COMPARAÇÕES DE MÉDIAS PARA
DADOS NÃO BALANCEADOS

LUIZ CARLOS BAIDA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. WILTON DE OLIVEIRA BUSSAB

- São Paulo, outubro de 1981 -

À minha esposa Márcia,
meu filho Eduardo Augusto, meus
pais e irmãos

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho também é resultado do apoio moral e material recebido de muitas pessoas, às quais desejamos apresentar nossa gratidão, e na impossibilidade de nomeá-las todas, destacamos:

- Prof. Dr. Wilton de Oliveira Bussab, não só por ser nosso Orientador, mas também pela preocupação e honestidade mostrada durante o desempenho deste trabalho.*
- Docentes e colegas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.*
- Prof. Dr. Antonio Espada Filho, Chefe do Departamento de Análise Numérica e Estatística do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas de São José do Rio Preto, pela ajuda que nos prestou desde minha graduação.*
- Docentes e Funcionários dos Departamentos de Análise Numérica e Estatística e de Álgebra, Cálculo e Geometria.*
- Funcionários das Bibliotecas: "Carlos Benjamin de Lira" do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo e "Edoardo Querin" do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas de São José do Rio Preto - UNESP.*
- Srt.^a Dirce Buzato, pela inestimável colaboração ao datilografar este trabalho.*

Luiz Carlos Baida

Í N D I C E

CAP. 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1. O Problema	1
1.2. Considerações Gerais e Notações	2
1.3. Apresentação dos Capítulos	3
CAP. 2 - TESTES E EXTENSÕES DA LINHA SCHEFFÉ	11
2.1. Introdução	11
2.2. Considerações Gerais	12
2.3. Funções Lineares dos Parâmetros e Con- trastes	13
2.4. O Método S para analisar todos os Contras- tes possíveis	15
2.5. Exemplo (1)	18
2.6. A Extensão de Spjøtvoll (1972)	22
CAP. 3 - TESTES E EXTENSÕES DA LINHA TUKEY	31
3.1. Introdução	31
3.2. Distribuições de Amplitudes	33
3.3. O Método-T (de Tukey) de Comparações Múl- tiplas	35
3.4. As Extensões de Hochberg (1974)	49
3.5. O Método GT de Hochberg (1975)	57
3.6. A Extensão dada por Hochberg (1976)	70
3.7. A Extensão dada por Tamhane (1977)	75
CAP. 4 - COMPARAÇÕES DE MÉDIAS ATRAVÉS DOS TESTES DE AMPLITUDES MÚLTIPLAS E OUTRAS COMPARAÇÕES DE	

MÉDIAS DUAS A DUAS	81
4.1. Introdução	81
4.2. Comparações Duas a Duas num Conjunto Ordenado de Médias, com tamanhos amostrais iguais	82
4.3. Comparações Duas a Duas num Conjunto Ordenado de médias, com tamanhos amostrais desiguais	91
4.4. Comparações de Médias Duas a Duas por intervalos	108
CAP. 5 - COMPARAÇÕES ENTRE ALGUNS MÉTODOS E CONCLUSÕES	116
5.1. Introdução	116
5.2. Comparação dos Métodos: S (Scheffé) e a Extensão do Método-T (Tukey) para o caso de amostras independentes não balanceadas com a mesma variância	117
5.3. Uma simples comparação entre os Métodos GT-1 e GT-2	123
5.4. Comparação dos Métodos GT-2 e o Ext T para os casos de amostras independentes não balanceados de mesmas variâncias ..	125
5.5. Comparação dos Métodos de Banerjee e Welch (soluções aproximadas para o problema de Behrens-Fischer)	133
5.6. Conclusões	136
APÊNDICE I - FUNÇÃO GERADORA DE CUMULANTES	147
I.1. Considerações Gerais	147
I.2. Função Geradora de Cumulantes	148
I.3. Relações entre Momentos e Cumulantes	149
APÊNDICE II - DISTRIBUIÇÕES DE AMPLITUDES	154
II.1. Introdução	154
II.2. Considerações Gerais para a Obten-	

das Distribuições	155
II.3. Distribuição da Amplitude Estud <u>en-</u> tizada	155
II.4. Distribuição do Módulo Máximo Estu <u>den-</u> dentizado	159
II.5. Distribuição da Amplitude Estud <u>en-</u> tizada Aumentada	161
APÊNDICE III - DEMONSTRAÇÕES DE ALGUNS TEOREMAS	164
APÊNDICE IV - TABELAS	175
- Tabelas da Amplitude Estud <u>en-</u> tizada Pre <u>pa-</u> rada por Duncan	176
- Tabelas da Amplitude Estud <u>en-</u> tizada ...	178
- Tabelas do Módulo Máximo Estud <u>en-</u> tizado	181
- Tabelas da Amplitude Estud <u>en-</u> tizada Au <u>men-</u> tada	185
- Tabelas da Amplitude "W" entre n variá <u>ve</u> is aleatórias identicamente distri <u>bu</u> ídas, com distribuição normal (μ, σ^2)	189
BIBLIOGRAFIA	195

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO GERAL

1.1. O Problema

Consideremos o seguinte: suponha que temos k populações normais cujas médias são desconhecidas, e através de um experimento queremos obter conclusões a respeito destas médias.

Naturalmente o experimento consiste na obtenção das k amostras dessas populações, onde n_i é o tamanho da i -ésima amostra cuja população tem distribuição normal com parâmetros $(\mu_i; \sigma_i^2)$, para $i=1,2,\dots,k$.

Suponhamos que após o experimento, e através de uma análise de variância ou um outro método qualquer, o experimentador possa concluir que essas médias sejam significativamente diferentes entre si. Nessas condições o experimentador estará interessado em detectar onde estão tais diferenças, por meio de métodos de Comparações Múltiplas entre essas médias.

Quando o experimento é dito "balanceado" (isto é: $n_1=n_2=\dots=n_k=n$ e $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\dots=\sigma_k^2=\sigma^2$) com amostras independentes, muitos métodos de Comparações Múltiplas existem já bem escritos e

formalizados, principalmente nos livros de Planejamentos de Experimentos. Quando isso não ocorre, dizemos que o experimento é "não balanceado", ou que existe o não balanceamento, então percebemos nestes casos a falta de métodos que nos permitam essas comparações, e aí começa o nosso trabalho o qual intitulamos "*Comparações de Médias para Dados não Balanceados*".

As poucas técnicas existentes para Comparações Múltiplas nesses casos, foram recentemente introduzidas por vários autores e encontram-se espalhadas em artigos de várias revistas com linguagem e notações diferentes.

Esse é mais um trabalho de apresentação dessas técnicas e tem como objetivo principal agrupá-las numa linguagem única, compará-las à medida do possível classificando-as de acordo com o caso de "não balanceamento" do experimento, e fazer algumas aplicações a problemas práticos.

1.2. Considerações Gerais e Notações

Por todo o trabalho consideraremos o seguinte:

Seja k o número de amostras obtidas de k populações normais com parâmetros $(\mu_i; \sigma_i^2)$ e n_i o tamanho da i -ésima amostra para $i=1,2,\dots,k$ com y_{ij} sendo a j -ésima observação da i -ésima amostra ($j=1,2,\dots,n_i$).

Seja $\underline{\mu}' = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ o vetor de parâmetros e $\hat{\underline{\mu}}' = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_k)$ o seu correspondente vetor de parâmetros estimados, tal que $\hat{\underline{\mu}} \sim N(\underline{\mu}; \Sigma)$, onde Σ é a matriz de variâncias e covariâncias de $\hat{\underline{\mu}}$.

Considere $s_i^2 = \hat{\sigma}_i^2$ tal que $E(s_i^2) = \sigma_i^2$ e
 $(v_i s_i^2 / \sigma_i^2) \sim \chi^2_{(v_i)}$ para $i=1, 2, \dots, k$.

Os modelos lineares aqui considerados são do tipo
 $y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$ com um fator fixo.

A matriz Σ sofrerá modificações de acordo com o planejamento amostral, o que nos definirá os possíveis métodos que poderão serem utilizados no experimento em questão.

As comparações a serem tratadas aqui são funções lineares dos parâmetros " μ ", muitas vezes essas funções são simplesmente contrastes ou comparações duas a duas desses parâmetros, e estão bem definidas com suas devidas notações e principais propriedades no capítulo 2.

1.3. Apresentação dos Capítulos

1.3.1. Capítulo 2

O Capítulo 2 com o nome "TESTES E EXTENSÕES DA LINHA SCHEFFÉ" por se tratar do teste de Scheffé e suas Extensões para os casos de Comparações Múltiplas de Médias por meio de intervalos de confiança com um dado coeficiente de confiança. O Teste (ou Método) de Scheffé foi introduzido pelo autor em 1953 para analisar todos os contrastes, recebe também o nome de Método "S", gerando os intervalos de confiança que muitas vezes os chamamos de "Intervalos de Scheffé".

O Método S assim como suas extensões utilizam a tabela da Função de Distribuição Acumulada (F.D.A.) da variável

aleatória F (central).

Na parte inicial do capítulo introduzimos os conceitos e algumas propriedades necessárias de: Funções Estimáveis, Contrastes e Funções Lineares dos Parâmetros. A seguir, na secção 2.4., damos o Método S para julgar todos os contrastes quando as amostras são não balanceadas onde as populações não necessariamente precisam ser independentes, mas com a mesma variância (teorema 2.1.).

Esse método é estendido por Scheffé (1959) para todas as funções lineares dos parâmetros quando as amostras são colhidas independentemente.

A seguir, introduzimos um método nessa mesma linha dado por Spjøtvoll (1972), o qual não obriga que as populações tenham variâncias iguais, mas que sejam independentes entre si (teorema 2.2. - secção 2.6.). Para que a aplicação deste método seja completa damos na secção 2.6.3. um método o qual permite testar a igualdade das médias no caso das variâncias serem totalmente diferentes entre si, este método é devido a Brow e Forsythe (1974). Finalizando o capítulo, damos em 2.6.4. um exemplo completo de aplicação deste método.

1.3.2. Capítulo 3

O capítulo 3 com o nome "TESTES E EXTENSÕES DA LINHA TUKEY" por se tratar do teste de Tukey e suas extensões para casos de Comparações Múltiplas por meio de intervalos de confiança.

O Método T de Tukey assim como suas extensões utilizam-se, na sua maioria, das Distribuições de Amplitudes, as sim chamadas pelo fato delas medirem a amplitude entre várias variáveis aleatórias, que em geral são variáveis aleatórias t-Student.

Essas distribuições encontram-se bem definidas na parte inicial deste capítulo e são chamadas por:

Amplitude Estudentizada (Q);

Módulo Máximo Estudentizado (M);

Amplitude Estudentizada Aumentada (Q')

Para um estudo mais completo dessas distribuições, veja o apêndice II e suas tabelas no apêndice IV.

A seguir introduzimos o método T (de Tukey) de Comparações Múltiplas. Este método faz mais imposições que o método de Scheffé, exigindo que as amostras sejam balanceadas de populações independentes com mesma variância (veja secção 3.3). Primeiramente a validade do método é mostrada para todas as comparações duas a duas (lema 3.2.) e a seguir para todos os contrastes (teorema 3.1.) e todas funções lineares (teorema 3.2.).

Continuando o próprio autor (Tukey) dá uma extensão de seu método para o caso em que as amostras são não independentes tal que $\text{var}(\hat{\mu}_i) = a^2 \sigma^2$ e $\text{cov}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) = b \sigma^2$ para $i \neq j = 1, 2, \dots, k$ (corolário 3.2. e 3.3.).

Como o método de Tukey produz intervalos, em geral, de amplitudes menores do que os intervalos de Scheffé, muitos

autores propuseram extensões nesta linha para os diversos casos de heteroscedasticidade.

O primeiro deles relacionados aqui foi apresentado por Spjøtvoll e Stoline (1973) para amostras não balanceadas, mas independentes com mesma variância. Neste caso a matriz Σ é uma matriz diagonal dada por $D(\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_k})\sigma^2$, veja (secção 3.3.4. - teorema 3.3.).

Na secção 3.4. damos os métodos devido a Hochberg (1974) para amostras correlacionadas não necessariamente de mesmo tamanho, tal que $\Sigma = \sigma^2 B$, onde a matriz $B_{k \times k}$ é supostamente conhecida. Esses métodos, chamados de GT-1 e GT-2 são aplicáveis à comparações do tipo contrastes, são dados aqui pelos teorema 3.4. e 3.5., respectivamente, e comparados no capítulo 5, onde podemos notar a preferência do GT-2 sobre o GT-1.

Na secção 3.5. damos o método GT introduzido por Hochberg (1975) para modelos de postos completos e incompletos em experimentos não balanceados de efeitos fixos, a partir das equações normais $X'X\mu = X'Y$, onde X é a matriz de planejamento, veja teoremas 3.6., 3.7. e 3.8.

Nas secções 3.6. e 3.7. damos as extensões devido a Hochberg (1976) e a Tamhane (1977) respectivamente, para os casos onde as amostras são colhidas independentemente, cujas variâncias possam ser totalmente diferentes entre si. Podemos adiantar que o método de Hochberg (1976) embora seja aplicável para todas as funções lineares dos parâmetros e produza inter

valos exatos; enquanto o método de Tamhane (1977) é aplicável somente para as comparações duas a duas e contrastes produzindo intervalos conservativos, ele é menos preferido, pelas dificuldades que encontramos nas suas aplicações (veja teoremas 3.9. e 3.10., corolário 3.5. e exemplo 3.4.).

1.3.3. Capítulo 4

O capítulo 4 com o nome "COMPARAÇÕES DE MÉDIAS ATRAVÉS DOS TESTES DE AMPLITUDES MÚLTIPLAS E OUTRAS COMPARAÇÕES", trata principalmente dos Testes de Amplitudes Múltiplas introduzidos por Newman (1939) e depois por Keuls (1950) originando o chamado teste de Newman-Keuls. Esses testes são diferentes daqueles discutidos até agora, e são aplicáveis após ordenarmos (ordem crescente) as k médias estimadas (isto é $\hat{\mu}_1 < \hat{\mu}_2 < \dots < \hat{\mu}_k$), obtendo como resultados os subconjuntos dessas médias os quais são considerados estatisticamente homogêneos.

O teste de Newman-Keuls (secção 4.2.1.) assim como o teste de "Duncan para Amostras Balanceadas" (1955 - secção 4.2.2.) são aplicáveis aos mesmos casos, quando as amostras são balanceadas e obtidas de populações independentes com mesma variância. A diferença entre eles é que o teste de Duncan não mantém o mesmo nível de significância para todas as comparações, enquanto o teste de Newman-Keuls o mantém para todas as comparações.

Kramer (1956) introduz um método o qual pode ser considerado como uma extensão do método de Duncan (1955) e

não obriga que as amostras sejam balanceadas, mas sim independentes e que as variâncias sejam iguais entre si (veja secção 4.3.1.).

Na secção 4.3.2. apresentamos o método de Duncan (1957) um pouco mais geral do que o de Kramer (1956), onde ele acrescenta a possibilidade das amostras serem correlacionadas entre si, tais que:

$\text{var}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) = k_{ij}\sigma^2$, com k_{ij} supostamente conhecido para $i \neq j = 1, 2, \dots, k$.

Nestes testes, quando temos um grande número de médias para serem comparadas, pelos métodos até agora relacionados, teremos um trabalho um tanto exaustivo. Por isso na secção 4.3.3. damos uma técnica para que possamos fazer essas comparações por caminhos mais curtos.

Na secção 4.4.1. tratamos das soluções aproximadas de Welch (1938) e de Banerjee (1961) para o conhecido problema de Behrens-Fisher, o qual trata-se de comparar duas médias de duas populações normais cujas amostras são colhidas independentemente, por meio de intervalos de confiança (veja teoremas 4.1. e 4.2.).

A seguir, na secção 4.4.2. tratamos de comparações de médias duas a duas quando uma delas é uma média controle, com base nos métodos de Banerjee e de Welch, para os casos em que as variâncias são desconhecidas, desiguais e independentes (veja teoremas 4.3. e 4.4.). Aplicações desses métodos são dadas na secção 4.4.3.

1.3.4. Capítulo 5

No capítulo 5, cujo nome é "COMPARAÇÕES ENTRE ALGUNS MÉTODOS E CONCLUSÕES", tratamos de fazer algumas comparações entre os métodos mais importantes e, finalmente damos as conclusões com a finalidade de uma possível orientação quanto as técnicas tratadas aqui.

As comparações são as seguintes: Método "S" com "Ext T" (Spjøtvoll e Stoline - 1973) - secção 5.2.; GT-1 com GT-2 - secção 5.3., GT-2 com "Ext T" - secção 5.4.; Banerjee com Welch - secção 5.5.

Por fim apresentamos na secção 5.5. as conclusões, de acordo com os possíveis casos de não balanceamento, assim como os métodos pertinentes a estes casos.

1.3.5. Apêndices

Temos 4 apêndices, onde o Apêndice I trata de uma rápida idêia sobre as Funções Geradoras de Cumulantes, as quais são aplicáveis nas demonstrações do teorema 2.2.

O Apêndice II, como já dissemos, trata-se das principais distribuições utilizadas nos métodos dos capítulos 3 e 4, que são as Distribuições de Amplitudes Q , M e Q' . Damos também algumas de suas propriedades assim como algumas relações entre elas.

O Apêndice III, contém demonstrações de alguns teoremas considerados não muito simples. Quanto ao apêndice IV,

chamamos a atenção pela sua importância ao completar este trabalho, pois o mesmo contém as tabelas necessárias nas aplicações dos métodos aqui apresentados.

CAPÍTULO 2

TESTES E EXTENSÕES DA LINHA SCHEFFÉ

2.1. Introdução

Neste capítulo trataremos dos testes cujos métodos de comparações seguem a linha S de Scheffé; assim chamadas por utilizarem-se dos intervalos de Scheffé ou suas extensões.

As distribuições aqui utilizadas são as $F(m,n)$ e χ^2_v , onde (m,n) e v representam respectivamente os seus graus de liberdades, e seus valores tabelados são facilmente encontrados.

Para que o leitor tenha uma idéia dos tipos de funções que envolverão nossas comparações, damos na secção 2.3. seus conceitos e lembramos algumas de suas propriedades principais.

Na secção 2.4. damos o método S para todos os contrastes quando as amostras possuem tamanhos desiguais e as populações correlacionadas com mesma variância, e sua demonstração é dada no apêndice III.

Após exemplificarmos esse método na secção 2.5., passamos à secção 2.6. onde apresentamos, nessa linha a Exten

são devido a Spøtvoll (1972), para todas funções lineares dos parâmetros e amostras de populações independentes cujas variâncias possam ser totalmente diferentes entre si.

Esse método torna-se mais preciso à medida que os tamanhos amostrais crescem, e tem o inconveniente de não ser aplicável para experimentos que possua amostras de tamanho menor do que seis elementos. Ainda em 2.6.3. introduzimos um teste preliminar para detectarmos se as médias possam ou não serem consideradas significantemente diferentes, para experimentos desse tipo, pois não podemos usar o conhecido "teste para igualdade das médias" em análise de variância.

Finalmente a ilustração é dada na secção 2.6.4.

2.2. Considerações Gerais

Suponha que temos amostras retiradas de k populações onde cada população tem distribuição normal com parâmetros (μ_i, σ^2) para $i=1, 2, \dots, k$.

Nosso objetivo é testar hipóteses referentes às médias $\{\mu_i\}$ para $i=1, 2, \dots, k$, com uma dada confiabilidade.

Sejam $n_1, n_2, \dots, n_k$ os tamanhos das amostras e y_{ij} a j -ésima observação do i -ésimo grupo amostral e Y_{ij} a sua correspondente variável aleatória onde $Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ para $i=1, 2, \dots, k$ e $j=1, 2, \dots, n_i$.

Seja $\hat{\mu}_i$ o estimador não viesado de μ_i , dado por
$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \text{ para } i=1, 2, \dots, k, \text{ seja } \underline{\mu}' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \text{ e}$$

$\hat{\underline{\mu}}' = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_k)$ com $\hat{\underline{\mu}} \sim N_k(\underline{\mu}; \Sigma)$, onde Σ é a matriz de covariâncias de $\hat{\underline{\mu}}$.

Algumas vezes, por questão de simplicidade, usaremos $\bar{y}_i$ em vez de $\hat{\mu}_i$.

2.3. Funções Lineares dos Parâmetros, Funções Estimáveis e Contrastes.

2.3.1. Funções Lineares dos Parâmetros e Contrastes.

Definição 1

Seja $\underline{\mu}' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ o vetor de parâmetros e $\underline{c}' = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ um vetor de constantes conhecidas. Então uma função linear dos parâmetros desconhecidos é definida por:

$$\Psi^* = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i = \underline{c}' \underline{\mu}$$

Definição 2

Um contraste será para nós uma função linear dos parâmetros sujeito a restrição $\sum_{i=1}^k c_i = 0$, e será denotado por $\Psi = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i = \underline{c}' \underline{\mu}$ (onde $\sum_{i=1}^k c_i = 0$).

Podemos estar interessados no estimador de Ψ^* o qual é dado por:

$$\hat{\Psi}^* = \underline{c}' \hat{\underline{\mu}} \quad \text{e} \quad \hat{\Psi}^* \sim N_k(\underline{c}' \underline{\mu}; \underline{c}' \Sigma \underline{c}) \quad (2.1)$$

Se $\text{cov}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_{i'}) = 0$ e $\text{var}(\hat{\mu}_i) = \frac{\sigma^2}{n_i}$ para $i, i' = 1, 2, \dots, k$ e $i \neq i'$, então a matriz Σ será dada por:

$$\Sigma = \sigma^2 D\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_k}\right) \text{ onde } D\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_k}\right) \quad (2.2)$$

é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal são

$$\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_k}.$$

$$\text{Neste caso } \hat{\Psi}^* \sim N_k(\underline{c}'\underline{\mu}; \sigma^2 \underline{c}'D\left(\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_k}\right)\underline{c}) \quad \text{e} \quad (2.3)$$

cada $\hat{\mu}_i \sim N(\mu_i; \frac{1}{n_i}\sigma^2)$ independentes para $i=1, 2, \dots, n_k$.

2.3.2. Funções Estimáveis

Definição 3

Seja $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ uma função linear dos parâmetros, diremos que Ψ^* é uma função estimável se existe um vetor de coeficientes constantes $\underline{a}$ tal que:

$$E(\underline{a}'\underline{Y}) = \Psi^*$$

onde $\underline{Y}$ é o vetor de observações sendo que $\underline{Y}_{N \times 1} = \underline{X}_{N \times k} \underline{\mu}_{k \times 1} + \underline{e}_{N \times 1}$ representa o modelo linear com $N = \sum_{i=1}^k n_i$, $\underline{X}$ é a matriz de planejamento, e $\underline{e} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 \underline{I})$ é o vetor de erros.

Desde que $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ é estimável se $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu} = E(\underline{a}'\underline{Y}) = \underline{a}'\underline{X}\underline{\mu}$ para algum $\underline{a}$, então temos que:

$$\underline{c}' = \underline{a}'\underline{X} \quad (2.4)$$

Isto nos diz que $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ é estimável se e somente se $\underline{c}' = \underline{a}'\underline{X}$ para algum $\underline{a}$.

Esta definição pode ser estendida para

$$\underline{\Psi}^{*'} = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \dots, \Psi_p^*), \text{ isto é:}$$

$$\tilde{\Psi}^* = \begin{pmatrix} \Psi_1^* \\ \Psi_2^* \\ \vdots \\ \Psi_p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{c}_1' \\ \underline{c}_2' \\ \vdots \\ \underline{c}_p' \end{pmatrix} \quad \underline{\mu} = C'_{p \times k} \underline{\mu} \quad \text{é estimável se exis}$$

te A tal que $E(A'\tilde{Y}) = C'\underline{\mu}$ onde teremos que $A'X = C'$. (2.5)

Propriedades das Funções Estimáveis

(1) Toda combinação linear de funções estimáveis é estimável. (2.6)

(2) Se $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ é estimável, então $\Psi^0 = \underline{c}'\underline{\mu}^0$ é estimador não viesado de Ψ^* , quando $\underline{\mu}^0$ é uma solução qualquer (2.7) de $\underline{\mu}$ nas equações normais $X'X\hat{\underline{\mu}} = X'Y$.

(3) Se $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ é estimável o valor $\underline{c}'\underline{\mu}^0$ é invariante (2.8) qualquer que seja a solução $\underline{\mu}^0$ de $X'X\hat{\underline{\mu}} = X'Y$

Para maiores esclarecimentos sobre funções estimáveis, veja Searle (1971).

2.4. O Método S para analisar todos os contrastes possíveis

Vamos admitir válidas as considerações gerais dadas na secção 2.2. e também a validade de (2.1) para um contraste Ψ , onde a matriz Σ satisfaz a:

$\text{cov}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_{i'}) = a_{ii'}\sigma^2$ onde $a_{ii'}$ são constantes conhecidas para $i, i'=1,2,\dots,k$ e $a_{ii} = \frac{1}{n_i}$, isto é: $\text{var}(\hat{\mu}_i) = \frac{\sigma^2}{n_i}$.

Seja $\hat{\sigma}^2 = s^2$ um estimador não viesado de σ^2 com v graus de liberdade, isto é:

$$\frac{v s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(v)} \text{ e independente de } \hat{\underline{\mu}}. \quad (2.9)$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= \underline{c}' \hat{\underline{\mu}} = \sum_{i=1}^k c_i \hat{\mu}_i \quad \text{e} \\ \text{var}(\hat{\Psi}) &= \underline{c}' \Sigma \underline{c} = \sum_{i=1}^k \sum_{i'=1}^k a_{ii'} c_i c_{i'} \sigma^2, \text{ logo} \\ \widehat{\text{var}}(\hat{\Psi}) &= \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}}^2 = \hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^k \sum_{i'=1}^k a_{ii'} c_i c_{i'} = \quad (2.10) \\ &= s^2 \sum_{i=1}^k \sum_{i'=1}^k a_{ii'} c_i c_{i'} \end{aligned}$$

Com as suposições acima temos o:

Teorema (2.1)

É de $1-\alpha$ a probabilidade que todos os contrastes $\Psi = \underline{c}' \underline{\mu}$ satisfaçam simultaneamente a condição:

$$\hat{\Psi} - S \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}} \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + S \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}}$$

onde: $S^2 = (k-1) F_{\alpha}(k-1; v)$, $S = \sqrt{S^2}$, $0 < \alpha < 1$ e

$$\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}}^2 = s^2 \sum_{i=1}^k \sum_{i'=1}^k a_{ii'} c_i c_{i'}$$

(veja esta demonstração no Apêndice III)

Após encontrarmos o intervalo de confiança dado pelo teorema (2.1), estaremos diante de uma das três possibilidades:

- (i) Ψ não é significantemente diferente de zero, se o zero estiver no intervalo.

- (ii) Ψ é significativamente diferente de zero e é negativo ,
se os extremos do intervalo forem negativos.
- (iii) Ψ é significativamente diferente de zero e é positivo,
se os extremos do intervalo forem positivos.

Essas possibilidades são equivalentes à:

- (i) ocorrerá se $-S\hat{\sigma}_{\Psi} < \hat{\Psi} < S\hat{\sigma}_{\Psi}$
- (ii) ocorrerá se $\hat{\Psi} \leq -S\hat{\sigma}_{\Psi}$
- (iii) ocorrerá se $\hat{\Psi} \geq S\hat{\sigma}_{\Psi}$

Em muitos casos as amostras são colhidas independentemente e são balanceadas, então $\Sigma = \frac{\sigma^2}{n} I$, onde I é a matriz identidade.

$$\begin{aligned} \text{Desta forma temos que } \text{var}(\hat{\Psi}) &= \frac{\sigma^2}{n} \underline{c}' I \underline{c} = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \underline{c}' \underline{c} = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^k c_i^2 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}}^2 = \frac{s^2}{n} \sum_{i=1}^k c_i^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Neste caso, e também quando Σ for dada por (2.2) teremos, em geral, que a constante S é dada por:

$$S = \left[(k-1) F_{\alpha}(k-1, N-k) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad a_{ii'} \equiv 0 \quad \text{para todo } i \neq i'$$

$(i, i' = 1, 2, \dots, k)$ e $N = \sum_{i=1}^k n_i$.

Os valores $k-1$ e v de S^2 , os quais correspondem aos graus de liberdade da distribuição F , são obtidos da seguinte forma:

$k-1$: corresponde à dimensão do espaço dos contrastes $\Psi = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i$ ($\sum_{i=1}^k c_i = 0$).

v : corresponde ao número de observações ($N = \sum_{i=1}^k n_i$) menos o posto da matriz de planejamento X ; quando o posto(X)= k então $v=N-k$.

Se o posto(X)= k dizemos que o modelo é de posto completo, mas se posto(X) = $r < k$, dizemos que o modelo é de posto incompleto e então $v = N-r$.

Mais tarde Scheffé (1959) amplia a validade desse método para o caso de *Funções Lineares Estimáveis*, mas quando as amostras são colhidas independentemente e com mesma variância.

Nesse método as funções lineares estimáveis pertencem a um espaço q -dimensional e posto (X) = r .

Então para todas as funções $\Psi^* \in L$, onde L é o espaço q -dimensional das funções lineares estimáveis, é de $1-\alpha$ a probabilidade de que todas as funções de L satisfaçam simultaneamente $\hat{a}$:

$$\hat{\Psi}^* - S\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*} \leq \Psi^* \leq \hat{\Psi}^* + S\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*} \quad \text{onde}$$

$$S^2 = qF_{\alpha}(q; N-r) \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}} \quad \text{é dado por (2.11)}$$

Para maiores esclarecimentos veja: Scheffé (1959).

2.5. Exemplo (1)

A tabela (2.1) abaixo nos dá os pesos totais, pesos médios, número de leitões e o erro padrão das 8 ninhadas

de porcos da raça Poland China, cujos pais são diferentes para as ninhadas 1,3,4 e 2,5,6,7,8.

TABELA (2.1)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	TOTAIS
n_i	10	8	10	8	6	4	6	4	46
Σ	28,4	21,3	31,8	23,8	14,2	11,6	11,9	9,4	149,4
$\hat{\mu}_i$	2,84	2,662	3,18	2,975	2,366	2,9	1,983	2,35	21,256
$\sqrt{s_i^2}$	0,953	0,705	0,274	0,320	0,382	0,282	0,627	0,625	4,168

Queremos construir uma tabela de análise de variância, detectar se existe alguma diferença significativa ao nível de 0,01 entre as ninhadas 1,3,4 e 2,5,6,7,8 que vieram de pais diferentes.

A finalidade da análise de variância é detectarmos se os pesos médios de ninhada são significantemente diferentes ao nível 0,01. Para isso devemos saber se as variâncias populacionais são as mesmas e como o experimento não diz nada sobre isso, devemos produzir um teste para a homogeneidade das variâncias.

O teste utilizado aqui para isso será o Teste de Bartlett, onde a estatística $\frac{B}{C}$ é aproximada a uma $\chi^2_{(k-1)}$ com

$$B = - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log_e \frac{s_i^2}{s^2} \quad \text{com} \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \quad e$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \right)$$

Pelos cálculos temos: $\frac{B}{C} = 17,991$ e como

$\chi^2_{7;0,01} = 18,475$, então podemos aceitar a homogeneidade das variâncias e produzimos o Teste F para a igualdade das médias (pesos médios).

a) construção da Tabela de Análise de Variância.

Tabela (2.2)-Análise de Variância do Exemplo (1)

F.V.	S.Q.	g.l.	Q.M.	E.Q.M.
ENTRE GRUPOS	$SQA = \sum_i n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = 7,501$	$k-1=7$	1,071	$\sigma^2 + (k-1)^{-1} \sum_i n_i (\mu_i - \bar{\mu})^2$
DENTRO DE GRUPOS	$SQE = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = 17,154$	$N-k=48$	0,3573	σ^2
TOTAL	$SQT = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y})^2 = 24,655$	$N-1=55$		

$$\therefore F_0 = \frac{SQA/k-1}{SQE/N-k} = \frac{1,071}{0,357} = 3,00 \text{ e como } F_{0,1;7;48} = 1,85$$

então rejeitamos a hipótese $H \equiv \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_8$ para $\alpha \geq 0,01$ e portanto podemos produzir agora o teste para o contraste que nos interessa.

b) Queremos detectar se existe diferença entre os pesos médios das ninhadas de pais diferentes 1,3,4 e 2,5,6,7,8.

Consideremos então $c' = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$,

assim temos:

$$\underline{c}'\underline{\mu} = \frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_4) - \frac{1}{5}(\mu_2 + \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 + \mu_8)$$

Nossa Hipótese será:

$$H: \underline{c}'\underline{\mu} \equiv 0 \quad \text{vs} \quad H_a: \underline{c}'\underline{\mu} \neq 0$$

Para obtermos o intervalo de confiança, fazemos:

$$\hat{\Psi} = \underline{c}'\hat{\underline{\mu}} = 0,546$$

$$s^2 = 0,357$$

$$\hat{\sigma}_{\Psi}^2 = s^2 \sum_{i=1}^8 c_i^2 = 0,190$$

$$S^2 = 7 \cdot F_{\alpha; 7, 48} = 12,95 \quad \text{se } \alpha = 0,1$$

$\therefore$ o I.C. para $\alpha = 0,1$ é $[-1,025; 2,216]$

Logo, ao nível $\alpha \leq 0,1$ aceitamos a hipótese H, isto quer dizer que os pesos médios dos 2 grupos de ninhadas não diferem significativamente, ou seja, pais diferentes não interferem nos pesos dos leitões.

c) Suponha que agora o experimentador esteja interessado em saber se os pesos médios das ninhadas com número maior de leitões diferem significativamente das ninhadas com número menor de leitões.

Podemos classificar as ninhadas em 2 grupos 1,2,3,4 e 5,6,7,8 pelas quantidades de leitões que os mesmos apresentam.

Utilizando o contraste $\underline{c}' = (1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)$ teremos

$$H: \underline{c}'\underline{\mu} \equiv 0 \quad \text{vs} \quad H_a: \underline{c}'\underline{\mu} \neq 0$$

$\hat{\Psi} = \hat{\underline{c}}' \hat{\underline{\mu}} = 2,058$ e $\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}}^2 = 2,856$, logo, para $\alpha = 0,1$ teremos o intervalo: $[2,058-6,081; 2,058+6,081]$

$\therefore$ aceitamos a hipótese H ao nível 0,1 ou menos, isto quer dizer que os pesos médios dos leitões das maiores ninhadas não são significativamente diferentes para ninhadas menores.

Os métodos dados acima exigiam que as variâncias fossem iguais em todas as populações e independentes entre si ou no máximo que suas covariâncias fossem proporcionais a σ^2 , isto é: $\text{cov}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) = a_{ij}\sigma^2$.

Agora apresentaremos a extensão dada por Spjøtvoll (1972), o qual não obriga que as variâncias populacionais sejam iguais e sim independentes. Segue também um teste para igualdade das médias quando as variâncias são diferentes entre si.

Esse teste se faz necessário para que possamos fazer nossas comparações, após concluirmos que as médias são significativamente diferentes entre si, e é devido a Brown-Forsythe (1974).

2.6. A Extensão de Spjøtvoll (1972)

2.6.1. Considerações Gerais

Supomos válidas as considerações dadas em 2.2 com as seguintes modificações: $Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para $i=1,2,\dots,k$ e

$j=1,2,\dots,n_i$ e que as populações sejam independentes entre si. Dessa forma para um contraste $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$ teremos que:

$$\sigma_{\hat{\Psi}}^2 = \text{var}(\hat{\Psi}) = \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{n_i} \sigma_i^2 \quad \text{e} \quad (2.12)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}}^2 = \hat{\text{var}}(\hat{\Psi}) = \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{n_i} s_i^2 \quad \text{onde} \quad (2.13)$$

$$\frac{v_i s_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2(v_i) \quad \text{para } i=1,2,\dots,k$$

Antes de introduzirmos o método de Spjøtvoll daremos o:

Lema 2.1.

Seja $c>0$ uma constante, então

$$\left| \sum_{i=1}^d a_i y_i \right| \leq c \cdot \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para todo } \underline{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_d) \text{ se e somente}$$

$$\text{se se } \sum_{i=1}^d y_i^2 \leq c^2.$$

Demonstração:

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\left| \sum_{i=1}^d a_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

($\Leftarrow$) Por hipótese $\sum_{i=1}^d y_i^2 \leq c^2$, logo $\left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c$ ($c>0$) então basta trocarmos por c o termo $\left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ na desigualdade de Cauchy-Schwarz.

($\Rightarrow$) Por hipótese $\left| \sum_{i=1}^d a_i y_i \right| \leq c \cdot \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, basta tomarmos

$a_i = y_i$ para $i=1, 2, \dots, d$ e teremos:

$$\left| \sum_{i=1}^d y_i^2 \right| \leq c \cdot \left(\sum_{i=1}^d y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{então} \quad \sum_{i=1}^d y_i^2 \leq c^2$$

2.6.2. O método de Spjøtvoll é dado pelo:

Teorema (2.2)

Com as suposições de 2.6.1., existe uma constante A , tal que $\tilde{e}$ de $1-\alpha$ a probabilidade de que todas as funções lineares $\Psi^* = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i = \tilde{c}' \tilde{\mu}$ satisfaçam $\tilde{a}$:

$$\hat{\Psi}^* - A \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*} \leq \Psi^* \leq \hat{\Psi}^* + A \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*}$$

onde A é o valor que satisfaz a $P(aF(k, b) \leq A^2) = 1-\alpha$ com a e b dados por:

$$b = \frac{(k-2) \left(\sum_{i=1}^k \frac{v_i}{v_i-2} \right)^2 + 4k \sum_{i=1}^k \frac{v_i^2 (v_i-1)}{(v_i-2)^2 (v_i-4)}}{k \sum_{i=1}^k \frac{v_i^2 (v_i-1)}{(v_i-2)^2 (v_i-4)} - \left(\sum_{i=1}^k \frac{v_i}{v_i-2} \right)^2} \quad (2.14)$$

$$a = \left(1 - \frac{2}{b} \right) \sum_{i=1}^k \left(\frac{v_i}{v_i-2} \right) \quad (2.15)$$

Demonstração:

Temos o evento $\hat{\Psi}^* - A \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*} \leq \Psi^* \leq \hat{\Psi}^* + A \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |\Psi^* - \hat{\Psi}^*| &\leq A \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*} \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^k c_i \bar{y}_i - \sum_{i=1}^k c_i \mu_i \right| \leq A \left(\sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{n_i} s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^k c_i (\bar{y}_i - \mu_i) \right| &\leq A \left(\sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{n_i} s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^k a_i \left(\frac{\sqrt{n_i}}{s_i} (\bar{y}_i - \mu_i) \right) \right| &\leq A \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{onde fazemos} \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$a_i^2 = \frac{c_i^2 s_i^2}{n_i} \quad \text{então} \quad c_i = \frac{\sqrt{n_i} a_i}{s_i}.$$

Pelo Lema (2.1) a desigualdade (2.16) é válida se e somente se: $\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{s_i} (\bar{y}_i - \mu_i)^2 \leq A^2$, logo, pela equi-

(2.17)

valência dos eventos, teremos:

$$\begin{aligned} P(\hat{\Psi}^* - A \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*} \leq \Psi^* \leq \hat{\Psi}^* + A \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}^*}) &= P\left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{s_i^2} (\bar{y}_i - \mu_i)^2 \leq A^2\right) = 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow P\left(\sum_{i=1}^k \frac{(\bar{y}_i - \mu_i)^2 / \frac{\sigma_i^2}{n_i}}{\frac{v_i s_i^2}{\sigma_i^2} / v_i} \leq A^2\right) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow P\left(\sum_{i=1}^k (F(1, v_i)) \leq A^2\right) &= 1 - \alpha \quad (2.18) \end{aligned}$$

onde $F(1, v_i)$ é a usual distribuição F com 1 e v_i graus de liberdade.

Para determinarmos o valor exato de A, que satisfaça a condição (2.18), precisamos da distribuição exata da so

ma $\sum_{i=1}^k (F(1, v_i))$ a qual não é nada simples, logo o autor propõe uma aproximação para a distribuição dessa soma e então teremos o valor A aproximado.

A Aproximação

Essa aproximação é feita de tal forma que $U = \sum_{i=1}^k (F(1, v_i))$ tenha uma distribuição proporcional a uma F , ou seja, aproximamos U pela distribuição de $a.F(k, b)$, onde a é uma constante dada por (2.15), que chamamos "constante de proporcionalidade", k e b são os graus de liberdade do numerador e denominador, respectivamente.

Para isso usou-se a técnica dos momentos, isto é, se os momentos de duas variáveis aleatórias são os mesmos então elas pertencem a mesma família de distribuições.

Spjøtvoll, utilizou as funções geradoras de cumulantes (veja apêndice I), e igualou os dois primeiros cumulantes das distribuições de U e $a.F(k, b)$, isto é:

Sejam k_1 , k_2 e k_1^* , k_2^* os primeiros cumulantes de U e $a.F(k, b)$ respectivamente, dados por:

$$k_1 = \sum_{i=1}^k \frac{v_i}{v_i - 2}, \quad k_2 = \sum_{i=1}^k \frac{2v_i^2(v_i - 1)}{(v_i - 2)^2(v_i - 4)} \quad e$$

$$k_1^* = \frac{ab}{b-2} \quad e \quad k_2^* = \frac{2a^2b^2(k+b-2)}{k(b-2)^2(b-4)}, \quad \text{faz-se } k_1 = k_1^* \quad e$$

$k_2 = k_2^*$ e obtemos as constantes a e b dadas por (2.14) e (2.15).

(para maiores esclarecimentos veja final do apêndice I).

