**Passeios aleatórios estáveis em $\mathbb{Z}$
com taxas não-homogêneas e os
processos quase-estáveis**

Wagner Barreto de Souza

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu
auxílio financeiro da CAPES e do CNPq.

São Paulo, fevereiro de 2013

Passeios aleatórios estáveis em $\mathbb{Z}$ com taxas não-homogêneas e os processos quase-estáveis

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 18/12/2012. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Milton David Jara Valenzuela - IMPA
- Prof. Dr. Alberto Masayoshi Faria Ohashi - INSPER
- Prof. Dr. Élcio Lebensztayn - UNICAMP
- Prof. Dr. Fabio Julio da Silva Valentim - UFES

Agradecimentos

Ao concluir um trabalho, qualquer indivíduo que pensar em sua trajetória até tal ponto, vai enxergar várias pessoas que, de alguma forma, contribuíram para isto. Este é o caso de uma tese de doutorado e abaixo eu gostaria de expressar a minha gratidão à essas pessoas que estou enxergando agora.

Agradeço à minha amada e adorável esposa Alice Lemos de Moraes por todo carinho, companheirismo e amizade. Ela me acompanhou por todo esse período do doutorado e sempre me apoiou nos momentos difíceis. Espero que eu esteja ao lado dela até o último minuto de minha vida.

Gostaria de agradecer à minha mãe Roseane Barreto de Souza, meu pai Marcos Batista Nogueira de Souza e minha irmã Michelle Maria Barreto de Souza por todo carinho e incentivo aos meus estudos. Sou muito grato a eles por tudo que sou e muito do que aprendi nessa vida até o presente momento. Também agradeço à minha avó Maria Helena Barreto (in memoriam), minha avó Carminha, minha tia Sheila Barreto e família por todo carinho. Sou grato a toda minha família que torceu por mim.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Luiz Renato Gonçalves Fontes por ter aceitado me orientar e por tudo que aprendi com ele durante meu doutorado. Com certeza, esse período foi um dos mais valiosos da minha vida acadêmica.

Agradeço aos meus amigos de Recife: Rodrigo Bernardo, Alexandre Simas, Andréa Rocha, Saulo Leão e Ennio César. Mesmo com intervalos longos entre nossos encontros, quando nos reuníamos, a sensação é de que esses intervalos não tivessem sido maiores do que alguns poucos dias. Acho que isso descreve bem uma amizade sincera.

Aos meus amigos e colegas do IME-USP: Alice Lemos, Tiago Vargas, Joelmir Borssoi, Mariana Pereira, Fran Lima, Michel Helcias, Artur Lemonte, Manuel González,

Rodrigo Lambert e Jorge Torrejón, obrigado pelos momentos de descontração (incluindo o futebol).

Agradeço à família da Alice pela hospitalidade de quando me recebiam em Belo Horizonte, em especial à Marcia Lemos (mãe da Alice).

Aos professores da minha época de colégio, Joana Dar'c, Jorge e Fábio, agradeço por toda ajuda e incentivo que me foram dados.

Agradeço à Universidade de São Paulo pela oportunidade que me foi concedida de cursar o doutorado em Estatística.

Agradeço ao CNPq e à CAPES pelos auxílios financeiros.

Por fim, agradeço à banca por ter aceitado o convite de participar da minha defesa de doutorado e pelos comentários.

Resumo

Seja $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_t : t \geq 0, \mathcal{X}_0 = 0\}$ um passeio aleatório β -estável em $\mathbb{Z}$ com média zero e com taxas de saltos não-homogêneas $\{\tau_i^{-1} : i \in \mathbb{Z}\}$, com $\beta \in (1, 2]$ e $\{\tau_i : i \in \mathbb{Z}\}$ sendo uma família de variáveis aleatórias independentes com distribuição marginal comum na bacia de atração de uma lei α -estável, com $\alpha \in (0, 2]$. Nesta tese, obtemos resultados sobre o comportamento do processo $\mathcal{X}_t$ para tempos longos, em particular, obtemos seu limite de escala. Quando $\alpha \in (0, 1)$, o limite de escala é um processo β -estável mudado de tempo pela inversa de um outro processo, o qual envolve o tempo local do processo β -estável e um independente subordinador α -estável; chamamos o processo resultante de *processo quase-estável*. Para o caso $\alpha \in [1, 2]$, o limite de escala é um ordinário processo β -estável. Para $\beta = 2$ e $\alpha \in (0, 1)$, o limite de escala é uma quase-difusão com medida de velocidade aleatória estudada por Fontes, Isopi e Newman (2002) [13]. Outros resultados sobre o comportamento de $\mathcal{X}$ para tempos longos são *envelhecimento* e *localização*. Nós obtemos resultados de envelhecimento integrado e não-integrado para $\mathcal{X}$ quando $\alpha \in (0, 1)$. Relacionado à esses resultados, e possivelmente de interesse independente, consideramos o processo de armadilha definido por $\{\tau_{\mathcal{X}_t} : t \geq 0\}$, e obtemos seu limite de escala. Concluímos a tese com resultados sobre localização de $\mathcal{X}$. Mostramos que ele pode ser localizado quando $\alpha \in (0, 1)$, e que não pode ser localizado quando $\alpha \in (1, 2]$, assim estendendo os resultados de Fontes, Isopi e Newman (1999) [12] para o caso de passeios simples simétricos.

Palavras-chave: Passeios aleatórios β -estáveis; Lei α -estável; Processo α -estável; Modelo de armadilha; Limite de escala; Envelhecimento; Localização.

Abstract

Let $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_t : t \geq 0, \mathcal{X}_0 = 0\}$ be a mean zero β -stable random walk on $\mathbb{Z}$ with inhomogeneous jump rates $\{\tau_i^{-1} : i \in \mathbb{Z}\}$, with $\beta \in (1, 2]$ and $\{\tau_i : i \in \mathbb{Z}\}$ is a family of independent random variables with common marginal distribution in the basin of attraction of an α -stable law with $\alpha \in (0, 2]$. In this thesis we derive results about the long time behavior of this process, in particular its scaling limit. When $\alpha \in (0, 1)$, the scaling limit is a β -stable process time-changed by the inverse of another process, involving the local time of the β -stable process and an independent α -stable subordinator; the resulting process may be called a *quasistable process*. For the case $\alpha \in [1, 2]$, the scaling limit is an ordinary β -stable process. For $\beta = 2$ and $\alpha \in (0, 1)$, the scaling limit is a quasidiffusion with random speed measure studied by Fontes, Isopi and Newman (2002) [13]. Other results about the long time behavior of $\mathcal{X}$ concern *aging* and *localization*. We obtain integrated and non integrated aging results for $\mathcal{X}$ when $\alpha \in (0, 1)$. Related to these results, and possibly of independent interest, we consider the trap process defined as $\{\tau_{\mathcal{X}_t} : t \geq 0\}$, and derive its scaling limit. We conclude the thesis with results about localization of $\mathcal{X}$. We show that it localizes when $\alpha \in (0, 1)$, and does not localize when $\alpha \in (1, 2]$, extending results of Fontes, Isopi and Newman (1999) [12] for the simple symmetric case.

Keywords: β -stable random walks; α -stable law; α -stable process; Trap model; Scaling limit; Aging; Localization.

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Organização da tese	16
2	Suposições e o processo relógio	17
2.1	Acoplamento para o caso $\alpha \in (0, 1)$	20
3	Limite de escala	23
4	Envelhecimento	35
5	Processo de armadilha	41
5.1	Convergência	41
5.2	Envelhecimento não-integrado	44
6	Localização	47
7	Resultados sobre processos quase-estáveis	53

Lista de Figuras

2.1	Gráficos de trajetórias simuladas para o processo relógio rescalado $\tilde{C}_t^{(n)}$ para $\beta = 1.4$ e para alguns valores de α pertencentes ao intervalo $(0, 1)$.	21
2.2	Gráficos de trajetórias simuladas para o processo relógio rescalado $\tilde{C}_t^{(n)}$ para $\beta = 1.7$ e para alguns valores de α pertencentes ao intervalo $(0, 1)$.	22
3.1	Gráficos de trajetórias simuladas do passeio aleatório rescalado $\mathcal{X}_t^{(n)}$ para alguns valores de β e de α	25
5.1	Gráficos de trajetórias simuladas do processo de armadilha rescalado $\mathcal{E}_t^{(n)}$ para alguns valores de β e α	42

Capítulo 1

Introdução

Modelos de armadilha têm sido introduzidos na literatura física como simples modelos de sistemas desordenados em que os efeitos de memória com tempo longo, como envelhecimento e localização, podem ser estabelecidos e entendidos de forma rigorosa. Veja, por exemplo, [7, 9]. Muitos artigos matemáticos trataram sobre este assunto, dos quais, alguns são mencionados abaixo. A obtenção de limites de escala dos modelos é um tema comum nesses artigos.

De forma geral, um modelo de armadilha é um passeio aleatório em tempo contínuo em algum grafo regular com taxas aleatórias de transição. Geralmente, essas taxas são dadas em termos de variáveis aleatórias positivas com cauda pesada (também chamada de ambiente de armadilhas), o qual dá origem ao mecanismo de retenção que conduzem aos efeitos mencionados acima.

Os casos mais estudados na literatura matemática envolvem passeios aleatórios imersos, os quais são independentes do ambiente de armadilhas, e taxas inversas de saltos dadas por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com cauda pesada, vistas neste caso como as profundidades das armadilhas. Nestes casos, o modelo de armadilha é um passeio aleatório em tempo discreto com mudança de tempo.

Nesta tese, nos concentraremos em modelos de armadilha em $\mathbb{Z}$. No que segue, discutimos alguns modelos de armadilha em $\mathbb{Z}^d$, para $d \geq 1$, existentes na literatura. (Referências para casos de outros grafos, como o grafo completo ou o hipercubo, podem ser encontrados nas referências mencionadas abaixo.)

O caso simples simétrico em $d = 1$ foi estudado em [13], e um limite de escala foi obtido, do qual resultados de envelhecimento e localização seguiram. O caso simétrico em dimensões mais altas foi resolvido em [4, 3]. Em ambos os casos, o limite de escala é dado por uma mudança de tempo do movimento Browniano, com a mudança de tempo dependente do movimento Browniano em $d = 1$, mas não em $d \geq 2$. Funções de envelhecimento e localização assintóticas do modelo de armadilha são dadas em termos de esperanças de funcionais do limite de escala. Uma variação deste caso (simples simétrico) é o modelo *assimétrico*, um modelo com vizinhos mais próximos em que as taxas inversas de transições dependem de variáveis aleatórias com cauda pesada tanto na origem quanto nos sítios de destino. Resultados sobre limite de escala e envelhecimento foram obtidos em [2, 8, 1, 20]. O limite de escala é dado similarmente pela mudança de tempo de um movimento Browniano.

Uma outra variação vai na direção de permitir um passeio aleatório imerso genérico. Isto inclui o caso que será estudado nesta tese. Limite de escala e envelhecimento foram obtidos em [15] para o caso genérico sob a validade de uma Lei dos Grandes Números para o alcance do passeio imerso e variação lenta da cauda da distribuição de sua probabilidade de retorno. Estas suposições incluem todos os passeios aleatórios em $d \geq 2$. O processo considerado no artigo citado acima é o *processo de armadilha*, que é dado pela profundidade da armadilha visitada no momento. O limite de escala (o qual pode não existir na representação espacial do processo) é dado em termos de um subordinador mudado de tempo pela inversa de um outro subordinador correlacionado.

Nesta tese consideraremos o modelo em $\mathbb{Z}$, e assumimos que o passeio imerso é β -estável com média zero e com $\beta \in (1, 2]$. Esta suposição é bastante genérica e inclui uma grande classe de passeios. Esta suposição não está incluída naquelas assumidas em [15]. O modelo de [13], em que a cadeia imersa é um passeio aleatório simples simétrico, é um caso particular do modelo em que consideraremos nesta tese com $\beta = 2$. Nossa motivação aqui nesta tese é fechar uma lacuna deixada pelos artigos acima. (O caso em que $\beta \in (0, 1]$ está incluído em [15].) Nós derivaremos o limite de escala do processo (da versão espacial), o qual é dado em termos de um processo β -estável com mudança de tempo, e daí obteremos resultados de envelhecimento e localização para o modelo de armadilha em termos do limite de escala.

Chamamos este processo limite (dada a medida de velocidade aleatória referente

às armadilhas) de *quase-estável*, seguindo a terminologia de quase-difusões para o caso simples simétrico adotada na literatura (veja [13] e referências contidas lá); veja também [17]. Propriedades analíticas desses processos, como a existência e a continuidade das densidades de transição, foram cruciais na derivação de resultados de envelhecimento em [13]. Esses resultados também podem ser estendidos para a situação mais geral em que $\beta = 2$, mas não para $\beta \in (1, 2)$. Ao melhor de nosso conhecimento, resultados analíticos não existem para tais processos quase-estáveis. Sem esses resultados, nós podemos, no entanto, obter resultados de envelhecimento integrado.

Agora nós discutimos brevemente *envelhecimento* e *localização*. Seja $\mathcal{X}_t$ um processo estocástico genérico, o qual pode ser o nosso modelo de armadilha descrito acima. Considere $Q(t+s, t)$ uma função que depende de $\mathcal{X}_t$ em dois instantes de tempo. Nós a chamamos de *função de envelhecimento*. Dizemos que ocorre envelhecimento normal se existe uma função não-trivial $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ que é o limite de $Q(t+s, t)$ quando t e s vão para infinito proporcionalmente, ou seja,

$$\lim_{\substack{t, s \rightarrow \infty \\ t/s \rightarrow \theta}} Q(t+s, t) = \mathcal{Q}(\theta),$$

com $\theta > 0$. Este é o caso ordinário, não-integrado, oposto ao caso integrado, o qual nós discutimos agora. No caso integrado, consideramos tempos aleatórios $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$, os quais podem ser correlacionados entre si, mas independentes de $\mathcal{X}_t$, ao invés de tempos determinísticos t e s . Nós consideraremos uma função de envelhecimento dada por $Q(\mu\mathcal{T} + \lambda\mathcal{S}, \mu\mathcal{T})$, com $\mu, \lambda > 0$. Daí, envelhecimento normal integrado ocorre se existe uma função não-trivial $\bar{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\lim_{\substack{\mu, \lambda \rightarrow \infty \\ \mu/\lambda \rightarrow \theta}} E[Q(\mu\mathcal{T} + \lambda\mathcal{S}, \mu\mathcal{T})] = \bar{\mathcal{Q}}(\theta),$$

para $\theta > 0$, em que a esperança acima é tomada com respeito ao vetor aleatório $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. As funções de envelhecimento que consideraremos aqui para obter resultados de envelhecimento integrado e não-integrado são apresentadas nos Capítulos 4 e 5, respectivamente. Um resultado de envelhecimento integrado para uma escolha específica de Q segue do nosso limite de escala para $\mathcal{X}_t$.

