**Generalizações e teoremas limites para
modelos estocásticos de rumores**

Pablo Martín Rodríguez

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Fabio Prates Machado

Co-orientador: Prof. Dr. Élcio Lebensztayn

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo, 10 de novembro de 2010

Generalizações e teoremas limites para modelos estocásticos de rumores

Esta versão definitiva da tese
contém as correções e alterações sugeridas pela
Comissão Julgadora durante a defesa realizada
por Pablo Martín Rodríguez em 13/10/2010.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Fábio Prates Machado (orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Élcio Lebensztayn (co-orientador) - IME - USP
- Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia - UNICAMP
- Prof. Dr. Sebastian Pablo Grynberg - UBA
- Prof. Dr. Pablo José Groisman - UBA

Aos meus pais Victor e Mary

Aos meus irmãos Victoria, Emanuel e Lucía

Às minhas queridas Paula e Luisa

*À memória de Miriam Elizabeth Pacheco,
professora e amiga da Universidad Nacional de la Patagonia,
que indicou esse caminho para minha vida.*

Agradecimentos

Aos meus orientadores Fábio Machado e Élcio Lebenstzayn pela confiança, apoio e orientação durante esses anos. Sem eles este trabalho não teria sido possível.

Ao grupo de probabilidade do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelas ótimas condições para a realização desta pesquisa. Em especial aos professores Luiz Renato Fontes, Pablo Ferrari, Serguei Popov e Vladimir Belitsky por seus ensinamentos.

A todos os colegas e amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram para o enriquecimento deste trabalho. Pelas tão variadas quanto interessantes discussões agradeço a Cristian Coletti, Christophe Gallesco, Alexsandro Gallo, Renato Gava, Rafael Grisi, Fabio Marcellus, Mauricio Martinez, Bernardo Marques, Valdivino Vargas, Natalia Viana, Sebastián Vidal e Sandra Zapata. Em especial a Paula Cadavid por suas críticas e sugestões desde o começo deste processo.

Às pessoas das diferentes instituições que tive oportunidade de visitar. Em particular, merecem meu especial agradecimento os professores Rahul Roy, Anish Sarkar e Antar Bandyopadhyay pela hospitalidade e atenção dispensada na minha visita ao Indian Statistical Institute, Delhi Centre. Pelos mesmos motivos, na minha visita à Universidad de Buenos Aires, agradeço especialmente a Nahuel Soprano, Sergio López e aos professores Pablo Groisman e Inés Armendáriz.

À comissão julgadora pelas valiosas críticas e correções que ajudaram a melhorar esta versão final da tese.

À FAPESP (Processo 2006/04524-0), pelo apoio financeiro.

Resumo

Os modelos de Daley-Kendall e Maki-Thompson são os dois modelos estocásticos para difusão de rumores mais citados até o momento. Em ambos, uma população finita fechada e totalmente misturada é subdividida em três classes de indivíduos denominados ignorantes, informantes e contidos. Depois de um rumor ser introduzido na população, difunde-se através desta seguindo determinadas regras que dependem da classe à qual a pessoa que sabe do rumor pertence. Tanto a proporção final de indivíduos que nunca chegam a conhecer o rumor quanto o tempo que este demora em ser difundido são variáveis de interesse para os modelos propostos.

As técnicas encontradas na literatura para estudar modelos de rumores são o princípio de difusão de constantes arbitrárias; argumentos de martingais; o método de funções geradoras e a análise de versões determinísticas do processo. Neste trabalho apresentamos uma alternativa para essas técnicas baseando-nos na teoria de cadeias de Markov “density dependent”. O uso desta nova abordagem nos permite apresentar resultados assintóticos para um modelo geral que tem como casos particulares os famosos modelos de Daley-Kendall e Maki-Thompson, além de variações de modelos de rumores apresentados na literatura recentemente.

Palavras-chave: rumores estocásticos, modelo de Daley-Kendall, modelo de Maki-Thompson, teoremas limites, cadeias de Markov “density dependent”.

Abstract

Daley-Kendall and Maki-Thompson models are the two most cited stochastic models for the spread of rumours phenomena, in scientific literature. In both, a closed homogeneously mixing population is subdivided into three classes of individuals called ignorants, spreaders and stiflers. After a rumor is introduced in the population, it spreads by following certain rules that depend on the class to which the individual who knows the rumor belongs. Both the final proportion of the population never hearing the rumor and the time it takes are variables of interest for the proposed models.

The main tools used to study stochastic rumours have been the principle of the diffusion of arbitrary constants, martingale arguments, generating functions and the study of analogue deterministic versions. Relying on the theory of density dependent Markov chains, we present an alternative to these tools. This approach allows us to establish asymptotical results for a general model that has as particular cases the classical Daley-Kendall and Maki-Thompson models, and other variations for rumour models reported in the literature recently.

Keywords: stochastic rumours, Daley-Kendall model, Maki-Thompson model, limit theorems, density dependent Markov chains.

Sumário

Lista de Símbolos	vii
1 Introdução	1
1.1 Considerações preliminares	1
1.2 Epidemias e rumores	2
1.3 O modelo de Daley-Kendall	4
1.4 O modelo de Maki-Thompson	6
2 Generalização do modelo de Maki-Thompson	7
2.1 O modelo	7
2.2 Teoremas limites	9
2.3 Provas	14
2.3.1 Mudança do tempo	15
2.3.2 Redução da dimensão e limite determinístico	15
2.3.3 Provas dos teoremas	17
3 Generalização do modelo de Daley-Kendall	19
3.1 O modelo	19
3.2 Teoremas limites	21
3.3 Provas	24
3.3.1 Mudança do tempo	24
3.3.2 Limite determinístico	24
3.3.3 Provas dos teoremas	26
4 Uma abordagem via sistemas de partículas	28
4.1 O modelo [ALMM]	28
4.1.1 O modelo auxiliar	29
4.2 A difusão de um rumor como um sistema de partículas	30
4.3 Comentários finais	31
A Construção gráfica dos modelos	32
A.1 Construção do modelo [DK]	32
A.2 Construção do modelo [MT]	33

B Cadeias de Markov “density dependent”	34
B.1 Definição e caracterização do processo	34
B.2 Lei dos Grandes Números	35
B.3 Teorema Central do Limite	36
Referências Bibliográficas	38
Índice Remissivo	40

Lista de Símbolos

W	função de Lambert
W_0	ramo principal da função de Lambert
W_{-1}	ramo inferior da função de Lambert
μ	esperança matemática da variável aleatória R
ν^2	variância da variável aleatória R
$\Rightarrow$	convergência em distribuição
$O(h)$	$f(h)$ é $O(h^2)$ quando $h \rightarrow 0$ quer dizer que $\limsup_{h \rightarrow 0} f(h) /h^2 < \infty$
$o(h)$	$f(h)$ é $o(h)$ quando $h \rightarrow 0$ quer dizer que $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/h = 0$
∂F	função matricial de derivadas parciais de F
$\nabla \varphi$	gradiente da função φ
I_A	variável aleatória indicadora do evento A
$\mathbb{I}_i$	matriz identidade $i \times i$
A^T	transposta da matriz A
$\binom{n}{p}$	coeficiente binomial

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações preliminares

Nas últimas décadas tem havido um grande interesse em entender e modelar diferentes processos de difusão de um rumor em uma população. As primeiras referências matemáticas aparecem em [Rapoport e Rebhun \(1952\)](#) e [Rapoport \(1953a,b\)](#) onde são propostos diversos modelos para a propagação de uma informação usando dados experimentais deste processo. No livro clássico de [Feller \(1957\)](#) (Exercício II.10.21) menciona-se o processo de difusão de um rumor e [Goffman e Newill \(1964\)](#) são os primeiros em observar a analogia entre este processo e a transmissão de uma infecção.

[Daley e Kendall \(1965\)](#) e [Maki e Thompson \(1973\)](#) introduzem os dois modelos estocásticos de rumores mais citados até o momento. Em ambos considera-se uma população finita subdividida em três classes de indivíduos denominados ignorantes, informantes e contidos. Depois de um rumor ser introduzido na população, difunde-se através desta seguindo determinadas regras que dependem da classe à qual a pessoa que sabe do rumor pertence. Tanto a proporção final de indivíduos que nunca chegam a conhecer o rumor quanto o tempo que este demora em ser difundido são variáveis de interesse para os modelos propostos.

A maioria dos modelos introduzidos posteriormente modificam esses modelos básicos no intuito de procurar variantes mais adequadas para descrever os processos da vida real. O interesse nesses processos justifica-se principalmente pela evidente importância do seu comportamento em campos como a economia, a política e as comunicações sociais. Como ilustração de estas aplicações citamos [Kosfeld \(2005\)](#) onde estudam-se efeitos de rumores em mercados financeiros, [Schramm \(2006\)](#) onde disserta-se sobre a difusão de rumores no contexto da propagação de ideologias e [Nekovee et al. \(2007\)](#) onde analisa-se a dinâmica de um rumor em redes sociais complexas.

Um dos objetivos desta tese é introduzir novas generalizações dos modelos clássicos da teoria de rumores estocásticos, isto é, do modelo de Daley-Kendall e do modelo de Maki-Thompson. Para isto, propomos uma nova abordagem que permite trabalhar em um contexto mais geral.

As técnicas encontradas na literatura para estudar modelos de rumores são o princípio de difusão de constantes arbitrárias usado por [Daley e Kendall \(1965\)](#); argumentos de martingais usa-

dos em [Sudbury \(1985\)](#), [Watson \(1988\)](#), [Pittel \(1990\)](#), [Lefevre e Picard \(1994\)](#) e [Carnal \(1994\)](#); o método de funções geradoras apresentado em [Daley e Gani \(1999\)](#), [Gani \(2000\)](#) e [Pearce \(2000\)](#) e a análise de versões determinísticas como as encontradas em [Belen e Pearce \(2004\)](#) e [Kawachi \(2008\)](#). Neste trabalho apresentamos uma alternativa para essas técnicas baseando-nos na teoria de cadeias de Markov “density dependent” encontrada nos livros de [Andersson e Britton \(2000\)](#) e [Ethier e Kurtz \(2005\)](#). O uso desta nova abordagem nos permite apresentar resultados assintóticos para um modelo geral que tem como casos particulares os famosos modelos de Daley-Kendall e Maki-Thompson, além de variações de modelos de rumores apresentados na literatura recentemente.