Essa aproximação torna-se melhor à medida que v_i crescem, chegando à exatidão quando os $v_i \rightarrow \infty$. Para isso basta notar que quando $v_i \rightarrow \infty$ teremos $b = \infty$ e $a = k$ e $k_1 = k_1^* = k$ e $k_2 = k_2^* = 2k$.

Morrison (1971) comparou essas distribuições quando $v_1 = v_2$ e $k = 2$, chegando à conclusão que essa aproximação é excelente.

Esse método só é aplicável quando as amostras nos proporcionam $v_i > 4$ para $i=1,2,\dots,k$. Em geral $v_i = n_i - 1$, então nesses casos $n_i \geq 6$ para $i=1,2,\dots,k$.

2.6.3. O teste preliminar para a igualdade das médias quando as variâncias populacionais diferem entre si.

Brown-Forsythe (1974), descrevem um método aproximado para testar a hipótese $H: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ quando as variâncias populacionais não podem ser consideradas homogêneas.

Na ANOVA usual, para um fator, a soma de quadrados entre grupos é $\sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$ e seu valor esperado sob a hipótese $H: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ é $\sum_{i=1}^k (1 - \frac{n_i}{N}) \sigma_i^2$ onde $N = \sum_{i=1}^k n_i$. Portanto a hipótese H pode ser testada pela estatística:

$$F^* = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^k (1 - \frac{n_i}{N}) s_i^2} \quad (2.19)$$

Pela dificuldade de se obter a distribuição exata da Estatística F^* , os autores a aproximam para uma distribuição $F(k-1; f)$, onde $k-1$ e f são os graus de liberdade do numerador e denominador, respectivamente e f é dado por:

$$\frac{1}{f} = \sum_{i=1}^k \frac{d_i^2}{n_i - 1}, \quad \text{onde } d_i = \frac{(1 - \frac{n_i}{N}) s_i^2}{\sum_{i=1}^k (1 - \frac{n_i}{N}) s_i^2} \quad (2.20)$$

Para maiores detalhes, veja Brown-Forsythe (1974).

2.6.4. Exemplo (2)

Os dados são tirados do livro Statistical Theory and Methodology - Brownlee (1965) e referem-se à quantidade de octano nas amostras de gasolina de 4 regiões do Nordeste dos Estados Unidos, no verão de 1953.

Na tabela (2.3) nós temos as 4 regiões, o número de observações por região, a soma e a soma de quadrados.

Tabela (2.3)

Regiões	A	B	C	D
n_i	16	13	18	22
$\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$	62,0	37,0	58,0	66,2
$\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2$	258,06	107,98	215,86	232,24

a) teste para igualdade das variâncias

$$s_1^2 = 1,188; \quad s_2^2 = 0,223; \quad s_3^2 = 1,705 \quad s_4^2 = 1,573$$

$B = 12,3466$ e $C = 1,0268$, logo $\frac{B}{C} = 12,05$ deve ser comparado com um $\chi^2_{(3)}$; e aos níveis 0,05 e 0,01, nós rejeitamos a igualdade das variâncias para as gasolinas das 4 regiões.

b) teste para igualdade das médias

$$\sum_{i=1}^4 (1 - \frac{n_i}{N}) s_i^2 = 3,425$$

$$d_1 = 0,266; \quad d_2 = 0,05284; \quad d_3 = 0,3678 \quad \text{e} \quad d_4 = 0,3116$$

$$\frac{1}{f} = 0,0175, \quad \text{logo} \quad f = 56,98$$

$$F^* = \frac{10,938}{3,425} = 3,1936 \quad \text{e} \quad F_{\alpha=0,05}(3; 57) = 2,78$$

Logo, ao nível $\alpha = 0,05$, rejeitamos a hipótese

$$H: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4.$$

c) testes para funções lineares dos parâmetros

Estamos interessados em testar as seguintes funções dos parâmetros:

$$\Psi_1 = c' \underline{\mu} = \mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 - 2\mu_4 = 0$$

$$\Psi_2 = c' \underline{\mu} = \frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_3 + \mu_4) - \mu_2 = 0$$

$$\Psi_3 = c' \underline{\mu} = \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) - \mu_1 = 0$$

Com $k=4$, $v_i = n_i - 1$ para $i=1,2,3,4$ então obtemos $b=27,84$ e $a=4,35$ diante de (2.14) e (2.15).

Então encontramos $A = 3,437$ para $\alpha=0,05$.

$$\text{Temos } \hat{\Psi}_1 = -4,613 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}_1} = 0,723$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_2 &= 0,5227 & e & \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}_2} = 0,2094 \\ \hat{\Psi}_3 &= -0,8493 & e & \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}_3} = 0,3076 \end{aligned}$$

Teremos os seguintes intervalos de confiança, to
dos ao nível $\alpha=0,05$:

$$\begin{aligned} [-7,097; -2,128] & \text{ para } \Psi_1 \\ [-0,197; 1,242] & \text{ para } \Psi_2 \\ [-1,906; 0,207] & \text{ para } \Psi_3 \end{aligned}$$

Diante desses resultados, aceitamos ao nível
 $\alpha=0,05$ que $\Psi_1 \neq 0$; $\Psi_2 \equiv 0$ e $\Psi_3 \equiv 0$.

A aceitação de $\Psi_3 \equiv 0$ quer dizer: a quantidade mê
dia de octano nas gasolinas das regiões B, C e D não diferem
significativamente da região A.

A interpretação para Ψ_2 é análoga à de Ψ_3 .

Quanto à função linear Ψ_1 , o experimentador es
tá interessado em saber se o teor de octano médio das regiões
A e C pode ser considerado como sendo o dobro do teor médio de
octano das regiões B e D, mas como o valor zero não pertence
ao intervalo estimado, então $\Psi_1 \neq 0$ significa que as suposições
do experimentador não são válidas, e pelo fato de obtermos
 $\Psi_1 < 0$, podemos afirmar que o teor médio de octano das regiões
A e C não chegam a ser o dobro do teor médio das regiões B e
D, ao nível $\alpha=0,05$.

CAPÍTULO 3

TESTES E EXTENSÕES DA LINHA TUKEY

3.1. Introdução

Neste capítulo trataremos dos testes cujos métodos de comparações seguem a Linha T de Tukey, assim chamados por tratarem-se de comparações através dos intervalos de Tukey e suas extensões. Esses métodos fazem uso de distribuições estatísticas cujas variáveis têm a finalidade de medirem as amplitudes entre várias variáveis aleatórias com distribuição t de Student. Essas distribuições são apresentadas na secção 3.2. e tratadas com maiores detalhes no Apêndice II.

Na secção 3.3. introduzimos o método T de Tukey de comparações múltiplas, na sua forma original para comparações duas a duas, contrastes e outras funções lineares dos parâmetros; quando as amostras são balanceadas e as populações são normais com mesma variância e independentes. A seguir esse método é estendido para populações não independentes mas igualmente correlacionadas.

A primeira extensão dada por Spjøtvoll-Stoline (1973) para amostras não balanceadas e populações normais in

dependentes com a mesma variância (secção 3.3.4), tratada a-
diante por "Ext T".

Na secção 3.4. introduzimos as extensões devido a
Hochberg (1974), são elas GT-1 e GT-2 para amostras não in-
dependentes de populações com a mesma variância.

A seguir, na secção 3.5. damos o método GT devi-
do a Hochberg (1975), para modelos lineares de posto comple-
to e incompleto onde as amostras são não independentes de po-
pulações com mesma variância.

As secções 3.6 e 3.7 tratam de situação seme-
lhante porém as variâncias são completamente diferentes.

Na secção 3.6. apresentamos um método para este
caso, devido a Hochberg (1976). Este método apresenta certas
dificuldades nas aplicações práticas, quanto à obtenção dos
valores da Estatística utilizada. Este método, assim como o
método GT para modelos de posto completo (observação 3.3),
também pode ser considerado como generalizações do método da-
do por Spjøtvoll-Stoline (1973) na secção 3.3.4.

Quanto a secção 3.7., o método apresentado é de-
vido a Tamhane (1977) e é de fácil aplicação, pois a Estatís-
tica utilizada é a t-Student. A desvantagem deste método so-
bre o da secção 3.6. é que ele é dado somente para compara-
ções duas a duas e contrastes, com intervalos conservativos,
enquanto que o método tratado na secção 3.6. é dado para to-
das as funções lineares dos parâmetros, com intervalos exa-

tos. Finalizando o capítulo apresentamos aplicações desses métodos.

3.2. Distribuições de Amplitudes (Range Distribution)

Daremos aqui uma idéia das distribuições utilizadas neste capítulo. As distribuições cujos valores das variáveis aleatórias medem a maior distância entre os valores observados, ou mesmo, o maior valor absoluto numa determinada amostra aleatória é o que chamamos de *Distribuições de Amplitude*.

As mais utilizadas são:

- (i) Distribuição da Amplitude Estudentizada
- (ii) Distribuição do Módulo Máximo Estudentizado
- (iii) Distribuição da Amplitude Estudentizada Aumentada.

São chamadas Amplitude Estudentizada porque suas variáveis aleatórias medem a distância ou a amplitude entre valores observados com distribuição de Student.

3.2.1. As Distribuições

Seja $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ uma amostra aleatória de tamanho k de uma população que tem distribuição normal com parâmetros $(0; \sigma^2)$.

Seja s^2 o estimador não viesado de σ^2 onde

$$\frac{vs^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(v) \quad \text{independente de } (X_1, X_2, \dots, X_k).$$

Como $X_i \sim N(0; \sigma^2)$ para $i=1, 2, \dots, k$ então $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$$e \frac{X_i/\sigma}{\sqrt{\frac{v s^2}{\sigma^2}}/v} = \frac{X_i}{s} \sim t_{(v)} \text{ para } i=1,2,\dots,k.$$

Definição 3.1.

$$\text{Seja } Q = \max_{1 \leq i < j \leq k} |X_i - X_j|/s = \max_{1 \leq i < j \leq k} |T_i - T_j|, \quad \text{onde} \\ T_i = \frac{X_i}{s} \text{ para } i=1,2,\dots,k.$$

À variável aleatória Q é que chamamos de Amplitude Estudentizada com parâmetros k e v .

Definição 3.2.

$$\text{Seja } M = \max_{1 \leq i \leq k} |X_i|/s = \max_{1 \leq i \leq k} |T_i|$$

À variável aleatória M é que chamamos de Módulo Máximo Estudentizado com parâmetros k e v .

Definição 3.3.

$$\text{Seja } Q' = \max_{1 \leq i < j \leq k} \{|X_i|, |X_i - X_j|\}/s = \max(Q; M).$$

À variável aleatória Q' é que chamamos de Amplitude Estudentizada Aumentada com parâmetros k e v . A variável aleatória Q' pode ainda ser dada por:

$$Q' = \max_{0 \leq i < j \leq k} |X_i - X_j|/s = \max_{0 \leq i < j \leq k} |T_i - T_j| \text{ onde } X_0 \equiv 0, \text{ logo } T_0 \equiv 0.$$

Esses parâmetros, são normalmente chamados de graus de liberdade das variáveis aleatórias.

As distribuições de probabilidades e funções de distribuições dessas variáveis aleatórias estão discutidas no

apêndice II, assim como algumas tabelas para determinados valores de k e v e $0 < \alpha < 1$.

Podemos notar ainda que as variáveis aleatórias Q , M e Q' assumem valores positivos, somente.

3.3. O Método - T (de Tukey) de Comparações Múltiplas

O método - T, assim chamado por ter sido introduzido por Tukey e então estendido por vários autores, serão da dos aqui, quando tratamos de experimentos com um fator fixo.

3.3.1. Considerações Gerais

Nas suposições da secção 2.2. consideremos os tamanhos das amostras iguais entre si, isto é, $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ e também a independência entre as amostras.

Então, para a combinação linear dos parâmetros $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ teremos a condição (2.3) satisfeita onde $\frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} = \dots = \frac{1}{n_k} = \frac{1}{n}$ e notaremos por:

$$\hat{\Psi}^* \sim N(\underline{c}'\underline{\mu}; \sigma^2 \underline{c}'D(\frac{1}{n})\underline{c}) \quad (3.1)$$

Consideremos válida a condição (2.9): $\frac{vs^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(v)$ e seja $\underline{\theta}$ um vetor k -dimensional onde $\theta_i = \hat{\mu}_i - \mu_i$ para $i=1, 2, \dots, k$ e $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$ um contraste ($\sum_{i=1}^k c_i = 0$).

Ainda em nossas suposições consideremos o:

Lema 3.1.

Seja $h \in \mathbb{R} : h > 0$, se $|\theta_i - \theta_{i'}| \leq h$ para todo $i, i' = 1, 2, \dots, k$ com $i \neq i'$, então

$$\left| \sum_{i=1}^k c_i \theta_i \right| \leq h \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \text{ onde } \sum_{i=1}^k c_i = 0 \quad (3.2)$$

Demonstração:

a) Se $c_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$, nada temos a demonstrar.

b) Supondo que nem todos $c_i = 0$.

Seja $P = \{i : c_i > 0\}$ e $Q = \{i' : c_{i'} < 0\}$ para $i, i' = 1, 2, \dots, k$, logo podemos escrever: $0 = \sum_{i=1}^k c_i = \sum_{i \in P} c_i + \sum_{i' \in Q} c_{i'}$ e

$$g = \sum_{i \in P} c_i = - \sum_{i' \in Q} c_{i'} \quad \therefore \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| = \frac{1}{2} \sum_{i \in P} c_i + \frac{1}{2} \sum_{i' \in Q} (-c_{i'}) = g \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^k c_i \theta_i = \sum_{i \in P} c_i \theta_i - \sum_{i' \in Q} (-c_{i'}) \theta_{i'} \quad (\text{multiplicando e dividindo o se}$$

gundo membro por g), logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k c_i \theta_i &= g^{-1} \left(\sum_{i \in P} c_i \theta_i - \sum_{i' \in Q} (-c_{i'}) \theta_{i'} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{i \in P} c_i + \frac{1}{2} \sum_{i' \in Q} (-c_{i'}) \right) = \\ &= g^{-1} \left[\sum_{i \in P} c_i \theta_i \sum_{i' \in Q} (-c_{i'}) - \sum_{i \in P} c_i \sum_{i' \in Q} (-c_{i'}) \theta_{i'} \right] = \\ &= g^{-1} \left[\sum_{i \in P} \sum_{i' \in Q} (c_i (-c_{i'}) \theta_i - c_i (-c_{i'}) \theta_{i'}) \right] = \\ &= g^{-1} \left[\sum_{i \in P} \sum_{i' \in Q} c_i (-c_{i'}) [\theta_i - \theta_{i'}] \right] \end{aligned}$$

e assim teremos:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^k c_i \theta_i \right| &\leq g^{-1} \left(\sum_{i \in P} \sum_{i' \in Q} c_i (-c_{i'}) |\theta_i - \theta_{i'}| \right) \leq g^{-1} h \left(\sum_{i \in P} c_i \right) \left(\sum_{i' \in Q} (-c_{i'}) \right) = \\ &= g^{-1} \cdot h \cdot g^2 = gh = h \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \end{aligned}$$

3.3.2. O Método - T para todas as diferenças duas a duas.

Com as médias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ temos $\binom{k}{2}$ combinações das diferenças dois a dois desses parâmetros. Essas diferenças formam um conjunto de $\binom{k}{2}$ elementos da forma $\{\mu_i - \mu_j\}$ para $i, j=1, 2, \dots, k$ e $i < j$.

Supondo válidas as considerações gerais dadas em 3.3.1., teremos o:

Lema 3.2.

Com as suposições acima temos que $1-\alpha$ é a probabilidade de que essas $\binom{k}{2}$ diferenças duas a duas satisfaçam simultaneamente a:

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot q_{\alpha; k, v} \cdot s \leq \mu_i - \mu_j \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot q_{\alpha; k, v} \cdot s,$$

com $q_{\alpha; k, v}$ sendo o valor obtido da tabela da estatística da Amplitude Estudentizada com parâmetros k e v para um dado α .

Demonstração:

Seja $\hat{\mu}_i$ o estimador não viesado de μ_i para $i=1, 2, \dots, k$ com $\hat{\mu}_i \sim N(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n})$ para $n_1=n_2=\dots=n_k=n$ e seja $\theta_i = \hat{\mu}_i - \mu_i$, então $\theta_i \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$ onde $\{\theta_i\}_{1 \leq i \leq k}$ independentes entre si e também de $\frac{vs^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(v)$.

Assim podemos definir a estatística da Amplitude Estudentizada por:

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq k} \{\theta_i\} - \min_{1 \leq i \leq k} \{\theta_i\}}{s/\sqrt{n}} = \frac{\max_{1 \leq i < j \leq k} |\theta_i - \theta_j|}{s/\sqrt{n}} \sim Q_{k;v}$$

Tomando $q_{\alpha;k,v}$ tal que:

$$P\left(\frac{\max_i \{\theta_i\} - \min_i \{\theta_i\}}{s/\sqrt{n}} \leq q_{\alpha;k,v}\right) = 1-\alpha \quad (3.4)$$

então o evento da probabilidade em (3.4) é equivalente ao evento $\max_{1 \leq i < j \leq k} |\theta_i - \theta_j| \leq q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ e este é equivalente a

$|\theta_i - \theta_j| \leq q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ para todo $i, j=1, 2, \dots, k$ e portanto

$$-q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \theta_i - \theta_j \leq q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \iff$$

$$\iff -q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \hat{\mu}_i - \mu_i - (\hat{\mu}_j - \mu_j) \leq q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\iff \hat{\mu}_i - \mu_j - q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j + q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

De maneira análoga à demonstração do lema 3.2. podemos obter intervalos simultaneos para todas as médias indi-

viduais utilizando a distribuição do Módulo Máximo Estudentizado.

Corolário 3.1.

Com as mesmas suposições do Lema 3.2., é de $1-\alpha$ a probabilidade de que todas as médias satisfaçam simultaneamente $\hat{\mu}_i$:

$$\hat{\mu}_i - \frac{1}{\sqrt{n}} m_{\alpha;k,v} \cdot s \leq \mu_i \leq \hat{\mu}_i + \frac{1}{\sqrt{n}} m_{\alpha;k,v} \cdot s$$

onde $m_{\alpha;k,v}$ é o valor obtido da tabela da estatística módulo máximo estudentizado com parâmetros k , v e um dado α .

3.3.3. O Método - T para o conjunto de todos os contrastes.

Teorema 3.1.

Vamos supor válidas as considerações dadas em 3.3.1. e seja $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$ um contraste. Então é de $1-\alpha$ a probabilidade de que os valores de todos os contrastes Ψ , satisfaçam simultaneamente $\hat{\Psi}$:

$$\hat{\Psi} - q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + q_{\alpha;k,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \quad \text{onde}$$

$$\hat{\Psi} = \underline{c}'\underline{\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^k c_i \hat{\mu}_i$$

Demonstração:

Usaremos os lemas 3.1. e 3.2. já demonstrados e por questão de simplicidade escreveremos T no lugar de

$$Q_{\alpha; k, \nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

O lema 3.2. é um caso particular do teorema 3.1., basta fazermos $\Psi = \mu_i - \mu_j$, teremos que $\frac{1}{2} \sum_i |c_i| = 1$.

Seja $\theta_i = \hat{\mu}_i - \mu_i$ para $i=1, 2, \dots, k$, temos pelo lema 3.2. que $|\theta_i - \theta_j| \leq T.s$ para $i, j=1, 2, \dots, k$ e pondo $h=T.s > 0$ temos pelo lema 3.1. que:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^k c_i \theta_i \right| &\leq T.s \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \\ \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^k c_i (\hat{\mu}_i - \mu_i) \right| &\leq T.s \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \\ \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^k c_i \hat{\mu}_i - \sum_{i=1}^k c_i \mu_i \right| &= |\hat{\Psi} - \Psi| \leq T.s \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \\ \Leftrightarrow \hat{\Psi} - T.s \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) &\leq \Psi \leq \hat{\Psi} + T.s \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \end{aligned}$$

A probabilidade $1-\alpha$ se mantém pela equivalência dos eventos acima.

Esse teorema pode ser estendido para todas as funções lineares dos parâmetros μ_i 's, com a utilização da estatística $Q'_{k, \nu}$ ao invés de $Q_{k, \nu}$.

Daremos essa extensão através do:

Teorema 3.2.

Sob as mesmas suposições do teorema 3.1. $\bar{e}$ de $1-\alpha$ a probabilidade de que todas as funções lineares $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ satisfaçam simultaneamente a:

$$\hat{\Psi}^* - q'_{\alpha; k, v} \frac{s}{\sqrt{n}} g_c \leq \Psi^* \leq \hat{\Psi}^* + q'_{\alpha; k, v} \frac{s}{\sqrt{n}} g_c,$$

onde $q'_{\alpha; k, v}$ é obtido da tabela da estatística da Amplitude Estudentizada Aumentada com parâmetros k e v para um dado α .

$$g_c = \max \left\{ \sum_{i \in P} c_i; - \sum_{i' \in Q} c_{i'} \right\} \text{ onde } P \text{ e } Q \text{ são} \quad (3.5)$$

definidos por (3.3).

Demonstração:

A demonstração é análoga ao teorema anterior.

Pela definição 3.3. podemos fazer $Q' = \max_{0 \leq i < j \leq k} |T_i - T_j|$

onde $T_0 \equiv 0$ e pondo $\underline{\mu}' = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ e $\hat{\underline{\mu}} = (\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_k)$, onde $\hat{\mu}_0 \equiv \mu_0 \equiv 0$.

Assim se quisermos um intervalo de confiança para a função linear $\Psi^* = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i$, somamos à Ψ^* a parcela $c_0 \mu_0$ e obtemos $\Psi^* = \Psi = \sum_{i=0}^k c_i \mu_i$ onde $c_0 = - \sum_{i=1}^k c_i$ e obtemos assim um contraste Ψ .

Dessa forma temos $k+1$ variáveis aleatórias independentes e queremos encontrar um intervalo de confiança para Ψ com coeficiente de confiança α .

Como a Amplitude entre essas $k+1$ variáveis aleató

rias tem distribuição $Q'_{k,v}$, pelo teorema 3.1. temos que é de $1-\alpha$ que para todo Ψ esteja satisfeito simultaneamente a condição:

$$|\hat{\Psi} - \Psi| \leq q'_{\alpha;k,v} \frac{s}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^k |c_i| \right) \text{ onde, neste caso}$$

$$\Psi \equiv \Psi^* \quad \text{e} \quad \hat{\Psi} \equiv \hat{\Psi}^* \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k |c_i| = g_c, \text{ pois:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k |c_i| &= \sum_{i=1}^k |c_i| + |c_0| = \sum_{i=1}^k |c_i| + \left| \sum_{i=1}^k c_i \right| = \\ &= \sum_{i \in P} c_i - \sum_{i' \in Q} c_{i'} + \left| \sum_{i \in P} c_i + \sum_{i' \in Q} c_{i'} \right| = 2g_c \\ \therefore \quad \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k |c_i| &= g_c = \max \left\{ \sum_{i \in P} c_i, - \sum_{i' \in Q} c_{i'} \right\} \end{aligned}$$

Assim o teorema se verifica completamente.

Os métodos dados até agora exigiam a independência dos estimadores $\{\hat{\mu}_i\}$ e que os tamanhos das amostras fossem iguais, isto é $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$.

Tukey estende esse método para o caso em que os estimadores $\{\hat{\mu}_i\}$ não são independentes, mas seguem uma distribuição normal multivariada com uma particular matriz de covariâncias dada por:

$\text{var}(\hat{\mu}_i) = \sigma^2/n$ e $\text{cov}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) = b\sigma^2$ para $i \neq j$,
para facilitar as notações poremos $a^2 = \frac{1}{n}$ logo $\text{var}(\hat{\mu}_i) = a^2\sigma^2$
onde as constantes a e b devem satisfazer $\hat{a}$: $-a^2 \leq (k-1)b \leq 0$ uma vez que a matriz de covariância deve ser positiva semidefinida. (Veja Scheffé (1959)).

Como a demonstração é feita com base sobre o teorema 3.1., então daremos essa extensão como uma consequência do mesmo.

Corolário 3.2.

Com as suposições acima, temos que $1-\alpha$ é a probabilidade que todos os contrastes $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$ satisfaçam simultaneamente $\hat{\Psi}$:

$$\hat{\Psi} - (a^2 - b)^{\frac{1}{2}} q_{\alpha; k, v}^s \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + (a^2 - b)^{\frac{1}{2}} q_{\alpha; k, v}^s \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right)$$

Demonstração:

Temos que $\hat{\mu}_i \sim N(\mu_i; a^2 \sigma^2)$ e $\text{cov}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) = b\sigma^2$ para $i, j = 1, 2, \dots, k$ e $i \neq j$.

Seja X uma variável aleatória independente de $\{\hat{\mu}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ e s^2 , tal que $X \sim N(0; -b\sigma^2)$

(Note que $-b\sigma^2 > 0$ pois $b < 0$)

Fazendo $\tilde{\mu}_i = \hat{\mu}_i + X$ para $i = 1, 2, \dots, k$, temos que $\text{cov}(\tilde{\mu}_i, \tilde{\mu}_j) = \text{cov}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) + \text{var}(X) = b\sigma^2 + (-b\sigma^2) = 0$ e $\text{var}(\tilde{\mu}_i) = \text{var}(\hat{\mu}_i) + \text{var}(X) = (a^2 - b)\sigma^2 \therefore \tilde{\mu}_i \sim N(\mu_i; (a^2 - b)\sigma^2)$.

Logo, $\{\tilde{\mu}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ tem distribuição normal multivariada onde $\text{cov}(\tilde{\mu}_i, \tilde{\mu}_j) = 0$ para $i, j = 1, 2, \dots, k$ ($i \neq j$), então $\{\tilde{\mu}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ são estatisticamente independentes. Desta forma podemos aplicar os resultados do teorema 3.1. e obtermos o intervalo desejado para todos os contrastes $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$, mas notemos que $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu} = \underline{c}'\underline{\tilde{\mu}}$. Assim o teorema é válido para todos os con-

trastes $\Psi = \underline{c}' \underline{\mu}$.

Corolário 3.3.

Com as suposições do corolário 3.2. temos que $\hat{\Psi}^*$ é de $1-\alpha$ a probabilidade de que todas as funções lineares $\Psi^* = \underline{c}' \underline{\mu}$ satisfaçam a:

$$\Psi^* - (a^2 - b) \frac{1}{2} q'_{\alpha; k, v} s g_c \leq \hat{\Psi}^* \leq \hat{\Psi}^* + (a^2 - b) \frac{1}{2} q'_{\alpha; k, v} s g_c$$

onde g_c é definido por (3.5). A prova deste corolário é análoga a do corolário 3.2., mas devemos utilizar os resultados do teorema 3.2., ao invés do teorema 3.1.

3.3.4. A Extensão de Spjøtvoll e Stoline (1973) para Amostras não Balanceadas e Independentes.

Nos métodos apresentados até agora neste capítulo os tamanhos das amostras foram iguais, isto é $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$.

O método a ser dado aqui é uma extensão do método -T, dada por Spjøtvoll e Stoline (1973) e não exigem que as amostras tenham tamanhos iguais, mas que sejam independentes. Nas considerações gerais dadas em 3.3.1., suponhamos que n_i seja o tamanho da i -ésima amostra para $i=1, 2, \dots, k$ e $N = \sum_{i=1}^k n_i$. Nestas condições a matriz diagonal de (3.1) passará a ser $D(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_k})$, e assim teremos o seguinte:

Teorema 3.3.

Com as imposições acima é de $1-\alpha$ a probabilidade que todas as *funções lineares* satisfaçam simultaneamente a:

$$\hat{\Psi}^* - g_d \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot s \leq \Psi^* \leq \hat{\Psi}^* + g_d \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot s$$

onde $\Psi^* = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i$ e $\hat{\Psi}^* = \sum_{i=1}^k c_i \hat{\mu}_i$ e $g_d = \max \left\{ \sum_{i \in P} a_i c_i; \sum_{i' \in Q} -a_{i'} c_{i'} \right\}$

com $a_i^2 = \frac{1}{n_i}$ para $i=1, 2, \dots, k$.

Demonstração

Consideremos as variáveis $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_k$, onde $\hat{\gamma}_i = \frac{\hat{\mu}_i}{a_i}$ para $i=1, 2, \dots, k$. Como $\{\hat{\mu}_i\}$ são independentes temos que $\{\hat{\gamma}_i\}$ são independentes e $\hat{\gamma}_i \sim N(\gamma_i; \sigma^2)$ onde $\gamma_i = \frac{\mu_i}{a_i}$.

$$\sum_{i=1}^k d_i \gamma_i = \sum_{i=1}^k d_i \frac{\mu_i}{a_i} = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i \implies c_i = \frac{d_i}{a_i}, \quad \text{lógo}$$

$$d_i = a_i c_i = \frac{c_i}{\sqrt{n_i}}.$$

Notemos que com essa transformação sobre $\hat{\mu}_i$, nós tornamos as variâncias homogêneas e podemos utilizar os resultados do teorema 3.2. para obtermos o intervalo desejado onde g_d é dado por:

$$g_d = \max \left\{ \sum_{i \in P} d_i, - \sum_{i' \in Q} d_{i'}, \right\} \text{ onde os sub-conjuntos dos}$$

índices P e Q são definidos por (3.3) para $\underline{d}' = (d_1, d_2, \dots, d_k)$.

Esta extensão também é válida para todos os contrastes e todas as comparações duas a duas, onde os intervalos

nestes casos serão conservativos.

Corolário 3.4.

Considerando válidas as suposições do teorema 3.3, temos que $1-\alpha$ ou mais é a probabilidade de que todas as comparações duas a duas satisfaçam simultaneamente $\hat{a}$:

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - \max\left(\frac{1}{\sqrt{n_i}}, \frac{1}{\sqrt{n_j}}\right) \cdot s \cdot q'_{\alpha; k, v} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + \max\left(\frac{1}{\sqrt{n_i}}, \frac{1}{\sqrt{n_j}}\right) \cdot s \cdot q'_{\alpha; k, v}$$

ou equivalentemente:

$$(\bar{y}_i - \bar{y}_j) - s \cdot q'_{\alpha; k, v} \{\min(\sqrt{n_i}, \sqrt{n_j})\}^{-1} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\bar{y}_i - \bar{y}_j) + s \cdot q'_{\alpha; k, v} \{\min(\sqrt{n_i}, \sqrt{n_j})\}^{-1}$$

$$\text{onde } \hat{\mu}_i = \bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \quad \text{para } i=1, 2, \dots, k.$$

Observação 3.1.

Para obtermos intervalos de confiança para uma determinada função linear dos parâmetros, devemos tomar $d_i = c_i a_i = c_i \cdot \frac{1}{\sqrt{n_i}}$ e teremos $\Psi^* = \underline{c}' \underline{\mu} = \underline{d}' \underline{\gamma}$. No caso de contrastes devemos fazer a mesma transformação e embora $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ para o contraste $\Psi = \underline{c}' \underline{\mu}$ não teremos $\sum_{i=1}^k d_i = 0$ para o contraste $\Psi = \underline{d}' \underline{\gamma}$ o que significa que estaremos diante de uma função linear dos parâmetros transformados $\underline{\gamma}$. Por esta razão só podemos obter intervalos através do teorema 3.3. e desta forma, por limitarmos somente ao caso dos contrastes $\Psi = \underline{c}' \underline{\mu}$ ($\sum c_i = 0$), o intervalo será conservativo. A mesma interpretação é válida quando tratarmos de comparações duas a duas (corolário 3.4.).

Observação 3.2.

Os autores de maneira geral, aproximam a distribuição de $Q'_{k,v}$ pela de $Q_{k,v}$ para $k > 2$ e $\alpha \leq 0,05$. De fato, comparando as tabelas do apêndice (IV), vemos que os valores $q'_{\alpha;k,v}$ e $q_{\alpha;k,v}$ estão bem próximos, para k e α nas condições acima.

Essa aproximação deve-se ao fato de encontrarmos poucas tabelas da distribuição de $Q'_{k,v}$, pela grande dificuldade de que temos de produzi-las.

Exemplo 3.1.

Consideremos os dados do exemplo 2.1. (tabela 2.1).

Sabemos que variâncias foram consideradas homogêneas e que através do teste F (tabela 2.2) as médias são significativamente diferentes.

Vamos reproduzir os testes da parte (b) dada no exemplo, isto é: queremos detectar se existe diferença significativa entre os pesos médios das ninhadas 1,3,4 e 2,5,6,7,8.

Não podemos usar um dos métodos dados diretamente por Tukey, pois os tamanhos amostrais não são os mesmos, mas podemos utilizar a extensão dada por Spjøtvoll e Stoline em 3.3.4., onde o contraste $\Psi = \sum c_i \mu_i = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}) \cdot \underline{\mu}$. Nossa hipótese é $H: \Psi \equiv 0$ vs $H_a: \Psi \neq 0$.

Temos os seguintes dados:

$$k = 8, \quad n_1 = n_3 = 10, \quad n_2 = n_4 = 8, \quad n_5 = n_7 = 6, \quad n_6 = n_8 = 4.$$

$$\hat{\Psi} = \sum c_i \bar{y}_i = 0,546$$

$$s^2 = \frac{SQE}{N-k} = 0,357$$

$$g_d = \max\left\{ \sum_{i \in P} \frac{c_i}{\sqrt{n_i}}; - \sum_{i \in Q} \frac{c_i}{\sqrt{n_i}} \right\} = 0,437$$

$$\alpha = 0,05 \quad \text{e} \quad q'_{\alpha; k, v} = q'_{0,05; 8; 48} = 4,485 \quad (\text{veja apêndice IV})$$

Portanto o intervalo com coeficiente de confiança 0,95 para $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$ será: $[-0,625; 1,717]$.

O mesmo intervalo com $\alpha=0,01$ será: $[-0,889; 1,991]$ e para $\alpha=0,1$ será: $[-0,517; 1,609]$.

Portanto para os três níveis acima, aceitamos a hipótese $H: \Psi \equiv 0$.

Notemos que embora os resultados obtidos aqui sejam os mesmos obtidos pelo método -S no capítulo 2, os intervalos aqui são de amplitudes menores. Logo, no que diz respeito à amplitude do intervalo, o método dado aqui é mais eficiente.

Suponha agora que estamos interessados em saber se os pesos médios das duas maiores ninhadas diferem significativamente das duas menores.

Para isso utilizamos o contraste:

$$\Psi = \underline{c}'\underline{\mu} = \mu_1 + \mu_3 - \mu_6 - \mu_8 \quad \text{e assim obtemos:}$$

$$\hat{\Psi} = 0,77 \quad \text{e} \quad g_d = 0,2108 \quad \text{e} \quad \text{para } \alpha = 0,05 \text{ teremos:} \\ [0,205; 1,334].$$

Portanto podemos dizer que o peso médio das duas maiores ninhadas diferem significativamente do peso médio das duas menores ninhadas e como os extremos do intervalo são positivos,

podemos concluir que o peso médio das maiores ninhadas é estatisticamente maior que o das menores ninhadas.

Os métodos apresentados até agora têm a vantagem de serem de fácil aplicação. Descreveremos a seguir alguns métodos, que consideramos como extensões do método - T para casos mais gerais, mas algumas vezes suas aplicações não são tão simples.

3.4. As Extensões de Hochberg (1974) ($\Sigma_{k \times k} = \sigma^2 B_{k \times k}$)

Nesta seção discutiremos 2 importantes métodos introduzidos por Hochberg (1974), que consideramos como sendo Extensões do Método - T e os chamaremos de GT-1 e GT-2, a primeira e segunda extensão respectivamente.

Utilizamos essas extensões nos métodos de comparações múltiplas para contrastes quando nossas variáveis aleatórias em questão não satisfazem certas condições requeridas pelo método - T.

3.4.1. Considerações Gerais

Vamos eliminar a condição de independência das amostras, considerada até agora para a maioria dos métodos, e seja $\hat{\underline{\mu}}$ o vetor de parâmetros estimados, tal que:

$$\hat{\underline{\mu}} \sim N_k(\underline{\mu}; \sigma^2 B) \quad (3.6)$$

onde B é a matriz de correlação suposta conhecida.

Sejam P e Q os conjuntos definidos por (3.3).

Daremos a seguir o método GT-1 sem as devidas provas, as quais serão vistas no apêndice III.

3.4.2. O Método GT-1

Este método é dado pelo:

Teorema 3.4.

Seja $\hat{\mu}$ dado por (3.6), então é de pelo menos $1-\alpha$ a probabilidade de que todos os contrastes $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$ satisfaçam simultaneamente $\hat{a}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} = & \left(\max_{1 \leq i \leq k} \{b_{ii} + S_i(a)\} - a \right)^{\frac{1}{2}} \cdot q_{\alpha; k, v} \cdot s \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \leq \Psi \leq \hat{\Psi} \\ & + \left(\max_{1 \leq i \leq k} \{b_{ii} + S_i(a)\} - a \right)^{\frac{1}{2}} \cdot q_{\alpha; k, v} \cdot s \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $B = (b_{ij}) \quad i, j = 1, 2, \dots, k$

$$S_i(a) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k |a - b_{ij}| \quad (3.8)$$

e a é uma constante real que deve ser tomada como o valor que minimiza o intervalo (3.7).

A aplicação desse método em muitos casos não é tão simples por causa da dificuldade de encontrarmos um valor a^* que minimize o intervalo (3.7).

Para minimizar esse intervalo é necessário que minimizemos o valor:

$$\{ \max_{1 \leq i \leq k} \{ b_{ii} + S_i(a) \} - a \}$$

Daremos uma idéia de como encontrar um valor aproximado de a através da Teoria dos Jogos.

Seja X o conjunto de todos os vetores k -dimensionais formados de zeros e uns ($X \subset R^k$) e X_0 o seu conjunto de vértices $E_1, E_2, \dots, E_k$ tal que E_i é formado de $k-1$ zeros e $+1$ na i -ésima coordenada.

Seja $I = [\min_{i \neq j} \{ b_{ij} \}; \max_{i \neq j} \{ b_{ij} \}]$ o intervalo o qual contém todos os possíveis resultados (X, R^1, L) onde $\underline{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X$, $a \in R^1$ e a função L é dada por: $L(\underline{x}, a) = \sum_{i=1}^k x_i (b_{ii} + S_i(a) - a)$.

Com esses conceitos o autor dá o seguinte procedimento para obtermos um valor satisfatório a^* de a .

Encontremos em primeiro lugar o valor $\hat{a}_1$ tal que: $\max_{1 \leq i \leq k} \min_{a \in R} \{ L(E_i, a) \} = L(E_v, \hat{a}_1)$ para algum $v \in \{1, 2, \dots, k\}$. Se para todo $i \neq v$ estiver satisfeita a seguinte desigualdade:

$$L(E_i, \hat{a}_1) \leq L(E_v, \hat{a}_1)$$

então terminamos o jogo escolhendo $a^* = \hat{a}_1$.

Mas se isto não acontece para todo $i \neq v$, devemos determinar o sub-conjunto de índices.

$S^{(1)} = \{ i_1^{(1)}, \dots, i_{k_1}^{(1)} \} \subset \{1, \dots, k\}$ tal que o índice $\ell \in S^{(1)}$ se e somente se $L(E_\ell, \hat{a}_1) \geq L(E_v, \hat{a}_1)$.

Agora devemos verificar se $\hat{a}_2$ determinado por:

$$\max_{i \neq i' \in S^{(1)}} \min_{a \in R^1} \frac{1}{2} \{ L(E_i, a) + L(E_{i'}, a) \} = L(E_j, \hat{a}_2) = L(E_{j'}, \hat{a}_2) \text{ para al}$$

gum $j, j' \in S^{(1)}$.

Se para todo $\ell \neq (j, j')$ e $\ell \in S^{(1)}$, estiver satisfeita a seguinte desigualdade:

$$L(E_\ell, \hat{a}_2) \leq L(E_j, \hat{a}_2)$$

então terminamos o jogo escolhendo $a^* = \hat{a}_2$. Em caso contrário de vemos continuar, encontrando de maneira análoga $S^{(2)}$ e $\hat{a}_3$ até que encontremos um $t \leq k$ e $S^{(t-1)}$ tal que $a^* = \hat{a}_t$ é escolhido.

Este procedimento em geral requer poucos passos, mas dificilmente ele é aplicado, pois a maioria dos problemas práticos apresentam soluções diretas para a^* .

Em muitos casos podemos facilmente verificar que existe uma quantidade a^0 , a qual minimiza $b_{ii} + S_i(a) - a$ para to do $i=1, 2, \dots, k$; então tomamos $a^* = a^0$.

Um caso em que teremos uma solução direta é quando: $b_{ii} > \bar{b}_i$, onde $\bar{b}_i$ é a maior mediana de $\{b_{i1}, \dots, b_{ik}\}$, para $i=1, 2, \dots, k$.

Então claramente teremos:

$$\min_{a \in R} \{b_{ii} + S_i(a) - a\} = \sum_{j=1}^k |b_{ij} - b_i|$$

onde b_i é qualquer mediana de $\{b_{i1}, \dots, b_{ik}\}$, para $i=1, 2, \dots, k$.

Assim, se existe um valor comum $\bar{b}$, tal que $\bar{b}$ é a mediana de qualquer um dos conjuntos $\{b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ik}\}$ para $i=1, 2, \dots, k$, então escolhemos $a^* = \bar{b}$.

Outro caso especial é quando todos os elementos fora da diagonal principal de B são iguais, digamos um valor b . A solu

ção óbvia neste caso é $a^* = b$.

3.4.3. O Método GT-2

Este método também é geral quanto a matriz de correlação dada em (3.6).