Afim de obtermos um resultado de envelhecimento ordinário, estudaremos o processo de armadilha $\{\tau_{\mathcal{X}_t} : t \geq 0\}$. Primeiro obteremos um limite de escala para $\tau_{\mathcal{X}_t}$.

Daí, um resultado de envelhecimento não-integrado para uma escolha específica de Q seguirá.

Nós agora discutimos sobre *localização*. Dizemos que existe localização para um passeio aleatório em tempo contínuo $\mathcal{X}_t$ em um ambiente aleatório τ se

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} P(\mathcal{X}_t = i | \tau) \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

quando $t \rightarrow \infty$, para quase todo τ . Também dizemos neste caso que $\mathcal{X}_t$ pode ser localizado.

Se $\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{Z}} P(\mathcal{X}_t = i | \tau) = 0$ para quase todo τ , dizemos que ele não pode ser localizado ou que há ausência de localização. Como veremos em nosso caso, $\mathcal{X}_t$ pode ser localizado se $\alpha \in (0, 1)$. Quando $\alpha \in (1, 2]$, temos ausência de localização.

1.1 Organização da tese

Esta tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos as suposições que faremos para $\mathcal{X}_t$, alguns resultados conhecidos sobre passeios aleatórios β -estáveis em tempo discreto, e definimos o processo relógio, o qual tem um papel fundamental nesta tese. Além disto, apresentamos a ordem correta de magnitude do processo relógio. O limite de escala de $\mathcal{X}_t$ é obtido no Capítulo 3. No Capítulo 4, obtemos um resultado de envelhecimento integrado. No Capítulo 5, obtemos o limite de escala para nosso processo de armadilha $\tau_{\mathcal{X}_t}$ e apresentamos um resultado de envelhecimento não-integrado. No Capítulo 6, um estudo sobre localização é apresentado. Concluimos a tese com alguns resultados sobre o nosso limite de escala no Capítulo 7.

Capítulo 2

Suposições e o processo relógio

Seja $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_t : t \geq 0, \mathcal{X}_0 = 0\}$ um passeio aleatório em tempo contínuo com passeio imerso $X = \{X_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, X_0 = 0\}$ satisfazendo a seguinte representação estocástica:

$$X_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \quad (2.1)$$

para $n > 0$, em que $\{\varepsilon_j, j \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias discretas iid na bacia de atração de uma lei estável com índice $\beta \in (1, 2]$. A sequência em (2.1) é chamada de passeio aleatório β -estável (veja [18]); este processo também é conhecido como passeio aleatório de longo alcance. Além disso, assumimos que $E(\varepsilon_1) = 0$, e $E(e^{it\varepsilon_1}) = 1$ se e somente se t é múltiplo de 2π .

Esta suposição de estabilidade implica que existem constantes $c^- > 0$ e $c^+ > 0$ e uma função de variação lenta no infinito $h(\cdot)$ tais que

$$P(\epsilon_1 < -x) \sim x^{-\beta}(c^- + o(1))h(x)$$

e

$$P(\epsilon_1 > x) \sim x^{-\beta}(c^+ + o(1))h(x),$$

em que $f_1(x) \sim f_2(x)$ significa $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x)/f_2(x) = 1$. Segue que existe uma função de variação lenta positiva $v(\cdot)$ tal que

$$h(n^{1/\beta}v(n))v^{-\beta}(n) \longrightarrow 1, \text{ para } \beta \in (1, 2)$$

e

$$H(n^{1/2}v(n))v^{-2}(n) \longrightarrow 2(c^+ + c^-), \text{ para } \beta = 2,$$

quando $n \rightarrow \infty$, em que $H(z) = \int_{-z}^z x^2 dF(x)$; por exemplo, veja [16].

Seja $L(n, x) = \sum_{i=0}^n 1\{X_i = x\}$ o tempo local (tempo de ocupação) do passeio aleatório X , ou seja, o número de vezes que X visita o sítio x até o tempo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Defina as sequências

$$d_n = n^{1/\beta}v(n), \quad r_n = nd_n^{-1}, \quad (2.2)$$

e o tempo local rescalado e o passeio aleatório rescalado

$$\phi_n(t, x) = r_n^{-1}L([nt], [xd_n]), \quad Z_t^{(n)} = d_n^{-1}X_{[nt]}, \quad (2.3)$$

para $t \in [0, \infty)$ e $x \in \mathbb{R}$. É bem conhecido que o processo $Z_t^{(n)}$ converge fracamente em $D([0, \infty), \mathbb{R})$ munida com a topologia J_1 para Z_t , que é um processo estável contínuo pela direita com função característica dada por

$$E(e^{isZ_t}) = \exp\{-ct|s|^\beta[1 + iq \operatorname{sgn}(s)]\}, \quad (2.4)$$

em que $c = -\Gamma(2 - \beta)(\beta - 1)^{-1} \cos(\pi\beta/2)$ e $q = (c^- - c^+) \tan(\pi\beta/2)/(c^+ + c^-)$. Para o processo Z_t , existe um tempo local: ou seja, existe uma função $\phi(t, x)$ que é contínua em t e x com probabilidade 1 e satisfaz

$$\mathcal{L}(s : Z_s \in A, 0 \leq s \leq t) = \int_A \phi(t, x) dx,$$

para qualquer conjunto Boreliano A , em que $\mathcal{L}$ denota a medida de Lebesgue; veja Boylan (1964) [5].

Para definir completamente nosso modelo de armadilha $\mathcal{X}_t$, precisamos definir suas taxas de saltos associadas. Seja $\tau = \{\tau_i : i \in \mathbb{Z}\}$ uma família de variáveis aleatórias positivas iid na bacia de atração de uma lei estável com índice $\alpha \in (0, 2]$. Mais especificamente, para $\alpha \in (0, 1)$, assumimos que a distribuição de τ_0 satisfaz a condição

$$P(\tau_0 > x) \sim x^{-\alpha}(\kappa^+ + o(1))s(x), \quad (2.5)$$

com $x > 0$, em que $\kappa^+ > 0$ e $s(\cdot)$ é uma função positiva de variação lenta. Daí, segue que existe uma função positiva de variação lenta $w(\cdot)$ tal que

$$s(d_n^{1/\alpha}w(n))w^{-\alpha}(n) \longrightarrow 1, \quad (2.6)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Para $\alpha \in [1, 2]$, supomos, por simplicidade, que a distribuição de τ_0 é dada por

$$P(\tau_0 > x) = x^{-\alpha}, \quad (2.7)$$

para $x \geq 1$. Supomos que τ é independente de X . Nós tomamos a taxa de salto de $\mathcal{X}$ em $i \in \mathbb{Z}$ como sendo τ_i^{-1} . Portanto, o passeio aleatório β -estável X (em tempo discreto) dado em (2.1) e a família τ satisfazendo (2.5) e (2.7) para α pertencente aos intervalos $(0, 1)$ e $[1, 2]$, respectivamente, definem completamente o modelo de armadilha $\mathcal{X}_t$ que consideraremos nesta tese.

Com as definições acima, estamos prontos para introduzir o processo relógio. Tal processo é definido por

$$C_t = \sum_{i=0}^{[t]} \tau_{X_i} T_i, \quad (2.8)$$

em que $\{T_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ é uma sequência de variáveis exponenciais iid com média 1 independente de X e τ .

Temos que o processo relógio (2.8) é igual em distribuição ao processo

$$\bar{C}_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_i \sum_{j=1}^{L([t], i)} E_{ij}, \quad (2.9)$$

em que $\{E_{ij} : i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ é uma família de variáveis exponenciais iid com média 1 e independente de todas as variáveis aleatórias definidas previamente; nós aqui definimos $\sum_{j=1}^0 E_{ij} = 0$.

Para nossos propósitos nesta tese, o limite de escala do processo relógio terá um papel importante. Portanto, agora apresentamos a ordem correta de magnitude deste processo, a qual depende de β e α . Começamos com o caso $\alpha \in [1, 2]$. Defina uma sequência de números reais positivos $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ por

$$c_n = \begin{cases} n \log n & \text{se } \alpha = 1, \\ n & \text{se } \alpha \in (1, 2]. \end{cases} \quad (2.10)$$

Para $\alpha \in [1, 2]$, definimos o processo relógio rescalado $\tilde{C}_t^{(n)}$ como

$$\tilde{C}_t^{(n)} = c_n^{-1} \bar{C}_{nt}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Mostraremos no Capítulo 3 que $\tilde{C}_t^{(n)}$ converge em probabilidade (na topologia uniforme) para um limite determinístico quando $n \rightarrow \infty$. Mais especificamente, o limite será igual a $tE(\tau_0)$ e a t , respectivamente para os casos $\alpha \in (1, 2]$ e $\alpha = 1$. Para o caso $\alpha \in (0, 1)$, é conveniente encontrar uma versão do processo relógio baseada em um acoplamento para as taxas inversas rescaladas, como foi feito em [13]. Um acoplamento conveniente será discutido no que segue, na Seção 2.1.

2.1 Acoplamento para o caso $\alpha \in (0, 1)$

Aqui apresentamos uma versão útil para o ambiente aleatório τ em que a versão rescalada converge quase certamente. Com esta versão de τ , definimos uma outra versão do processo relógio. Nossa prova do limite de escala de $\mathcal{X}_t$ será baseada nesta versão particular do processo relógio. Primeiro, apresentamos a versão rescalada do processo (2.9), que é dada por

$$\bar{C}_t^{(n)} \equiv a_n^{-1} \bar{C}_{nt}, \quad (2.12)$$

em que, para $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$a_n = r_n b_n \quad (2.13)$$

e

$$b_n = d_n^{1/\alpha} w(n). \quad (2.14)$$

Agora mudamos o processo acima para uma versão mais conveniente similarmente como feito em Fontes, Isopi e Newman (2002) [13] e em Fontes e Mathieu (2010) [15]. Seja $\{V_x : x \in \mathbb{R}\}$ um processo α -estável bilateral independente de $\{E_{ij} : i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ e $\{L([t], i) : i \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$. Considere uma função $G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo $P(V_1 > G(y)) = P(\tau_0 > y)$, para todo $y > 0$. Daí, defina a função $g_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ indexada em $n \in \mathbb{N}$ por $g_n(y) = b_n^{-1} G^{-1}(d_n^{1/\alpha} y)$.

Nós agora definimos nossa versão conveniente das taxas aleatórias inversas rescaladas $\{\tau_i : i \in \mathbb{Z}\}$ por

$$\tau_x^{(n)} \equiv b_n g_n(V_{x+d_n^{-1}} - V_x), \quad x \in d_n^{-1} \mathbb{Z}.$$

Pode ser checado que $\{\tau_x^{(n)} : x \in d_n^{-1}\mathbb{Z}\}$ é igual em distribuição a $\{\tau_i : i \in \mathbb{Z}\}$. Portanto, segue que o processo (2.12) segue a mesma lei que o seguinte processo:

$$\tilde{C}_t^{(n)} \equiv \sum_{x \in d_n^{-1}\mathbb{Z}} g_n(V_{x+d_n^{-1}} - V_x) \phi_n(t, x) \bar{T}_{x d_n}(nt), \quad t \geq 0, \quad (2.15)$$

em que $\bar{T}_i(t) = \sum_{j=1}^{L([t], i)} E_{ij} / L([t], i)$, se o sítio i é visitado pelo passeio aleatório X até o tempo $[t]$ e caso contrário igual a 1, e $\phi_n(t, x)$ é o tempo local rescalado definido em (2.3). A versão (2.15) do processo relógio terá um papel importante nesta tese, como veremos mais tarde. No Capítulo 3, mostraremos que, quando $\alpha < 1$, o processo relógio rescalado converge fracamente para um processo não-trivial.

Figura 2.1: Gráficos de trajetórias simuladas para o processo relógio rescalado $\tilde{C}_t^{(n)}$ para $\beta = 1.4$ e para alguns valores de α pertencentes ao intervalo $(0, 1)$.

Figura 2.2: Gráficos de trajetórias simuladas para o processo relógio rescalado $\tilde{C}_t^{(n)}$ para $\beta = 1.7$ e para alguns valores de α pertencentes ao intervalo $(0, 1)$.

Nas Figuras 2.1 e 2.2, apresentamos alguns gráficos de trajetórias simuladas do processo relógio (2.15) para $t \in [0, 1]$. Para isto, consideramos $P(\epsilon_1 > n) = P(\epsilon_1 < -n) = 1/(2n^\beta)$, para $n \in \mathbb{N}$ e $P(\tau_0 > x) = x^{-\alpha}$, para $x \geq 1$. Esta configuração também será usada mais tarde para fazer alguns gráficos de outros processos considerados aqui nesta tese. Mais especificamente, consideramos $\beta = 1.4$ e $\beta = 1.7$ nas Figuras 2.1 e 2.2, respectivamente, e $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$; fixamos $n = 10000$. As figuras apresentadas nesta tese foram feitas através do programa R [21]. Olhando para estas figuras, o leitor pode ser induzido a pensar que o limite de escala do processo relógio não é contínuo, o que não é verdade; veja a Observação 3.7.

Capítulo 3

Limite de escala

Começamos este capítulo introduzindo o limite de escala do nosso modelo de armadilha $\mathcal{X}_t$ quando $\alpha \in (0, 1)$. Chamamos este limite de escala de *processo quase-estável*. Em [13], um caso particular em que $\beta = 2$ foi estudado (o caso em que X é um passeio aleatório simples simétrico unidimensional).

