UMA APLICAÇÃO DE
PROCESSOS DE RENOVAÇÃO MARKOVIANOS
A ATENDIMENTOS DE EMERGÊNCIA

MARCOS NASCIMENTO MAGALHÃES

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Carlos Alberto Barbosa Dantas

Durante a realização deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro
do CNPq e FINEP.

- São Paulo, agosto de 1980 -

λ
Cίφα

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Carlos Alberto Barbosa Dantas pela orientação e amizade durante os anos de preparação da tese.

Aos colegas e funcionários do Departamento de Estatística do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo em especial ao Professor José Galvão Leite pelas sugestões e auxílios durante esse trabalho.

ÍNDICE

Apresentação.....	iii
CAP. 1 - Processos de Renovação Markovianos.....	1
1 - Preliminares.....	1
2 - Caracterização do Processo.....	4
3 - Equações de Renovação Markovianas.....	10
4 - Classificação de Estados e Tempo de Primeira Pas sagem.....	30
5 - Comportamento Limite.....	36
6 - Processos Semi-Markovianos.....	45
7 - Processos Semi-Regenerativos.....	52
CAP. 2 - Distribuição de Veículos para Atendimentos de Emergên cias.....	57
1 - Introdução.....	57
2 - Análise de Dados.....	59
3 - Modelo Desenvolvido.....	61
4 - Conclusões.....	69

Apêndice:

1 - Processo de Renovação.....	75
2 - Passagem da expressão (5.10) para (5.11) no capítulo 1.....	79

Bibliografia e Referências.....	85
---------------------------------	----

APRESENTAÇÃO

O nosso interesse por Processos de Renovação Markovianos veio da constatação de que, inúmeras aplicações de Processos Estocásticos com que tivemos contacto, envolvem esse tipo de processo.

A grande importância da Teoria da Renovação no contexto da Teoria das Probabilidades vem exatamente do fato de servir como modelo de uma grande quantidade de problemas práticos.

A descrição típica de um Processo de Renovação é aquela em que observamos o comportamento de um componente de um sistema instalado no instante $S_0 = 0$, que ao falhar (no instante S_1) é substituído por outro, que por sua vez ao falhar (no instante S_2) é substituído, e assim por diante. Se os sucessivos tempos de vida $U_1, U_2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, então os sucessivos "tempos de renovação" $S_0, S_1, S_2, \dots$ formam um Processo de Renovação. Um outro exemplo de Processo de Renovação pode ser construído a partir das Cadeias de Markov. Para tal, seja $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados discretos e fixemos um estado j desta cadeia. Sejam $S_1, S_2, S_3, \dots$ as sucessivas etapas em que esse estado é visitado. Se o estado inicial é j , então os tempos $S_1, S_2 - S_1, \dots$ entre 2 retornos sucessivos a

j são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e $\{S_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ é um Processo de Renovação.

A parte fundamental da Teoria da Renovação é o estudo dos Processos Regenerativos. Nesses processos após a ocorrência de um certo fenômeno, o futuro do processo é uma réplica probabilística do futuro após o tempo zero. Esses tempos são chamados de tempos de regeneração do processo. É importante notar que nessa classe de processos estocásticos estão incluídos as Cadeias de Markov e os Processos de Markov.

Os Processos de Renovação Markovianos surgem como uma combinação (como o próprio nome sugere) da Teoria da Renovação com a Teoria das Cadeias de Markov. Com o propósito de situá-lo, em relação a outros processos estocásticos, pensamos nesse processo como sendo o de uma partícula que se move de um estado para outro com tempos aleatórios de espera entre eles; esses tempos têm uma distribuição que depende do atual e do próximo estado visitado e ainda a sequência de estados visitados forma uma cadeia de Markov.

Vale ressaltar que o Processo de Renovação Markoviano será um Processo de Markov se a distribuição do tempo entre transições for exponencial independente do próximo estado. Será uma Cadeia de Markov se esses tempos forem todos iguais a unidade e poderá ainda ser um Processo de Renovação se o espaço de estados for unitário.

Uma descrição para o Processo de Renovação Markoviano seria aquela em que consideramos um equipamento com r equipamentos diferentes, onde os tempos de vida de cada componente j ; $j = 1, 2, \dots, r$,

são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parametro λ_j . Esse equipamento falha quando um de seus componentes falha. Quando ocorre falha em qualquer dos componentes ele é imediatamente substituído e o equipamento volta a funcionar.

Assim, definindo-se X_n como o tipo do componente que ocasionou a n-ésima falha do equipamento, T_n o instante dessa falha, L o número das falhas permitida ao equipamento antes de "aposentá-lo" então $\{X_n, T_n, L\}$ é um Processo de Renovação Markoviano que caracteriza o desempenho desse equipamento.

Notamos que a descrição acima nada mais é que uma superposição de Processos de Renovação. As condições para essa superposição originar um Processo de Renovação Markoviano ainda não são plenamente conhecidas. Seria possível conseguir um Processo de Renovação Markoviano a partir de uma superposição de Processos de Renovação sem exigir a distribuição exponencial nas renovações? Se é possível, quais as condições necessárias? Entendemos que responder a essas questões poderia ser um caminho para um estudo mais aprofundado dos Processos de Renovações Markovianos.

O objetivo central desse trabalho é apresentar as noções fundamentais da teoria dos Processos de Renovação Markovianos e em seguida aplicá-las em sistemas de atendimento de emergência. Para tal, dividimos essa monografia em três partes. No capítulo 1 apresentamos os principais teoremas relativos aos Processos de Renovação Markovianos; no capítulo 2 o problema de alocação ótima de veículos para os atendimentos de emergências em distritos de uma re

gião urbana é resolvido com a utilização de técnicas dos Processos de Renovação Markovianos; no apêndice apresentamos os principais resultados dos Processos de Renovação utilizados nos capítulos 1 e 2.

Esperamos que esse trabalho possa motivar aqueles que se interessem pelas aplicações dos Processos de Renovação.

CAPÍTULO 1

PROCESSOS DE RENOVAÇÃO MARKOVIANOS

1. Preliminares

Em muitos problemas aplicados, o processo estocástico imerso não é, como poderíamos desejar, markoviano. Isto é, as probabilidades de transição dependem, não só do presente, mas também do próximo estado do processo. Podemos considerar esses processos como sendo o aperfeiçoamento do estudo dos processos de Renovação para mais de um estado.

Desenvolveremos o estudo dos Processos de Renovação Markovianos, tendo como base o artigo de E. Çinlar "Markov Renewal Theory" (4).

Nestes processos precisamos considerar o tempo entre transições, o estado ocupado e o estado a ser ocupado na próxima etapa. De modo que, como temos mais de um estado no sistema, teremos uma matriz de transição em que cada entrada é uma função de distribuição F (sub-estocástica), isto é, uma função do tempo, contínua à direita, não decrescente e com $F(\infty) \leq 1$.

1.1 Definição: Matriz Semi-Markoviana

Seja A uma matriz de funções de massa $A_{jk}(\cdot)$ com $j, k \in J$ (espaço amostral) e tomemos $B_j(\cdot) = \sum_k A_{jk}(\cdot)$.

Então A é chamada uma matriz semi-markoviana sobre J , se para todo $j \in J$:

$$(1.2) \quad B_j(0^-) = 0 \quad \text{e} \quad B_j(+\infty) \leq 1$$

A matriz semi-markoviana faz as vezes da matriz de transição numa cadeia de Markov. Só que aqui, permite-se transições para algum estado θ não pertencente a J . Este fato é uma consequência direta da soma de uma linha não ser, necessariamente 1.

Assim, cada entrada $A_{jk}(\cdot)$ da matriz $A(\cdot)$, indica a probabilidade do processo passar do estado j a k , num tempo menor ou igual a t .

Para cada $t \in [0, \infty)$ fixado, $A(t)$ é uma matriz markoviana e em particular $\tilde{A} = A(\infty)$ é chamada a matriz markoviana associada a A . Cada entrada de $\tilde{A}$ indica a probabilidade de se realizar uma transição entre 2 estados do processo.

Podemos pensar em transições em mais de uma etapa, só que, ao invés de simples produtos de matrizes como no caso de cadeias de Markov, precisamos agora considerar a soma dos tempos gastos em cada transição, assim cada entrada será:

$A_{jk}^{(n)}(t)$: que indica a n -ésima convolução de $A_{jk}(t)$ consigo mesma, isto é,

$$\underbrace{A_{jk}(t) * A_{jk}(t) * \dots * A_{jk}(t)}_{n \text{ vezes}}$$

$$(1.3) \quad A_{jk}^{(n)}(t) = \begin{cases} \sum_v \int_0^t A_{jv}(dy) A_{vk}^{(n-1)}(t-y) & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

para $n = 1, 2, \dots$

Como a soma e a integral podem ser permutadas, usando-se a notação $A.B$ para o produto das matrizes A e B , tem-se, em notação matricial

$$(1.4) \quad A^{(n)}(t) = \begin{cases} \int_0^t A(dy) . A^{(n-1)}(t-y) & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

definimos ainda

$$A_{jk}^{(0)}(t) = \begin{cases} \delta_{jk} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

e portanto

$$A^{(0)}(t) = I \quad .$$

2. Caracterização do Processo

2.1 Definição:

Seja J um sub-conjunto de inteiros não negativos e A uma matriz semi-markoviana definida sobre J .

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, e definimos sobre ele:

- (a) uma função $L(\omega)$, $\omega \in \Omega$ tomando valores em $(1, 2, \dots)$, que indicará o número total de etapas do processo.
- (b) uma função $X_n(\omega)$ definida sobre $0 \leq n \leq L(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ e com valores em J , que indicará o estado do processo após a n -ésima transição.
- (c) funções $T_n(\omega)$ definidas para $0 < n < L(\omega)$, $\omega \in \Omega$, com valores em $[0, \infty)$ tais que para algum $\omega \in \Omega$, temos: $0 = T_0(\omega) \leq T_1(\omega) \leq \dots$ onde $T_n(\omega)$ indicará o instante da n -ésima transição.

Supondo para cada $n \geq 0$, que $\mathcal{F}$ contém as σ -álgebras geradas pelos conjuntos: $\{X_m = k, T_m \leq t, L > n\}$ com $m = 0, 1, 2, \dots, n$; $k \in J$ $t \in [0, \infty)$ então $\{X_n, T_n, L\}$ é chamado um processo de renovação markoviano induzido pela matriz semi-markoviana $A(t)$ se:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, X_1, \dots, T_0, T_1, \dots, T_n\} = \\
 = P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n) = A_{X_n, j}(t)
 \end{aligned}$$

quase certamente sobre $\{L > n\}$ e para $j \in J$, $t \in [0, \infty)$ e $n \geq 0$.

As características mais gerais do processo de renovação markoviano podem ser comprovadas, através das seguintes observações:

- 2.3 O processo de renovação markoviano $\{X_n, T_n, L\}$ pode ser considerado como uma cadeia de Markov a duas dimensões, onde cada estado é o par (X_n, T_n) ; assim para $T_0 = 0$ temos:

$$P\{X_n = k, T_n \leq t \mid X_0 = j\} = A_{jk}^{(n)}(t)$$

e as diferenças $1 - \sum_k A_{jk}^{(n)}(\infty)$ indicam a probabilidade de que iniciando em j , o processo faça no máximo n transições, isto é: $1 - \sum_k A_{jk}^{(n)}(\infty) = P\{L \leq n \mid X_0 = j\}$.

- 2.4 Os tempos de espera $T_n - T_{n-1}$ são condicionalmente independentes de $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ e $T_1 - T_0, T_2 - T_1, \dots$, da do X_n ; isto é:

$$\begin{aligned} P\{T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, X_1, \dots, X_n, T_1, T_2, \dots, T_n\} = \\ = P\{T_{n+1} - T_n < t \mid X_n\} = \sum_k A_{X_n, k}(t) \end{aligned}$$

quase certamente sobre $\{L > n\}$.

Assim $B_j(.) = \sum_k A_{jk}(.)$ é a função distribuição do tempo de espera no estado j .

- 2.5 Da observação anterior, vem que se J tem somente um único elemento então $\{T_n, L\}$ é um processo de renovação on-

de os T_n são as épocas de renovação e L é o número total de renovações.

- 2.6 Da observação (2.4) e da definição de processo de renovação markoviano, podemos ainda inferir que $\{X_n, L\}$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados J . Escrevendo $\tilde{A} = A(\infty)$, temos:

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = j \mid X_0, X_1, \dots, X_n; L > n\} &= \\ &= P\{X_{n+1} = j \mid X_n\} = \tilde{A}_{X_n, j} \end{aligned}$$

quase certamente sobre $\{L > n\}$.

A diferença $1 - \sum_k \tilde{A}_{jk}$ é a probabilidade de que a cadeia, iniciando em j , termine aí.

- 2.7 Tendo em vista as observações anteriores, podemos considerar um processo de renovação markoviano, como uma coleção enumerável de processos de renovação progredindo simultaneamente, onde os tipos das sucessivas renovações formam uma cadeia de Markov.

□

Esta última observação sintetiza a tônica de nosso trabalho. Usaremos no estudo dos processos de Renovação Markovianos, a Teoria já desenvolvida para os processos de Renovação e Cadeias de Markov.

Definimos a seguir a matriz de Renovação Markoviana, que tem em cada entrada, o número esperado de renovações de um estado

a partir do estado inicial X_0 .

2.8 Definição:

Seja $\{X_n, T_n, L\}$ um processo de renovação markoviano sobre o espaço de estados J e seja $A(t)$ sua matriz semi-markoviana. Para um k fixado e $t \in [0, \infty)$, tomemos:

$$W_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_n(\omega) = k, T_n(\omega) \leq t \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

para $0 \leq n < L(\omega)$, $\omega \in \Omega$; sendo

$$N_k(t, \omega) = \sum_{0 \leq n < L(\omega)} W_n(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

então $N_k(t, \omega)$ é o número de renovações em $[0, t]$ do k -ésimo processo de renovação $\{T_n: X_n = k\}$ (incluindo a 1.^a renovação quando $X_0 = k$).

