L,E
777  FORMAT(" NUMERO DE ITERACOES = ",I3,4X,
      * " E( ",I2," ) = ",F8.3)
6000 CONTINUE
      RETURN
      END
?FUN BINOMIAL
?DATA
  7  1- 30 0.001

45 34 38 44 39 37 36
21  7 33 28 14 22 17
2
-0.1157,-1.1421,1.5750,0.5173,-0.5138,0.3529,-0.0917,
00.17467768E-06,
0.100 2.
-0.1083,-1.0653,1.4738,0.4988,-0.4864,0.3398,-0.0838,
00.17937067E-06,
?END JOB

```


***** DISTRIBUICAO BINOMIAL-METODO DE LAPLACE *****

NUMERO DE GRUPOS (N) = 7
 VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) = 1.0000
 PRECISAO DESEJADA (PRECIS) = 0.001
 NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) = 30

TAMANHO DA AMOSTRA	Y
45	21
34	7
38	33
44	28
39	14
37	22
36	17

===== VARIANCIA CONHECIDA =====

ALFA INICIAL (NEWTON - RAPHSON)

-0.1157
 -1.1421
 1.5790
 0.5173
 -0.5138
 0.3529
 -0.0917

		TETA ESTIMADO
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (1) = 0.471
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (2) = 0.243
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (3) = 0.828
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (4) = 0.626
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (5) = 0.375
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (6) = 0.587
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (7) = 0.477

===== VARIANCIA DESCONHECIDA =====

NI = 0.100
 LAMBDA = 2.

ALFA INICIAL (NEWTON-RAPHSON)

-0.1083
 -1.0653
 1.4738
 0.4988
 -0.4864
 0.3390
 -0.0838

		TETA ESTIMADO
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (1) = 0.473
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (2) = 0.250
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (3) = 0.822
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (4) = 0.625
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (5) = 0.378
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (6) = 0.586
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (7) = 0.479

APÊNDICE 4 - Saída e listagem do programa que
calcula as estimativas modais de θ .
Modelo de Poisson

```

?BEGIN JOB POISSON
?CHARGE=NEWTON-RAPHSON
?COMPILE POISSON FORTRAN LIBRARY
?FORTRAN DATA
$SET AUTOBIND
$BINC=FROM E18/IMSL/2,B13/IMSL/3,B1E/IMSL/4
      DOUBLE PRECISION DSEED
      DIMENSION M(20),Y(20),GALFA(20),GTETAC(20),ALFA(20),
      *ALFG(21),GYIJ(100)
      READ(5,1) N,AMED,SIGMA2,NITMAX,PRECIS,DSEED
1   FORMAT(1X,I2,F3.0,F3.0,1X,I2,F5.2,F8.3)
      IF(SIGMA2.EQ.0) WRITE(6,7)
7   FORMAT(/," **** CUIDADO A VARIANCIA NAO PODE SER NULA ****"/)
      WRITE(6,4) N,AMED,SIGMA2,PRECIS,NITMAX,DSEED
4   FORMAT(" NUMERO DE GRUPOS (N) =",I2,/, " MEDIA DA NORMAL (AMED) =",
      *F8.4,/, " VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) =",F8.4,/,
      * " PRECISAO DESEJADA (PRECIS) =",F7.3,/,
      * " NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) =",I2,/, " SEMENTE=",E13.8)
      READ(5,2) N,(M(I),I=1,N)
2   FORMAT(* (1X,I2))
      L=N+1
      CALL GGNML(DSEED,L,ALFG)
      DO 10 I=2,L
      GALFA(I-1)=ALFG(I)*SQRT(SIGMA2)+AMED
10  CONTINUE
      DO 50 I=1,N
      GTETAC(I)=EXP(GALFA(I))
      CALL GGPOS(GTETAC(I),DSEED,M(I),GYIJ,IER)
      DO 55 K=1,M(I)
      Y(I)=Y(I)+GYIJ(K)
55  CONTINUE
50  CONTINUE
      WRITE(6,3) N,(GALFA(I),GTETAC(I),M(I),Y(I),I=1,N)
20  FORMAT(1X,F8.4,1X,F2.0)
3   FORMAT(/,1X," **** DISTRIBUICAO DE POISSON - NEWTON-RAPHSON ****",
      */," ALFA GERADO          TETA GERADO          M          Y"/,
      *(3X,F8.4,9X,F8.3,10X,I2,8X,I4,/) ,/)
      NITMAX=NITMAX-1
      READ(5,5) IOPCAD
5   FORMAT(1X,I1)
      IF(IOPCAD.EQ.0) CALL POICON(Y,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
      IF(IOPCAD.EQ.1) CALL POIDES(Y,M,N,NITMAX,PRECIS)
      IF(IOPCAD.NE.2) GO TO 70
      CALL POICON(Y,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
      CALL POIDES(Y,M,N,NITMAX,PRECIS)
70  STOP
      END
      SUBROUTINE POICON(Y,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
C*****
C***** SUBROTINA POICON (VARIANCIA CONHECIDA) *****
C*****
      INTEGER M(20)
      REAL Y(20)
      DIMENSION TETA(20),C(20),U(20),ALFA(20),ALFA2(20),D(20,20),WK(20)
      WRITE(6,11)
11  FORMAT(" METODO DE NEWTON-RAPHSON - VARIANCIA CONHECIDA")
      DO 200 I=1,N

```

```

TETA(I)=Y(I)/FLOAT(M(I))
IF(TETA(I).EQ.C.) TETA(I)=C.CC1
ALFA(I)=ALOG(TETA(I))
ALFASO=ALFASO+ALFA(I)
200 CONTINUE
210 ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)
DO 220 I=1,N
ATETA=EXP(ALFA(I))
C(I)=Y(I)-FLOAT(M(I))*ATETA-(ALFA(I)-ALFASO)/SIGMA2
U(I)=(FLOAT(M(I))*ATETA+1/SIGMA2)**(-1)
USOMA=USOMA+U(I)
220 CONTINUE
ALFASO=0.
USOMA=USOMA/FLOAT(N)
DO 230 I=1,N
DO 240 J=1,N
D(I,J)=U(I)*U(J)/(FLOAT(N)*(SIGMA2-USOMA))
D(J,I)=D(I,J)
IF(I.EQ.J) D(I,J)=D(I,J)+U(I)
240 CONTINUE
230 CONTINUE
IPREC=0
USOMA=0.
DO 250 J=1,N
PROD=0.
DO 260 I=1,N
PROD=PROD+D(I,J)*C(I)
260 CONTINUE
ALFA2(I)=ALFA(I)+PROD
ALFASO=ALFASO+ALFA2(I)
ALF=ALFA(I)
IF(ALF.EQ.0) ALF=0.001
AUX=ABS(ALFA2(I)-ALFA(I))/ALF
IF(AUX.GT.PRECIS) IPREC=1
250 CONTINUE
NITER=NITER+1
IF(NITER.LE.NITMAX.OR.IPREC.EQ.0) GO TO 270
WRITE(6,15)
15 FORMAT(/,1X," NAO CONVERGIU ATE O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES")
GO TO 290
270 IF(IPREC.EQ.0.) GO TO 290
DO 280 I=1,N
ALFA(I)=ALFA2(I)
280 CONTINUE
GO TO 210
290 DO 300 I=1,N
TETA(I)=EXP(ALFA2(I))
300 CONTINUE
WRITE(6,17) NITER,N,(ALFA2(I),TETA(I),C(I),I=1,N)
17 FORMAT(/,1X," NUMERO DE ITERACOES = ",I3,/,
* " ALFA ESTIMADO TETA ESTIMADO DERIVADA (VELOC C)",/,
*(3X,F8.4,8X,F8.3,6X,E15.3,/)
WRITE(6,550)
550 FORMAT(/,1X," MATRIZ C INVERSA DA ULTIMA ITERACAO",/)
DO 500 I=1,N
WRITE(6,18) N,(D(I,J),J=1,N)
18 FORMAT(*,1X,E9.3,/)
500 CONTINUE
D1=0.
IJOB=4

```