Definição 3.1 (*Processos quase-estáveis*). Seja $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função não-decrescente e $\phi(x, t)$ o tempo local de um processo β -estável Z_t (com $\beta \in (1, 2]$) como definido no Capítulo 2. Definimos os processos quase-estáveis por $Z_{S_t^{-1}}$, em que S_t^{-1} é a função inversa de $S_t = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, x) d\mu(x)$ (S_t é uma função estritamente crescente e contínua com probabilidade 1).

Observação 3.1 De acordo com a definição acima, um processo quase-estável é um processo β -estável mudado de tempo pela inversa de um processo relógio, o qual envolve o tempo local do processo β -estável e uma medida induzida por μ . Tais processos foram introduzidos por Stone (1963) [22] e são processos estacionários e Markovianos. Algumas propriedades adicionais sobre os processos quase-estáveis são enunciadas e provadas no Capítulo 7.

Observação 3.2 Seja $V = \{V_x : x \in \mathbb{R}, V_0 = 0\}$ um processo α -estável bilateral com $\alpha \in (0, 1)$. Aqui nesta tese, os processos estáveis de interesse serão dados como na Definição 3.1 com V no lugar de μ . A menos que seja mencionado o contrário, de agora em diante, consideramos esta troca.

Denote por $D([0, T], \mathbb{R})$ e $D([0, T], \mathbb{R}^+)$ os espaços das funções càdlàg reais e não-negativas em $[0, T]$, respectivamente, em que $T > 0$. Além disso, seja d_T e u_T^+ as métricas J_1 de Skorohod e uniforme em $D([0, T], \mathbb{R})$ e $D([0, T], \mathbb{R}^+)$, respectivamente, $d = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(d_n, 1)$ e $u^+ = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(u_n^+, 1)$. Denotamos a topologia uniforme por U . O seguinte teorema nos dá o limite de escala de $\mathcal{X}_t$ quando $\alpha \in (0, 1)$ e é um dos principais resultados desta tese.

Teorema 3.3 *Para $\alpha \in (0, 1)$, existem sequências de números reais positivos $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ tais que*

$$\mathcal{X}_t^{(n)} \equiv d_n^{-1} \mathcal{X}_{a_n t} \Longrightarrow Z_{S_t^{-1}},$$

em $D([0, \infty), \mathbb{R})$ munida com a topologia J_1 de Skorohod, quando $n \rightarrow \infty$, em que o processo limite $Z_{S_t^{-1}}$ foi introduzido na Definição 3.1 (veja também a observação 3.2).

Observação 3.4 *Expressões explícitas para as sequências $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ são dadas em (2.13) e (2.2), respectivamente. Estas sequências são as ordens de magnitude do processo relógio e do passeio aleatório imerso, respectivamente.*

Observação 3.5 *Ao longo desta tese, aparecem algumas quantidades aleatórias que dependem de V . Denotamos as probabilidades e esperanças condicionais (dado V) de tais quantidades por $\mathbb{P}(\cdot) \equiv P(\cdot|V)$ e $\mathbb{E}(\cdot) \equiv E(\cdot|V)$, respectivamente.*

Na Figura 3.1, mostramos algumas trajetórias simuladas do passeio aleatório rescalado $\mathcal{X}_t^{(n)}$ usando a configuração dada no final da Seção 2.1 para alguns valores de β , de $\alpha \in (0, 1)$ e t variando de 0 a 10.

Para provar o Teorema 3.3, nós primeiro obtemos o limite de escala conjunto do processo relógio e do passeio imerso X , o que é feito no próximo teorema. Esta estratégia foi usada, por exemplo, por Ben Arous e Černý (2007) [3] para encontrar o limite de escala para um modelo de armadilha em $\mathbb{Z}^d$ (para $d \geq 2$) com vizinhos mais próximos e com taxas inversas como consideramos aqui. A maior dificuldade é mostrar a convergência conjunta das distribuições finito-dimensionais do processo relógio e do passeio imerso. Em [3], argumentos analíticos para a função característica foram utilizados. Nós aqui consideramos uma abordagem baseada em um argumento probabilístico. Uma importante diferença entre nosso processo relógio e aquele de [3] é

Figura 3.1: Gráficos de trajetórias simuladas do passeio aleatório rescalado $\mathcal{X}_t^{(n)}$ para alguns valores de β e de α .

que, em nosso caso, o limite de escala do relógio depende do limite de escala do passeio aleatório rescalado $Z_t^{(n)}$ (em [3], os limites de escala do relógio e do passeio imerso são independentes).

Teorema 3.6 *Para quase toda trajetória de V , $\{(Z_t^{(n)}, \tilde{C}_t^{(n)}) : t \geq 0\}$ converge para $\{(Z_t, S_t) : t \geq 0\}$ em distribuição quando $n \rightarrow \infty$ em $D([0, \infty), \mathbb{R}) \times D([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ munida com a topologia produto $J_1 \times U$.*

Observação 3.7 *O processo limite de nosso relógio rescalado é quase certamente contínuo enquanto aquele considerado em [3] não é (lá, o limite de escala do relógio é um subordinador α -estável). Uma outra diferença entre ambos os casos é com respeito*

à topologia onde a convergência é tomada. A topologia adequada aqui é a uniforme enquanto em [3] é a topologia M_1 . Porém, nossa prova de fato verifica o critério de convergência na topologia $J_1 \times M_1$ para o processo bivariado dado no teorema acima. Desde que S_t é quase certamente contínuo, a convergência em $J_1 \times U$ segue - por exemplo, veja Seção 3.3 de [23].

Prova do Teorema 3.6. Trocamos $D([0, \infty), \mathbb{R})$ e $D([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ por $D([0, T], \mathbb{R})$ e $D([0, T], \mathbb{R}^+)$ munidas com as métricas d_T e u_T^+ , respectivamente, com $T > 0$ arbitrário. Provaremos a convergência das distribuições finito-dimensionais de $(Z_t^{(n)}, \tilde{C}_t^{(n)})$ e mostraremos que esta sequência é compacta (em inglês o termo é *tight*). Estes resultados conduzem a prova do teorema via argumentos padrões.

Convergência das distribuições finito-dimensionais

Para obter a convergência das distribuições finito-dimensionais do processo bivariado $\{(Z_t^{(n)}, \tilde{C}_t^{(n)}) : t \geq 0\}$, usaremos o Teorema 1.1 de Borodin (1985) [6], o qual estabelece que é possível construir, em algum espaço de probabilidade, processos $\{Z_t'^{(n)} : t \in [0, T]\}$ e $\{Z_t' : t \in [0, T]\}$ tais que:

- (i) Suas distribuições finito-dimensionais coincidem com aquelas de $\{Z_t^{(n)} : t \in [0, T]\}$ e $\{Z_t : t \in [0, T]\}$, respectivamente;
- (ii) $Z_t'^{(n)}$ converge quase certamente para Z_t' em $D([0, T], \mathbb{R})$ munida com a topologia J_1 de Skorohod;
- (iii) Os tempos locais $\phi_n'(t, x)$ e $\phi'(t, x)$ definidos com respeito aos processos $Z_t'^{(n)}$ e Z_t' , respectivamente, satisfazem o seguinte para quaisquer $T > 0$ e $\xi > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} |\phi_n'(t, x) - \phi'(t, x)| > \xi\right) = 0. \quad (3.1)$$

Portanto, usando o Teorema 1.1 de [6], tomamos o processo $Z_t'^{(n)}$ como descrito acima e mostraremos a convergência das distribuições finito-dimensionais de $\{(Z_t'^{(n)}, \tilde{C}_t'^{(n)}) : t \geq 0\}$, em que $\tilde{C}_t'^{(n)}$ é definido como (2.15), mas com as quantidades que dependem de $Z_t^{(n)}$ definidas com respeito a $Z_t'^{(n)}$. Uma quantidade $\mathcal{A}$ que depende de $Z_t^{(n)}$ será denotada por $\mathcal{A}'$ quando ela depender de $Z_t'^{(n)}$.

Agora definimos o conjunto das armadilhas mais profundas. Para um $\delta > 0$ arbitrário, considere

$$\mathcal{T}_\delta = \{x \in \mathbb{R} : V_x - V_{x-} > \delta\} = \{x_j : j \in \mathbb{Z}\} = \{\dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots\},$$

$$x_j^{(n)} = d_n^{-1}[d_n x_j], \text{ para } i \in \mathbb{Z}, \text{ e}$$

$$\mathcal{T}_\delta^{(n)} = \{x_j^{(n)} : j \in \mathbb{Z}\}.$$

Primeiro mostraremos que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in d_n^{-1} \mathbb{Z} \cap (\mathcal{T}_\delta^{(n)})^c} g_n(V_{x+d_n^{-1}} - V_x) \phi'_n(t, x) \bar{T}'_{xd_n}(nt) = 0, \quad (3.2)$$

em probabilidade, para todo $t \in [0, T]$, ou seja, os termos do processo relógio rescalado que estão fora do conjunto das armadilhas mais profundas tem contribuição negligível para o processo limite quando $n \rightarrow \infty$ e $\delta \downarrow 0$.

Observação 3.8 *Seja $A_t^{(n, \delta)}$ uma quantidade aleatória dependendo de δ , n e t . Quando dizemos que $\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_t^{(n, \delta)} = 0$ em probabilidade, queremos dizer que para todo $\epsilon > 0$ fixado, temos que $\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|A_t^{(n, \delta)}| > \epsilon) = 0$.*

O Teorema 1.1 de [6] nos diz que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $A_\epsilon > 0$ tal que

$$\sup_n P\left(\sup_{t \in [0, T]} |Z_t^{(n)}| > A_\epsilon\right) < \epsilon \quad \text{e} \quad P\left(\sup_{t \in [0, T]} |Z_t'| > A_\epsilon\right) < \epsilon. \quad (3.3)$$

Seja $I_\epsilon = (-A_\epsilon, A_\epsilon)$. Então, para todo $\zeta > 0$, usando o resultado acima e a desigualdade de Markov, segue que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sum_{x \in d_n^{-1} \mathbb{Z} \cap (\mathcal{T}_\delta^{(n)})^c} g_n(V_{x+d_n^{-1}} - V_x) \phi'_n(t, x) \bar{T}'_{xd_n}(nt) > \zeta\right) \leq \\ & \mathbb{P}\left(\sum_{x \in d_n^{-1} \mathbb{Z} \cap (\mathcal{T}_\delta^{(n)})^c \cap I_\epsilon} g_n(V_{x+d_n^{-1}} - V_x) \phi'_n(t, x) \bar{T}'_{xd_n}(nt) > \zeta\right) + \epsilon \leq \\ & \zeta^{-1} \sum_{x \in d_n^{-1} \mathbb{Z} \cap (\mathcal{T}_\delta^{(n)})^c \cap I_\epsilon} g_n(V_{x+d_n^{-1}} - V_x) E(\phi'_n(t, x)) + \epsilon, \end{aligned} \quad (3.4)$$

para quase toda trajetória de V . Para todo $M > 0$ inteiro, temos que

$$E(\phi_n^M(t, x)) \leq E(\phi_n^M(t, 0)) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(\phi_n^M(t, 0)) = t^{M(1-1/\beta)} z \frac{\Gamma(1-1/\beta)}{\Gamma(2-1/\beta)}, \quad (3.5)$$

em que z é o valor da densidade de Z_1 em zero; por exemplo, veja página 328 de [6]. De (3.5) e usando a igualdade das distribuições finito-dimensionais de $\phi_n(t, x)$ e $\phi'_n(t, x)$, que é válida para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos que a soma em (3.4) é limitada por cima por uma constante real positiva vezes a seguinte quantidade:

$$\sum_{x \in d_n^{-1} \mathbb{Z} \cap (\mathcal{T}_\delta^{(n)})^c \cap I_\epsilon} g_n(V_{x+d_n^{-1}} - V_x).$$

Agora, argumentando como em [13], parágrafos de (3.25) a (3.28), segue que $\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty}$ do termo acima se anula em probabilidade. Isto e a arbitrariedade de ϵ produz (3.2).

Com o resultado acima, nós agora definimos o processo relógio rescalado restrito às armadilhas mais profundas:

$$\tilde{C}_t'^{(n, \delta)} = \sum_{i \geq 1} g_n(V_{x_i^{(n)} + d_n^{-1}} - V_{x_i^{(n)}}) \phi'_n(t, x_i^{(n)}) \bar{T}'_{x_i^{(n)} d_n}(nt). \quad (3.6)$$

Seja $\epsilon > 0$ e tome A_ϵ satisfazendo (3.3). Defina o conjunto

$$\Omega_\epsilon = \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |Z_t^{(i)}| \leq A_\epsilon, 1 \leq i \leq n \right\} \cap \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |Z_t| \leq A_\epsilon \right\}.$$

Sob Ω_ϵ , o processo dado em (3.6) é igual a

$$\tilde{C}_t'^{(n, \delta, \epsilon)} = \sum_{i=-N_{\delta, \epsilon}}^{N_{\delta, \epsilon}} g_n(V_{x_i^{(n)} + d_n^{-1}} - V_{x_i^{(n)}}) \phi'_n(t, x_i^{(n)}) \bar{T}'_{x_i^{(n)} d_n}(nt),$$

em que $N_{\delta, \epsilon} = \max\{|j| \in \mathbb{N} : x_j \in I_\epsilon\} < \infty$ para quase toda trajetória de V .

O resultado (3.1) e a continuidade (com probabilidade 1) do tempo local $\phi'(t, x)$ (com respeito à variável espacial) implicam que $\phi'_n(t, x_i^{(n)})$ converge em probabilidade para $\phi'(t, x_i)$ uniformemente em $i \in [-N_{\delta, \epsilon}, N_{\delta, \epsilon}]$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, desde que $L'([nt], [x_i^{(n)} d_n]) \xrightarrow{p} \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ (isto segue da convergência em probabilidade de $\phi'_n(t, x_i^{(n)})$), segue da Lei dos Grandes Números que

$$\bar{T}'_{x_i^{(n)} d_n}(nt) \xrightarrow{p} 1,$$

quando $n \rightarrow \infty$ para todo i .