Seja

$$\begin{aligned} R_{jk}(t) &= E[N_k(t) | X_0 = j] = E\left[\sum_{0 \leq n < L} W_n | X_0 = j\right] = \\ &= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} W_n \cdot 1_{\{L > n\}} | X_0 = j\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X_n = k, T_n \leq t, L > n | X_0 = j] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[X_n = k, T_n \leq t | X_0 = j] \quad \text{pois } \{L > n\} \supset \{X_n = k, T_n \leq t\} \end{aligned}$$

então

$$(2.9) \quad R_{jk}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{jk}^{(n)}(t)$$

e ainda, a matriz de renovação markoviana $R(t)$ correspondente a $A(t)$ é definida por:

$$(2.10) \quad R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(t)$$

□

No caso em que o conjunto de estados J consiste em único elemento, R será a função de renovação correspondente a A .

Cada entrada da matriz de renovação Markoviana é uma função não decrescente e contínua à direita. Ainda mais, $R_{jk}(t)$ define uma medida sobre a reta real, que para o conjunto $[a, b]$ assume o valor $R_{jk}(b) - R_{jk}(a)$.

2.11 Definição:

Se $R(0) < \infty$ o processo de renovação markoviano será dito normal. A matriz semi-markoviana de um processo normal é normal.

□

Se A é uma matriz semi-markoviana normal então $R = \sum_n A^{(n)}$ existe. Como os R_{jk} são funções de renovação, suas transformadas de Laplace r_{jk} existem. Denotando por $a(\lambda)$ e $a^n(\lambda)$ respectivamente as transformadas de Laplace de A e $A^{(n)}$; como $\sum_n a^n(\lambda)$ existe todo $\lambda > 0$

e como

$$(2.12) \quad r(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(\lambda)$$

escrevendo para os $a^n(\lambda)$ simplesmente a^n , por comodidade, temos portanto:

$$(2.13) \quad a^n \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty \text{ para todo } n \geq 0$$

e vale

$$(I-a) \sum_{k=0}^n a^k = \left(\sum_{k=0}^n a^k \right) (I-a) = I - a^{n+1}$$

passando ao limite para $n \longrightarrow \infty$, com $a^n \longrightarrow 0$, temos:

$$(2.14) \quad r(I-a) = (I-a)r = I$$

$\implies$

$$(2.15) \quad r = (I-a)^{-1}$$

Se J tem um número finito de estados r , é a matriz inversa de $(I-a)$ no sentido usual. Se J é enumerável infinito então $(I-a)^{-1}$ é definida como em (2.12).

3. Equações de Renovação Markovianas

A equação de Renovação:

$$U(t) = G(t) + \int_0^t A(dy) U(t-y)$$

onde A é uma função de massa e G uma função limitada sobre intervalos finitos e nula sobre $(-\infty, 0)$, pode ser generalizada para:

$$(3.1) \quad U(t) = G(t) + \int_0^t A(dy) U(t-y)$$

onde A é uma matriz semi-markoviana e G é uma matriz de funções anulando-se sobre $(-\infty, 0)$. Se a matriz U satisfaz essa equação, suas colunas satisfazem uma equação do mesmo tipo.

Assim, podemos sem perda de generalidade, restringir nosso estudo a equação:

$$(3.2) \quad U(t) = G(t) + \int_0^t A(dy) U(t-y)$$

onde U e G são vetores colunas e A uma matriz semi-markoviana. Essa equação será chamada de equação de renovação markoviana. Ao longo desse capítulo discutiremos as soluções e condições para sua unicidade.

Vamos denotar por L , o espaço de Banach de todos os vetores limitados definidos sobre J , com norma:

$$\| \mu \| = \sup_{j \in J} | \mu_j |, \quad \mu \in L$$

se U é uma função sobre $(-\infty, \infty)$ tomando valores em L , então escrevemos $\|U\|$ para a função cujo valor em $t \in (-\infty, \infty)$ é o número real $\|U(t)\|$.

Definimos M como a coleção de todas as funções $U: (-\infty, \infty) \rightarrow L$ tais que $U(t) = 0$ para $t \in (-\infty, 0)$; a função $\|U\|$ é limitada sobre intervalos finitos, e para $j \in J$, U_j é Borel-mensurável.

Ainda mais, vamos denotar por M^+ o conjunto de funções não negativas em M . Escrevemos U^+ e U^- para as partes positiva e negativa, respectivamente de U . Se F e G pertencem a M , então uma combinação linear $\alpha F + \beta G \in M$.

Nos lemas enunciados a seguir, consideraremos o processo de renovação markoviano como sendo normal

3.3 Lema:

Se $G \in M$, então $A * G \in M$ e

$$\sup_{y \leq t} \|A * G(y)\| \leq \sup_{y \leq t} \|G(y)\|$$

Demonstração:

Seja $G \in M$ e tomemos $\gamma(t) = \sup_{y \leq t} \|G(y)\|$, temos

$$\begin{aligned} |A * G_j(y)| &= \left| \sum_k \int_0^y A_{jk}(dx) G_k(y-x) \right| \leq \\ &\leq \sum_k \int_0^y A_{jk}(dx) |G_k(y-x)| \leq \sum_k \int_0^y A_{jk}(dx) \sup_{k \in J} |G_k(y-x)| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k \int_0^y A_{jk}(dx) \|G(y-x)\| \leq \sum_k \int_0^y A_{jk}(dx) \gamma(y) = \\
 &= \sum_k A_{jk}(y) \gamma(y) = B_j(y) \gamma(y) \leq \gamma(y)
 \end{aligned}$$

como

$$|A * G_j(y)| \leq \gamma(y) \quad \text{para todo } j,$$

segue que

$$\sup_{j \in J} |A * G_j(y)| \leq \gamma(y) \quad \text{e}$$

portanto

$$\|A * G_j(y)\| \leq \gamma(y) \quad \text{para todo } y$$

e então

$$\sup_{y \leq t} \|A * G_j(y)\| \leq \sup_{y \leq t} \gamma(y) = \gamma(t)$$

pois γ é uma função não decrescente.

□

3.4 Corolário:

Se $G \in M^+$ então $A * G \in M^+$

Demonstração:

Decorre imediatamente do Lema anterior.

3.5 Lema:

Se $G \in M$ então $A * (A^{(n)} * G) = A^{(n+1)} * G$

Demonstração:

Se $G \in M$, então G^+ e G^- pertencem a M^+ e pelo corolário (3.4) $A * G^+$ e $A * G^-$ também pertencerão a M^+ . Aplicando sucessivamente esse corolário e lembrando que vale a propriedade associativa em convoluções de matrizes não negativas, temos:

$$A * (A^{(n)} * G^+) = (A * A^{(n)}) * G^+ = A^{(n+1)} * G^+$$

e

$$A * (A^{(n)} * G^-) = (A * A^{(n)}) * G^- = A^{(n+1)} * G^-$$

como a propriedade distributiva pode ser aplicada para um número finito de convoluções:

$$\begin{aligned} A * (A^{(n)} * G) &= A * (A^{(n)} * G^+) - A * (A^{(n)} * G^-) \\ &= A^{(n+1)} * G^+ - A^{(n+1)} * G^- \\ &= A^{(n+1)} * G \end{aligned}$$

□

3.6 Lema:

Se $G \in M^+$ e se o limite

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} (G + A * G + \dots + A^{(n)} * G) \quad \text{existe então}$$

$$F = R * G$$

Demonstração:

Sabemos que

$$G + A * G + \dots + A^{(n)} * G = \left(\sum_{k=0}^n A^{(k)} \right) * G \leq R * G$$

passando ao limite para $n \rightarrow \infty$, vem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (G + A * G + \dots + A^{(n)} * G) \leq R * G$$

portanto

$$(3.7) \quad F \leq R * G$$

Por outro lado, sendo R_{jk} uma função de renovação e G_k uma função limitada em intervalo finitos; $R_{jk} * G_k$ está bem definida para todo j e k . Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n R_{jv} * G_v &= \sum_{v=0}^n (R_{jv} - \sum_{\mu=0}^m A_{jv}^{(\mu)}) * G_v + \sum_{v=0}^n \left(\sum_{\mu=0}^m A_{jv}^{(\mu)} * G_v \right) = \\ &= \sum_{v=0}^n (R_{jv} - \sum_{\mu=0}^m A_{jv}^{(\mu)}) * G_v + \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^n A_{jv}^{(\mu)} * G_v \end{aligned}$$

observando este último termo, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n A_{jv}^{(\mu)} * G_v &= A_{j0}^{(\mu)} * G_0 + A_{j1}^{(\mu)} * G_1 + \dots + A_{jn}^{(\mu)} * G_n \leq \\ &\leq (A^{(\mu)} * G)_j \end{aligned}$$

pois A pode ter dimensão maior ou igual a n , e ainda

$$\sum_{\mu=0}^m (A^{(\mu)} * G)_j \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} (A^{(\mu)} * G)_j = \sum_{\mu=0}^{\infty} A^{(\mu)} * G_j$$

portanto

$$\sum_{v=0}^n R_{jv} * G_v \leq \sum_{v=0}^n (R_{jv} - \sum_{\mu=0}^m A_{jv}^{(\mu)}) * G_v + \sum_{\mu=0}^{\infty} A^{(\mu)} * G_j$$

fazendo $m \rightarrow \infty$, a 1.^a parcela do lado direito,

$$\sum_{v=0}^n (R_{jv} - \sum_{\mu=0}^m A_{jv}^{(\mu)}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

pois

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_{jv}^{(\mu)} = R_{jv}$$

obtemos então:

$$\sum_{v=0}^n R_{jv} * G_v \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} A^{(\mu)} * G_j$$

isto é

$$\sum_{v=0}^n R_{jv} * G_v \leq F_j$$

para algum n , fazendo $n \rightarrow \infty$ vem

$$\sum_{v=0}^{\infty} R_{jv} * G_v \leq F_j$$

o que equivale a

$$(R * G)_j \leq F_j$$

para todo j e assim

$$(3.8) \quad R * G \leq F$$

Observando (3.7) e (3.8), concluímos que $R * G = F$ e o lema está provado. □

A seguir discutiremos, a existência e unicidade de soluções da equação de renovação markoviana $U = G + A * U$ para os diversos comportamentos de G .

3.9 Lema:

Se $U = R * G \in M$, então U é uma solução de (3.2) com $G \in M^+$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} A * U &= A * (R * G) = (A * R) * G = (R - I) * G = \\ &= R * G - G = U - G \end{aligned}$$

portanto

$$U = G + A * U$$

usamos a propriedade associativa e a distributiva de convoluções, pois as matrizes A , R e G são todas não negativas.

3.10 Teorema:

A equação de renovação markoviana $U = G + A * U$ com $G \in M^+$,

tem uma solução $U \in M$ se e só se $R * G \in M$. Toda solução $U \in M$ tem a representação:

$$(3.11) \quad U = R * G + H$$

onde H , satisfaz

$$(3.12) \quad H = A * H, \quad H \in M$$

Demonstração: (1.^a Parte)

Condição Necessária:

Existindo uma solução $U \in M$, temos que:

$$U = G + A * U \quad \text{donde} \quad A * U = U - G$$

aplicando sucessivamente a operação de convolução por A , temos:

$$A * U = A * G + A^{(2)} * U$$

donde

$$U - G = A * G + A^{(2)} * U$$

fazendo convolução por A , vem

$$A * U - A * G = A^{(2)} * G + A^{(3)} * U$$

$$\Rightarrow U - G = A * G + A^{(2)} * G + A^{(3)} * U$$

repetindo n vezes essa operação, temos:

$$U - G = A * G + A^{(2)} * G + A^{(3)} * G + \dots + A^{(n+1)} * U$$

e portanto

$$U = \sum_{k=0}^n A^{(k)} * G + A^{(n+1)} * U \quad n = 0, 1, \dots$$

para todo $n \geq 0$ e $t \geq 0$ fixo, temos:

$$\begin{aligned} \sup_{y \leq t} \left\| \sum_{k=0}^n A^{(k)} * G(y) \right\| &= \sup_{y \leq t} \|U(t) - A^{(n+1)} * U(y)\| \leq \\ &\leq \sup_{y \leq t} (\|U(y)\| + \|A^{(n+1)} * U(y)\|) = \\ &= \sup_{y \leq t} \|U(y)\| + \sup_{y \leq t} \|A^{(n+1)} * U(y)\| \leq \\ &\leq 2 \sup_{y \leq t} \|U(y)\| \end{aligned}$$

A última passagem foi feita pela aplicação do Lema (3.3).
Portanto a seqüência crescente $\sum_{k=0}^n A^{(k)} * G$ converge, seu limite pertence a M^+ e é igual a $R * G$ pelo Lema (3.6). Logo $R * G \in M^+$

Condição Suficiente:

Se $R * G \in M$, então pelo Lema (3.9) U é uma solução.

2.^a Parte

Da expressão (3.13)

$$U = \sum_{k=0}^n A^{(k)} * G + A^{(n+1)} * U \quad n = 0, 1, \dots$$

passando ao limite, para $n \rightarrow \infty$

$$U = R * G + \lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n+1)} * U$$

chamando

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n+1)} * U$$

portanto as soluções podem ser representadas na forma:

$$U = R * G + H$$

resta provar que $H = A * H$; temos:

$$\begin{aligned} A * H &= A * (U - R * G) = A * U - A * R * G = \\ &= U - G - (R - I) * G = U - R * G = H \end{aligned}$$

pela aplicação da lei distributiva de convoluções.