```

CALL LINV3F(CD,ALFA,IJOB,N,20,D1,D2,WK,IER)
DET=D1*2.0**D2
ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)
WRITE(6,19) DET
19  FORMAT(//," DETERMINANTE DA MATRIZ C INVERSA = ",E15.8,/)
RETURN
END
SUBROUTINE POTDES(Y,M,N,NITMAX,PFECS)
C*****
C***** SUBROUTINA POTDES (VARIANCIA DESCONHECIDA)*****
C*****
REAL Y(20),WKAREA(400)
INTEGER M(20)
DIMENSION TETA(20),ALFA(20),ALFA2(20),C(20),C*(20,20),D(20,20)
READ(5,20) ANI,ALAMBD
20  FORMAT(1X,F5.3,1X,F2.0)
WRITE(6,21)
21  FORMAT(//," METODO DE NEWTON-RAPHSON - VARIANCIA DESCONHECIDA")
IF(ANI.EQ.0) WRITE(6,23)
23  FORMAT(//," ***** CUIDADO NI IGUAL A ZERO *****",/)
IF(ALAMBD.EQ.0) WRITE(6,24)
24  FORMAT(//," ***** CUIDADO LAMBDA IGUAL A ZERO *****",/)
WRITE(6,22) ANI,ALAMBD
22  FORMAT(//," NI = ",F5.3,/, " LAMBDA = ",F2.0)
DO 310 I=1,N
TETA(I)=Y(I)/FLOAT(M(I))
IF(TETA(I).EQ.0) TETA(I)=0.001
ALFA(I)=ALOG(TETA(I))
ALFASO=ALFASO+ALFA(I)
310  CONTINUE
AUX2=FLOAT(N)+ANI-1.
ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)
AUX=0.
DO 300 I=1,N
AUX=AUX+(ALFA(I)-ALFASO)**2
300  CONTINUE
VAR=(ANI*ALAMBD+AUX)/AUX2
DO 330 I=1,N
ATETA=EXP(ALFA(I))
C(I)=Y(I)-FLOAT(M(I))*ATETA-(ALFA(I)-ALFASO)/VAR
330  CONTINUE
DO 340 I=1,N
DO 350 J=I,N
CM(I,J)=-2*(ALFA(I)-ALFASO)*(ALFA(J)-ALFASO)/(AUX2*VAR**2)
CM(I,J)=CM(I,J)+(-FLOAT(N)*VAR)**(-1)
CM(J,I)=CM(I,J)
IF(I.NE.J) GO TO 350
AUX=FLOAT(M(I))*EXP(ALFA(I))+VAR**(-1)
CM(I,J)=CM(I,J)+AUX
350  CONTINUE
340  CONTINUE
IDGT=1
CALL LINV2F(CM,N,20,D,IDGT,WKAREA,IER)
ALFASO=0.
IPREC=0
DO 360 I=1,N
PROD=0.
DO 370 J=1,N
PROD=PROD+D(I,J)*C(J)
370  CONTINUE

```



```

ALFA2(I)=ALFA(I)+PROD
ALFAS0=ALFAS0+ALFA2(I)
ALF=ALFA(I)
IF(ALF.EQ.0) ALF=0.001
AUX=ABS((ALFA2(I)-ALFA(I))/ALF)
IF(AUX.GT.PRECIS) IPREC=1
360 CONTINUE
NITER=NITER+1
IF(NITER.LE.NITMAX.OR.IPREC.EQ.0) GO TO 390
WRITE(6,33)
33  FORMAT(/," NAO CONVERGIU ATE O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES")
GO TO 410
390 IF(IPREC.EQ.0) GO TO 410
CC 420 J=1,N
ALFA(I)=ALFA2(I)
420 CONTINUE
GO TO 320
410 ALX=0.
ALFAS0=ALFAS0/FLOAT(N)
CC 400 I=1,N
TETA(I)=EXP(ALFA2(I))
ALX=AUX+(ALFA2(I)-ALFAS0)**2
400 CONTINUE
VAR=(CANI*ALAMBDA+AUX)/AUX2
WRITE(6,37) NITER,VAR,N,(ALFA2(I),TETA(I),C(I),I=1,N)
37  FORMAT(/," NUMERO DE ITERACOES = ",I3," VARIANCIA ITERADA = ",
*F9.3," ALFA ESTIMADO TETA ESTIMADO DERIVADA (VETOR C)",
*/,**(3X,F8.4,9X,F8.3,6X,E15.3,/)
WRITE(6,650)
650 FORMAT(/,1X," MATRIZ C INVERSA DA ULTIMA ITERACAO",//)
CC 600 I=1,N
WRITE(6,18) N,(D(I,J),J=1,N)
18  FORMAT(*,E9.3,1X,/)
600 CONTINUE
D1=1.
IJOB=4
CALL LINVF(D,ALFA,IJOB,N,20,D1,D2,WKAREA,IEH)
DET=D1*2.0**D2
WRITE(6,777) DET
777 FORMAT(/," DETERMINANTE DA MATRIZ C INVERSA = ",E15.8)
RETURN
END
?RUN PCISSOV
?DATA
07 1. 1. 30 .001 292.301
40 32 36 29 39 42 30
2
0.1 2.
?END JCB

```


NUMERO DE GRUPOS (N) = 7
 MEDIA DA NORMAL (AME) = 1.0000
 VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) = 1.0000
 PRECISAO DESEJADA (PRECIS) = 0.001
 NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) = 30
 SEMENTE = .29230100E+03

**** DISTRIBUICAO DE POISSON - NEWTON-RAPHSON ***

ALFA GERADO	TETA GERADO	M	Y
1.0361	2.918	40	121
0.8794	2.409	32	71
1.4185	4.131	36	159
2.2044	9.065	29	248
0.4925	1.520	39	77
1.7810	5.936	42	259
-1.4015	0.246	30	6

METODO DE NEWTON-RAPHSON - VARIANCIA CONHECIDA

NUMERO DE ITERACOES = 3

ALFA ESTIMADO	TETA ESTIMADO	DERIVADA (VETOR C)
1.1057	3.021	-.204E-06
0.7992	2.224	-.353E-06
1.4821	4.402	-.189E-06
2.1414	8.511	-.193E-06
0.6839	1.982	-.355E-06
1.8159	6.146	-.135E-06
-1.2906	0.275	-.100E-01

MATRIZ C INVERSA DA ULTIMA ITERACAO

.822E-02	.166E-04	.752E-05	.484E-05	.153E-04	.463E-05	.129E-03
.166E-04	.139E-01	.127E-04	.817E-05	.259E-04	.781E-05	.219E-03
.752E-05	.127E-04	.628E-02	.370E-05	.117E-04	.354E-05	.989E-04
.484E-05	.917E-05	.370E-05	.404E-02	.753E-05	.228E-05	.637E-04
.153E-04	.259E-04	.117E-04	.753E-05	.128E-01	.720E-05	.202E-03
.463E-05	.781E-05	.354E-05	.228E-05	.720E-05	.386E-02	.609E-04
.129E-03	.219E-03	.989E-04	.637E-04	.202E-03	.609E-04	.110E+00

DETERMINANTE DA MATRIZ C INVERSA = .15665020E-13

METODO DE NEWTON-RAPHSON = VARIANCIA DESCONHECIDA

NI = 0.100
 LAMBDA = 2.

NUMERO DE ITERACOES = 3
 VARIANCIA ITERADA = 1.326

ALFA ESTIMADO	TETA ESTIMADO	DERIVADA (VETOR C)
1.1060	3.922	.497E-04
0.7986	2.222	.119E-03
1.4829	4.406	-.350E-04
2.1425	8.521	-.183E-03
0.6829	1.980	.145E-03
1.8166	6.151	-.110E-03
-1.3547	0.258	-.524E-02

MATRIZ C INVERSA DA ULTIMA ITERACAO

.823E-02	.120E-04	.634E-05	.465E-05	.107E-04	.418E-05	.470E-04
.120E-04	.139E-01	.788E-05	.362E-05	.217E-04	.414E-05	.329E-03
.634E-05	.788E-05	.628E-02	.590E-05	.627E-05	.430E-05	-.102E-03
.465E-05	.362E-05	.590E-05	.404E-02	.186E-05	.491E-05	-.221E-03
.107E-04	.217E-04	.627E-05	.186E-05	.128E-01	.291E-05	.390E-03
.418E-05	.414E-05	.480E-05	.491E-05	.281E-05	.386E-02	-.138E-03
.470E-04	.329E-03	-.102E-03	-.221E-03	.390E-03	-.138E-03	.135E+00

DETERMINANTE DA MATRIZ C INVERSA = .19529320E-13

APÊNDICE 5 - Saída e listagem do programa que
calcula as estimativas de θ ba-
seadas no método de Laplace.
Modelo de Poisson