Além disso, da Proposição 3.1 de [13], temos que

$$g_n(V_{x_i^{(n)} + d_n^{-1}} - V_{x_i^{(n)}}) \longrightarrow V_{x_i} - V_{x_i-}, \quad (3.7)$$

quando $n \rightarrow \infty$, para quase todo V e para todo i .

As convergências em probabilidade de $\phi'_n(t, x_i^{(n)})$ e $\bar{T}'_{x_i^{(n)} d_n}(nt)$ (uniformemente em $i \in [-N_{\delta, \epsilon}, N_{\delta, \epsilon}]$) discutidas acima, o resultado (3.7) e o Teorema do Mapeamento implicam que para quase todo V

$$(Z_t^{(n)}, C_t^{(n, \delta, \epsilon)}) \xrightarrow{p} (Z_t', S_t^{(\delta, \epsilon)}), \quad (3.8)$$

quando $n \rightarrow \infty$, em que $S_t^{(\delta, \epsilon)} = \sum_{x \in \mathcal{T}_\delta \cap I_\epsilon} (V_x - V_{x-}) \phi'(t, x)$. Além disso, temos que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\epsilon \downarrow 0} S_t^{(\delta, \epsilon)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t, x) dV_x, \quad (3.9)$$

em probabilidade, para quase todo V . Assim, a convergência das distribuições finito-dimensionais do processo $\{(Z_t^{(n)}, \tilde{C}_t^{(n)}) : t \in [0, T]\}$ para aquelas de $\{(Z_t, S_t) : t \in [0, T]\}$ segue de (3.8) e (3.9).

Compacidade

No que segue, mostramos que a sequência $\{(Z_t^{(n)}, \tilde{C}_t^{(n)}) : t \in [0, T]\}$ é compacta em $D([0, T], \mathbb{R}) \times D([0, T], \mathbb{R}^+)$ munida com a topologia produto $J_1 \times M_1$. É suficiente estabelecer a compacidade de cada coordenada. A primeira coordenada converge em distribuição, portanto, ela é compacta. Agora nos resta mostrar que $\{(\tilde{C}_t^{(n)}) : t \in [0, T]\}$ é compacta em $D([0, T], \mathbb{R}^+)$ munida com a topologia M_1 (e consequentemente com a topologia U - veja observação 3.7).

Desde que o processo $\tilde{C}_t^{(n)}$ é não-decrescente, pode ser checado que a função de oscilação w_s usada na condição (ii) do Teorema 12.12.3 de [23] é igual a 0. Com isto e usando o fato de que o processo é não-negativo, obtemos que os critérios de compacidade de tal teorema, em uma forma compacta usando limites, são dados por

- (i) $\lim_{c \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{C}_T^{(n)} > c) = 0;$
- (ii) Para cada $\xi > 0$, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\max\{\bar{v}(C_n^*, 0, \varepsilon), \bar{v}(C_n^*, T, \varepsilon)\} > \xi) = 0,$

em que, para $t \in [0, T]$, temos que

$$\bar{v}(C_n^*, t, \varepsilon) = \sup_{\max\{0, t-\varepsilon\} \leq t_1 \leq t_2 \leq \min\{t+\varepsilon, T\}} \{\tilde{C}_{t_2}^{(n)} - \tilde{C}_{t_1}^{(n)}\}.$$

Tomando $\varepsilon < T$, a quantidade acima para $t = 0$ e $t = T$ se reduzem a respectivamente

$$\bar{v}(C_n^*, 0, \varepsilon) = \tilde{C}_\varepsilon^{(n)} \quad (3.10)$$

e

$$\bar{v}(C_n^*, T, \varepsilon) = \tilde{C}_T^{(n)} - \tilde{C}_{T-\varepsilon}^{(n)}. \quad (3.11)$$

Agora mostramos que, de fato, o processo relógio rescalado satisfaz as condições (i) e (ii). De agora em diante, usamos a restrição $\varepsilon < T$. A condição (i) segue da convergência das distribuições finito-dimensionais, ou seja,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{C}_T^{(n)} > c) = \lim_{c \rightarrow \infty} P(S_T > c) = 0.$$

Usando (3.10) e a convergência das distribuições finito-dimensionais, também obtemos que, para cada $\xi > 0$ fixado,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bar{v}(C_n^*, 0, \varepsilon) > \xi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P(S_\varepsilon > \xi).$$

Desde que S_ε converge para 0 em probabilidade tomando $\varepsilon \downarrow 0$, encontramos que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bar{v}(C_n^*, 0, \varepsilon) > \xi) = 0. \quad (3.12)$$

Similarmente ao caso anterior e usando (3.11), para cada $\xi > 0$ fixado, segue que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bar{v}(C_n^*, T, \varepsilon) > \xi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P(S_T - S_{T-\varepsilon} > \xi).$$

Agora, usando o fato de que S_t é quase certamente contínua, obtemos que $S_T - S_{T-\varepsilon} \xrightarrow{q.c.} 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Com isto, temos que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\bar{v}(C_n^*, T, \varepsilon) > \xi) = 0. \quad (3.13)$$

Os resultados (3.12) e (3.13) implicam que a condição (ii) é satisfeita e daí a sequência $\tilde{C}_t^{(n)}$ é compacta. $\square$

Prova do Teorema 3.3. Começamos a prova afirmando que a seguinte representação estocástica é válida:

$$\{\mathcal{X}_t^{(n)} : t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{Z_{\tilde{C}_t^{(n)}-1}^{(n)} : t \geq 0\},$$

em que “ $\stackrel{d}{=}$ ” significa igualdade em distribuição. Agora definimos alguns subconjuntos de $D([0, \infty), \mathbb{R})$ (definições de subconjuntos de $D([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ são introduzidos de forma análoga).

Seja $D_{\uparrow}([0, \infty), \mathbb{R})$ o espaço das funções não-negativas em $D([0, \infty), \mathbb{R})$ que são não-decrescentes. Denotamos aqui o espaço das funções contínuas que são estritamente crescentes por $C_{\uparrow\uparrow}([0, \infty), \mathbb{R})$. Denote por $D_u([0, \infty), \mathbb{R})$ o espaço das funções em $D([0, \infty), \mathbb{R})$ que são não-limitadas. Daí, definimos $D_{u,\uparrow}([0, \infty), \mathbb{R}) = D_u([0, \infty), \mathbb{R}) \cap D_{\uparrow}([0, \infty), \mathbb{R})$.

Seguindo as ideias usadas na prova do Teorema 3.6 e o resultado acima, pode ser checado que as distribuições finito-dimensionais de $(Z_t^{(n)}, \tilde{C}_t^{(n)^{-1}})$ convergem fracamente para aquelas de (Z_t, S_t^{-1}) quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, temos que $D_{u,\uparrow}([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ munida com a topologia uniforme é separável e completa, assim, usando a convergência fraca de $\tilde{C}_t^{(n)^{-1}}$ para S_t^{-1} (que segue do Teorema 3.6 e do Teorema do Mapeamento) e a recíproca do Teorema de Prohorov, obtemos que $\tilde{C}_t^{(n)^{-1}}$ é compacta. Portanto, $(Z_t^{(n)}, \tilde{C}_t^{(n)^{-1}}) \Rightarrow (Z_t, S_t^{-1})$ quando $n \rightarrow \infty$ em $D([0, \infty), \mathbb{R}) \times D_{u,\uparrow}([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ equipada com a topologia produto $J_1 \times U$.

Nós agora usamos o Teorema 13.2.2 de Whitt (2002) [23], o qual nos diz que o mapeamento da composição de $D([0, \infty), \mathbb{R}) \times D_{u,\uparrow}([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ para $D([0, \infty), \mathbb{R})$ é contínuo em $D([0, \infty), \mathbb{R}) \times C_{\uparrow\uparrow}([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ equipada com a topologia J_1 de Skorohod. Temos que (Z_t, S_t^{-1}) pertence a $D([0, \infty), \mathbb{R}) \times C_{\uparrow\uparrow}([0, \infty), \mathbb{R}^+)$. O Teorema do Mapeamento e os resultados acima implicam que $\mathcal{X}_t^{(n)} \Rightarrow Z_{S_t^{-1}}$ em $D([0, \infty), \mathbb{R})$ munida com a topologia J_1 de Skorohod, assim provando o teorema. $\square$

Agora enunciamos e provamos um resultado sobre a auto-similaridade de nosso processo limite, o qual será útil para encontrar resultados de envelhecimento. Dizemos que um processo estocástico $\{W(t) : t \geq 0\}$ é auto-similar de ordem $H > 0$ se $W(at) \stackrel{dfd}{=} a^H W(t)$, para todo $a > 0$, em que “ $\stackrel{dfd}{=}$ ” significa igualdade de todas as distribuições finito-dimensionais.

Proposição 3.9 *O processo $\{Z_{S_t^{-1}} : t \geq 0\}$ é auto-similar de ordem $\alpha\beta^2/\{1 + \alpha(\beta - 1)\}$.*

Prova. Primeiro afirmamos que $\{S_t : t \geq 0\}$ é auto-similar de ordem $1 - 1/\beta + 1/(\alpha\beta)$. Seja $a > 0$. Usando a auto-similaridade do processo Z_t (de ordem $1/\beta$) e a seguinte representação estocástica para o tempo local do processo Z_t :

$$\phi(t, x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1\{x - \epsilon < Z_s \leq x + \epsilon\} ds,$$

que é válida para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, pode ser verificado que $\phi(at, x) \stackrel{dfd}{=} a^{1-1/\beta} \phi(t, a^{-1/\beta}x)$. Com isto e usando a auto-similaridade (de ordem $1/\alpha$) do processo V_t , nós obtemos nossa primeira afirmação fazendo uma simples mudança de variável na integral da representação estocástica do processo S_t . Daí, temos que $S_{at}^{-1} \stackrel{dfd}{=} a^{1/\{1-1/\beta+1/(\alpha\beta)\}} S_t^{-1}$. Este resultado e a auto-similaridade do processo Z_t produz que $Z_{S_t^{-1}}$ é auto-similar de ordem $\beta/\{1 - 1/\beta + 1/(\alpha\beta)\} = \alpha\beta^2/\{1 + \alpha(\beta - 1)\}$. $\square$

Concluimos este capítulo obtendo o limite de escala de $\mathcal{X}_t$ quando $\alpha \in [1, 2]$. Como veremos, neste caso, o limite de escala é um processo β -estável, em contraste com o caso em que $\alpha \in (0, 1)$.

Teorema 3.10 *Para $\alpha \in [1, 2]$, o processo $\{d_n^{-1}\mathcal{X}_{c_{nt}} : t \geq 0\}$ converge fracamente para $\{Z_t : t \geq 0\}$ quando $n \rightarrow \infty$ em $D([0, \infty), \mathbb{R})$ munida com a topologia J_1 de Skorohod, em que as sequências $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ são dadas em (2.10) e (2.2), respectivamente.*

Prova. Primeiro consideramos o caso em que $\alpha \in (1, 2]$. Mostraremos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{C}_t^{(n)} - tE(\tau_0)| \longrightarrow 0, \quad (3.14)$$

em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$, para $T > 0$ arbitrário, em que $\tilde{C}_t^{(n)}$ é definido em (2.11). O resultado (3.14) é suficiente para provar o teorema para $\alpha \in (1, 2]$.

Introduzimos um processo relógio modificado por

$$C_t'^{(n)} = n^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_i 1\{\tau_i < n\} \sum_{j=1}^{L([nt], i)} E_{ij}$$

Este processo é uma boa aproximação do processo $\tilde{C}_t^{(n)}$ no sentido de que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{C}_t^{(n)} - C_t'^{(n)}| \longrightarrow 0, \quad (3.15)$$

em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$. Agora verificaremos que (3.15) é de fato válida. Temos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{C}_t^{(n)} - C_t'^{(n)}| = n^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_i 1\{\tau_i \geq n\} \sum_{j=1}^{L([nT], i)} E_{ij}.$$

Usando que $E(\tau_0 1\{\tau_0 \geq n\}) = E(\tau_0)/n^{\alpha-1}$, nós obtemos que o valor esperado do termo acima é igual a

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{C}_t^{(n)} - C_t'^{(n)}|\right) = E(\tau_0) \frac{[nT]}{n^\alpha},$$

que vai para 0 quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, a variável aleatória $\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{C}_t^{(n)} - C_t'^{(n)}|$ converge para 0 em distribuição e conseqüentemente (desde que ela é uma variável aleatória não-negativa) esta convergência vale em probabilidade. Assim, a afirmação dada em (3.15) está provada. Agora mostramos que $C_t'^{(n)}$ converge em probabilidade para $tE(\tau_0)$ com a métrica uniforme em $[0, T]$. Usando o valor esperado $E(\tau_0 1\{\tau_0 < n\}) = E(\tau_0)(1 - n^{1-\alpha})$, segue que

$$E(C_t'^{(n)}) = E(\tau_0) \frac{[nt]}{n} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \rightarrow tE(\tau_0),$$

quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, pode ser encontrado que a variância de $C_t'^{(n)}$ é dada por

$$\text{Var}(C_t'^{(n)}) = E[\text{Var}(C_t'^{(n)}|X)],$$

em que temos usado que $\text{Var}[E(C_t'^{(n)}|X)] = 0$, que segue do fato de que $E(C_t'^{(n)}|X)$ não depende de X . Para computar a variância condicional $\text{Var}(C_t'^{(n)}|X)$, usamos os seguintes dois fatos: 1) $\sum_{j=1}^{L([nt], i)} E_{ij}|X$ segue uma distribuição gama com média e variância iguais a $L([nt], i)$; 2) $\text{Var}(\tau_0 1\{\tau_0 < n\}) = \alpha(n^{2-\alpha} - 1)/(2 - \alpha)$ para $\alpha \in (1, 2]$ e $\text{Var}(\tau_0 1\{\tau_0 < n\}) = 2 \log n - E^2(\tau_0)(1 - 1/n)^2$ para $\alpha = 2$.

Assim, obtemos que

$$\text{Var}(C_t'^{(n)}|X) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2-\alpha}(n^{2-\alpha} - 1)[nt]/n^2 & \text{se } \alpha \in (1, 2), \\ \{2 \log n - E^2(\tau_0)(1 - 1/n)^2\}[nt]/n^2 & \text{se } \alpha = 2. \end{cases}$$

Dai, temos que $\text{Var}(C_t'^{(n)}) = \text{Var}(C_t'^{(n)}|X) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, as distribuições finito-dimensionais de $C_t'^{(n)}$ convergem em probabilidade para $tE(\tau_0)$.