Antes de introduzirmos o método daremos dois lemas e a seguir, com a generalização de um desses lemas teremos o método GT-2 para todos os contrastes.

Lema 3.3.

Seja $h_{ij} > 0$ e $\underline{\theta}$ um vetor k -dimensional tal que $\theta_i = \hat{\mu}_i - \mu_i$ para $i=1, 2, \dots, k$ e $|\theta_i - \theta_j| \leq h_{ij}$, para $i \neq j=1, 2, \dots, k$.

$$\text{Então } \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \left| \sum_{i=1}^k c_i \theta_i \right| \leq \sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) h_{ij}$$

onde $\underline{c}$ é tal que $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ e P e Q são definidos por (3.3) com a modificação de que $i' = j$ em Q .

Demonstração

Do Lema 3.1. temos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^k c_i \theta_i \right| &\leq g^{-1} \left(\sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) |\theta_i - \theta_j| \right), \text{ onde } g = \sum_{i \in P} c_i = - \sum_{j \in Q} c_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i|, \text{ logo} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right) \left| \sum_{i=1}^k c_i \theta_i \right| \leq \sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) |\theta_i - \theta_j| \leq \sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) h_{ij}$$

Lema 3.4.

Seja $\{\mu_i - \mu_j\}_{i \neq j}$ o conjunto das $\binom{k}{2}$ diferenças duas a duas e seja $k' = \binom{k}{2} = k(k-1)/2$ e $B = (b_{ij})$ a matriz dada em (3.6).

Então é de pelo menos $1-\alpha$ a probabilidade de que todas as diferenças duas a duas satisfaçam simultaneamente ã:

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - s \cdot \psi_{ij}^{\frac{1}{2}} \cdot m_{\alpha; k', \nu} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + s \cdot \psi_{ij}^{\frac{1}{2}} \cdot m_{\alpha; k', \nu}$$

onde $\psi_{ij} = b_{ii} + b_{jj} - 2b_{ij}$ para $1 \leq i < j \leq k$ e $m_{\alpha; k', \nu}$ é definido no corolário 3.1. para os parâmetros k' e ν .

Demonstração

Seja $\theta_i = \hat{\mu}_i - \mu_i$ para $i=1, 2, \dots, k$ e a amplitude máxima entre os $\{\theta_i\}_{1 \leq i \leq k}$ é dada por: $\max_{1 \leq i < j \leq k} |\theta_i - \theta_j|$ e considerando $\{\theta_i - \theta_j\}_{i \neq j}$ como k' variáveis aleatórias tais que $(\theta_i - \theta_j) = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j - (\mu_i - \mu_j) \sim N(0; \sigma^2(b_{ii} + b_{jj} - 2b_{ij}))$ e o vetor das k' diferenças $(\theta_i - \theta_j)$ segue uma distribuição normal multivariada.

E assim temos que $\max_{1 \leq i < j \leq k} |\theta_i - \theta_j| / s \psi_{ij}^{\frac{1}{2}}$ tem distribuição do módulo máximo estudatizado com parâmetros k' e ν . Logo podemos encontrar uma constante $m_{\alpha; k', \nu}$ tal que:

$P(\max_{1 \leq i < j \leq k} |\theta_i - \theta_j| / s \psi_{ij}^{\frac{1}{2}} \leq m_{\alpha; k', \nu}) \geq 1-\alpha$ e assim o lema fica provado.

O Método GT-2 é uma generalização do lema 3.4. para todos os contrastes e será dado pelo:

Teorema 3.5.

Seja $k' = \binom{k}{2}$ e $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$ tal que $\sum_{i=1}^k c_i = 0$, então é de pelo menos $1-\alpha$ a probabilidade de que todos os contrastes satisficam simultaneamente $\hat{a}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} - s.m_{\alpha; k', \nu} \cdot \left(\sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) \psi_{ij}^{\frac{1}{2}} \right) / \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| &\leq \Psi \leq \\ &\leq \hat{\Psi} + s.m_{\alpha; k', \nu} \cdot \left(\sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) \psi_{ij}^{\frac{1}{2}} \right) / \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i|. \end{aligned}$$

Demonstração:

Temos pelo lema 3.4. que

$$P(|\theta_i - \theta_j| \leq s \cdot \psi_{ij}^{\frac{1}{2}} \cdot m_{\alpha; k', \nu}) \geq 1-\alpha, \text{ onde } \theta_i = \hat{\mu}_i - \mu_i \text{ para } i=1, 2, \dots, k.$$

Logo, $P\left(\sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) |\theta_i - \theta_j| \leq \sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) \cdot s \cdot \psi_{ij}^{\frac{1}{2}} \cdot m_{\alpha; k', \nu}\right) \geq 1-\alpha$ e pelo lema 3.3. temos que:

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) |\theta_i - \theta_j| \geq \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i|\right) \left| \sum_{i=1}^k c_i \theta_i \right|, \text{ então:}$$

$$P\left(\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i|\right) \left| \sum_{i=1}^k c_i \theta_i \right| \leq \sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) \cdot s \cdot \psi_{ij}^{\frac{1}{2}} \cdot m_{\alpha; k', \nu}\right) \geq 1-\alpha$$

e como $\left| \sum_{i=1}^k c_i \theta_i \right| = |\underline{c}'\underline{\mu} - \underline{c}'\hat{\underline{\mu}}| = |\Psi - \hat{\Psi}|$, o teorema se verifica.

Hochberg compara os dois procedimentos GT-1 e GT-2 chegando à conclusão que o procedimento GT-1 é melhor do que o GT-2 (no sentido de produzir intervalos de confiança com amplitude menor, dado o mesmo coeficiente de confiança) quando a homogeneidade da matriz de correlação é levemente violada,

em outros casos o procedimento GT-2 é preferível, também pela sua facilidade de aplicação.

Exemplo 3.2. (Análise de Covariância com uma covariável)

Consideremos as $N = \sum_{i=1}^k n_i$ variáveis aleatórias Y_{ij} independentes para $i=1,2,\dots,k$ e $j=1,2,\dots,n_i$, com a mesma variância σ^2 e $Y_{ij} = \mu_i + b X_{ij} + e_i$, onde $e_i \sim N(0; \sigma^2)$.

Desta forma temos $\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i - \hat{b} \bar{X}_i$ para $i=1,2,\dots,k$ onde $\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$, $\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ e $\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ com

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i) \text{ e } S_{xx} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2.$$

A matriz de covariância $\hat{\mu}$ é dada por:

$$\Sigma = \sigma^2 \left\{ D \left(\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_k} \right) + \tilde{b} \tilde{b}' \right\}$$

onde $\tilde{b}' = (b_1, \dots, b_k)$ e $b_i = \frac{\bar{x}_i}{S_{xx}^{1/2}}$ para $i=1,2,\dots,k$.

Seja $s^2 = \hat{\sigma}^2$ tal que $\frac{vs^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(v)$.

Suponha que queremos intervalos de confiança para as comparações duas a duas. Podemos então aplicarmos o método GT-2 e teremos o seguinte intervalo ao nível α :

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - s \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + (\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2 / S_{xx} \right)^{1/2} \cdot m_{\alpha; k', v} \leq \mu_i - \mu_j \leq$$

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + s \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + (\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2 / S_{xx} \right)^{1/2} \cdot m_{\alpha; k', v}$$

para $1 \leq i < j \leq k$.

onde $\psi_{ij} = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2}{S_{xx}}$ pois notamos que:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) &= \text{var}(\hat{\mu}_i) + \text{var}(\hat{\mu}_j) - 2 \text{cov}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) = \\ &= \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{1}{S_{xx}} (\bar{x}_i - \bar{x}_j)^2 \right); \text{ basta observar a matriz } \Sigma \text{ acima.} \end{aligned}$$

3.5. O Método GT de Hochberg (1975)

O Método GT dado por Hochberg (1975) é uma extensão do Método - T para modelos gerais não balanceados com efeitos fixos.

Esse método pode também ser considerado como uma generalização da extensão dada por Spjøtvoll e Stoline (1973) dado em 3.3.4.

3.5.1. Considerações Gerais

Seja $\underline{Y} = X\underline{\mu} + \underline{e}$ o modelo dado pela definição 3 do capítulo 2, onde $\underline{e} \sim N(0; \sigma^2 I)$.

O Método GT é dado para os casos quando a matriz X é de posto completo e incompleto. Nos dois casos as equações normais são dadas por:

$$X'X\underline{\mu} = X'\underline{Y}$$

Quando o modelo considerado é de posto completo, temos a solução única $\hat{\underline{\mu}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y}$ e quando isto não acontece, isto é, quando o modelo é de posto incompleto, daremos a

solução utilizando a inversa generalizada de $X'X$. Como a inversa generalizada não é única, então temos um conjunto $\{\hat{\mu}\}$ de soluções das equações normais correspondente ao conjunto de inversas generalizadas possíveis.

Nos dois casos $\hat{\mu}$ é normalmente distribuído.

Seja $L_e = \{c \in R^k : c' \hat{\mu} \text{ assume os mesmos valores para todo } \hat{\mu} \in \{\hat{\mu}\} \text{ e } E(c' \hat{\mu}) = c' \mu\}$ o espaço de dimensão $e < k$.

Dessa forma obtemos o conjunto das funções estimáveis dos parâmetros que é dado por: $\{c' \mu; \forall c' \in L_e\}$.

Seja $\beta = \{B_{k \times k} : c_1' B c_2 = \text{cov}(c_1' \hat{\mu}; c_2' \hat{\mu}) \text{ com } c_1 \text{ e } c_2 \in L_e \text{ e o valor da } \text{cov}(c_1' \hat{\mu}; c_2' \hat{\mu}) \text{ é invariante } \forall \hat{\mu} \in \{\hat{\mu}\}\}$.

As matrizes de β são positivas definidas, mesmo quando $X'X$ é de posto incompleto, com posto $(X) = e$.

3.5.2. O Método GT para modelos de posto completo

Daremos o método GT para modelos de posto completo, onde consideramos, além da suposição de normalidade, que $B = (X'X)^{-1}$ a qual é unicamente determinada e $\hat{\mu} = BX'y$ que também é único.

Teorema 3.6.

Seja $Q_{k \times k}$ uma matriz de números reais, tal que $QQ' = B$. Então é de $1-\alpha$ a probabilidade de que os intervalos de confiança para todas as funções lineares dos parâmetros $\Psi^* = c' \mu$, $\forall c' \in R^k$ são dados por:

$$\hat{\Psi}^* - s \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot g(c' Q) \leq \Psi^* \leq \hat{\Psi}^* + s \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot g(c' Q)$$

onde $g(\underline{c}'Q) = \max\left\{\sum_{i:\ell_i > 0} \ell_i, -\sum_{i:\ell_i < 0} \ell_i\right\}$ e $\ell_i = \sum_{j=1}^k c_j q_{ji}$, para $i=1,2,\dots,k$ e $Q_{k \times k} = (q_{ji})_{1 \leq i,j \leq k}$.

Demonstração

Como B é positiva definida então existe uma matriz Q tal que $QQ' = B$ e seja $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ e $\hat{\Psi}^* = \underline{c}'\hat{\underline{\mu}}$. Temos:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}^* - \Psi^* &= \underline{c}'\hat{\underline{\mu}} - \underline{c}'\underline{\mu} = \underline{c}'(\hat{\underline{\mu}} - \underline{\mu}) = \underline{c}'QQ^{-1}(\hat{\underline{\mu}} - \underline{\mu}) = \\ &= \underline{c}'Q(Q^{-1}\hat{\underline{\mu}} - Q^{-1}\underline{\mu}) = (Q'\underline{c})'(Q^{-1}\hat{\underline{\mu}} - Q^{-1}\underline{\mu}) = \underline{c}'^*(\hat{\underline{\mu}}^* - \underline{\mu}^*)\end{aligned}$$

E como o modelo é de posto completo, temos que:

$$\hat{\underline{\mu}}^* \sim N(\underline{\mu}^*; \sigma^2 I), \text{ já que } \hat{\underline{\mu}} \sim N(\hat{\underline{\mu}}; \sigma^2 B).$$

Pelos resultados dos Teoremas 3.1. e 3.2. dados na secção 3.3.3. e considerando $\hat{\Psi}^{**} = \underline{c}'^*\hat{\underline{\mu}}^*$, teremos:

$$P(-s \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot g(\underline{c}^*) \leq \underline{c}'^*(\hat{\underline{\mu}}^* - \underline{\mu}^*) \leq s \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot g(\underline{c}^*)) = 1 - \alpha$$

$$\text{mas } \hat{\Psi}^{**} - \Psi^{**} = \underline{c}'^*(\hat{\underline{\mu}}^* - \underline{\mu}^*) = \underline{c}'(\hat{\underline{\mu}} - \underline{\mu}) = \hat{\Psi}^* - \Psi^*$$

onde $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ é uma função linear dos parâmetros e portanto teremos:

$$P(-s \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot g(\underline{c}^*) \leq \hat{\Psi}^* - \Psi^* \leq s \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot g(\underline{c}^*)) = 1 - \alpha$$

$$\text{onde } g(\underline{c}^*) = g(Q'\underline{c}) = \max\left\{\sum_{i:\ell_i > 0} \ell_i; -\sum_{i:\ell_i < 0} \ell_i\right\}$$

$$\text{e } \ell_i = \sum_{j=1}^k c_j q_{ji} \text{ para } i=1,2,\dots,k \text{ e } Q_{k \times k} = (q_{ji})_{1 \leq i,j \leq k}$$

Observação 3.3.

O Método de Spjøtvoll-Stoline (1973) dado em 3.3.4. é um caso particular do Método GT dado aqui. Spjøtvoll-Stoline

em seu método usa a matriz Q como sendo a matriz

$$D(b_{11}^{\frac{1}{2}}, b_{22}^{\frac{1}{2}}, \dots, b_{kk}^{\frac{1}{2}}) \text{ onde } B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Neste caso $b_{ii} = a_i^2$ onde a_i foi dado no método de Spjøtvoll-Stoline como o fator responsável pela heterogeneidade das variâncias, isto é, $\hat{\mu}_i \sim N(\mu_i; a_i^2 \sigma^2)$.

Desta forma usando $Q = D(b_{11}^{\frac{1}{2}}, b_{22}^{\frac{1}{2}}, \dots, b_{kk}^{\frac{1}{2}})$ teremos $\tilde{c}'Q = (c_1 b_{11}^{\frac{1}{2}}, c_2 b_{22}^{\frac{1}{2}}, \dots, c_k b_{kk}^{\frac{1}{2}})$ e assim g_d passa a ser $g(\tilde{c}'Q)$.

Uma das dificuldades de aplicação do método GT é a escolha da matriz Q , pois dada uma matriz B nas condições acima, existe uma matriz Q , tal que $QQ' = B$, mas esta não é única e o método GT não é invariante quanto a escolha da matriz Q .

Faremos alguns comentários sobre a escolha da matriz Q , após apresentarmos o método GT para modelos de posto incompleto.

3.5.3. O Método GT para modelos de posto incompleto.

Uma maneira simples de aplicarmos o procedimento GT a um modelo de posto incompleto é através de uma reparametrização por meio de uma transformação para um modelo de posto completo, e assim caindo nas hipóteses do teorema 3.5. Essa reparametrização pode ser feita da seguinte maneira: Seja $X_{n \times k}$ a matriz de posto e ($e < k$), então existem as matrizes $U_{n \times e}$

e V_{exk} , ambas com posto e , tal que: $X = UV$, (veja Hochberg (1975)).

Nessas condições nosso modelo passará a ser dado por:

$$Y = X\mu + e = UV\mu + e = U(V\mu) + e = U\mu_e + e$$

onde U tem posto completo.

Agora aplicamos o teorema 3.5. sobre o modelo reparametrizado cujas equações normais são dadas por:

$U'U\hat{\mu}_e = U'y$ onde $\hat{\mu}_e = (U'U)^{-1}U'y$, o que nos permite encontrarmos intervalos de confiança exatos para todas as funções dos parâmetros μ_e .

Observação 3.4.

Embora esses intervalos sejam exatos, a aplicação deste método é muitas vezes evitada pela grande dificuldade de escrevermos uma função dos parâmetros μ , que é do nosso interesse, em termos do vetor de parâmetros transformado μ_e .

Observação 3.5.

Outro problema que pode surgir é a dificuldade de encontrarmos a matriz Q correspondente à matriz VBV' no método reparametrizado, já que V é uma matriz dada, enquanto que no método a ser dado (conservativo) teremos que encontrar uma matriz Q correspondente à matriz B que é simétrica e positiva definida com $B \in \beta$.

Observação 3.6.

Devemos observar ainda que podemos utilizar reparametrizações diferentes, já que as matrizes U e V não são unicamente determinadas, o que não modifica os resultados do procedimento GT para modelos de posto incompleto (veja Hochberg (1975)).

Daremos agora o método GT para modelos de posto incompleto com intervalos conservativos para todos os contrastes.

Teorema 3.7.

Seja $B \in \beta$ uma matriz simétrica e positiva definida. Então é de pelo menos $1-\alpha$ a probabilidade de que os intervalos de confiança para todos os contrastes $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$ satisfaçam simultaneamente a:

$$\hat{\Psi} - s \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot g(\underline{c}' Q_B) \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + s \cdot q'_{\alpha; k, v} \cdot g(\underline{c}' Q_B)$$

onde $Q_B Q_B' = B$, $g(\underline{c}' Q_B)$ é dado como no teorema 3.5. e $\hat{\underline{\mu}} \in \{\hat{\underline{\mu}}\}$,

(veja demonstração no Apêndice III).

Embora este procedimento nos dê intervalos conservativos, ele é preferível ao método de reparametrização, pelas dificuldades que encontramos na aplicação do método de reparametrização, veja observações 3.4. e 3.5.

Hochberg ainda dá um método para encontrarmos intervalos de confiança para todos os contrastes, com coeficien

te de confiança exato, para planejamentos não balanceados e de posto incompleto quando a matriz Q satisfaz uma certa condição. Este método é dado pelo:

Teorema 3.8.

Seja $B \in \beta$ e Q uma matriz tal que a soma dos elementos de cada linha seja a mesma para todas as linhas, com $QQ' = B$. Então os intervalos de confiança simultâneos para todos os contrastes, com coeficiente de confiança $1-\alpha$ é dado por:

$$\hat{\Psi} - s \cdot q_{\alpha; k, v} \cdot g(\underline{c}'Q) \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + s \cdot q_{\alpha; k, v} \cdot g(\underline{c}'Q)$$

onde $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$.

(veja demonstração no Apêndice III)

3.5.4. Como escolher a matriz Q tal que $QQ' = B$

Como vimos, todos os procedimentos dados na seção 3.5. envolvem uma matriz Q satisfazendo $QQ' = B$ e como esta matriz não é única, então esses procedimentos dependem da escolha de Q .

Poderíamos dizer que o melhor seria escolher Q de modo a minimizar os intervalos dados, mas isso não é possível mesmo quando os contrastes são simples comparações duas a duas.

O autor sugere alguns métodos para encontrarmos uma matriz Q nas condições exigidas ($QQ' = B$).

O primeiro deles é pelas raízes características de

B; como B é positiva definida então suas raízes características são positivas, seja $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são as k raízes características de B e seja $P = (\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_k)$, onde $\underline{p}_i$ é o i-ésimo vetor característico normalizado de B para $i=1, 2, \dots, k$.

Então pela decomposição espectral temos:

$$PDP' = B \quad \text{ou seja,} \quad PD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} P' = (PD^{\frac{1}{2}}) (PD^{\frac{1}{2}})' = PDP' = B$$

logo, podemos tomar $Q = PD^{\frac{1}{2}}$ onde $D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \lambda_2^{\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_k^{\frac{1}{2}})$.

Escolhas dessa forma são bastante utilizadas pela sua facilidade e rapidez na aplicação.

Um segundo método para a obtenção da matriz Q é através de uma matriz triangular inferior T, tal que $TT' = B$. Desde que B é positiva definida temos no máximo 2^k matrizes T tais que $TT' = B$, o número 2^k de matrizes T é originário de todas as possíveis mudanças de sinais de cada uma das k colunas da matriz T. Neste caso basta tomarmos uma certa matriz T e fazermos $Q = T$.

Mesmo quando tratamos de comparações duas a duas, não é possível encontrar uma matriz Q que seja a melhor no sentido de nos fornecer intervalos de menor amplitude. Quando $B = aI$ e estamos tratando de comparações duas a duas podemos fazer uma ótima escolha para Q, isto é, tomando $Q = a^{\frac{1}{2}} I$ teremos o intervalo de menor amplitude possível no que diz respeito à quantidade $g(\underline{c}'Q)$.

Para verificarmos isso, fazemos:

Seja $c_{(ij)}$ o contraste responsável pela comparação das médias μ_i e μ_j , isto é $c'_{(ij)} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$

$\left. \begin{array}{l} \text{i-ésima} \\ \text{posição} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{j-ésima} \\ \text{posição} \end{array} \right\}$

logo, $c'_{(ij)} \mu = \mu_i - \mu_j$ para $i, j = 1, 2, \dots, k$.

temos $g(c'_{(ij)} Q) = g(q'_i - q'_j)$ onde q'_i é a i-ésima linha da matriz $Q_{k \times k}$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

Como $B = aI$ e $Q_{k \times k} = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ temos que:

$$B = aI = QQ' \Rightarrow \begin{cases} \sum_{t=1}^k q_{it}^2 = a \\ \sum_{t=1}^k q_{it} q_{jt} = 0 \quad \text{para } i \neq j \end{cases} \quad \text{logo,}$$

$$\begin{aligned} (q'_i - q'_j)(q'_i - q'_j)' &= \sum_{t=1}^k (q_{it} - q_{jt})^2 = \sum_{t=1}^k q_{it}^2 + \sum_{t=1}^k q_{jt}^2 - \\ &- 2 \sum_{t=1}^k q_{it} q_{jt} = 2a. \end{aligned}$$

Utilizando o seguinte resultado: "Seja $\ell \in R^k$ tal que $\ell' \ell = 2a$ então:

$$\min \left[\max_{1 \leq i, j \leq k} \left(\sum_{i \in P} \ell_i, - \sum_{j \in Q} \ell_j \right) \right] = a^{\frac{1}{2}}$$

Pondo $\tilde{\ell}' = c'_{(ij)} Q = q'_i - q'_j$ e $\tilde{\ell}' \tilde{\ell} = 2a$, então para que $g(c'_{(ij)} Q) = g(q'_i - q'_j) = a^{\frac{1}{2}}$ devemos ter:

$$q'_i - q'_j = c'_{(ij)} Q = (0, 0, \dots, 0, \overset{\uparrow}{\sqrt{a}}, 0, \dots, 0, \overset{\uparrow}{-\sqrt{a}}, 0, \dots, 0) \quad \text{e}$$

i-ésima posição j-ésima posição

para isso temos que tomar $Q = a^{\frac{1}{2}} I$, assim obtemos um intervalo

de menor amplitude possível, quanto à escolha de Q , quando tratamos de comparações duas a duas e $B = aI$. Note que quando $B = aI$ e tomamos $Q = a\frac{1}{2}I$ caímos no método-T de Tukey já dado na secção 3.3.

Além dos métodos apresentados acima, poderíamos tentar encontrar uma matriz Q tão próxima quanto possível à uma matriz diagonal $a.I$ e obtermos assim uma boa aplicação do método GT.

Nem sempre isso é possível, então o que se procura fazer é encontrar uma matriz Q com a mesma estrutura da matriz B , isto é, por exemplo, se B é tal que:

$\sigma^2 B = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} I + \underline{d}\underline{d}' \right]$ onde $\underline{d}$ é um vetor real, então a matriz Q será da seguinte forma: $Q = aI + \underline{h}\underline{h}'$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e $\underline{h} \in \mathbb{R}^k$, tais que:

$$QQ' = B \Rightarrow \left(\frac{1}{n} I + \underline{d}\underline{d}' \right) = (aI + \underline{h}\underline{h}')(aI + \underline{h}\underline{h}')$$

Esse desenvolvimento será ilustrado abaixo através do exemplo dado por Hochberg (1975).

Assim, se a matriz B está próxima à uma matriz diagonal $a.I$, então Q , com a mesma estrutura de B , também estará próxima a uma outra matriz diagonal, e segundo o autor, se pudermos escolher Q da forma acima, teremos ótimas soluções para o problema em questão.

3.5.5. Exemplo 3.3. (Aplicação do Método GT)

Consideremos o mesmo exemplo de análise de covariância dado pelo exemplo 3.2., com tamanhos amostrais iguais em cada grupo amostral.

Seja então k amostras com n observações em cada uma, $N = kn$ e Y_{ij} ($i=1,2,\dots,k$ e $j=1,2,\dots,n$) são variáveis aleatórias independentes com a mesma variância σ^2 e $E(Y_{ij}) = \mu_i + b X_{ij}$ ($i=1,2,\dots,k$ e $j=1,2,\dots,n$) ou seja $Y_{ij} = \mu_i + b X_{ij} + e_{ij}$ onde $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, μ_i é o efeito médio principal de cada grupo, X_{ij} é a variável concomitante incluída no modelo para tornar o experimento mais preciso e b o coeficiente de inclinação.

Este modelo é de posto completo e balanceado, mas o método - T de Tukey não pode ser aplicado, a menos que $b \equiv 0$ (cairíamos num caso comum de análise de variância).

Se temos dúvidas sobre o valor de $b \equiv 0$, podemos realizar um teste para tal, (veja Scheffé (1959)).

Neste exemplo temos:

$$\begin{aligned}\bar{X}_i &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}, & \bar{Y}_i &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{ij} \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)(Y_{ij} - \bar{Y}_i) \\ S_{xx} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2\end{aligned}$$

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

$$SS_{\hat{b}} = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

$$v = N - k - 1$$

O estimador de mínimos quadrados de μ_i ajustado à variável concomitante é dado por:

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i - \hat{b}\bar{X}_i \quad \text{para } i=1,2,\dots,k$$

Como o modelo é de posto completo, a matriz de dispersão (variâncias) dos $\hat{\mu}_i$'s é dada por:

$$\sigma^2 \left(\frac{1}{n} I + \underline{\underline{d}} \underline{\underline{d}}' \right) = \sigma^2 B, \text{ onde } \underline{\underline{d}}' = (d_1, d_2, \dots, d_k) \quad e$$

$$d_i = \frac{\bar{X}_i}{S_{xx}^{1/2}} \text{ para } i=1,2,\dots,k, \text{ onde } I \text{ é a matriz identidade.} \quad O$$

estimador não viesado de σ^2 é dado por:

$$\hat{\sigma}^2 = s_v^2 = (S_{yy} - SS_{\hat{b}}) / v$$

Como o modelo é de posto completo podemos usar o teorema 3.5. para encontrarmos intervalos de confiança para as funções lineares de μ_i ($i=1,2,\dots,k$). A matriz Q será encontrada de tal maneira que tenha a mesma estrutura da matriz B, de acordo com a referência já feita anteriormente.

$$\text{Então } Q = aI + \underline{\underline{h}} \underline{\underline{h}}' \quad \text{para } a \in R \text{ e } \underline{\underline{h}}' = (h_1, h_2, \dots, h_k) \in R^k$$

e fazemos:

$$\frac{1}{n}I + \underline{\underline{d}}\underline{\underline{d}}' = B = QQ' = (aI + \underline{\underline{h}}\underline{\underline{h}}') (aI + \underline{\underline{h}}\underline{\underline{h}}') = a^2 I + (2a + \underline{\underline{h}}'\underline{\underline{h}}) \underline{\underline{h}}\underline{\underline{h}}'$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{h}} = u \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\underline{d}}$$

onde u é tal que satisfaz: $u(2a + \underline{\underline{u}}\underline{\underline{d}}'\underline{\underline{d}}) = 1$ com $u \in \mathbb{R}$, para chegarmos a isso, faremos:

$$\begin{aligned} (2a + \underline{\underline{h}}'\underline{\underline{h}}) \underline{\underline{h}}\underline{\underline{h}}' &= \left[2a + (u \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\underline{d}}') (u \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\underline{d}}) \right] (u \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\underline{d}}) (u \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\underline{d}}') \\ &= (2a + \underline{\underline{u}}\underline{\underline{d}}'\underline{\underline{d}}) \underline{\underline{u}}\underline{\underline{d}}\underline{\underline{d}}' = \underline{\underline{d}}\underline{\underline{d}}' \Rightarrow (2a + \underline{\underline{u}}\underline{\underline{d}}'\underline{\underline{d}})u = 1 \\ \Rightarrow (\underline{\underline{d}}'\underline{\underline{d}})u^2 + 2au &= 1 \Rightarrow (\underline{\underline{d}}'\underline{\underline{d}})u^2 + \frac{2}{\sqrt{n}} u - 1 = 0 \\ \Rightarrow u &= \frac{-\frac{2}{\sqrt{n}} \pm \sqrt{\frac{4}{n} + 4\underline{\underline{d}}'\underline{\underline{d}}}}{2\underline{\underline{d}}'\underline{\underline{d}}} \quad \text{e} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{n}} + \underline{\underline{u}}\underline{\underline{d}}\underline{\underline{d}}' \end{aligned}$$

Considerando os possíveis valores das raízes quadradas, temos 4 (quatro) soluções possíveis para Q , das quais duas produzem os mesmos efeitos, desde que $g(\underline{\underline{x}}) = g(-\underline{\underline{x}})$ para qualquer vetor $\underline{\underline{x}}$, as outras duas são distintas, e deveremos escolher a solução de maior interesse para as funções dos parâmetros em que se concentra nossos principais objetivos, isto é,, devemos tomar Q de maneira que minimize a quantidade $g(\underline{\underline{c}}'Q)$ dada pelo teorema, onde $\underline{\underline{c}}'\underline{\underline{\mu}}$ é uma função dos parâmetros.

3.6. A Extensão dada por Hochberg (1976).

Variâncias diferentes entre si com amostras independentes.

3.6.1. Considerações Gerais

Daremos agora outra extensão do método T apresentada por Hochberg em 1976, a qual é uma generalização do método apresentado por Spjøtvoll e Stoline (1973). Já apresentamos uma generalização desse método quando estudamos o método GT, mas agora estudaremos o caso em que as variâncias das populações em que estamos amostrando, possam ser completamente desconhecidas e diferentes entre si.

Notemos que nos métodos apresentados até agora, neste capítulo, as variâncias e covariâncias eram no máximo proporcionais a σ^2 , cujos coeficientes de proporcionalidades eram conhecidos com σ^2 desconhecido.

Consideremos k amostras independentes com $n_1, n_2, \dots, n_k$ elementos e seja Y_{ij} a j-ésima observação do i-ésimo grupo amostral onde $Y_{ij} \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$ para $i=1,2,\dots,k$ e $j=1,2,\dots,n_i$.

Seja $G_k^{(\alpha)}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)$ o valor obtido da distribuição da amplitude aumentada de k variáveis aleatórias independentes, com distribuição t-Student centrais com $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ graus de liberdade cada uma. Se $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_k$ teremos a distribuição da Amplitude Estudentizada Aumentada já conhecida.

3.6.2. O Método

A extensão 3.6. é dada pelo:

Teorema 3.9.

Sob as considerações dadas em 3.6.1., é de $1-\alpha$ a probabilidade de que os intervalos de confiança para todas as funções lineares dos parâmetros $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$, satisfaçam simultaneamente a:

$$\hat{\Psi}_{k; v_1, v_2, \dots, v_k}^* - G(\alpha) \cdot g(\underline{b}') \leq \Psi^* \leq \hat{\Psi}_{k; v_1, v_2, \dots, v_k}^* + G(\alpha) \cdot g(\underline{b}')$$

onde $\underline{b}' = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ com $b_i = \frac{c_i s_i}{n_i^{1/2}}$ para $i=1, 2, \dots, k$.

Demonstração

Para demonstrarmos o teorema precisamos da seguinte equivalência algébrica, a qual será provada após o teorema.

"Seja $\bar{R}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ a amplitude aumentada para o vetor de escalares $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in R^k$, isto é $\bar{R}(\underline{a}) = \max_{0 \leq i < j \leq k} (|a_i - a_j|)$ tal que $a_0 \equiv 0$ (veja definição 3.3) e seja $d > 0$ e $\underline{b}' = (b_1, b_2, \dots, b_k) \in R^k$, então temos:

$$\bar{R}(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq d \iff \left| \sum_{i=1}^k b_i a_i \right| \leq d \cdot g(\underline{b}')$$

Do teorema, temos que:

$$\hat{\Psi}^* - \Psi^* = \sum_{i=1}^k c_i (\bar{y}_i - \mu_i) = \sum_{i=1}^k b_i \left(\frac{\bar{y}_i - \mu_i}{\frac{s_i}{\sqrt{n_i}}} \right) = \sum_{i=1}^k b_i t_i$$

onde $b_i = \frac{c_i s_i}{\sqrt{n_i}}$ onde $t_i \sim t(v_i)$ para $i=1, 2, \dots, k$ independentes

e $G(\alpha)_{k;v_1, v_2, \dots, v_k}$ é tal que:

$$P(\bar{R}(t_1, t_2, \dots, t_k) \leq G(\alpha)_{k;v_1, v_2, \dots, v_k}) = 1-\alpha$$

e pela equivalência acima, teremos:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^k b_i t_i\right| \leq G(\alpha)_{k;v_1, v_2, \dots, v_k} \cdot g(\underline{b}')\right) = 1-\alpha \text{ e assim}$$

$$P(\hat{\Psi}^* - G(\alpha)_{k;v_1, \dots, v_k} \cdot g(\underline{b}') \leq \hat{\Psi}^* \leq \hat{\Psi}^* + G(\alpha)_{k;v_1, \dots, v_k} \cdot g(\underline{b}')) = 1-\alpha$$

Prova da equivalência usada:

Pelo Lema 3.1. temos que $\left|\sum_{i=1}^k c_i \mu_i\right| \leq h(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i|)$ on-

de $|\mu_i - \mu_{i'}| \leq h$ e $h > 0$ e $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ para $i \neq i' = 1, 2, \dots, k$ e como

$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \leq \max(\sum_{i \in P} c_i; -\sum_{j \in Q} c_j)$ teremos:

$$\left|\sum_{i=1}^k c_i \mu_i\right| \leq h \max(\sum_{i \in P} c_i; -\sum_{j \in Q} c_j) = hg(\underline{c}')$$

($\Rightarrow$) Se $\bar{R}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \max_{1 \leq i \leq k} \{|a_i|\}$ então

$\max_{1 \leq i \leq k} \{|a_i|\} \geq \max_{i \neq j} \{|a_i - a_j|\}$ e pela hipótese teremos:

$\max_{i \neq j} \{|a_i - a_j|\} \leq d \iff |a_i - a_j| \leq d \quad (i \neq j) \text{ logo,}$

$$\left|\sum_{i=1}^k b_i a_i\right| \leq d \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |b_i| \leq d \cdot g(\underline{b}')$$

Se $\bar{R}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \max_{1 \leq i < j \leq k} \{|a_i - a_j|\}$ a verificação é di

reta e análoga a anterior.

($\Leftarrow$) Basta fazermos: $b_1=1, b_2=0, \dots, b_k=0$ e pela hipótese temos:

$$\left| \sum_{i=1}^k b_i a_i \right| \leq dg(\underline{b}') \Rightarrow |a_1| \leq d \text{ e a seguir fazemos } b_1=0,$$

$b_2=1, b_3=0, \dots, b_k=0$ e teremos $|a_2| \leq d$ e assim até obtermos $|a_k| \leq d$ e portanto temos que $\max_{1 \leq i \leq k} \{|a_i|\} \leq d$.

E para obtermos que o $\max_{1 \neq i} \{|a_i - a_j|\} \leq d$ fazemos: $b_1=1, b_2=-1, b_3=0, \dots, b_k=0 \Rightarrow |a_1 - a_2| \leq d$.

Procedendo dessa forma para toda combinação (i, j) tal que $i \neq j$ e $i, j=1, 2, \dots, k$ teremos a equivalência totalmente verificada.

3.6.3. Observações

1. Em geral α é um valor fixo e $v_i = n_i - 1$ para $i=1, 2, \dots, k$ e, quando $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ teremos $v_1 = v_2 = \dots = v_k = v$, assim ao invés de escrevermos $G(\alpha)_{k; v_1, v_2, \dots, v_k}$ escreveremos $G(\alpha)_{k; v}$ cuja variável aleatória $G_{k, v}$ coincide com $Q'_{k, v}$.

2. Quando os tamanhos amostrais são diferentes, mas os n_i 's podem ser considerados suficientemente grandes tal que as variáveis aleatórias T_i 's seguem aproximadamente distribuição normal padrão, então a variável aleatória $G_{k, v_1, \dots, v_k}$ será considerada como sendo a Amplitude Aumentada de k variáveis aleatórias independentes com distribuições normais padronizadas. Não daremos aqui detalhes sobre essa distribuição,

mas no apêndice IV incluímos suas principais tabelas.

3. Caso os tamanhos amostrais n_i 's sejam diferentes, mas não suficientemente grandes para utilizarmos a aproximação para a normal padrão, então segundo o autor podemos tomar $G_{k;v_1, \dots, v_k} \equiv Q'_{k;m}$ onde $m = \min(v_1, v_2, \dots, v_k)$, e assim estaremos tendo intervalos conservativos, ao invés de intervalos exatos propostos pelo autor.

Para produzirmos intervalos exatos, podemos usar o desenvolvimento proposto por Tamhane (1979) e obtermos os valores $G_{k;v_1, v_2, \dots, v_k}(\alpha)$ de que precisamos.

Para mostrarmos o desenvolvimento de Tamhane (1979) vamos tomar o valor $G_{k;v_1, v_2, \dots, v_k}(\alpha)$ por $h'(\alpha)$, o qual será obtido da resolução da equação abaixo em h' , tal que:

$$\begin{aligned} P\left(\max_{0 \leq i < j \leq k} |T_i - T_j| \leq h'\right) &= 1 - \alpha \text{ onde } T_i \sim t_{(v_i)} \text{ para } i=1, 2, \dots, k \text{ e} \\ &\text{independentes entre si. Então: } 1 - \alpha = P\left(\max_{0 \leq i < j \leq k} |T_i - T_j| \leq h'\right) = \\ &= P\left(\max_{0 \leq i \leq k} (T_i) - T_j \leq h' \text{ para todo } j\right) = \sum_{i=0}^k P(T_i > T_j \geq T_i - h' \text{ para todo} \\ &j \neq i) = \prod_{j=1}^k \{F_{v_j}(0) - F_{v_j}(-h')\} + \sum_{i=1}^k \int_0^{h'} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \{F_{v_j}(t) - F_{v_j}(t-h')\} dF_{v_i}(t) = \\ &= \prod_{j=1}^k \{F_{v_j}(h') - \frac{1}{2}\} + \int_0^{h'} \left[\sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \{F_{v_j}(t) - F_{v_j}(t-h')\} f_{v_i}(t) \right] dt \end{aligned}$$

onde $F_v(\cdot)$ e $f_v(\cdot)$ representam as funções de distribuição e densidade da variável aleatória t-Student com v graus de liberdade.

dade.

A solução da equação acima em h' é obtida através de métodos computacionais de integração numérica, (veja Tamhane (1979)).

Como aplicação dessa extensão veja o exemplo 3.4. no final do capítulo.

3.7. A Extensão dada por Tamhane (1977)

3.7.1. Considerações Gerais

Tamhane (1977) propõe um método de comparação de médias para todos os contrastes permitindo que as variâncias populacionais possam ser totalmente diferentes entre si, assim como o tamanhos das amostras, mas como no método de Hochberg dado em 3.6., este método também exige que as amostras sejam independentes.

A desvantagem deste método sobre o de Hochberg (1976) é que, os intervalos aqui são válidos somente para contrastes e são conservativos, mas leva vantagem na aplicação, já que os valores tabelados utilizados são da distribuição t-Student.

Consideremos então k amostras independentes com $n_1, n_2, \dots, n_k$ elementos e $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ para $i=1, 2, \dots, k$ e $j=1, 2, \dots, n_i$ onde Y_{ij} é a j -ésima observação da i -ésima amostra.

3.7.2. O Método

A extensão 3.7. é inicialmente dada para todas as comparações duas a duas e então estendida para todos os contrastes.

Teorema 3.10.

É de pelo menos $1-\alpha$ a probabilidade de que os intervalos de confiança para todas as comparações duas a duas $\{\mu_i - \mu_j\}$ satisfaçam simultaneamente $\tilde{a}$:

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - \left(\frac{t_{v_i, \beta/2}^2 s_i^2}{n_i} + \frac{t_{v_j, \beta/2}^2 s_j^2}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + \left(\frac{t_{v_i, \beta/2}^2 s_i^2}{n_i} + \frac{t_{v_j, \beta/2}^2 s_j^2}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

desde que $\beta \leq 1 - (1-\alpha)^{2/k(k-1)}$ e $t_{v_i, \beta/2}$ é obtido da distribuição t-Student com v_i graus de liberdade.

Para provar este teorema veja comparações de médias com controle no próximo capítulo.

Corolário 3.5.

É de pelo menos $1-\alpha$ a probabilidade que os intervalos de confiança para todos os contrastes $\Psi = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i$ ($\sum_{i=1}^k c_i = 0$) satisfaçam simultaneamente $\tilde{a}$:

$$\hat{\Psi} - \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right)^{-1} \sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) \left(\frac{t_{v_i, \beta/2}^2 s_i^2}{n_i} + \frac{t_{v_j, \beta/2}^2 s_j^2}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right)^{-1} \sum_{i \in P} \sum_{j \in Q} c_i (-c_j) \left(\frac{t_{v_i, \beta/2}^2 s_i^2}{n_i} + \frac{t_{v_j, \beta/2}^2 s_j^2}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

desde que $\beta \leq 1 - (1-\alpha)^{2/k(k-1)}$.