Outra contribuição da tese é motivada pela importância dos modelos de sistemas de partículas em grafos como ferramenta para entender a transmissão de uma infecção em uma população. Para isto, usualmente representam-se indivíduos por vértices e contatos de transmissão por elos entre esses vértices. Desta maneira é obtido um grafo que reúne toda a informação sobre a estrutura da população. Os sistemas de partículas são usados em geral para descrever um ou varios processos que tem lugar nessa população. Esta interpretação é bastante usada para modelos epidêmicos mas poucas referências são conhecidas referentes à difusão de uma informação. Diante disso introduzimos esta interpretação para descrever a difusão de um rumor.

A tese é organizada da seguinte maneira. Nas próximas seções deste capítulo resumimos a teoria conhecida dos rumores estocásticos. Na Seção 1.2 fazemos uma breve comparação entre o processo da transmissão de uma infecção e o processo da difusão de um rumor. Na Seção 1.3 introduzimos formalmente o modelo de Daley-Kendall e os principais resultados conhecidos na literatura. Aplicamos o mesmo esquema na Seção 1.4 para o modelo de Maki-Thompson.

No Capítulo 2 introduzimos a generalização do modelo de Maki-Thompson, os principais resultados obtidos e as provas dos teoremas. Analogamente estruturamos o Capítulo 3 referente à generalização do modelo de Daley-Kendall. Finalmente, no Capítulo 4 discutimos como um modelo de sistemas de passeios aleatórios no grafo completo pode descrever um processo da difusão de um rumor. Os conceitos da teoria de cadeias de Markov “density dependent” e teoremas de convergência que são usados nesta tese estão reunidos no Apêndice.

1.2 Epidemias e rumores

Há semelhanças e diferenças entre o processo de transmissão de uma infecção e o processo de difusão de um rumor. Ambos tem lugar em uma população finita subdividida em diferentes classes de indivíduos e as regras de transmissão ou difusão são similares. Em [Dietz \(1967\)](#) é feita uma revisão destes processos e nos livros de [Maki e Thompson \(1973\)](#) e [Daley e Gani \(1999\)](#) pode-se encontrar uma descrição completa dos principais modelos e resultados existentes da teoria.

O modelo epidêmico SIR é chamado desta forma para ressaltar as classes de indivíduos que são consideradas: susceptíveis, infectados e removidos. O número de indivíduos destas classes em um determinado instante de tempo t é usualmente denotado por $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ respectivamente

e é suposto que

$$S(t) + I(t) + R(t) = N + 1,$$

para todo $t \geq 0$.

Neste modelo, definido para uma população homogênea misturada e fechada de $N + 1$ indivíduos, o processo $\{(S(t), I(t))\}_{t \geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com transições e correspondentes taxas dadas por

transição	taxa
$(-1, 1)$	SI ,
$(0, -1)$	I .

Estas transições correspondem-se ao evento em que um infectado transmite a infecção para um susceptível e ao evento em que um infectado é removido da população. Formalmente, a tabela representa as seguintes probabilidades:

$$P((S(t+h), I(t+h)) = (S-1, I+1) | (S(t), I(t)) = (S, I)) = SIh + o(h), \quad e$$

$$P((S(t+h), I(t+h)) = (S, I-1) | (S(t), I(t)) = (S, I)) = Ih + o(h).$$

No contexto da propagação de um rumor ou uma informação, os análogos dos susceptíveis são os ignorantes, que podemos pensar como estando susceptíveis ao recebimento da nova informação. Os equivalentes aos infectados são os informantes, aqueles que estão transmitindo a informação. Finalmente, os semelhantes aos removidos são os contidos, aqueles que foram informados mas já não produzem influência alguma na população. Nas próximas seções descreveremos melhor estas três classes.

O modelo SIR é um bom exemplo para ilustrar as semelhanças e diferenças entre os modelos epidêmicos e os modelos de rumores. O mecanismo de transmissão é o mesmo em todos os casos. É necessária a interação de um informante/infectado com um ignorante/susceptível para que o segundo passe a fazer parte da classe do primeiro. Por outro lado, os mecanismos para que um informante/infectado saia dessa classe diferem nos modelos. Enquanto no SIR isto acontece isoladamente, isto é, sem a influência de outro indivíduo; nos modelos de rumores isto acontece por interação. Quando um informante encontra-se com outro indivíduo já informado, ele pode pensar que a informação já é conhecida e então perder interesse em transmiti-la.

Apesar destas diferenças, costuma-se adaptar a teoria de modelos epidêmicos para estudar modelos de rumores. Mesmo assim, o número de trabalhos existentes sobre estes últimos é muito menor.

Nos Capítulos 2 e 3 usamos a teoria de cadeias de Markov “density dependent” para estudar generalizações dos modelos clássicos de rumores estocásticos. Até onde sabemos esta é a primeira vez que esta teoria é aplicada neste contexto.

No Capítulo 4 propomos uma outra abordagem por meio de um sistema de partículas no grafo completo para descrever um processo de difusão de um rumor.

1.3 O modelo de Daley-Kendall

Um dos primeiros modelos estocásticos para a difusão de um rumor é introduzido por Daley e Kendall (1965). Neste modelo, chamado modelo [DK] na sequência, considera-se uma população homogênea misturada e fechada de $N + 1$ indivíduos. A população é subdividida em três grupos; aqueles que ignoram um determinado rumor, aqueles que conhecem o rumor e o difundem, e aqueles que sabem o rumor mas têm deixado de propagá-lo. Esses grupos são chamados de ignorantes, informantes e contidos, respectivamente.¹

O rumor é propagado pela população por contatos dois a dois entre seus indivíduos, seguindo as seguintes regras:

1. Os informantes envolvidos em um contato tentam informar ao outro indivíduo do rumor;
2. se o outro indivíduo for um ignorante, ele vira um informante;
3. em qualquer outro caso os informantes envolvidos no encontro assumem que o rumor é conhecido e desistem de transmiti-lo transformando-se em contidos.
4. Interações que não envolvem informantes não fazem efeito no processo.

Para uma descrição formal adotamos a notação usual denotando ao número de ignorantes, informantes e contidos no instante t por $X(t)$, $Y(t)$ e $Z(t)$, respectivamente. Inicialmente,

$$X(0) = N, Y(0) = 1 \text{ e } Z(0) = 0,$$

e

$$X(t) + Y(t) + Z(t) = N + 1,$$

para todo t . O processo $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com transições e correspondentes taxas dadas por

transição	taxa	
$(-1, 1)$	$XY,$	
$(0, -2)$	$\binom{Y}{2},$	(1.1)
$(0, -1)$	$Y(N + 1 - X - Y).$	

As três transições correspondem às interações informante-ignorante, informante-informante e informante-contido. Em outras palavras,

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (X-1, Y+1) | (X(t), Y(t)) = (X, Y)) = XYh + o(h),$$

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (X, Y-2) | (X(t), Y(t)) = (X, Y)) = \binom{Y}{2} h + o(h) \quad \text{e}$$

¹Na literatura de rumores estocásticos esses grupos são conhecidos como ignorants, spreaders e stiflers, respectivamente.

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (X, Y-1) | (X(t), Y(t)) = (X, Y)) = Y(N+1-X-Y)h + o(h),$$

são as probabilidades de transição representadas pela tabela (1.1). No Apêndice A, apresentamos uma construção gráfica para este modelo.

Uma quantidade de interesse é a proporção de ignorantes no final do processo, isto é, no momento em que não há mais informantes na população. Esta proporção é rigorosamente estudada pela primeira vez para este modelo por [Watson \(1988\)](#), onde demonstra-se que a distribuição deste valor é assintoticamente normal com média ≈ 0.2032 e variância de $\approx 0.310673N^{-1}$, quando a proporção inicial de informantes não é desprezível. Por outro lado, [Pittel \(1990\)](#) complementa esses resultados considerando o caso em que esta proporção é pequena.

[Daley e Gani \(1999\)](#) reproduzem duas variantes do modelo [DK] originalmente introduzidas em [Daley e Kendall \(1965\)](#). Na primeira, chamada de variante *k-fold stifling*, assume-se que um informante só decide parar de transmitir o rumor no instante em que encontra-se com o k -ésimo indivíduo já informado, seja este informante ou contido. Na segunda, chamada de variante (α, p) , assume-se que os informantes tentam difundir o rumor em cada encontro com probabilidade p e que eles transformam-se em contidos com probabilidade α (o modelo [DK] resulta de considerar $\alpha = p = 1$). Em ambos casos, descrevem-se e estudam-se as versões determinísticas.

Notemos que para a variante (α, p) do modelo [DK] a cadeia de Markov a tempo contínuo $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ tem às seguintes transições e taxas

transição	taxa
$(-1, 1)$	$pXY,$
$(0, -2)$	$\alpha^2 p(2-p) \binom{Y}{2},$
$(0, -1)$	$\alpha(1-\alpha)p(2-p)Y(Y-1) + \alpha pY(N+1-X-Y).$

Mais precisamente, temos que

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (X-1, Y+1) | (X(t), Y(t)) = (X, Y)) = pXYh + o(h),$$

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (X, Y-2) | (X(t), Y(t)) = (X, Y)) = \alpha^2 p(2-p) \binom{Y}{2} h + o(h), \quad e$$

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (X, Y-1) | (X(t), Y(t)) = (X, Y)) = (\alpha(1-\alpha)p(2-p)Y(Y-1))h + (\alpha pY(N+1-X-Y))h + o(h).$$

No Capítulo 3 propomos uma generalização da variante (α, p) do modelo [DK], diferenciando um novo grupo de indivíduos que chamamos de neutros. Na realidade, sugerimos considerar por separado o subgrupo dos contidos que nunca tentou transmitir o rumor. Isto é, aqueles indivíduos que sendo inicialmente ignorantes transformam-se em contidos imediatamente após conhecer o rumor. [Schramm \(2006\)](#) chama a atenção da importância deste grupo no contexto da propagação de ideologias. Em nossa generalização da variante (α, p) do modelo [DK] introduzimos um novo parâmetro representando a probabilidade de um ignorante se transformar em neutro no instante

em que conhece o rumor.

1.4 O modelo de Maki-Thompson

Um modelo alternativo para a difusão de um rumor é introduzido em [Maki e Thompson \(1973\)](#) (chamado modelo [MT] na sequência). Neste caso também é considerada uma população homogênea misturada e fechada de $N + 1$ indivíduos. A população é subdividida em três grupos como no modelo [DK] e a diferença básica é que o rumor é propagado por contatos dois a dois entre informantes e outros indivíduos da população, sendo que quando um informante tenta difundir o rumor para outro informante, somente o primeiro transforma-se em contido.