□

3.14 Teorema:

Se $\|B(t)\| < 1$ para todo $t > 0$, então $R * G$ existe e é a única solução de $U = G + A * U$ para todo $G \in M$.

Demonstração:

Sendo a_{jk} a transformada de Laplace de A_{jk} . Assim,

$$(3.15) \quad a_{jk} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} A_{jk}(dt)$$

e conseqüentemente,

$$(3.16) \quad b_j = \sum_k a_{jk} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} B_j(dt)$$

Supondo que, para algum $\tau > 0$,

$$\|B(\tau)\| = \sup_j B_j(\tau) = 1 - \delta < 1$$

portanto

$$\begin{aligned} b_j &= \int_0^\tau e^{-\lambda t} B_j(dt) + \int_\tau^\infty e^{-\lambda t} B_j(dt) \leq \\ &\leq B_j(\tau) + e^{-\lambda \tau} (B_j(\infty) - B_j(\tau)) \leq \\ &\leq B_j(\tau) + e^{-\lambda \tau} (1 - B_j(\tau)) = \\ &= e^{-\lambda \tau} + (1 - e^{-\lambda \tau}) B_j(\tau) \leq \\ &\leq e^{-\lambda \tau} + (1 - e^{-\lambda \tau}) (1 - \delta) = \\ &= 1 - \delta (1 - e^{-\lambda \tau}) = \\ &= 1 - \beta < 1 \end{aligned}$$

lembrando que a denota a matriz das transformadas de Laplace a_{jk} temos:

$$(3.17) \quad \| a.1 \| = \| b \| \leq (1 - \beta) < 1 \quad e$$

$$(3.18) \quad \| a^n.1 \| = \| b^n \| \leq \| b \|^n \leq (1 - \beta)^n$$

e ainda

$$(3.19) \quad \| (I + a + a^2 + \dots + a^n).1 \| \leq \frac{1}{\beta} < \infty$$

Temos então, $\sum_k R_{jk}(t) < \infty$ para todo $t \geq 0$. Como $G \in M$ temos que $\|G\|$ é dominada sobre intervalos finitos. Assim $R * G^+$ e $R * G^-$ existem, pertencem a M^+ pelo corolário (3.4) e pelo Lema (3.9) vale:

$$R * G^+ = G^+ + A * R * G^+$$

$$R * G^- = G^- + A * R * G^-$$

portanto $R * G \in M$ e satisfaz $U = G + A * U$ com $G \in M$.

Vamos agora, demonstrar a unicidade da solução $R * G$. Pelo Teorema anterior, basta provar que a equação $H = A * H$, $H \in M$ implica $H = 0$.

Usando recursivamente essa equação, temos:

$$H = A^{(n)} * H \quad \text{para todo } n > 0$$

assim, para todo $t \geq 0$, temos:

$$|H_j(t)| = \left| \sum_k \int_0^t A_{jk}^{(n)}(dy) H_k(t-y) \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_k \left| \int_0^t A_{jk}^{(n)}(dy) H_k(t-y) \right| \leq \\
 &\leq \sum_k \int_0^t A_{jk}^{(n)}(dy) |H_k(t-y)| \leq \\
 &\leq \sum_k \int_0^t A_{jk}^{(n)}(dy) \sup_k |H_k(t-y)| = \\
 &= \sum_k \int_0^t A_{jk}^{(n)}(dy) \|H_k(t-y)\| \leq \\
 &\leq \sum_k \int_0^t A_{jk}^{(n)}(dy) \sup_{y \leq t} \|H(y)\| \leq \\
 &\leq \sup_{y \leq t} \|H(y)\| \sum_k \int_0^t A_{jk}^{(n)}(dy) = \\
 &= \sup_{y \leq t} \|H(y)\| \sum_k A_{jk}^{(n)}(t)
 \end{aligned}$$

passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$, vem

$$|H_j(t)| \leq 0$$

pois de (3.18) temos

$$\sum_k A_{jk}^{(n)}(t) \rightarrow 0$$

assim $H = 0$ é a única solução de

$$H = A * H, \quad H \in M$$

3.20 Corolário:

Se existe $m > 0$, tal que $\|A^{(m)}(t) \cdot 1\| < 1$ para algum $t > 0$, então $R * G$ existe e é a única solução de $U = G + A * U$ para todo $G \in M$.

Demonstração:

Suponhamos que exista um inteiro finito $m > 0$, tal que

$$\sum_k A_{jk}^{(m)}(t) \leq 1 - \delta < 1 \quad \text{para todo } j.$$

Da demonstração do teorema (3.14), vem:

$$\|a^m \cdot 1\| \leq 1 - \beta < 1.$$

portanto

$$\begin{aligned} \|r \cdot 1\| &= \|(I + a + a^2 + \dots) \cdot 1\| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n \cdot 1\| = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \|a^{mk+n} \cdot 1\| = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\|a^{mk} \cdot 1\| + \|a^{mk+1} \cdot 1\| + \dots + \|a^{mk+m-1} \cdot 1\|) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} m \cdot (1 - \beta)^k = \frac{m}{1 - \beta} < \infty \end{aligned}$$

Como, $R(t) \cdot 1$ é finito para todo t e $a^n \cdot 1 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, a demonstração do teorema (3.14) pode ser repetida obtendo o coro-

lário.

□

3.21 Corolário:

Se A tem dimensão finita, então $R * G$ existe e é a única solução de $U = G + A * U$ para $G \in M$.

Demonstração:

Como A tem dimensão finita então $A^{(n)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e ainda $R(t) \cdot 1 < \infty$. O corolário é provado utilizando-se a demonstração do Teorema (3.14).

□

3.22 Teorema:

Supondo $0 \leq G \leq \delta \cdot (1 - A \cdot 1)$ para algum número finito δ . Então:

$$R * G \leq \delta \cdot 1$$

é uma solução de

$$U = G + A * U \quad \text{com } G \in M^+.$$

Demonstração:

Temos:

$$\begin{aligned} (I + A + \dots + A^{(n)}) * G &\leq \delta (I + A + \dots + A^{(n)}) * (1 - A \cdot 1) \leq \\ &\leq \delta \cdot (1 - A^{(n+1)} \cdot 1) \leq \delta \cdot 1 \quad \text{para todo } n \geq 0. \end{aligned}$$

Passando ao limite, para $n \rightarrow \infty$, vem:

$$R * G \leq \delta . 1 \quad \text{e} \quad \text{portanto} \quad R * G \quad \text{existe}$$

e é dominado por $\delta . 1$. Pelo Lema (3.9) o Teorema está provado. $\square$

No restante desta secção nos preocuparemos com a unicidade de solução da equação de renovação markoviana. Foi visto no teorema (3.10) que a unicidade está relacionada com a existência de soluções não nulas de (3.12) $H = A * H$, $H \in M$. Enunciaremos, os principais resultados nesta direção, as demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em Çinlar (4).

3.23 Teorema:

Toda solução de (3.12) é uma combinação linear de funções não negativas, satisfazendo a mesma equação. $\square$

3.24 Teorema:

A equação (3.12) tem uma solução não nula se e só se

$$(3.25) \quad H = A * H \quad 0 \leq H \leq 1$$

tem uma solução não nula. $\square$

Consideramos agora soluções para (3.25). Se H satisfaz (3.25) então, para algum $\lambda > 0$, fixo,

$$(3.26) \quad h(\lambda) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} H(t) dt \quad \text{existe}$$

como integral de Lebesgue e satisfaz $0 \leq h \leq 1$. Assim, se H é contínua quase certamente (com respeito a medida de Lebesgue), então ela determina completamente sua transformada, exceto em pontos de descontinuidade. Sendo a , a transformada de Laplace da matriz semi-markoviana, nosso problema equivale a determinar a condição necessária e suficiente para existência de soluções não nulas da equação (3.26) $ah = h$ $0 \leq h \leq 1$ onde o parâmetro λ será omitido quando não houver possibilidade de confusão.

Chamemos de H o conjunto de todas as soluções de (3.26). Todo $h \in H$ é uma função a valores vetoriais, isto é, uma função que toma valores no espaço de Banach L dos vetores limitados com norma $\sup$.

3.27 Teorema:

Existe um elemento maximal $x \in H$ (tal que $h < x$ para todo $h \in H$). Nós temos que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \cdot 1$

3.28 Teorema:

Cada entrada do elemento maximal $x(\lambda)$ de H é uma função completamente monotônica. Assim, se $x(\lambda_0) = 0$ para algum $\lambda_0 > 0$, então H consiste exclusivamente de vetores nulos.

3.29 Corolário:

Para H ter elementos não nulos é necessário e suficiente que exista $j \in J$ e $\delta > 0$ tais que, para algum $\lambda > 0$,

$$\sum_k a_{jk}^n(\lambda) > \delta \quad \text{para todo } n > 0.$$

□

3.30 Corolário:

Se, para algum $\lambda > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\sum_k a_{jk}(\lambda) < 1 - \delta$$

para todo $j \in J$, então $H = \{0\}$.

□

O Teorema (3.28) mostra que x se anula para todo $\lambda > 0$, ou não se anula para nenhum $\lambda > 0$. Isto sugere que existe uma íntima relação entre x e a matriz markoviana $\tilde{A} = A(\infty) = a(0)$. Esta relação é expressa pelo Teorema (3.31).

3.31 Teorema:

Se a cadeia de Markov $\tilde{A}$ induzida por A , é irreduzível e recorrente, então $x=0$ é o único elemento de H .

□

3.32 Corolário:

Se a cadeia de Markov $\tilde{A}$, induzida por A , tem somente um número finito de estados transitórios, então $H = \{0\}$. Em particular,

se todos os estados são recorrentes, então $H = \{0\}$.

3.33 Interpretação Probabilística:

Consideremos o processo de renovação markoviano $\{X_n, T_n, L\}$ induzido pela matriz semi-markoviana $A(t)$. Assim, $\{X_n, L\}$ é a cadeia de Markov induzida por $\tilde{A} = A(\infty)$ onde X_n é o estado visitado na n -ésima etapa e L é o número total de etapas da cadeia. De (2.3) temos que:

$$\sum_k A_{jk}^{(n)}(t) = P\{T_n < t \mid X_0 = j\}$$

assim, o elemento maximal $x(\lambda)$ de H tem, como j -ésima entrada, a transformada de Laplace de:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{T_n < t \mid X_0 = j\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\{N(t) > n \mid X_0 = j\} = \\ &= 1 - P\{N(t) < \infty \mid X_0 = j\} \end{aligned}$$

onde $N(t)$ é o número de transições em $[0, t]$.

Então $x \neq 0$ se e só se, existe probabilidade positiva de fazer infinitas transições num tempo finito. Isto é impossível se $P\{L < \infty\} = 1$. Se tivermos $P\{L = \infty\} > 0$, para $N(t) = \infty$ é ainda necessário que $\sup T_n$ seja finito.

Se todos os estados são recorrentes, então (3.31) prova que:

$$P\{N(t) < \infty\} = 1 \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

3.34 Interpretação Probabilística:

Para $\lambda > 0$ fixo, a matriz $a(\lambda)$ é markoviana. Seja $\{\tilde{X}_n, \tilde{L}\}$ a cadeia de Markov induzida por a . Então x tem, como sua j -ésima entrada:

$$x_j = P\{\tilde{L} = \infty \mid X_0 = j\}$$

Assim, usando (3.33), observamos que o processo de renovação markoviano induzido por A , tem infinitas transições num tempo finito, se e só se a cadeia de Markov induzida por a , não termina com probabilidade 1.

Em vista do teorema (3.31), para termos soluções não nulas de $ah = h$, é suficiente considerarmos somente as matrizes a , tais que $\bar{A} = a(0)$ definem uma cadeia de Markov transitória, isto é, cada estado é alcançado somente um número finito de vezes. Então, $\bar{A}^{(n)}.1$ terá como sua j -ésima entrada a probabilidade de que a cadeia $\bar{A}$ tenha tempo de vida maior que n . Neste sentido podemos interpretar o tempo de vida, como o tempo de 1.^a passagem a um estado abstrato o qual, é alcançado a partir de J . Então $(\bar{A}^{(n)}.1)_j$ é a probabilidade de que a cadeia $\bar{A}$, iniciando em j , esteja no conjunto de estados J até o tempo n .

4. Classificação de Estados e Tempo de Primeira Passagem

Vamos considerar um processo de renovação markoviano normal com espaço de estados J . Vamos dar uma classificação aos estados, observando principalmente o número de visitas do processo a um determinado estado. Relacionaremos essa classificação com a unicidade de soluções da equação (3.12), tentando então, tornar intuitivos os resultados analíticos da secção anterior. No final da secção deduziremos a expressão para o cálculo do tempo de 1.^a visita a um estado.

Consideremos um processo de renovação markoviano $\{X_n, T_n, L\}$ sobre o espaço de estados $J = \{1, 2, \dots\}$ induzido pela matriz semi-markoviana $A(t)$, e seja $N_k(t)$ o número de vezes que o estado K é visitado em $[0, t]$, temos então:

$$N(t) = \sum_k N_k(t)$$

que é o número total de transições em $[0, t]$.

Como nas secções anteriores, temos:

$$R_{jk}(t) = E \left[N_k(t) \mid X_0 = j \right] = \sum_n A_{jk}^{(n)}(t)$$

e

$$\bar{A} = A(\infty)$$

e ainda

$$\bar{R} = \sum_n \bar{A}^{(n)}$$

4.1 Definições:

- (a) O estado j é chamado transitório se $\tilde{R}_{jj} < \infty$, caso contrário, se $\tilde{R}_{jj} = \infty$, ele é chamado recorrente.
- (b) O estado j é dito ser periódico com período $\omega > 0$ se $R_{jj}(t)$ é constante em intervalos da forma $[\bar{n}\omega, n\omega + \omega)$ e ω é o maior número com esta propriedade. Se j não é periódico, então ele é chamado aperiódico.
- (c) Um estado j é conservativo se, para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k A_{jk}^{(n)}(t) = 0.$$

Caso contrário, ele é chamado dissipativo.