Demonstração

Com o uso do teorema 3.9. e do lema 3.3., onde fazemos:

$$h_{ij} = \left(\frac{t_{v_i, \beta/2}^2 s_i^2}{n_i} + \frac{t_{v_j, \beta/2}^2 s_j^2}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_i = \hat{\mu}_i - \mu_i$$

e pela equivalência de eventos o corolário se verifica.

Exemplo 3.4. (Aplicação dos Métodos de Hochberg - (1976) e Tamhane (1977))

Suponha que queremos verificar a eficiência de 4 componentes químicos de um novo adubo de trigo, isto é, qual deles é mais eficiente quanto a produtividade de trigo. Inicialmente a mesma quantidade de canteiros foi utilizada, mas pelas condições climáticas e as fortes chuvas sobre a região, fez com que considerássemos somente os canteiros intactos, veja tabela 3.1. abaixo:

TABELA 3.1.

componentes (i)	1	2	3	4	TOTAIS
nº de canteiros (n_i)	6	8	10	12	36
produção (kg) Σ	300	344	380	492	1516
médias ($\hat{\mu}_i$)	50	43	38	41	
$\sqrt{s_i^2}$	2,0976	5,5032	6,4807	2,7961	

Supondo que a produção média segue uma distribuição normal, devemos em primeiro lugar verificar se as variâncias podem ou não serem consideradas homogêneas.

Através do teste de Bartlett, temos:

$$B = 54,867 \quad \text{e} \quad C = 1,057, \quad \text{logo} \quad \frac{B}{C} = 51,905 \quad \text{e} \quad \chi^2_{3;0,05} = 12,8.$$

Portanto rejeitamos a igualdade das variâncias a qualquer nível $\alpha \geq 0,005$, e produziremos agora o teste para a igualdade das médias, sabendo-se que as variâncias são diferentes.

Para isso utilizamos o mesmo teste do exemplo (2) no capítulo 2. Temos:

$F^* = 8,9785$ e $f = 21,116$, logo obtemos $F_{0,005}(3;f) = 5,81$. Portanto rejeitamos a igualdade das médias a qualquer nível $\alpha \geq 0,005$. Neste caso dizemos que a diferença entre as produções médias é altamente significativa.

Com uso do teorema 3.9. produziremos os seguintes testes:

$$\psi_1 = \mu_1 - \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) = 0$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_3) - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_4) = 0$$

$$\psi_3^* = \frac{4}{5} \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\psi_4^* = \frac{4}{5} \mu_1 - \mu_4 = 0$$

Temos que $G_{4;6;8;10;12}(\alpha=0,05) = 4,374$ (Veja Tamhane, 1979)

$$\hat{\psi}_1 = 9,33 \quad \text{com} \quad g_{(\underline{b}')} = 1,60$$

$$\hat{\psi}_2 = 2,0 \quad \text{com} \quad g_{(\underline{b}')} = 1,4528$$

$$\hat{\psi}_3^* = -3 \quad \text{com} \quad g_{(\underline{b}')} = 1,9456$$

$$\hat{\psi}_4^* = -1 \quad \text{com} \quad g_{(\underline{b}')} = 0,8071$$

Logo, teremos os seguintes intervalos:

para Ψ_1 : $[2,332; 16,335]$ $\therefore$ rejeitamos que $\Psi_1 \equiv 0 (\Psi_1 > 0)$

para Ψ_2 : $[-4,3545; 8,3545]$ $\therefore$ aceitamos $\Psi_2 \equiv 0$

para Ψ_3^* : $[-11,51; 5,51]$ $\therefore$ aceitamos $\Psi_3^* \equiv 0$

para Ψ_4^* : $[-4,53; 2,53]$ $\therefore$ aceitamos $\Psi_4^* \equiv 0$

Agora com a utilização do teorema 3.10. e corolário 3.5., vamos produzir os seguintes testes:

$$\Psi_1 = \mu_1 - \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) = 0$$

$$\Psi_2 = \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\Psi_3 = \mu_1 - \mu_3 = 0$$

$$\Psi_4 = \mu_1 - \mu_4 = 0$$

Com os valores: $t_{5;\beta/2}=4,035$; $t_{7;\beta/2}=3,50$;
 $t_{9;\beta/2}=3,260$ e $t_{11;\beta/2}=3,110$ onde, $\beta \leq 1 - (1-\alpha)^{\frac{2}{k-(k-1)}}=0,0085$,

$\alpha = 0,05$ e $k=4$, então tomamos $\beta=0,0085$ e obtemos:

para Ψ_1 : $[2,8570; 15,8096]$ $\therefore$ rejeitamos que $\Psi_1 \equiv 0 (\Psi_1 > 0)$

para Ψ_2 : $[-0,636; 14,636]$ $\therefore$ aceitamos que $\Psi_2 \equiv 0$

para Ψ_3 : $[4,508; 19,492]$ $\therefore$ aceitamos que $\Psi_3 \equiv 0 (\Psi_3 > 0)$

para Ψ_4 : $[4,729; 13,271]$ $\therefore$ rejeitamos que $\Psi_4 \equiv 0 (\Psi_4 > 0)$

Notemos que pelo método de Hochberg (1976) cujos intervalos são dados pelo Teorema 3.9., e embora sejam exatos, muitas vezes podem ter amplitudes maiores que os intervalos da

dos pelo Teorema 3.10. e Corolário 3.5.; isso porque os intervalos do Teorema 3.9. são para todas as funções lineares dos parâmetros, enquanto que os outros, aqui mencionados, são para as comparações duas a duas e para todos os contrastes. Por isso não poderemos comparar esses métodos quanto a amplitude dos intervalos, mas podemos notar que nas aplicações práticas, em que podemos utilizar a extensão de Tamhane (1977), teremos bons resultados.

CAPÍTULO 4

COMPARAÇÕES DE MÉDIAS ATRAVÉS DOS TESTES DE AMPLITUDE MÚLTIPLAS E OUTRAS COMPARAÇÕES DE MÉDIAS DUAS A DUAS

4.1. Introdução

Apresentaremos aqui alguns dos mais importantes Testes de Amplitude Múltiplas, que nada mais são do que Comparações de Médias duas a duas a partir de um conjunto de k médias ordenadas. Esses testes são dados nas primeiras secções deste capítulo e são devido, principalmente a Duncan, Newman-Keuls, Kramer e outros.

Estes testes permitem reagruparmos as médias em sub-grupos, cujas médias de cada um são consideradas estatisticamente homogêneas, e têm como regra básica o seguinte: "Nenhuma diferença entre duas médias pode ser considerada como significativa se as duas médias em questão estão ambas contidas em um sub-conjunto de médias, o qual tem amplitude não significativa". A amplitude em um dado sub-conjunto de médias é dada pela diferença da maior e a menor das médias estimadas contidas no sub-conjunto.

Na secção 4.4. voltamos a tratar de comparações de médias por intervalos e introduzimos o problema de Behrens-Fisher para duas amostras, e como soluções aproximadas desse problema damos os métodos de Welch e Banerjee. A seguir damos as extensões de Tamhane (1977), a partir dos métodos aproximados de Welch e Banerjee, para fazermos comparações das médias duas a duas e também quando uma das médias é uma média controle (veja secção 4.4.2.). Na secção 4.4.3. fazemos aplicações e comparações desses métodos e tiramos algumas conclusões acerca dos mesmos quando tratamos de comparações duas a duas cujas variâncias consideradas são diferentes entre si e independentes.

4.2. Comparações duas a duas num conjunto ordenado de médias, com tamanhos amostrais iguais.

Os testes a serem apresentados nessa secção permitem, após compararmos as médias duas a duas, que as agrupemos em sub-conjuntos que podem ser considerados como conjuntos homogêneos de médias.

Essas comparações são feitas com base na amplitude entre duas médias que estejam sendo comparadas, e por isso muitas vezes chamaremos tais testes de: "Testes de Amplitude".

Muitos autores descreveram sobre esses testes e um dos primeiros testes foi introduzido por Fisher (1935).

teste chamado de Least-Significant-Difference (ou L.S.D.) e nós o chamaremos de Menor Diferença Significante ou simplesmente L.S.D.

A regra geral para esse teste é a seguinte: "qualquer diferença entre duas médias é considerada significativa ao nível α desde que exceda ao valor da menor diferença significativa $\sqrt{2} t_{v;\alpha}$, onde $t_{v;\alpha}$ é obtido da distribuição t-Student com v graus de liberdade e $s^2 = \hat{\sigma}^2$ ".

Devemos lembrar ainda que estes testes também devem ser aplicados após rejeitarmos a homogeneidade das médias através de um teste F.

Este teste (L.S.D.) foi mais tarde reescrito por vários autores, em maiores detalhes, entre eles: Paterson (1939) e Davies (1949).

Podemos citar ainda alguns testes, nesta linha, mais explorados pelos autores, são eles: Teste de Newman-Keuls; Teste - t simétrico com três decisões para duas médias, depois este teste - t foi estendido para três médias e a seguir para o caso de k médias ($k > 3$) com o nome Teste - t Múltiplo; Teste de Amplitude Múltipla de Tukey; Teste - F Múltiplo e o Novo Teste de Amplitude Múltipla, o qual chamaremos aqui de Teste de Duncan para amostras balanceadas.

Como nosso objetivo neste capítulo, quanto a es-

tes testes, é apresentar as técnicas mais recentes para o caso não balanceado, não daremos aqui todos estes testes. Introduziremos somente (através de exemplos) o teste de Newman-Keuls e de Duncan para amostras balanceadas. Para uma leitura rápida sobre todos estes testes citados acima, veja: Duncan (1955).

4.2.1. O Teste de Newman-Keuls

Este teste inicialmente estudado por Newman (1939) e depois por Keuls (1950), faz comparações duas a duas a partir de um conjunto de k médias, por meio da amplitude (diferença absoluta estimada) entre elas, e utiliza a distribuição da Amplitude Estudentizada, sem nenhuma modificação daquela que conhecemos até agora.

A regra básica para este teste é a seguinte:

"Num conjunto de k médias, a diferença entre quaisquer duas médias é considerada significativa desde que, a amplitude de todo, e qualquer sub-conjunto o qual contém as duas médias dadas é significativa de acordo com um teste de amplitude ao nível α ".

Devemos considerar neste teste que as populações são normalmente distribuídas com a mesma variância e as amostras são balanceadas e colhidas independentemente.

Considere o seguinte exemplo: Duncan (1955).

Temos que separar, em grupos homogêneos, as médias de produtividade de sete variedades de cevadas $A, B, \dots, G$,

com seis réplicas (canteiros) cada uma, num experimento em bloco aleatorizado.

Consideremos a produção de cada variedade como tendo uma distribuição normal com parâmetros (μ_i, σ^2) para $i=1, 2, \dots, 7$.

Nosso objetivo é compararmos as médias μ_i 's, então devemos em primeiro lugar, usarmos o teste F para testarmos a igualdade das mesmas.

Daremos a tabela (4.1.) abaixo, onde temos: no item (a) os totais ordenados (ordem crescente), no item (b) uma análise de variância e, em (c) o erro padrão estimado para uma variedade média.

Tabela (4.1.)

(a) Produções Médias Ordenadas (variedades)						
A	F	G	D	C	B	E
49,6	58,1	61,0	61,5	67,6	71,2	71,3

(b) Análise de Variância				
Fonte de Variação	g.l.	Q.M.	F_0	
Entre Variedades	6	366,97	4,61	(**)
Entre Blocos	5	141,95		
Resíduo	30	79,64		

(c) Erro Padrão de uma variedade média	
$s_i = \sqrt{79,64/6}$	$= 3,643, \quad n_2 = 30, \quad i=1,2,\dots,7$

Nossos estimadores considerados são:

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 Y_{ij} = \bar{Y}_i, \quad \hat{\sigma}^2 = s^2 \quad \text{onde}$$

$\frac{n_2 s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_2)}$, neste caso $n_2 = 30$ e $\hat{\mu}_i \sim N(\mu_i; \sigma^2/6)$ para $i=1, 2, \dots, 7$.

Procedimentos para os testes das médias duas a duas:

Chamaremos as médias de $\bar{Y}_A, \bar{Y}_B, \dots, \bar{Y}_G$ e de acordo com a ordenação (tabela 4.1.), devemos em primeiro lugar verificarmos se $\bar{Y}_E$ (maior média observada) é significantemente diferente de $\bar{Y}_A$ (menor média observada), então fazemos:

$$q_7 = (\bar{Y}_E - \bar{Y}_A) / s_i = (71,3 - 49,6) / 3,643 = 5,957$$

onde o número 7 em q_7 corresponde ao número de passos entre $\bar{Y}_E$ e $\bar{Y}_A$ e o valor q_7 será comparado com o valor da estatística $Q_{r;n_2}$: Amplitude Estudentizada com $r=7$ e $n_2=30$. Caso o valor q_7 seja maior do que o valor $q_{7;30;\alpha}$ obtido de $Q_{7,30}$ para um dado α , então consideramos $\bar{Y}_E$ e $\bar{Y}_A$ significantemente diferentes.

Caso $\bar{Y}_E$ e $\bar{Y}_A$ sejam consideradas significantemente diferentes, então passamos verificar $\bar{Y}_E$ e $\bar{Y}_F$ através de q_6 e $Q_{6;30}$, de maneira análoga.

Isto é feito até encontrarmos uma diferença não significativa ou (em caso contrário) até chegarmos a comparar $\bar{Y}_E$ com $\bar{Y}_B$.

A etapa seguinte consiste em começarmos tudo novamente, a partir da comparação $\bar{Y}_B$ e $\bar{Y}_A$ e assim por diante.

Para descobrirmos quantos passos existem da média

$\bar{Y}_i$ para $\bar{Y}_j$ ($i < j$), fazemos $r = j - i + 1$, por exemplo: entre $\bar{Y}_B \equiv \bar{Y}_6$ e $\bar{Y}_A \equiv \bar{Y}_1$ temos $r = 6 - 1 + 1 = 6$ passos.

Para obtermos maior rapidez nas conclusões dos testes, podemos utilizar a tabela (4.2.) abaixo.

Tabela (4.2)

(a) Ordem	1	2	3	4	5	6	7
Tratamentos Ordenados	A	F	G	D	C	B	E
Médias ($\bar{Y}_i$)	49,6	58,1	61,0	61,5	67,6	71,2	71,3

(b)

(d)*

	A	F	G	D	C	B	E
A	-	8,5	11,5	11,9	18,0*	21,6*	21,7*
F		-	1,9	3,4	9,5	13,1	13,2
G			-	0,5	6,6	10,2	10,3
D				-	6,1	9,7	9,8
C					-	3,6	3,7
B						-	0,1
E							-

(c) Valores de r	2	3	4	5	6	7
$q_{r;30;\alpha=0,05}$	2,89	3,49	3,84	4,10	4,30	4,46
$(q_{r;30;\alpha=0,05})s_i$ onde $s_i = 3,643$	10,53	12,82	13,99	14,94	15,66	16,24

(para a parte (d) considere as caselas com *; resultado final).

Na parte (b) da tabela acima, temos todas as diferenças necessárias para o teste, isto é, na primeira linha, da direita para a esquerda temos as diferenças $\bar{Y}_E - \bar{Y}_A$, $\bar{Y}_B - \bar{Y}_A$, ..., $\bar{Y}_F - \bar{Y}_A$; e assim para as outras linhas.

Para utilização da tabela, faça o seguinte:

Para testar se $\mu_E = \mu_A$ contra $\mu_E \neq \mu_A$ verificamos se $\bar{Y}_E - \bar{Y}_A = 21,7$ é maior ou não que $(q_{7;30}; \alpha=0,05) \cdot s_i = 16,24$, e por ser maior rejeitamos que $\mu_E = \mu_A$. Para concluirmos esse resultado, pomos uma * na casela de BxA, e assim por diante.

Portanto, concluímos:

$\bar{Y}_E$ e $\bar{Y}_A$, $\bar{Y}_B$ e $\bar{Y}_A$, $\bar{Y}_C$ e $\bar{Y}_A$ são significativamente diferentes ao nível $\alpha=0,05$.

Podemos ainda usar a seguinte notação:

AFGDCBE

e devemos entendê-la da seguinte maneira: "Qualquer duas médias não sublinhadas pela mesma reta são consideradas significativamente diferentes".

Uma outra forma de notação é:

(AFGD) e (FGDCBE)

"Qualquer duas médias no mesmo sub-conjunto são consideradas homogêneas e em sub-conjuntos distintos são consideradas heterogêneas.

Num experimento com muitas médias para serem comparadas, através de um teste de Amplitude Múltipla, teremos um desenvolvimento muito trabalhoso. Então mais adiante daremos

uma técnica chamada "Técnica de Saltos em Pequenos Cortes", por meio de um exemplo com 25 médias.

4.2.2. Teste de Duncan para Amostras Balanceadas (1955).

O Teste de Newman-Keuls dado por 4.2.1. mantém o nível de significância α para qualquer par de médias que estejam sendo comparadas, não importando quantos passos as separam. Na realidade o nível de significância com relação a todos os testes das médias duas a duas, considerando como uma única comparação de duas médias, é menor do que α , ou seja, o poder para o conjunto de todos os testes é menor do que o poder para um simples teste ao nível α .

Duncan (1955) desenvolveu um procedimento o qual usa um "nível de proteção" α para o conjunto de todas as comparações, ao invés de um nível α para comparações individuais. Por exemplo: para um teste individual com um nível de proteção $\alpha=0,01$, teremos também um nível de significância $\alpha=0,01$ para comparações de médias ordenadas com 2 passos; enquanto que para médias que difiram por 3 passos, teremos um nível de significância igual a $1-(0,99)^2=0,02$, para médias que difiram por 4 passos teremos um nível de significância de $1-(0,99)^3=0,03$. Então se fixarmos o nível de proteção em α , o nível de significância é maior do que α nos testes individuais para médias que difiram por mais de 2 passos.

O complemento de qualquer nível de significância

para p-médias pode ser considerado como um nível de proteção para p-médias, e é definido como sendo a probabilidade mínima de não encontrarmos errôneas diferenças significantes entre p-médias observadas.

Muitas vezes, a fim de melhor controlarmos os erros de classificação incorreta, é que pensamos em fixar os níveis de proteção ao invés dos níveis de significância.

O procedimento de Duncan (1955), é semelhante ao procedimento de Newman-Keuls, a estatística q_r utilizada é a mesma, onde r é o número de passos entre as duas médias que estão sendo comparadas. A diferença entre os dois procedimentos está nos valores tabelados das estatísticas, pois o procedimento de Newman-Keuls utiliza as tabelas normais da estatística "Amplitude Estudentizada", enquanto que no procedimento de Duncan as tabelas utilizadas são da "Amplitude Estudentizada preparada por Duncan", para níveis de proteção. Essas tabelas serão dadas no apêndice IV.

Mostraremos o teste de Duncan através de um exemplo, cujos dados são os mesmos da tabela (4.1).

Consideremos as partes (a) e (b) da Tabela (4.2.) e produziremos aqui as partes (c') e (d').

Os valores da estatística da Amplitude Estudentizada preparada por Duncan serão representados na Tabela 4.3. por $q_{r,30}^*; \alpha=0,05$.

Tabela (4.3)

(c') Valores de r	2	3	4	5	6	7
$q_{r,30,\alpha=0,05}^*$	2,89	3,04	3,12	3,20	3,25	3,29
$(q_{r,30,\alpha=0,05}^*) \cdot s_i$	10,53	11,07	11,37	11,66	11,84	11,99

(d')	A	F	G	D	C	B	E
A			*	*	*	*	*
F						*	*
G							
D							
C							
B							
E							

Conclusão:

AFGDCBE ou (GDCBE)(AF)(FGDC)

4.3. Comparações duas a duas num conjunto ordenado de médias com tamanhos amostrais desiguais.

Kramer, C.Y. (1956) num de seus trabalhos apresenta um método bem simples de comparações de médias num conjunto ordenado delas, com tamanhos amostrais desiguais. Este método será dado aqui e exemplificado, como uma extensão do teste de Duncan "*Novo Teste de Amplitude Múltipla*", mas lembramos que pela sua simplicidade, ele pode ser estendido a qualquer método de amplitude múltipla de tamanhos amostrais iguais.

O próprio Duncan (1957) apresenta um método de comparações de médias ordenadas, cujas variâncias são heterogêneas (mas proporcionais a σ^2) e correlacionadas. Este método de Duncan é pouco mais geral que o de Kramer, mais poderoso e suas aplicações não são tão simples quanto o método de Kramer.

4.3.1. O Método de Kramer (1956)

Consideremos k grupos amostrais de populações normais com médias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ e variâncias $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2$.

Suponhamos, para facilidade de aplicação, que as k médias sejam dadas por: $\{A, B, C, D, E\}$, assim teremos $k=5$ e sejam $\bar{Y}_A, \bar{Y}_B, \dots, \bar{Y}_E$ seus estimadores. Sejam $n_A, n_B, \dots, n_E$ os tamanhos amostrais e $s^2 = \hat{\sigma}^2$ com n_2 graus de liberdade e $r=1, 2, \dots, k=5$.

Os testes seguem as mesmas linhas daqueles apresentados anteriormente, com a diferença que antes multiplicávamos

$q_{r;n_2;\alpha}^*$ por $s_i = \left(\frac{s^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$, agora multiplicaremos $q_{r;n_2;\alpha}^*$ por $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_B} + \frac{1}{n_C}\right)s^2\right)^{\frac{1}{2}}$ quando estamos testando $\bar{Y}_B$ com $\bar{Y}_C$.

Desta forma teremos que $\bar{Y}_B$ e $\bar{Y}_C$ serão significativamente diferentes, desde que:

$$\bar{Y}_B - \bar{Y}_C > (q_{r;n_2;\alpha}^*) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_B} + \frac{1}{n_C} \right) s^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

onde $\bar{Y}_B > \bar{Y}_C$ e r é o número de passos entre $\bar{Y}_B$ e $\bar{Y}_C$.

Então se as médias observadas, após ordenação re

sultarem em;

$$\bar{Y}_C < \bar{Y}_A < \bar{Y}_D < \bar{Y}_E < \bar{Y}_B \quad \text{e} \quad \text{ainda}$$

$$\bar{Y}_B - \bar{Y}_C > (q_{5;n_2;\alpha}^*) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_B} + \frac{1}{n_C} \right) s^2} \quad \text{então podemos escre}$$

ver:

$$(\bar{Y}_B - \bar{Y}_C) \sqrt{\frac{2n_B n_C}{n_B + n_C}} > s \cdot q_{5;n_2;\alpha}^*$$

Chamaremos a quantidade $(\bar{Y}_B - \bar{Y}_C) \sqrt{\frac{2n_B n_C}{n_B + n_C}}$ de diferença ajustada para as médias B e C.

Se $\bar{Y}_B$ e $\bar{Y}_C$ forem significantemente diferentes, continuamos o teste verificando se:

$$(\bar{Y}_B - \bar{Y}_A) \sqrt{\frac{2n_B n_A}{n_B + n_A}} > s \cdot q_{4;n_2;\alpha}^*$$

Se constataremos que $\bar{Y}_B$ e $\bar{Y}_A$ são significantemente diferentes, passamos a verificar $\bar{Y}_B$ e $\bar{Y}_D$, mas se $\bar{Y}_B$ e $\bar{Y}_A$ não forem significantemente diferentes, passamos a comparar $\bar{Y}_E$ com $\bar{Y}_C$ e assim por diante; como nos métodos anteriores.

Observação (4.1.)

A quantidade $q_{r;n_2;\alpha}^*$ é obtida da tabela da Amplitude Estudentizada preparada por Duncan para $\alpha=0,05$ e $\alpha=0,01$. Por isso essa extensão é para o método de Duncan.

Se utilizarmos $q_{r;n_2;\alpha}$ das tabelas normais da Amplitude Estudentizada; a extensão passa a ser para o método de Newman-Keuls.

Exemplo Numérico

Consideremos um experimento com 6 médias, dado pela parte a da tabela abaixo.

Tabela (4.4.)

(a) Tratamento médio ordenado e número de réplicas

	F	D	A	B	C	E
$\bar{Y}$	458	498	521	528	564	630
n	3	5	4	3	5	2

(b) Análise de Variância

fonte de variação	g.l.	Q.M.	F_0	
entre tratamentos	5	9306,17	3,88	*
erro	16	2397,00		

(c) $s = \sqrt{2397} = 48,96$

valores de r	2	3	4	5	6
$q_{r;16;\alpha=0,05}^*$	3,00	3,15	3,23	3,30	3,34
$s \cdot q_{r;16;0,05}^*$	146,88	154,22	158,14	161,57	163,53

Continuação da Tabela (4.4)

(d) Conclusão

	F	D	A	B	C	E
	3	5	4	3	5	2
F	-	-	-	121,10	205,64	264,88
D		-	-	-	147,14	223,08
A			-	-	-	177,64
B				-	-	157,08
C					-	111,54
E						-

F D A B C E ou (CE) (DABC) (FDAB)

A parte (d) da tabela acima foi produzida da seguinte maneira, por exemplo: Se quisermos verificar se $\bar{Y}_E$ e $\bar{Y}_F$ são ou não significativamente diferentes, fazemos:

$$(\bar{Y}_E - \bar{Y}_F) \sqrt{\frac{2n_E n_F}{n_E + n_F}} = (630 - 458) \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 + 3}} = 172,1,54 = 264,88$$

e comparamos com $s.q_{6;16;0,05} = 163,53$ pois temos 6 passos entre E e F.

E como constatamos que:

$$(\bar{Y}_E - \bar{Y}_F) \sqrt{\frac{2n_E n_F}{n_E + n_F}} > s.q_{6;16;0,05} \quad \text{então a}$$

diferença entre $\bar{Y}_E$ e $\bar{Y}_F$ é considerada significativamente diferente de zero, Pomos um asterisco na casela E×F e continuamos

o teste.

Este método (Kramer (1956)) é aplicável para os casos em que no máximo os tamanhos amostrais sejam diferentes entre si. A seguir, secção (4.3.2.), daremos um método introduzido por Duncan (1957) que permite, além das amostras serem não balanceadas, que as populações sejam correlacionadas, mas com mesma variância.

4.3.2. O Método de Duncan (1957) para amostras não balanceadas e correlacionadas.

Seja $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ as médias de k populações normais e $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_k$ seus estimadores não viesados com distribuições normais, tal que a variância da diferença de cada par é dada por:

$\text{Var}(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) = k_{ij}\sigma^2$, onde k_{ij} é suposto conhecido, e σ^2 é a esperança do erro médio quadrático para $i=1,2,\dots,k$, e $j=1,2,\dots,k$. Seja $s^2 = \hat{\sigma}^2$ onde $\frac{n_2 s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n_2)}$ e independente de $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_k)$.

Seja $a_{ij} = (2/k_{ij})^{1/2}$ o fator de ajustamento para $(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)^* = a_{ij}(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)$ onde dizemos que $(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)^*$ é a diferença ajustada entre as médias $\hat{\mu}_i$ e $\hat{\mu}_j$.

Consideremos $R'_r = s \cdot q_{r;n_2;\alpha}^*$ o valor crítico para testarmos duas médias que estejam r passos separadas onde $q_{r;n_2;\alpha}^*$ é obtido da tabela da Amplitude Estudentizada, preparada por Duncan (1955).

A regra básica para este teste é a seguinte:

"Qualquer sub-conjunto de r médias é homogêneo se a maior diferença ajustada no sub-conjunto não excede o valor crítico R'_r ".

Este método é um pouco diferente do método de Kramer dado anteriormente, isto é, aqui para que um sub-conjunto de r médias seja homogêneo, devemos testar todas as diferenças ajustadas possíveis com o valor crítico R'_r de cada sub-conjunto ao qual elas pertencem, e então constataremos que todas as diferenças são não significantes. No método de Kramer, um conjunto de r médias é considerado homogêneo desde que, a diferença ajustada entre a maior e menor média do conjunto em questão não exceda o valor crítico R'_r .

Veja o exemplo a seguir.

Exemplo:

A tabela abaixo é originária de um experimento completamente aleatório com sete tratamentos e réplicas desiguais.

O teste aplicado é considerado como uma extensão do Teste de Duncan para Amostras Balanceadas ao nível $\alpha=0,05$.

Tabela (4.5.)

(a) Análise de Variância

F.V.	g.l.	Q.M.	$s = \sqrt{Q.M.}$
Entre tratamentos	6		
Resíduo	16	5394,6	73,45

Continuação da Tabela (4.5.)

(b) Valores Críticos: $R'_r = s \cdot q_{r;16;0,05}^*$

valores de r	2	3	4	5	6	7
$q_{r;16;0,05}^*$	3,00	3,15	3,23	3,30	3,34	3,37
R'_r	220,4	231,4	237,2	242,4	245,3	247,5

(c) Tratamentos Médios Ordenados e Número de Réplicas

D	F	A	B	C	E	G
680	734	743	851	873	902	945
3	2	5	5	3	2	3

(d) Diferenças Ajustadas

$$a_{ij} = \sqrt{\frac{2}{k_{ij}}} = \sqrt{2 / \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_j} \right)} = \sqrt{2n_i n_j / (n_i + n_j)}$$

neste caso, os fatores de ajustamento são causados pelas diferenças dos números de réplicas $n_1, n_2, \dots, n_k$.

$$(G-D)' = (G-D) \cdot a_{GD} = 265 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 16} = 459,0$$

e assim obtemos:

$$\begin{array}{lll} (G-F)' = 326,8 & (E-A)' = 268,7 & (B-F)' = 197,7 \\ (G-A)' = 391,1 & (C-D)' = 334,3 & (B-A)' = 241,5 \\ (G-B)' = 182,0 & (C-F)' = 215,3 & (A-D)' = 122,0 \\ (E-D)' = 343,9 & (C-A)' = 251,7 & \\ (E-F)' = 237,6 & (C-B)' = 42,6 & \\ & (B-D)' = 331,1 & \end{array}$$

Continuação da Tabela (4.5.)

(e) Testes

seqüências	passos	resultados
1:	$(G-D)' > R_7'$; $(G-F)' > R_6'$; $(G-A)' > R_5'$; $(G-B)' \not> R_4'$	(BCEG)
2:	$(E-D)' > R_6'$; $(E-F)' \not> R_5'$. FABCE: $(E-A)' > R_5'$. FBCE: $(E-F)' > R_4'$. BCE.....	(BCE)
3:	$(C-D)' > R_5'$; $(C-F)' \not> R_4'$. FABC: $(C-A)' > R_4'$. FBC: $(C-F)' \not> R_3'$; $(C-B)' \not> R_3'$; $(B-F)' \not> R_3'$	(FBC)
4:	$(B-D)' > R_4'$; $(B-F)' \not> R_3'$. FAB: $(B-A)' > R_3'$ FB: $(B-F)' \not> R_2'$	(FB)
5:	$(A-D)' \not> R_3'$; $(A-F)' \not> R_3'$; $(F-D)' \not> R_3'$	(DFA)

(f) Resultado Final:

(DFA) (FBC) (BCEG)

Quaisquer duas médias que não apareçam dentro dos mesmos parênteses são consideradas significantemente diferentes e caso apareçam são consideradas homogêneas.

A parte (e) da Tabela (4.5.) por ser a mais importante, merece algumas explicações, as outras partes são semelhantes ao método de Kramer.

Da seqüência (1) concluímos que o conjunto (BCEG) é homogêneo e chegamos a esse resultado a partir do 4º passo. Na realidade, deveríamos constatar que: $(G-C)' \not> R_4'$, $(G-E)' \not> R_4'$, $(E-B)' \not> R_4'$, $(E-C)' \not> R_4'$ e $(C-B)' \not> R_4'$, mas não foi necessário efetuar esses cálculos porque, notemos que o número de réplicas dos tratamentos ordenados maiores que B (isto é, C e E) são

menores do o número de réplicas de B, e portanto os fatores de ajustamentos a_{ij} serão sempre menores do que a_{GB} , e daí produzirão uma diferença ajustada menor do que $(G-B)'$, e como constatamos que $(G-B)' \not\geq R_4'$ então essas outras diferenças ajustadas também serão menores do que R_4' .

O resultado da sequência (2) está incluso no resultado da sequência (1) assim como o resultado da sequência (4) está na sequência (3), e por isso não precisamos escrevê-los novamente.

Quando em uma sequência de teste encontrarmos uma diferença ajustada significativa (isto é, maior do que R_r'), a qual não contém a maior média, do conjunto em questão, teremos então dois sub-conjuntos para serem novamente testados, por exemplo:

Suponha que temos 4 médias P, S, R, Q com 1; 50; 100 e 1 réplicas cada uma respectivamente, e encontramos os seguintes resultados:

$(Q-P)' \not\geq R_4'$. PSRQ : $(Q-S)' \not\geq R_4'$, $(Q-R)' \not\geq R_4'$, $(R-P)' \not\geq R_4'$, $(R-S)' > R_4'$, então separamos o conjunto {P,S,R,Q} em dois sub-conjuntos {P,R,Q} e {P,S,Q} e testamo-os separadamente com R_3' .

4.3.3. O Método do Salto com Pequenos Cortes, para um grande número de médias.

Para ilustração desse método o autor (Duncan, 1957) dá um exemplo de um planejamento cruzado completo 5×5 .

Os dados são tirados do livro Cochran e Cox (1950) (sec-

ção 10.29) para um planejamento com duas repetições.

Temos então um planejamento com 25 tratamentos replicados 4 vezes, onde cada réplica contém 5 blocos com 5 observações (tratamentos) em cada bloco, e o planejamento da réplica I é o mesmo que o da réplica III, assim como o das réplicas II e IV, por isso dizemos que esse planejamento tem 2 repetições.

Para maiores esclarecimentos recomendamos ao leitor o livro Cochran e Cox (1950), ocasião em que o mesmo poderá inteirar-se de um teste F (aproximado) para detectar que os tratamentos médios ajustados são significativamente diferentes.

Os dados estão na tabela abaixo, onde na parte (a) teremos o erro médio quadrático s^2 (E_e para Cochran e Cox) com n_2 graus de liberdade. Na parte (b) teremos os fatores de ajustamento para as diferenças ajustadas entre os tratamentos, nesse experimento esses fatores são dois valores somente, pois o número de observações por tratamento é o mesmo, mas ao encontrarmos a variância para a diferença entre 2 tratamentos, devemos saber se os mesmos pertencem ou não ao mesmo bloco; daí o fato de termos esses dois fatores de ajustamento.

Cochran e Cox dá como sendo $\frac{2}{r} [1+(n-1)w] E_e$ e $\frac{2}{r} [1+nw] E_e$, os estimadores das variâncias da diferença entre 2 tratamentos médios no mesmo bloco e em blocos diferentes, respectivamente.

Para nós, $E_e = s^2$; r' = (número de réplicas); $n=2$ (número de tratamentos);

mero de repetições) e $w=0,1270$ (constante de ajustamento).

Então denotaremos por $k_{++}\sigma^2$ e $k_{+-}\sigma^2$ as variâncias das diferenças entre 2 tratamentos totais quando estão no mesmo bloco e em blocos diferentes, respectivamente, teremos:

$$k_{++}=2r'(1+(n-1)w) \text{ e } k_{+-}=2r'(1+nw) \text{ e como}$$

$$a_{++}=\sqrt{2/k_{++}} \text{ e } a_{+-}=\sqrt{2/k_{+-}}. \text{ Teremos:}$$

$$a_{++}=\left[r'(1+(n-1)w)\right]^{-\frac{1}{2}}=0,471 \text{ e } a_{+-}=\left[r'(1+nw)\right]^{-\frac{1}{2}}=0,447$$

Na parte (c) da tabela teremos os tratamentos totais ordenados e os valores críticos necessários para o teste. Na primeira coluna temos os tratamentos de 1 a 25 ou de A a Y, ordenados de acordo com os totais observados, e ainda o índice (i,j) após o tratamento, para sabermos que a primeira observação deveu-se ao bloco i e a segunda ao bloco j, para $i,j=1,2,\dots,5$.

Na segunda coluna temos os tratamentos totais ajustados pelo próprio experimento dados por Cochran e Cox e entre parênteses os totais ajustados agora pelo menor dos fatores de ajustamento. Neste caso temos somente 2 valores a_{++} e a_{+-} e como o menor deles é a_{+-} , então multiplicamos todos os totais por a_{+-} , obtendo assim os valores entre parênteses.

Nas duas últimas colunas temos os valores críticos $q_{r;n_2;\alpha}^*$ e $R_r'=s.q_{r;n_2;\alpha}^*$.

A parte (d) da tabela, a mais importante, mostra os testes e suas conclusões.

Tabela (4.6.)

(a) Resíduo

$$n_2 = 56, \quad s^2 = 13,6 \quad s = 3,69$$

(b) Fatores de ajustamento para as diferenças entre os tratamentos totais:

dois tratamentos no mesmo bloco $a_{++} = 0,471$

dois tratamentos em blocos diferentes $a_{+-} = 0,447$

(c) Tratamentos totais ordenados e valores críticos

Tratamentos	Total	r	$q_{r;n_2;\alpha=0,05}^*$	R'_r
11 K (3,1)	88,4 (39,5)	25	3,47	12,80
2 B (1,2)	77,3 (34,6)	24	3,47	12,80
15 O (3,5)	74,7 (33,4)	23	3,47	12,80
14 N (3,4)	71,6 (32,0)	22	3,47	12,80
24 X (5,4)	70,6 (31,6)	21	3,47	12,80
22 V (5,2)	68,1 (30,4)	20	3,47	12,80
1 A (1,1)	66,6 (29,8)	19	3,46	12,77
21 U (5,1)	61,4 (27,4)	18	3,45	12,73
4 D (1,4)	58,8 (26,3)	17	3,44	12,69
16 P (4,1)	58,3 (26,1)	16	3,43	12,66
23 W (5,3)	55,7 (24,9)	15		
25 Y (5,5)	52,7 (23,6)	14		
13 M (3,3)	52,7 (23,6)	13		
18 R (4,3)	52,6 (23,5)	12		
20 T (4,5)	51,6 (23,1)	11		
12 L (3,2)	51,1 (22,8)	10		
5 E (1,5)	50,9 (22,8)	9		
7 G (2,2)	47,6 (21,3)	8		
6 F (2,1)	46,9 (21,0)	7		
10 J (2,5)	46,2 (20,7)	6		
17 Q (4,2)	46,0 (20,6)	5		
8 H (2,3)	45,2 (20,2)	4		
3 C (1,3)	44,9 (20,1)	3		
9 I (2,4)	38,1 (17,0)	2		
19 S (4,4)	21,5 (9,6)	1		

Continuação da Tabela (4.6.)

(d) Testes

Sequências	Resultados
1: $39,5-R'_{25}=26,70$; $39,5-R'_8=27,4$ $a_{++}(K-U) > R'_8$; $a_{++}(K-A) \not> R'_7 \dots \dots \dots (AVXNOBK)$	
2: $34,6-R'_{24}=21,80$; $34,6-R'_{16}=21,94$ $a_{++}(B-E) \not> R'_{16} \dots \dots \dots (ELTRMYWPDUAVXNOB)$	
3: $33,4-R'_{23}=20,60$; $33,4-R'_{18}$ $a_{++}(O-J) > R'_{18}$; $a_{+-}(O-F) \not> R'_{17} \dots \dots \dots (FGELTRMYWPDUAVXNO)$	
4: $32-R'_{22}=19,20$; $32-R'_{20}=19,20$ $a_{++}(N-C) \not> R'_{20} \dots \dots \dots (CHQJFG \dots \dots \dots XN)$	
5: $31,6-R'_{21}=18,80$	
6: $30,4-R'_{20}=17,60$	
7: $29,8-R'_{19}=17,03$	
8: $27,4-R'_{18}=14,67 \dots \dots \dots (ICH \dots \dots \dots WPDU)$	
9: $9,6+R'_{17}=22,29$; $9,6+R'_8=21,7$ $a_{++}(G-S) \not> R'_8 \dots \dots \dots (SICHQJFG)$	

(e) Resultado Final

SICHQJFGELTRMYWPDUAVXNOBK

Dois tratamentos quaisquer não sublinhados pela mesma reta são significativamente diferentes.

Faremos agora alguns comentários sobre a tabela.

Os valores críticos R'_r são obtidos do produto

$q^*_{r;n_2;\alpha} \cdot s = R'_r$, onde $q^*_{r;n_2;\alpha}$ são os valores da tabela da Ampli

tude Estudentizada preparada por Duncan para $\alpha=0,05$.

Quando um grande número de tratamentos são envolvidos (como nesse exemplo), então não é necessário todos os valores críticos R'_r . Podemos obtê-los à medida que forem necessários nos passos das sequências em (d).

Na segunda coluna da parte (c), temos entre parênteses, os valores dos totais ajustados por baixo, isto é, os totais são multiplicados pelo menor dos fatores de ajustamento ($a_{+-}=0,447$). Estes valores é que nos dá uma idéia do pulo que devemos dar, em cada sequência, pois se uma diferença entre dois tratamentos é considerada significativa, e o fator de ajustamento utilizado foi o menor deles, então essa diferença será significativa, qualquer que seja o fator de ajustamento utilizado.

Por exemplo:

$$M.a_{+-} < K.a_{+-} - R'_{25} \implies (K-M)a_{+-} > R'_{25}$$

logo, $(K-M)' = (K-M)a_{++} > R'_{13}$ pois $R'_{25} > R'_{13}$

Se dois tratamentos pertencem ao mesmo bloco usamos $a_{++}=0,471$ como fator de ajustamento e caso contrário usamos $a_{+-}=0,447$.