Assim, a cadeia de Markov a tempo contínuo $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ evolui de acordo às seguintes transições e taxas

transição	taxa	
$(-1, 1)$	$XY,$	(1.2)
$(0, -1)$	$Y(N - X).$	

Em outras palavras, temos que

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (X-1, Y+1) | (X(t), Y(t)) = (X, Y)) = XYh + o(h),$$

$$P((X(t+h), Y(t+h)) = (X, Y-1) | (X(t), Y(t)) = (X, Y)) = Y(N-X)h + o(h)$$

e que as transições correspondem às interações informante-ignorante e informante-(informante ou contido), respectivamente. No Apêndice A, apresentamos uma construção gráfica para o modelo [MT].

Este modelo, formulado inicialmente como uma cadeia de Markov a tempo discreto, é apresentado como uma alternativa mais simples do modelo [DK]. De fato, o primeiro resultado rigoroso para modelos estocásticos de rumores é obtido por [Sudbury \(1985\)](#) para o modelo [MT]. Usando argumentos de martingais prova-se que a proporção da população que nunca chega conhecer o rumor converge em probabilidade para ≈ 0.203 quando N tende para ∞ . Este resultado é generalizado em [Watson \(1988\)](#), onde demonstra-se que a sua distribuição é assintoticamente normal com média ≈ 0.2032 e variância de $\approx 0.2728N^{-1}$. Como já mencionamos, no mesmo trabalho é estudado rigorosamente o modelo [DK] pela primeira vez.

[Belen e Pearce \(2004\)](#) apresentam uma análise determinística da proporção de ignorantes quando o processo começa de condições iniciais gerais. Podemos encontrar mais detalhes dessa análise em [Belen \(2008\)](#) onde também apresenta-se a versão *k-fold stifling* para o modelo [MT]. A versão *2-fold stifling* é estudada originalmente por [Carnal \(1994\)](#), onde prova-se que a proporção de ignorantes converge em probabilidade para ≈ 0.059 quando N tende para ∞ .

No Capítulo 2 propomos uma generalização da versão *k-fold stifling* do modelo [MT]. Em particular, assumimos que um informante só decide parar de transimitir o rumor depois de se encontrar com um número aleatório de indivíduos já informados. Isto é feito considerando condições iniciais gerais como no trabalho de [Belen e Pearce \(2004\)](#).

Capítulo 2

Generalização do modelo de Maki-Thompson

Neste capítulo propomos uma generalização da versão *k-fold stifling* do modelo [MT]. Para isto, assumimos que um informante só decide parar de transmitir o rumor depois de se encontrar com um número aleatório de indivíduos já informados.¹

2.1 O modelo

Consideramos uma população homogênea fechada e totalmente misturada de tamanho $N+1$. Seja R uma variável aleatória inteira não negativa com distribuição dada por

$$P(R = i) = r_i \quad \text{para } i = 0, 1, \dots$$

e sejam

$$\mu = E[R] > 0 \quad \text{e} \quad \nu^2 = \text{Var}[R].$$

Associamos independentemente para cada indivíduo inicialmente ignorante uma variável aleatória com a mesma distribuição de R . Uma vez que o ignorante sabe do rumor, a copia de R associada a ele determina o número de tentativas frustradas² que o novo informante terá até decidir parar de difundir o rumor. Isto é, o número de encontros deste novo informante com um indivíduo já informado. No caso da variável ser igual a zero, o ignorante se junta aos contidos imediatamente após conhecer o rumor.

Para $i = 1, 2, \dots$ dizemos que em um instante determinado de tempo um informante é do tipo i se ele ainda tem i tentativas frustradas antes de parar de transmitir o rumor. Denotamos ao número de ignorantes, informantes de tipo i e contidos no instante t por $X^{(N)}(t)$, $Y_i^{(N)}(t)$ e $Z^{(N)}(t)$, respectivamente. Seja

$$Y^{(N)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i^{(N)}(t)$$

¹Os resultados deste Capítulo estão reunidos em [Lebensztayn et al. \(2010b\)](#).

²A noção de tentativa frustrada aqui considerada é chamada em [Daley e Gani \(1999\)](#) de stifling experience.

o número total de informantes no instante t . Então

$$X^{(N)}(t) + Y^{(N)}(t) + Z^{(N)}(t) = N + 1,$$

para todo t . O processo infinito dimensional

$$\{V^{(N)}(t)\}_{t \geq 0} := \{(X^{(N)}(t), Y_1^{(N)}(t), Y_2^{(N)}(t), \dots)\}_{t \geq 0} \quad (2.1)$$

é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com transições e correspondentes taxas dadas por

transição	taxa	
$(-1, 0, \dots, 0, 0, \dots)$	$r_0 XY$,	
$(-1, 0, \dots, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, \dots)$	$r_i XY$,	para $i = 1, 2, \dots$
$(0, 0, \dots, \overset{i-1}{1}, \overset{i}{-1}, \dots)$	$(N - X) Y_i$,	para $i = 2, 3, \dots$
$(0, -1, \dots, 0, 0, \dots)$	$(N - X) Y_1$.	

(2.2)

Em palavras, o primeiro caso indica a transição do processo na qual um informante interage com um ignorante e o ignorante transforma-se em contido imediatamente (evento que acontece com probabilidade r_0). O segundo caso indica a transição na qual o informante interage com um ignorante e o ignorante transforma-se em um informante do tipo i (evento que acontece com probabilidade r_i). A terceira transição representa a situação na qual um informante de tipo i tem uma tentativa frustrada mas continua sendo um informante (agora de tipo $i - 1$), e finalmente a última transição indica o evento que um informante de tipo 1 tem uma tentativa frustrada transformando-se portanto em um contido.

Chamamos este modelo de variante *random stifling* do modelo [MT]. Assumimos que o processo começa com

$$\begin{aligned} X^{(N)}(0) &= (N + 1) x_0^{(N)}, \\ Y_i^{(N)}(0) &= (N + 1) y_{i,0}^{(N)}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \text{ e} \\ Z^{(N)}(0) &= (N + 1) z_0^{(N)}. \end{aligned}$$

Isto é, $x_0^{(N)}, y_{i,0}^{(N)}, z_0^{(N)} \in [0, 1]$ são as proporções iniciais de ignorantes, informantes de tipo i e contidos da população, respectivamente, definidas de maneira que

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_{i,0}^{(N)} > 0 \text{ e}$$

$$x_0^{(N)} + \sum_{i=1}^{\infty} y_{i,0}^{(N)} + z_0^{(N)} = 1.$$

Além disso, assumimos que os seguintes limites existem:

$$\begin{aligned} x_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} x_0^{(N)} > 0 \quad \text{e} \\ y_{i,0} &= \lim_{N \rightarrow \infty} y_{i,0}^{(N)} \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

e supomos que

$$w_0 = \sum_{i=1}^{\infty} i y_{i,0} < \infty.$$

Como foi mencionado, o processo finaliza eventualmente. Seja

$$\tau^{(N)} = \inf \left\{ t : Y^{(N)}(t) = 0 \right\}$$

o tempo de absorção do processo. Nosso principal objetivo é estabelecer teoremas limites para a proporção $N^{-1} X^{(N)}(\tau^{(N)})$ de ignorantes ao final do processo.

2.2 Teoremas limites para a proporção de ignorantes

Definição 2.2.1. Supomos que $\mu < \infty$ e consideramos a função $f : (0, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = w_0 + (1 + \mu)(x_0 - x) + \log \frac{x}{x_0}. \quad (2.4)$$

Definimos $x_{\infty} = x_{\infty}(\mu, x_0, w_0)$ como sendo a única raiz x de f no intervalo $(0, x_0]$ satisfazendo $f'(x) \geq 0$.

Figura 2.1: Comportamento de f – Os quatro possíveis casos em termos de x_0 e w_0 .

Pode-se mostrar que x_∞ é a única raiz de f , exceto no caso no qual $w_0 = 0$ e $x_0 > (1 + \mu)^{-1}$. Ver Figura 2.1.

Observação 2.2.2. Segue-se da Definição 2.2.1 que x_∞ pode-se escrever em termos da função W de Lambert. Esta função é definida como sendo a inversa da função $x \mapsto x e^x$, isto é, a função que satisfaz

$$W(x)e^{W(x)} = x.$$

Se $-1/e \leq x < 0$ temos dois possíveis valores reais de $W(x)$ (Ver Figura 2.2). Denotamos com $W_0(x)$ ao ramo de W tal que $-1 \leq W(x)$ (chamado ramo principal) e com $W_{-1}(x)$ aquele tal que $W(x) \leq -1$ (chamado ramo inferior). Para mais detalhes desta função sugerimos consultar [Corless et al. \(1996\)](#) onde são reunidos interessantes resultados e aplicações.

Figura 2.2: Os dois ramos da função W de Lambert.

Notemos que x_∞ satisfaz

$$x_\infty = x_0 e^{-(1+\mu)(x_0 - x_\infty) - w_0}$$

que podemos escrever como

$$-x_0(1 + \mu)e^{-x_0(1+\mu) - w_0} = -x_\infty(1 + \mu)e^{-x_\infty(1+\mu)}. \quad (2.5)$$

Então, obtemos de (2.5) que

$$x_\infty(\mu, x_0, w_0) = -(1 + \mu)^{-1} W_0 \left(-x_0(1 + \mu)e^{-x_0(1+\mu) - w_0} \right) \quad (2.6)$$

observando que $-e^{-1} < -x_0(1 + \mu)e^{-x_0(1+\mu) - w_0} < 0$.

No que segue estabelecemos uma Lei Fraca dos Grandes Números para a proporção da população que não chega a conhecer o rumor.

Teorema 2.2.3. *Se $\mu < \infty$, então*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} = x_\infty \quad \text{em probabilidade.}$$

Figura 2.3: Comportamento de x_∞ em função de μ para $x_0 = 1$ e $w_0 = 0$.