Algumas observações serão feitas a seguir, na tentativa de relacionar a classificação de estados nos processos de renovação markoviano e nas cadeias de Markov.

- 4.2 Um estado j será recorrente (ou transitório) num processo de renovação markoviano se e só se ele for recorrente (ou transitório) na cadeia de Markov imersa.
- 4.3 Um estado j é periódico com período ω , se o j -ésimo processo de renovação é periódico com igual período. A periodicidade de um certo estado no processo de renovação markoviano não se relaciona com seu comportamento na Cadeia de Markov. Um estado pode ser periódico em $\{X_n, T_n, L\}$ e aperiódico em $\{X_n, L\}$. A recíproca também pode aconte-

cer. O fato é que, no processo de renovação markoviano $\{X_n, T_n, L\}$ a periodicidade se relaciona ao tempo de volta a um mesmo estado, enquanto que na cadeia de Markov ela está ligada ao número de etapas necessárias para voltar ao estado inicial.

4.4 O estado j é conservativo se e só se, o processo iniciado em j faz somente um número finito de transições no intervalo $[0, t]$. Isto é:

$$j \text{ conservativo} \iff P\{N(t) < \infty | X_0 = j\} = 1 \quad t \in [0, \infty)$$

Os teoremas a seguir relacionarão a classificação de estados com a unicidade de soluções da equação de renovação markoviana.

4.5 Teorema:

O estado j é conservativo se e só se $A * H = H$, $0 \leq H \leq 1$, $H \in M$ implica $H_j(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração:

Observando os teoremas (3.27) e (3.28) notamos que se $x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n \cdot 1) = 0$ implica que $H_j(t) = 0$, $\forall t \geq 0$. Do fato de j ser conservativo vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k A_{jk}^{(n)}(t) = 0$. Portanto o teorema se resume a demonstrar:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k A_{jk}^{(n)}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \implies x_j = 0$$

$$(ii) \quad x_j = 0 \implies \lim_n \sum_k A_{jk}^{(n)}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

as implicações são facilmente demonstradas devido às funções envolvidas serem todas positivas e integráveis.

□

4.6 Teorema:

$H = A * H$, $H \in M$ implica $H = 0$ se e somente se todos os estados do processo de renovação markoviano induzido por A são conservativos.

Demonstração:

Segue imediatamente do teorema anterior. O presente teorema nada mais é do que uma generalização do teorema (4.5).

□

Daremos a seguir algumas proposições intuitivas, cujas demonstrações não oferecem dificuldade e serão omitidas.

4.7 Proposição:

Todos os estados recorrentes são conservativos. Todos os estados dissipativos são transitórios.

□

4.8 Proposição:

Se existe um estado dissipativo, então existem infinitos estados dissipativos que podem ser alcançados a partir de qualquer outro dissipativo.

□

4.9 Proposição:

Num processo de renovação markoviano com número finito de estados transitórios, não há estados dissipativos.

4.10 Proposição:

Num processo de renovação markoviano os estados podem ser unicamente divididos em classes J_1, J_2, J_3 onde cada estado em J_1 é recorrente, cada estado em J_2 é conservativo transitório e cada estado em J_3 é dissipativo.

Vamos agora, deduzir a expressão para a função distribuição do tempo de 1.^a passagem. Seja $\{X_n, T_n, L\}$ um processo de renovação normal. Os instantes $\{T_n : X_n = k\}$ formam um processo de renovação (possivelmente atrasado). Assim, a 1.^a vez que o processo está em k é chamada de tempo de 1.^a passagem ao estado k em $\{X_n, T_n, L\}$. Seja:

T_1^k : o tempo de 1.^a renovação no k -ésimo processo de renovação.

assim a função de distribuição do tempo de 1.^a passagem ao estado k , dado $X_0 = j$, será:

$$F_{jk}(t) = P(T_1^k \leq t \mid X_0 = j)$$

em particular

$$F_{kk}(t) = P(T_1^k \leq t \mid X_0 = k)$$

indica a função de distribuição do tempo entre 2 renovações no k -ésimo processo de renovação.

Considerando o k -ésimo processo de renovação podemos relacionar o número esperado de renovações com a função distribuição do tempo de renovações. Assim,

$$(4.11) \quad R_{kk}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{kk}^{(n)}(t)$$

$$(4.12) \quad R_{jk}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{jk}(t) * F_{kk}^{(n)}(t) = F_{jk}(t) * R_{kk}(t) \quad , \quad j \neq k$$

onde $F_{kk}^{(n)}(t)$ é a n -ésima convolução de $F_{kk}(t)$.

Chamando de $f_{jk}(\lambda)$ a transformada de Laplace de $F_{jk}(t)$ temos, para $\lambda > 0$:

$$(4.13) \quad r_{jk}(\lambda) = \begin{cases} [1 - f_{kk}(\lambda)]^{-1} & , \quad j = k \\ f_{jk}(\lambda) \cdot [1 - f_{kk}(\lambda)]^{-1} & , \quad j \neq k \end{cases}$$

e então:

$$(4.14) \quad f_{jk}(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{r_{kk}(\lambda)} & j = k \\ r_{jk}(\lambda) / r_{kk}(\lambda) & j \neq k \end{cases}$$

A determinação da função de distribuição do tempo de 1.^a visita será útil na discussão dos casos limites, como veremos a se

guir.

5. Comportamento Limite

Nesta secção serão apresentados os fatos mais importantes relativos ao comportamento limite do processo de renovação markoviano. Alguns resultados apresentados vem diretamente da Teoria da Renovação e suas demonstrações podem ser encontradas em Çinlar (5).

Sendo $R_{ij}(\cdot)$ a função de renovação do processo $\{X_n, T_n, L\}$ e F_{ij} a função de distribuição do tempo de 1.^a visita a j partindo de i , temos, ver (4.12), para j transitório e $i \neq j$

$$(5.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R_{ij}(t) = F_{ij}(\infty) \cdot R_{jj}(\infty) = \tilde{F}_{ij} \cdot \tilde{R}_{jj}$$

o qual é exatamente o número esperado de visitas a j na cadeia de Markov imersa com estado inicial i .

Para j recorrente aperiódico,

$$(5.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [R_{ij}(t) - R_{ij}(t - \tau)] = \tau \tilde{F}_{ij} \eta(j)$$

onde $\eta(j)$ é o inverso do valor esperado do tempo entre 2 retornos ao estado j . No caso de j ser recorrente periódico, com período δ , (5.2) continuará válida desde que, τ seja múltiplo de δ .

Antes de apresentarmos o teorema que permite o cálculo de $\eta(j)$, enunciaremos o seguinte lema:

5.3 Lema:

Sendo $\mu(i,j)$ o número esperado de visitas a j entre 2 visitas a i , temos:

$$(5.4) \quad \mu(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} P_i \{N > n, X_n = j\}$$

onde

$$(5.5) \quad N = \inf \{n > 1, X_n = i\}$$

Demonstração:

Chamemos de Y o número de visitas a j entre 2 visitas a i .

$$E_i [Y] = P_i (Y = 1) + 2P_i (Y = 2) + \dots$$

omitindo o índice i por comodidade, temos que:

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(N = 2, X_1 = j) + P(N = 3, X_1 \neq j, X_2 = j) + \\ &+ P(N = 3, X_1 = j, X_2 \neq j) + P(N = 4, X_1 = j, \\ &X_2 \neq j, X_3 \neq j) + P(N = 4, X_1 \neq j, X_2 = j, X_3 \neq j) + \\ &+ P(N = 4, X_1 \neq j, X_2 \neq j, X_3 = j) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2P(Y=2) &= 2P(N=3, X_1=j, X_2=j) + 2P(N=4, X_1=j, \\ &X_2=j, X_3 \neq j) + 2P(N=4, X_1 \neq j, X_2=j, X_3=j) + \\ &+ 2P(N=4, X_1=j, X_2 \neq j, X_3=j) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3P(Y=3) &= 3P(N=4, X_1=j, X_2=j, X_3=j) + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Chamando de C_N as contribuições à esperança para N fixo, temos:

$$\text{para } N=2 \quad C_2 = P(N=2, X_1=j)$$

$$\begin{aligned} \text{para } N=3 \quad C_3 &= P(N=3, X_1 \neq j, X_2=j) + \\ &+ P(N=3, X_1=j, X_2 \neq j) + 2P(N=3, X_1=j, X_2=j) \end{aligned}$$

lembrando que

$$\begin{aligned} &P(N=3, X_1=j) + P(N=3, X_2=j) - P(N=3, X_1=j, X_2=j) = \\ &= P \left[(N=3, X_1=j) \cup (N=3, X_2=j) \right] = P(N=3, X_1=j, \\ &X_2=j) + P(N=3, X_1 \neq j, X_2=j) + P(N=3, X_1=j, X_2 \neq j) \end{aligned}$$

portanto

$$C_3 = P(N=3, X_1=j) + P(N=3, X_2=j)$$

para $N = 4$

$$\begin{aligned} C_4 = & P(N=4, X_1=j, X_2 \neq j, X_3 \neq j) + P(N=4, X_1 \neq j, \\ & X_2=j, X_3 \neq j) + P(N=4, X_1 \neq j, X_2 \neq j, X_3=j) + \\ & + 2P(N=4, X_1=j, X_2=j, X_3 \neq j) + 2P(N=4, \\ & X_1=j, X_2 \neq j, X_3=j) + 2P(N=4, X_1 \neq j, X_2=j, \\ & X_3=j) + 3P(N=4, X_1=j, X_2=j, X_3=j) \end{aligned}$$

lembrando que:

$$\begin{aligned} & P(N=4, X_1=j, X_2 \neq j, X_3 \neq j) + P(N=4, X_1 \neq j, X_2=j, X_3=j) + \\ & + P(N=4, X_1 \neq j, X_2 \neq j, X_3=j) + P(N=4, X_1=j, X_2=j, X_3 \neq j) + \\ & + P(N=4, X_1=j, X_2 \neq j, X_3=j) + P(N=4, X_1 \neq j, X_2=j, X_3=j) + \\ & + P(N=4, X_1=j, X_2=j, X_3=j) = \\ & = P \left[(N=4, X_1=j) \cup (N=4, X_2=j) \cup (N=4, X_3=j) \right] = \\ & = P(N=4, X_1=j) + P(N=4, X_2=j) + P(N=4, X_3=j) - \\ & - 2P(N=4, X_1=j, X_2=j) - 2P(N=4, X_1=j, X_3=j) - \\ & - 2P(N=4, X_2=j, X_3=j) + P(N=4, X_1=j, X_2=j, X_3=j) \end{aligned}$$

portanto:

$$C_4 = P(N=4, X_1=j) + P(N=4, X_2=j) + P(N=4, X_3=j)$$

repetindo o mesmo argumento e somando todos os C_N , o Lema fica demonstrado.

O próximo Teorema, fornecerá uma maneira de calcular os $\eta(i)$ diretamente. É suficiente considerar a classe irredutível que contém i .

5.6 Teorema:

Supondo $\{X_n, T_n, L\}$ um processo de renovação irredutível recorrente e ν uma medida invariante, isto é, ν será a solução de:

$$(5.7) \quad \sum_{i \in E} \nu(i) \cdot \tilde{A}_{ij} = \nu(j) \quad , \quad j \in J$$

então o inverso do tempo médio de recorrência ao estado i em $\{X_n, T_n, L\}$ é

$$(5.8) \quad \eta(i) = \frac{\nu(i)}{\nu m} \quad , \quad i \in J$$

onde

$$m(j) = E_j [T_1] = \int_0^\infty [1 - \sum_k A_{jk}(t)] dt$$

Antes de iniciarmos a demonstração, vamos ressaltar alguns aspectos importantes do enunciado.

- (i) o sistema de equações (5.7) tem somente uma solução (a menos de multiplicação por constante).

- (ii) v_m em (5.8) é o produto do vetor linha v com o vetor coluna m , isto é: $v_m = \sum_j v(j) m(j)$.
- (iii) o quociente $v(j)/v(i)$ é interpretado como o número esperado de visitas a j entre 2 visitas a i . Portanto $\mu(i,j)=v(j)/v(i)$
- (iv) o tempo médio de recorrência em (5.8) é interpretado como a soma, para todos os estados j , do tempo médio gasto em j , entre dois retornos a i . Cada termo j é o produto de $v(j)/v(i)$ pelo tempo médio de espera $m(j)$ em cada visita a j .

Demonstração:

Seja a o tempo médio de recorrência de i , então $\eta(i)=1/a$.

Vamos definir:

$$(5.9) \quad m(j,k) = E \left[T_{n+1} - T_n \mid X_n=j, X_{n+1}=k \right], \quad j,k \in J$$

então

$$(5.10) \quad a = \tilde{A}_{ii} m(i,i) + \sum_{j \in D} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}_{ji} [m(i,j) + m(j,i)] + \\ + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}_{jk} \tilde{A}_{ki} [m(i,j) + m(j,k) + m(k,i)] + \dots$$

onde $D = J - \{i\}$.