Dois tratamentos pertencem ao mesmo bloco desde que haja uma coincidência na ordem de um dos números (i,j) logo após os tratamentos na primeira coluna da parte (c) da tabela. Por exemplo: O tratamento M tem entre parênteses os números (3,3) e o tratamento K tem (3,1), então como nos tratamentos

e K aparece o número 3 nas primeiras posições, logo, eles pertencem ao mesmo bloco, se tivermos os tratamentos (3,2) e (2,3) então eles não pertencem ao mesmo bloco.

Para termos uma idéia do tamanho do pulo que precisamos dar, olhando para a sequência (1) da parte (d), fizemos o seguinte: No primeiro passo o maior valor crítico $R'_r = R'_{25} = 12,80$ é subtraído do maior total ajustado 39,5 para K, obtendo 26,70. Daí concluímos que os tratamentos cujos totais ajustados estão abaixo de 26,70, são significativamente menores do que K, são eles D,P,...,S. Esses tratamentos são abandonados, restando o sub-conjunto {UA K} o qual será agora estudado (segundo passo).

No segundo passo, devemos comparar todas as diferenças ajustadas $(K-U)'$; $(F-A)'$, ..., $(K-B)'$ com os seus respectivos valores críticos R'_r , até encontrarmos uma não significativa. Para este sub-conjunto {UAV....BK} temos:

$(K-U)' = a_{++}(K-U) > R'_8$; $(K-A)' = a_{++}(K-A) \not> R'_7$, portanto o sub-conjunto {AV BK} pode ser considerado homogêneo.

Na segunda sequência começamos tudo novamente, como se o tratamento K não existisse e obtemos:

$$34,6 - R'_{24} = 21,80; 34,6 - R'_{16} = 21,94 : \text{ELT....OB};$$

$$a_{++}(B-E) \not> R'_{16} \text{.....(ELT....OB)}.$$

Na terceira sequência procedemos como se os tratamentos K e B não existissem e começamos pelo tratamento O.

Desta forma procedemos até a oitava sequência, sobrando somente o tratamento S para ser testado.

Para terminar o teste devemos incluir o total mais baixo S em um sub-conjunto homogêneo ou chegarmos à conclusão que o mesmo não possa ser incluído em nenhum sub-conjunto.

A última (nona) sequência é feita de maneira inversa às outras.

O maior sub-conjunto homogêneo possível no qual o último tratamento S poderia ser incluído é SI....D e contém 17 tratamentos.

O primeiro passo é obter $S+R'_{17}=9,6+12,69=22,29$, daí segue que todos os tratamentos com totais ajustados acima de 22,29 (ELT...) são significativamente maiores do que S.

Então o sub-conjunto restante, com 8 tratamentos, {S,I,...,G} é o maior sub-conjunto homogêneo em que S pode ser incluído, e devemos para isso verificar:

$S+R'_8 = 21,70$, e como nenhum total ajustado excede esse valor e $a_{+-}(G-S) \not\geq R'_8$, então o sub-conjunto SIC....FG será considerado homogêneo.

Assim, o teste termina, e os resultados finais estão na parte (e) da tabela, onde temos seis sub-conjuntos cujas diferenças entre os tratamentos são não significantes.

Notemos que nesse exemplo o número de observações por tratamento é o mesmo e temos dois fatores de ajustamento pelo tipo do planejamento, mas podemos aplicar esta técnica para números de observações diferentes por tratamento e então teremos vários fatores de ajustamento e então procedemos da

mesma maneira com o teste.

4.4. Comparações de médias duas a duas por intervalos

O problema de Behrens-Fisher colocado inicialmente por Behrens (1929) e depois por Fisher (1935), que trata-se de encontrar intervalos de confiança para a diferença de duas médias estimadas de duas populações normais com médias μ_1 e μ_2 e variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas e diferentes, através de duas amostras dessas populações.

Esse problema, estudado por muitos autores e sem solução exata até hoje, com algumas soluções aproximadas, entre elas a de Welch (1938), Banerjee (1961) e outros que não serão citados aqui.

4.4.1. As soluções aproximadas de Welch e Banerjee para o problema de Behrens-Fisher.

Essas soluções aproximadas serão apresentadas pelos teoremas a seguir e quanto às demonstrações, apenas citaremos onde encontrá-las.

Consideremos duas amostras de duas populações normais com parâmetros (μ_1, σ_1^2) e (μ_2, σ_2^2) independentes entre si. Estaremos interessados nos intervalos de confiança para $\mu_1 - \mu_2$, então teremos:

Teorema (4.1) (Método de Banerjee - 1961)

Com as suposições acima, é de pelo menos $1-\alpha$ a probabilidade de que a diferença $\mu_1 - \mu_2$ satisfaça $\tilde{a}$:

$$(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) - \left[\frac{t_{v_1, \alpha/2}^2 \cdot s_1^2}{n_1} + \frac{t_{v_2, \alpha/2}^2 \cdot s_2^2}{n_2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) + \left[\frac{t_{v_1, \alpha/2}^2 \cdot s_1^2}{n_1} + \frac{t_{v_2, \alpha/2}^2 \cdot s_2^2}{n_2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

onde $t_{v_i, \alpha/2}$ é obtido da distribuição t-Student com v_i graus de liberdade para $i=1,2$.

Em geral $v_i = n_i - 1$, onde n_i é o tamanho da amostra para $i=1,2$.

O valor exato $1-\alpha$ é obtido quando a razão $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 0$ ou ∞ .

Veja Banerjee (1961).

Teorema (4.2) (Método de Welch)

Com as suposições acima é aproximadamente $1-\alpha$ a probabilidade de que a diferença $\mu_1 - \mu_2$ satisfaça $\tilde{a}$:

$$(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) - t_{\hat{v}_{12}, \alpha/2} \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) + t_{\hat{v}_{12}, \alpha/2} \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{onde } \hat{v}_{12} = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\left[\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2-1)} \right]}$$

Notemos que $\hat{v}_{12}$ pode não ser um valor inteiro, então neste caso podemos obter o valor $t_{\hat{v}_{12}, \alpha/2}$ através de uma interpolação dos valores da tabela da distribuição t-Student.

A expressão "aproximadamente" deve-se ao fato de que o coeficiente de confiança real para este intervalo, em geral, está bem próximo de $1-\alpha$ (fixado).

Para melhores esclarecimentos, veja por exemplo: Wang (1971).

Para a demonstração deste Teorema (4.2.) veja: Welch (1938).

Tamhane (1977) estende esses procedimentos (Banerjee, Welch) para todas as comparações de médias duas a duas e também quando uma delas pode ser uma média controle, assim como para os contrastes.

Daremos a seguir as extensões de Tamhane para as comparações duas a duas e também comparações com uma média controle, para um grupo de k médias, a menos no caso do procedimento de Banerjee, pois as comparações múltiplas de médias duas a duas e contrastes foram apresentadas no capítulo 3 pelos teorema 3.10. e corolário 3.5., respectivamente.

4.4.2. Comparações com uma média controle, com base nas aproximações de Banerjee e Welch, para o caso em que as variâncias são desiguais, desconhecidas e independentes.

Suponha agora que ao invés de duas, temos k médias populacionais desconhecidas, onde μ_k é considerada a média controle.

Estaremos interessados nos intervalos de confiança para as diferenças $\mu_i - \mu_k$ para $i=1, 2, \dots, k-1$.

As populações aqui consideradas são supostas normalmente distribuídas, independentes e com variâncias desiguais entre si.

Seja n_i ($i=1, 2, \dots, k$) os tamanhos amostrais das respectivas amostras.

Com base na aproximação de Banerjee, temos:

Teorema (4.3.) (Com base no método de Banerjee)

Com as suposições acima temos que é de pelo menos $1-\alpha$ a probabilidade de que todas as comparações $\mu_i - \mu_k$ ($i=1, 2, \dots, k-1$) satisfaçam simultaneamente a:

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k) - \left[\frac{t_{v_i, \beta/2 \cdot s_i^2}^2}{n_i} + \frac{t_{v_k, \beta/2 \cdot s_k^2}^2}{n_k} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \mu_i - \mu_k \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k) + \left[\frac{t_{v_i, \beta/2 \cdot s_i^2}^2}{n_i} + \frac{t_{v_k, \beta/2 \cdot s_k^2}^2}{n_k} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ onde } \beta \leq 1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{k-1}}.$$

(em geral toma-se $\beta = 1 - (1-\alpha)^{\frac{2}{(k-1)k}}$).

Se quiséssemos intervalos unilaterais bastaria trocarmos $t_{v_i, \beta/2}^2$ por $t_{v_i, \beta}^2$ e $t_{v_k, \beta/2}^2$ por $t_{v_k, \beta}^2$, e o coeficiente de confiança permanece o mesmo.

Para complementar as aproximações de Tamhane (1977) com base no método de Banerjee (1961) veja agora no capítulo 3, deste trabalho, o teorema 3.10. e corolário 3.5.

Daremos agora as extensões de Tamhane (1977) com base no método de Welch (1938), para comparações com controle e duas a duas.

Teorema (4.4.) (com base no método de Welch)

Com as mesmas suposições anteriores é aproximadamente $1-\alpha$ a probabilidade de que as diferenças $\mu_i - \mu_k$ (μ_k : média controle) e $\mu_i - \mu_j$ satisfaçam (i) e (ii), respectivamente:

$$(i) \quad (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k) - t_{\hat{v}_{ik}, \beta/2} \left(\frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_k^2}{n_k} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_i - \mu_k \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k) + t_{\hat{v}_{ik}, \beta/2} \left(\frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_k^2}{n_k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

para $i=1, 2, \dots, k-1$.

$$(ii) \quad (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - t_{\hat{v}_{ij}, \beta/2} \left(\frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_j^2}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + t_{\hat{v}_{ij}, \beta/2} \left(\frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_j^2}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

para $i, j=1, 2, \dots, k$;

$$e \quad \beta \leq 1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{k-1}}$$

Observação (4.2.)

No caso de comparações múltiplas para todos os contrastes, com base no método de Welch, basta trocarmos o valor:

$$(t_{v_i, \beta/2 \cdot \frac{s_i^2}{n_i}} + t_{v_j, \beta/2 \cdot \frac{s_j^2}{n_j}})^{\frac{1}{2}} \text{ por } t_{\hat{v}_{ij}, \beta/2 \left(\frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_j^2}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

no corolário 3.5., capítulo 3.

Observação (4.3.)

Nas aplicações práticas podemos perceber que as extensões baseadas na aproximação de Welch produzem, em geral, intervalos com amplitudes menores do que aqueles com base na aproximação de Banerjee, mas nesses intervalos (Banerjee) temos a garantia do coeficiente de confiança $1-\alpha$, ao passo que nos intervalos baseados na aproximação de Welch não podemos ter essa garantia, pois, embora a aproximação seja boa, pode ocorrer que o verdadeiro valor da probabilidade do intervalo conter a comparação de interesse, seja menor que o valor fixado $1-\alpha$.

Para melhores esclarecimentos e demonstrações, veja Tamhane (1977).

4.4.3. Aplicação dos Métodos de Welch e Banerjee

Exemplo:

Consideremos os seguintes dados do exemplo do trabalho de Hochberg (1976).

Temos $k=4$, $n_1=n_2=n_3=n_4=6$ e $s_1^2=178$, $s_2^2=60$, $s_3^2=98$ e $s_4^2=68$. Estamos interessados em obter intervalos de confiança conjunto para todas as comparações duas a duas, isto é, $\mu_i - \mu_j$ ($1 \leq i < j \leq 4$).

(i) Intervalos conservativos baseado no Método de Banerjee:

Pondo $\beta = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{2}{k(k-1)}} = 1 - (0,5)^{\frac{1}{6}} = 0,0085$ e $t_{5;0,00425} = 4,20$.

Desta forma obtemos o seguinte intervalo de confiança:

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - \frac{4,20}{\sqrt{6}}(s_i^2 + s_j^2)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + \frac{4,20}{\sqrt{6}}(s_i^2 + s_j^2)^{\frac{1}{2}}$$

para $1 \leq i < j \leq 4$ e $\hat{\mu}_i = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 y_{ij}$ para $i=1,2,3,4$.

(ii) Intervalos aproximados baseados no Método de Welch:

$$\text{Usando a fórmula: } \hat{v}_{ij} = \frac{\left(\frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_j^2}{n_j}\right)^2}{\frac{s_i^4}{n_i(n_i-1)} + \frac{s_j^4}{n_j(n_j-1)}}$$

$$\begin{aligned} \text{obtemos: } \hat{v}_{12} &= 8,026, & \hat{v}_{13} &= 9,224, & \hat{v}_{14} &= 8,328 \\ \hat{v}_{23} &= 9,455, & \hat{v}_{24} &= 9,962 \\ \hat{v}_{34} &= 9,692 \end{aligned}$$

Por uma tabela da distribuição t-Student e fazendo as interpolações necessárias, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \beta &= 0,00425, & t_{\hat{v}_{12}, \beta/2} &= 3,4642, & t_{\hat{v}_{13}, \beta/2} &= 3,3344 \\ t_{\hat{v}_{14}, \beta/2} &= 3,4300, & t_{\hat{v}_{23}, \beta/2} &= 3,3145, & t_{\hat{v}_{24}, \beta/2} &= 3,2709 \quad e \\ t_{\hat{v}_{34}, \beta/2} &= 3,2941 \end{aligned}$$

Logo, os intervalos de confiança com coeficiente de confiança aproximado $1-\alpha$ são dados pela fórmula:

$$\begin{aligned} (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - t_{\hat{v}_{ij}, \beta/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (s_i^2 + s_j^2)^{\frac{1}{2}} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + \\ + t_{\hat{v}_{ij}, \beta/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (s_i^2 + s_j^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{para } 1 \leq i < j \leq 4 \end{aligned}$$

Para esse mesmo problema Hochberg (1976) encontrou o seguinte intervalo de confiança para as comparações duas a duas:

$$(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) - \frac{5,05}{\sqrt{6}} \max\{s_i, s_j\} \leq \mu_i - \mu_j \leq (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) + \frac{5,05}{\sqrt{6}} \max\{s_i, s_j\}$$

para $1 \leq i < j \leq 4$ (veja teorema 3.9), onde o valor 5,05 é obtido da distribuição da Amplitude Estudentizada Aumentada.

Comparando esses intervalos, quanto as suas amplitudes, temos o seguinte (neste exemplo):

Os intervalos devido a Banerjee são os que têm maior amplitude, mas são os que garantem rigorosamente o nível de confiança especificado.

Os intervalos devido a Welch são menores do que os devido a Banerjee e Hochberg, com nível de confiança aproximadamente $1-\alpha$. Veja comparações desses métodos no capítulo 5.

CAPÍTULO 5

COMPARAÇÕES ENTRE ALGUNS MÉTODOS E CONCLUSÕES

5.1. Introdução

Neste capítulo faremos algumas comparações entre alguns métodos, os quais julgamos mais importantes, e finalmente damos as conclusões no sentido de orientar o experimentador quanto ao uso das técnicas apresentadas neste trabalho.

A maioria das comparações baseiam-se no estudo da razão das amplitudes dos intervalos dados pelos métodos que estão sendo comparados, ao mesmo coeficiente de confiança.

Comparações desse tipo são feitas para os métodos: "S" (Scheffé) e "Ext T" secção 5.2.; "GT-1" e "GT-2" secção 5.3; "GT-2" e "Ext T" secção 5.4.

Na secção 5.5. apresentamos a comparação entre os métodos de Banerjee e Welch, os quais são soluções aproximadas para o problema de Behrens-Fisher, sendo que as comparações neste caso são baseadas nas médias dos coeficientes de confiança obtidos do estudo experimental de Monte Carlo.

Por fim, na secção 5.6. apresentamos as conclusões finais deste trabalho.

5.2. Comparação dos métodos: S (Scheffé) e a Extensão do Método-T (Tukey) para o caso de amostras independentes não balanceadas com a mesma variância.

A comparação proposta aqui foi introduzida por Spjøtvoll and Stoline (1973), no mesmo trabalho em que os autores apresentam a extensão do método T (teorema 3.3, cap. 5) a ser comparada aqui com o método S dado pelo teorema 2.1. - cap. 2.

O método T dado em sua forma original é aplicado para comparações de médias quando as amostras são balanceadas, enquanto o método S permite que as amostras sejam não balanceadas, por isso não é muito proveitoso compararmos os dois métodos, mas sim o método S com a extensão referida acima, pois os dois métodos são, de maneira geral, aplicáveis para os mesmos casos.

A comparação é feita examinando a razão dos quadrados das amplitudes dos intervalos obtidos nos dois métodos para o mesmo contraste e o mesmo coeficiente de confiança $1-\alpha$.

Chamaremos a extensão do método T a ser comparada aqui de "Ext T" e o método S simplesmente de "S".

Consideremos um contraste $\Psi = c' \mu$ ($\sum_{i=1}^k c_i = 0$) e seja R^2 a razão dada por:

$$R^2 = \frac{[\text{amplitude do Intervalo para Ext.T, com c.c. } 1-\alpha]^2}{[\text{amplitude para o Intervalo S, com c.c. } 1-\alpha]^2}$$

Consideremos as amostras independentes, também para o método S, pois as amostras são as mesmas para os dois métodos.

todos.

Pelos teoremas 3.3, e 2.1. temos que:

$$R^2 = \frac{(q'(\alpha; k, v) \cdot g_d)^2}{(k-1)F(\alpha; k-1, v) \sum_{i=1}^k (a_i c_i)^2} \quad (5.1.)$$

Se $R^2 < 1$ preferimos o procedimento Ext T e
se $R^2 > 1$ preferimos o procedimento S.

As comparações serão restritas à classe dos contrastes (m, n) , os quais fazem comparações das diferenças médias entre dois conjuntos de parâmetros, com m e n elementos, respectivamente. Isto é:

$$\frac{1}{m}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m) - \frac{1}{n}(\mu_{m+1} + \mu_{m+2} + \dots + \mu_{m+n}) \quad (5.2.)$$

Seja a constante $c = (q'(\alpha; k, v))^2 / ((k-1)F(\alpha; k-1, v))$ (5.3.)
e como $a_i = \frac{1}{\sqrt{n_i}}$ para $i=1, 2, \dots, k$ onde n_i é o tamanho da i -ésima amostra.

Teremos:

$$R^2 = \frac{c \cdot \max \left[\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right)^2; \left(\frac{1}{n} \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right)^2 \right]}{\left(\frac{1}{m} \right)^2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} + \left(\frac{1}{n} \right)^2 \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{1}{n_j}} \quad (5.4.)$$

Adotamos ainda como uma medida de não balanceamento das amostras, ao valor:

$$u = \frac{\max(n_1, n_2, \dots, n_k)}{\min(n_1, n_2, \dots, n_k)} \quad (5.5.)$$

Temos $u \geq 1$, com $u=1$, se $n_1 = n_2 = \dots = n_k$.

Introduziremos agora o conceito de *uniformemente preferível*, isto é: se um método é *uniformemente preferível* ao outro, pela

Definição 5.1.

Se $R^2 < 1$, para qualquer comparação do tipo (m, n) de

todos os possíveis valores $n_1, n_2, \dots, n_k$ tais que $\max(n_1, n_2, \dots, n_k) / \min(n_1, n_2, \dots, n_k) \leq u$, então dizemos que o Ext T é uniformemente preferível do que o método S, para o valor u (fixo).

Daremos agora um procedimento prático através do teorema 5.1. que permite-nos determinar facilmente quando o procedimento Ext T é uniformemente preferível ao procedimento S ao fazermos comparações do tipo (m,n), para certos valores de u.

Teorema 5.1.

O procedimento Ext T é uniformemente preferível ao procedimento S para um certo valor u quando fazemos a comparação (m,n) com $n \leq m$, se e somente se:

$$S = \frac{m \cdot n \cdot u \cdot c}{n \cdot u + m} < 1$$

onde c é a constante dada anteriormente por (5.3.).

Demonstração:

Encontremos os tamanhos amostrais $n_1, n_2, \dots, n_k$ tal que R dado por (5.4.) seja máximo. Temos dois casos, em primeiro lugar assumimos que:

$$\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right)^2 \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right)^2, \text{ então R será máximo se:}$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{c} \left[\frac{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j}}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{n} \right)^2 \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{1}{n_j}}{\left(\frac{1}{m} \right)^2 \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right)^2} \right] \quad (5.6.)$$

é um mínimo. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no deno-

minador das parcelas, temos que:

$$\frac{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j}}{\left[\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right]^2} \left\{ \begin{array}{l} \geq \frac{1}{m} \text{ para todo } n_1, n_2, \dots, n_m \\ = \frac{1}{m} \text{ se } n_1 = n_2 = \dots = n_m \end{array} \right. \quad \text{e} \quad (5.7.)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{1}{n_j}}{\left(\frac{1}{m}\right)^2 \left[\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right]^2} \left\{ \begin{array}{l} \geq \frac{1}{nu} \text{ para todo } n_1, n_2, \dots, n_k \\ = \frac{1}{nu} \text{ se } n_1 = n_2 = \dots = n_m \text{ e } \\ \quad n_{m+1} = n_{m+2} = \dots = n_{m+n} = u \cdot n_m \end{array} \right. \quad (5.8.)$$

Logo, por (5.6.), (5.7.) e (5.8.), temos que:

$$\frac{1}{R^2} \geq \frac{1}{c} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{nu} \right) = \frac{1}{c} \left[(m+nu) / mnu \right] = \frac{1}{S}$$

Em segundo lugar assumimos o caso em que:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right)^2 \geq \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{n_j}} \right)^2 \text{ e desenvolvendo analogamente a}$$

(5.7.) e (5.8.) chegamos que: $\frac{1}{R^2} \geq \frac{1}{c} \left[(n+mu) / mnu \right]$ e considerando $n \leq m$ temos que $\frac{1}{c} \left[(n+mu) / nmu \right] \geq \frac{1}{c} \left[(m+nu) / nmu \right] = \frac{1}{S}$.

Portanto $\frac{1}{R^2} \geq \frac{1}{S}$, e teremos:

$R^2 \leq S$ para quaisquer $n_1, n_2, \dots, n_k$ tal que $\max(n_1, n_2, \dots, n_k) / \min(n_1, n_2, \dots, n_k) \leq u$ e

$R^2 = S$ se $n_1 = n_2 = \dots = n_m$ e $n_{m+1} = n_{m+2} = \dots = n_{m+n} = n_m \cdot u$.

Logo, pela definição (5.1.), temos que o procedimento Ext T é uniformemente preferível ao procedimento S desde que:

$$S = \frac{nmuc}{nu+m} < 1, \text{ onde } n \leq m$$

A seguir daremos uma tabela (5.1) dos contrastes (m,n) para o qual o procedimento Ext T é uniformemente preferível ao procedimento S, para os seguintes valores de $u=1;1,2;1,5;2;3;4;8$ e ∞ com $\alpha=0,95$ e $v=N-k=\infty$, onde $k=4;6;8;10;15;20;30$ e 60 e $N = \sum_{i=1}^k n_i$.

Tabela (5.1)

Comparações do tipo (m,n) para as quais o procedimento Ext T é uniformemente preferível ao procedimento S, para os dados valores de u e $1-\alpha = 0,95$ e $v=N-k=\infty$

k	n	u							
		1,0	1,2	1,5	2,0	3,0	4,0	8	∞
60	1	todo m	todo m	todo m	todo m	$m \leq 10$	$m \leq 5$	$m \leq 3$	$m \leq 2$
	2	todo m	todo m	$m \leq 10$	$m \leq 5$	$m \leq 3$	$m \leq 3$	$m \leq 2$	$m \leq 2$
	3	$m \leq 10$	$m \leq 6$	$m \leq 4$	$m \leq 3$	$m \leq 3$			
	4	$m \leq 5$	$m \leq 4$						
30	1	todo m	todo m	todo m	$m \leq 6$	$m \leq 3$	$m \leq 2$	$m \leq 1$	$m \leq 1$
	2	$m \leq 6$	$m \leq 4$	$m \leq 3$	$m \leq 2$	$m \leq 2$			
	3	$m \leq 3$							
20	1	todo m	todo m	$m \leq 5$	$m \leq 2$	$m \leq 1$	$m \leq 1$	$m \leq 1$	$m \leq 1$
	2	$m \leq 2$	$m \leq 2$						
15	1	todo m	$m \leq 6$	$m \leq 3$	$m \leq 2$	$m \leq 1$	$m \leq 1$	$m \leq 1$	$m \leq 1$
	2	$m \leq 2$							
10	1	$m \leq 5$	$m \leq 2$	$m \leq 1$	$m \leq 1$	$m \leq 1$	$m \leq 1$		
8	1	$m \leq 3$	$m \leq 2$	$m \leq 1$	$m \leq 1$	$m \leq 1$			
6	1	$m \leq 2$	$m \leq 1$	$m \leq 1$	$m \leq 1$				
4	1	$m \leq 1$	$m \leq 1$						

Fonte: Spjøtvoll and Stoline - An Extension of the T-Method of Multiple Comparison to Include the Cases with Unequal Sample Sizes - Jour. Am. Assoc. (1973).

Na tabela (5.1), a casela (m,n) é preenchida se e somente se: $S = \frac{m \cdot n \cdot u \cdot c}{n \cdot u + m} < 1$.

Como exemplo, considere $k=30$ e assumamos que $\frac{\max(n_1, n_2, \dots, n_k)}{\min(n_1, n_2, \dots, n_k)} \leq 3 = u$, então para qualquer uma das seguintes comparações (1,1); (2,1); (3,1) ou (2,2) de $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) = (\mu_1, \dots, \mu_{30})$, o procedimento Ext T é uniformemente preferível ao procedimento S.

Observando a tabela (5.1) podemos fazer as seguintes observações para os contrastes do tipo (m,n):

Observação 5.1.

Quando k cresce, também cresce o número de comparações do tipo (m,n) para as quais o procedimento Ext T é uniformemente preferível ao procedimento S.

Observação 5.2.

Quando o valor u cresce, diminui o número de comparações do tipo (m,n) para as quais o procedimento Ext T é uniformemente preferível ao procedimento S.

Observação 5.3.

Notemos que para as comparações do tipo (1,1) ou duas a duas o procedimento Ext T é preferível ao procedimento S, e para $k \geq 15$ e $u=1$ (caso balanceado) o Ext T é uniformemente preferível para todas as comparações do tipo (m,1).

Logo, podemos concluir que o procedimento "Ext T" é de maneira geral, preferível ao procedimento "S", principalmente quando tratamos de comparações duas a duas de médias, e no

caso de outras comparações quando, ou o valor k é considerado grande ou o modelo é severamente não balanceado.

5.3. Uma simples comparação entre os Métodos GT-1 e GT-2

Hochberg (1974) apresenta uma simples comparação entre os métodos GT-1 e GT-2, através das comparações duas a duas, num exemplo para o qual uma solução direta de a^* existe (no método GT-1).

Consideremos o caso especial em que $\text{cov}(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j) = \sigma^2 b$ para $i, j = 1, 2, \dots, k$ onde teremos o valor $a^* = b$.

Então, nessas condições, os intervalos de confiança simultâneos para todas as comparações duas a duas são dados por:

$$(\mu_i - \mu_j) \in [(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) \pm (\max_{1 \leq i \leq k} \{b_{ii}\} - b)^{\frac{1}{2}} \cdot s \cdot q_{\alpha; k, \nu}]$$

para o método GT-1 e por:

$$(\mu_i - \mu_j) \in [(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) \pm (b_{ii} + b_{jj} - 2b_{ij})^{\frac{1}{2}} \cdot s \cdot m_{\alpha; k', \nu}]$$

onde $k' = \binom{k}{2}$ para o método GT-2.

Seja R_{ij} a razão das amplitudes dos intervalos, para a comparação $\mu_i - \mu_j$ ($1 \leq i < j \leq k$), usando os métodos GT-1 e GT-2.

$$R_{ij} = \frac{(\max_{1 \leq i \leq k} \{b_{ii}\} - b)^{\frac{1}{2}} q_{\alpha; k, \nu}}{(b_{ii} + b_{jj} - 2b)^{\frac{1}{2}} m_{\alpha; k', \nu}} \quad (5.9.)$$

Se considerarmos as amostras independentes e balanceadas, o valor R_{ij} reduz-se a:

$$R_{ij} = q_{\alpha; k, v} / \sqrt{2} \cdot m_{\alpha; k', v}$$

e um estudo desses valores (basta ver tabelas dessas distribuições) mostra que os mesmos estão, na maioria dos casos, no intervalo real (0,909; 0,980). Isto significa que somente quando a homocedasticidade é *levemente violada* é que o método GT-1 é considerado como sendo melhor do que o GT-2, no que diz respeito à amplitude dos intervalos.

Para se ter uma idéia do que seja "levemente violado" o autor dá o seguinte exemplo: "Suponha que queremos comparar as médias de 4 populações ($i=1,2,3,4$) e temos amostras de tamanhos n_1, n_2, n_3 e n_4 tais que $n_1=n_2=n_3=n$ e $n_4 < n$. Considerando as populações independentes teremos $b=0$ e façamos

$$b_{ii} = \frac{1}{n_i}, \quad k=4 \quad \text{e} \quad v=3n+n_4-4.$$

A tabela (5.2) abaixo, dá os mais baixos valores possíveis de n_4 , para os intervalos de confiança simultâneos das seis comparações duas a duas.

Temos 4 valores de n e daí obtemos (coluna 1) os mais baixos valores possíveis de n_4 para os quais o método GT-1 é melhor do que o GT-2 nas seis comparações duas a duas.

Na (coluna 2) temos os mais baixos valores possíveis de n_4 , para os quais 3 comparações duas a duas sejam melhor estimadas pelo método GT-1 e as outras 3 pelo método GT-2.

Essa tabela (5.2) é obtida de (5.9) para $\alpha=0,05$ e os demais valores já identificados acima.

Tabela (5.2)

n	(1) n_4 (mínimo)	(2) n_4 (mínimo)
20	18,9	17,9
30	28,4	26,8
40	37,9	35,8
60	56,8	53,6

Fonte: Hochberg, Y. - Some Generalizations of T-Method in Simultaneous Inference - Journal Multivariate Analysis (1974).

De maneira geral podemos concluir que o método GT-2 é melhor do que o GT-1, não só pela facilidade de sua aplicação (ao contrário do GT-1) mas também pelo grau de não balanceamento que ele nos permite, já que este é o caso de interesse nesse trabalho.

5.4. Comparação dos Métodos "GT-2" e o "Ext T" para os casos de amostras independentes não balanceadas de mesmas variâncias

Para que possamos comparar os dois métodos acima, vamos supor que as amostras sejam colhidas independentemente e que os contrastes em questão sejam comparações duas a duas.

Sob essas suposições teremos os seguintes intervalos de confiança simultâneos para essas comparações:

$$(\mu_i - \mu_j) \in \left[(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) \pm \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot s \cdot m_{\alpha; k', v} \right]$$

para o método "GT-2", onde $k' = \binom{k}{2}$, $b_{ii} = \frac{1}{n_i}$ e $b_{ij} = 0$; e

$$(\mu_i - \mu_j) \in \left[(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j) \pm \{ \min(\sqrt{n_i}, \sqrt{n_j}) \}^{-1} \cdot s \cdot q'_{\alpha; k, v} \right]$$

para o método "Ext T" com $i \neq j = 1, 2, \dots, k$.

Seja n_i ($i=1, 2, \dots, k$) o tamanho da i -ésima amostra e consideremos o seguinte:

$$M_{ij} = \max(n_i, n_j) \quad (i \neq j)$$

$$m_{ij} = \min(n_i, n_j) \quad (i \neq j)$$

$$M = \max_{1 \leq i \leq k} \{n_i\}$$

$$m = \min_{1 \leq i \leq k} \{n_i\}$$

$$u = \max_{i \neq j} (M_{ij} / m_{ij}) = \frac{M}{m}$$

$$d = \min_{i \neq j} (M_{ij} / m_{ij})$$

$$R_{ij}^2 = \frac{[\text{amplitude do intervalo para } (\mu_i - \mu_j) \text{ segundo o método GT-2}]^2}{[\text{amplitude do intervalo para } (\mu_i - \mu_j) \text{ segundo o Método Ext T}]^2}$$

Portanto teremos:

$$\begin{aligned} R_{ij}^2 &= \frac{m^2(\alpha; k', v) \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}{q'^2(\alpha; k, v) \frac{1}{(\min(\sqrt{n_i}, \sqrt{n_j}))^2}} = \\ &= \frac{m^2(\alpha; k', v) \cdot \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}{q'^2(\alpha; k, v) \cdot \frac{1}{m_{ij}}} = \frac{m^2(\alpha; k', v)}{q'^2(\alpha; k, v)} \cdot \frac{n_i + n_j}{M_{ij}} \end{aligned}$$

O valor $\frac{n_i + n_j}{M_{ij}}$ é sempre maior ou igual a um, chegando ao valor dois quando $n_i = n_j$, e como $m^2(\alpha; k', v) \leq q'^2(\alpha; k, v)$ o valor $\frac{m^2(\alpha; k', v)}{q'^2(\alpha; k, v)}$ é sempre menor ou igual a um.

Portanto, para que o método "GT-2" produza intervalos de amplitudes menores do que o método "Ext T" para uma

certa comparação duas a duas, é necessário que:

$$\frac{m^2_{(\alpha; k', v)}}{q'^2_{(\alpha; k, v)}} \cdot \frac{n_i + n_j}{M_{ij}} < 1 \quad \text{e portanto teremos:}$$

$$\frac{n_i + n_j}{M_{ij}} = 1 + \frac{m_{ij}}{M_{ij}} < \frac{q'^2_{(\alpha; k, v)}}{m^2_{(\alpha; k', v)}} \quad \text{o que é o mesmo que}$$

$$\frac{M_{ij}}{m_{ij}} > \frac{m^2_{(\alpha; k', v)}}{q'^2_{(\alpha; k, v)} - m^2_{(\alpha; k', v)}} = b_{\alpha; k, v}$$

e quando $\frac{M_{ij}}{m_{ij}} < b_{\alpha; k, v}$ o método "Ext T" produz intervalos com menores amplitudes do que o método GT-2, para a mesma comparação.

Portanto a quantidade $b_{\alpha; k, v}$ serve como um valor limite para analisar qual dos dois métodos em questão é preferível utilizarmos na estimação de um intervalo de confiança, para uma dada comparação do tipo $\mu_i - \mu_j$, ao mesmo coeficiente de significância α .

Podemos, através da definição (5.1.), concluir que:

Se $u \leq b_{\alpha; k, v}$ então o método "Ext T" é uniformemente preferível ao método GT-2 e se $d \geq b_{\alpha; k, v}$, então o método GT-2 é uniformemente preferível ao método "Ext T".

Daremos agora as tabelas (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6) cujos valores tabelados são os de $b_{\alpha; k, v}$ para $\alpha=0,01$; 0,05; 0,1 e 0,2 e alguns valores de k e v .

Com essas tabelas podemos selecionar o método con-

siderado uniformemente preferível para qualquer comparação do tipo $\mu_i - \mu_j$, da seguinte maneira:

Se $\max(n_i, n_j) / \min(n_i, n_j) < b_{\alpha; k, v}$ então preferimos o "Ext T", e,

Se $\max(n_i, n_j) / \min(n_i, n_j) > b_{\alpha; k, v}$ então preferimos o "GT-2"

Tabela (5.3) (valores de $b_{0,01; k, v}$)

k	v = 5	10	20	30	60	∞
3	1,12	1,07	1,05	1,04	1,03	1,03
4	1,23	1,13	1,08	1,06	1,05	1,04
5	1,30	1,17	1,10	1,08	1,06	1,04
6	1,34	1,19	1,11	1,09	1,07	1,05
8	1,38	1,22	1,13	1,10	1,07	1,05
10	1,40	1,24	1,14	1,11	1,08	1,05
15	1,41	1,27	1,17	1,13	1,09	1,05
20	1,41	1,28	1,18	1,13	1,09	1,05

Fonte: Stoline and Ury - Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution and an Application to Multiple Comparisons Among Means - Technometrics (1979).

Tabela (5.4) (valores de $b_{0,05;k,v}$)

k	v = 5	10	20	30	60	∞
3	1,14	1,11	1,09	1,08	1,08	1,07
4	1,19	1,20	1,15	1,13	1,12	1,10
5	1,36	1,24	1,18	1,16	1,13	1,11
6	1,40	1,27	1,20	1,17	1,14	1,12
8	1,44	1,30	1,22	1,19	1,15	1,12
10	1,45	1,32	1,23	1,20	1,16	1,12
15	1,46	1,34	1,25	1,21	1,17	1,12
20	1,45	1,35	1,26	1,22	1,17	1,12

Fonte: Stoline and Ury - Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution and an Application to Multiple Comparisons Among Means - Technometrics (1979).

Tabela (5.5) (valores de $b_{0,10;k,v}$)

k	v = 5	10	20	30	60	∞
3	1,17	1,14	1,13	1,12	1,12	1,11
4	1,34	1,26	1,21	1,20	1,18	1,16
5	1,42	1,31	1,25	1,23	1,20	1,18
6	1,46	1,34	1,27	1,25	1,22	1,19
8	1,49	1,37	1,29	1,26	1,23	1,19
10	1,50	1,39	1,30	1,27	1,23	1,19
15	1,49	1,39	1,31	1,28	1,23	1,18
20	1,48	1,39	1,31	1,28	1,23	1,18

Fonte: Stoline and Ury - Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution and an Application to Multiple Comparisons Among Means - Technometrics (1979).

Tabela (5.6) (valores de $b_{0,20;k,v}$)

k	v = 5	10	20	30	60	∞
3	1,21	1,20	1,19	1,19	1,18	1,18
4	1,43	1,37	1,33	1,32	1,30	1,28
5	1,52	1,44	1,38	1,36	1,34	1,31
6	1,56	1,47	1,40	1,38	1,35	1,32
8	1,59	1,49	1,42	1,39	1,36	1,32
10	1,59	1,50	1,43	1,40	1,36	1,31
15	1,56	1,49	1,42	1,39	1,35	1,30
20	1,53	1,47	1,41	1,38	1,34	1,28

Fonte: Stoline and Ury - Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution and an Application to Multiple Comparisons Among Means - Technometrics (1979).

Pelas tabelas (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6) podemos notar que o método "Ext T" torna-se preferível à medida que α cresce, ou então no caso de α e k fixos com v decrescendo.

Para os valores α e v fixos, o método "Ext T" torna-se preferível quando o valor k cresce a partir de 3; entre tanto esta preferência tende a inverter-se para grandes valores de k, principalmente quando os valores α são 0,10; 0,20 e v=5.

Exemplos (aplicação das tabelas)

Exemplo (5.4.1)

Suponha que k=4 e os tamanhos amostrais sejam 4, 6, 8 e 12. Então N=30 e v=26 com $d=8/6=1,33$ e $u=12/4=3,00$.

Neste caso podemos notar que o método GT-2 é uni -

formemente preferível ao método "Ext T" para os 4 valores de α (veja tabelas acima).

A amplitude dos intervalos de confiança com coeficiente de confiança 0,99, segundo o método GT-2, onde o valor $m_{\alpha; k', v}$ é dado por $m_{0,01; 6; 26} \approx 3,499$, obtido através de uma interpolação linear das tabelas do Módulo Máximo Estudizado (apêndice IV), para $\mu_1 - \mu_4$ é dada por:

$$2.(3,499)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}}.s = 4,040.s; \text{ e segundo o método "Ext T" com } q'_{0,01; 4; 26} = 4,867 \text{ a amplitude do intervalo para essa mesma comparação é } 2.(4,867).\max\left(\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).s = 4,867.s.$$

Notemos a diferença entre as amplitudes dos intervalos segundo os dois métodos acima; e assim para todas as seis comparações duas a duas, esta diferença é menor para a comparação $\mu_2 - \mu_3$ cujas amplitudes são 3,779s e 3,974s para os métodos GT-2 e Ext T, respectivamente.

Exemplo (5.4.2)

Os dados deste exemplo são do livro: Dunn and Clark (1974).

Temos 3 grupos de indivíduos, e interessa-nos analisar a quantidade média de cloreto no suor dos indivíduos normais, indivíduos heterozigotos com cistobríbose no pâncreas e indivíduos homozigotos com a mesma doença.

Os grupos de indivíduos normais, heterozigotos, homozigotos têm tamanhos: $n_1=10$, $n_2=5$ e $n_3=6$, respectivamente,

suas médias amostrais e seus desvios padrões são, respectivamente: 26,67 e 10,986; 45,9 e 7,318; 110,0 e 7,062.

Temos o valor $s^2=86,108$ com 18 graus de liberdade.

Para $\alpha = 0,05$ obtemos $d = \frac{6}{5} = 1,20$ e como $d=1,20 > 1,09 = d_{0,05;3,18}$ (veja tabela 5.4.) então o método GT-2 é uniformemente preferível ao método Ext T.

Para verificação, temos os seguintes intervalos:

Segundo o Método GT-2:

para $\mu_2 - \mu_1$ temos $19,23 \pm 13,31$

para $\mu_3 - \mu_1$ temos $83,33 \pm 12,55$

para $\mu_3 - \mu_2$ temos $64,10 \pm 14,72$ e

Segundo o Método Ext T:

para $\mu_2 - \mu_1$ temos $19,23 \pm 15,03$

para $\mu_3 - \mu_1$ temos $83,33 \pm 13,72$

para $\mu_3 - \mu_2$ temos $64,10 \pm 15,03$

Notemos que embora as conclusões sejam as mesmas para os dois métodos, o método GT-2 produz intervalos de amplitudes menores do que o Ext T, e essas diferenças são mais acentuadas quando comparamos o grupo de indivíduos normais com os outros dois, pois esses são os casos em que o não balanceamento, segundo os tamanhos amostrais, são maiores.