Na Figura 2.3 podemos ver o comportamento desta proporção limite em função de μ . Como consequência do teorema anterior conseguimos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.4. *Se $\mu = \infty$, então*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} = 0 \quad \text{em probabilidade.}$$

Demonstração do Corolário 2.2.4. Sejam R_1 e R_2 variáveis aleatórias tais que $R_1 \stackrel{\mathcal{D}}{\leq} R_2$, isto é, tais que

$$P(R_1 \geq i) \leq P(R_2 \geq i)$$

para todo $i \geq 0$. Consideramos os processos $\{V_1^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{V_2^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ definidos como em (2.1) considerando R_1 e R_2 , respectivamente; e com as mesmas condições iniciais. Sejam $\tau_1^{(N)}$ e $\tau_2^{(N)}$ os respectivos tempos de absorção. É possível construir os processos de maneira que

$$X_2^{(N)}(\tau_2^{(N)}) \leq X_1^{(N)}(\tau_1^{(N)}), \quad \text{q.c.} \quad (2.7)$$

Agora, supomos que $\{V^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ é o processo definido antes com a variável aleatória R satisfazendo $\mu = \infty$. Lembrando que

$$P(R = i) = r_i \quad \text{para } i = 0, 1, \dots$$

definimos para cada $k \geq 1$ uma nova variável aleatória R_k com distribuição dada por

$$P(R_k = i) = r_i, \quad \text{se } i < k \quad \text{e} \quad P(R_k = k) = \sum_{j=k}^{\infty} r_j.$$

Segue desta construção que $R_k \stackrel{\mathcal{D}}{\leq} R$ para todo k . Notando isto e (2.7) concluimos que

$$X^{(N)}(\tau^{(N)}) \leq X_k^{(N)}(\tau_k^{(N)}), \quad \text{q.c.} \quad (2.8)$$

para todo k . Deste modo (2.8), Teorema 2.2.3 e (2.6) implicam que

$$0 \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{X^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} \leq x_\infty(\mu_k, x_0, w_0) \quad \text{q.c.}, \quad (2.9)$$

onde $\mu_k = E[R_k]$. Como $x_0 > 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty$, temos que $x_0 > (1 + \mu_k)^{-1}$ para k suficientemente grande e neste caso um pequeno cálculo mostra que $x_\infty(\mu, x_0, w_0)$ converge para 0 quando $k \rightarrow \infty$. Isto completa a prova do Corolário 2.2.4.

□

Concluimos esta seção apresentando um Teorema Central do Limite para a proporção da população que não chega a conhecer o rumor.

Teorema 2.2.5. *Seja $\nu^2 < \infty$. Se $w_0 > 0$ ou $w_0 = 0$ e $x_0 > (1 + \mu)^{-1}$, então*

$$\sqrt{N} \left(\frac{X^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} - x_\infty \right) \Rightarrow N(0, \sigma^2)$$

quando N tende para ∞ , onde $N(0, \sigma^2)$ é a distribuição Gaussiana com média zero e variância dada por

$$\sigma^2 = \sigma^2(\mu, \nu^2, x_0, w_0) = \frac{x_\infty(1 - (x_0^{-1} + w_0 + (x_0 - x_\infty)(1 + \mu - \nu^2))x_\infty)}{(1 - (1 + \mu)x_\infty)^2}. \quad (2.10)$$

Observação 2.2.6. Quando $w_0 = 0$ e $x_0 \leq (1 + \mu)^{-1}$ temos que a proporção assintótica de ignorantes é igual à proporção do instante inicial e portanto não há um teorema central do limite (ver Figura 2.4 e Observação 2.3.2). Notemos que isto e a condição do teorema quando $w_0 = 0$ recordam às condições para a extinção ou não de um processo de ramificação. De fato, nosso problema pode ser comparado com o problema de sobrevivência da população de informantes no processo limite. Neste contexto, consideramos a descendência de um informante como sendo todos aqueles indivíduos inicialmente ignorantes que foram informados por ele do rumor. Assim, como no limite a “probabilidade” de um indivíduo ser ignorante é x_0 e como cada informante tenta contar o rumor até se encontrar com R indivíduos já informados, concluimos que a média da distribuição do número de descendentes é

$$\mu \frac{x_0}{1 - x_0}$$

que é maior do que 1 se, e somente se, $(\mu + 1)x_0 > 1$. Com efeito, podemos escrever ao número de descendentes de um informante como

$$\sum_{i=1}^R D_j$$

onde D_j é o número de ignorantes que um informante encontra até se encontrar com o primeiro indivíduo já informado.

Figura 2.4: Comportamento de x_∞ em função de x_0 para $w_0 = 0$ e diferentes valores de μ .

Observação 2.2.7. Nossos resultados referem-se a condições iniciais gerais, análogo ao considerado na análise determinística de [Belen e Pearce \(2004\)](#). O processo começando com um informante e N ignorantes corresponde a $x_0 = 1$ e $w_0 = 0$, em cujo caso a assintota da variância reduz-se a

$$\sigma^2 = \frac{x_\infty(1 - x_\infty)(1 - (1 + \mu - \nu^2)x_\infty)}{(1 - (1 + \mu)x_\infty)^2}.$$

Em particular, para $R \equiv k$ ($k \geq 1$ um inteiro) temos a versão *k-fold stifling* do modelo [MT] apresentada em [Belen \(2008\)](#) e para a qual

$$\sigma^2 = \frac{x_\infty(1 - x_\infty)}{1 - (k + 1)x_\infty},$$

onde

$$x_\infty = x_\infty(k, 1, 0) = -(k + 1)^{-1} W_0 \left(-(k + 1) e^{-(k+1)} \right).$$

Observamos que, neste caso

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^2 / x_\infty = 1 \quad (2.11)$$

como consequência de que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W_0 \left(-(k + 1) e^{-(k+1)} \right) = W_0(0) = 0.$$

A Tabela 2.1 exibe os valores de x_∞ e σ^2 neste modelo para $k = 1, \dots, 6$. Notemos que $k = 2$ é o caso estudado por [Carnal \(1994\)](#) e que a partir de $k = 5$ fica em evidência a relação obtida em (2.11).

k	1	2	3	4	5	6
x_∞	0.203	0.0595	0.0198	0.00698	0.00252	0.000918
σ^2	0.273	0.0681	0.0211	0.00718	0.00255	0.000923

Tabela 2.1: Versão *k-fold stifling* do modelo [MT], $x_0 = 1$ e $w_0 = 0$.

O modelo [MT] original é obtido considerando $R \equiv 1$, $x_0 = 1$ e $w_0 = 0$. Como consequência, nossos teoremas generalizam os resultados clássicos apresentados em [Sudbury \(1985\)](#) e [Watson \(1988\)](#).

No intuito de reforçar ainda mais a generalidade do modelo que propomos mostramos alguns exemplos não considerados na literatura.

Exemplo 2.2.8. Uma variante interessante é obtida quando R tem uma distribuição geométrica com parâmetro p . Isto é, $r_0 = 0$ e $r_i = p(1-p)^{i-1}$ para $i = 1, 2, \dots$. Neste modelo, um ignorante sempre transforma-se em informante depois de conhecer o rumor e cada vez que um informante encontra-se com alguém já informado, ele decide com probabilidade p se transformar em contido, independentemente para cada informante e cada encontro. A Tabela 2.2 mostra os valores de x_∞ e σ^2 para $x_0 = 1$, $w_0 = 0$ e alguns valores de p arbitrariamente escolhidos.

p	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
x_∞	0.0139	0.0340	0.0595	0.0878	0.117	0.147	0.175
σ^2	0.0163	0.0427	0.0780	0.118	0.159	0.199	0.238

Tabela 2.2: $R \sim \text{Geometrica}(p)$, $x_0 = 1$ e $w_0 = 0$.

Exemplo 2.2.9. Como outra variante consideramos R com distribuição Poisson de parâmetro λ , em cujo caso um ignorante escolhe (com probabilidade $e^{-\lambda}$) se transformar em contido imediatamente após saber do rumor. Notemos que no caso em que o ignorante decide transformar-se em informante, sua decisão de parar de transmitir o rumor em cada encontro dependerá da história do processo. A tabela 3.1 mostra os valores de x_∞ e σ^2 para $x_0 = 1$, $w_0 = 0$ e alguns valores de λ arbitrariamente escolhidos.

λ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
x_∞	0.824	0.577	0.417	0.309	0.233	0.178	0.138	0.107	0.0844	0.0668
σ^2	2.908	1.654	1.012	0.654	0.440	0.307	0.219	0.160	0.119	0.0895

Tabela 2.3: $R \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $x_0 = 1$ e $w_0 = 0$.

Neste exemplo mostramos um tipo interessante de modelos que podem ser considerados como caso particular da nossa generalização. Mais precisamente, podemos considerar modelos de rumores nos quais os informantes têm memória de todo o processo. Até agora, os únicos modelos considerados com estas características são as versões *k-fold stifling* dos modelos [MT] e [DK].

2.3 Provas

Enunciamos as principais idéias para provar os Teoremas 2.2.3 e 2.2.5. Primeiro, de acordo a uma conveniente mudança do tempo do processo, definimos um novo processo $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ com as mesmas transições que $\{V^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ de maneira que ambos finalizam no mesmo ponto

do espaço de estados. Logo, trabalhamos com uma cadeia de Markov reduzida obtida a partir de $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ para poder aplicar a teoria de cadeias de Markov “density dependent” apresentada em [Ethier e Kurtz \(2005\)](#) e resumida no Apêndice [B](#).

2.3.1 Mudança do tempo

Como a distribuição de $X^{(N)}(\tau^{(N)})$ depende do processo $\{V^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ somente através da cadeia de Markov imersa, consideramos uma versão a tempo mudado do processo. Seja $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ a cadeia de Markov infinito-dimensional e a tempo contínuo

$$\left\{ \left(\tilde{X}^{(N)}(t), \tilde{Y}_1^{(N)}(t), \tilde{Y}_2^{(N)}(t), \dots \right) \right\}_{t \geq 0}$$

com transições e correspondentes taxas dadas por

transição	taxa	
$(-1, 0, \dots, 0, 0, \dots)$	$r_0 \tilde{X},$	
$(-1, 0, \dots, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, \dots)$	$r_i \tilde{X},$	para $i = 1, 2, \dots$
$(0, 0, \dots, \overset{i-1}{1}, \overset{i}{-1}, \dots)$	$(N - \tilde{X}) \tilde{Y}_i (\tilde{Y})^{-1},$	para $i = 2, 3, \dots$
$(0, -1, \dots, 0, 0, \dots)$	$(N - \tilde{X}) \tilde{Y}_1 (\tilde{Y})^{-1}.$	

Observemos que podemos definir $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ de tal forma que tem o mesmo estado inicial e as mesmas transições de $\{V^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$. Assim ambos processos têm a mesma cadeia de Markov imersa e portanto, se definimos

$$\tilde{\tau}^{(N)} = \inf \left\{ t : \tilde{Y}^{(N)}(t) = 0 \right\},$$

concluimos que $X^{(N)}(\tau^{(N)}) = \tilde{X}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)})$.³