Vamos reescrever esta expressão, levando em conta separadamente os tempos gastos na primeira, na última e nas transições intermediárias (ver apêndice). Sendo N como definido em (5.5), temos:

$$\begin{aligned}
 (5.11) \quad a = & \tilde{A}_{ii} m(i, i) + \sum_{j \in D} \tilde{A}_{ij} m(i, j) \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_j(N=n) \right] + \\
 & + \sum_{j \in D} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(N > n, X_n = j) \tilde{A}_{ij} m(j, i) + \\
 & + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{r-1} P_i(N > n, X_n = j) \tilde{A}_{jk} m(j, k) P_k(N = r-n)
 \end{aligned}$$

trocando a ordem de soma no último termo, ele torna-se igual a:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \tilde{A}_{jk} m(j, k) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=n+1}^{\infty} P_i(N > n, X_n = j) P_k(N = r-n) = \\
 & = \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \tilde{A}_{jk} m(j, k) \sum_{n=1}^{\infty} P_i(N > n, X_n = j) \sum_{r=n+1}^{\infty} P_k(N = r-n)
 \end{aligned}$$

Voltando a expressão (5.11), lembrando que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_j(N=n) = \tilde{F}_{ji} = 1$$

pois a cadeia é irredutível recorrente, e aplicando (5.4) temos:

$$\begin{aligned}
 a = & \tilde{A}_{ii} m(i, i) + \sum_{j \in D} \tilde{A}_{ij} m(i, j) + \sum_{j \in D} \mu(i, j) \tilde{A}_{ij} m(j, i) + \\
 & + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \mu(i, j) \tilde{A}_{jk} m(j, k)
 \end{aligned}$$

notando que

$$m(j) = \sum_{k \in J} \tilde{A}_{jk} m(j, k)$$

e substituindo $\mu(i,j)$ por $v(j)/v(i)$ vem:

$$\begin{aligned} a &= \tilde{A}_{ii} m(i,i) + m(i) - A_{ii} m(i,i) + \\ &+ \sum_{j \in D} \frac{v(j)}{v(i)} \tilde{A}_{ji} m(j,i) + \sum_{j \in D} \frac{v(j)}{v(i)} \left[m(j) - \tilde{A}_{ji} m(j,i) \right] \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{v(i)} \sum_{j \in J} v(j) m(j) \end{aligned}$$

Como $\eta(i) = \frac{1}{a}$ o teorema está demonstrado. □

Encerrando esta secção, vamos estudar agora, o comportamento limite da solução da equação de renovação. Para o caso onde o espaço amostral é finito apresentaremos o resultado com a respectiva demonstração, no caso de infinitos estados a demonstração será omitida, podendo ser encontrada em Çinlar(5).

5.12 Proposição:

Seja $\{X_n, T_n, L\}$ um processo de renovação markoviano irreduzível e aperiódico com um espaço amostral J , finito. Então:

$$\begin{aligned} (5.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} \int_0^t R_{ij}(ds) G_j(t-s) &= \\ &= \frac{1}{v_m} \sum_j v(j) \int_0^\infty G_j(s) ds \end{aligned}$$

onde cada função $G_j(\cdot)$ é diretamente integrável Riemann.

Demonstração:

Como J é finito, (5.13) pode ser reescrita como:

$$(5.14) \quad \sum_{j \in J} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R_{ij}(ds) G_j(t-s)$$

Temos por (4.12) $R_{ij}(\cdot) = F_{ij}(\cdot) * R_{jj}(\cdot)$ e como $G_j(\cdot)$ é diretamente integrável Riemann, a convolução $F_{ij}(\cdot)$ com $G_j(\cdot)$ também o será. Aplicando o Teorema da Renovação (ver apêndice) com $R = R_{jj}(\cdot)$ e $G = F_{ij}(\cdot) * G_j(\cdot)$ obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R_{ij}(ds) G_j(t-s) &= \eta(j) \int_0^\infty ds \int_0^s F_{ij}(d\mu) G_j(t-\mu) = \\ &= \eta(j) \int_0^\infty G_j(s) ds, \text{ onde } F_{ij}(\infty) = 1 \end{aligned}$$

pois o processo é irreduzível recorrente. Substituindo nesta última expressão o valor de $\eta(j)$ dado por (5.8) a proposição fica demonstrada.

5.15 Proposição:

Seja $\{X_n, T_n, L\}$ um processo de renovação markoviano irreduzível recorrente, seja v uma possível solução de $v = vP$ e seja $m(i)$ o tempo médio de permanência no estado i . Se $G \in D_v$, onde D_v denota a classe das funções diretamente integráveis em relação a v , então:

$$(5.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} \int_0^t R_{ij}(ds) G_j(t-s) = \frac{1}{vm} \int_0^\infty v G(s) ds$$

no caso aperiódico e

$$(5.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} \int_0^{x+n\delta} R_{ij}(ds) G_j(t-s) = \frac{\delta}{vm} \sum_{k=0}^\infty v G(x - \delta_{ij} + k\delta)$$

no caso onde os estados são periódicos, com período δ e δ_{ij} é o primeiro ponto de salto da função $F_{ij}(\cdot)$.

□

6. Processos Semi-Markovianos

Dedicaremos esta secção a um estudo sucinto dos Processos Semi-Markovianos. O tratamento dado, partirá da teoria já desenvolvida para os Processos de Renovação Markovianos.

Como antes, seja A uma matriz semi-markoviana sobre algum espaço de estados J , $A^{(n)}$ sua n -ésima convolução, $R = \sum_n A^{(n)}$ é a matriz de renovação markoviana associada e ainda $B = \text{diag}\{B_1, B_2, \dots\}$ onde $B_j = \sum_k A_{jk}$, $\tilde{B} = B(\infty)$.

Sejam (Ω, F, P) um espaço de probabilidade e $\{X_n, T_n, L\}$ o processo de renovação markoviano induzido por A . Para $\omega \in \Omega$ definimos:

$$(6.1) \quad Z(\omega) = \sup_{0 < n < L(\omega)} T_n(\omega);$$

$$(6.2) \quad M(t, \omega) = \sup \{n: T_n(\omega) < t\}; \quad 0 < t < Z(\omega)$$

$$(6.3) \quad X(t, \omega) = X_{M(t, \omega)}(\omega); \quad 0 \leq t < Z(\omega)$$

Observamos que $M(t)$ e $X(t)$ são definidos somente sobre o conjunto $\{Z > t\}$; e que Z , $M(t)$, $X(t)$ são variáveis aleatórias sobre (Ω, F, P) . Como $\{X_n, T_n, L\}$ pode ser entendido como uma cadeia de Markov a duas dimensões, vale a propriedade forte de Markov.

6.4 Definição:

$\{X(t), Z\}$ é chamado de processo semi-markoviano induzido por A . Observamos ainda que:

- Ω : é o espaço amostral,
- $X(t)$: é o estado sendo visitado no instante t ,
- Z : é o instante de término do processo,
- $M(t)$: é o número total de saltos em $[0, t]$,
- L : é o número total de saltos que pode ser feito.

□

O processo $\{X(t), Z\}$ será um processo de Markov, se sua matriz semi-markoviana tiver a seguinte forma:

$$A_{ij}(t) = \tilde{A}_{ij} \left[1 - e^{-\lambda(i) \cdot t} \right]$$

para todo $i, j \in J$; $t \geq 0$ e para alguma função $\lambda(i)$, $i \in J$. Caso contrário, ele é não markoviano e o nome semi-markoviano vem de algumas restrições à propriedade de Markov. Por exemplo, o futuro de $X(t)$ dado o presente é independente do passado, desde que o presente seja um instante de salto.

Denotaremos por P_j a medida de probabilidade condicionada sobre $X_0=j$, isto é: $P_j\{.\} = P\{.\mid X_0=j\}$. Definimos para cada $j,k \in J$ e $t \geq 0$,

$$(6.5) \quad P_{jk}(t) = P_j\{X(t) = k\}$$

a probabilidade de transição no processo $\{X(t), Z\}$.

6.6 Proposição:

As probabilidades de transição $P_{ij}(t)$ de um processo semi-markoviano $\{X(t), Z\}$ satisfazem a seguinte equação de renovação:

$$(6.7) \quad P_{jk}(t) = \delta_{jk}(B_j(\infty) - B_j(t)) + \sum_v \int_0^t A_{jv}(dy) \cdot P_{vk}(t-y)$$

Demonstração:

Notamos que $\{X(t) = k\}$ é um subconjunto de $\{Z > t\}$. Por sua vez, o evento $\{Z > t\}$ pode ser escrito como a união disjunta dos eventos $\{T_1 \leq t, Z > t\}$ e $\{T_1 > t, L > 1\}$ pois $\{T_1 > t, L > 1\} = \{t < T_1 < Z\}$ temos, então:

$$P_{jk}(t) = P_j\{X(t)=k, T_1 > t, L > 1\} + P_j\{X(t)=k, T_1 \leq t\}$$

se $T_1 > t$ e $L > 1$ então $X(t) = X(0) = j$. Por outro lado se $T_1 \leq t$ então o processo alcança algum estado intermediário v num tempo y entre 0 e t e em $t-y$ alcança k . Esses argumentos nos conduzem imediatamente a demonstração de (6.7)

Chamando de $P(t)$, a matriz formada pelos $P_{jk}(t)$ podemos reescrever (6.7) em notação matricial:

$$(6.8) \quad P(t) = \tilde{B} - B(t) + \int_0^t A(dy) P(t-y)$$

onde as matrizes $\tilde{B}$ e $B(t)$ são tais que $(\tilde{B} - B(t))_{jj} = \tilde{B}_j - B_j(t)$ e $(\tilde{B} - B(t))_{jk} = 0$ para $j \neq k$; $k, j \in J$.

6.9 Teorema:

A equação de renovação (6.7) tem uma solução que é dada por:

$$(6.10) \quad P_{jk}(t) = \int_0^t R_{jk}(dy) \cdot (\tilde{B}_k - B_k(t-y)); \quad j, k \in J, \quad t \geq 0$$

Para que esta solução seja única, é necessário e suficiente que todos os estados sejam conservativos.

Demonstração:

Cada coluna de (6.8) satisfaz uma equação de renovação do tipo definido em (3.2).

A j -ésima coluna de $\tilde{B} - B(t)$ é nula exceto na j -ésima linha, onde vale: $B_j(\infty) - B_j(t) \leq 1 - B_j(t) = 1 - \sum_k A_{jk}(t)$. Aplicando o teorema (3.10) demonstramos que a solução $P = R * (\tilde{B} - B)$ existe e que $P(t) \cdot 1 \leq 1$ para todo t . As condições da unicidade estão no teorema (4.6) e completam a demonstração.

Para encerrar esta secção, vamos explicar a natureza da desigualdade $\sum_k P_{jk}(t) \leq 1$. Para tal lembremos que o instante do término do processo pode ser finito em 2 situações:

(i) 0 número total de etapas é finito então $Z = T_{L-1}$

Neste caso temos:

$$\begin{aligned} P_j\{Z \leq t, L = n+1\} &= P_j\{T_n \leq t, L = n+1\} = \\ &= \sum_k P_j\{X_n = k, T_n \leq t, L = n+1\} = \\ &= \sum_k P_j\{L = n+1 | X_n = k, T_n \leq t\} \cdot P_j\{X_n = k, T_n \leq t\} = \\ &= \sum_k P_j\{X_n = k, T_n \leq t\} \cdot P_k\{L = 1\} = \\ &= \sum_k A_{jk}^{(n)}(t) \cdot (1 - \tilde{B}_k) \end{aligned}$$

Somando para todo n nós obtemos:

$$(6.11) \quad P_j\{Z \leq t, L < \infty\} = \sum_k R_{jk}(t) \cdot (1 - \tilde{B}_k)$$

e isto é a expressão da probabilidade, condicionada ao estado inicial j , do processo terminar antes de t após fazer um número finito de transições.

(ii) $L = \infty$ mas $\sup T_n = Z < \infty$

A probabilidade do processo terminar antes de t , após um número infinito de etapas, (ver 3.33) vale:

$$(6.12) \quad F_j(t) = P_j\{Z \leq t, L = \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k A_{jk}^{(n)}(t)$$

□

Vamos expressar a diferença $1 - \sum_k P_{jk}$ tomando em consideração as duas situações descritas acima. Para tal, escrevemos:

$$\tilde{B}_k - B_k(t) = 1 - B_k(t) - (1 - \tilde{B}_k)$$

e substituímos em (6.10) obtendo:

$$P_{jk}(t) = \int_0^t R_{jk}(dy) \cdot (1 - B_k(t-y)) - R_{jk}(t) \cdot (1 - \tilde{B}_k)$$

somando para todo k e observando que:

$$\sum_k \int_0^t R_{jk}(dy) \cdot (1 - B_k(t-y)) = \left[R * (1 - B_k) \right]_j(t)$$

com

$$\begin{aligned} R * (1 - B_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n A^{(m)} * (1 - B_k) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=0}^n (A^{(m)} * 1 - A^{(m+1)} * 1) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - A^{(n+1)} * 1 \right] = \end{aligned}$$

$$= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} * 1$$

obtemos então:

$$\sum_k P_{jk}(t) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} * 1 - \sum_k R_{jk}(t) \cdot (1 - \tilde{B}_k)$$

donde

$$1 - \sum_k P_{jk}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} * 1 + \sum_k R_{jk}(t) \cdot (1 - \tilde{B}_k)$$

lembrando (6.11) e (6.12) vem:

$$(6.13) \quad 1 - \sum_k P_{jk}(t) = P_j\{Z \leq t, L = \infty\} + P_j\{Z \leq t, L < \infty\}$$

Se para cada j , $\sum_k \tilde{A}_{jk} = \tilde{B}_j = 1$ então $L = \infty$ com probabilidade 1. Neste caso: $1 - \sum_k P_{jk}(t) = P_j\{Z \leq t, L = \infty\} = F_j(t)$.

Como F é a solução maximal de 3.12 (ver 3.27) portanto a solução de 6.7 dada por 6.10 é minimal. Se $F \neq 0$ é possível construir outras soluções analíticas para 6.7. O lema abaixo sintetiza o aspecto mais importante dessa discussão.

6.14 Lema:

Supondo $\tilde{A}1 = 1$. Então a solução da equação 6.7 dada por 6.10 é única se e só se ela é estritamente estocástica, isto é, $\sum_k P_{jk}(t) = 1$ para todo t .