Pode ser mostrado que as condições de compacidade (i) e (ii) apresentadas na prova do Teorema 3.6 são satisfeitas por $C_t'^{(n)}$ (isto pode ser feito usando a convergência

das distribuições finito-dimensionais e argumentos similares como foi mostrado lá). Portanto, $C_t'^{(n)}$ é compacto em $D([0, T], \mathbb{R}^+)$ munida com a topologia M_1 . Desde que seu limite é contínuo, temos que a convergência vale com a topologia U (isto segue de argumentos dados na observação 3.7).

Resta-nos provar o caso em que $\alpha = 1$. Para este caso, definimos um processo relógio modificado por

$$C_t'^{(n)} = (n \log n)^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_i 1\{\tau_i < n(\log n)^\rho\} \sum_{j=1}^{L([nt], i)} E_{ij},$$

com $\rho \in (1, 2)$. Similarmente como discutido para o caso $\alpha \in (1, 2)$, pode ser verificado que o processo relógio modificado acima satisfaz (3.15). Além disso, usando os valores esperados $E(\tau_0 1\{\tau_0 < n(\log n)^\rho\}) = \log n + \rho \log \log n$ e $E(\tau_0^2 1\{\tau_0 < n(\log n)^\rho\}) = n(\log n)^\rho - 1$ e seguindo os passos anteriores, obtemos que

$$E(C_t'^{(n)}) = [nt] \frac{\log n + \rho \log \log n}{n \log n} \longrightarrow t$$

e

$$\text{Var}(C_t'^{(n)}) = [nt] \frac{n(\log n)^\rho - 1}{n^2(\log n)^2} \longrightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, as distribuições finito-dimensionais de $C_t'^{(n)}$ convergem em probabilidade para t . A compacidade de $C_t'^{(n)}$ segue de forma parecida como discutido no caso $\alpha \in (1, 2]$. Daí, para $T > 0$ arbitrário, nós obtemos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{C}_t^{(n)} - t| \longrightarrow 0,$$

em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$, o que implica na convergência fraca enunciada no teorema para o caso $\alpha = 1$. $\square$

Capítulo 4

Envelhecimento

Neste capítulo, movemos nossa atenção para o estudo de envelhecimento para $\mathcal{X}$. Aqui, consideramos resultados de envelhecimento integrado. Fontes e Mathieu (2008) [14] consideraram resultados de envelhecimento integrado para um modelo de armadilha em um grafo completo, em que o limite de escala é um processo K . Recentemente, Fontes e Mathieu (2010) [15] também obtiveram resultados de envelhecimento integrado para uma classe de modelos de armadilha em $\mathbb{Z}^d$, como discutido na introdução desta tese.

Considere a seguinte função de envelhecimento para $\mathcal{X}_t$:

$$\bar{\mathcal{R}}(\lambda, \mu) = E[R(\lambda\mathcal{T}, \mu\mathcal{S})], \quad (4.1)$$

em que $\mu, \lambda \geq 0$, $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ é um vetor aleatório seguindo uma distribuição exponencial bivariada independente de todas as variáveis aleatórias definidas previamente e

$$R(s, t) = P(\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_{t+s}),$$

para $s, t > 0$. A distribuição exponencial bivariada (EB) de $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ é dada pela função de sobrevivência conjunta $\mathbb{S}(t, s) = P(\mathcal{T} > t, \mathcal{S} > s)$ assumindo a forma

$$\mathbb{S}(t, s) = \exp\{-\pi(t + s) - \bar{\pi} \max(t, s)\},$$

para $t, s > 0$, em que $\pi \in [0, 1]$ e $\bar{\pi} = 1 - \pi$. Os casos $\pi = 0$ e $\pi = 1$ correspondem a $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ e a $\mathcal{T}$ independente de $\mathcal{S}$, respectivamente. Usaremos a seguinte notação: $(\mathcal{T}, \mathcal{S}) \sim \text{EB}(\pi)$. A função de densidade associada (com respeito a $\mathbb{S}(t, s)$) é

$$f(t, s) = \begin{cases} \pi \exp\{-\pi t - s\} & \text{se } 0 < t < s, \\ \pi \exp\{-\pi s - t\} & \text{se } 0 < s < t, \\ \bar{\pi} \exp\{-(1 + \pi)t\} & \text{se } 0 < t = s, \end{cases}$$

veja [19]. Não há uma forte razão para a escolha desta distribuição conjunta, exceto pelo fato dela incluir e interpolar os casos de independência e dependência total das variáveis exponenciais consideradas em [14] e [15], respectivamente, para a mesma função de envelhecimento (mas para diferentes modelos de armadilha dos que estão sendo considerados aqui nesta tese).

Nós agora estamos prontos para enunciar e provar um resultado de envelhecimento integrado para (4.1). No Capítulo 5, estabeleceremos um resultado de envelhecimento não-integrado para uma diferente função de envelhecimento.

Teorema 4.1 *Seja $(\mathcal{T}, \mathcal{S}) \sim EB(\pi)$ e defina a função $\mathcal{R} : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ por $\mathcal{R}(\theta) = P(Z_{S_1^{-1}} = Z_{S_{1+\theta}^{-1}})$. Então, segue que*

$$\lim_{\substack{\lambda, \mu \rightarrow \infty \\ \lambda/\mu \rightarrow \theta}} \bar{\mathcal{R}}(\lambda, \mu) = \frac{\bar{\pi}}{1 + \pi} \mathcal{R}(\theta) + \pi \left\{ \int_0^1 \frac{\mathcal{R}(\theta u)}{(1 + \pi u)^2} du + \int_1^\infty \frac{\mathcal{R}(\theta u)}{(\pi + u)^2} du \right\}. \quad (4.2)$$

Observação 4.2 *Nos casos $\pi = 0$ e $\pi = 1$, segue imediatamente que*

$$\lim_{\substack{\lambda, \mu \rightarrow \infty \\ \lambda/\mu \rightarrow \theta}} \bar{\mathcal{R}}(\lambda, \mu) = \mathcal{R}(\theta)$$

e

$$\lim_{\substack{\lambda, \mu \rightarrow \infty \\ \lambda/\mu \rightarrow \theta}} \bar{\mathcal{R}}(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \frac{\mathcal{R}(\theta u)}{(1 + u)^2} du,$$

respectivamente.

Observação 4.3 *Não é simples ver que a função $\mathcal{R}(\cdot)$ é não-trivial. No Capítulo 7, provaremos que isto é de fato verdade.*

Observação 4.4 *Em [13], resultados de envelhecimento não-integrado foram estabelecidos para algumas funções de envelhecimento de $\mathcal{X}$, incluindo o caso do Teorema 4.1, para o caso em que X é passeio aleatório simples simétrico em dimensão 1. Os argumentos para estes resultados caem em um acoplamento entre $\mathcal{X}$ e um movimento Browniano fixado, o que vale somente para o caso simples simétrico feito em $d = 1$; e também sobre a teoria de quase-difusões, que corresponde a $\beta = 2$. Nós não estamos cientes de uma teoria correspondente para os processos quase-estáveis com $\beta \in (1, 2)$.*

A convergência em distribuição obtida no Capítulo 3 não é suficiente para provar o Teorema 4.1. Argumentos adicionais serão enunciados e provados em dois lemas,

os quais nos conduzirão a substituir o processo $\mathcal{X}_t$ por um baseado em armadilhas mais profundas no lado esquerdo de (4.2). Com isto e um pouco mais de trabalho, obtemos o resultado desejado. Por simplicidade de notação no que segue, definimos $Y_t^{(n)} = Z_{\tilde{C}_t^{(n)}-1}^{(n)}$, $Y_t^{(n,\delta)} = Z_{\tilde{C}_t^{(n,\delta)}-1}^{(n)}$, $Y_t^{(\delta)} = Z_{S_t^{(\delta)}-1}$, para $t \geq 0$, em que $S_t^{(\delta)-1}$ é a função inversa de $S_t^{(\delta)} = \sum_{x \in \mathcal{F}_\delta} \phi(t, x)(V_x - V_{x-})$.

Para encontrar o resultado de envelhecimento integrado enunciado no teorema acima, precisaremos de um processo auxiliar, o qual será denotado por $\bar{Y}_t^{(n,\delta)}$ e que vive nas δ -armadilhas. Para defini-lo, seja $W_i^{(n,\delta)}$, $i = 0, 1, \dots$, as sucessivas δ -armadilhas visitadas por $Y_t^{(n)}$, com a restrição $W_i^{(n,\delta)} \neq W_{i+1}^{(n,\delta)}$ ($i = 0, 1, \dots$) e seja $S_i^{(n,\delta)}$ o tempo que $Y_t^{(n)}$ gasta para atingir $W_{i+1}^{(n,\delta)}$ depois de deixar $W_i^{(n,\delta)}$ ($i = 0, 1, \dots$). Daí, definimos

$$\bar{Y}_t^{(n,\delta)} = W_i^{(n,\delta)}, \quad \text{se } S_i^{(n,\delta)} \leq t < S_{i+1}^{(n,\delta)}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Lema 4.5 *Para qualquer $T > 0$, temos que*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbb{P}(Y_t^{(n)} \neq \bar{Y}_t^{(n,\delta)}) dt = 0,$$

para quase todo V .

Prova. Temos que $\phi(t, x) \xrightarrow{q.c.} \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$; veja, por exemplo [5]. Este fato implica que $S_t^{(\delta)} \xrightarrow{q.c.} \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, para todo $\delta > 0$ fixado. Com estes resultados e usando a convergência fraca $\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{C}_t^{(n,\delta)} \stackrel{d}{=} S_t^{(\delta)}$, nós obtemos que, dado $T, \eta, \delta > 0$, existem $n_0, \Delta > 0$ tais que

$$\mathbb{P}(\tilde{C}_\Delta^{(n)} \leq T) \leq \mathbb{P}(\tilde{C}_\Delta^{(n,\delta)} \leq T) \leq \eta, \quad \forall n \geq n_0. \quad (4.3)$$

Nós então fixamos $T, \eta, \delta > 0$, tomamos $n_0, \Delta > 0$ tais que as desigualdades acima valem e obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbb{P}(Y_t^{(n)} \neq \bar{Y}_t^{(n,\delta)}) dt &= \mathbb{E} \left(\int_0^T 1_{\{Y_t^{(n)} \neq \bar{Y}_t^{(n,\delta)}\}} dt \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\int_0^T 1_{\{Y_t^{(n)} \neq \bar{Y}_t^{(n,\delta)}, \tilde{C}_\Delta^{(n,\delta)} \geq T\}} dt \right) + \eta T \\ &\leq \mathbb{E} \left(\sum_{x \in d_n^{-1} \mathbb{Z} \cap (\mathcal{T}_\delta^{(n)})^c} g_n(V_{x+d_n^{-1}} - V_x) \phi_n(\Delta, x) \bar{T}_{x d_n}(n\Delta) \right) + \eta T, \end{aligned}$$

em que a primeira igualdade segue do Teorema de Fubini. A desigualdade acima, (3.2) e a arbitrariedade de η concluem o argumento. $\square$

Lema 4.6 *Para quase toda trajetória de V , temos que*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} J_1((\bar{Y}_t^{(n,\delta)}), (Y_t^{(n,\delta)})) = 0,$$

em probabilidade, em que $J_1(\cdot, \cdot)$ é a métrica de Skorohod.

Prova. Os processos $\{\bar{Y}_t^{(n,\delta)} : t \geq 0\}$ e $\{Y_t^{(n,\delta)} : t \geq 0\}$ visitam sucessivamente o mesmo conjunto de armadilhas mas com diferentes tempos de jornada. Assim, é suficiente provar que a diferença entre esses tempos de jornada vão para 0 em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$ e $\delta \downarrow 0$. Podemos reescrever o processo $Y_t^{(n,\delta)}$ como

$$Y_t^{(n,\delta)} = W_i^{(n,\delta)}, \text{ se } \hat{S}_i^{(n,\delta)} \leq t < \hat{S}_{i+1}^{(n,\delta)},$$

para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, em que $\hat{S}_i^{(n,\delta)}$ é o tempo que $Y_t^{(n)}$ gasta na i -ésima δ -armadilha antes de atingir a próxima. Além disso, temos que $S_i^{(n,\delta)} \geq \hat{S}_i^{(n,\delta)}$ para todo $i \geq 0$. Agora argumentamos que $\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} (S_i^{(n,\delta)} - \hat{S}_i^{(n,\delta)}) = 0$ em probabilidade para qualquer i . Dados $T, \eta, \delta > 0$, tomamos n_0, N, Δ satisfazendo (4.3) e

$$\mathbb{P}(S_N^{(n,\delta)} \geq T) > 1 - \eta, \quad \forall n \geq n_0. \quad (4.4)$$

Para cada $i = 0, \dots, N$, temos que

$$S_i^{(n,\delta)} - \hat{S}_i^{(n,\delta)} \leq \sum_{x \in d_n^{-1} \mathbb{Z} \cap (\mathcal{F}_\delta^{(n)})^c} g_n(V_{x+d_n^{-1}} - V_x) \phi_n(\Delta, x) \bar{T}_{x d_n}(n\Delta). \quad (4.5)$$

Como visto anteriormente, o lado direito de (4.5) vai para 0 em probabilidade tomando primeiro $n \rightarrow \infty$ e depois $\delta \downarrow 0$. Este resultado e a arbitrariedade de η concluem o argumento. $\square$

Com os lemas acima, estamos prontos para provar o teorema sobre o resultado de envelhecimento integrado para $\mathcal{X}_t$ baseado na função (4.1).