```

2BEGIN JOB POISSON
2CHARGE=LAPLACE
2COMPILE POISSON FORTRAN LIBRARY
2FORTRAN DATA
2SET AUTOBIND
2BIND=FROM BIB/IMSL/2,BIB/IMSL/3,BIB/IMSL/4
DIMENSION M(20),Y(20)
WRITE(6,10)
10 FORMAT(" ***** DISTRIBUICAO DE POISSON-METODO DE LAPLACE *****",
*)
READ(5,1) N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS
1 FORMAT(1X,I2,1X,F3.0,1X,I3,1X,F5.2)
IF(SIGMA2.EQ.0) WRITE(6,7)
7 FORMAT(/," **** CUIDADO A VARIANCIA NAO PODE SER NULA ****",/)
WRITE(6,4) N,SIGMA2,PRECIS,NITMAX
4 FORMAT(" NUMERO DE GRUPOS (N) =",I2,/,
" VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) =",F8.4,/,
" PRECISAO DESEJADA (PRECIS) =",F7.3,/,
" NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) =",I2,/)
READ(5,/) (M(I),I=1,N)
READ(5,/) (Y(I),I=1,N)
WRITE(6,25) N,(M(I),Y(I),I=1,N)
25 FORMAT(" TAMANHO DA AMOSTRA",Y"/,*(8X,I2,17X,I4,/)")
NITMAX=NITMAX-1
READ(5,5) IOPCAO
5 FORMAT(1X,I1)
IF(IOPCAO.EQ.0) CALL LAPDCOCY,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
IF(IOPCAO.EQ.1) CALL LAPDCOCY,M,N,NITMAX,PRECIS)
IF(IOPCAO.NE.2) GO TO 70
CALL LAPDCOCY,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
CALL LAPDCOCY,M,N,NITMAX,PRECIS)
70 STOP
END
SUBROUTINE LAPDCOCY,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS)
C*****
C***** SUBROTINA LAPDCOC (VARIANCIA CONHECIDA) *****
C*****
INTEGER M(20)
REAL Y(20)
DIMENSION TETA(20),C(20),U(20),ALFA(20),ALFA2(20),D(20,20),WK(20),
*ALFCO(20)
WRITE(6,11)
11 FORMAT(" ===== VARIANCIA CONHECIDA =====",/)
READ(5,/) (ALFCO(I),I=1,N),DETNEW
DO 203 I=1,N
ALFEST=ALFEST+ALFCO(I)
203 CONTINUE
ALFEST=ALFEST/FLOAT(N)
WRITE(6,13) N,(ALFCO(I),I=1,N)
13 FORMAT(" ALFA INICIAL (NEWTON - RAPHSON)",/,*(11X,F8.4,/)//
*33X," TETA ESTIMADO")
DO 5000 L=1,N
ALFASO=0.
USOMA=0.
NITER=0
DO 200 J=1,N
ALFA(I)=ALFCO(I)

```

```

ALFAS0=ALFAS0+ALFA(I)
200 CONTINUE
210 ALFAS0=ALFAS0/FLOAT(N)
      DC 220 I=1,N
      ATETA=EXP(ALFA(I))
      C(I)=0.
      IF(I.EQ.L) C(I)=1.
      C(I)=C(I)+Y(I)-FLOAT(M(I))*ATETA-(ALFA(I)-ALFAS0)/SIGMA2
      U(I)=(FLOAT(M(I))*ATETA+1/SIGMA2)**(-1)
      USOMA=USOMA+U(I)
220 CONTINUE
      ALFAS0=0.
      USOMA=USOMA/FLOAT(N)
      DC 230 I=1,N
      DC 240 J=I,N
      D(I,J)=U(I)*U(J)/(FLOAT(N)*(SIGMA2-USOMA))
      D(J,I)=D(I,J)
      IF(I.EQ.J) D(I,J)=D(I,J)+U(I)
240 CONTINUE
230 CONTINUE
      IPREC=0
      USOMA=0.
      DC 250 I=1,N
      PROD=0.
      DC 260 J=1,N
      PROD=PROD+D(I,J)*C(J)
260 CONTINUE
      ALFA2(I)=ALFA(I)+PROD
      ALFAS0=ALFAS0+ALFA2(I)
      ALF=ALFA(I)
      IF(ALF.EQ.0) ALF=0.001
      AUX=ABS((ALFA2(I)-ALFA(I))/ALF)
      IF(AUX.GT.PRECIS) IPREC=1
250 CONTINUE
      NITER=NITER+1
      IF(NITER.LE.NITMAX.OR.IPREC.EQ.0) GO TO 270
      WRITE(6,15) L
15  FORMAT(/,1X," NAO CONVERGIU ATE O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES",
*      L = ",I3)
      GO TO 290
270 IF(IPREC.EQ.0.) GO TO 290
      DC 280 I=1,N
      ALFA(I)=ALFA2(I)
280 CONTINUE
      GO TO 210
290 D1=0.
      IJOB=4
      CALL LINV3F(D,ALFA,IJOB,N,20,D1,D2,HK,IER)
      DET=D1*2.0**D2
      ALFAS0=ALFAS0/FLOAT(N)
      AUX=0.
      DC 550 I=1,N
      AUX=AUX+((ALFCO(I)-ALFEST)**2)-(ALFA2(I)-ALFAS0)**2)/(2*SIGMA2)
      AUX=AUX+Y(I)*(ALFA2(I)-ALFCO(I))
      AUX=AUX-M(I)*(EXP(ALFA2(I))-EXP(ALFCO(I)))
550 CONTINUE
      E=SQRT(DET/DETNEW)*EXP(ALFA2(L)+AUX)
      WRITE(6,19) NITER,L,E
19  FORMAT(" NUMERO DE ITERACOES = ",I3,4X,
*      E( " ,I2," ) = " ,F8.3)

```