2.3.2 Redução da dimensão e limite determinístico

Para provar os teoremas usando diretamente o Teorema [B.2.1](#), trabalhamos com uma cadeia de Markov reduzida. Definimos

$$\tilde{W}^{(N)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i \tilde{Y}_i^{(N)}(t),$$

³Formalizamos este tipo de transformação para a generalização do modelo DK, no Capítulo [3](#).

e notamos que o processo $\{(\tilde{X}^{(N)}(t), \tilde{W}^{(N)}(t))\}_{t \geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com transições e taxas dadas por

$$\begin{array}{ll} \text{transição} & \text{taxa} \\ \ell_i = (-1, i) & r_i \tilde{X}, \quad i = 0, 1, \dots \\ \ell_{-1} = (0, -1) & N - \tilde{X}. \end{array} \quad (2.12)$$

Agora, definimos para $t \geq 0$

$$\tilde{v}^{(N)}(t) = \left(\tilde{x}^{(N)}(t), \tilde{w}^{(N)}(t) \right) = N^{-1} \left(\tilde{X}^{(N)}(t), \tilde{W}^{(N)}(t) \right)$$

e consideramos as funções

$$\beta_{\ell_{-1}}(x, w) = 1 - x \quad \text{e} \quad \beta_{\ell_i}(x, w) = r_i x, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots$$

Assim, observamos que as taxas em (2.12) podem-se escrever como

$$N \left[\beta_{\ell_i} \left(\frac{\tilde{X}}{N}, \frac{\tilde{W}}{N} \right) \right]$$

e então $\{\tilde{v}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ é uma cadeia de Markov “density dependent” com possíveis transições no conjunto $(1/N)\{\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, \dots\}$.

Diante disso, podemos usar o Teorema B.2.1 para concluir que o processo $\{\tilde{v}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ converge quase certamente quando $N \rightarrow \infty$ para um limite determinístico. A função drift definida em (B.3) neste caso é dada por

$$F(x, w) = \sum_{i=-1}^{\infty} \ell_i \beta_{\ell_i}(x, w) = (-x, (\mu + 1)x - 1).$$

Portanto, o sistema determinístico limite é governado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \\ w'(t) = (\mu + 1)x - 1 \end{cases}$$

com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $w(0) = w_0$. A solução deste sistema é dada por

$$v(t) = (x(t), w(t)),$$

onde

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$

e

$$w(t) = f(x(t)) = w_0 + (1 + \mu)(x_0 - x(t)) - t.$$

De acordo ao Teorema B.2.1, temos (em um espaço de probabilidade conveniente) que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{v}^{(N)}(t) = v(t) \quad \text{q. c.}$$

uniformemente em intervalos de tempo limitados. Em particular, podemos provar o seguinte lema.

Lema 2.3.1. *Vale que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(N)}(t) = x(t) \quad \text{q. c.} \quad (2.13)$$

uniformemente em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $t_0 = t_0(\varepsilon)$ tal que $x(t) \leq \varepsilon/2$ para todo $t \geq t_0$. Pela convergência uniforme no intervalo $[0, t_0]$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que

$$|\tilde{x}^{(N)}(t) - x(t)| \leq \varepsilon/2 \text{ para todo } N \geq N_0 \text{ e } t \in [0, t_0].$$

Portanto, para todo $N \geq N_0$ e $t \geq t_0$,

$$\tilde{x}^{(N)}(t) \leq \tilde{x}^{(N)}(t_0) \leq x(t_0) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon,$$

de onde $|\tilde{x}^{(N)}(t) - x(t)| \leq \varepsilon$. □

2.3.3 Provas dos teoremas

Para provar ambos teoremas usamos o Teorema B.3.2. Adoptamos a notação apresentada no apêndice, sendo neste caso $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_w)$, $\varphi(x, w) = w$ e

$$\tau_\infty = \inf\{t : w(t) \leq 0\} = w_0 + (1 + \mu)(x_0 - x_\infty).$$

Logo,

$$\nabla \varphi(v(\tau_\infty)) \cdot F(v(\tau_\infty)) = w'(\tau_\infty) = (\mu + 1)x_\infty - 1 < 0. \quad (2.14)$$

Demonstração do Teorema 2.2.3. Notemos que $w_0 > 0$ e (2.14) implicam que $w(\tau_\infty - \varepsilon) > 0$ e $w(\tau_\infty + \varepsilon) < 0$ para $0 < \varepsilon < \tau_\infty$. Então, a convergência quase certa de $\tilde{w}^{(N)}$ para w uniformemente em intervalos limitados implica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\tau}^{(N)} = \tau_\infty \quad \text{q.c.} \quad (2.15)$$

No caso em que $w_0 = 0$ e $x_0 > (1 + \mu)^{-1}$, o resultado ainda é válido pois $w'(0) > 0$ e (2.14) segue se verificando. Portanto, como $X^{(N)}(\tau^{(N)}) = \tilde{X}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)})$, obtemos Teorema 2.2.3 de (2.13) e (2.15).

Observação 2.3.2. Notemos que no caso não considerado no enunciado do Teorema 2.2.3, $w_0 = 0$ e $x_0 \leq (1 + \mu)^{-1}$, temos que $w(t) < 0$ para todo $t > 0$, e novamente a convergência quase certa de $\tilde{w}^{(N)}$ para w uniformemente em intervalos limitados implica que $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\tau}^{(N)} = 0 = \tau_\infty$ quase certamente.

Demonstração do Teorema 2.2.5. Do Teorema B.3.2, temos que $\sqrt{N}(\tilde{x}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)}) - x_\infty)$ converge em distribuição quando $N \rightarrow \infty$ para

$$\mathcal{V}_x(\tau_\infty) + \frac{x_\infty}{(\mu + 1)x_\infty - 1} \mathcal{V}_w(\tau_\infty). \quad (2.16)$$

A distribuição normal resultante tem média zero. Então, para completar a prova do Teorema 2.2.5 falta calcular a correspondente variância.

Para isto, temos que calcular a matriz de covariância $\text{Cov}(\mathcal{V}(\tau_\infty), \mathcal{V}(\tau_\infty))$. O primeiro passo é calcular a matriz de derivadas parciais da função drift F e a matriz G . Obtemos

$$\partial F(x, w) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ (\mu + 1) & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$G(x, w) = \begin{pmatrix} x & -\mu x \\ -\mu x & (\nu^2 + \mu^2 - 1)x + 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, encontramos a solução Φ da equação matricial

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, s) = \partial F(x(t), w(t)) \Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = \mathbb{I}_2,$$

a qual é dada por

$$\Phi(t, s) = \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ (\mu + 1)(1 - e^{-(t-s)}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz de covariâncias do processo Gaussiano $\mathcal{V}$ no instante t é obtido pela fórmula

$$\text{Cov}(\mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t)) = \int_0^t \Phi(t, s) G(x(s), w(s)) [\Phi(t, s)]^T ds. \quad (2.17)$$

Como passo final para calcular $\text{Cov}(\mathcal{V}(\tau_\infty), \mathcal{V}(\tau_\infty))$, temos que substituir e^{-t} e t na fórmula obtida de (2.17) por x_∞/x_0 e τ_∞ , respectivamente. As fórmulas resultantes são

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathcal{V}_x(\tau_\infty)) &= ((x_0 - x_\infty)x_\infty)/x_0, \\ \text{Var}(\mathcal{V}_w(\tau_\infty)) &= (\mu + 1)^2(x_0 - x_\infty)x_\infty/x_0 + \nu^2(x_0 - x_\infty) \\ &\quad + (1 - 2(\mu + 1)x_\infty)\tau_\infty, \\ \text{Cov}(\mathcal{V}_x(\tau_\infty), \mathcal{V}_w(\tau_\infty)) &= \tau_\infty x_\infty - (\mu + 1)(x_0 - x_\infty)x_\infty/x_0. \end{aligned}$$

Usando que $\tau_\infty = w_0 + (1 + \mu)(x_0 - x_\infty)$, (2.16) e propriedades da variância, obtemos a fórmula (2.10).

Capítulo 3

Generalização do modelo de Daley-Kendall

Neste capítulo propomos uma generalização da variante (α, p) do modelo [DK], diferenciando um novo grupo de indivíduos que chamamos de neutros. Introduzimos um novo parâmetro representando a probabilidade de um ignorante se transformar em neutro no instante em que conhece o rumor.¹

3.1 O modelo

Consideramos $\alpha, p, q \in (0, 1]$. Suponha que um informante envolvido em um encontro decide contar o rumor com probabilidade p e que, uma vez que a decisão é tomada, qualquer informante em um encontro com alguém já informado tem probabilidade α de transformar-se em contido, independentemente para cada informante e cada encontro. Além disto, assumimos que quando um ignorante escuta o rumor de um informante, ele escolhe transformar-se em informante ou em neutro (isto é, imediatamente em um contido) com respectivas probabilidades q e $1 - q$. Denotamos por $U(t)$ o número de indivíduos neutros no instante t , e seja $V(t) = (X(t), U(t), Y(t))$. Então, $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo começando em $(N, 0, 1)$ com transições e correspondentes taxas dadas por

transição	taxa
$(-1, 0, 1)$	$pq XY$,
$(-1, 1, 0)$	$p(1 - q) XY$,
$(0, 0, -2)$	$\alpha^2 p(2 - p) \binom{Y}{2}$,
$(0, 0, -1)$	$\alpha(1 - \alpha)p(2 - p) Y(Y - 1) + \alpha p Y(N + 1 - X - Y)$.

Chamamos este modelo de variante (α, p, q) do modelo [DK]. O caso $q = 1$ corresponde à variante (α, p) definida em Daley e Gani (1999) e o modelo [DK] básico é obtido tomando $\alpha = p = q = 1$.

¹Os resultados deste Capítulo estão reunidos em Lebensztayn et al. (2010a).

Uma abordagem análoga à considerada no Capítulo 2 pode nos conduzir a teoremas limites para esta generalização. De fato, vamos obter resultados rigorosos para uma família de modelos de rumores que evidentemente inclui o modelo aqui proposto.

Consideramos o seguinte modelo mais geral. Novamente, seja $V = (X, U, Y)$ e suponha que $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com estado inicial $(N, 0, 1)$ e transições e taxas dadas por

transição	taxa
$(-1, 0, 1)$	$\lambda \delta XY,$
$(-1, 1, 0)$	$\lambda(1 - \delta) XY,$
$(0, 0, -2)$	$\lambda \theta_1 \binom{Y}{2},$
$(0, 0, -1)$	$\lambda \theta_2 Y(Y - 1) + \lambda \gamma Y(N + 1 - X - Y).$

Definimos $\theta = \theta_1 + \theta_2 - \gamma$ e assumimos que

$$\lambda > 0, \gamma > 0, \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, 0 < \delta \leq 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 1. \quad (3.1)$$

Com isto, temos uma cadeia de Markov que dependendo dos valores dos parâmetros inclui modelos de rumores com diferentes mecanismos de difusão. Isto fica em evidência na Tabela 3.1, que resume alguns dos modelos que resultam como caso particular desta cadeia geral. Daremos mais detalhes destes modelos na próxima seção.