Comparando com o teorema 6.9, observamos que $\sum_k p_{jk}(t) = 1$ se e somente se todos os estados são conservativos.

7. Processos Semi-Regenerativos

Um processo estocástico $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ é chamado regenerativo, se existem certos tempos aleatórios formando um processo de renovação, onde em cada um desses tempos o futuro de Z é uma réplica probabilística do próprio processo. Tais tempos aleatórios são chamados tempos de regeneração de Z . O processo semi-regenerativo pode ser obtido do enfraquecimento das condições apresentadas para o processo regenerativo, isto é, o futuro após o tempo de regeneração depende também do estado de um processo de renovação markoviano nesse instante.

7.1 Definição:

Seja $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ um processo estocástico com espaço de estados topológico F , e suponha que a função $t \rightarrow Z_t(\omega)$ é contínua à direita e limitada à esquerda para todo ω . Uma variável aleatória $T: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ é chamada uma regra de parada para Z se para todo $t \in \mathbb{R}_+$, a ocorrência ou não do evento $\{T \leq t\}$ pode ser determinada unicamente pelo conhecimento da história de Z antes de t , $\{Z_\mu; \mu \leq t\}$. Se T é uma regra de parada para Z , nós denotamos por $\{Z_\mu; \mu \leq T\}$ a história de Z antes de T .

7.2 Definição:

O processo Z é dito ser semi-regenerativo se existe um processo de renovação markoviano $\{X_n, T_n, L\}$ com tempo de vida infinito, tal que:

- (a) para cada $n \in \mathbb{N}$, T_n é uma regra de parada para Z .
- (b) para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n é determinado por $\{Z_\mu; \mu > T_n\}$.
- (c) para cada $n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$ e função f definida sobre F^m ,

$$(7.3) \quad E_i \left[f(Z_{T_n+t_1}, \dots, Z_{T_n+t_m}) \mid Z_\mu; \mu \leq T_n \right] = \\ = E_j \left[f(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m}) \right] \text{ sobre } \{X_n = j\}$$

onde E_i e E_j referem-se as esperanças, condicionadas ao estado inicial, na cadeia de Markov $\{X_n, L\}$.

□

Para entendermos melhor a natureza dos processos semi-regenerativos, faremos um breve comentário sobre as condições da definição. A condição (a) nos diz que um observador que conhece Z até o instante t , pode informar se T_n ocorreu ou não. A condição (b) garante, a um observador de Z até o instante T_n , o conhecimento de X_n . A condição (c) é a mais importante. Ela considera uma variável aleatória $W_n = f(Z_{T_n+t_1}, \dots, Z_{T_n+t_m})$ função dos valores de Z nos instantes futuros. O lado esquerdo de (7.3) é a esperança condicional de W_n para um observador que conhece o processo até o instante

T_n (ainda mais, conhece T_n e X_n em adição a todas as outras informações que possui). Para um segundo observador que toma T_n como o tempo inicial, a variável W_n inicia-se como $W_0 = f(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m})$ e mais, se $X_n = j$, sua estimativa de W_0 é $E_j[W_0]$; a qual é o lado direito de (7.3). O processo é semi-regenerativo se os dois observadores têm igual resposta, isto é, a informação extra do 1º observador sobre o passado de Z é desnecessária para prever o futuro do processo.

Todos os processos de Markov e todos os processos semi-markovianos são semi-regenerativos. O processo de fila $M|G|1$ não é um processo de Markov nem semi-markoviano mais é semi-regenerativo, o mesmo acontecendo com $G|M|1$. Esses exemplos justificam plenamente a inclusão desta secção no nosso trabalho.

Vamos denotar por $P_t(i, A) = P_i\{Z_t \in A\}$ a probabilidade de, partindo de i , o processo estar no conjunto A após um tempo t . Os principais resultados, que nos permitem o cálculo dessa probabilidade de transição, serão dados abaixo.

7.4 Proposição:

Seja Z um processo semi-regenerativo com espaço de estados F , seja $\{X_n, T_n, L\}$ um processo de renovação markoviano com espaço de estados J imerso em Z e sejam A e R as matrizes semi-markoviana e de renovação markoviana, respectivamente, correspondentes a $\{X_n, T_n, L\}$. Então a probabilidade de transição $P_t(i, A)$, com ACF, do processo semi-regenerativo, obedece a seguinte equação de renova-

$$(7.5) \quad P_t(i, A) = k_t(i, A) + \sum_{j \in J} \int_0^t A_{ij}(ds) P_{t-s}(j, A)$$

onde

$$k_t(i, A) = P_i\{Z_t \in A, T_1 > t\} ; i \in J, t \geq 0$$

Demonstração:

De modo análogo ao feito na proposição (6.6), podemos condicionar $P_t(i, A)$ ao instante da 1.^a visita ter se dado antes, ou de pois de t .

Assim,

$$(7.6) \quad P_t(i, A) = P_i\{Z \in A, T_1 > t\} + P_i\{Z \in A, T_1 \leq t\}$$

o 1º membro do lado direito é $k_t(i, A)$, para o 2º membro temos:

$$P_i\{Z \in A, T_1 \leq t\} = E_i \left[I_{(0, t)}(T_1) \cdot P_i\{Z \in A | Z_\mu; \mu \leq T_1\} \right]$$

aplicando (7.3) vem:

$$P_i\{Z_t \in A | Z_\mu; \mu \leq T_1\} = P_{t-T_1}(X_1, A) \quad \text{sobre } \{T_1 \leq t\}$$

portanto:

$$\begin{aligned} P_i\{Z \in A, T_1 \leq t\} &= E_i \left[I_{(0, t)}(T_1) \cdot P_{t-T_1}(X_1, A) \right] = \\ &= \sum_{j \in J} \int_0^t A_{ij}(ds) P_{t-s}(j, A) \end{aligned}$$

substituindo em (7.6) a proposição fica demonstrada.

7.7 Teorema:

A equação de renovação (7.5) tem uma única solução que é dada por:

$$(7.8) \quad P_t(i, A) = \sum_{j \in J} \int_0^t R_{ij}(ds) k_{t-s}(j, A)$$

Demonstração:

Que (7.8) é solução, segue do teorema (3.10). A unicidade vem do teorema (3.24), de (3.33) e (3.34) e da definição (7.2).

Um estudo mais completo dos processos semi-regenerativos, pode ser encontrado em Çinlar (5).

CAPÍTULO 2

DISTRIBUIÇÃO DE VEÍCULOS PARA ATENDIMENTOS DE EMERGÊNCIA

1. Introdução

Discutiremos neste capítulo, o trabalho feito por Willian K. Hall com o título "The Application of Multifunction Stochastic Service Systems in Allocating Ambulances to an Urban Area"(11).

O objetivo central do autor é discutir uma possível política alternativa para a distribuição de ambulâncias na cidade de Detroit, Michigan. Sabemos como é importante o transporte rápido e adequado de vítimas em acidentes, a diminuição do tempo de atendimento e traslado pode em muitos casos ser o fator decisivo na vida ou morte de uma pessoa. Como acontece em algumas grandes cidades americanas (e em particular em Detroit) as chamadas são atendidas por veículos com dupla função (socorro médico ou policial). Assim a disponibilidade para atender uma ocorrência médica pode ser prejudicada pelo aumento (que é o que vinha acontecendo) das chamadas

policiais. A cidade de Detroit está dividida geograficamente em 30 distritos, cada um tendo certo número de veículos, com dupla função, para atendimento. Cada ocorrência registrada pela central de comunicações do distrito é enviada a um determinado veículo. Não há prioridade no atendimento, isto é, o primeiro a chegar é o primeiro a ser servido.

Dentro dessa política geral de atendimento, foram colhidos dados em 2 distritos, especialmente escolhidos por suas caracterísisticas representativas do conjunto, durante 1 mês (18/11 a 15/12/68). A pesquisa teve por base 2 fontes:

- (a) A central de comunicações do distrito, com as seguintes informações:
 - (1) Horário de chegada da emergência;
 - (2) Natureza da emergência;
 - (3) Localização da emergência;
 - (4) Número do distrito e da área de cobertura do veículo despachado;
 - (5) Horário do despacho;
 - (6) Horário em que o atendimento se completou.
- (b) O motorista que atendeu a ocorrência médica, que prestou as seguintes informações:
 - (1) Tempo e distância até o local da emergência;
 - (2) Tempo de atendimento no local;
 - (3) Tempo e distância até o hospital;
 - (4) Tempo para internação no hospital.

2. Análise de Dados

A análise foi conduzida inicialmente com os dados de cada distrito e como as diferenças encontradas não foram significativas as conclusões e tabelas abaixo apresentadas referem-se aos dados con juntos dos dois distritos.

A sequência dos tempos de ocorrências foi analisada separa damente com o cuidado de determinar:

- (a) A existência e natureza de tendências na série de dados;
- (b) A existência e natureza de interdependências entre séries onde já foi retirada uma eventual tendência;
- (c) A natureza da distribuição marginal do tempo entre ocorrências sucessivas (e da distribuição conjunta de tais tempos se forem encontrados em (b) interdependências significativas).

Os resultados dessas análises estão apresentadas na tabela 2.1..

Tabela 2.1: Análise Estatística do Processo de Ocorrências Isoladas

	Ocorrências de emerg. médicas	Ocorrências de emerg. policiais
Tendência observada no tempo entre eventos	Nenhuma	Tend. diária removida anali- sando separadamente os perío- dos: 0-8h e 8-24h
Autocorrelação observa- da nos tempos entre e eventos	Nenhuma	Nenhuma - Quando removida a tendência diária
Prop. especiais da Dist do tempo entre os eventos	Nenhuma	Nenhuma
Distribuição marginal do tempo entre even- tos	Gama com média μ e coef. de variação k	Exponencial negativa com pa- rametro λ_1 : (0 - 8h) e λ_2 : (8 - 24h)
Estimador de máx. veros- similhança dos parâ- metros.	$\hat{k} = 1,15$ $\hat{\mu} = 101\text{min}$	$\hat{\lambda}_1 = 1/42,7$ $\hat{\lambda}_2 = 1/17,2$

Analizando o processo de ocorrências conjuntas, 2 fatos me recem nossa atenção. Em 1º lugar observamos que o tempo entre 2 ocorrências sucessivas depende do tipo dessas ocorrências. Um 2º aspecto observado na análise é, o de que existe uma probabilidade constante de ocorrer uma chamada médica ou policial. Esses 2 fatos, aparentemente contraditórios, podem ser melhor explicados da seguinte forma. A probabilidade da próxima ocorrência ser médica ou policial independe do tipo da última ocorrência, porém o intervalo de tempo que se esperará para a próxima ocorrência depende da atual e da próxima. Realiza-se um ensaio de Bernoulli para escolher o tipo da próxima ocorrência, uma vez escolhido, o tempo de espera para sua chegada é função da ocorrência atual e do tipo escolhido para a próxima chegada.

Utilizando-se de técnicas desenvolvidas por Moore e Pyke (14) chegou-se à tabela 2.2, onde os índices 0 e 1 referem-se a chamadas médicas ou policiais respectivamente:

Tabela 2.2: Análise Estatística do Processo de Ocorrências Conjuntas

	Tempo de espera entre emergências sucessivas i e j	Ocorrências de emergências
Distrib. de Probab.	Exp. negativa com média λ_{ij}	Bernoulli com parâmetros π : médicas $1-\pi$: policiais
Estim. de máxima verossimilhança.	$\hat{\lambda}_{00} = 1/14,3$ $\hat{\lambda}_{01} = 1/16,2$ $\hat{\lambda}_{10} = 1/23,1$ $\hat{\lambda}_{11} = 1/14,6$	$\hat{\pi} = 0,214$ $1-\hat{\pi} = 0,786$

Os tempos de serviço para chamadas médicas e policiais foram analisados separadamente buscando uma compreensão melhor desses processos. A relação entre distância e tempo de percurso foi analisada exaustivamente em chamadas médicas devido a importância dessa relação na política de distribuição dos veículos. As análises indicaram separar a distribuição do tempo de serviço médico em duas : serviços realizados em distâncias inferiores a 1 milha e aqueles em que a distância do veículo até o local da emergência é maior do que 1 milha. A tabela 2.3 sintetiza os estudos feitos.

Tabela 2.3: Análise Estatística do Processo de Serviço

	Emerg. médicas	Emerg. policiais
Propriedades especiais da distribuição	Condicionar para distâncias maiores ou menores que 1 milha	Nenhuma
Distribuição marginal	Exp. negativa com parâmetros: α : menor que 1 milha β : maior que 1 milha	Exp. Negativa com parâmetro γ
Estim. de máxima verossimilhança dos parâmetros	$\hat{\alpha} = 1/18,4$ $\hat{\beta} = 1/20,5$	$\hat{\gamma} = 1/38,3$

3. Modelo Desenvolvido

Tendo em vista as secções anteriores, o modelo a ser desenvolvido precisará levar em conta 3 etapas: chegada, seleção de atendimento e serviço.

Das considerações da secção anterior, suporemos que as che

gadas se dão segundo um processo de renovação markoviano $\{Z_n, X_n, n \geq 1\}$ onde:

Z_n : tipo da n-ésima ocorrência

$Z_n=0$ ocorrência médica

$Z_n=1$ ocorrência policial

X_n : intervalo entre a (n-1)ésima

ma e a n-ésima ocorrência

A matriz semi-markoviana $A_{ij}(x)$ é calculada a seguir:

$$\begin{aligned} (3.1) \quad A_{ij}(x) &= P(Z_n=j, X_n \leq x | Z_{n-1}=i) \\ &= P(X_n \leq x | Z_{n-1}=i, Z_n=j) \cdot P(Z_n=j | Z_{n-1}=i) \\ &= (1 - e^{-\lambda_{ij}x}) \cdot \pi_j \end{aligned}$$

onde

$$\pi_j = \begin{cases} \pi & \text{se } j=0 \\ 1-\pi & \text{se } j=1 \end{cases}$$

portanto

$$(3.2) \quad A_{ij}(x) = \begin{bmatrix} \pi \cdot (1 - e^{-\lambda_{00}x}) & (1-\pi) \cdot (1 - e^{-\lambda_{01}x}) \\ \pi \cdot (1 - e^{-\lambda_{10}x}) & (1-\pi) \cdot (1 - e^{-\lambda_{11}x}) \end{bmatrix}$$

Vamos introduzir agora um mecanismo que nos permita fixar a política de atendimento.