Prova do Teorema 4.1. Sem perda de generalidade, tomamos $\lambda = \theta\mu$ e trocamos μ por a_n como definido em (2.13). Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{R}}(\theta a_n, a_n) &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^t \exp\{-\pi s - t\} P(Y_t^{(n)} = Y_{t+s\theta}^{(n)}) ds dt + \\ &\quad \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_t^\infty \exp\{-\pi t - s\} P(Y_t^{(n)} = Y_{t+s\theta}^{(n)}) ds dt + \\ &\quad \bar{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \exp\{-(1+\pi)t\} P(Y_t^{(n)} = Y_{t(1+\theta)}^{(n)}) dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Primeiramente, concentramos nossa atenção no terceiro termo da expressão acima. É fácil ver que para qualquer $T > 0$, este termo é igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_0^T e^{-(1+\pi)t} 1\{Y_t^{(n)} = Y_{t(1+\theta)}^{(n)}\} dt \right) + g(T), \quad (4.7)$$

em que

$$g(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_T^\infty e^{-(1+\pi)t} 1\{Y_t^{(n)} = Y_{t(1+\theta)}^{(n)}\} dt \right) \leq \frac{\exp\{-(1+\pi)T\}}{1+\pi}.$$

Do Lema 4.5, segue que o primeiro termo de (4.7) é igual a

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_0^T e^{-(1+\pi)t} 1\{\bar{Y}_t^{(n,\delta)} = \bar{Y}_{t(1+\theta)}^{(n,\delta)}\} dt \right).$$

Usando o resultado acima, o Lema 4.6 e a convergência fraca $\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^{(n,\delta)} \stackrel{d}{=} Z_{S_t^{-1}}$, nós obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-(1+\pi)t} P(Y_t^{(n)} = Y_{t(1+\theta)}^{(n)}) dt &= E \left(\int_0^T e^{-(1+\pi)t} 1\{Z_{S_t^{-1}} = Z_{S_{t(1+\theta)}^{-1}}\} dt \right) + g(T) \\ &= P(Z_{S_1^{-1}} = Z_{S_{1+\theta}^{-1}}) (1 - e^{-(1+\pi)T}) + g(T), \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que a segunda desigualdade segue da Proposição 3.9, a qual, em particular, nos dá que a distribuição de $1\{Z_{S_t^{-1}} = Z_{S_{t(1+\theta)}^{-1}}\}$ não depende de t . Tomando $T \rightarrow \infty$ em (4.8) (e usando o fato de que $\lim_{T \rightarrow \infty} g(T) = 0$), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \exp\{-(1+\pi)t\} P(Y_t^{(n)} = Y_{t(1+\theta)}^{(n)}) dt = \frac{\mathcal{R}(\theta)}{1+\pi}. \quad (4.9)$$

Agora obtemos uma expressão para a primeira integral dupla dada no lado direito de (4.6). Fazemos a mudança de variáveis $u = s/t$ e $w = t$ para obter

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^t \exp\{-\pi s - t\} P(Y_t^{(n)} = Y_{t+s\theta}^{(n)}) ds dt &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^1 w \exp\{-\pi uw - w\} P(Y_w^{(n)} = Y_{w(1+u\theta)}^{(n)}) du dw. \end{aligned}$$

Para $T > 0$ arbitrário, temos que a integral dupla acima pode ser reescrita como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^1 w \exp\{-\pi uw - w\} P(Y_w^{(n)} = Y_{w(1+u\theta)}^{(n)}) du dw + h(T), \quad (4.10)$$

em que

$$\begin{aligned} h(T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T^\infty \int_0^1 w \exp\{-\pi uw - w\} P(Y_w^{(n)} = Y_{w(1+u\theta)}^{(n)}) du dw \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(\exp\{-T\} - \frac{\exp\{-(1+\pi)T\}}{1+\pi} \right). \end{aligned}$$

Seguindo de forma similar os passos usados para encontrar (4.9), pode ser mostrado que o primeiro termo de (4.10) torna-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 w \exp\{-\pi u w - w\} P(Z_{S_w^{-1}} = Z_{S_{w(1+u\theta)}^{-1}}) du dw = \\ \int_0^1 \frac{1 - \exp\{-(\pi u + 1)T\}[1 + (1 + \pi u)T]}{(1 + \pi u)^2} \mathcal{R}(\theta u) du, \end{aligned}$$

em que a igualdade acima segue da Proposição 3.9. Tomando $T \rightarrow \infty$ no termo acima, usando o Teorema da Convergência Dominada e $\lim_{T \rightarrow \infty} h(T) = 0$, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^t \exp\{-\pi s - t\} P(Y_t^{(n)} = Y_{t+s\theta}^{(n)}) ds dt = \int_0^1 \frac{\mathcal{R}(\theta u)}{(1 + \pi u)^2} du. \quad (4.11)$$

De forma parecida, também pode ser obtido que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_t^\infty \exp\{-(1 + \pi)t - s\} P(Y_t^{(n)} = Y_{t+s\theta}^{(n)}) ds dt = \int_1^\infty \frac{\mathcal{R}(\theta u)}{(\pi + u)^2} du, \quad (4.12)$$

que é o termo remanescente de (4.6). Concluimos o argumento aplicando os resultados (4.9), (4.11) e (4.12) em (4.6). $\square$

Capítulo 5

Processo de armadilha

Neste capítulo, estudamos o processo de armadilha $\{\mathcal{E}_t : t \geq 0\} = \{\tau_{\mathcal{X}_t} : t \geq 0\}$. Nossa principal motivação para estudar este processo é encontrar um resultado de envelhecimento não-integrado válido para todo $\beta \in (1, 2]$. Começaremos encontrando o limite de escala para $\mathcal{E}_t$.

5.1 Convergência

Nós agora apresentamos a topologia sob a qual a convergência fraca do processo rescalado $\mathcal{E}_t$ será tomada. Seja ℓ_T a distância L_1 em $D([0, T], \mathbb{R}^+)$ e $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min(\ell_n, 1)$. Com isto, estamos prontos para enunciar o teorema que nos dá o limite de escala do nosso processo de armadilha.

Teorema 5.1 *Sejam $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ as sequências definidas em (2.13) e (2.14), respectivamente. Para quase todo V , temos que*

$$\mathcal{E}_t^{(n)} \equiv b_n^{-1} \mathcal{E}_{a_n t} \implies G_t$$

em $D([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ equipada com a métrica ℓ , quando $n \rightarrow \infty$, em que o processo limite é dado por

$$\{G_t : t \geq 0\} = \{V_{Z_{S_t^{-1}}} - V_{Z_{S_t^{-1}-}} : t \geq 0\}.$$

Algumas trajetórias simuladas do processo de armadilha rescalado $\mathcal{E}_t^{(n)}$ usando a configuração dada no final da Seção 2.1 para alguns valores de β e de α e t variando de 0 a 10 são exibidas na Figura 5.1.

Figura 5.1: Gráficos de trajetórias simuladas do processo de armadilha rescalado $\mathcal{E}_t^{(n)}$ para alguns valores de β e α .

Antes de provar o teorema acima, apresentamos um resultado sobre a auto-similaridade do processo limite $\{G_t : t \geq 0\}$, o qual é útil para encontrar resultados de envelhecimento integrado.

Proposição 5.2 *O processo $\{G_t : t \geq 0\}$ é auto-similar de ordem $\beta^2 / \{1 + \alpha(\beta - 1)\}$.*

Prova. Usando a Proposição 3.9 e a auto-similaridade de V (de ordem $1/\alpha$), o resultado segue imediatamente. $\square$

O seguinte lema será útil para provar o Teorema 5.1. Defina o processo auxiliar $\tilde{\mathcal{E}}_t^{(n,\delta)} = g_n(V_{Y_t^{(n,\delta)} + d_n^{-1}} - V_{Y_t^{(n,\delta)}})$, para $t \geq 0$ e $\delta > 0$.

Lema 5.3 *Seja $G_t^{(\delta)} = V_{Y_t^{(\delta)}} - V_{Y_t^{(\delta)}-}$, para $t \geq 0$ e $\delta > 0$. Então, para quase toda trajetória de V , temos que*

$$\tilde{\mathcal{E}}_t^{(n,\delta)} \implies G_t^{(\delta)}$$

em $D([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ munida com a topologia J_1 quando $n \rightarrow \infty$.

Prova. Dados $T, \eta, \delta > 0$, tomamos $n_0, N \in \mathbb{N}$ e $S > 0$ satisfazendo (4.3) e (4.4); nós podemos e trocamos $D([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ por $D([0, T], \mathbb{R}^+)$. Temos que $Y_t^{(n,\delta)} \implies Y_t^{(\delta)}$ em $D([0, T], \mathbb{R}^+)$ munida com a topologia de Skorohod quando $n \rightarrow \infty$, em que $Y_t^{(\delta)}$ foi definido previamente (veja Capítulo 4) e é tal que $Y_t^{(\delta)} = W_i^{(\delta)}$, se $S_i^{(\delta)} \leq t < S_{i+1}^{(\delta)}$, para $0 \leq t \leq T$. Além disso, com probabilidade de pelo menos $1 - \eta$, o índice i varia em $\{0, 1, \dots, N\}$. O resultado segue da discussão acima, de (3.7) e da arbitrariedade de η . $\square$

Observação 5.4 *Do Lema 5.3, nós obtemos que $\tilde{\mathcal{E}}_t^{(n,\delta)} \implies G_t$ em $D([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ munida com a topologia J_1 tomando primeiro $n \rightarrow \infty$ e depois $\delta \downarrow 0$.*

Prova do Teorema 5.1. Introduzimos um outro processo auxiliar dado por $\bar{\mathcal{E}}_t^{(n,\delta)} = g_n(V_{\bar{Y}_t^{(n,\delta)} + d_n^{-1}} - V_{\bar{Y}_t^{(n,\delta)}})$, para $t \geq 0$ e $\delta > 0$, em que o processo $\bar{Y}_t^{(n,\delta)}$ foi definido previamente. Argumentando similarmente como foi feito no Lema 4.6 e usando o resultado (4.4), nós obtemos que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} J_1((\tilde{\mathcal{E}}_t^{(n,\delta)}), (\bar{\mathcal{E}}_t^{(n,\delta)})) = 0, \quad (5.1)$$

em probabilidade. Seguindo as ideias usadas em [15], argumentaremos que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \ell((\tilde{\mathcal{E}}_t^{(n)}, (\bar{\mathcal{E}}_t^{(n,\delta)})) = 0, \quad (5.2)$$

em probabilidade. É simples ver que a prova do teorema segue dos resultados (5.1), (5.2) e usando a Observação 5.4.

Para mostrar (5.2), é suficiente considerar ℓ_T no lugar de ℓ com $T \equiv T(n, \Delta) = \tilde{C}_\Delta^{(n)}$, em que Δ é fixado arbitrariamente, desde que $T \rightarrow \infty$ em probabilidade quando $\Delta \rightarrow \infty$ uniformemente para todo n suficientemente grande. Isto pode ser visto notando que T domina $\tilde{C}_\Delta^{(n,\delta)}$ e usando $S_t^{(\delta)} \xrightarrow{q.c.} \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ (como argumentado na prova do Lema 4.5) e a convergência fraca $\tilde{C}_t^{(n,\delta)} \implies S_t^{(\delta)}$ em $D([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ munida com a topologia J_1 quando $n \rightarrow \infty$.

Fora de um evento de probabilidade que se anula quando $n \rightarrow \infty$, temos que os processos $\tilde{\mathcal{E}}_t^{(n)}$ e $\bar{\mathcal{E}}_t^{(n,\delta)}$ coincidem em $[0, T]$ sempre que o primeiro processo está em uma δ -armadilha. Portanto, a distância ℓ_T entre esses processos é limitada por cima por um termo que se anula quando $\epsilon \downarrow 0$ mais o seguinte termo:

$$\max_{x_i^{(n)} \in \mathcal{F}_\delta^{(n)} \cap I_\epsilon, i \geq 1} g_n(V_{x_i^{(n)} + d_n^{-1}} - V_{x_i^{(n)}}) \sum_{x \in (\mathcal{F}_\delta^{(n)})^c \cap d_n^{-1} \mathbb{Z} \cap I_\epsilon} g_n(V_{x + d_n^{-1}} - V_x) \ell_n(S, x) \bar{T}_{x d_n}(nS), \quad (5.3)$$

em que $\epsilon > 0$ é arbitrário e I_ϵ é definido em torno de (3.3). Desde que o máximo em (5.3) é tomado em um conjunto compacto, temos que seu limite quando $n \rightarrow \infty$ é limitado. O outro termo, o qual envolve uma soma, vai para 0 em probabilidade (como visto antes ao longo da tese) quando $n \rightarrow \infty$ e $\delta \downarrow 0$. Completamos a prova do teorema tomando $\epsilon \downarrow 0$. $\square$

5.2 Envelhecimento não-integrado

Apresentamos um resultado de envelhecimento não-integrado para a seguinte função de envelhecimento:

$$\bar{\Omega}(t, s) = P\left(\sup_{r \in [0, t]} \tau_{\mathcal{X}_r} < \sup_{r \in [0, t+s]} \tau_{\mathcal{X}_r}\right),$$

para $s, t \geq 0$. Esta quantidade mede a “perspectiva por novidade no sistema”, como proposta em [13].

Teorema 5.5 *Existe uma função não-trivial $\Omega : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ tal que*

$$\lim_{\substack{t, s \rightarrow \infty \\ t/s \rightarrow \theta}} \bar{\Omega}(s, t) = \Omega(\theta),$$

para $\theta > 0$. Além disso, $\Omega(\theta) = P(\sup_{r \in [0, t]} G_r < \sup_{r \in [0, t+s]} G_r)$.