λ	δ	γ	θ_1	θ_2	Modelo
1	1	1	1	0	Daley e Kendall (1965)
1	1	1	0	1	Maki e Thompson (1973)
p	1	α	$\alpha^2(2 - p)$	$\alpha(1 - \alpha)(2 - p)$	Daley e Gani (1999)
p	1	r/p	q_2/p	$q_1/(2p)$	Pearce (2000)
1	1	1	2	0	Hayes (2005)
$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\theta}$	$\tilde{\gamma}/\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$	0	Kawachi (2008)
p	q	α	$\alpha^2(2 - p)$	$\alpha(1 - \alpha)(2 - p)$	Lebensztayn et al. (2010)

Tabela 3.1: Modelos de rumores existentes na literatura.

Em particular, a variante (α, p, q) do modelo [DK] é obtida escolhendo

$$\lambda = p, \delta = q, \theta_1 = \alpha^2(2 - p), \theta_2 = \alpha(1 - \alpha)(2 - p), \gamma = \alpha \text{ e } \theta = \alpha(1 - p). \quad (3.2)$$

Definimos

$$\tau^{(N)} = \inf \left\{ t : Y^{(N)}(t) = 0 \right\}.$$

Na seguinte seção, apresentamos uma Lei Fraca dos Grandes Números e um Teorema Central do Limite para

$$N^{-1} \left(X^{(N)}(\tau^{(N)}), U^{(N)}(\tau^{(N)}) \right).$$

3.2 Teoremas limites para as proporções de ignorantes e neutros

Começamos com algumas definições.

Definição 3.2.1. Para $0 < \theta < 1$, consideramos a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{(\gamma + \delta\theta)x^\theta - (\gamma + \delta)\theta x - \gamma(1 - \theta)}{\theta(1 - \theta)}.$$

Definimos $x_\infty = x_\infty(\delta, \gamma, \theta)$ como a única raiz de f no intervalo $(0, 1)$.

Para justificar a existência e unicidade da raiz, notemos que $f(0) < 0$, $f(1) = 0$ e que f é unimodal, com um máximo global no ponto

$$\left(\frac{\gamma + \delta\theta}{\gamma + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \in (0, 1).$$

Nos casos $\theta = 0$ e $\theta = 1$, x_∞ é definido analogamente.

Definição 3.2.2. Consideremos as funções f_0 e f_1 definidas em $(0, 1]$ por

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(x) = (\gamma + \delta)(1 - x) + \gamma \log x, \\ f_1(x) &= \lim_{\theta \rightarrow 1^-} f(x) = -\gamma(1 - x) - (\gamma + \delta)x \log x. \end{aligned}$$

Para cada $\theta \in \{0, 1\}$, denotamos por $x_\infty(\delta, \gamma, \theta)$ a única raiz de f_θ em $(0, 1)$.

Observação 3.2.3. No último caso, podemos escrever x_∞ em termos da função W de Lambert. Lembremos que W_0 e W_{-1} denotam o ramo principal e o ramo inferior desta função, respectivamente (ver Observação 2.2.2). Definindo $h = 1 + \delta/\gamma$, temos que

$$\begin{aligned} x_\infty(\delta, \gamma, 0) &= -h^{-1} W_0(-h e^{-h}) \quad \text{e} \\ x_\infty(\delta, \gamma, 1) &= - \left[h W_{-1}(-e^{-1/h}/h) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Podemos provar que, para qualquer valor de θ , a seguinte desigualdade se satisfaz:

$$x_\infty(\delta, \gamma, \theta) < \frac{\gamma}{\gamma + \delta}. \quad (3.3)$$

Para isto, é suficiente mostrar que f e f_θ avaliadas no ponto $\gamma/(\gamma + \delta)$ são estritamente maiores que zero. Para $\theta \in \{0, 1\}$, a fórmula (3.3) é portanto uma consequência imediata de uma desigualdade logarítmica padrão:

$$\frac{u-1}{u} < \log u < u-1 \quad \text{para todo } 0 < u < 1. \quad (3.4)$$

Para $\theta \in (0, 1)$, usamos (3.4) para provar que a função $\theta \mapsto (\gamma/(\gamma + \delta\theta))^{1/\theta}$ é crescente, de onde segue (3.3).

Teorema 3.2.4. *Assumimos (3.1) e seja x_∞ como na Definição 3.2.1 ou 3.2.2 de acordo a $\theta \in (0, 1)$ ou não. Definimos $u_\infty = (1 - \delta)(1 - x_\infty)$. Então,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} = x_\infty \quad e \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{U^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} = u_\infty \quad \text{em probabilidade.}$$

Teorema 3.2.5. *Assumimos (3.1) e definimos*

$$\begin{aligned} \kappa &= 3\theta_1 + 2\theta_2 - 4\gamma, \quad A = \frac{x_\infty}{\gamma - (\gamma + \delta)x_\infty}, \quad B = \frac{\gamma\delta u_\infty}{\gamma + \delta\theta}, \\ C &= (\gamma + \delta)^2 (4\delta\theta^2 - \kappa(\gamma + 2\delta\theta)) x_\infty + \kappa\gamma(\gamma + \delta)(\gamma + \delta(2\theta - 1)) - 4\delta\gamma^2(1 - \theta)^2, \\ D &= \begin{cases} \frac{C(1 - x_\infty)}{2(2\theta - 1)(\gamma + \delta\theta)^2} & \text{if } \theta \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{2\gamma \left[\kappa\delta(2\gamma + \delta) - 2\gamma(\delta - \kappa(\gamma + \delta)) \log\left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta}\right) \right]}{(\gamma + \delta)^2} & \text{if } \theta = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$\sqrt{N} \left(\frac{X^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} - x_\infty, \frac{U^{(N)}(\tau^{(N)})}{N} - u_\infty \right) \Rightarrow N_2(0, \Sigma) \quad (3.5)$$

quando N tende para ∞ , onde $N_2(0, \Sigma)$ é a distribuição normal bivariada com média zero e matriz de covariância Σ dada por

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= x_\infty(1 - x_\infty) + A^2D, \\ \Sigma_{12} &= -(1 - \delta)\Sigma_{11} + AB, \\ \Sigma_{22} &= (1 - \delta)^2\Sigma_{11} + (1 - \delta)(\delta(1 - x_\infty) - 2AB). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Quando $\delta = 1$, podemos omitir a segunda componente do vetor no lado esquerdo de (3.5), e denotamos por σ^2 ($= \Sigma_{11}$) a variância da distribuição Gaussiana assintótica de média zero.

Exemplo 3.2.6. Consideremos $\rho \in [0, 1]$ e seja $\lambda = \delta = \gamma = 1$, $\theta_1 = \rho$ e $\theta_2 = 1 - \rho$. Deste modo, $\theta = 0$,

$$\begin{aligned} x_\infty &= x_\infty(1, 1, 0) = -\frac{W_0(-2e^{-2})}{2} \approx 0.203188, \quad e \\ \sigma^2 &= \frac{x_\infty(1 - x_\infty)(1 - 2x_\infty + 2\rho x_\infty^2)}{(1 - 2x_\infty)^2} \approx 0.272736 + 0.0379364\rho. \end{aligned}$$

Obtemos o modelo [MT] ou [DK] de acordo a que ρ seja 0 ou 1, mostrando que nossos teoremas generalizam resultados clássicos apresentados por [Sudbury \(1985\)](#) e [Watson \(1988\)](#).

Exemplo 3.2.7. Em um interessante ensaio, [Hayes \(2005\)](#) descreve um error cometido quando ele tenta simular o modelo [DK]. Na realidade, o autor simula o modelo [MT] com a diferença que quando dois informantes encontram-se ambos transformam-se em contidos. Este modelo é

obtido escolhendo $\lambda = \delta = \gamma = 1$, $\theta_1 = 2$ e $\theta_2 = 0$, em cujo caso $\theta = 1$,

$$x_\infty = x_\infty(1, 1, 1) = -\frac{1}{2W_{-1}(-e^{-1/2}/2)} \approx 0.284668, \quad e$$

$$\sigma^2 = \frac{x_\infty(1 - x_\infty)(1 - 3x_\infty + 3x_\infty^2)}{(1 - 2x_\infty)^2} \approx 0.427204.$$

Isto verifica o valor numérico da proporção de ignorantes remanescentes na população que Hayes obteve nas suas simulações.

Exemplo 3.2.8. Como já mencionamos, a variante (α, p, q) do modelo [DK] é obtida escolhendo (3.2). Por exemplo, se $0 < \alpha(1 - p) < 1$, então x_∞ é a única raiz da função

$$f^*(x) = \frac{(1 + q(1 - p))x^{\alpha(1-p)} - (\alpha + q)(1 - p)x - 1 + \alpha(1 - p)}{(1 - p)(1 - \alpha(1 - p))}$$

no intervalo $(0, 1)$. Quando $q = 1$, este é exatamente o valor limite obtido na análise determinística do modelo apresentada em Daley e Gani (1999, Equação (5.2.8)).

Para a variante $(\alpha, 1, 1)$ do modelo [DK] temos que

$$x_\infty = x_\infty(1, \alpha, 0) = -\frac{W_0(-h e^{-h})}{h} \quad \text{com} \quad h = 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad e$$

$$\sigma^2 = \frac{x_\infty(1 - x_\infty)(2\alpha^2 + [2(1 - \alpha) - \alpha(1 + \alpha)^2]x_\infty + \alpha(1 + \alpha)^2x_\infty^2)}{2(\alpha - (1 + \alpha)x_\infty)^2}.$$

Estas fórmulas coincidem com aquelas apresentadas em Daley e Gani (1999, Exercício 5.7).