Seja S_n^k o estado do k-ésimo veículo do distrito no instante da n-ésima emergência:

$$S_n^k = \begin{cases} 0 & , \text{ o veículo está livre} \\ 1 & , \text{ o veículo está ocupado com emergência policial} \\ 2 & , \text{ o veículo está ocupado com emergência médica} \\ & \text{ com distância inferior a 1 milha} \\ 3 & , \text{ o veículo está ocupado com emergência médica} \\ & \text{ com distância superior a 1 milha} \end{cases}$$

para $k = 1, 2, 3, \dots, r$; onde r é o número de veículos do distrito.

3.3 Definição: Chamamos selecionador à variável aleatória Y_n que assume os seguintes valores:

$$Y_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se a n-ésima emergência não será atendi} \\ & \text{da} \\ (k, \ell) & , \text{ se a n-ésima emergência for enviada ao} \\ & \text{veículo K, onde receberá serviço tipo } \ell \\ & \text{(para } \ell = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Para conseguirmos caracterizar completamente o comportamento de Y_n precisamos conhecer o tipo de emergência Z_n e a situação do conjunto de veículos do distrito na época de chegada $\bar{S}_n = \{S_n^1, S_n^2, \dots, S_n^r\}$.

Com o objetivo de simplificar a notação, denotamos por G o conjunto de todos os valores assumidos por Y_n , cujos elementos serão indicados por g seja

$$(3.4) \quad \begin{aligned} b_g(i, s_1, s_2, \dots, s_r) &= b_g(i, \bar{S}) = \\ &= P\{Y_n = g | Z_n = i, S_n^1 = s_1, \dots, S_n^r = s_r\} \end{aligned}$$

com $g \in G$; $i = 0, 1$; $s_k = 0, 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \dots, r$. Isto equivale dizer que b_g é uma regra de seleção aleatorizada. Nos interessa escolher uma regra de seleção que seja "ótima" sob algum critério a ser fixado. Por exemplo, um tipo de seleção incluído na classe que acabamos de definir é aquele que aceita chamados até a capacidade do sistema ou tal que a partir de um determinado nível de ocupação do sistema só aceita uma porcentagem das chamadas policiais que chegam, deixando livre os carros que restam para somente atender emergências médicas.

Como os tempos de serviço tem distribuição exponencial negativa com parâmetro B_ℓ ($\ell = 0, 1, 2, 3$), o estado $\bar{S}_n$ do sistema no instante da n -ésima chegada só depende de S_{n-1} , X_n e Y_{n-1} . Contudo, Y_{n-1} depende somente de Z_{n-1} e $\bar{S}_{n-1}$. Ainda, dado X_n , Z_{n-1} e $\bar{S}_{n-1}$, a estrutura probabilística de $\bar{S}_n$ é completamente determinada. Devido ao fato de $\{X_n, Z_n, n \geq 1\}$ ser um processo de renovação markoviano, sua estrutura probabilística depende somente de Z_{n-1} . Destas observações vem imediatamente.

3.5 Teorema:

O processo de dimensão $(r+2)$, $\{S_n^1, S_n^2, \dots, Z_n, X_n, n \geq 1\}$, é equivalente a um processo de renovação markoviano cuja matriz semi-markoviana é dada por:

$$(3.6) \quad Q(j, \bar{t}, x, \bar{s}, i) = \\ = P\{Z_n = j, \bar{S}_n = \bar{t}, X_n \leq x | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}\}$$

e

3.7 Corolário:

O processo de dimensão $(r+1)$, $\{S_n^1, S_n^2, \dots, S_n^r; n \geq 1\}$ é uma cadeia de Markov caracterizada pela probabilidade de transição:

$$(3.8) \quad P\{Z_n = j, \bar{S}_n = \bar{t} | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}\}$$

e ainda

3.9 Corolário:

O processo de dimensão r , $\{S_n^1, S_n^2, \dots, S_n^r\}$ é uma cadeia de Markov se e somente se o processo de chegada é um Processo de Renovação Markoviano de ordem zero ($A_{ij}(x) = A_j(x)$) ou um processo de renovação (um único tipo de emergência).

Vamos nos ocupar até o fim desta secção com o cálculo de $Q(j, \bar{t}, x, i, \bar{s})$, para tal, seja:

$$(3.10) \quad r_g(\bar{t}, \bar{s}, x) = \\ = P\{\bar{S}_n = \bar{t} | \bar{S}_{n-1} = \bar{s}, Y_{n-1} = g, X_n = x\}, g \in G$$

Devido a independência entre os tempos de serviço nos r veículos,

esta relação pode ser escrita como:

$$(3.11) \quad \Gamma g(\bar{t}, \bar{s}, \bar{x}) = \prod_{k=1}^r \phi_g(t_k, s_k, x)$$

onde

$$(3.12) \quad \phi_g(t_k, s_k, x) = P\{S_n^k = t_k | S_{n-1}^k = s_k, Y_{n-1} = g, X_n = x\}$$

$k = 1, \dots, r$

Duas situações precisam ser analisadas para definir $\phi_g(t_k, s_k, x)$.

Caso 1:

A (n-1)ésima emergência foi enviada ao veículo k requerendo serviço tipo ℓ . ($Y_{n-1} = g = (k, \ell)$).

Neste caso, o veículo i estava livre na época da (n-1)ésima emergência, isto é, $S_{n-1}^i = 0$. Portanto S_n^i pode ser 0 ou ℓ dependendo do serviço já ter sido completado ou não no intervalo entre as ocorrências. Portanto:

$$(3.13) \quad \phi_g(t_k, 0, x) = \begin{cases} e^{-B_\ell x} & , \text{ para } t_k = \ell \\ 1 - e^{-B_\ell x} & , \text{ para } t_k = 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Caso 2:

A (n-1)ésima emergência não foi enviada para o k-ésimo veículo em serviço ($Y_{n-1} \neq g = (k, \ell)$).

Neste caso, se $S_{n-1}^k = 0$ então $S_n^k = 0$ com probabilidade 1. Por outro lado, se o k-ésimo veículo estava servindo uma emergência do tipo h, ($S_{n-1}^k = h$), então $S_n^k = 0$ ou $S_n^k = h$ dependendo se o serviço foi ou não completado antes da n-ésima ocorrência. Portanto:

$$(3.14) \quad \phi_g(t_k, 0, x) = \begin{cases} 1 & , \text{ para } t_k = 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

ou

$$(3.15) \quad \phi_g(t_k, h, x) = \begin{cases} e^{-\beta_h x} & , t_k = h \\ 1 - e^{-\beta_h x} & , t_k = 0 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Lembrando a definição e propriedades da esperança condicional, podemos reescrever a expressão (3.6) como segue:

$$(3.16) \quad E\{1_{\{Z_n = j, \bar{S}_n = t, X_n \leq x\}} | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}\} = \\ = \int_0^x P\{\bar{S}_n = \bar{t} | Z_n = j, X_n = x, Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}\} \cdot dP\{Z_n = j, X_n \leq x | Z_{n-1} = i, S_{n-1} = s\}$$

como o processo de chegada $\{Z_n, X_n\}$ é independente do processo de serviço e ainda a estrutura probabilística de S_n depende somente de Z_n, S_{n-1} e X_n , a expressão acima será igual a:

$$(3.17) \quad \int_0^x \dot{P}\{\bar{S}_n = \bar{t} | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}, X_n = x\} \cdot dP\{Z_n = j, X_n \leq x | Z_{n-1} = i\}$$

como:

$$\begin{aligned} & P\{\bar{S}_n = \bar{t} | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}, X_n = x\} = \\ &= \sum_{g \in G} P\{\bar{S}_n = \bar{t}, Y_{n-1} = g | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}, X_n = x\} = \\ &= \sum_{g \in G} P\{\bar{S}_n = \bar{t} | Y_{n-1} = g, Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}, X_n = x\} \cdot \\ & \quad \cdot P\{Y_{n-1} = g | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}, X_n = x\} \end{aligned}$$

então, pelos comentários precedentes ao teorema (3.5) temos:

$$\begin{aligned} (3.18) \quad & P\{\bar{S}_n = \bar{t} | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}, X_n = x\} = \\ &= \sum_{g \in G} P\{\bar{S}_n = \bar{t} | Y_{n-1} = g, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}, X_n = x\} \cdot \\ & \quad \cdot P\{Y_{n-1} = g | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}\} \end{aligned}$$

substituindo (3.4), (3.10) e (3.11) em (3.18) obtemos:

$$(3.19) \quad P\{\bar{S}_n = \bar{t} | Z_{n-1} = i, \bar{S}_{n-1} = \bar{s}, X_n = x\} =$$

$$= \sum_{g \in G} b_g(i, \bar{s}) \cdot \prod_{k=1}^r \phi_g(t_k, s_k, x)$$

Por outro lado, da expressão (3.1) podemos escrever

$$(3.20) \quad dP\{Z_n = j, X_n \leq x | Z_{n-1} = i\} = dA_{ij}(x)$$

Finalmente, substituindo (3.19) e (3.20) em (3.17) obtemos:

$$(3.21) \quad Q(j, \bar{t}, x, \bar{s}, i) = \\ = \sum_{g \in G} b_g(i, \bar{s}) \int_0^x \prod_{k=1}^r \phi_g(t_k, s_k, x) dA_{ij}(x)$$

onde $i, j = 0, 1$; $s_k, t_k = 0, 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \dots, r$; $g \in G$. Fazendo em (3.21), $x \rightarrow \infty$ obtemos a probabilidade de transição, em uma e tapa, na cadeia de Markov imersa $\{\bar{S}_n, Z_n\}$.

$$(3.22) \quad \bar{Q}(j, \bar{t}, \bar{s}, i) = \\ = \int_0^\infty \sum_{g \in G} b_g(i, \bar{s}) \prod_{k=1}^r \phi_g(t_k, s_k, x) dA_{ij}(x)$$

4. Conclusões

A partir da distribuição de equilíbrio da cadeia de Mar kov imersa, é possível calcular a probabiliade de se ter um ou ma is veículos livres, no instante de ocorrência de uma emergência mé

dica. Isto pode ser feito interpretando a distribuição estacionária, como a fração de tempo que o processo permanece em cada estado.

Observando a equação (3.22), percebemos que a única função ainda não definida é exatamente $b_g(i, \bar{s})$, a qual está diretamente vinculada ao selecionar Y_n . Essa função é afetada pelo número de veículos designados e sua política de distribuição dentro do distrito. O desempenho do sistema, tendo como regra de seleção o atendimento em ordem de chegada com o veículo livre mais próximo, foi calculado para 1, 2, 3 e 4 veículos por distrito e três diferentes políticas de distribuição:

- (a) veículos designados para as regiões de maior demanda do distrito.
 - (b) veículos distribuídos "uniformemente" em todo o distrito.
 - (c) veículos concentrados na central de comunicações do distrito.
- Percebeu-se que a disponibilidade para chamadas médicas é fortemente afetada pelo número de veículos do distrito, como mostra a tabela abaixo:

Tabela 4.1:

Probabilidade de um ou mais veículos estarem livres no instante de uma chamada médica.

Número de veículos	Probabilidade
1	0,789
2	0,976
3	0,998
4	1,000

Porém essa disponibilidade, declina como função da porcentagem de chamadas policiais aceitas para serviço (ver figura 4.2). Contudo pode-se amenizar esse declínio, aumentando o número de veículos por distrito. Por outro lado modificando-se o selecionador, para atender somente 10% das chamadas policiais quando somente um veículo estiver livre (as restantes são atendidas por despachos protetivos de carros-patrolha) obtemos um rendimento que pode dispensar o aumento de veículos, conforme constata-se na figura abaixo:

Figura 4.2:

Disponibilidade do veículo dual para atender chamadas médicas em função da porcentagem de chamadas policiais aceitas.

Constatou-se ainda que, a probabilidade de um ou mais veículos estarem livres, no instante de uma chamada médica, não é praticamente afetada pela distribuição dos veículos no distrito. Quando se distingue atendimento com distância inferior ou superior a 1 milha, isto se altera. Colocando-se os veículos em sub-regiões de maior demanda, obtem-se uma probabilidade ligeiramente superior à correspondente para a distribuição uniforme dos veículos na região e, bem superior do que aquela obtida, quando os veículos estão concentrados numa única estação.

Tabela 4.3:

Crescimento na probabilidade de responder uma emergência médica, requerendo distância menor que 1 milha, quando os veículos são designados a sub-regiões de maior demanda.

Número de <u>ve</u> ículos	Crescimento sobre a política unif. (%)	Crescimento sobre a polít. de concentração (%)
1	28,4	—
2	15,2	80,5
3	11,7	69,4

Novamente aqui, como era de se esperar, o crescimento diminuiu a medida que o número de veículos no distrito é maior.

Com base nesses resultados numéricos, o autor recomenda para a cidade de Detroit um sistema com 2 veículos para cada distrito. A locação de apenas 1 veículo não providenciaria uma disponibilidade satisfatória e num sistema com 3 ou 4, o 3º e 4º veículos te

rão uma capacidade ociosa muito grande. Baseado em considerações qualitativas, considerou-se como bastante satisfatório termos 95% de disponibilidade para atendimento médico em um sistema de 2 veículos com uma só função e mais de 90% para sistemas com 2 veículos de função dual com despachos policiais protetivos.