Prova. Primeiro, argumentamos que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{r \in [0, 1]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)} \geq g_n(\delta)\right) = 1, \quad (5.4)$$

em que $g_n(\cdot)$ foi definida na Seção 2.1. Sob o evento $\{\sup_{r \in [0, 1]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)} \geq g_n(\delta)\}$, temos que $\sup_{r \in [0, 1]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)} = \sup_{r \in [0, 1]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n, \delta)}$. Daí, usamos o resultado $g_n(\delta) \rightarrow \delta$ quando

$n \rightarrow \infty$, para qualquer $\delta > 0$ (veja Proposição 3.1 de [13]), e o Lema 5.3 para obter que

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{r \in [0,1]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)} \geq g_n(\delta)\right) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{r \in [0,1]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)} \geq g_n(\delta)\right) \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} P\left(\sup_{r \in [0,1]} G_r^{(\delta)} \geq \delta\right) = 1, \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue da Observação 5.4, do resultado (5.1) e usando o fato de que $G_t^{(\delta)}$ é contínuo em $t = 1$ com probabilidade 1. Assim, obtemos o resultado (5.4). Agora, sem perda de generalidade, trocamos s e t por θa_n e a_n , respectivamente. Usamos o resultado (5.4) para obter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Omega}(\theta a_n, a_n) = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{r \in [0,1]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)} < \sup_{r \in [0,1+\theta]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)}, \sup_{r \in [0,1]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)} \geq g_n(\delta)\right).$$

Argumentando como antes, sob o evento $\{\sup_{r \in [0,1]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)} \geq g_n(\delta)\}$, temos a seguinte igualdade: $\sup_{r \in [0,1]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)} = \sup_{r \in [0,1]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)}$. Além disso, notamos que $\{\sup_{r \in [0,1]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)} < \sup_{r \in [0,1+\theta]} \tilde{\mathcal{E}}_r^{(n)}\} = \{\sup_{r \in [0,1]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)} < \sup_{r \in [0,1+\theta]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)}\}$ sob o mesmo evento como antes.

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Omega}(\theta a_n, a_n) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{r \in [0,1]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)} < \sup_{r \in [0,1+\theta]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)}, \sup_{r \in [0,1]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)} \geq g_n(\delta)\right) \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{r \in [0,1]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)} < \sup_{r \in [0,1+\theta]} \bar{\mathcal{E}}_r^{(n,\delta)}\right) \\ &= P\left(\sup_{r \in [0,1]} G_r < \sup_{r \in [0,1+\theta]} G_r\right), \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue de (5.1), do Lema 5.3 e da Observação 5.4. $\square$

Nós podemos também obter um resultado de envelhecimento integrado para Ω similarmente ao Teorema 4.1 acima, com a mesma linha de argumentação.

Capítulo 6

Localização

A condição (1.1) é equivalente a $P(\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{Z}} P(\mathcal{X}_t = i | \tau) > 0) = 1$. Neste capítulo, mostraremos que existe localização para $\mathcal{X}_t$ quando $\alpha \in (0, 1)$ e ausência de localização quando consideramos uma família de distribuições de τ tal que $\alpha \in (1, 2]$. O caso do passeio aleatório simples simétrico ($\beta = 2$) foi estudado por Fontes, Isopi e Newman (1999) [12]. A estratégia que nós usamos aqui para provar existência e ausência de localização (dependendo de α) para $\mathcal{X}$ é a mesma de [12].

Teorema 6.1 *Para $\alpha \in (0, 1)$, o processo $\mathcal{X}_t$ pode ser localizado.*

Prova. Defina a variável aleatória discreta $I \in \mathbb{Z}$ que satisfaz $I \in (-d_n, d_n)$, em que d_n foi definido em (2.2), e $\tau_I = \max_{-d_n \leq i \leq d_n} \tau_i$, ou equivalentemente $b_n^{-1} \tau_I = \max_{-d_n \leq i \leq d_n} b_n^{-1} \tau_i$. Primeiro, mostraremos que

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{Ba_n} \int_0^{Ba_n} 1\{\mathcal{X}_t = I\} ds > \epsilon\right) = 1. \quad (6.1)$$

O resultado acima e alguns argumentos adicionais conduzem a prova do teorema como discutiremos mais tarde. A probabilidade acima é limitada por baixo por

$$P\left(\frac{1}{Ba_n} \int_0^{C_n} 1\{\mathcal{X}_t = I\} ds > \epsilon\right) - P(C_n > Ba_n),$$

em que $\epsilon > 0$ é fixado arbitrariamente. Do Teorema 3.6, temos que $a_n^{-1} C_n \implies S_1$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, obtemos que

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(C_n > Ba_n) = 0.$$

Pode ser checado que a seguinte igualdade em distribuição vale:

$$\frac{1}{a_n} \int_0^{C_n} 1\{\mathcal{X}_t = I\} ds \stackrel{d}{=} \frac{\tau_I}{b_n} \frac{L(n, I)}{r_n} \bar{T}_I(n). \quad (6.2)$$

Nós agora mostramos que as variáveis aleatórias $b_n^{-1}\tau_I$, $r_n^{-1}L(n, I)$ e $\bar{T}_I(n)$ envolvidas na igualdade acima são estritamente positivas assintoticamente em probabilidade.

Para $x > 0$, temos que

$$P(b_n^{-1}\tau_I < x) = (1 - P(\tau_0 \geq b_n x))^{2d_n+1} = \left(1 - \frac{(\kappa^+ + o(1))s(d_n^{1/\alpha}w(n)x)}{x^\alpha d_n w(n)^\alpha}\right)^{2d_n+1},$$

para todo n suficientemente grande. Usando (2.6), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(b_n^{-1}\tau_I < x) = \exp(-2\kappa^+/x^\alpha),$$

para todo $x > 0$. Portanto, $b_n^{-1}\tau_I$ é estritamente positiva em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$.

Agora definimos $\mathcal{I}_n = d_n^{-1}I$. Temos que $\mathcal{I}_n$ segue uma distribuição uniforme em $\{i/d_n : i \in [-d_n, d_n] \cap \mathbb{Z}\}$. Daí, segue que $\mathcal{I}_n$ converge em distribuição para uma variável aleatória contínua Λ seguindo uma distribuição uniforme em $(-1, 1)$. Agora retornamos para nosso estudo do comportamento em distribuição das variáveis envolvidas em (6.2). Nós temos que $r_n^{-1}L(n, I) = \phi_n(1, \mathcal{I}_n)$. Desde que $\phi_n(1, x)$ converge fracamente para $\phi(1, x)$ para todo x e este limite é quase certamente contínuo em x , usamos o Teorema do Mapeamento e a convergência fraca de $\mathcal{I}_n$ para Λ para encontrar que $r_n^{-1}L(n, I)$ converge em distribuição para $\phi(1, \Lambda)$ e, portanto, também é estritamente positiva em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$. Desta convergência fraca, temos que $L(n, I) \rightarrow \infty$ em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$. Assim, nós imediatamente obtemos que $\bar{T}_I(n) \rightarrow 1$ em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$.

Assim, a probabilidade em (6.1) é limitada por baixo por

$$P\left(\frac{\tau_I}{b_n} > \epsilon B, \frac{L(n, I)}{r_n} > \epsilon B, \bar{T}_I(n) > \epsilon B\right)$$

mais um termo de ordem $o(1)$ quando $n \rightarrow \infty$. Dos resultados acima sobre as variáveis aleatórias envolvidas em (6.2), temos que os eventos $\{\tau_I/b_n > \epsilon B\}$, $\{L(n, I)/r_n > \epsilon B\}$ e $\{\bar{T}_I(n) > \epsilon B\}$ tem probabilidade convergindo para 1 quando tomamos primeiro $n \rightarrow \infty$ e depois $\epsilon \downarrow 0$. Daí, (6.1) segue.

Agora, usando o fato de que, dada uma variável aleatória Ξ e constantes $\epsilon, \delta > 0$,

$$P\left(\Xi \geq \frac{\epsilon}{1 - \sqrt{\delta}}\right) \geq 1 - \delta \Rightarrow P(E(\Xi|\tau) \geq \epsilon) \geq 1 - \sqrt{\delta},$$

(6.1) produz

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{Ba_n} \int_0^{Ba_n} P(\mathcal{X}_t = I|\tau) ds > \epsilon\right) = 1.$$

Desde que $\sup_i P(\mathcal{X}_s = i|\tau) \geq P(\mathcal{X}_s = I|\tau)$, temos que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{n} \int_0^n \sup_i P(\mathcal{X}_t = i|\tau) ds > \epsilon\right) = 1,$$

do qual, imediatamente, segue que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\sup_{t > s} \sup_i P(\mathcal{X}_t = i|\tau) ds > \epsilon\right) = 1,$$

assim concluindo a prova do teorema. $\square$

Nós agora enunciamos e provamos nosso último resultado sobre localização. Por razões técnicas, nós agora supomos que a função $h(\cdot)$ relacionada à função de distribuição $F(\cdot)$ de ϵ_1 é $h(x) = 1$, assim podemos tomar $d_n = n^{1/\beta}$; veja (2.2). Por outro lado, supomos aqui que existe $p \in (1, 2]$ tal que $E(\tau_0^p) < \infty$, em que τ é uma variável aleatória não-negativa. Esta suposição é mais geral que aquela anterior dada em (2.7) para $\alpha \in (1, 2]$.

Teorema 6.2 *Sob as suposições acima, temos ausência de localização para $\mathcal{X}_t$.*

Prova. Começamos, sem perda de generalidade, considerando que $E(\tau_0) = 1$. Para provar o teorema, primeiro mostraremos que existe $\nu \in (0, 1)$ tal que o seguinte resultado vale:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(|C_n - n| > n^\nu | \tau) = 0 \quad \text{para quase todo } \tau. \quad (6.3)$$

Temos que

$$C_n - n = \sum_{i=0}^n \bar{\tau}_{X_i} T_i + \sum_{i=0}^n \bar{T}_i, \quad (6.4)$$

em que temos definido $\bar{\tau}_i = \tau_i - 1$ e $\bar{T}_j = T_j - 1$ para $i \in \mathbb{Z}$ e $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Do Teorema 1.8.8 de [10], temos que o análogo de (6.3) pode ser obtido para a segunda soma do

lado direito de (6.4). Portanto, podemos concentrar a nossa atenção em encontrar o análogo de (6.3) para a primeira soma do lado direito de (6.4).

Temos que $\sum_{i=0}^n \bar{\tau}_{X_i} T_i$ pode ser representado em distribuição por

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\tau}_k G_k(L(n, k)), \quad (6.5)$$

em que $\{G_k(\mu)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma família de variáveis aleatórias iid seguindo distribuição gama com média e variância iguais a $\mu > 0$ e independente de X e τ .

Dado $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, em que ϵ_0 depende de β e α e será especificado mais tarde, tomamos A_ϵ satisfazendo (3.3) para obter

$$P(L(n, k) = 0, \forall |k| > A_\epsilon n^{1/\beta}) \geq 1 - \epsilon.$$

Também temos que

$$P(L(n, k) \leq n^{1-1/\beta+\epsilon}, \forall |k| \leq A_\epsilon n^{1/\beta}) \geq 1 - \kappa_M A_\epsilon n^{-(M\epsilon-1/\beta)}, \quad (6.6)$$

em que tomamos $M \in \mathbb{N}$ satisfazendo $M > (\beta\epsilon)^{-1}$ e $\kappa_M > 0$ é uma constante dependendo somente de M . Para ver que a desigualdade acima é válida, note que a probabilidade no lado esquerdo de (6.6) é limitada por baixo por

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{|k| \leq A_\epsilon n^{1/\beta}} P(L(n, k) > n^{1-1/\beta+\epsilon}) &\geq 1 - \sum_{x \in (-A_\epsilon, A_\epsilon) \cap n^{-1/\beta} \mathbb{Z}} E(\phi_n^M(1, x)) \\ &\geq 1 - 2A_\epsilon n^{1/\beta} E(\phi_n^M(1, 0)) \\ &\geq 1 - \kappa_M A_\epsilon n^{-(M\epsilon-1/\beta)}, \end{aligned}$$

em que na segunda e terceira desigualdades, usamos os resultados dados em (3.5) com $M > (\beta\epsilon)^{-1}$ ($M \in \mathbb{N}$).

Sob o evento que aparece em (6.6), a variável aleatória $G_k(L(n, k))$ é estocasticamente menor que $G_0(n^{1-1/\beta+\epsilon})$. Usando isto, pode ser mostrado que

$$\begin{aligned} P(G_k(L(n, k)) \leq 2n^{1-1/\beta+\epsilon}, \forall |k| \leq A_\epsilon n^{1/\beta}) &\geq 1 - \sum_{|k| \leq A_\epsilon n^{1/\beta}} P(G_k(L(n, k)) > 2n^{1-1/\beta+\epsilon}) \\ &\geq 1 - 2A_\epsilon n^{1/\beta} P\left(\frac{G_0(n^{1-1/\beta+\epsilon})}{n^{1-1/\beta+\epsilon}} > 2\right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Usando um argumento de Grandes Desvios, obtemos que para todo n suficientemente grande

$$P\left(\frac{G_0(n^{1-1/\beta+\epsilon})}{n^{1-1/\beta+\epsilon}} > 2\right) \leq \exp\{-(1 - \log 2)n^{1-1/\beta+\epsilon}\}.$$

Aplicando este resultado em (6.7) e tomando $n \rightarrow \infty$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(G_k(L(n, k)) \leq 2n^{1-1/\beta+\epsilon}, \forall |k| \leq A_\epsilon n^{1/\beta}) = 0. \quad (6.8)$$

Agora escrevemos a soma (6.5) restrita a $|k| \leq A_\epsilon n^{1/\beta}$ e dividida por n^ν

$$\frac{1}{n^{\nu-1+1/\beta-\epsilon}} \sum_{|k| \leq A_\epsilon n^{1/\beta}} \bar{\tau}_k \frac{G_k(L(n, k))}{n^{1-1/\beta+\epsilon}}.$$

Com isto, sob o evento dado em (6.8) e seguindo a prova do Teorema 1.8.8 de [10], é possível escolher ν suficientemente perto de 1 e ϵ_0 suficientemente próximo de 0 satisfazendo $\beta(\nu - 1 - \epsilon_0) + 1 \geq 1/p$, assim que, para quase todo τ e todo n suficientemente grande, a soma acima é menor que 1 (por exemplo). Com isto e tomando ϵ indo para 0, obtemos que (6.3) é válida.

Completamos agora a prova do teorema. Para isto, seja N_t o número de saltos realizados por $\mathcal{X}$ até o tempo t . Então, temos a seguinte igualdade em distribuição: $\mathcal{X}_t \stackrel{d}{=} X_{N_t}$ para todo $t \geq 0$. De (6.3), pode ser verificado que o seguinte resultado vale (veja a prova do Lema 4.1 de [12]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(|N_t - t| > t^\nu | \tau) = 0.$$

Portanto, $P(\mathcal{X}_t = i | \tau) = P(X_{N_t} = i | \tau)$ é limitada por cima por

$$P(X_n = i \text{ para algum } n \in [t - t^\nu, t + t^\nu])$$

mais um termo que se anula quando $t \rightarrow \infty$. Fixamos ν' satisfazendo $\nu/\beta < \nu' < 1/\beta$ e denotamos o evento na probabilidade acima por $A_{t,i}$ (por simplicidade de notação).