Exemplo 3.2.9. Outros dois modelos de rumores que podem ser obtidos a partir de nossa cadeia de Markov geral são introduzidos em Pearce (2000) e Kawachi (2008). O primeiro segue a dinâmica do modelo [DK] com as seguintes regras de interação. Um encontro entre um ignorante e um informante resulta no ignorante transformando-se em informante com probabilidade p . Quando dois informantes interagem, ambos transformam-se em contidos com probabilidade q_2 ou só um deles o faz com probabilidade q_1 . Finalmente, a interação de um informante com um contido resulta em dois contidos com probabilidade r . Assim, este modelo é obtido considerando

$$\lambda = p, \quad \delta = 1, \quad \theta_1 = q_2/p, \quad \theta_2 = q_1/(2p) \quad e \quad \gamma = r/p.$$

O modelo determinístico estudado em Kawachi (2008) desenvolve-se analogamente ao modelo de Hayes descrito no Exemplo 3.2.7. Os contatos são como no modelo [MT], mas quando dois informantes se encontram ambos transformam-se em contidos com probabilidade $\tilde{\beta}$. Quando um informante encontra um ignorante, o primeiro transmite o rumor com probabilidade $\tilde{\alpha}$ e o último se junta aos informantes com probabilidade $\tilde{\theta}$. Finalmente, em um encontro de um informante com um contido, o primeiro indivíduo transforma-se em contido com probabilidade $\tilde{\gamma}$. Este modelo é obtido da escolha

$$\lambda = \tilde{\alpha}, \quad \delta = \tilde{\theta}, \quad \theta_1 = \tilde{\beta}/\tilde{\alpha}, \quad \theta_2 = 0 \quad e \quad \gamma = \tilde{\gamma}/\tilde{\alpha}.$$

3.3 Provas

3.3.1 Mudança do tempo

Definimos

$$\begin{aligned}\Theta^{(N)}(t) &= \int_0^t Y^{(N)}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \tau^{(N)}, \\ \Upsilon^{(N)}(s) &= \inf\{t : \Theta^{(N)}(t) > s\}, \quad 0 \leq s \leq \int_0^\infty Y^{(N)}(u) du,\end{aligned}$$

e seja $\tilde{V}^{(N)}(t) = V^{(N)}(\Upsilon^{(N)}(t))$. O processo a tempo mudado $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ tem as mesmas transições que $\{V^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$. Então se definimos

$$\tilde{\tau}^{(N)} = \inf\{t : \tilde{Y}^{(N)}(t) = 0\},$$

temos que $V^{(N)}(\tau^{(N)}) = \tilde{V}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)})$. Além disso, $\{\tilde{V}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com estado inicial $(N, 0, 1)$ e transições e taxas dadas por

transição	taxa	
$\ell_0 = (-1, 0, 1)$	$\lambda \delta \tilde{X},$	
$\ell_1 = (-1, 1, 0)$	$\lambda(1 - \delta) \tilde{X},$	(3.7)
$\ell_2 = (0, 0, -2)$	$\lambda \theta_1 \frac{\tilde{Y} - 1}{2},$	
$\ell_3 = (0, 0, -1)$	$\lambda \theta_2 (\tilde{Y} - 1) + \lambda \gamma (N + 1 - \tilde{X} - \tilde{Y}).$	

3.3.2 Limite determinístico

Definimos para $t \geq 0$,

$$\tilde{v}^{(N)}(t) = \frac{\tilde{V}^{(N)}(t)}{N} = \left(\tilde{x}^{(N)}(t), \tilde{u}^{(N)}(t), \tilde{y}^{(N)}(t) \right),$$

e consideramos as funções

$$\begin{aligned}\beta_{\ell_0}(x, u, y) &= \lambda \delta x, & \beta_{\ell_1}(x, u, y) &= \lambda(1 - \delta) x, \\ \beta_{\ell_2}(x, u, y) &= \lambda \theta_1 \frac{y}{2}, & \beta_{\ell_3}(x, u, y) &= \lambda \theta_2 y + \lambda \gamma (1 - x - y).\end{aligned}$$

Notemos que as taxas em (3.7) podem-se escrever como

$$N \left[\beta_{\ell_i} \left(\frac{\tilde{X}}{N}, \frac{\tilde{U}}{N}, \frac{\tilde{Y}}{N} \right) + O \left(\frac{1}{N} \right) \right].$$

Então $\{\tilde{v}^{(N)}(t)\}_{t \geq 0}$ é uma cadeia de Markov “density dependent” com possíveis transições no conjunto $(1/N)\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3\}$.

Usamos o Teorema B.2.1 para concluir que o sistema a tempo mudado converge quase certamente quando $N \rightarrow \infty$ (em um espaço de probabilidade adequado). A função drift é dada por

$$F(x, u, y) = \sum_i \ell_i \beta_{\ell_i}(x, u, y) = (-\lambda x, \lambda(1 - \delta)x, \lambda(\gamma + \delta)x - \lambda\theta y - \lambda\gamma),$$

e portanto o sistema determinístico limite é governado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t), \\ u'(t) = \lambda(1 - \delta)x(t), \\ y'(t) = \lambda(\gamma + \delta)x(t) - \lambda\theta y(t) - \lambda\gamma, \end{cases}$$

com condições iniciais $x(0) = 1$, $u(0) = 0$ e $y(0) = 0$. A solução deste sistema é dada por $v(t) = (x(t), u(t), y(t))$, onde

$$x(t) = e^{-\lambda t},$$

$$u(t) = (1 - \delta)(1 - x(t)), \quad \text{e}$$

$$y(t) = f(x(t)),$$

substituindo f por f_θ se θ é igual a 0 ou 1.

De acordo ao Teorema B.2.1, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{v}^{(N)}(t) = v(t) \quad \text{q. c.}$$

uniformemente em intervalos de tempo limitados. Em particular, provamos que para cada uma das duas primeiras coordenadas de $\tilde{v}^{(N)}$, a convergência é uniforme em toda a reta.

Lema 3.3.1. *Vale que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(N)}(t) = x(t) \quad \text{q. c.,}$$

uniformemente em $\mathbb{R}$. Uma afirmação análoga vale para $\tilde{u}^{(N)}(t)$ e $u(t)$.

Demonstração. Provamos a primeira afirmação. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos $t_0 = t_0(\varepsilon)$ tal que $x(t) \leq \varepsilon/2$ para todo $t \geq t_0$. Pela convergência uniforme no intervalo $[0, t_0]$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que

$$|\tilde{x}^{(N)}(t) - x(t)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{para todo } N \geq N_0 \text{ e } t \in [0, t_0].$$

Logo, para todo $N \geq N_0$ e $t \geq t_0$,

$$\tilde{x}^{(N)}(t) \leq \tilde{x}^{(N)}(t_0) \leq x(t_0) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon,$$

quando $|\tilde{x}^{(N)}(t) - x(t)| \leq \varepsilon$. □

3.3.3 Provas dos teoremas

Ambos teoremas seguem do Teorema B.3.2. Adoptamos as notações apresentadas no apêndice, sendo neste caso $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_u, \mathcal{V}_y)$. Aqui $\varphi(x, u, y) = y$, e

$$\tau_\infty = \inf\{t : y(t) \leq 0\} = -\frac{1}{\lambda} \log x_\infty.$$

Logo, de (3.3),

$$\nabla \varphi(v(\tau_\infty)) \cdot F(v(\tau_\infty)) = y'(\tau_\infty) = \lambda(\gamma + \delta)x_\infty - \lambda\gamma < 0. \quad (3.8)$$

Vamos descrever o argumento para a prova da Lei dos Grandes Números. Embora $y(0) = 0$, temos que $y'(0) > 0$. Isto e (2.14) implicam que $y(\tau_\infty - \varepsilon) > 0$ e $y(\tau_\infty + \varepsilon) < 0$ para $0 < \varepsilon < \tau_\infty$. A convergência quase certa de $\tilde{y}^{(N)}$ para y uniformemente em intervalos limitados implica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\tau}^{(N)} = \tau_\infty \quad \text{quase certamente.} \quad (3.9)$$

Desta maneira, lembrando que $V^{(N)}(\tau^{(N)}) = \tilde{V}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)})$, obtemos o Teorema 3.2.4 da fórmula (3.9) e o Lema 3.3.1.

Com relação ao Teorema Central do Limite, obtemos do Teorema B.3.2 que

$$\sqrt{N} (\tilde{x}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)}) - x_\infty, \tilde{u}^{(N)}(\tilde{\tau}^{(N)}) - u_\infty)$$

converge em distribuição quando $N \rightarrow \infty$ para

$$(\mathcal{V}_x(\tau_\infty) - A \mathcal{V}_y(\tau_\infty), \mathcal{V}_u(\tau_\infty) + A(1 - \delta) \mathcal{V}_y(\tau_\infty)), \quad (3.10)$$

onde A é a constante definida no Teorema 3.2.5. A distribuição assintótica é uma distribuição normal bivariada com média zero, então só falta mostrar como é obtida a fórmula (3.6) para a matriz de covariâncias Σ .

Para isto, enumeramos os passos seguidos para calcular $\Lambda = \text{Cov}(\mathcal{V}(\tau_\infty), \mathcal{V}(\tau_\infty))$. Primeiro, calculamos a matriz de derivadas parciais da função drift F e a matriz G , como definidas no apêndice. Estas são dadas por

$$\begin{aligned} \partial F(x, u, y) &= \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda(1 - \delta) & 0 & 0 \\ \lambda(\gamma + \delta) & 0 & -\lambda\theta \end{pmatrix} \text{ e} \\ G(x, u, y) &= \begin{pmatrix} \lambda x & -\lambda(1 - \delta)x & -\lambda\delta x \\ -\lambda(1 - \delta)x & \lambda(1 - \delta)x & 0 \\ -\lambda\delta x & 0 & \lambda(\delta - \gamma)x + \lambda(\kappa - \theta + 2\gamma)y + \lambda\gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos a solução Φ da equação matricial

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, s) = \partial F(x(t), u(t), y(t)) \Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = \mathbb{I}_3.$$

Então, calculamos

$$\text{Cov}(\mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t)) = \int_0^t \Phi(t, s) G(x(s), u(s), y(s)) [\Phi(t, s)]^T ds. \quad (3.11)$$

Vale enfatizar que o cálculo de Λ pode ser separado em quatro casos: $\theta \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$, $\theta = 1/2$, $\theta = 0$ e $\theta = 1$. O valor $\theta = 1/2$ precisa ser considerado separadamente do intervalo $(0, 1)$ dada a ocorrência da integral $\int_0^t e^{\lambda(2\theta-1)s} ds$ no elemento $(3, 3)$ da matriz dada na fórmula (3.11). Isto alias explica porque a constante D no Teorema 2.2.5 é definida diferentemente para $\theta = 1/2$.