```

5000 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE LAPODE(Y,M,N,NITMAX,PRECIS)
C*****
C***** SUBROTINA LAPODE (VARIANCIA DESCONHECIDA)*****
C*****
      REAL Y(20),WKAREA(500)
      INTEGER M(20)
      DIMENSION TETA(20),ALFA(20),ALFA2(20),C(20),CM(20,20),D(20,20),
      *ALFDES(20)
      READ(5,20) ANI,ALAMB0
20  FORMAT(1X,F5.3,1X,F2.0)
      WRITE(6,21)
21  FORMAT(/," ===== VARIANCIA DESCONHECIDA =====")
      IF(ANI.EQ.0) WRITE(6,23)
23  FORMAT(/," ***** CUIDADO NI IGUAL A ZERO *****",/)
      IF(ALAMB0.EQ.0) WRITE(6,24)
24  FORMAT(/," ***** CUIDADO LAMBDA IGUAL A ZERO *****",/)
      WRITE(6,22) ANI,ALAMB0
22  FORMAT(/," NI = ",F5.3,/, " LAMBDA = ",F2.0,/)
      READ(5,/) (ALFDES(I),I=1,N),DETNEH
      DO 703 I=1,N
      ALFEST=ALFDES(I)
703  CONTINUE
      ALFEST=ALFEST/FLOAT(N)
      WRITE(6,101) N,(ALFDES(I),I=1,N)
101  FORMAT(" ALFA INICIAL (NEWTON-RAPHSON)",/,"*(11X,F8.4,/,/,/
      *33X," TETA ESTIMADO")
      DO 6000 L=1,N
      NJTER=0
      ALFAS0=0.
      USOMA=0.
      DO 310 I=1,N
      ALFA(I)=ALFDES(I)
      ALFASJ=ALFAS0+ALFA(I)
310  CONTINUE
      AUX2=FLOAT(N)+ANI-1.
320  ALFASJ=ALFAS0/FLOAT(N)
      AUX=0.
      DO 300 I=1,N
      AUX=AUX+(ALFA(I)-ALFAS0)**2
300  CONTINUE
      VAR=(ANI*ALAMB0+AUX)/AUX2
      DO 330 I=1,N
      ATETA=EXP(ALFA(I))
      C(I)=0.
      IF(I.EQ.L) C(I)=1.
      C(I)=C(I)+Y(I)-FLOAT(M(I))*ATETA-(ALFA(I)-ALFAS0)/VAR
330  CONTINUE
      DO 340 I=1,N
      DO 350 J=I,N
      CM(J,J)=-2*(ALFA(I)-ALFAS0)*(ALFA(J)-ALFAS0)/(AUX2*VAR**2)
      CM(I,J)=CM(I,J)+(-FLOAT(N)*VAR)**(-1)
      CM(J,I)=CM(I,J)
      IF(I.NE.J) GO TO 350
      ALX=FLOAT(M(I))*EXP(ALFA(I))+VAR**(-1)
      CM(I,J)=CM(I,J)+AUX
350  CONTINUE
340  CONTINUE

```

```

IDGT=1
CALL LINV2F(CM,N,20,D,IDGT,WKAREA,IER)
ALFAS0=0.
IPREC=0
DC 360 J=1,N
PROD=0.
DC 370 J=1,N
PROD=PROD+D(I,J)*C(J)
370 CONTINUE
ALFA2(I)=ALFA(I)+PROD
ALFAS0=ALFAS0+ALFA2(I)
ALF=ALFA(I)
IF(ALF.EQ.0) ALF=0.001
AUX=ABS(ALFA2(I)-ALFA(I))/ALF
IF(AUX.GT.PRECIS) IPREC=1
360 CONTINUE
NITER=NITER+1
IF(NITER.LE.NITMAX.OR.IPREC.EQ.0) GO TO 390
WRITE(6,33)
33 FORMAT(/," NAO CONVERGIU ATE O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES")
GO TO 410
390 IF(IPREC.EQ.0) GO TO 410
DC 420 J=1,N
ALFA(I)=ALFA2(I)
420 CONTINUE
GO TO 320
410 ALX=0.
ALFAS0=ALFAS0/FLOAT(N)
DC 400 I=1,N
ALX=AUX+(ALFA2(I)-ALFAS0)**2
400 CONTINUE
VAR=(ANI*ALAMB0+AUX)/AUX2
D1=1.
IJOB=4
CALL LINV3F(D,ALFA,IJOB,N,20,D1,D2,WKAREA,IER)
DET=D1*2.0**D2
AUX=ANI*ALAMB0
AUX1=ANI*ALAMB0
AUX3=0.
DC 600 I=1,N
AUX=AUX+(ALFA2(I)-ALFAS0)**2
AUX1=AUX1+(ALFOES(I)-ALFEST)**2
ALX3=AUX3+Y(I)*(ALFA2(I)-ALFOES(I))
AUX3=AUX3-M(I)*(EXP(ALFA2(I))-EXP(ALFOES(I)))
600 CONTINUE
E=SQRT(DET/DETNEW)*EXP(ALFA2(L)-0.5*AUX2*ALOG(AUX/AUX1)+AUX3)
WRITE(6,777) NITER,L,E
777 FORMAT(" NUMERO DE ITERACOES = ",I3,4X,
* " E( ",I2," ) = ",F8.3)
6000 CONTINUE
RETURN
END
?RUN PCISSON
?DATA
C7 1. 30 0.001
40,32,36,29,39,42,30,
121,71,159,248,77,259,6,
2
1.1057,0.7992,1.4821,2.1414,0.6839,1.8159,-1.2906,
0.15665020E-13
0.100 2.
1.1060,0.7986,1.4829,2.1425,0.6829,1.8166,-1.3547,
0.19528320E-13,
?END JOB

```

***** DISTRIBUICAO DE POISSON-METODO DE LAPLACE *****

NUMERO DE GRUPOS (N) = 7
 VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) = 1.0000
 PRECISAO DESEJADA (PRECIS) = 0.001
 NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) = 30

TAMANHO DA AMOSTRA	Y
40	121
32	71
36	159
29	248
39	77
42	259
30	6

===== VARIANCIA CONHECIDA =====

ALFA INICIAL (NEWTON - RAPHSON)

1.1057
 0.7992
 1.4821
 2.1414
 0.6839
 1.8159
 -1.2906

		TETA ESTIMADO
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (1) = 3.023
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (2) = 2.225
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (3) = 4.404
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (4) = 8.515
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (5) = 1.982
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (6) = 6.149
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (7) = 0.277

===== VARIANCIA DESCONHECIDA =====

NI = 0.100
 LAMBDA = 2.

ALFA INICIAL (NEWTON-RAPHSON)

1.1060
 0.7986
 1.4829
 2.1425
 0.6829
 1.8166
 -1.3547

		TETA ESTIMADO
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (1) = 3.023
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (2) = 2.223
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (3) = 4.407
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (4) = 8.524
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (5) = 1.980
NUMERO DE ITERACOES =	2	EC (6) = 6.154
NUMERO DE ITERACOES =	3	EC (7) = 0.257

APÊNDICE 6 - Saída e listagem do programa que
calcula as estimativas de θ .
Modelo normal