Das tabelas (5.3) e (5.6) e dos exemplos acima, podemos concluir que:

a) O método "Ext T" é preferível para os casos em que o balanceamento é levemente violado, e nos casos de serem drasticamente violados o método GT-2 é preferível.

b) A medida que o não balanceamento aumenta, o método "Ext T" é preferível desde que o valor α também cresça para 0,2. Em outros casos o método GT-2 sempre é preferível.

5.5. Comparação dos Métodos de Banerjee e Welch (soluções aproximadas para o problema de Behrens-Fisher)

Agora daremos uma tabela para efeito de comparação dos métodos de Banerjee e Welch, a qual foi obtida do estudo experimental de Monte-Carlo, com a finalidade de comparar os níveis de confiança dos procedimentos de comparações múltiplas baseados nos métodos de Banerjee e de Welch.

Neste estudo experimental abordamos o problema da construção de intervalos de confiança para todas as comparações duas a duas, das médias populacionais quando $k=4,6$ e 8 e os valores $1-\alpha=0,90; 0,95$ e $0,99$.

Para cada combinação dos valores k e $1-\alpha$, várias configurações dos valores σ_i^2 e n_i foram estudadas (veja tabela abaixo).

Para os valores $1-\alpha=0,90$ e $0,95$ foram feitos $N=1000$ experimentos e para $1-\alpha=0,99$, $N=2000$ experimentos foram feitos.

Para cada experimento, foram gerados k pares independentes de valores $\hat{\mu}_i \sim N(0; \sigma_i^2/n_i)$ e $s_i^2 \sim (\sigma_i^2/n_i - 1) \chi_{(n_i-1)}^2$ e seus intervalos de confiança calculados para as diferenças duas a duas $\{\mu_i - \mu_j\}$ ($1 \leq i < j \leq k$), usando os dois procedimentos (Banerjee e Welch).

Em cada procedimento o nível de confiança foi estimado tomando a média de todos os níveis de confiança encontrados nos intervalos correspondentes às comparações duas a duas de $\{\mu_i - \mu_j\}$ para $1 \leq i < j \leq k$.

Nesse experimento foi encontrado que os dois procedimentos garantem o nível de confiança $1-\alpha=0,90$ e $0,95$. Mas o procedimento baseado no método de Welch não mantém o nível de confiança de $0,99$ em alguns casos. Isso pode ser verificado pela tabela 5.7. abaixo, pois na coluna em que $1-\alpha=0,99$ temos 5 casos onde o nível de confiança $0,99$ não é mantido quando usamos o procedimento de Welch.

Aparentemente isto acontece quando as configurações σ_i^2 e n_i são não balanceados, isto é, um maior número de observações são tomadas das populações cujas variâncias são menores e vice-versa.

Podemos notar ainda, que o procedimento de Banerjee produz intervalos de confiança os quais são altamente conservativos, para todos os níveis $1-\alpha$.

Segundo Tamhane, o procedimento com base no método de Welch, em geral, é melhor na prática, isto é, produz intervalos de confiança com amplitudes menores do que os de Banerjee, e mantém o nível de confiança mais próximo do especificado. Isto pode ser verificado no experimento de Monte Carlos, pelos resultados da tabela (5.7).

Tabela (5.7)

Resultados do Experimento de Monte Carlo

			Níveis de Confiança Estimados						
K	$\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$	$n_1, \dots, n_k$	1- $\alpha=0,90$		1- $\alpha=0,95$		1- $\alpha=0,99$		
			B	W	B	W	B	W	
4	1,1,1,1	5,5,5,5	0,978	0,930	0,992	0,966	0,9990	0,9935	
	1,1,1,1	5,7,9,11	0,962	0,925	0,986	0,959	0,9995	0,9915	
	1,2,3,4	5,5,5,5	0,971	0,926	0,992	0,964	1,000	0,9960	
	1,2,3,4	5,7,9,11	0,970	0,938	0,988	0,970	1,000	0,9930	
	1,2,3,4	11,9,7,5	0,950	0,915	0,984	0,954	0,9985	0,9880	
	1,4,7,10	5,5,5,5	0,971	0,927	0,991	0,960	0,9995	0,9895	
	1,4,7,10	5,7,9,11	0,968	0,930	0,984	0,968	0,9995	0,9975	
	1,4,7,10	11,9,7,5	0,959	0,925	0,980	0,957	0,9955	0,9880	
	6	1,1,1,1,1,1	7,7,7,7,7,7	0,981	0,927	0,993	0,965	0,9995	0,9950
		1,1,1,1,1,1	7,9,9,11,11,13	0,961	0,927	0,987	0,955	0,9990	0,9950
1,2,2,3,3,4		7,7,7,7,7,7	0,978	0,983	0,990	0,967	0,9995	0,9915	
1,2,2,3,3,4		7,9,9,11,11,13	0,973	0,923	0,987	0,956	0,9990	0,9935	
1,2,2,3,3,4		13,11,11,9,9,7	0,961	0,958	0,987	0,958	0,9975	0,9930	
1,4,4,7,7,10		7,7,7,7,7,7	0,969	0,927	0,988	0,966	1,0000	0,9940	
1,4,4,7,7,10		7,9,9,11,11,13	0,973	0,936	0,987	0,954	0,9985	0,9915	
1,4,4,7,7,10		13,11,11,9,9,7	0,961	0,924	0,983	0,958	0,9960	0,9870	
8		1,1,1,1,1,1,1,1	9,9,9,9,9,9,9,9	0,977	0,935	0,997	0,969	0,9995	0,9930
		1,1,1,1,1,1,1,1	9,9,11,11,13,13,15,15	0,979	0,944	0,990	0,972	0,9990	0,9925
	1,1,2,2,3,3,4,4	9,9,9,9,9,9,9,9	0,980	0,940	0,984	0,974	0,9980	0,9935	
	1,1,2,2,3,3,4,4	9,9,11,11,13,13,15,15	0,971	0,939	0,999	0,962	1,0000	0,9935	
	1,1,2,2,3,3,4,4	15,15,13,13,11,11,9,9	0,965	0,925	0,984	0,962	0,9975	0,9915	
	1,1,4,4,7,7,10,10	9,9,9,9,9,9,9,9	0,969	0,929	0,987	0,962	0,9990	0,9895	
	1,1,4,4,7,7,10,10	9,9,11,11,13,13,15,15	0,978	0,949	0,988	0,974	0,9985	0,9925	
	1,1,4,4,7,7,10,10	15,15,13,13,11,11,9,9	0,966	0,943	0,984	0,965	0,9985	0,9920	

B = Procedimento de Comparações Múltiplas baseado no Método de Banerjee.
W = Procedimento de Comparações Múltiplas baseado no Método de Welch.

Fonte: Tamhane, A.C. - Multiples Comparisons in Model I One-Way Anova with Unequal Variances - Commun. Statist. - Theor. Meth. (1977).

5.6. Conclusões

Num planejamento amostral envolvendo várias populações normais, em que o experimentador está interessado na comparação das médias dessas populações, através de suas médias estimadas, ele deve ter algumas informações acerca dessas populações assim como de suas amostras, para que possa fazer uma boa opção por um dos métodos aqui apresentados.

Muitas vezes, com essas informações e a maneira na qual o experimentador desenvolveu o seu plano amostral, torna-se difícil optar por um dos métodos, e dependendo do tipo de comparação é muitas vezes impossível empregar um dos métodos dos dados.

Este, por se tratar mais de um trabalho informativo, não pretendeu ser exaustivo, mas sim abordar algumas linhas de soluções, as quais parecem ser as mais usadas.

Para efeito de simplicidade nas explicações a seguir, consideremos o seguinte: Seja $\hat{\underline{\mu}}$ o vetor de médias estimado a partir das amostras tal que $\hat{\underline{\mu}} \sim N(\underline{\mu}; \Sigma)$, onde geralmente $\hat{\underline{\mu}}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \bar{y}_i$ e Σ é a matriz de covariâncias de $\hat{\underline{\mu}}$.

Daremos a seguir, os casos em que o experimentador poderá se encontrar de acordo com o seu plano amostral, como também as sugestões das técnicas mais apropriadas para cada caso.

Caso 1:

"Amostras independentes com a mesma variância e mesmo tamanho amostral ($n_1 = \dots = n_k = n$)".

Neste caso temos: $\sum = I \frac{\sigma^2}{n}$, onde I é a matriz identidade $K \times K$.

Técnicas sugeridas para comparações do tipo:

a) Diferenças duas a duas

Quando tratamos de comparações de médias duas a duas podemos optar pelo método da linha Tukey (lema 3.2.), por ser específico neste caso.

b) Contrastes

Quando tratamos de comparações do tipo contrastes, podemos optar pelo método da linha Tukey (teorema 3.1.), também específico neste caso.

c) Funções lineares dos parâmetros

Quando nossa comparação é uma função linear dos parâmetros (médias), podemos utilizar o método na linha Tukey (teorema 3.2.), também específico para este caso. Temos ainda o método "S" de Scheffé (1959) para funções lineares estimáveis dos parâmetros, o qual é também aplicável nestes casos.

Observação 5.4.

Este é o caso que faz mais exigências possíveis (isto é: totalmente balanceado) e poderíamos utilizar qualquer um dos métodos para casos mais gerais, só que correremos o risco de obtermos intervalos de amplitudes muito maiores do que aqueles obtidos com o uso dos métodos apropriados.

Ainda neste caso, se estamos interessados na obten

ção de intervalos de confiança para uma única média podemos lançar mão do método apresentado pelo corolário 3.1.

Caso 2:

"Amostras independentes com mesma variância e tamanhos amostrais diferentes".

Neste caso temos: $\sum = D(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_k})\sigma^2$, onde $D(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_k})$ é a matriz diagonal.

Técnicas sugeridas para comparações do tipo:

a) Diferenças duas a duas

Podemos lançar mão dos métodos da linha Tukey ; por exemplo temos no corolário 3.4. dois métodos introduzidos por Spjøtvoll e Stoline (1973), os quais fornecem, neste caso, intervalos conservativos.

É muito comum também neste caso, o uso do GT-2 dado pelo lema 3.4., que também produz intervalos conservativos, e a escolha por um deles deve ser feita nos moldes das comparações da secção 5.4.

b) Contrastes

Para essas comparações pode-se usar o método "S" de Scheffé dado pelo teorema 2.1. com $a_{ii'}=0$, $\forall i \neq i'=1,2,\dots,k$; também o método "Ext T" dado por Spjøtvoll-Stoline (1973) teorema 3.3. Nesse caso recomenda-se ainda o GT-2 dado pelo teorema 3.5. e embora seus intervalos sejam conservativos, os resultados são considerados satisfatórios.

A escolha entre os métodos Ext T e o GT-2 deve ser feita nos moldes das comparações da secção 5.4.

c) Funções lineares dos parâmetros

Neste caso temos dois métodos possíveis: O método "S" de Scheffé, ampliado a partir dos contrastes (secção 2.4.) e o método "Ext T" dado pelo teorema 3.3. De acordo com as comparações da secção 5.2., o experimentador deve sempre que possível optar pelo método da linha Tukey, isto é, o "Ext T".

Observação 5.5.

Este caso que acabamos de relatar é o mais comum na prática, e como uma solução o experimentador pode lançar mão de qualquer método aqui descrito, desde que as populações amostrais tenham a mesma variância, devendo este considerar nula as covariâncias, mas correndo o risco de encontrar intervalos altamente conservativos.

Caso 3:

"Amostras não independentes com mesma variância"

Neste caso $\Sigma = \sigma^2 B$, onde $B_{K \times K}$ é a matriz de correlação supostamente conhecida, sendo que em alguns casos essa matriz B deve ser encontrada de acordo com o modelo em questão.

Dentro deste caso podemos ressaltar o seguinte:

i) Quando temos:

$$B = \frac{1}{n} \{ I + (\underline{1}\underline{1}' - I) \rho \} = \frac{1}{n} \{ D(1-\rho) + \underline{1}\underline{1}' \rho \}$$

isto é, as amostras são igualmente correlacionadas e têm o

mesmo tamanho amostral (digamos, n), onde ρ é o coeficiente de correlação intra-classe, $D(1-\rho)$ é a matriz diagonal com todos os elementos iguais a $1-\rho$ e $\underline{1}' = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$.

Técnicas sugeridas para comparações do tipo:

i.a. Diferenças duas a duas

Embora o GT-2 seja um método para casos mais gerais, ele pode ser usado aqui para essas comparações (lema 3.4), com bons resultados. É claro que poderemos usar também qualquer um dos métodos citados abaixo para contrastes e funções lineares dos parâmetros, pois não temos nesse caso métodos específicos para comparações duas a duas.

i.b. Contrastes

Neste caso temos a extensão dada pelo próprio Tukey (1959) introduzida neste trabalho pelo corolário 3.2. Temos também os métodos GT-1 e GT-2 os quais produzem intervalos conservativos e são dados pelos teoremas 3.4. e 3.5., respectivamente. Lembramos ainda que neste caso a aplicação do GT-1 é tão simples quanto a do GT-2, pois temos como solução de a^* o valor ρ/n , e a opção por um deles deve ser feita nos moldes da secção 5.3. Lembramos ainda, que neste caso o experimentador pode lançar mão do método "S" para todos os contrastes dado pelo teorema 2.1., obtendo bons resultados, neste caso, de amostras balanceadas (veja comparações na secção 5.2.).

i.c. Funções lineares dos parâmetros

Para essas comparações podemos utilizar a extensão do próprio Tukey (1959) dada pelo corolário 3.3. Poderíamos ainda utilizar o método GT quando o modelo linear considerado é de posto completo (teorema 3.6.), tendo em mente que este método é apropriado para casos mais gerais.

ii) Quando temos B como sendo uma matriz conhecida, simétrica e positiva definida, (notemos que a matriz B dada anteriormente é um caso particular deste).

Técnicas sugeridas para comparações do tipo:

ii.a. Diferenças duas a duas

Para essas comparações temos o método GT-2, dado pelo lema 3.4., que embora produza intervalos conservativos, seus resultados são considerados satisfatórios.

ii.b. Contrastes

Para este caso temos os seguintes métodos possíveis: Método "S" de Scheffé (teorema 2.1.); na linha Tukey temos: GT-1 (teorema 3.4.), GT-2 (teorema 3.5.) Mesmo produzindo intervalos conservativos, os métodos da linha Tukey, em geral, são melhores no que diz respeito a amplitude dos intervalos.

Quanto à escolha entre esses métodos podemos concluir que: quando a homogeneidade dos elementos da matriz B é drasticamente violada, devemos utilizar o GT-2 (veja compa-ração 5.3.), e quando essa homogeneidade é levemente violada,

podemos usar o GT-1 ou o método "S". Mas pela dificuldade de aplicação do GT-1, o experimentador poderá obter, neste caso, resultados satisfatórios com o uso do método "S" (veja comparação 5.2.).

Observação 5.6.

Neste caso não temos métodos que nos permitam fazer comparações para funções lineares dos parâmetros, a não ser através do método GT quando se sabe que o modelo linear considerado é de posto completo (veja a seguir o item iii).

iii) Quando a matriz B é obtida de maneira genérica, a partir da matriz de planejamento onde o modelo linear considerado é ou não de posto completo.

O método GT apresentado na secção 3.5., é apropriado para as comparações de médias, quando a matriz B é obtida a partir da matriz de planejamento do modelo linear em questão. Caso o modelo seja de posto completo, a matriz B será para nós $(X'X)^{-1}$, onde X é a matriz de planejamento, neste caso a matriz B é unicamente determinada. No caso do modelo ser de posto incompleto, a matriz B é determinada de maneira genérica, a partir de uma solução para a inversa de $X'X$ (veja secção 3.5.3.).

Para este caso temos o seguinte:

Se o modelo é de posto completo, temos soluções para comparações de qualquer função linear dos parâmetros (teorema 3.5.).

Se o modelo é de posto incompleto, temos soluções

para comparações do tipo contrastes (intervalos conservativos) através do teorema 3.6., e temos através do teorema 3.7. intervalos exatos para os contrastes quando a matriz $B=QQ'$ e Q é uma matriz cuja soma dos elementos de cada linha é a mesma para todas as linhas.

Neste método "GT", muitas vezes a dificuldade de sua aplicação não está só na obtenção da matriz B , mas também na obtenção da matriz Q tal que $B=QQ'$, e para isso damos na secção 3.5.4., algumas técnicas as quais poderão ajudar na obtenção de Q .

Caso 4:

"Amostras independentes com variâncias totalmente diferentes entre si".

Neste caso $\Sigma = D(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2)$

Técnicas sugeridas para comparações do tipo:

a) Diferença duas a duas

Se $k=2$, temos os métodos de Welch (1938) e de Banerjee (1961) dados no capítulo 4 pelos teoremas 4.1. e 4.2. respectivamente, e segundo Tamhane (1977) o método de Welch produz melhores resultados (veja comparação 5.5.).

Se $k>2$ e uma das médias é uma média controle, temos os métodos dados por Tamhane (1977), baseados nos procedimentos de Banerjee e de Welch, pelos teoremas 4.3. e 4.4., respectivamente.

Se $k>2$ e as comparações são de médias duas a

duas simplesmente, temos também os métodos dados por Tamhane (1977), baseados nos procedimentos de Banerjee (teorema 3.10.) e de Welch (teorema 4.4.).

b) Contrastes

Para este caso temos o método de Tamhane (1977), cujos intervalos são conservativos e é dado pelo corolário 3.5.

c) Funções lineares dos parâmetros

Aqui temos os métodos de Spjøtvoll (1972) dado pelo teorema 2.2. (linha Scheffé) e o de Hochberg (1976) dado pelo teorema 3.9. (linha Tukey).

Observação 5.7.

É claro que os métodos de Spjøtvoll (1972) e Hochberg (1976) dados em "c", podem ser utilizados para comparações do tipo duas a duas e contrastes, mas devemos lembrar das dificuldades de aplicações desses métodos, isto é,: No método de Spjøtvoll (1972), para que seja possível determinarmos as constantes a e b temos que ter todos os tamanhos amostrais maiores de 5 elementos. No método de Hochberg (1976) muitas vezes é difícil a obtenção dos valores das estatísticas utilizadas, já que não temos suas tabelas (veja secção 3.6.3.).

Por causa dessas dificuldades, quando possível, é aconselhável utilizarmos os métodos de Tamhane (1977), pois além de obtermos bons resultados, contamos com a facilidade de suas aplicações.

Caso 5: Testes de Amplitudes

Este caso é um pouco diferente daqueles tratados até agora. Nestes testes o experimentador conta com k médias, as quais ele quer reagrupá-las, de forma que cada sub-grupo de médias possa ser considerado estatisticamente homogêneo. As comparações são sempre baseadas nas amplitudes das médias duas a duas e por isso nós os chamamos de Testes de Amplitudes (capítulo 4).

Caso as amostras sejam independentes e balanceadas temos os métodos de Newman-Keuls (secção 4.2.1.) e o de Duncan (secção 4.2.2.).

Caso as amostras sejam independentes com a mesma variância e tamanhos amostrais diferentes, temos o método de Kramer (secção 4.3.1.).

Quando as amostras não são independentes, mas têm mesma variância, temos o método de Duncan para o caso não balanceado (secção 4.3.2.).

Para o caso balanceado, existem outros testes nesta linha, os quais não foram relacionados aqui dados os objetivos deste trabalho. (Veja Duncan (1955)).

Quando o grupo de médias é considerado grande, podemos utilizar a técnica do "salto com pequenos cortes" (secção 4.3.3.), para que as aplicações se tornem simples e rápidas.

Finalmente, um caso não relacionado até agora é

quando as amostras são correlacionadas e suas variâncias são consideradas totalmente diferentes entre si. Morrison (1967) em seu livro, introduz algumas soluções aproximadas para este caso, onde os intervalos são altamente conservativos.

Devemos ainda lembrar que outros métodos de comparações múltiplas de médias através dos intervalos de confiança, existem, além daqueles aqui relacionados. Esses métodos são, em geral, extensões dos métodos apresentados aqui, e poderíamos citar: Ury e Wiggins (1971) com base no método de Welch; Brown e Forsythe (1974) extensão do método "S" de Scheffé; Datalal (1978) uma generalização do método de Spjøtvoll (1972); Games e Howell (1976).

Esses métodos são aplicáveis para os casos em que as variâncias são diferentes e, juntamente com outros métodos, são comparados no trabalho de Tamhane (1979).

Nessa mesma linha podemos citar ainda o trabalho de Keselman e Rogan (1978) o qual compara os métodos de Tukey (extensões) e de Scheffé; Gabriel (1978) o qual dá uma extensão do método de Tukey e ainda as extensões devido a Genizi e Hochberg (1978) na linha Tukey.

APÊNDICE I

Função Geradora de Cumulantes

I.1. Considerações Gerais

Seja X uma variável aleatória e $f(x)$ a sua função distribuição de probabilidade.

Definição I.1.

Definimos por Função Geradora de Momentos de X , a função em t dada por $E(e^{tX})$, onde $t \in (-h, h)$ para algum $h \in \mathbb{R}$.

Uma das importantes características das funções geradoras de momentos, quando ela existe, é a sua unicidade e determinar completamente a distribuição da variável aleatória X .

Sabemos que uma de suas importantes propriedades é que: "Se duas variáveis aleatórias têm a mesma função geradora de momentos, então elas têm também a mesma distribuição de probabilidade, ou pertencem à mesma família de distribuições".

Pode ser que não encontremos um valor $h \in \mathbb{R}$ tal que $M_X(t) = E(e^{tX})$ exista para todo $t \in (-h, h)$, então dizemos que não existe a função geradora de momentos para a variável aleatória X . Neste caso podemos utilizar a Função Característica dada por:

$\Phi(t) = E(e^{itX})$, onde i é a unidade imaginária (operador complexo) com $i^2 = -1$.

A vantagem de utilizarmos a função $\Phi(t)$, é que ela sempre existe e satisfaz a todas propriedades da função geradora de momentos.

Notaremos a função geradora de momentos por $g(t)$ ao invés da maneira usual $M_X(t)$.

I.2. Função Geradora de Cumulantes

Seja X uma variável aleatória com $f(x)$, $g(t)$ e $\Phi(t)$ as funções: distribuição de probabilidade, geradora de momentos e característica, respectivamente.

Definição I.2.

Ao logaritmo neperiano da função $g(t)$ é que chamamos de Função Geradora de Cumulantes da variável aleatória X . Caso a função $g(t)$ não exista, então nossa Função Geradora de Cumulantes será $k(t) = \log_e [\Phi(t)]$.

Definição I.3.

Definimos o r -ésimo cumulante de X como sendo o coeficiente do r -ésimo termo da expansão em série de potência do $\log_e [\Phi(t)]$, caso essa expansão exista.

I.3. Relações entre Momentos e Cumulantes

Seja $\mu'_r = E(X^r)$ o r-ésimo momento de X em torno de zero e k_r o r-ésimo cumulante de X, onde $k(t)$ a Função Geradora de Cumulantes é dada por:

$$k(t) = \log_e [\Phi(t)] \quad \text{ou}$$

$$k(t) = \log_e [g(t)] \quad ;$$

logo, $\exp[k(t)] = g(t)$, isso nos dá:

$$\begin{aligned} 1 + \mu'_1 \frac{t}{1!} + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mu'_r \frac{t^r}{r!} + \dots &= \exp \left[k_1 \frac{t}{1!} + k_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + k_r \frac{t^r}{r!} + \dots \right] = \\ &= \exp(k_1 \frac{t}{1!}) \exp(k_2 \frac{t^2}{2!}) \dots \exp(k_r \frac{t^r}{r!}) \dots = \left\{ 1 + \frac{k_1 t}{1!} + \frac{(k_1 t)^2}{2!} + \dots \right\} \left\{ 1 + \right. \\ &+ \frac{k_2 t^2}{2!} + \frac{1}{2!} \left(\frac{k_2^2 t^4}{2!^2} \right) + \dots \left. \right\} \dots \left\{ 1 + \left(\frac{k_r t^r}{r!} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{k_r t^r}{r!} \right)^2 + \dots \right\} \dots \end{aligned}$$

Como trata-se da igualdade de dois polinômios em $t \in \mathbb{R}$, então:

$$\mu'_r = \sum_{m=0}^r \sum \left(\frac{k_{p_1}}{p_1!} \right)^{\pi_1} \left(\frac{k_{p_2}}{p_2!} \right)^{\pi_2} \dots \left(\frac{k_{p_m}}{p_m!} \right)^{\pi_m} \frac{r!}{\pi_1! \pi_2! \dots \pi_m!}, \quad \text{onde o}$$

segundo somatório é sobre todos os valores não negativos de π 's, tais que $p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + \dots + p_m \pi_m = r$, onde p_i e π são inteiros positivos para $i=1, 2, \dots, m$.

Desta forma teremos os momentos em função dos cumulantes, por exemplo:

$$\mu'_1 = k_1$$

$$\mu'_2 = k_2 + k_1^2$$

$$\mu'_3 = k_3 + 3k_2 k_1 + k_1^3$$

$$\mu'_4 = k_4 + 4k_3 k_1 + 3k_2^2 + 6k_1^2 k_2 + k_1^4$$

$$\mu'_5 = k_5 + 5k_4 k_1 + 10k_3 k_2 + 10k_3 k_1^2 + 15k_2^2 k_1 + 10k_2 k_1^3 + k_1^5$$

Utilizando a dedução dada por Kendall (1969), que

é:

$\frac{\partial \mu'_r}{\partial k_1} = r \mu'_{r-1}$, teremos mais facilidade para calcularmos μ'_r em função dos cumulantes $k_1, k_2, \dots, k_r$, por exemplo:

$$\frac{\partial \mu'_2}{\partial k_1} = 2\mu'_1 = 2k_1 \Rightarrow \mu'_2 = k_1^2 + c, \text{ e substituindo } c \text{ por}$$

k_2 , obtemos $\mu'_2 = k_1^2 + k_2$.

$\frac{\partial \mu'_3}{\partial k_1} = 3\mu'_2 = 3(k_1^2 + k_2) \Rightarrow \mu'_3 = 3k_2 k_1 + k_1^3 + c$, e substituindo c por k_3 , obtemos $\mu'_3 = k_3 + 3k_2 k_1 + k_1^3$.

$$\frac{\partial \mu'_4}{\partial k_1} = 4\mu'_3 = 4(k_3 + 3k_2 k_1 + k_1^3) \Rightarrow \mu'_4 = 4k_3 k_1 + 6k_2 k_1^2 + k_1^4 + c \text{ e}$$

substituindo c por $k_4 + 3k_2^2$, obtemos $\mu'_4 = k_4 + 4k_3 k_1 + 3k_2^2 + 6k_2 k_1^2 + k_1^4$, neste caso a constante c é tomada por $c = k_4 + k_2^2 \left(\frac{4!}{2!(2!)^2} \right) = k_4 + 3k_2^2$.

Portanto a constante c deve ser trocada pela soma das parcelas que não envolvam k_1 , e cuja soma dos produtos índices e expoente de cada parcela, resulta no índice do momento em questão.

Se a média de X for nula ($\mu'_1 = 0$), e quisermos os momentos μ'_r em torno da média, como funções dos cumulantes, basta substituírmos k_1 por zero, ou seja, considerarmos somente os termos que não envolvem k_1 , cuja soma destes, para nós é a constante c .

Podemos também obter os cumulantes em função dos momentos.

Para isso fazemos:

$$\frac{k_1 t}{1!} + \frac{k_2 t^2}{2!} + \dots + \frac{k_r t^r}{r!} + \dots = \log_e \left(1 + \frac{\mu'_1 t}{1!} + \frac{\mu'_2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mu'_r t^r}{r!} + \dots \right).$$

Expandindo o logarítmo, obtemos dois polinômios e para que sejam idênticos é necessário que:

$$k_r = r! \sum_{m=0}^r \sum \left(\frac{\mu'_{p_1}}{p_1!} \right)^{\pi_1} \left(\frac{\mu'_{p_2}}{p_2!} \right)^{\pi_2} \dots \left(\frac{\mu'_{p_m}}{p_m!} \right)^{\pi_m} \cdot \frac{(-1)^{\rho-1} (\rho-1)!}{\pi_1! \pi_2! \dots \pi_m!}$$

onde o segundo somatório estende-se sobre todos os π 's e ρ 's inteiros não negativos, tais que: $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m = \rho$.

Desta forma teremos os cumulantes em função dos momentos, por exemplo:

$$\begin{aligned} k_1 &= \mu'_1 \\ k_2 &= \mu'_2 - \mu_1'^2 \\ k_3 &= \mu'_3 - 3\mu'_2 \mu'_1 + 3\mu_1'^3 \\ k_4 &= \mu'_4 - 4\mu'_3 \mu'_1 - 3\mu_2'^2 + 12\mu'_2 \mu_1'^2 - 6\mu_1'^4 \\ k_5 &= \mu'_5 - 5\mu'_4 \mu'_1 - 10\mu'_3 \mu'_2 + 20\mu'_3 \mu_1'^2 + 30\mu_2'^2 \mu'_1 - 60\mu'_2 \mu_1'^3 + \\ &\quad + 24\mu_1'^5 \end{aligned}$$

Quando não existir a função geradora de momentos devemos utilizar a função característica,

$$\Phi(t) = E(e^{itX}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} E(X^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu'_j (it)^j}{j!} = 1 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu'_j (it)^j}{j!} \text{ e teremos a função geradora de cumulantes dada}$$

por

$$k(t) = \log_e \Phi(t) = \log_e \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu'_j (it)^j}{j!} \right) = \log_e \left(1 + \sum_{j=1}^r \frac{\mu'_j (it)^j}{j!} + \theta(t^r) \right) = \sum_{j=1}^r k_j \frac{(it)^j}{j!} + \theta(t^r)$$

a última passagem é de

vido à expansão em série do logaritmo; $\theta(t^r)$ é o resto da série dada acima, a qual supomos convergente, $t \equiv$ constante real de baixo valor absoluto e que os momentos de ordem menor ou igual a r existam (mesmo que a função geradora de momentos não exista).

E assim os coeficientes k_j são os cumulantes de X .

Para outros esclarecimentos e exemplos, veja: Kendall-Stuart (1969) - The Advanced Theory of Statistics.

Na aproximação dada no teorema (2.2.), temos o seguinte:

Considerando a distribuição $F_i(1, v_i)$ e k_j^i o seu j -ésimo cumulante assim como $\mu_j^{i'}$ o seu j -ésimo momento, teremos:

$$k_1^i = \mu_1^{i'} \quad \text{e} \quad k_2^i = \mu_2^{i'} - \mu_1^{i'} \quad \text{para } i=1, 2, \dots, k$$

$$k_1^i = \frac{v_i}{v_i - 2} \quad \text{e} \quad k_2^i = \frac{2v_i^2(v_i - 1)}{(v_i - 2)^2(v_i - 4)}$$

Como as variáveis F_i para $i=1, 2, \dots, k$ são consideradas independentes e seja $U = \sum_{i=1}^k F_i(1, v_i)$, onde k_j e $\mu_j^{i'}$ representam o j -ésimo cumulante e o j -ésimo momento de U , respectivamente, teremos:

$$k_1 = \sum_{i=1}^k \mu_1^{i'} \quad \text{e} \quad k_2 = \sum_{i=1}^k (\mu_2^{i'} - \mu_1^{i'}) \quad \text{e assim:}$$

$$k_1 = \sum_{i=1}^k \frac{v_i}{v_i - 2} \quad \text{e} \quad k_2 = \sum_{i=1}^k \frac{2v_i^2(v_i - 1)}{(v_i - 2)^2(v_i - 4)}$$

Para a variável $aF(k,b)$, teremos:

$$k_1^* = \frac{ab}{b-2} \quad \text{e} \quad k_2^* = \frac{2a^2b^2(k+b-2)}{k(b-2)^2(b-4)} \quad \text{e fazendo:}$$

$$\frac{ab}{b-2} = \sum_{i=1}^k \frac{v_i}{v_i-2} \Rightarrow a = \left(1 - \frac{2}{b}\right) \sum_{i=1}^k \left(\frac{v_i}{v_i-2}\right) \quad (*)$$

$$\text{e } \frac{2a^2b^2(k+b-2)}{k(b-2)^2(b-4)} = \sum_{i=1}^k \frac{2v_i^2(v_i-1)}{(v_i-2)^2(v_i-4)} \quad \text{e substituindo o valor ob}$$

tido de a em $(*)$, teremos:

$$b = \frac{(k-2) \left(\sum_{i=1}^k \frac{v_i}{v_i-2} \right)^2 + 4k \sum_{i=1}^k \frac{v_i^2(v_i-1)}{(v_i-2)^2(v_i-4)}}{k \sum_{i=1}^k \frac{v_i^2(v_i-1)}{(v_i-2)^2(v_i-4)} - \left(\sum_{i=1}^k \frac{v_i}{v_i-2} \right)^2}$$

APÊNDICE II

Distribuições de Amplitudes (Range Distribution)

II.1. Introdução

A finalidade deste apêndice é descrever sobre as principais distribuições tratadas no capítulo 3, elas em número de três, são chamadas de:

- i) Distribuição da Amplitude Estudentizada;
- ii) Distribuição do Módulo Máximo Estudentizado;
- iii) Distribuição da Amplitude Estudentizada Aumentada.

São chamadas de Amplitude Estudentizada porque suas variáveis aleatórias medem a distância ou amplitude entre as variáveis observadas, as quais têm distribuições de Student.

As expressões que encontramos para as funções densidades de probabilidade e funções de distribuição dessas variáveis aleatórias não são muito simples, mas já existem algumas tabelas para alguns valores dos parâmetros dessas variáveis.

II.2. Considerações Gerais para a obtenção das Distribuições

Seja $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ uma amostra aleatória de tamanho k de uma população que tem distribuição normal com parâmetros $(0, \sigma^2)$. Seja s^2 o estimador não viesado de σ^2 , onde $\frac{\nu s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(\nu)}$ e s^2 independente de $(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

Logo, $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ para $i=1, 2, \dots, k$ e

$$T_i = \frac{X_i / \sigma}{\sqrt{\frac{\nu s^2}{\sigma^2} / \nu}} = \frac{X_i}{s} \sim t_{(\nu)} \quad \text{para } i=1, 2, \dots, k \quad (\text{II.1.})$$

onde $t_{(\nu)}$ tem distribuição de Student com ν graus de liberdade.

Observação II.1.

Para facilitar a introdução desses conceitos, supomos que $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ para todo $i=1, 2, \dots, k$, pois se tal não acontecer, podemos transformar as variáveis X_i para Y_i , tal que $Y_i \sim N(0, \sigma^2)$ e então desenvolvemos nossos conceitos sobre as variáveis Y_i para $i=1, 2, \dots, k$.

II.3. Distribuição da Amplitude Estudentizada

Definição II.1.

Considerando a amostra aleatória $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ dada acima em II.2., seja Q a variável aleatória dada por:

$$Q = \max_{1 \leq i < j \leq k} |X_i - X_j| / s$$

A variável aleatória Q é que chamamos de "Amplitude de Studentizada" com parâmetros k e ν .

Normalmente dizemos que os parâmetros k e ν são graus de liberdade da distribuição da variável aleatória Q .

Podemos observar que:

$$Q = \max_{1 \leq i < j \leq k} |X_i - X_j| / s = \max_{1 \leq i < j \leq k} |T_i - T_j| \quad \text{e} \quad (\text{II.2.})$$

pode ser interpretado como sendo a amplitude máxima entre k variáveis aleatórias com distribuição de Student.

Como vimos nos métodos apresentados nos capítulos 3 e 4 precisamos do valor q de Q tal que $P(Q \leq q) = 1 - \alpha$, onde $0 < \alpha < 1$ é um dado valor fixo. Existem algumas tabelas que nos fornecem esses valores e são obtidos através do seguinte:

Teorema II.1.

Seja Q a variável aleatória definida em III.3., então a função de distribuição $F_Q(q) = P(Q \leq q)$ é dada por:

$$F_Q(q) = \int_0^\infty \left\{ k \int_{-\infty}^\infty [\Phi(y) - \Phi(y - qx)]^{k-1} \cdot \psi(y) dy \right\} \cdot g_\nu(x^2 \nu) \cdot 2x \nu dx, \quad \text{onde}$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2/2} du \quad \text{e} \quad \psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \quad \text{para } y \in \mathbb{R} \quad (\text{II.3.})$$

e $g_\nu(x)$ é a densidade da variável aleatória $\chi^2_{(\nu)}$.

Demonstração:

Seja $R_k = \max_{1 \leq i < j \leq k} \left| \frac{X_i}{\sigma} - \frac{X_j}{\sigma} \right| = \max_{1 \leq i < j \leq k} |Z_i - Z_j|$ a amplitude máxima entre as k variáveis aleatórias $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$,

$Z_i \sim N(0,1)$ para $i=1,2,\dots,k$ e $\frac{vs^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(v)}$ independente de $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ e seja $g_v(x)$ a função densidade da variável aleatória $\chi^2_{(v)}$ para $x>0$.

$$\begin{aligned} \text{Então: } Q &= \max_{1 \leq i < j \leq k} |X_i - X_j| / s = \frac{\max_{1 \leq i < j \leq k} |Z_i - Z_j|}{\sqrt{\frac{vs^2}{\sigma^2}}} = \\ &= \frac{R_k}{\sqrt{\chi^2_{(v)}/v}} \quad \text{e} \\ F_Q(q) &= P(Q \leq q) = P\left(\frac{R_k}{\sqrt{\chi^2_{(v)}/v}} \leq q\right) = P(R_k \leq q\sqrt{\chi^2_{(v)}/v}) = \\ &= P(R_k \leq qx \text{ e } \sqrt{\chi^2_{(v)}/v} = x, \text{ para todo } x>0) = \\ &= \int_0^\infty P(R_k \leq qx; \sqrt{\chi^2_{(v)}/v} = x) \delta P(\sqrt{\chi^2_{(v)}/v} \leq x) = \\ &= \int_0^\infty P(R_k \leq qx) \delta P(\sqrt{\chi^2_{(v)}/v} \leq x) = \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty k [P(y-qx \leq Z \leq y)]^{k-1} \cdot \psi(y) dy \right\} \delta P(\chi^2_{(v)} \leq x^2 \cdot v) = \\ &= \int_0^\infty \left\{ k \int_{-\infty}^\infty [\Phi(y) - \Phi(y-qx)]^{k-1} \cdot \psi(y) dy \right\} g_v(x^2 \cdot v) \cdot \\ &\quad \cdot 2x v dx \quad (II.4.) \end{aligned}$$

Fixando-se os valores α , k e v para que $P(Q \leq q) = 1 - \alpha$ podemos obter, através de métodos computacionais de integração numérica, as Tabelas da Função de Distribuição Acumulada da variável aleatória Q .

Essas tabelas também podem ser derivadas através da resolução em q da equação:

$$k \int_{-\infty}^{\infty} [F_v(t+q) - F_v(t)]^{k-1} \cdot f_v(t) dt = 1 - \alpha, \text{ onde } f_v(t) \text{ e}$$

$F_v(t)$ são respectivamente, as funções densidade e de distribuição da variável T de Student e $t \in \mathbb{R}$.

A vantagem de apresentarmos $F_Q(q)$ através de (II.4) no teorema II.1. o qual utiliza as distribuições de Quiquadrado e Normal, é podermos tirar certas relações entre as três principais distribuições deste apêndice. Essas relações são devidas a Stoline (1978), onde ele faz um breve comentário sobre essas distribuições em um de seus trabalhos de Comparações Múltiplas.

Observação II.2.

Lembramos ainda que a Distribuição da Amplitude aqui entre as k variáveis aleatórias com distribuições t -Student poderia ser derivada entre k variáveis aleatórias com outra distribuição qualquer. Daremos no apêndice IV as Tabelas da Distribuição da Amplitude entre k variáveis aleatórias normalmente distribuídas (utilizadas no método de Hochberg (1976) - veja secção 3.6.3.).

II.4. Distribuição do Módulo Máximo Estudentizado

Definição II.2.

Considerando a amostra aleatória dada em II.2., seja M a variável aleatória dada por:

$$M = \max_{1 \leq i \leq k} |X_i|/s$$

A variável aleatória M é que chamamos de "Módulo Máximo Estudentizado" com parâmetros k e v .

Note que $M = \max_{1 \leq i \leq k} |X_i|/s = \max_{1 \leq i \leq k} |T_i|$, o que pode ser interpretado como sendo o máximo dos valores absolutos de k variáveis aleatórias com distribuição de Student.

Teorema II.2.

Seja M a variável aleatória da definição II.2. Então sua função de distribuição $F_M(m) = P(M \leq m)$ é dada por:

$$F_M(m) = \int_0^{\infty} [2\Phi(mx) - 1]^k \cdot g_v(x^2 \cdot v) \cdot 2xv \cdot dx, \text{ onde } x > 0,$$

$$m > 0, \quad \Phi(mx) = \int_0^{mx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \text{ e } g_v(x^2 \cdot v) \text{ é a f.d.p. de uma } \chi^2(v)$$

onde $x > 0$ é trocado por $x^2 v > 0$.