Temos que

$$\begin{aligned} P(A_{t,i}) &= P(A_{t,i} \cap \{X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor} \in [i - t^{\nu'}, i + t^{\nu'}]\}) + P(A_{t,i} \cap \{X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor} \notin [i - t^{\nu'}, i + t^{\nu'}]\}) \\ &\leq P(X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor} \in [i - t^{\nu'}, i + t^{\nu'}]) + P(\cup_{m \in [t-t^\nu, t+t^\nu]} \{|X_m - X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor}\} > t^{\nu'}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Seja $\gamma(\cdot)$ a densidade de uma variável aleatória β -estável em $\mathbb{R}$, associada a função característica (2.4) com $t = 1$, e defina $\sigma \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} \gamma(x)$ (que é finita). Considerando o

primeiro termo no lado direito de (6.9), temos que

$$\begin{aligned}
P(X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor} \in [i-t^{\nu'}, i+t^{\nu'}]) &\leq \sum_{k \in [i-t^{\nu'}, i+t^{\nu'}]} P(X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor} = k) \leq \\
&\lfloor t-t^\nu \rfloor^{-1/\beta} \sum_{k \in [i-t^{\nu'}, i+t^{\nu'}]} \left| \lfloor t-t^\nu \rfloor^{1/\beta} P(X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor} = k) - g(k/\lfloor t-t^\nu \rfloor^{1/\beta}) \right| + \\
&\lfloor t-t^\nu \rfloor^{-1/\beta} \sum_{k \in [i-t^{\nu'}, i+t^{\nu'}]} g(k/\lfloor t-t^\nu \rfloor^{1/\beta}) \leq \\
&\lfloor t-t^\nu \rfloor^{-1/\beta} t^{\nu'} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \lfloor t-t^\nu \rfloor^{1/\beta} P(X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor} = k) - g(k/\lfloor t-t^\nu \rfloor^{1/\beta}) \right| + \sigma \right).
\end{aligned}$$

Do Teorema 4.2.1 de [16] (tomando lá $A_n = 0$, $B_n = n^{1/\beta}$, $a = 0$ e $h = 1$), temos que $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \lfloor t-t^\nu \rfloor^{1/\beta} P(X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor} = k) - g(k/\lfloor t-t^\nu \rfloor^{1/\beta}) \right| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Este resultado e $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\nu'} \lfloor t-t^\nu \rfloor^{-1/\beta} = 0$ (desde que $\nu' < 1/\beta$) implicam que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{Z}} P(X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor} \in [i-t^{\nu'}, i+t^{\nu'}]) = 0. \quad (6.10)$$

Usando a propriedade de Markov, pode ser verificado que o segundo termo no lado direito de (6.9) é igual a

$$P(\cup_{m' \in [1, 2t^\nu]} \{|X_{m'}| \geq t^{\nu'}\}) = P(\max_{m' \in [1, 2t^\nu]} |X_{m'}| \geq t^{\nu'}) = P(\sup_{s \in [0, 2]} |Z_s^{(t^\nu)}| \geq t^{\nu'-\nu/\beta}).$$

Desde que $\nu/\beta < \nu'$, para qualquer $A > 0$ fixado, temos que

$$P(\sup_{s \in [0, 2]} |Z_s^{(t^\nu)}| \geq t^{\nu'-\nu/\beta}) \leq P(\sup_{s \in [0, 2]} |Z_s^{(t^\nu)}| \geq A)$$

para todo t suficientemente grande. Usando a convergência fraca de $Z_s^{(n)}$ para Z_s , nós obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\sup_{s \in [0, 2]} |Z_s^{(t^\nu)}| \geq t^{\nu'-\nu/\beta}) \leq P(\sup_{s \in [0, 2]} |Z_s| \geq A).$$

Desde que A é arbitrário, tomamos $A \rightarrow \infty$ e obtemos o seguinte resultado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\cup_{m \in [t-t^\nu, t+t^\nu]} \{|X_m - X_{\lfloor t-t^\nu \rfloor}\} > t^{\nu'}) = 0. \quad (6.11)$$

Os resultados (6.9), (6.10) e (6.11) nos dão que $\sup_i P(\mathcal{X}_t = i | \tau) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ com probabilidade 1. $\square$

Capítulo 7

Resultados sobre processos quase-estáveis

Nós aqui apresentamos alguns novos resultados sobre processos quase-estáveis, incluindo um que nos diz que a função $\mathcal{R}(\cdot)$ é não-trivial. Introduzimos agora a notação que será utilizada abaixo. Sejam B e C conjuntos Borelianos de $\mathbb{R}$. Definimos $B + C = \{x + y : x \in B, y \in C\}$. Por simplicidade, também definimos $Y_t = Z_{S_t^{-1}}$, para $t \geq 0$. Para uma trajetória fixada de V , defina $\mathcal{T} \equiv \bigcup_{\delta > 0} \mathcal{T}_\delta$, que é o conjunto de armadilhas, e $\bar{Y}_t^{(\delta)} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_t^{(n, \delta)}$, para $t \geq 0$ e $\delta > 0$. ' .

Proposição 7.1 *Para todo $t > 0$, temos que $\mathbb{P}(Y_t \in \mathcal{T}) = 1$ para quase toda trajetória de V .*

Prova. Começamos mostrando que para qualquer $t > 0$, temos

$$\int_0^t \mathbb{P}(Y_s \in \mathcal{T}) ds = t. \quad (7.1)$$

Argumentando de forma similar como feito na prova do Lema 4.5, temos que, para $t, \eta, \delta > 0$ fixados, existe $\Delta > 0$ tal que

$$\int_0^t \mathbb{P}(Y_s \neq \bar{Y}_s^{(\delta)}) ds \leq \mathbb{E} \left(\sum_{x \in \mathcal{T}_\delta^c} (V_x - V_{x-}) \phi(\Delta, x) \right) + \eta t.$$

Usando o fato de que $\sum_{x \in \mathcal{T}_\delta^c} (V_x - V_{x-}) \phi(\Delta, x) \xrightarrow{p} 0$ quando $\delta \downarrow 0$ e a arbitrariedade de η , obtemos que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_0^t \mathbb{P}(Y_s \neq \bar{Y}_s^{(\delta)}) ds = 0.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{P}(Y_s \in \mathcal{T}) ds &= \lim_{\delta \downarrow 0} \int_0^t \mathbb{P}(Y_s \in \mathcal{T}_\delta, Y_s = \bar{Y}_s^{(\delta)}) ds \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \int_0^t \mathbb{P}(Y_s = \bar{Y}_s^{(\delta)}) ds = t, \end{aligned}$$

assim produzindo (7.1). Para $d > 0$ arbitrário, defina o conjunto $B_d = \{s \in (0, d) : \mathbb{P}(Y_s \in \mathcal{T}) = 1\}$. De (7.1), nós obtemos que $\mathcal{L}(B_d) = d$ (lembre-se que $\mathcal{L}$ denota a medida de Lebesgue).

Pode ser visto usando a propriedade de Markov que se t e s pertencem a B_d , então $B_d + B_d \subset B_{2d}$. Desde que a soma de conjuntos com medida de Lebesgue positiva contém um intervalo (veja o Teorema 4.1 de [11]), obtemos que B_{2d} contém um subintervalo para todo $d > 0$. Seja $B = \bigcup_{d>0} B_d$. Temos que

- 1) Da propriedade de Markov, $C + D \subset B$ para quaisquer subconjuntos C e D de B ;
- 2) Do resultado acima, B contém um subintervalo de $[0, d]$ para todo $d > 0$.

Seja $I_1 \equiv [d_1, d_2]$ um subintervalo de $[0, d]$ obtido de 2), com $d_1 < d_2$. De 1), temos que $I_1 + I_1 = [2d_1, 2d_2] \subset B$. Assim, segue que $I_2 \equiv I_1 \cup (I_1 + I_1) = [d_1, 2d_2] \subset B$. Indutivamente, encontramos que $I_{n+1} \equiv I_1 \cup (I_n + I_1) = [d_1, nd_2] \subset B$ para $n \in \mathbb{N}$. Segue que $[d_1, \infty) \subset B$. Desde que d é arbitrário, concluimos que $B = (0, \infty)$. $\square$

Lema 7.2 *Para todo $t > 0$ e $x \in \mathcal{T}$, temos que $\mathbb{P}_x(Y_t = x) > 0$ para quase todo V , em que o x em $\mathbb{P}_x(\cdot)$ significa que $Y_0 = x$.*

Prova. Sejam $x \in \mathcal{T}$ e $d > 0$. Para todo $d > 0$, temos que

$$\int_0^d \mathbb{P}_x(Y_s = x) ds = \mathbb{E}_x \left(\int_0^d 1\{Y_s = x\} ds \right) = \mathbb{E}_x[\phi(x, S_d^{-1})](V_x - V_{x-}) > 0, \quad (7.2)$$

desde que $\mathbb{P}_x$ -quase certamente temos que $S_t > 0$ e $\phi(x, t) > 0$ para todo $t > 0$, em que $\phi(\cdot, \cdot)$ é o tempo local de Z_t (veja o primeiro resultado de [22], na página 632).

Seja $F_d = \{s \in (0, d) : \mathbb{P}_x(Y_s = x) > 0\}$. De (7.2), obtemos que $\mathcal{L}(F_d) > 0$ para todo $d > 0$. Defina $F = \bigcup_{d>0} F_d$. Argumentando similarmente como feito na prova da Proposição 7.1, obtemos que $F = (0, \infty)$, assim provando o resultado desejado. $\square$

Corolário 7.3 *A função $\mathcal{R}(\theta) = P(Z_{S_1^{-1}} = Z_{S_{1+\theta}^{-1}}) = P(Y_1 = Y_{1+\theta})$ é não-trivial.*

Prova. Da Proposição 7.1 e do Lema 7.2, nós imediatamente obtemos que $\mathbb{P}(Y_1 = Y_{1+\theta}) = \sum_{x \in \mathcal{T}} \mathbb{P}(Y_1 = x) \mathbb{P}_x(Y_\theta = x) > 0$ para quase todo V e para todo $\theta > 0$. Portanto, $\mathcal{R}(\theta) = E[\mathbb{P}(Y_1 = Y_{1+\theta})] > 0$, em que a esperança é tomada com respeito a V . Que $\mathcal{R}(\theta)$ não é constante, pode ser verificado mostrando que, para quase todo V , temos que $\mathbb{P}_x(Y_t = y) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para cada $x, y \in \mathcal{T}$. Nós deixamos os detalhes como um exercício. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Barlow, M.T., Černý, J. (2011). Convergence to fractional kinetics for random walks associated with unbounded conductances. *Probability Theory and Related Fields*, 149, 639-673.
- [2] Ben Arous, G., Černý, J. (2005). Bouchaud's model exhibits two different aging regimes in dimension one. *Annals of Applied Probability*, 15, 1161-1192.
- [3] Ben Arous, G., Černý, J. (2007). Scaling limit for trap models on $\mathbb{Z}^d$. *Annals of Probability*, 35, 2356-2384.
- [4] Ben Arous, G., Černý, J., Mountford, T. (2006). Aging for Bouchaud's model in dimension two. *Probability Theory and Related Fields*, 134, 1-43.
- [5] Boylan, E.S. (1964). Local times for a class of Markov processes. *Illinois Journal of Mathematics*, 8, 19-39.
- [6] Borodin, A.N. (1985). The asymptotic behavior of local times of recurrent random walks with infinite variance. *Theory of Probability and its Applications*, 26, 758-772.
- [7] Bouchaud, J.-P., Dean, D. S. (1995). Aging on Paris tree. *J. Phys. I France*, 5, 265-286.
- [8] Černý, J. (2011). On two-dimensional random walk among heavy-tailed conductances. *Electronic Journal of Probability*, 16, 293-313.
- [9] Compte, A., Bouchaud, J.-P. (1998). Localization in one-dimensional random random walks. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 31, 6113-6121.
- [10] Durrett, R. (1999). Probability: Theory and Examples. *Duxbury Press, Belmont*.

- [11] Leth, S.C. (1988). Applications of Nonstandard Models and Lebesgue Measure to Sequences of Natural Numbers. *Transactions of the American Mathematical Society*, 307, 457-468.
- [12] Fontes, L.R.G., Isopi, M., Newman, C.M. (1999). Chaotic time dependence in a disordered spin system. *Probability Theory and Related Fields*, 115, 417-443.
- [13] Fontes, L.R.G., Isopi, M., Newman, C.M. (2002). Random walks with strongly inhomogeneous rates and singular diffusions: convergence, localization and aging in one dimension. *Annals of Probability*, 30, 579-604.
- [14] Fontes, L.R.G., Mathieu, P. (2008). K-processes, scaling limit and aging for the trap model in the complete graph. *Annals of Probability*, 36, 1322-1358.
- [15] Fontes, L.R.G., Mathieu, P. (2010). On the dynamics of trap models in $\mathbb{Z}^d$. Preprint ArXiv: 1010.5418v1.
- [16] Ibragimov, I.A., Linnik, Yu. V. (1971). Independent and Stationary Sequences of Random Variables. *Walters-Noordhoff, Groningen*.
- [17] Kurenok, V.P. (2000). On the “zero-one” law for integral functionals of quasistable-type processes. (Russian) *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 44, 33-36.
- [18] Le Gall, J.F., Rosen, J. (1991). The range of stable random walks. *Annals of Probability*, 19, 650-705.
- [19] Marshall, A.W., Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44.
- [20] Mourrat, J.C. (2011). Scaling limit of the random walk among random traps on $\mathbb{Z}^d$. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 47, 813-849.
- [21] R Development Core Team (2008). R: A Language and Environment for Statistical Computing. *R Foundation for Statistical Computing*. <http://www.R-project.org>.
- [22] Stone, C. (1963). The set of zeros of a semistable process. *Illinois Journal of Mathematics*, 7, 631-637.
- [23] Whitt, W. (2002). Stochastic-Process Limits. *Springer, New York*.