```

?BEGIN JOB NORMAL
?CHARGE=NEWTON-RAPHSON
?COMPILE POISSON FORTRAN LIBRARY
?FORTRAN DATA
  $SET AUTOBIND
  $BIND=FROM B10/JMSL/2,B10/JMSL/3,B10/JMSL/4
  DOUBLE PRECISION DSEED
  DIMENSION M(20),Y(20),GALFA(20),GTETA(20),ALFA(20),S2(20),
  *ALFG(21),GYIJ(10),SIG(20),XB(20)
  READ(5,1) N,AMED,SIGMA2,NITMAX,PRECIS,DSEED
1  FORMAT(1X,I2,F3.0,F3.0,1X,I2,F5.2,F9.3)
  IF(SIGMA2.EQ.0) WRITE(6,7)
7  FORMAT(/," **** CUIDADO A VARIANCIA NAO PODE SER NULA ****",/)
  WRITE(6,4) N,AMED,SIGMA2,PRECIS,NITMAX,DSEED
4  FORMAT(" NUMERO DE GRUPOS (N) =",I2,/, " MEDIA DA NORMAL (AMED) =",
  *F8.4,/, " VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) =",F8.4,/,
  * " PRECISAO DESEJADA (PRECIS) =",F7.3,/,
  * " NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) =",I2,/, " SEMENTE=","E13.8)
  READ(5,2) N,(M(I),I=1,N),N,(SIG(I),I=1,N)
2  FORMAT(*(1X,I2),/,*(1X,F3.0))
  DO 17 I=1,N
  IF(SIG(I).LE.0) WRITE(6,18)
18 FORMAT(" **** PROBLEMAS COM AS VARIANCIAS DAS AMOSTRAS ****",/)
17 CONTINUE
  L=N+1
  CALL GGNML(DSEED,L,ALFG)
  DO 10 I=2,L
  GALFA(I-1)=ALFG(I)*SQRT(SIGMA2)+AMED
10 CONTINUE
  DO 50 I=1,N
  L=M(I)+1
  CALL GGNML(DSEED,L,GYIJ)
  AUX2=0.
  DO 55 K=2,L
  GYIJ(K)=GYIJ(K)*SQRT(SIG(I))+GALFA(I)
  Y(I)=Y(I)+GYIJ(K)
  AUX2=AUX2+GYIJ(K)**2
55 CONTINUE
  XB(I)=Y(I)/FLOAT(M(I))
  S2(I)=(AUX2-FLOAT(M(I))*XB(I)**2)
50 CONTINUE
  WRITE(6,3) N,(GALFA(I),SIG(I),M(I),Y(I),I=1,N)
3  FORMAT(/,1X," **** DISTRIBUICAO NORMAL ****",
  *//," ALFA GERADO          VARIANCIA          M          Y",/,
  *(3X,F7.3,13X,F3.0,9X,I2,7X,F9.3,/,/,)
  NITMAX=NITMAX-1
  READ(5,5) IOPCAO
5  FORMAT(1X,I1)
  IF(IOPCAO.EQ.0) CALL NORCONCY,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS,XB,SIG)
  IF(IOPCAO.EQ.1) CALL NORDESCY,M,N,NITMAX,PRECIS,XB,S2)
  IF(IOPCAO.NE.2) GO TO 70
  CALL NORCONCY,M,N,SIGMA2,NITMAX,PRECIS,XB,SIG)
  CALL NORDESCY,M,N,NITMAX,PRECIS,XB,S2)
70 STOP
  END

```


C*****
 C***** SUBROTINA NORCON (VARIANCIA CONHECIDA) *****
 C*****

```

      INTEGER M(20)
      REAL Y(20),XB(20),SIG(20)
      DIMENSION C(20),U(20),D(20,20),TETA(20)
      WRITE(6,11)
11  FORMAT(" VARIANCIA CONHECIDA")
      DO 200 I=1,N
        C(I)=SIGMA2/(SIGMA2+SIG(I)/FLOAT(M(I)))
        AUX=AXB+XB(I)/(SIGMA2+SIG(I)/FLOAT(M(I)))
        AUX1=AUX1+(SIGMA2+SIG(I)/FLOAT(M(I)))*(-1)
        U(I)=(FLOAT(M(I))/SIG(I)+SIGMA2*(-1))*(-1)
        USOMA=USOMA+U(I)
200  CONTINUE
      USOMA=USOMA/FLOAT(N)
      TETASO=AUX/AUX1
      DO 220 I=1,N
        TETA(I)=C(I)*XB(I)+(1-C(I))*TETASO
      DO 250 J=1,N
        D(I,J)=U(I)*U(J)/(FLOAT(N)*(SIGMA2-USOMA))
        D(J,I)=D(I,J)
      IF(I.EQ.J) D(I,J)=D(I,J)+U(I)
250  CONTINUE
220  CONTINUE
      WRITE(6,17) N,(TETA(I),I=1,N)
17  FORMAT(/,1X," TETA ESTIMADO",/,(2X,F8.3,/) ,/)
      WRITE(6,550)
550  FORMAT(/," ===== MATRIZ C INVERSA =====",//)
      DO 500 I=1,N
        WRITE(6,18) N,(D(I,J),J=1,N)
18  FORMAT(*,1X,E9.3,/)
500  CONTINUE
      RETURN
      END

```

SUBROUTINE NORDES(Y,M,N,NITMAX,FRECIS,XB,S2)

C*****
 C***** SUBROTINA NORDES (VARIANCIA DESCONHECIDA)*****
 C*****