Recomendou-se ainda, uma distribuição dos veículos em várias estações. A escolha entre as políticas de distribuição uniforme ou de distribuição em regiões de maior demanda, foi deixada à decisão da cidade, com base em outras considerações uma vez que as duas tem performances semelhantes.

Um aperfeiçoamento desse modelo seria considerar a possibilidade de um veículo, sob certas condições, atender emergências em distritos vizinhos. Uma sugestão foi encaminhada as autoridades no sentido de testar a performance de 3 veículos para cada 2 distritos dando um total de 22 veículos para a cidade de Detroit.

As conclusões do trabalho serviram para as autoridades municipais rearrajarem seu sistema de veículos duais, diminuindo o seu número por distrito e obtendo simultaneamente uma mais efetiva atuação nas ocorrências médicas.

Apêndice 1

Processo de Renovação

Para um determinado fenomeno consideremos $W_1, W_2 \dots$ os tempos entre suas sucessivas ocorrências. Podemos então definir os tempos de ocorrência como sendo:

$$(1) \quad S_0 = 0 \quad S_{n+1} = S_n + W_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

onde o instante inicial é tomado como o instante de uma ocorrência.

A sequência $S = \{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ é chamada um Processo de Renovação, desde que $W_1, W_2 \dots$ sejam variáveis aleatórias não negativas independentes e identicamente distribuídas. Cada S_n é chamado de tempo de Renovação do Processo.

Vamos designar por F a distribuição do tempo entre renovações e por N_t o número de renovações em $[0, t]$. O número esperado de renovações será:

$$(2) \quad R(t) = E(N_t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^n(t)$$

onde F^n indica a n -ésima convolução de F . $R(t)$ é chamada da função de Renovação correspondente a F .

3 Definição:

O Processo de Renovação S é dito recorrente se $W_n < \infty$ qua se certamente para todo n ; caso contrário, S é chamado transitório. S é periódico com período δ se as variáveis aleatórias $W_1, W_2, \dots$ tomam valores no conjunto enumerável $\{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ e δ é o maior número com essa propriedade. Caso contrário, se não existe $\delta > 0$, S é dito aperiódico.

□

4 Teorema:

Se S é recorrente aperiódico então:

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [R(t+\tau) - R(t)] = \frac{\tau}{m}$$

para todo $\tau > 0$, onde $m = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt$ indica o valor esperado do tempo entre sucessivas renovações.

Se S é recorrente periódico com período δ , então o teorema vale se τ é múltiplo de δ .

□

6 Proposição:

Se S é transitório então:

$$(7) \quad P\{L \leq t\} = (1 - F(\infty)) \cdot R(t); \quad t \geq 0$$

onde

$$L = \sup\{S_n : S_n < \infty\}$$

$$e \quad F(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$$

8 Teorema:

Supondo g uma função limitada sobre intervalos finitos .
Existe uma e só uma função f dominada sobre intervalos finitos que
satisfaz:

$$(9) \quad f = g + F * f$$

esta função é

$$(10) \quad f = R * g$$

No estudo dos Processos de Renovação a expressão (9), co-
nhecida como equação da renovação, ocupa papel de destaque.

O Teorema Fundamental da Renovação, enunciado a seguir ,
calcula o limite da solução de (9). Para tal, denotemos por D o
conjunto das funções diretamente integráveis Riemann. Como antes ,
 m representará o valor esperado do tempo entre sucessivas renova-
ções.

11 Teorema:

Se $g \in D$, $F(\infty) = 1$ e F é não aritmética, então:

$$(12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R * g(t) = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} g(y) dy$$

Se F é aritmética com vão δ e $\sum_{k=0}^{\infty} g(x+k\delta)$ converge, então:

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R * g(x+n\delta) = \frac{\delta}{m} \sum_{k=0}^{\infty} g(x+k\delta)$$

Apêndice 2

Passagem da expressão (5.10) para (5.11) no capítulo 1

As expressões (5.10) e (5.11) são as seguintes:

$$(5.10) \quad a = \bar{A}_{ii} m(i, i) + \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{ji} [m(i, j) + m(j, i)] + \\ + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{ki} [m(i, j) + m(j, k) + \\ + m(k, i)] + \dots$$

$$(5.11) \quad a = \bar{A}(i, i) m(i, i) + \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} m(i, j) \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_j(N=n) \right] + \\ + \sum_{j \in D} \sum_{n=1}^{\infty} P_i\{N > n, X_n = j\} \bar{A}_{ji} m(j, i) + \\ + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{r-1} P_i\{N > n, X_n = j\} \bar{A}_{jk} m(j, k) \cdot \\ \cdot P_k(N = r-n)$$

A demonstração será feita identificando cada um dos 4 têrmos do lado direito de (5.11) com têrmos de (5.10).

O 1º têrmo é trivialmente identificado e não necessita comentários.

Para o 2º têrmo, vamos somar em (5.10) todos os têrmos que contribuem com $m(i, j)$ (o tempo de espera em i antes de uma transição a j). Assim:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{ji} m(i, j) + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{ki} m(i, j) + \\
 & + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{\ell i} m(i, j) + \dots = \\
 & = \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} m(i, j) \bar{A}_{ji} + \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} m(i, j) \cdot \left(\sum_{k \in D} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{ki} \right) + \\
 & + \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} m(i, j) \cdot \left(\sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{k\ell} \bar{A}_{\ell i} \right) + \dots = \\
 & = \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} m(i, j) \cdot P_j(N=1) + \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} m(i, j) \cdot P_j(N=2) + \\
 & + \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} m(i, j) P_j(N=3) + \dots = \\
 & = \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} m(i, j) \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_j(N=n) \right] \\
 & \quad \quad \quad (2^\circ \text{ t\^er}mo \text{ de } 5.11)
 \end{aligned}$$

O 3º têrmo será obtido da soma de todos os termos $m(., i)$

na expressão (5.10), onde $m(., i)$ indica o tempo de espera no pe núltimo estado antes de saltar para i . Assim:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{ji} m(j, i) + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{ki} m(k, i) + \\
 & + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{k\ell} \bar{A}_{\ell i} m(\ell, i) + \dots = \\
 & = \sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{ji} m(j, i) + \sum_{k \in D} \left(\sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \right) \bar{A}_{ki} m(k, i) + \\
 & + \sum_{\ell \in D} \left(\sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{k\ell} \right) \bar{A}_{\ell i} m(\ell, i) + \dots = \\
 & = \sum_{j \in D} P_i \{N > 1, X_1 = j\} \bar{A}_{ji} m(j, i) + \sum_{k \in D} P_i \{N > 2, X_2 = k\} \cdot \\
 & \cdot \bar{A}_{ki} m(k, i) + \sum_{\ell \in D} P_i \{N > 3, X_3 = \ell\} \cdot \bar{A}_{\ell i} m(\ell, i) + \\
 & + \dots = \sum_{j \in D} \sum_{n=1}^{\infty} P_i \{N > n, X_n = j\} \cdot \bar{A}_{ji} m(j, i) \\
 & \quad \quad \quad (3^\circ \text{ termo de 5.11})
 \end{aligned}$$

Das parcelas restantes em (5.10) obtemos o 4º termo de (5.11) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{ki} m(j, k) + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{k\ell} \bar{A}_{\ell i} m(j, k) \\
 & + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{k\ell} \bar{A}_{\ell i} m(k, \ell) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \sum_{r \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{k\ell} \bar{A}_{\ell r} \bar{A}_{ri} \cdot m(j, k) \\
 & + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \sum_{r \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{k\ell} \bar{A}_{\ell r} \bar{A}_{ri} m(k, \ell) + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \sum_{r \in D} \bar{A}_{ij} \cdot \\
 & \cdot \bar{A}_{jk} \cdot \bar{A}_{k\ell} \cdot \bar{A}_{\ell r} \cdot \bar{A}_{ri} m(\ell, r) + \dots = \\
 & = \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \cdot m(j, k) \cdot A_{ki} + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \bar{A}_{ij} \cdot \bar{A}_{jk} \cdot \\
 & \cdot m(j, k) \cdot \left(\sum_{\ell \in D} \bar{A}_{k\ell} \cdot \bar{A}_{\ell i} \right) + \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \left(\sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} \cdot \bar{A}_{jk} \right) \cdot \\
 & \cdot \bar{A}_{k\ell} m(k, \ell) \cdot \bar{A}_{\ell i} + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \bar{A}_{ij} \cdot \bar{A}_{jk} \cdot m(j, k) \cdot \\
 & \cdot \left(\sum_{\ell \in D} \cdot \sum_{r \in D} \cdot \bar{A}_{k\ell} \cdot \bar{A}_{\ell r} \cdot \bar{A}_{ri} \right) + \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} \left(\sum_{j \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \right) \cdot \bar{A}_{k\ell} \cdot \\
 & \cdot m(k, \ell) \cdot \left(\sum_{r \in D} \bar{A}_{\ell r} \bar{A}_{ri} \right) + \\
 & + \sum_{\ell \in D} \sum_{r \in D} \left(\sum_{j \in D} \sum_{k \in D} \bar{A}_{ij} \bar{A}_{jk} \bar{A}_{k\ell} \right) \cdot \bar{A}_{\ell r} m(\ell, r) \cdot \bar{A}_{ri} + \\
 & + \dots = \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} P_i \{N > 1, X_1 = j\} \cdot \bar{A}_{jk} m(j, k) \cdot P_k(N = 1) + \\
 & + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} P_i \{N > 1, X_1 = j\} \cdot \bar{A}_{jk} \cdot m(j, k) \cdot P_k(N = 2) + \\
 & + \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} P_i \{N > 2, X_2 = k\} \cdot \bar{A}_{k\ell} m(k, \ell) \cdot P_\ell(N = 1) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} P_i \{N > 1, X_1 = j\} \cdot \tilde{A}_{jk} m(j, k) \cdot P_k(N = 3) + \\
 & + \sum_{k \in D} \sum_{\ell \in D} P_i \{N > 2, X_2 = k\} \tilde{A}_{k\ell} m(k, \ell) \cdot P_\ell(N = 2) + \\
 & + \sum_{\ell \in D} \sum_{r \in D} P_i \{N > 3, X_3 = \ell\} \cdot \tilde{A}_{\ell r} m(\ell, r) \cdot P_r(N = 1) + \dots
 \end{aligned}$$

Nesta última expressão vamos somar esses termos, mantendo a mesma ordem, da seguinte forma:

$$1^\circ + (2^\circ + 3^\circ) + (4^\circ + 5^\circ + 6^\circ) + (7^\circ + 8^\circ + 9^\circ + 10^\circ +) \dots$$

obtendo:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^1 \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} P_i \{N > n, X_n = j\} \cdot \tilde{A}_{jk} m(j, k) \cdot P_k(N = 2-n) + \\
 & + \sum_{n=1}^2 \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} P_i \{N > n, X_n = j\} \cdot \tilde{A}_{jk} m(j, k) \cdot P_k(N = 3-n) + \\
 & + \sum_{n=1}^3 \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} P_i \{N > n, X_n = j\} \cdot \tilde{A}_{jk} m(j, k) \cdot P_k(N = 4-n) + \dots = \\
 & = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{r-1} \sum_{j \in D} \sum_{k \in D} P_i \{N > n, X_n = j\} \cdot \tilde{A}_{jk} m(j, k) \cdot P_k(N = r-n) \\
 & \hspace{15em} (4^\circ \text{ termo de 5.11})
 \end{aligned}$$

□

BIBLIOGRAFIA

- (1) ALLEN, David e BELL, Colin E. - "Optimal Planning of an Emergency Ambulance Service" - Socio-Econ. Plan. Science - Vol. 3, 95-101, (1969).
- (2) CHUNG, Kai L. - "A course in Probability Theory" - Hancourt , Brace & Word, Inc., New York, (1968).
- (3) COX, D.R. - "Renewal Theory" - Wiley, New York, (1962).
- (4) ÇINLAR, Erhan - "Markov Renewal Theory" - Adv. Appl. Probability 1; 123-187, (1969).
- (5) ÇINLAR, Erhan - "Introduction to Stochastic Processes" - Englewood Cliffs Prentice Hall, (1975).
- (6) ÇINLAR, Erhan - "Markov Renewal Theory: A survey" - Management Science - Vol. 21 n° 7, (1975).
- (7) ÇINLAR, Erhan - "Time dependence of queue with Semi-Markovian Service" - J. Appl. Prob. 4; 356-364, (1967).
- (8) ÇINLAR, Erhan - "Queue with Semi-Markovian arrivals" - J. Appl. Prob. 4; 365-379, (1967).
- (9) FELLER, W. - "An Introduction to Probability Theory and its Applications 1 and 2" - Wiley, New York, (1967 e 71).

- (10) FINI, Maria Eliza - "Sobre a Teoria dos Processos de Renovação" - Tese de Mestrado IME-USP, (1974).
- (11) HALL, Willian K. - "The Application of Multifunction Stochastic Service Systems in Allocating Ambulances to an Urban Area"- Operations Research, Baltimore 20(3); 558-570, (1972).
- (12) HALL, Willian K. - "The determination of optimal customer selection and allocation policies for finite queus in parallel" - Working Paper, nº 34 - Univ. Of. Michigan, (1971),
- (13) HALL, Willian K. e DISNEY, Ralph L. - "Finite Queus in parallel under a generalized channel selection rule" - J. Appl. Prob. 8; 413-416, (1971).
- (14) MOORE, E. H. PYKE, R. - "Estimation of the Transition Distributions of a Markov Renewal Processes" - Boeing Scientific Research Labs., (1964).
- (15) SMITH, Walter L. - "Renewal Theory and its Ramifications" - J. R. Statistics Soc. B., 20; 243-302, (1958).