Demonstração:

$$F_M(m) = P(M \leq m) = P\left(\max_{1 \leq i \leq k} |X_i|/s \leq m\right) = P\left(\max_{1 \leq i \leq k} \frac{|X_i|/\sigma}{\sqrt{\frac{vs^2}{\sigma^2}}/\sqrt{v}} \leq m\right) =$$

$$= P\left(\max_{1 \leq i \leq k} \frac{|Z_i|}{\sqrt{\chi^2(v)}/\sqrt{v}} \leq m\right) = P\left(\max_{1 \leq i \leq k} |Z_i| \leq mx \text{ e } \sqrt{\chi^2(v)}/\sqrt{v} = x, \text{ para } x > 0\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{todo } x > 0) &= \\
 &= \int_0^{\infty} P\left(\max_{1 \leq i \leq k} |Z_i| \leq mx; \sqrt{\chi^2_{(v)}/v} = x\right) \delta P\left(\sqrt{\chi^2_{(v)}/v} \leq x\right) dx = \\
 &= \int_0^{\infty} \left[P(|Z| \leq mx)\right]^k \cdot g_v(x^2 v) \cdot 2xv dx = \\
 &= \int_0^{\infty} \left[2\Phi(mx) - 1\right]^k \cdot \frac{v^{\frac{v}{2}}}{\Gamma(\frac{v}{2}) 2^{\frac{v}{2} - 1}} \cdot x^{v-1} \cdot e^{-\frac{vx^2}{2}} dx \quad (\text{II.5.})
 \end{aligned}$$

Tal como a distribuição da Amplitude Estudentizada, podemos derivar as tabelas do Módulo Máximo Estudentizado através da seguinte equação em m .

$$\begin{aligned}
 F_M(m) &= \int_{-\infty}^m k \left[P(-t \leq T \leq t)\right]^{k-1} \cdot 2f_v(t) dt = \\
 &= k \int_{-\infty}^m \left[2F_v(t) - 1\right]^{k-1} \cdot 2f_v(t) dt = 1 - \alpha, \quad (\text{II.6.})
 \end{aligned}$$

onde $T \sim t_{(v)}$ com $f_v(t)$ e $F_v(t)$ sendo suas funções densidade e de distribuição, respectivamente.

Podemos ainda encontrar m , indiretamente através da distribuição de T , isto é:

$$\begin{aligned}
 F_M(m) = 1 - \alpha &\iff \left[P(-m < T < m)\right]^k = 1 - \alpha \iff \\
 (2F_v(m) - 1) &= (1 - \alpha)^{\frac{1}{k}}, \text{ então } F_M(m) = 1 - \alpha \iff m \text{ é tal que} \\
 F_v(m) &= \frac{1}{2} \left(1 + (1 - \alpha)^{\frac{1}{k}}\right); \quad m > 0 \quad (\text{II.7.})
 \end{aligned}$$

II.5. Distribuição da Amplitude Estudentizada Aumentada

Definição II.3.

Considerando a amostra aleatória $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ dada em II.2., seja Q' a variável aleatória dada por:

$$Q' = \max_{1 \leq i < j \leq k} \{ |X_i|; |X_i - X_j| \} / s = \max\{Q, M\}$$

A variável aleatória Q' é que chamamos de Amplitude Estudentizada Aumentada como parâmetros k e v .

Alguns autores definem Q' por:

$$Q' = \max_{0 \leq i < j \leq k} |T_i - T_j| \text{ tal que } T_0 \equiv 0, \text{ o que} \quad (II.8.)$$

é equivalente à definição II.3.

A função de distribuição de Q' é dada em função das funções de distribuições de Q e M , veja o seguinte:

Teorema II.3.

Seja Q' a variável aleatória da Amplitude Estudentizada Aumentada com k e v graus de liberdade, então:

$$\begin{aligned} P(Q' > c) &= P(Q > c) + P(M > c > Q) \quad \text{ou} \\ P(Q' > c) &= P(M > c) + P(Q > c > M) \end{aligned} \quad (II.9.)$$

e ainda:

$$\begin{aligned} F_{Q'}(q') = P(Q' \leq q') &= \int_0^{\infty} \left\{ k \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(y) - \Phi(y - q'x)]^{k-1} \psi(y) dy - \right. \\ &\left. - 2k \int_{q'x}^{\infty} [\Phi(y) - \Phi(y - q'x)]^{k-1} \cdot \psi(y) dy \right\} g_v(x^2 v)^{2xv} dx, \end{aligned} \quad (II.10.)$$

ou ainda:

$$F_{Q'}(q') = P(Q' \leq q') = \int_0^{\infty} \left\{ \left[2\Phi(q'x) - 1 \right]^k - \int_{q'x/2}^{q'x} 2k \left[(2\Phi(y) - 1)^{k-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - (\Phi(y) - \Phi(y - q'x))^{k-1} \right] \psi(y) dy \right\} g_v(x^2 v) 2x v dx \quad (II.11.)$$

Demonstração:

$$P(Q' > c) = 1 - P(Q' \leq c) = 1 - P(\max(Q, M) \leq c) = \\ 1 - P(Q \leq c, M \leq c) = P(Q > c, M > c) + P(M > c, Q \leq c) + P(M \leq c, Q > c) \quad (II.12.)$$

Usando o fato que:

$$P(Q > c, M > c) + P(M > c, Q \leq c) = P(M > c) \text{ e}$$

$$P(Q > c, M > c) + P(Q > c, M \leq c) = P(Q > c)$$

a parte (II.9.) fica demonstrada.

Para verificarmos (II.10.) e (II.11.), basta notarmos que:

$$P(M > c > Q) = \int_0^{\infty} 2k \int_{cx}^{\infty} \left[\Phi(y) - \Phi(y - cx) \right]^{k-1} \psi(y) dy \cdot g_v(x^2 v) 2x v dx = \\ = 2k \int_0^{\infty} \int_{cx}^{\infty} \left[\Phi(y) - \Phi(y - cx) \right]^{k-1} \psi(y) g_v(x^2 v) 2x v dy dx, \quad (II.13.)$$

$$P(Q > c > M) = 2k \int_0^{\infty} \int_{\frac{cx}{2}}^{cx} \left[(2\Phi(y) - 1)^{k-1} - (\Phi(y) - \Phi(y - cx))^{k-1} \right] \cdot \psi(y) \cdot$$

$$\cdot g_v(x^2 v) 2x v dy dx, \text{ onde } \Phi(y), \psi(y) \text{ e } g_v(x) \quad (II.14.)$$

são dados por (II.3.).

Tomando as equações (II.13.) e (II.14.) e substituindo-as em (II.9.) com $q' = c > 0$, $P(Q > c) = 1 - F_Q(c)$, $P(M > c) = 1 - F_M(c)$ e

$P(Q' > c) = 1 - F_{Q'}(c)$, $x > 0$, teremos (II.10.) e (II.11.) verifica -
das.

No apêndice IV daremos algumas tabelas dessas dis
tribuições necessárias nas aplicações dos métodos aqui apresen
tados.

APÊNDICE III

Demonstrações de alguns teoremas

Teorema 2.1.

É de $1-\alpha$ a probabilidade de que todos os contrastes $\Psi = \underline{c}' \underline{\mu}$ satisfaçam simultaneamente a condição:

$$\hat{\Psi} - S \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}} \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + S \hat{\sigma}_{\hat{\Psi}}$$

onde $S^2 = (k-1) F_{\alpha}(k-1, v)$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}}^2 = s^2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij} c_i c_j$$

Demonstração

Para provar este teorema utilizamos métodos matemáticos assim como transformações lineares cujos coeficientes, apesar de serem considerados como conhecidos, não precisam ser encontrados nas aplicações práticas.

Esta prova é devido a Scheffé (1953).

Consideremos como sendo C o espaço de todos os contrastes $\hat{\Psi} = \underline{c}' \underline{\hat{\mu}}$ ($\sum_{i=1}^k c_i = 0$); este espaço tem dimensão $k-1$.

Sob as suposições acerca da matriz de covariâncias, podemos encontrar uma base $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_{k-1}$ que correspondem a

$k-1$ variáveis aleatórias independentes com variâncias iguais, isto é:

$$\sigma_{\hat{\eta}_i}^2 = c^2 \sigma^2 \quad (\text{III.1.})$$

onde c é uma constante positiva.

$$\text{Seja } \hat{\eta}_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k \hat{\mu}_i, \text{ então entre } \hat{\mu}_i \text{ e } \hat{\eta}_i \quad (\text{III.2.})$$

existirá uma relação linear não singular da forma,

$$\hat{\mu}_i = \sum_{j=1}^k b_{ij} \hat{\eta}_j, \text{ para } i=1, 2, \dots, k, \quad (\text{III.3.})$$

onde os b_{ij} são constantes que independem dos parâmetros desconhecidos.

Considerando que $E(\hat{\eta}_j) = \eta_j$ podemos escrever:

$$\mu_i = \sum_{j=1}^k b_{ij} \eta_j \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

$$\text{Então } \Psi = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_i b_{ij} \eta_j \quad (\text{III.4.})$$

Como C tem dimensão $k-1$, cuja base é $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k-1}$, então o coeficiente η_k deve ser nulo para todo c tal que $\sum_{i=1}^k c_i = 0$, assim b_{ik} não depende de i , e podemos escrever:

$$\Psi = \sum_{j=1}^{k-1} d_j \eta_j, \text{ onde } \hat{\Psi} = \sum_{j=1}^{k-1} d_j \hat{\eta}_j \quad \text{e}$$

$$d_j = \sum_{i=1}^k c_i b_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, k-1) \quad (\text{III.5.})$$

$$\text{Agora, } \text{var}(\hat{\Psi}) = \sum_{j=1}^{k-1} d_j^2 \sigma_{\hat{\eta}_j}^2 = c^2 \sigma^2 \sum_{j=1}^{k-1} d_j^2 = \sigma_{\hat{\Psi}}^2$$

Um contraste Ψ para o qual $\sigma_{\hat{\Psi}}^2 = c^2 \sigma^2$ será chamado de contraste normalizado, portanto para que isso se verifique ,

temos que ter:

$$\sum_{j=1}^{k-1} d_j^2 = 1$$

$$\text{Notaremos por } \xi = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i = \sum_{i=1}^{k-1} d_i \eta_i \quad \left(\sum_{i=1}^{k-1} d_i^2 = 1 \right) \quad (\text{III.6.})$$

o contraste normalizado.

É suficiente mostrar a validade do teorema para todos os contrastes normalizados. Isto é feito por meio de algumas considerações geométricas.

Considere um espaço de dimensão $k-1$ com pontos

$\underline{y}' = (y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$. Temos nesse espaço o ponto paramétrico $\underline{\eta}' = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k-1})$ e também sua estimativa $\hat{\underline{\eta}} = (\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_{k-1})$.

As variáveis aleatórias $\sum_{i=1}^{k-1} (\hat{\eta}_i - \eta_i)^2 / c^2 \sigma^2$ e

$\frac{v\sigma^2}{\sigma^2} = \frac{vs^2}{\sigma^2}$ são independentes e têm distribuição de χ^2 com $k-1$ e v graus de liberdade respectivamente.

$$\text{Logo: } \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (\hat{\eta}_i - \eta_i)^2 / c^2 \sigma^2}{vs^2 / \sigma^2} \cdot \frac{v}{k-1} \sim F_{(k-1, v)}$$

Portanto teremos uma esfera de confiança F ,

$$\sum_{i=1}^{k-1} (y_i - \hat{\eta}_i)^2 \leq S^2 c^2 \hat{\sigma}^2 \quad \text{onde } S^2 = (k-1) F_{\alpha}(k-1, v) \quad (\text{III.7.})$$

para o ponto paramétrico $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{k-1})$, cuja probabilidade de que F contenha $\underline{\eta}$ é $1-\alpha$.

Então um contraste normalizado é visto como um vetor $\underline{d}' = (d_1, d_2, \dots, d_{k-1})$ tal que $\sum_{i=1}^{k-1} d_i^2 = 1$.

De (III.6.) vemos que o valor ξ de um contraste é a projeção de $\underline{\eta}$ sobre $\underline{d}$ e o valor $\hat{\xi}$ é a projeção de $\hat{\underline{\eta}}$ sobre $\underline{d}$.

Então o intervalo para ξ com $(1-\alpha)100\%$ de confiança é dado por:

$$\hat{\xi} - Sc\hat{\sigma} \leq u \leq \hat{\xi} + Sc\hat{\sigma} \quad (\text{III.8.})$$

e o centro deste intervalo é a projeção do centro $\hat{\eta}$ da esfera F sobre $\underline{d}$, cuja amplitude corresponde a duas vezes o raio de F , isto é, o intervalo (III.8.) pode ser interpretado como a projeção de F sobre $\underline{d}$.

O intervalo contém o verdadeiro valor do contraste, se e somente se, a projeção do ponto $\underline{\eta}$ sobre $\underline{d}$ cai na projeção de F sobre $\underline{d}$.

Isto ocorre para todos os vetores $\underline{d}$, se e somente se, F cobre $\underline{\eta}$, e a probabilidade disto ocorrer é $1-\alpha$.

Portanto o teorema se verifica para todos os contrastes normalizados, e portanto para todos os contrastes.

Teorema 3.4. (GT-1)

Antes de demonstrarmos o teorema 3.4., temos que introduzir algumas definições e propriedades:

Definição III.1.

Seja $\underline{\theta}' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \sim N_k(\underline{0}; \sigma^2 B)$ onde B é supostamente conhecida e σ^2 desconhecido.

$$r(\underline{\theta}) = \max_{1 \leq i < j \leq k} |\theta_i - \theta_j| \quad e$$

$$Q(v) = \{\underline{\theta} : r(\underline{\theta}) \leq v\}, \quad v \in \mathbb{R}_+$$

Lema III.1.

Para qualquer $v > 0$, $Q(v)$ é um conjunto convexo em R^k e simétrico em torno do ponto o .

Demonstração:

Seja θ_1 e $\theta_2 \in Q(v)$ e $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$\begin{aligned} r(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2) &= \max_{1 \leq i < j \leq k} |\alpha\theta_{1i} + (1-\alpha)\theta_{2i} - \alpha\theta_{1j} - \\ &- (1-\alpha)\theta_{2j}| \leq \alpha \max_{1 \leq i < j \leq k} |\theta_{1i} - \theta_{1j}| + (1-\alpha) \max_{1 \leq i < j \leq k} |\theta_{2i} - \theta_{2j}| = \\ &= \alpha r(\theta_1) + (1-\alpha)r(\theta_2) \leq v. \end{aligned}$$

Logo, $Q(v)$ é convexo. A simetria ocorre pela própria definição de θ , $r(\theta)$ e $Q(v)$.

Lema III.2.

Consideremos $\theta \sim N(o; \sigma^2 B)$ e seja θ_a uma outra variável aleatória k -dimensional tal que $\theta_a \sim N(o; \Sigma)$, onde a matriz $\sigma^2 B - \Sigma$ é positiva semi definida.

Se $Q(v)$ é um conjunto convexo e simétrico em torno da origem de R^k , com $v > 0$, então temos que:

$$P(\theta_a \in Q(v)) \geq P(\theta \in Q(v))$$

e se $h(\theta)$ é uma função simétrica tal que o conjunto $\{\theta : h(\theta) \leq v\}$ é convexo, então temos que:

$$P(h(\theta_a) \leq v) \geq P(h(\theta) \leq v)$$

onde $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^k$ e $v > 0$.

Para sua demonstração veja o *corolário 3* de: "The Integral of a Symmetric Unimodal Function over a Symmetric Convex Set and some Probability Inequalities" - T.W. Anderson - Proc. Amer. Math. Soc. - 1954 - 6 - (170-176).

Observação:

Ao invés de usarmos as matrizes de correlação $\sigma^2 B$ e Σ para $\underline{\theta}$ e $\underline{\theta}_a$ poderíamos ter usado quaisquer matrizes Σ_1 e Σ_2 respectivamente, tais que a diferença $\Sigma_1 - \Sigma_2$ seja uma matriz positiva semi definida, e o lema tem assim a mesma validade.

Definição III.2.

Seja $a \in \mathbb{R}$ definimos $S_i(a) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k |a - b_{ij}|$, $i=1, 2, \dots, k$ e

seja $\underline{\theta}_a \sim N_k(\underline{0}; \Sigma)$, onde temos o valor $\sigma^2 \left(\max_{1 \leq i < j \leq k} \{b_{ii} + S_i(a)\} \right)$ na diagonal principal de Σ e $\sigma^2 a$ fora de sua diagonal com $B = (b_{ij})$, $i, j=1, \dots, k$.

Teorema III.1.

Considere $\underline{\theta}$ e $\underline{\theta}_a$ definidos acima.

Então temos que:

$$P(r(\underline{\theta}) \geq t) \leq P(r(\underline{\theta}_a) \geq t)$$

para todo $0 \leq t \leq \infty$.

Demonstração:

Consideremos as matrizes B_{ij} definidas por

$B_{ij} = ((b_{m,n}^{ij}))$, $m, n = 1, \dots, k$, com $1 \leq i < j \leq k$, onde $b_{m,n}^{ij}$ é dado por:

$$b_{m,n}^{ij} = \begin{cases} a - b_{ij} & \text{se } m \neq n \text{ e } (i=m, j=n \text{ ou } i=n, j=m) \\ |a - b_{ij}| & \text{se } m = n \text{ e } (i=m \text{ ou } j=m) \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

As matrizes B_{ij} ($1 \leq i < j \leq k$) são positivas semi-definidas.

Seja $B^* = \text{Diag}(b_1^*, \dots, b_k^*)$ onde

$$b_i^* = \max_{1 \leq \ell \leq k} \{b_{\ell\ell} + S_\ell(a)\} - b_{ii} - S_i(a) \text{ para } i=1, 2, \dots$$

$\dots, k$.

Note que B^* também é positiva semi-definida.

Desta forma a matriz Σ de $\underline{\theta}_a$ pode ser escrita por:

$$\Sigma = \sigma^2 B + \sigma^2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} B_{ij} + \sigma^2 B^*$$

Assim, com o uso dos Lemas III.1. e III.2., teremos o teorema III.1. demonstrado.

Corolário III.1.

Sob as suposições do Teorema III.1., temos que:

$$P(r(\underline{\theta})/s \geq t) \leq P(r(\underline{\theta}_a)/s \geq t)$$

para todo $0 \leq t < \infty$ e $s^2 = \hat{\sigma}^2$ tal que $\frac{vs^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(v)}$ independente de $\underline{\theta}$ e $\underline{\theta}_a$.

Demonstração:

Condicionando sobre s ($s > 0$), nós temos (para s fixo) e pelo teorema III.1. que:

$$P(r(\underline{\theta}) \geq t.s) \leq P(r(\underline{\theta}_a) \geq t.s)$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima, com respeito à distribuição de probabilidade de s , desde que s é independente de $\underline{\theta}$ e $\underline{\theta}_a$, teremos a validade do corolário III.1.

Consideremos agora o contraste $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$, onde $\hat{\underline{\mu}} \sim N_k(\underline{\mu}; \sigma^2 B)$ e B é a matriz de correlação supostamente conhecida.

Com as definições e propriedades definidas acima, estaremos agora em condições de demonstrarmos o teorema 3.4.

Demonstração do Teorema 3.4.

O Teorema 3.4. afirma que: sob algumas suposições a probabilidade de que todos os contrastes $\Psi = \underline{c}'\underline{\mu}$ satisfaçam simultaneamente à condição

$$\begin{aligned} & \hat{\Psi} - \left(\max_{1 \leq i \leq k} \{b_{ii} + S_i(a)\} - a \right)^{\frac{1}{2}} \cdot q_{\alpha; k, \nu} \cdot s \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + \\ & + \left(\max_{1 \leq i \leq k} \{b_{ii} + S_i(a)\} - a \right)^{\frac{1}{2}} \cdot q_{\alpha; k, \nu} \cdot s \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i|, \text{ é maior ou igual a } 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Para sua demonstração devemos trocar $\underline{\theta}$ por $\hat{\underline{\mu}}$ onde $\underline{\mu} \sim N(\underline{\mu}; \sigma^2 B)$, e ao invés de $\underline{\theta}_a$ usaremos $\hat{\underline{\mu}}_a$ tal que $\underline{\mu}_a \sim N(\underline{0}; \Sigma)$, onde Σ tem como valor $\sigma^2 \left(\max_{1 \leq i \leq k} \{b_{ii} + S_i(a)\} \right)$ para os elementos de sua diagonal principal e $a\sigma^2$ fora da diagonal.

Agora basta aplicarmos os resultados do corolário 3.2. sobre $\underline{\mu}_a$ e teremos intervalos de confiança para todos os

contrastes simultaneamente. Assim, pelo teorema III.1. e corolário III.1., teremos um intervalo conservativo para todos os contrastes simultaneamente sobre $\hat{\mu}$.

Teorema 3.7. (GT - para modelos de posto incompleto)

Este teorema fornece intervalos conservativos, com probabilidade de pelo menos $1-\alpha$, que todos os contrastes satisfaçam simultaneamente $\hat{a}$:

$$\hat{\Psi} - s \cdot q'_{\alpha; k, v^g}(\underline{c}' Q_B) \leq \Psi \leq \hat{\Psi} + s \cdot q'_{\alpha; k, v^g}(\underline{c}' Q_B)$$

Demonstração:

Temos $Q_B Q_B' = B$ onde $B \in \beta$

A matriz de covariância de $\hat{\mu}$ pode ser escrita por:

$$\Sigma = \sigma^2 (B + E_B)$$

onde $E_B = (e_{ij}^B)$ é uma matriz $k \times k$ de números reais.

Pelas suposições básicas de normalidade teremos:

$$e_{ij}^B = e_{ji}^B \quad e \quad e_{ii}^B + e_{jj}^B = 2e_{ij}^B \quad \forall (1 \leq i \neq j \leq k)$$

Sabendo que sempre é possível encontrar uma matriz $R_{k \times k}$, com a forma $R = \underline{1} \cdot \underline{h}'$, para $\underline{h}' = (h_1, h_2, \dots, h_k) \in R^k$, tal que:

$$(Q_B + R)(Q_B + R)' = B + E_B$$

Assim, $E_B = Q_B R' + R Q_B' + R R'$ podendo sempre ser resolúvel para $\underline{h} \in R^k$, mas não será necessário.

Usando o mesmo argumento do teorema 3.6., temos que:

$$\begin{aligned} \underline{c}'(\hat{\underline{\mu}} - \underline{\mu}) &= \underline{c}'(Q_B + R)(Q_B + R)^{-1}(\hat{\underline{\mu}} - \underline{\mu}) = [(Q_B + R)' \underline{c}]' [(Q_B + R)^{-1} \hat{\underline{\mu}} - (Q_B + R)^{-1} \underline{\mu}] = \\ &= \underline{c}^{*'}(\hat{\underline{\mu}}^* - \underline{\mu}^*) \end{aligned}$$

Notemos a matriz de covariâncias de $\hat{\underline{\mu}}^*$ é dada por:

$$(Q_B + R)^{-1} \sigma^2 (B + E_B) (Q_B + R)^{-1} = \sigma^2 I$$

Logo, pelo teorema 3.6., temos que a probabilidade $\tilde{e}$ de $1-\alpha$, de que todas as funções lineares dos parâmetros $\Psi^* = \underline{c}'\underline{\mu}$ satisfaçam simultaneamente $\tilde{a}$:

$$|\hat{\Psi}^* - \Psi^*| \leq s \cdot q'_{\alpha; k, \nu} g(\underline{c}'(Q + R))$$

Então para o caso de contrastes teremos:

$\underline{c}'(Q_B + R) = \underline{c}'Q_B + \underline{c}'R = \underline{c}'Q$ pois $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ e R é uma matriz $k \times k$ onde os vetores colunas são constantes, assim:

$$\underline{c}'R = (\sum_i c_i h_1, \dots, \sum_i c_i h_k) = \underline{0}$$

Logo, $g(\underline{c}'(Q_B + R)) = g(\underline{c}'Q_B)$ e substituindo na desigualdade acima, temos que a probabilidade $\tilde{e}$ de pelo menos $1-\alpha$ que todos os contrastes satisfaçam simultaneamente $\tilde{a}$:

$$|\hat{\Psi} - \Psi| \leq s \cdot q'_{\alpha; k, \nu} g(\underline{c}'Q)$$

Assim o teorema se verifica. ■

Teorema 3.8. (Capítulo 3 - Seção 3.5.3.)

A condição imposta para Q implica que $Q'\underline{c}$ é tal que $Q'\underline{c}\underline{\mu}$ é um contraste desde que $\sum c_i = 0$, isto é:

$$Q'\underline{c} = (\sum_i q_{i1} c_i, \sum_i q_{i2} c_i, \dots, \sum_i q_{ik} c_i)' \quad e$$

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k q_{ij} c_i = 0$$

Temos também, pelo lema 3.2. e teorema 3.1. a equi
valência dos eventos:

$$\left(\max_{1 \leq i < j \leq k} |\theta_i - \theta_j| \leq s \cdot q_{\alpha; k, v} \right) \quad e$$

$$\left(|\underline{c}'(\hat{\underline{\mu}} - \underline{\mu})| \leq s \cdot q_{\alpha; k, v} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |c_i| \right)$$

e como $\sum_i c_i = 0$, então $g(\underline{c}) = \frac{1}{2} \sum_i |c_i|$ com $\theta_i = \hat{\mu}_i - \mu_i$, para $i=1, 2, \dots, k$ (veja também Lema 3.1.).

Pelo fato de estarmos num espaço onde as nossas fun
ções lineares estimáveis são contrastes, o teorema se verifi-
ca.

Esta demonstração é devido a Hochberg (1975).

APÉNDICE IV

Tablas

TABELA IV.1.

Amplitude Estudientizada Preparada por Duncan " $Q_{k,v;\alpha}^*$ ", valores críticos ao nível de significância $\alpha=0,01$

$\frac{p}{n_2}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	30	100
1	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	11.0	11.0	14.0	14.0	11.0	11.0	14.0	11.0	11.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	11.0
3	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.0	9.1	9.2	9.3	9.3	9.3	9.3
4	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.3	7.4	7.4	7.5	7.5	7.5	7.5
5	5.79	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.6	6.6	6.7	6.7	6.8	6.8	6.8
6	5.24	5.31	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.1	6.2	6.2	6.3	6.3	6.3	6.3
7	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	5.8	5.9	5.9	6.0	6.0	6.0	6.0
8	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.6	5.7	5.7	5.8	5.8	5.8	5.8
9	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.5	5.5	5.6	5.7	5.7	5.7	5.7
10	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.36	5.42	5.48	5.54	5.55	5.55	5.55
11	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.24	5.28	5.34	5.38	5.39	5.39	5.39
12	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.13	5.17	5.22	5.24	5.26	5.26	5.26
13	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.91	4.98	5.04	5.08	5.13	5.14	5.15	5.15	5.15
14	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	4.96	5.00	5.04	5.06	5.07	5.07	5.07
15	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	4.90	4.94	4.97	4.99	5.00	5.00	5.00
16	4.13	4.31	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.84	4.88	4.91	4.93	4.94	4.94	4.94
17	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.72	4.75	4.80	4.83	4.86	4.88	4.89	4.89	4.89
18	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.76	4.79	4.82	4.84	4.85	4.85	4.85
19	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.72	4.76	4.79	4.81	4.82	4.82	4.82
20	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.69	4.73	4.76	4.78	4.79	4.79	4.79
22	3.99	4.17	4.28	4.36	4.42	4.48	4.53	4.57	4.60	4.65	4.68	4.71	4.74	4.75	4.75	4.75
24	3.96	4.14	4.24	4.33	4.39	4.44	4.49	4.53	4.57	4.62	4.64	4.67	4.70	4.72	4.71	4.71
26	3.93	4.11	4.21	4.30	4.36	4.41	4.46	4.50	4.53	4.58	4.62	4.65	4.67	4.69	4.73	4.73
28	3.91	4.08	4.18	4.28	4.34	4.39	4.43	4.47	4.51	4.56	4.60	4.62	4.65	4.67	4.72	4.72
30	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.54	4.58	4.61	4.63	4.65	4.71	4.71
40	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.46	4.51	4.54	4.57	4.59	4.69	4.69
60	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.39	4.44	4.47	4.50	4.53	4.66	4.66
100	3.71	3.86	3.98	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.35	4.38	4.42	4.45	4.48	4.61	4.61
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.26	4.31	4.34	4.38	4.41	4.60	4.68

Fonte: Duncan, D.B., Multiple Range and Multiple F Tests - Biometrics (1955).

TABELA IV.2.

Amplitude Estudantilizada Preparada por Duncan " $Q_{k,v;\alpha}^*$ ", valores críticos ao nível de significância $\alpha=0.05$

$\frac{P}{n_2}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	50	100
1	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
2	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
3	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
4	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
5	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
6	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
7	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
8	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
9	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
10	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47	3.47
11	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46
12	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46	3.46
13	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.45	3.46	3.46	3.46	3.47	3.47	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.45	3.46	3.46	3.46	3.47	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47	3.47
16	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47	3.47
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.44	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47	3.47
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.45	3.46	3.46	3.47	3.47	3.47
19	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.46	3.47	3.47	3.47
20	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.43	3.44	3.46	3.46	3.47	3.47	3.47
22	2.93	3.08	3.17	3.24	3.29	3.32	3.35	3.37	3.39	3.42	3.44	3.45	3.45	3.47	3.47	3.47
24	2.92	3.07	3.15	3.22	3.28	3.31	3.34	3.37	3.38	3.41	3.44	3.45	3.46	3.47	3.47	3.47
26	2.91	3.06	3.14	3.21	3.27	3.30	3.34	3.36	3.38	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47	3.47	3.47
28	2.90	3.04	3.13	3.20	3.26	3.30	3.33	3.35	3.37	3.40	3.43	3.45	3.46	3.47	3.47	3.47
30	2.89	3.03	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46	3.47	3.47	3.47
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.39	3.42	3.44	3.45	3.47	3.47	3.47
60	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.37	3.40	3.43	3.45	3.47	3.47	3.47
100	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.36	3.40	3.42	3.45	3.47	3.47	3.47
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.34	3.38	3.41	3.44	3.47	3.47	3.47

Fonte: Duncan, D.B., Multiple Range and Multiple F Tests - Biometrics (1955).

TABELA IV.3.

Amplitude Estudatizada " $Q_{k,v;\alpha}$ ", valores críticos ao nível de significância $\alpha = 0,01$

$k \backslash v$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90.0	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	277	282	286	290	294	298
2	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7	32.6	33.4	34.1	34.8	35.4	36.0	36.5	37.0	37.5	37.9
3	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7	17.1	17.5	17.9	18.2	18.5	18.8	19.1	19.3	19.5	19.8
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3	12.6	12.8	13.1	13.3	13.5	13.7	13.9	14.1	14.2	14.4
5	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.2	10.5	10.7	10.9	11.1	11.2	11.4	11.6	11.7	11.8	11.9
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.49	9.65	9.81	9.95	10.1	10.2	10.3	10.4	10.5
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.32	8.41	8.49	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.48	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.07	8.15	8.22
11	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.34	7.42	7.48	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.12	7.20	7.27	7.33	7.39
15	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.80	6.87	6.94	7.00	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.72	6.79	6.85	6.91	6.96
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.29	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.76	6.82
24	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60	5.69	5.77	5.84	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.17	6.21
60	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.79	5.84	5.89	5.93	5.98	6.02
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.38	5.44	5.51	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

Fonte: Scheffé, Henry (1959) - The Analysis of Variance - N.Y.

TABELA IV.4.

Amplitude Estudenticizada " $Q_{k,v;\alpha}$ ", valores críticos ao nível de significância $\alpha = 0,05$

$k \backslash v$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	50.6	52.0	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58.0	58.8	59.6
2	6.08	8.33	9.80	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0	14.4	14.7	15.1	15.4	15.7	15.9	16.1	16.4	16.6	16.8
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.2	10.3	10.5	10.7	10.8	11.0	11.1	11.2
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

Fonte: Scheffé, Henry (1959) - The Analysis of Variance - N.Y.

TABELA IV.5.

Amplitude Estudatizada " $Q_{k,v;\alpha}$ ", valores críticos ao nível de significância $\alpha = 0,10$

$k \backslash v$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	8.93	13.4	16.4	18.5	20.2	21.5	22.6	23.6	24.5	25.2	25.9	26.5	27.1	27.6	28.1	28.5	29.0	29.3	29.7
2	4.13	5.73	6.77	7.54	8.14	8.63	9.05	9.41	9.72	10.0	10.3	10.5	10.7	10.9	11.1	11.2	11.4	11.5	11.7
3	3.33	4.47	5.20	5.74	6.16	6.51	6.81	7.06	7.29	7.49	7.67	7.83	7.98	8.12	8.25	8.37	8.48	8.58	8.68
4	3.01	3.98	4.59	5.03	5.39	5.68	5.93	6.14	6.33	6.49	6.65	6.78	6.91	7.02	7.13	7.23	7.33	7.41	7.50
5	2.85	3.72	4.26	4.66	4.98	5.24	5.46	5.65	5.82	5.97	6.10	6.22	6.34	6.44	6.54	6.63	6.71	6.79	6.86
6	2.75	3.56	4.07	4.44	4.73	4.97	5.17	5.34	5.50	5.64	5.76	5.87	5.98	6.07	6.16	6.25	6.32	6.40	6.47
7	2.68	3.45	3.93	4.28	4.55	4.78	4.97	5.14	5.28	5.41	5.53	5.64	5.74	5.83	5.91	5.99	6.06	6.13	6.19
8	2.63	3.37	3.83	4.17	4.43	4.65	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.56	5.64	5.72	5.80	5.87	5.93	6.00
9	2.59	3.32	3.76	4.08	4.34	4.54	4.72	4.87	5.01	5.13	5.23	5.33	5.42	5.51	5.58	5.66	5.72	5.79	5.85
10	2.56	3.27	3.70	4.02	4.26	4.47	4.64	4.78	4.91	5.03	5.13	5.23	5.32	5.40	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73
11	2.54	3.23	3.66	3.96	4.20	4.40	4.57	4.71	4.84	4.95	5.05	5.15	5.23	5.31	5.38	5.45	5.51	5.57	5.63
12	2.52	3.20	3.62	3.92	4.16	4.35	4.51	4.65	4.78	4.89	4.99	5.08	5.16	5.24	5.31	5.37	5.44	5.49	5.55
13	2.50	3.18	3.59	3.88	4.12	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.93	5.02	5.10	5.18	5.25	5.31	5.37	5.43	5.48
14	2.49	3.16	3.56	3.85	4.08	4.27	4.42	4.56	4.68	4.79	4.88	4.97	5.05	5.12	5.19	5.26	5.32	5.37	5.43
15	2.48	3.14	3.54	3.83	4.05	4.23	4.39	4.52	4.64	4.75	4.84	4.93	5.01	5.08	5.15	5.21	5.27	5.32	5.38
16	2.47	3.12	3.52	3.80	4.03	4.21	4.36	4.49	4.61	4.71	4.81	4.89	4.97	5.04	5.11	5.17	5.23	5.28	5.33
17	2.46	3.11	3.50	3.78	4.00	4.18	4.33	4.46	4.58	4.68	4.77	4.86	4.93	5.01	5.07	5.13	5.19	5.24	5.30
18	2.45	3.10	3.49	3.77	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.75	4.83	4.90	4.98	5.04	5.10	5.16	5.21	5.26
19	2.45	3.09	3.47	3.75	3.97	4.14	4.29	4.42	4.53	4.63	4.72	4.80	4.88	4.95	5.01	5.07	5.13	5.18	5.23
20	2.44	3.08	3.46	3.74	3.95	4.12	4.27	4.40	4.51	4.61	4.70	4.78	4.85	4.92	4.99	5.05	5.10	5.16	5.20
24	2.42	3.05	3.42	3.69	3.90	4.07	4.21	4.34	4.44	4.54	4.63	4.71	4.78	4.85	4.91	4.97	5.02	5.07	5.12
30	2.40	3.02	3.39	3.65	3.85	4.02	4.16	4.28	4.38	4.47	4.56	4.64	4.71	4.77	4.83	4.89	4.94	4.99	5.03
40	2.38	2.99	3.35	3.60	3.80	3.96	4.10	4.21	4.32	4.41	4.49	4.56	4.63	4.69	4.75	4.81	4.86	4.90	4.95
60	2.36	2.96	3.31	3.56	3.75	3.91	4.04	4.16	4.25	4.34	4.42	4.49	4.56	4.62	4.67	4.73	4.78	4.82	4.86
120	2.34	2.93	3.28	3.52	3.71	3.86	3.99	4.10	4.19	4.28	4.35	4.42	4.48	4.54	4.60	4.65	4.69	4.74	4.78
∞	2.33	2.90	3.24	3.48	3.66	3.81	3.93	4.04	4.13	4.21	4.28	4.35	4.41	4.47	4.52	4.57	4.61	4.65	4.69

Fonte: Scheffé, Henry (1959) - The Analysis of Variance - N.Y.

TABELA IV.6.

Módulo Máximo Estudentizado " $M_{k^*, v; \alpha}$ ", valores críticos ao ní-
vel de significância $\alpha=0,01$ e $k^*=k(k-1)/2$

k	k^*	5	7	10	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
3	3	5.106	4.296	3.801	3.631	3.434	3.323	3.253	3.185	3.119	3.055	2.993	2.934
4	6	5.812	4.814	4.205	3.995	3.753	3.617	3.531	3.447	3.367	3.289	3.215	3.143
5	10	6.334	5.198	4.503	4.263	3.986	3.831	3.732	3.637	3.545	3.456	3.371	3.289
6	15	6.744	5.502	4.739	4.475	4.170	3.999	3.890	3.785	3.683	3.586	3.492	3.402
7	21	7.079	5.752	4.933	4.650	4.322	4.137	4.020	3.906	3.796	3.691	3.590	3.493
8	28	7.362	5.963	5.099	4.799	4.451	4.255	4.130	4.009	3.892	3.780	3.672	3.569
9	36	7.605	6.146	5.242	4.929	4.563	4.357	4.225	4.098	3.975	3.857	3.743	3.634
10	45	7.819	6.307	5.369	5.043	4.662	4.447	4.309	4.176	4.048	3.924	3.805	3.691
11	55	8.008	6.450	5.482	5.145	4.750	4.528	4.385	4.247	4.113	3.984	3.860	3.742
12	66	8.178	6.579	5.584	5.237	4.830	4.601	4.453	4.310	4.172	4.038	3.910	3.787
13	78	8.332	6.696	5.677	5.321	4.903	4.667	4.515	4.368	4.225	4.088	3.955	3.829
14	91	8.473	6.803	5.762	5.398	4.970	4.728	4.572	4.421	4.275	4.133	3.997	3.867
15	105	8.602	6.902	5.841	5.469	5.032	4.785	4.625	4.470	4.320	4.175	4.035	3.901
16	120	8.722	6.994	5.914	5.535	5.090	4.837	4.674	4.516	4.362	4.214	4.070	3.934
17	136	8.833	7.079	5.982	5.597	5.144	4.886	4.720	4.559	4.402	4.250	4.103	3.963
18	153	8.937	7.158	6.045	5.654	5.194	4.932	4.763	4.599	4.439	4.284	4.134	3.991
19	171	9.034	7.233	6.105	5.708	5.242	4.975	4.804	4.636	4.473	4.316	4.163	4.018
20	190	9.126	7.303	6.161	5.760	5.286	5.016	4.842	4.672	4.506	4.346	4.191	4.043

Fonte: Stoline, M.R. e Ury, H.K. - Tables of the Studentized
Maximum Modulus Distribution - Technometrics (1979).

TABELA IV.7.

Módulo Máximo Estudentizado " $M_{k^*, v; \alpha}$ ", valores críticos ao nível de significância $\alpha=0,05$ e $k^*=k(k-1)/2$

k	k*	5	7	10	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
3	3	3.399	3.055	2.829	2.747	2.650	2.594	2.558	2.522	2.488	2.454	2.420	2.388
4	6	3.928	3.489	3.199	3.095	2.969	2.897	2.851	2.805	2.760	2.716	2.673	2.631
5	10	4.312	3.805	3.467	3.345	3.199	3.114	3.059	3.005	2.952	2.900	2.849	2.800
6	15	4.610	4.051	3.677	3.540	3.377	3.282	3.220	3.160	3.100	3.041	2.984	2.928
7	21	4.853	4.252	3.848	3.700	3.522	3.419	3.352	3.285	3.220	3.156	3.093	3.031
8	28	5.057	4.421	3.992	3.835	3.645	3.534	3.462	3.391	3.321	3.251	3.183	3.117
9	36	5.232	4.566	4.116	3.951	3.751	3.634	3.557	3.482	3.407	3.334	3.261	3.190
10	45	5.384	4.693	4.225	4.053	3.844	3.721	3.641	3.562	3.483	3.406	3.329	3.254
11	55	5.520	4.806	4.322	4.143	3.926	3.799	3.716	3.633	3.551	3.470	3.389	3.310
12	66	5.641	4.907	4.409	4.225	4.001	3.869	3.783	3.697	3.611	3.527	3.443	3.361
13	78	5.750	4.999	4.488	4.299	4.068	3.933	3.843	3.755	3.667	3.579	3.492	3.407
14	91	5.850	5.083	4.560	4.367	4.130	3.991	3.899	3.808	3.717	3.627	3.537	3.449
15	105	5.942	5.160	4.627	4.429	4.187	4.045	3.951	3.857	3.764	3.671	3.578	3.487
16	120	6.027	5.232	4.688	4.487	4.240	4.095	3.998	3.902	3.807	3.712	3.617	3.523
17	136	6.106	5.298	4.746	4.540	4.289	4.141	4.043	3.945	3.847	3.750	3.652	3.556
18	153	6.179	5.360	4.799	4.591	4.335	4.184	4.084	3.984	3.885	3.785	3.685	3.587
19	171	6.248	5.418	4.849	4.638	4.379	4.225	4.123	4.022	3.920	3.818	3.717	3.615
20	190	6.313	5.472	4.897	4.682	4.419	4.264	4.160	4.057	3.953	3.850	3.746	3.643

Fonte: Stoline, M.R. e Ury, H.K. - Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution - Technometrics (1979).

TABELA IV.8.