```

      REAL Y(20),WKAPEA(400),XB(20),S2(20)
      INTEGER M(20)
      DIMENSION ALFA(20),ALFA2(20),C(20),CM(20,20),D(20,20),
      *VARJ(20),ALAMBDA(20),ANIJ(20)
      READ(5,20) ANI,ALAMBDA,N,(ANIJ(I),I=1,N),N,(ALAMBDA(I),I=1,N)
20  FORMAT(1X,F5.3,1X,F2.0,/,1X,(F5.3,1X),/,(1X,F2.0))
      WRITE(6,21)
21  FORMAT(/," METODO DE NEWTON-RAPHSON - VARIANCIA DESCONHECIDA")
      IF(ANI.EQ.0) WRITE(6,23)
23  FORMAT(/," ***** CUIDADO NI IGUAL A ZERO *****",//)
      IF(ALAMBDA.LQ.0) WRITE(6,24)
24  FORMAT(/," ***** CUIDADO LAMBDA IGUAL A ZERO *****",//)
      WRITE(6,22) ANI,ALAMBDA
22  FORMAT(/," NI = ",F5.3,/, " LAMBDA = ",F2.0,/)
      WRITE(6,301) N,(I,ANIJ(I),I,ALAMBDA(I),I=1,N)
C 301  FORMAT(*(" NI(",I2," )=",F5.3,3X," LAMBDA(",I2," )=",F5.3,/) )
      DO 310 I=1,N
        ALFA(I)=XB(I)
        ALFASO=ALFASO+ALFA(I)
310  CONTINUE
      AUX2=FLOAT(N)+ANI-1.
320  ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)

```