Módulo Máximo Estudentizado " $M_{k^*, v; \alpha}$ ", valores críticos ao nível de significância $\alpha=0,10$ e $k^*=k(k-1)/2$

k	k*	5	7	10	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
3	3	2.769	2.555	2.410	2.357	2.293	2.255	2.231	2.207	2.183	2.160	2.137	2.114
4	6	3.239	2.961	2.771	2.701	2.616	2.567	2.534	2.502	2.470	2.439	2.408	2.378
5	10	3.576	3.253	3.029	2.946	2.845	2.786	2.747	2.709	2.671	2.633	2.596	2.560
6	15	3.837	3.478	3.229	3.136	3.022	2.956	2.911	2.868	2.825	2.782	2.739	2.697
7	21	4.048	3.661	3.391	3.290	3.166	3.093	3.044	2.996	2.948	2.901	2.854	2.807
8	28	4.224	3.814	3.527	3.419	3.286	3.208	3.156	3.104	3.052	3.001	2.949	2.898
9	36	4.375	3.945	3.644	3.530	3.390	3.306	3.251	3.196	3.141	3.086	3.031	2.976
10	45	4.506	4.060	3.746	3.627	3.480	3.393	3.335	3.277	3.219	3.160	3.102	3.043
11	55	4.623	4.162	3.836	3.713	3.560	3.469	3.409	3.348	3.287	3.226	3.165	3.103
12	66	4.727	4.252	3.917	3.790	3.633	3.538	3.476	3.413	3.349	3.286	3.221	3.157
13	78	4.821	4.335	3.991	3.860	3.698	3.601	3.536	3.471	3.405	3.339	3.272	3.205
14	91	4.906	4.410	4.058	3.924	3.758	3.658	3.591	3.524	3.456	3.388	3.319	3.249
15	105	4.985	4.479	4.119	3.983	3.813	3.710	3.642	3.573	3.504	3.433	3.362	3.290
16	120	5.058	4.542	4.176	4.037	3.863	3.759	3.689	3.619	3.547	3.475	3.402	3.327
17	136	5.125	4.601	4.229	4.087	3.911	3.804	3.733	3.661	3.588	3.514	3.438	3.362
18	153	5.188	4.657	4.279	4.135	3.955	3.846	3.774	3.700	3.626	3.550	3.473	3.394
19	171	5.247	4.708	4.325	4.179	3.996	3.886	3.812	3.737	3.661	3.584	3.505	3.425
20	190	5.302	4.757	4.369	4.220	4.035	3.923	3.848	3.772	3.695	3.616	3.536	3.453

Fonte: Stoline, M.R. e Ury, H.K. - Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution - Technometrics (1979).

TABELA IV.9.

Módulo Máximo Estudentizado " $M_{k^*, \nu; \alpha}$ ", valores críticos ao nível de significância $\alpha=0,20$ e $k^*=k(k-1)/2$

k	k*	5	7	10	12	16	20	24	30	40	60	120	∞
3	3	2.171	2.056	1.975	1.944	1.907	1.885	1.871	1.857	1.843	1.829	1.815	1.801
4	6	2.592	2.439	2.330	2.289	2.238	2.208	2.188	2.169	2.149	2.130	2.110	2.091
5	10	2.889	2.709	2.579	2.530	2.469	2.433	2.409	2.385	2.361	2.337	2.313	2.289
6	15	3.117	2.916	2.770	2.715	2.646	2.604	2.577	2.549	2.522	2.494	2.466	2.438
7	21	3.299	3.082	2.924	2.863	2.788	2.742	2.712	2.681	2.650	2.619	2.588	2.557
8	28	3.451	3.220	3.052	2.987	2.906	2.857	2.824	2.791	2.758	2.724	2.690	2.655
9	36	3.580	3.338	3.161	3.093	3.007	2.955	2.920	2.885	2.849	2.813	2.776	2.738
10	45	3.693	3.441	3.257	3.185	3.095	3.041	3.004	2.967	2.929	2.890	2.851	2.811
11	55	3.792	3.532	3.341	3.267	3.173	3.116	3.078	3.039	2.999	2.959	2.917	2.874
12	66	3.880	3.613	3.416	3.339	3.243	3.184	3.144	3.104	3.062	3.020	2.976	2.931
13	78	3.960	3.686	3.484	3.405	3.306	3.245	3.204	3.162	3.119	3.075	3.030	2.983
14	91	4.033	3.753	3.546	3.465	3.363	3.301	3.259	3.215	3.171	3.126	3.079	3.030
15	105	4.099	3.814	3.603	3.520	3.416	3.352	3.309	3.264	3.219	3.172	3.123	3.072
16	120	4.161	3.870	3.655	3.571	3.465	3.399	3.355	3.310	3.263	3.215	3.165	3.112
17	136	4.218	3.922	3.704	3.618	3.510	3.443	3.398	3.352	3.304	3.255	3.203	3.149
18	153	4.271	3.971	3.749	3.662	3.552	3.484	3.438	3.391	3.342	3.292	3.239	3.183
19	171	4.321	4.017	3.792	3.703	3.591	3.523	3.476	3.428	3.378	3.327	3.272	3.215
20	190	4.367	4.059	3.832	3.742	3.629	3.559	3.511	3.462	3.412	3.359	3.304	3.245

Fonte: Stoline, M.R. e Ury, H.K. - Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution - Technometrics (1979).

TABELA IV.10.

Amplitude Estudentizada Aumentada " $Q'_{k,v;\alpha}$ ", valores críticos
ao nível de significância $\alpha=0,01$

ν	k						
	2	3	4	5	6	7	8
5	5.903 (5.702)	7.030 (6.976)	7.823 (7.804)	8.429 (8.421)	8.916 (8.913)	9.322 (9.321)	9.669
7	5.063 (4.949)	5.947 (5.919)	6.551 (6.543)	7.008 (7.005)	7.374 (7.373)	7.679	7.939
10	4.550 (4.482)	5.284 (5.270)	5.773 (5.769)	6.138 (6.136)	6.428	6.669	6.875
12	4.373 (4.320)	5.056 (5.046)	5.505 (5.502)	5.837 (5.836)	6.101	6.321	6.507
16	4.169 (4.131)	4.792 (4.786)	5.194 (5.192)	5.489	5.722	5.915	6.079
20	4.055 (4.024)	4.644 (4.639)	5.019 (5.018)	5.294	5.510	5.688	5.839
24	3.982 (3.956)	4.549 (4.546)	4.908 (4.907)	5.169 (5.168)	5.374	5.542	5.685
30	3.912 (3.889)	4.458 (4.455)	4.800 (4.799)	5.048	5.242	5.401	5.536
40	3.844 (3.825)	4.370 (4.367)	4.696	4.931	5.115 (5.114)	5.265	5.392
60	3.778 (3.762)	4.284 (4.282)	4.595	4.818	4.991	5.133	5.253
120	3.714 (3.702)	4.201 (4.200)	4.497	4.709	4.872	5.005	5.118
∞	3.653 (3.643)	4.121 (4.120)	4.403	4.603	4.757	4.882	4.987

*Os valores tabelados são de $Q'_{k,v;0,01}$ e os valores entre parênteses são de $Q_{k,v;0,01}$ quando diferentes dos valores de $Q'_{k,v;0,01}$.

Fonte: Stoline, M.R. - Tables of the Studentized Augmented Range and Applications - Journal of the American Statistical Association (1978).

TABELA IV.11.

Amplitude Estudentizada Aumentada " $Q'_{k,v;\alpha}$ ", valores críticos
ao nível de significância $\alpha=0,05$

ν	k						
	2	3	4	5	6	7	8
5	3.832 (3.635)	4.654 (4.602)	5.236 (5.218)	5.680 (5.673)	6.036 (6.033)	6.331 (6.330)	6.583 (6.582)
7	3.486 (3.344)	4.198 (4.165)	4.692 (4.681)	5.064 (5.060)	5.360 (5.359)	5.606 (5.606)	5.816 (5.815)
10	3.259 (3.151)	3.899 (3.877)	4.333 (4.327)	4.656 (4.654)	4.913 (4.912)	5.124 (5.124)	5.305 (5.305)
12	3.177 (3.082)	3.791 (3.773)	4.204 (4.199)	4.509 (4.508)	4.751 (4.751)	4.950 (4.950)	5.119 (5.119)
16	3.080 (2.998)	3.663 (3.649)	4.050 (4.046)	4.334 (4.333)	4.557 (4.557)	4.741 (4.741)	4.897 (4.897)
20	3.024 (2.950)	3.590 (3.578)	3.961 (3.958)	4.233 (4.232)	4.446 (4.445)	4.620 (4.620)	4.768 (4.768)
24	2.988 (2.919)	3.542 (3.532)	3.904 (3.901)	4.167 (4.166)	4.373 (4.373)	4.541 (4.541)	4.684 (4.684)
30	2.952 (2.888)	3.496 (3.486)	3.847 (3.845)	4.103 (4.102)	4.302 (4.302)	4.464 (4.464)	4.602 (4.602)
40	2.918 (2.858)	3.450 (3.442)	3.792 (3.791)	4.040 (4.039)	4.232 (4.232)	4.389 (4.389)	4.521 (4.521)
60	2.884 (2.829)	3.406 (3.399)	3.738 (3.737)	3.978 (3.977)	4.163 (4.163)	4.314 (4.314)	4.441 (4.441)
120	2.851 (2.800)	3.362 (3.356)	3.686 (3.685)	3.917 (3.917)	4.096 (4.096)	4.241 (4.241)	4.363 (4.363)
∞	2.819 (2.772)	3.320 (3.314)	3.634 (3.633)	3.858 (3.858)	4.030 (4.030)	4.170 (4.170)	4.286 (4.286)

*Os valores tabelados são de $Q'_{k,v;0,05}$ e os valores entre parênteses são de $Q_{k,v;0,05}$ quando diferentes dos valores de $Q'_{k,v;0,05}$.

Fonte: Stoline, M.R. - Tables of the Studentized Augmented Range and Applications - Journal of the American Statistical Association (1978).

TABELA IV.12.

Amplitude Estudentizada Aumentada " $Q'_{k,v;\alpha}$ ", valores críticos
ao nível de significância $\alpha=0,10$

v	k						
	2	3	4	5	6	7	8
5	3.060 (2.850)	3.772 (3.717)	4.282 (4.264)	4.671 (4.664)	4.982 (4.979)	5.239 (5.238)	5.458
7	2.848 (2.680)	3.491 (3.451)	3.943 (3.931)	4.285 (4.280)	(4.556) (4.555)	4.781 (4.780)	4.972
10	2.704 (2.563)	3.300 (3.270)	3.712 (3.704)	4.021 (4.018)	4.265 (4.264)	4.466 (4.465)	4.636
12	2.651 (2.521)	3.230 (3.204)	3.628 (3.621)	3.924 (3.922)	4.157 (4.156)	4.349	4.511
16	2.588 (2.469)	3.146 (3.124)	3.526 (3.520)	3.806 (3.804)	4.027 (4.026)	4.207	4.360
20	2.551 (2.439)	3.097 (3.078)	3.466 (3.462)	3.738 (3.736)	3.950	4.124	4.271
24	2.527 (2.420)	3.065 (3.047)	3.427 (3.423)	3.693 (3.692)	3.901 (3.900)	4.070	4.213
30	2.503 (2.400)	3.034 (3.017)	3.389 (3.386)	3.649 (3.648)	3.851	4.016	4.155
40	2.480 (2.381)	3.003 (2.988)	3.352 (3.349)	3.605	3.803	3.963	4.099
60	2.457 (2.363)	2.972 (2.959)	3.315 (3.312)	3.563 (3.562)	3.755	3.911	4.042
120	2.434 (2.344)	2.943 (2.930)	3.278 (3.276)	3.520	3.707	3.859	3.987
∞	2.412 (2.326)	2.913 (2.902)	3.243 (3.240)	3.479 (3.478)	3.661	3.808	3.931

*Os valores tabelados são de $Q'_{k,v;0,10}$ e os valores entre parênteses são de $Q_{k,v;0,10}$ quando diferentes dos valores de $Q'_{k,v;0,10}$.

Fonte: Stoline, M.R. - Tables of the Studentized Augmented Range and Applications - Journal of the American Statistical Association (1978).

TABELA IV.13.

Amplitude Estudentizada Aumentada " $Q'_{k,v;\alpha}$ ", valores críticos
ao nível de significância $\alpha=0,20$

ν	k						
	2	3	4	5	6	7	8
5	2.326 (2.087)	2.935 (2.872)	3.379 (3.358)	3.719 (3.712)	3.991 (3.988)	4.215 (4.214)	4.406 (4.405)
7	2.213 (2.001)	2.783 (2.731)	3.195 (3.179)	3.508 (3.503)	3.757 (3.756)	3.963 (3.962)	4.137 (4.136)
10	2.133 (1.941)	2.676 (2.632)	3.066 (3.053)	3.359 (3.355)	3.592 (3.590)	3.783 (3.782)	3.944
12	2.103 (1.918)	2.636 (2.596)	3.017 (3.006)	3.303 (3.300)	3.530 (3.529)	3.715	3.872
16	2.066 (1.891)	2.587 (2.551)	2.958 (2.948)	3.235 (3.232)	3.453 (3.452)	3.632 (3.631)	3.782
20	2.045 (1.874)	2.558 (2.524)	2.923 (2.914)	3.195 (3.192)	3.408 (3.407)	3.582	3.729
24	2.031 (1.864)	2.539 (2.507)	2.900 (2.892)	3.168 (3.166)	3.378 (3.377)	3.549	3.694
30	2.017 (1.853)	2.521 (2.490)	2.877 (2.870)	3.142 (3.140)	3.348	3.517	3.659
40	2.003 (1.843)	2.502 (2.473)	2.855 (2.848)	3.116 (3.114)	3.319 (3.318)	3.485 (3.484)	3.624
60	1.990 (1.833)	2.484 (2.456)	2.833 (2.826)	3.090 (3.089)	3.290	3.453 (3.452)	3.589
120	1.976 (1.822)	2.466 (2.440)	2.811 (2.805)	3.064 (3.063)	3.261 (3.260)	3.421 (3.420)	3.554
∞	1.963 (1.812)	2.448 (2.424)	2.789 (2.784)	3.039 (3.037)	3.232	3.389	3.520

*Os valores tabelados são de $Q'_{k,v;0,20}$ e os valores entre parênteses são de $Q_{k,v;0,20}$ quando diferentes dos valores de $Q'_{k,v;0,20}$.

Fonte: Stoline, M.R. - Tables of the Studentized Augmented Range and Applications - Journal of the American Statistical Association (1978).

TABELA IV.14.

Valores da F.D.A. da Amplitude "W" entre n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal de parâmetros (μ, σ^2)

$\begin{matrix} n \\ W \end{matrix}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.00	0.0000	0.0000							
0.05	.0282	.0007	0.0000						
0.10	.0564	.0028	.0001						
0.15	.0845	.0062	.0004	0.0000					
0.20	.1125	.0110	.0010	.0001					
0.25	0.1403	0.0171	0.0020	0.0002					
0.30	.1680	.0245	.0034	.0004	0.0000				
0.35	.1955	.0332	.0053	.0008	.0001				
0.40	.2227	.0431	.0079	.0014	.0002	0.0000			
0.45	.2497	.0543	.0111	.0022	.0004	.0001			
0.50	0.2763	0.0666	0.0152	0.0033	0.0007	0.0002	0.0000		
0.55	.3027	.0800	.0200	.0048	.0011	.0003	.0001		
0.60	.3286	.0944	.0257	.0068	.0017	.0004	.0001	0.0000	
0.65	.3542	.1099	.0323	.0092	.0025	.0007	.0002	.0001	
0.70	.3794	.1263	.0398	.0121	.0036	.0011	.0003	.0001	0.0000
0.75	0.4041	0.1436	0.0483	0.0157	0.0050	0.0016	.0.0005	0.0002	0.0001
0.80	.4284	.1616	.0578	.0200	.0068	.0023	.0008	.0002	.0001
0.85	.4522	.1805	.0682	.0250	.0090	.0032	.0011	.0004	.0001
0.90	.4755	.2000	.0797	.0309	.0117	.0044	.0016	.0006	.0002
0.95	.4983	.2201	.0922	.0375	.0150	.0059	.0023	.0009	.0003
1.00	0.5205	0.2407	0.1057	0.0450	0.0188	0.0078	0.0032	0.0013	0.0005
1.05	.5422	.2618	.1201	.0535	.0234	.0101	.0043	.0018	.0008
1.10	.5633	.2833	.1355	.0629	.0287	.0129	.0057	.0025	.0011
1.15	.5839	.3051	.1517	.0733	.0348	.0163	.0075	.0035	.0016
1.20	.6039	.3272	.1688	.0847	.0417	.0203	.0098	.0047	.0022
1.25	0.6232	0.3495	0.1868	0.0970	0.0495	0.0250	0.0125	0.0062	0.0030
1.30	.6420	.3719	.2054	.1104	.0583	.0304	.0157	.0080	.0041
1.35	.6602	.3943	.2248	.1247	.0680	.0366	.0195	.0103	.0054
1.40	.6778	.4168	.2448	.1400	.0787	.0437	.0240	.0131	.0071
1.45	.6948	.4392	.2654	.1562	.0904	.0517	.0292	.0164	.0092
1.50	0.7112	0.4614	0.2865	0.1733	0.1031	0.0606	0.0353	0.0204	0.0117
1.55	.7269	.4835	.3080	.1913	.1168	.0705	.0422	.0250	.0148
1.60	.7421	.5053	.3299	.2101	.1316	.0814	.0499	.0304	.0184
1.65	.7567	.5269	.3521	.2296	.1473	.0934	.0587	.0366	.0227
1.70	.7707	.5481	.3745	.2498	.1639	.1064	.0684	.0437	.0277
1.75	0.7841	0.5690	0.3971	0.2706	0.1815	0.1204	0.0792	0.0517	0.0336
1.80	.7969	.5894	.4197	.2920	.2000	.1355	.0910	.0607	.0403
1.85	.8092	.6094	.4423	.3138	.2193	.1516	.1039	.0707	.0479
1.90	.8209	.6290	.4649	.3361	.2394	.1686	.1178	.0818	.0565
1.95	.8321	.6480	.4874	.3587	.2602	.1867	.1329	.0940	.0661
2.00	0.8427	0.6665	0.5096	0.3816	0.2816	0.2056	0.1489	0.1072	0.0768
2.05	.8528	.6845	.5317	.4046	.3035	.2254	.1661	.1216	.0886
2.10	.8624	.7019	.5534	.4277	.3260	.2460	.1842	.1371	.1015
2.15	.8716	.7187	.5748	.4508	.3489	.2673	.2033	.1536	.1156
2.20	.8802	.7349	.5957	.4739	.3720	.2893	.2232	.1712	.1307
2.25	0.8884	0.7505	0.6163	0.4969	0.3955	0.3118	0.2440	0.1899	0.1470
2.30	.8961	.7655	.6363	.5196	.4190	.3348	.2656	.2095	.1645
2.35	.9034	.7799	.6558	.5421	.4427	.3582	.2878	.2300	.1830
2.40	.9103	.7937	.6748	.5643	.4663	.3820	.3107	.2514	.2025
2.45	.9168	.8069	.6932	.5861	.4899	.4059	.3341	.2735	.2230
2.50	0.9229	0.8195	0.7110	0.6075	0.5132	0.4300	0.3579	0.2964	0.2443

TABELA IV.14.

(continuação)

$\frac{n}{W}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.85	0.0000									
0.90	.0001									
0.95	.0001	0.0000								
1.00	0.0002	0.0001	0.0000							
1.05	.0003	.0001	.0001							
1.10	.0005	.0002	.0001	0.0000						
1.15	.0007	.0003	.0001	.0001						
1.20	.0010	.0005	.0002	.0001	0.0000					
1.25	0.0015	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000				
1.30	.0021	.0010	.0005	.0003	.0001	.0001	0.0000			
1.35	.0028	.0015	.0008	.0004	.0002	.0001	.0001	0.0000		
1.40	.0038	.0021	.0011	.0006	.0003	.0002	.0001	.0001		
1.45	.0051	.0028	.0016	.0009	.0005	.0003	.0001	.0001	0.0000	
1.50	0.0067	0.0038	0.0022	0.0012	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
1.55	.0087	.0051	.0030	.0017	.0010	.0006	.0003	.0002	.0001	.0001
1.60	.0111	.0067	.0040	.0024	.0014	.0008	.0005	.0003	.0002	.0001
1.65	.0140	.0086	.0053	.0032	.0020	.0012	.0007	.0004	.0003	.0002
1.70	.0175	.0111	.0069	.0043	.0027	.0017	.0011	.0007	.0004	.0003
1.75	0.0217	0.0140	0.0090	0.0058	0.0037	0.0024	0.0015	0.0010	0.0006	0.0004
1.80	.0266	.0175	.0115	.0075	.0049	.0032	.0021	.0013	.0009	.0006
1.85	.0323	.0217	.0145	.0097	.0065	.0043	.0028	.0019	.0012	.0008
1.90	.0388	.0266	.0182	.0124	.0084	.0057	.0039	.0026	.0018	.0012
1.95	.0463	.0323	.0225	.0156	.0108	.0075	.0052	.0035	.0024	.0017
2.00	0.0548	0.0389	0.0276	0.0195	0.0137	0.0097	0.0068	0.0048	0.0033	0.0023
2.05	.0643	.0465	.0335	.0241	.0173	.0124	.0088	.0063	.0045	.0032
2.10	.0749	.0550	.0403	.0295	.0215	.0156	.0114	.0082	.0060	.0043
2.15	.0866	.0646	.0481	.0357	.0264	.0196	.0144	.0106	.0078	.0057
2.20	.0994	.0753	.0569	.0429	.0323	.0242	.0181	.0136	.0102	.0076
2.25	0.1134	0.0872	0.0669	0.0511	0.0390	0.0297	0.0226	0.0172	0.0130	0.0099
2.30	.1286	.1003	.0779	.0605	.0468	.0361	.0279	.0215	.0165	.0127
2.35	.1450	.1145	.0902	.0709	.0556	.0435	.0340	.0265	.0207	.0161
2.40	.1625	.1300	.1037	.0825	.0655	.0519	.0411	.0325	.0256	.0202
2.45	.1811	.1466	.1183	.0953	.0766	.0615	.0493	.0394	.0315	.0251
2.50	0.2007	0.1644	0.1342	0.1094	0.0890	0.0722	0.0586	0.0474	0.0383	0.0309

TABELA IV.14,
(continuação)

$\begin{matrix} n \\ W \end{matrix}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2.50	0.9229	0.8195	0.7110	0.6075	0.5132	0.4300	0.3579	0.2964	0.2443
2.55	.9286	.8315	.7282	.6283	.5364	.4541	.3820	.3198	.2665
2.60	.9340	.8429	.7448	.6487	.5592	.4782	.4064	.3437	.2894
2.65	.9390	.8537	.7607	.6685	.5816	.5022	.4309	.3680	.3130
2.70	.9438	.8640	.7759	.6877	.6036	.5259	.4555	.3927	.3372
2.75	0.9482	0.8737	0.7905	0.7063	0.6252	0.5494	0.4801	0.4175	0.3617
2.80	.9523	.8828	.8045	.7242	.6461	.5725	.5044	.4425	.3867
2.85	.9561	.8915	.8177	.7415	.6665	.5952	.5286	.4675	.4119
2.90	.9597	.8996	.8304	.7580	.6863	.6174	.5525	.4923	.4372
2.95	.9630	.9073	.8424	.7739	.7055	.6390	.5760	.5171	.4625
3.00	0.9661	0.9145	0.8537	0.7891	0.7239	0.6601	0.5991	0.5415	0.4878
3.05	.9690	.9212	.8645	.8036	.7416	.6806	.6216	.5656	.5129
3.10	.9716	.9275	.8746	.8174	.7587	.7003	.6436	.5892	.5378
3.15	.9741	.9334	.8842	.8305	.7750	.7194	.6649	.6124	.5623
3.20	.9763	.9388	.8931	.8429	.7905	.7377	.6856	.6350	.5864
3.25	0.9784	0.9439	0.9016	0.8546	0.8053	0.7553	0.7055	0.6569	0.6099
3.30	.9804	.9487	.9095	.8657	.8194	.7721	.7248	.6782	.6329
3.35	.9822	.9531	.9168	.8761	.8327	.7881	.7432	.6988	.6553
3.40	.9838	.9572	.9237	.8859	.8454	.8034	.7609	.7186	.6769
3.45	.9853	.9609	.9302	.8951	.8573	.8179	.7778	.7376	.6978
3.50	0.9867	0.9644	0.9361	0.9037	0.8685	0.8316	0.7939	0.7558	0.7180
3.55	.9879	.9677	.9417	.9117	.8790	.8446	.8091	.7732	.7373
3.60	.9891	.9706	.9468	.9192	.8889	.8568	.8236	.7898	.7558
3.65	.9901	.9734	.9516	.9261	.8981	.8683	.8372	.8055	.7735
3.70	.9911	.9759	.9559	.9326	.9067	.8790	.8501	.8204	.7902
3.75	0.9920	0.9782	0.9600	0.9386	0.9148	0.8891	0.8622	0.8345	0.8062
3.80	.9928	.9803	.9637	.9441	.9222	.8985	.8736	.8477	.8212
3.85	.9935	.9822	.9672	.9493	.9291	.9073	.8842	.8602	.8355
3.90	.9942	.9839	.9703	.9540	.9355	.9155	.8941	.8718	.8488
3.95	.9948	.9856	.9732	.9583	.9415	.9230	.9034	.8827	.8614
4.00	0.9953	0.9870	0.9758	0.9623	0.9469	0.9300	0.9120	0.8929	0.8731
4.05	.9958	.9883	.9782	.9660	.9519	.9365	.9199	.9024	.8841
4.10	.9963	.9895	.9804	.9693	.9566	.9425	.9273	.9112	.8943
4.15	.9967	.9906	.9824	.9724	.9608	.9480	.9341	.9193	.9038
4.20	.9970	.9916	.9842	.9752	.9647	.9530	.9404	.9269	.9126
4.25	0.9974	0.9925	0.9859	0.9777	0.9682	0.9576	0.9461	0.9338	0.9208
4.30	.9976	.9933	.9874	.9800	.9715	.9619	.9514	.9402	.9283
4.35	.9979	.9941	.9887	.9821	.9744	.9657	.9562	.9460	.9352
4.40	.9981	.9947	.9899	.9840	.9771	.9692	.9607	.9514	.9416
4.45	.9984	.9953	.9910	.9857	.9795	.9724	.9647	.9563	.9474
4.50	0.9985	0.9958	0.9920	0.9873	0.9817	0.9754	0.9684	0.9608	0.9527
4.55	.9987	.9963	.9929	.9887	.9837	.9780	.9717	.9649	.9575
4.60	.9989	.9967	.9937	.9899	.9855	.9804	.9747	.9686	.9620
4.65	.9990	.9971	.9944	.9911	.9871	.9825	.9775	.9719	.9660
4.70	.9991	.9974	.9951	.9921	.9885	.9845	.9799	.9750	.9696
4.75	0.9992	0.9977	0.9956	0.9930	0.9898	0.9862	0.9822	0.9777	0.9729
4.80	.9993	.9980	.9962	.9938	.9910	.9878	.9842	.9802	.9759
4.85	.9994	.9983	.9966	.9945	.9920	.9892	.9860	.9824	.9786
4.90	.9995	.9985	.9970	.9952	.9930	.9904	.9876	.9844	.9810
4.95	.9995	.9987	.9974	.9958	.9938	.9916	.9890	.9862	.9832
5.00	0.9996	0.9988	0.9977	0.9963	0.9946	0.9926	0.9903	0.9878	0.9851

TABELA IV.14.
(continuação)

$\frac{n}{w}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2-50	0-2007	0-1644	0-1342	0-1094	0-0890	0-0722	0-0586	0-0474	0-0383	0-0309
2-55	2213	1833	1514	1247	1026	0842	0690	0565	0462	0377
2-60	2429	2033	1697	1413	1174	0974	0807	0668	0552	0455
2-65	2653	2243	1891	1591	1336	1120	0937	0783	0654	0545
2-70	2885	2462	2096	1780	1509	1278	1080	0911	0768	0647
2-75	0-3124	0-2690	0-2311	0-1981	0-1696	0-1449	0-1236	0-1053	0-0896	0-0761
2-80	3368	2926	2536	2194	1894	1632	1405	1208	1037	0889
2-85	3617	3169	2770	2416	2103	1829	1587	1376	1192	1031
2-90	3870	3417	3011	2647	2324	2036	1782	1558	1360	1186
2-95	4126	3670	3258	2887	2554	2255	1989	1752	1542	1355
3-00	0-4382	0-3927	0-3512	0-3134	0-2792	0-2484	0-2207	0-1959	0-1737	0-1538
3-05	4639	4186	3769	3387	3039	2723	2436	2178	1944	1734
3-10	4895	4446	4029	3645	3292	2970	2675	2407	2164	1943
3-15	5150	4706	4292	3907	3551	3224	2923	2647	2394	2164
3-20	5401	4965	4555	4171	3814	3483	3177	2895	2635	2396
3-25	0-5649	0-5222	0-4817	0-4437	0-4081	0-3748	0-3438	0-3151	0-2885	0-2638
3-30	5893	5475	5078	4703	4348	4016	3704	3413	3142	2890
3-35	6131	5725	5337	4967	4617	4286	3974	3681	3407	3150
3-40	6363	5970	5592	5230	4885	4557	4246	3953	3677	3417
3-45	6589	6209	5842	5489	5151	4827	4519	4227	3950	3689
3-50	0-6807	0-6442	0-6087	0-5744	0-5413	0-5096	0-4792	0-4502	0-4226	0-3964
3-55	7017	6668	6326	5994	5672	5362	5063	4777	4504	4242
3-60	7220	6886	6558	6237	5926	5624	5332	5051	4781	4522
3-65	7414	7096	6782	6474	6173	5881	5596	5321	5056	4801
3-70	7600	7298	6998	6704	6414	6132	5856	5588	5329	5078
3-75	0-7776	0-7491	0-7206	0-6925	0-6648	0-6376	0-6110	0-5850	0-5598	0-5352
3-80	7944	7675	7406	7138	6873	6613	6357	6106	5861	5622
3-85	8103	7850	7596	7342	7090	6841	6596	6355	6118	5887
3-90	8254	8016	7777	7537	7298	7061	6827	6596	6369	6145
3-95	8395	8173	7948	7723	7497	7273	7050	6829	6611	6397
4-00	0-8528	0-8321	0-8111	0-7899	0-7686	0-7474	0-7263	0-7053	0-6845	0-6640
4-05	8653	8460	8264	8065	7866	7666	7466	7268	7070	6874
4-10	8769	8590	8408	8223	8036	7848	7660	7472	7285	7099
4-15	8878	8712	8543	8371	8196	8021	7844	7667	7491	7315
4-20	8978	8826	8669	8509	8347	8183	8018	7852	7686	7520
4-25	0-9072	0-8931	0-8787	0-8639	0-8488	0-8336	0-8182	0-8027	0-7871	0-7715
4-30	9159	9029	8896	8760	8620	8479	8336	8191	8046	7899
4-35	9238	9120	8998	8872	8744	8613	8480	8345	8210	8073
4-40	9312	9204	9092	8976	8858	8737	8614	8490	8364	8237
4-45	9379	9281	9178	9073	8964	8853	8740	8625	8508	8391
4-50	0-9441	0-9352	0-9258	0-9162	0-9062	0-8960	0-8856	0-8750	0-8643	0-8534
4-55	9498	9417	9332	9244	9153	9060	8964	8867	8768	8667
4-60	9550	9476	9399	9319	9236	9151	9064	8975	8884	8791
4-65	9597	9530	9460	9388	9313	9235	9155	9074	8991	8906
4-70	9640	9579	9516	9451	9383	9312	9240	9165	9090	9012
4-75	0-9678	0-9624	0-9567	0-9508	0-9446	0-9383	0-9317	0-9249	0-9180	0-9110
4-80	9713	9665	9614	9560	9505	9447	9387	9326	9264	9199
4-85	9745	9702	9656	9608	9558	9505	9452	9396	9340	9281
4-90	9774	9735	9694	9650	9605	9559	9510	9460	9409	9356
4-95	9799	9765	9728	9689	9649	9607	9563	9518	9472	9424
5-00	0-9822	0-9791	0-9759	0-9724	0-9688	0-9650	0-9611	0-9571	0-9529	0-9486

TABELA IV.14.

(continuação)

[illegible]

TABELA IV.14.
(continuação)

$\frac{n}{W}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5-00	0-9822	0-9791	0-9759	0-9724	0-9688	0-9650	0-9611	0-9571	0-9529	0-9486
5-05	9843	9815	9786	9756	9723	9690	9655	9618	9581	9543
5-10	9861	9837	9811	9784	9755	9725	9694	9661	9628	9593
5-15	9878	9856	9833	9809	9783	9757	9729	9700	9670	9639
5-20	9893	9874	9853	9832	9809	9785	9760	9735	9708	9681
5-25	0-9906	0-9889	0-9871	0-9852	0-9832	0-9811	0-9789	0-9766	0-9742	0-9718
5-30	9917	9903	9887	9870	9852	9833	9814	9794	9773	9751
5-35	9928	9915	9901	9886	9870	9854	9836	9819	9800	9781
5-40	9937	9925	9913	9900	9886	9872	9856	9841	9824	9807
5-45	9945	9935	9924	9912	9900	9888	9874	9860	9846	9831
5-50	0-9952	0-9943	0-9934	0-9924	0-9913	0-9902	0-9890	0-9878	0-9865	0-9852
5-55	9958	9951	9942	9933	9924	9914	9904	9893	9882	9870
5-60	9964	9957	9950	9942	9934	9925	9916	9907	9897	9887
5-65	9969	9963	9956	9950	9943	9935	9927	9919	9910	9901
5-70	9973	9968	9962	9956	9950	9944	9937	9929	9922	9914
5-75	0-9976	0-9972	0-9967	0-9962	0-9957	0-9951	0-9945	0-9939	0-9932	0-9925
5-80	9980	9976	9972	9967	9963	9958	9952	9947	9941	9935
5-85	9982	9979	9976	9972	9968	9963	9959	9954	9949	9944
5-90	9985	9982	9979	9976	9972	9968	9964	9960	9956	9952
5-95	9987	9985	9982	9979	9976	9973	9969	9966	9962	9958
6-00	0-9989	0-9987	0-9984	0-9982	0-9979	0-9977	0-9974	0-9971	0-9967	0-9964
6-05	9990	9989	9987	9984	9982	9980	9977	9975	9972	9969
6-10	9992	9990	9989	9987	9985	9983	9981	9978	9976	9973
6-15	9993	9992	9990	9989	9987	9985	9983	9981	9979	9977
6-20	9994	9993	9992	9990	9989	9987	9986	9984	9982	9980
6-25	0-9995	0-9994	0-9993	0-9992	0-9991	0-9989	0-9988	0-9986	0-9985	0-9983
6-30	9996	9995	9994	9993	9992	9991	9990	9988	9987	9986
6-35	9996	9996	9995	9994	9993	9992	9991	9990	9989	9988
6-40	9997	9996	9996	9995	9994	9993	9992	9992	9991	9990
6-45	9997	9997	9996	9996	9995	9994	9994	9993	9992	9991
6-50	0-9998	0-9997	0-9997	0-9996	0-9996	0-9995	0-9995	0-9994	0-9993	0-9993
6-55	9998	9998	9997	9997	9996	9996	9995	9995	9994	9994
6-60	9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995
6-65	9999	9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995
6-70	9999	9999	9998	9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996
6-75	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9998	0-9998	0-9998	0-9997	0-9997	0-9997
6-80	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9998	9998	9998	9997
6-85	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9998	9998
6-90	0-9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9998
6-95	1-0000	0-9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998
7-00		1-0000	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999	0-9999
7-05			0-9999	0-9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
7-10			1-0000	1-0000	0-9999	0-9999	9999	9999	9999	9999
7-15					1-0000	1-0000	0-9999	0-9999	9999	9999
7-20							1-0000	1-0000	0-9999	0-9999
7-25									1-0000	1-0000

Fonte: Pearson, E.S. and Hartley, H.O. - The Probability Integral of the Range in Samples of n Observations from a Normal Population - *Biometrika* (1942).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, T.W. (1954), The Integral of A Symmetric Unimodal Function Over A Symmetric Convex Set and Some Probability Inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6, 170-176.
- BANERJEE, S. (1961), On Confidence Interval for Two-Means Problem Based on Separate Estimates of Variances and Tabulated Values of t-Table, *Sankhyā* 23, 359-378.
- BROWN, M.B. and FORSYTHE, A.B. (1974), The ANOVA and Multiple Comparisons for Data with Heterogeneous Variances; *Biometrics*, 30, 719-724.
- BROWNLEE, K.A. (1965), *Statistical Theory and Methodology "In Science and Engineering"*, John Wiley & Sons, Inc., New York London, Sydney, 590 p.
- COCHRAN, W.G. and COX, G.M. (1950), *Experimental Designs*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 454 p.
- DALAL, S.R. (1978), Simultaneous Confidence Procedures for Univariate and Multivariate Behrens-Fischer Type Problems, *Biometrika* 65(1), 221-225.
- DAVIES, O.L. (1949), *Statistical Methods in Research and Production*, 2^a ed., Oliver and Boyd, London.
- DUNCAN, D.B. (1955), Multiple Range and Multiple F Tests, *Biometrics*, 11, 1-42.
- DUNCAN, D.B. (1957), Multiple Range Tests for Correlated and Heteroscedastic Means, *Biometrics*, 13, 164-176.

- DUNN, O.J. and CLARK, V.A. (1974), *Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression*, John Wiley, Inc., New York.
- GABRIEL, R.K. (1978), A Simple Method of Multiple Comparisons of Means, *Journal of American Statistical Association* 73 (364), 724-729.
- GENEZI, A. and HOCHBERG, Y. (1978), On Improved Extensions of the T-Method of Multiple Comparisons for Unbalanced Designs, *Journal of American Statistical Association* 73 (364), 879-884.
- GRAYBILL, A.F. (1961), *An Introduction to Linear Statistical Models*, Vol. 1, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 463 p.
- HOCHBERG, Y. (1974), Some Generalizations of the T-Method in Simultaneous Inference, *Journal of Multivariate Analysis* 4, 224-234.
- HOCHBERG, Y. (1975), An Extension of the T-Method to General Unbalanced Models of Fixed Effects, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 37, 426-433.
- HOCHBERG, Y. (1976), A Modification of the T-Method of Multiple Comparisons for a One-Way Layout with Unequal Variances, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 200-203.
- KENDALL, M.A. and STUART, A. (1969), *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1, Charles Griffin & Company Limited, London & High Wycombe, 439 p.

- KESELMAN, H.J. and ROGAN, C.J. (1978), A Comparison of the Modified-Tukey and Scheffé Methods of Multiple Comparisons for Pairwise Contrasts, *Journal of the Statistical Association* 73 (361), 47-52.
- KRAMER, C.Y. (1957), Extension of Multiple Range Tests to Group Correlated Adjusted Means, *Biometrics* 13, 13-18.
- MILLER, R.G.Jr. (1966), *Simultaneous Statistical Inference*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
- MILLER, R.G.Jr. (1977), Developments in Multiple Comparisons, *Journal of the American Statistical Association*, 72, 779-788.
- MORRISON, D.F. (1967), *Multivariate Statistical Methods*, McGraw-Hill Book Company, New York, 338 p.
- O'NEILL, R. and WETHERILL, G.B. (1971), The Present State of Multiple Comparison Methods, *Journal of the Royal Statistical Society* 33(2), 218-241.
- PATERSON, D.D. (1939), *Statistical Technique in Agricultural Research*, McGraw-Hill, Inc., New York.
- SCHEFFÉ, H. (1953), A Method for Judging All Contrasts in the Analysis of Variance, *Biometrika*, 40, 87-104.
- SCHEFFÉ, H. (1959), *"The Analysis of Variance"*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 477 p.
- SEARLE, S.R. (1971), *Linear Models*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 532 p.

SPJØTVOLL, E. (1972), Joint Confidence Intervals for All Linear Functions of Means in the One-Way Layout with Unknown Group Variances, *Biometrika*, 59, 683-685.

SPJØTVOLL, E. and STOLINE, M.R. (1973), An Extension of the T-Method of Multiple Comparison to Include the Cases with Unequal Sample Sizes, *Journal of the American Statistical Association*, 68 (344), 975-978.

STOLINE, M.R. (1978), Tables of the Studentized Augmented Range and Applications to Problems of Multiple Comparison, *Journal of American Statistical Association* 73 (363), 656-660.

STOLINE, M.R. and URY, H.K. (1979), Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution and an Application to Multiple Comparisons Among Means, *Technometrics*, 21(1), 87-93.

TAMHANE, A.C. (1977), Multiple Comparisons in Model I One-Way ANOVA with Unequal Variances, *Communications in Statistics A* 6(1), 15-32.

TAMHANE, A.C. (1979), A Comparison of Procedures for Multiple Comparisons of Means with Unequal Variances, *Journal of the American Statistical Association*, 74 (366), 471-480.

TARONE, R.E. (1976), Simultaneous Confidence Ellipsoids in the General Linear Model, *Technometrics* 18(1), 85-88.

THOMAS, D.A.H. (1974), Error Rates in Multiple Comparisons Among Means - Results of a Simulation Exercise, *Applied Statistics*, 23(3), 284-294.

URY, H.K. (1976), A Comparison of Four Procedures for Multiple Comparisons Among Means (Pairwise Contrasts) for Arbitrary Sample Sizes, *Technometrics*, 18(1), 89-97.

WELCH, B.L. (1938), The Significance of the Difference Between Two Means When the Population Variances are Unequal, *Biometrika*, 29, 350-362.

WINER, B.J. (1962), *Statistical Principles in Experimental Design*, McGraw-Hill Book Company, New York, 672 p.