```

AUX=0.
AUX1=0.
DC 300 I=1,N
AUX=AUX+(ALFA(I)-ALFASO)**2
300 CONTINUE
VAR=(ANI*ALAMBDA+AUX)/AUX2
DC 315 I=1,N
AUX1=(XB(I)-ALFA(I))**2
VARJ(I)=ANIJ(I)*ALAMBDA(I)+S2(I)+FLOAT(M(I))*AUX1
VARJ(I)=VARJ(I)/(FLOAT(M(I))+ANIJ(I))
315 CONTINUE
DC 330 I=1,N
C(I)=(Y(I)-FLOAT(M(I))*ALFA(I))/VARJ(I)-(ALFA(I)-ALFASO)/VAR
330 CONTINUE
DC 340 I=1,N
DC 350 J=I,N
CM(I,J)=-2*(ALFA(I)-ALFASO)*(ALFA(J)-ALFASO)/(AUX2*VAR**2)
CM(I,J)=CM(I,J)+(-FLOAT(N)*VAR)**(-1)
CM(J,I)=CM(I,J)
IF(I.NE.J) GO TO 350
ALX=-2*(FLOAT(M(I))**2)*(XB(I)-ALFA(I))**2
AUX=AUX/(CM(I,I)+FLOAT(M(I))*VARJ(I)**2)
AUX=AUX+VAR**(-1)+FLOAT(M(I))/VARJ(I)
CM(I,I)=CM(I,I)+AUX
350 CONTINUE
340 CONTINUE
IDGT=1
CALL LINV2F(CM,N,20,D,IDGT,WKAREA,IER)
ALFASO=0.
IPREC=0
DC 360 I=1,N
PROD=0.
DC 370 J=1,N
PROD=PROD+D(I,J)*C(J)
370 CONTINUE
ALFA2(I)=ALFA(I)+PROD
ALFASO=ALFASO+ALFA2(I)
ALF=ALFA(I)
IF(ALF.EQ.0) ALF=0.001
AUX=ABS(ALFA2(I)-ALFA(I))/ALF
IF(AUX.GT.PRECIS) IPREC=1
360 CONTINUE
NITER=NITER+1
IF(NITER.LE.NITMAX.OR.IPREC.EQ.0) GO TO 390
WRITE(6,33)
33 FORMAT(/," NAO CONVERGIU ATE O NUMERO MAXIMO DE ITERACOES")
GO TO 410
390 IF(IPREC.EQ.0) GO TO 410
DC 420 I=1,N
ALFA(I)=ALFA2(I)
420 CONTINUE
GO TO 320
410 AUX=0.
AUX1=0.
ALFASO=ALFASO/FLOAT(N)
DC 400 I=1,N
AUX1=AUX1+(XB(I)-ALFA2(I))**2
AUX=AUX+(ALFA2(I)-ALFASO)**2
400 CONTINUE
DC 401 I=1,N

```


NUMERO DE GRUPOS (N) = 7
 MEDIA DA NORMAL (AMED) = 10.0000
 VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) = 4.0000
 PRECISAO DESEJADA (PRECIS) = 0.001
 NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (NITMAX) = 30
 SEMENTE = .29312600E+03

**** DISTRIBUICAO NORMAL ***

ALFA GERADO	VARIANCIA	M	Y
10.287	4.	25	266.965
13.243	5.	20	268.308
11.264	4.	22	254.381
10.685	3.	23	254.956
9.742	4.	30	298.684
4.908	6.	25	111.604
10.669	5.	21	224.547

VARIANCIA CONHECIDA

TETA ESTIMADO

10.663
 13.230
 11.507
 11.059
 9.966
 4.793
 10.669

===== MATRIZ C INVERSA =====

.155E+00	.135E-02	.100E-02	.727E-03	.743E-03	.130E-02	.129E-02
.135E-02	.237E+00	.153E-02	.111E-02	.114E-02	.199E-02	.198E-02
.100E-02	.153E-02	.175E+00	.822E-03	.840E-03	.147E-02	.146E-02
.727E-03	.111E-02	.822E-03	.127E+00	.610E-03	.107E-02	.106E-02
.743E-03	.114E-02	.840E-03	.610E-03	.130E+00	.109E-02	.108E-02
.130E-02	.199E-02	.147E-02	.107E-02	.109E-02	.228E+00	.190E-02
.129E-02	.198E-02	.146E-02	.106E-02	.108E-02	.190E-02	.227E+00

METODO DE NEWTON-RAPHSON - VARIANCIA DESCONHECIDA

NI = 0.100
LAMBDA = 2.

NUMERO DE ITERACOES = 2
VARIANCIA ITERADA= 7.228

TETA ESTIMADO	VARIANCIA ITERADA	DERIVADA (VETOR C)
10.671	3.347	-.237E-04
13.349	3.168	-.993E-03
11.532	3.911	-.153E-03
11.073	2.473	-.115E-03
9.961	3.364	.101E-03
4.635	5.481	.460E-02
10.677	5.735	.291E-04

MATRIZ C INVERSA DA ULTIMA ITERACAO

.130E+00	.566E-03	.526E-03	.303E-03	.276E-03	.153E-03	.724E-03
.566E-03	.156E+00	.121E-02	.586E-03	.232E-03	-.313E-02	.114E-02
.526E-03	.121E-02	.173E+00	.433E-03	.331E-03	-.939E-03	.106E-02
.303E-03	.586E-03	.483E-03	.105E+00	.212E-03	-.215E-03	.610E-03
.276E-03	.232E-03	.331E-03	.212E-03	.110E+00	.753E-03	.554E-03
.153E-03	-.313E-02	-.989E-03	-.215E-03	.753E-03	.225E+00	.294E-03
.724E-03	.114E-02	.106E-02	.610E-03	.554E-03	.294E-03	.263E+00

APÊNDICE 7 - Amostragem em dois estágios -
Populações e amostras simu-
ladas. Modelo binomial

***** DISTRIBUICAO BINOMIAL *****

NUMERO DE GRUPOS (N) = 10
 MEDIA DA NORMAL (AMED) = 0.0000
 VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) = 0.7000
 NUMERO DE AMOSTRAS = 5
 SEMENTE = .43546400E+02

POPULACAO	ALFA GERADO	TETA GERADO	TAMANHO DA POPULACAO	TOTAL POPULACIONAL
1	0.5077	0.624	200	138
2	-0.1096	0.473	300	149
3	0.4732	0.616	250	159
4	1.1898	0.767	400	312
5	-0.2616	0.435	400	174
6	1.9838	0.879	380	336
7	1.3239	0.790	270	214
8	0.5246	0.628	300	173
9	0.9015	0.711	200	147
10	-0.2164	0.446	350	162
TOTAL				1969

POPULACAO SORTEADA	TAMANHO DA AMOSTRA	TOTAL AMOSTRAL
1	40	26
4	52	41
5	60	17
7	55	36
10	54	26

APÊNDICE 8 - Amostragem em dois estágios -
Populações e amostras simu-
ladas. Modelo de Poisson

***** DISTRIBUICAO POISSON *****

NUMERO DE GRUPOS (N) = 20
 MEDIA DA NORMAL (AMED) = 1.0000
 VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) = 0.2000
 NUMERO DE AMOSTRAS = 5
 SEMENTE = .98787390E+05

POPULACAO	ALFA GERADO	LETA GERADO	TAMANHO DA POPULACAO	TOTAL POPULACIONAL
1	0.7324	2.080	200	424
2	0.5866	1.798	300	513
3	1.3151	3.725	250	954
4	0.5818	1.789	400	709
5	1.5968	4.937	600	2920
6	0.9090	2.482	380	960
7	1.4291	4.175	270	1156
8	1.1449	3.142	200	642
9	1.2715	3.566	200	688
10	1.2659	3.546	150	516
11	1.5584	4.751	100	476
12	0.6866	1.987	220	414
13	0.5445	1.724	300	515
14	0.6619	1.939	180	349
15	0.4430	1.557	160	254
16	0.9226	2.516	180	431
17	1.5217	4.580	430	1999
18	0.8602	2.364	200	452
19	1.3888	4.010	180	774
20	0.7039	2.022	200	436
TOTAL				15582

POPULACAO SORTEADA	TAMANHO DA AMOSTRA	TOTAL AMOSTRAL
2	25	41
5	32	142
6	30	76
15	35	57
17	44	222

APÊNDICE 9 - Amostragem em dois estágios -
Populações e amostras simu-
ladas. Modelo normal

***** DISTRIBUICAO NORMAL *****

NUMERO DE GRUPOS (N) = 20

MEDIA DA NORMAL (AMED) = 10.0000

VARIANCIA DA NORMAL (SIGMA2) = 4.0000

NUMERO DE AMOSTRAS = 7

SEMENTE = .1624200E+03

POPULACAO	ALFA GERADO	TAMANHO	DA POPULACAO	TOTAL	POPULACIONAL	VARIANCIA POPULACIONAL
1	9.30664	200		1857.8		1.000
2	12.8850	300		3848.6		1.200
3	9.8693	250		2474.9		1.400
4	11.3619	300		3451.4		1.600
5	11.5671	300		3470.0		1.800
6	11.2590	380		4283.3		2.000
7	8.6049	270		2327.6		2.200
8	9.8299	320		3183.2		2.400
9	12.4618	300		3808.4		2.600
10	7.1756	250		1786.4		2.800
11	11.5636	300		3500.2		3.000
12	5.9200	320		1907.6		3.200
13	9.9248	400		3998.4		3.400
14	9.5942	280		2646.2		3.600
15	9.7930	360		3582.4		3.800
16	11.9970	380		4534.0		4.000
17	9.2911	330		3051.0		1.500
18	11.0925	320		3536.9		2.000
19	13.5681	350		4738.1		3.000
20	10.6959	300		3184.6		4.000
TOTAL				65171.0		

POPULACAO	SORTEADA	TAMANHO DA AMOSTRA	TOTAL	AMOSTRAL
1		20	180.8	
2		26	337.3	
3		20	196.3	
5		25	303.8	
11		24	277.2	
13		21	188.7	
17		25	226.6	

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, D.F. & BOLFARINE, H. (1986) Estimation in covariance components models with unequal intraclass variances. *Pub. Inst. Statist. Univ. Paris*, 31(1):17-26.
- BOX, M.J.; DAVIES, D.; SWANN, W.H. eds. (1969) *Nonlinear optimization techniques*. Edinburgh, Oliver and Boyd. 60p.
- CASSEL, C.M.; SARNDAL, C.E.; WRETMAN, J.H. (1977) *Foundations of inference in survey sampling*. New York, John Wiley. 192p. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics).
- CORDEIRO, G.M. (1986) *Modelos lineares generalizados*. Campinas, IMECC-UNICAMP. 286p.
- DE BRUIJN, N.G. (1958) *Asymptotic methods in analysis*. Amsterdam, North-Holland. 200p. (Bibliotheca Mathematica, 4).
- DE FINETTI, B. (1964) Foresight: its logical laws, its subjective sources. In: KYBURG JR., H.E. & SMOKLER, H.E. eds. *Studies in subjective probability*. New York, Wiley. p.93-158.
- ELIAN, S.N. (1984) *Previsão linear em populações finitas*. São Paulo. 172p. Dissertação (Mestrado) - IME-USP.

- IMSL LIBRARY reference manual. (1979) Houston, IMSL.3v.
- LEONARD, T. (1972) Bayesian methods for binomial data.
Biometrika, 59(3):581-89.
- LEONARD, T. (1976) Some alternative approaches to
multiparameter estimation. *Biometrika*, 63(1):69-75.
- LINDLEY, D.V. (1965) *Introduction to probability and
statistics from a Bayesian viewpoint.* Cambridge,
University Press, v.2.
- LINDLEY, D.V. (1971) The estimation of many parameters.
In: GODAMBE, V.P. & SPROTT, D.A. eds. *Foundations of
statistical inference.* Toronto, Holt. p.435-55.
- LINDLEY, D.V. & SMITH, A.F.M. (1972) Bayes estimates for
the linear model: with discussion. *J. Royal Statist. Soc.
Ser. B*, 34(1):1-41.
- MALEC, D. & SEDRANSK, J. (1985) Bayesian inference for
finite population parameters in multistage cluster
sampling. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 80(392):897-902 .
- MCCULLAGH, P. & NELDER, J.A. (1983) *Generalized linear
models.* London, Chapman and Hall. 261p. (Monographs on
Statistics and Applied Probability).

RODRIGUES, J. & BOLFARINE, H. (1984) *Teoria da previsão em populações finitas*. Rio de Janeiro, UFRJ. 80p.

RODRIGUES, J.; BOLFARINE, H.; ROGATKO, A. (1985) A general theory of prediction in finite populations. *Internat. Statist. Rev.*, 53(3): 239-54.

SANDOVAL, M.C. (1987) *Teoria da previsão em populações com tendência*. São Paulo. 63p. Dissertação (Mestrado) - IME-USP.

SCOTT, A. & SMITH, T.M. (1969) Estimation in multi-stage surveys. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 64(327):830-40.

TIERNEY, L. & KADANE, J.B. (1986) Accurate approximations for posterior moments and marginal densities. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 81(393):82-6.

WEST, M. (1985) Generalized linear models: scale parameters, outlier accommodation and prior distributions. In: BERNARDO, J.M. et al. eds. *Bayesian statistics: Proceedings of the Second International Meeting, 2, Valencia, 1983*. Amsterdam, North-Holland. p.531-557.

ZELLNER, A. (1971) *An introduction to Bayesian inference in econometrics*. New York, John Wiley. 431p. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics).

ERRATA

Página	linha	onde se lê	leia-se
vii	15	K_i	k_i
viii	18	Discriminante	discriminante
viii	24	burry	berry
2	12	classificação	classificação errada
2	17	um elemento	elemento
3	3	desproporcionais	diferentes
4	4	é equivalente a	significa
5	8	As probabilidade	As probabilidades
5	10	$P_L = (H_1/H_2)$	$P_L(H_1/H_2)$
5	11	$P_L = (H_2/H_1)$	$P_L(H_2/H_1)$
6	15	as amostras	a amostra
7	1	$\bar{X}_1, \bar{X}_2$ e S , teremos	$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ e s , temos
8	10	$y_n \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$	$- y_n \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$
10	3	tos,	t_o ,
10	25	homocedasticidade	homoscedasticidade
11	12	S_p	s_p
13	22	estimadores de densidade	estimadores de funções de densidade
16	8	$\hat{P}_M$	$\hat{p}_M$
18	22	utilizadas	utilizados
20	6	Murphy	Murphy
21	22	$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$	$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
22	16	K_2	k_2
22	21	K_2	k_2
24	3	K_2	k_2
24	8	$1 \leq m \leq n+1$	$1 \leq m \leq n-1$
26	2	estatísticos	estatisticamente
36	3	$-x_1+x_2, -x_1, -x_2, x_1, x_2, \dots$	$-x_1+x_2, -x_1-x_2, x_1, x_2, \dots$
37	17	$P_B(1), \dots, P_B(n+1)$	$P_B(1), \dots, P_B(n+1)$
38	15	$P(P_L > \beta)$	.....

Página	linha	onde se lê	leia-se
41	17	Estimação de $f_i(\underline{x})$	Estimação de $f_i(\underline{x})$
42	1	$S_{\underline{x}}$	$S_{\underline{x}}$
42	3	$\frac{1}{V_{S_{\underline{x}}}}$	$\frac{1}{V_{S_{\underline{x}}}}$
42	18	N_i observações	N_i de observações
43	9	Classificamos	classificamos
44	11	discriminante em	discriminante dada em
45	2	$p = q$	$q = p$
46	1	L_1	L_1^q
46	15	Patrick Fischer	Patrick e Fischer
48	9	do volume	dos volumes
50	1	$\phi_8(\underline{x})$	$= \phi_8(\underline{x})$
52	2	$\phi_4(\underline{x}) = \phi_8(\underline{x})$	$\phi_4(\underline{x}) = \phi_{12}(\underline{x})$
56	21	Seja $f_i(\underline{x})$	Seja $\hat{f}_i(\underline{x})$
56	23	Se $f_i(\underline{x})$	Se $\hat{f}_i(\underline{x})$
57	26	$\hat{f}_i(\underline{x}) \dots f_i(\underline{x})$	$\hat{f}_i(\underline{x}) \dots f_i(\underline{x})$
58	20	torna-se	tornar-se
58	22	entra	entre
59	4	(Fischer)	(Fisher)
61	13	- métodos sem	- método sem
61	20	Método 1	Método 1
62	7	Fixemos	Fixamos
64	10	$[(1-\alpha_2)(n_2+1)]$	$n_2 = [(1-\alpha_2)(n_2+1)]$
66	18	$\underline{x}_0^1$	$\underline{x}_0^1$
70	19	$-a_1+1)$	$-a_1+1)$
71	2	$P(P_{\Lambda_1} \leq B) \leq \gamma$	$P(P_{\Lambda_1} \leq B) \geq \gamma$
76	8	$l < v$	v
76	17	combinadas	combinadas;

página	linha	onde se lê	leia-se
77	8	$p_1 \frac{N_1}{n_1} \cdot \frac{1}{u} + p_2 \frac{N_2}{n_2} \cdot \frac{1}{u}$	$p_1 \frac{N_1}{n_1} \cdot \frac{1}{v_S \frac{x}{z}} + p_2 \frac{N_2}{n_2} \cdot \frac{1}{v_S \frac{x}{z}}$
77	9	$p_1 \frac{N_1}{n_1} \cdot \frac{1}{u} + p_2 \frac{N_2}{n_2} \cdot \frac{1}{u}$	$p_1 \frac{N_1}{n_1} \cdot \frac{1}{v_S \frac{x}{z}} + p_2 \frac{N_2}{n_2} \cdot \frac{1}{v_S \frac{x}{z}}$
77	12	de u	de $v_S \frac{x}{z}$
79	12	(4.3.2)	(4.2.3)
81	6	$\underline{x} = (x_1, \dots, x_p)$	$\underline{x}' = (x_1, \dots, x_p)$
		e	
		$\underline{y} = (y_1, \dots, y_p)$	$\underline{y}' = (y_1, \dots, y_p)$
81	22	$\frac{p_2}{n_2}$	$\frac{p_2}{n_2}$
83	7	$\hat{f}_{j \underline{x}}(0)$	$\hat{f}_{j \underline{x}}(0)$
85	9	probabilidade exata	probabilidade total exata
85	13	probabilidade de	probabilidade total de
87	12	v vizinhos próximos	v vizinhos mais próximos
88	4	$1 \leq \frac{v}{2} + 1$	$\frac{v}{2} + 1$
92	5	$p_1(\Pi_1/\Pi_2) + p_2(\Pi_1/\Pi_2)$	$p_1 P(\Pi_2/\Pi_1) + p_2 P(\Pi_1/\Pi_2)$
93	2	o método .... baseado	os métodos .... baseados
93	9	Não apresentamos	Não apresentamos
96	4	Gesseman e Gesseman...	Gessaman e Gessaman...Gessa-
		... Gesse-	
96	5	e Gesseman	e Gessaman
98	12	QG..... 0,124	QG..... 0,442
100	8	$(2n)^{1/2}, (2n)^{1/2},$	$(2n)^{1/2}, 2(2n)^{1/2},$
102	21	visto	mencionado
105	3	e Gesseman	e Gessaman

Página	linha	onde se lê	leia-se
105	7	Método Amostral	Linear Amostral
107	12	para os métodos de	dos métodos não paramétricos de
107	13	analísados	analísados e do método quadrático amostral
148	15	measurements	measurements
148	28	27	<u>27</u>
149	20	Serie	Series
150	22	Annals Statistics	Annals of Statistics
151	7	12	<u>12</u>

Observação: O último parágrafo da página 18 e o texto da página 19 devem ser transferidos para a página 12 e colocados após a linha 22.