Obviamente, o passo final para obter Λ é tomar $t = \tau_\infty$ na fórmula obtida de (3.11). Isto é conseguido fazendo substituições convenientes nesta fórmula de acordo ao valor de θ ; por exemplo, para $\theta \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$ substituímos $e^{-\lambda t}$ e $e^{-\lambda \theta t}$ respectivamente por

$$x_\infty \text{ e } \frac{(\gamma + \delta) \theta x_\infty + \gamma(1 - \theta)}{\gamma + \delta \theta}.$$

A fórmula resultante (válida para qualquer θ) é

$$\Lambda = \begin{pmatrix} x_\infty(1 - x_\infty) & -(1 - \delta)(1 - x_\infty)x_\infty & 0 \\ -(1 - \delta)(1 - x_\infty)x_\infty & (1 - \delta)(1 - x_\infty)((1 - \delta)x_\infty + \delta) & -B \\ 0 & -B & D \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Usando (3.10), (3.12) e propriedades bem conhecidas da variância e a covariância, conseguimos a fórmula (3.6).

Capítulo 4

Uma abordagem via sistemas de partículas

Neste capítulo interpretamos a difusão de um rumor como um sistema de passeios aleatórios em um grafo. Em particular, mostramos que uma simples variante do modelo estudado em Kurtz et al. (2008) é suficiente para descrever a versão *k-fold stifling* do modelo [MT] apresentada em Belen (2008).

4.1 O modelo [ALMM]

No modelo introduzido em Alves et al. (2006), chamado na sequência de modelo [ALMM], considera-se um sistema de passeios aleatórios no grafo completo. No tempo zero existe em cada vértice do grafo uma partícula que pode ser ou ativa ou inativa. Cada partícula ativa começa realizar um passeio aleatório pelos vértices do grafo seguindo as seguintes regras:

1. Quando uma partícula ativa entra em contato com uma partícula inativa, esta última é ativada e começa realizar, de maneira independente, um passeio aleatório pelo grafo;
2. as partículas ativas podem visitar qualquer vértice do grafo;
3. cada partícula ativa morre no instante em que faz um salto sem ativar nenhuma partícula.

Este modelo, formulado inicialmente a tempo discreto, é uma variante do “modelos dos sapos” bem estudado em grafos infinitos em Alves et al. (2002a,b) e Lebensztayn et al. (2005), entre outros. Para uma revisão deste tipo de modelos sugerimos consultar Popov (2003).

Uma quantidade de interesse para o modelo [ALMM] é a proporção de sítios visitados ao final do processo, isto é, quando não há mais partículas ativas. Esta proporção é estudada pela primeira vez em Alves et al. (2006) por meio de simulações e uma análise de campo médio do processo.

Kurtz et al. (2008) introduzem uma variante a tempo contínuo, que chamamos de versão *k-vidas* do modelo [ALMM], onde assume-se que cada partícula ativa morre no instante em que

faz um número finito k de saltos sem ativar nenhuma partícula. Neste caso, provam-se teoremas limites para a proporção de sítios visitados ao final do processo.

Nosso objetivo é comparar a versão k -vidas do modelo [ALMM] com um processo de difusão de um rumor. Para isto, introduzimos um modelo auxiliar que conduz-nos aos mesmos resultados obtidos em Kurtz et al. (2008) e que pode ser acoplado à versão k -fold stifling do modelo [MT].

4.1.1 O modelo auxiliar

Consideramos a seguinte variante da versão k -vidas do modelo [ALMM], chamada de modelo auxiliar na sequencia. No tempo zero existe em cada vértice do grafo uma partícula ativa ou inativa, e cada partícula ativa começa realizar um passeio aleatório simétrico a tempo contínuo pelos vértices do grafo seguindo as seguintes regras:

1. Quando uma partícula ativa entra em contato com uma partícula inativa, esta última é ativada e começa realizar, de maneira independente, um passeio aleatório pelo grafo;
2. nenhuma partícula ativa pode visitar novamente o vértice donde ela começou o passeio;
3. cada partícula ativa morre no instante em que faz um número finito k de saltos sem ativar nenhuma partícula.

Formalmente, consideramos o grafo completo de $N + 1$ vértices e usando a notação de Kurtz et al. (2008) denotamos ao número de sítios visitados e de partículas ativas com i vidas no instante t por $V^{(N)}(t)$ e $A_i^{(N)}(t)$ respectivamente, para $i = 1, \dots, k$. Quando nos referimos ao número de vidas de uma partícula queremos dizer o número de vezes que ela passara por um sítio anteriormente visitado, por alguma partícula ativa, antes de morrer.

Assim definido, o processo

$$\left\{ \left(V^{(N)}(t), A_1^{(N)}(t), \dots, A_k^{(N)}(t) \right) \right\}_{t \geq 0}$$

é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com transições e correspondentes taxas dadas por

transição	taxa
$(1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1)$	$(N - V + 1) \sum_{i=1}^k A_i,$
$(0, 0, \dots, \overset{i-1}{1}, \overset{i}{-1}, \dots, 0)$	$(V - 1) A_i,$
$(0, -1, \dots, 0, 0, \dots, 0)$	$(V - 1) A_1.$

para $i = 2, \dots, k$

Em palavras, a primeira transição indica o evento no qual uma partícula inativa é ativada; a segunda indica o evento que uma partícula ativa com i vidas perde uma vida (para $i = 2, \dots, k$) e a última representa a morte de uma partícula ativa com uma vida.

Aplicando as mesmas idéias usadas em Kurtz et al. (2008) pode-se concluir que o modelo auxiliar proposto tem o mesmo comportamento limite que a versão k -vidas do modelo [ALMM]

e portanto valem os mesmos teoremas limites. Em particular, se assumimos que $V^{(N)}(0) = N$ e $A_k^{(N)}(0) = 1$, então obtemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V^{(N)}(T^{(N)})}{N} = v_\infty \quad \text{em probabilidade,}$$

onde $T^{(N)}$ é o tempo de absorção do processo e

$$v_\infty = 1 + (k+1)^{-1} W_0 \left(-(k+1) e^{-(k+1)} \right) \quad (4.1)$$

é a quantidade obtida em Kurtz et al. (2008). No entanto, como naquele trabalho, este resultado pode ser obtido para condições iniciais gerais.

Na próxima seção mostramos como este modelo auxiliar é suficiente para descrever a versão *k-fold stifling* do modelo [MT].

4.2 A difusão de um rumor como um sistema de partículas

Na versão *k-fold stifling* do modelo [MT] assume-se que um informante só decide parar de transmitir o rumor no instante em que encontra-se com o k -ésimo indivíduo já informado, seja este informante ou contido. Na Observação 2.2.7 notamos que este modelo resulta de considerar $R \equiv k$ na variante *random stifling* do modelo [MT] proposta no Capítulo 2. Mantendo a notação desse capítulo temos que no instante t , $X^{(N)}(t)$, $Y_i^{(N)}(t)$ e $Z^{(N)}(t)$ representam o número de ignorantes, informantes de tipo i e contidos, respectivamente, sendo que neste caso $i = 1, \dots, k$. O processo k -dimensional

$$\left\{ \left(X^{(N)}(t), Y_1^{(N)}(t), \dots, Y_k^{(N)}(t) \right) \right\}_{t \geq 0} \quad (4.2)$$

é uma cadeia de Markov a tempo contínuo que, de acordo a (2.2) para o caso $R \equiv k$, tem transições e correspondentes taxas dadas por

transição	taxa
$(-1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1)$	$X \sum_{i=1}^k Y_i^{(N)},$
$(0, 0, \dots, \overset{i-1}{1}, \overset{i}{-1}, \dots, 0)$	$(N - X) Y_i, \quad \text{para } i = 2, \dots, k$
$(0, -1, \dots, 0, 0, \dots, 0)$	$(N - X) Y_1.$

Notemos que estas transições e taxas são semelhantes às obtidas na seção anterior. Esta semelhança fica em evidência depois de representar a versão *k-fold stifling* do modelo [MT] como o modelo auxiliar definido na seção precedente. Mais precisamente, consideramos:

1. o grafo completo de $N + 1$ vértices para representar a população misturada, homogênea e fechada de $N + 1$ indivíduos, e
2. o sistema de passeios aleatórios para representar a difusão do rumor na população.

Nesta representação cada partícula ativa está associada a um informante e cada partícula inativa a um ignorante. Esta relação fica determinada no tempo zero onde há uma partícula por cada vértice. Logo, com a posição de uma partícula ativa em um instante de tempo determinado indica-se o indivíduo com o qual o informante que ela representa esta tendo um contato. Diante disso, quando uma partícula ativa morre entende-se que o informante ao qual ela representa transforma-se em contido. Com efeito, lembremos que uma partícula ativa morre depois de visitar k sitios anteriormente visitados por alguma partícula ativa. Mas isto é equivalente ao evento em que o informante ao qual esta partícula esta associada tem k contatos com indivíduos já informados do rumor.

Segue-se que com esta representação podemos construir ambos processos em um mesmo espaço de probabilidade e de forma tal que o número de sitios visitados por uma partícula ativa em um instante de tempo t é igualmente distribuído ao número de indivíduos informados na população até esse momento. Isto é, de maneira que

$$V^{(N)}(t) = N + 1 - X^{(N)}(t) \quad (4.3)$$

em distribuição. Deste modo, concluímos de (4.3) e (4.1) que a proporção de ignorantes ao final do processo converge em probabilidade para

$$1 - v_\infty = -(k+1)^{-1} W_0 \left(-(k+1) e^{-(k+1)} \right)$$

que é exatamente o valor obtido para o análogo determinístico do modelo em [Belen \(2008\)](#).

4.3 Comentários finais

Neste capítulo discutimos a relação entre dois modelos que, formulados de maneira independente e em diferentes contextos, podem ser pensados como um em função do outro. Para isto, introduzimos um modelo auxiliar com o mesmo comportamento limite que a versão k -vidas do modelo [ALMM] e que pode ser acoplado à versão k -fold stifling do modelo [MT]. Para este último, [Belen \(2008\)](#) encontra a proporção final de ignorantes para a versão determinística e para condições iniciais específicas, isto é, um informante e N ignorantes. No entanto, os resultados de [Kurtz et al. \(2008\)](#) e nossa comparação dos modelos permitem-nos estabelecer uma lei dos grandes números e um teorema central do limite desta proporção na versão estocástica. Mais ainda, isto pode ser feito para condições iniciais gerais.

Das observações anteriores concluímos que o modelo [ALMM] pode ser uma ótima ferramenta para descrever diferentes processos da difusão de um rumor ou uma informação. Como um outro exemplo disto, mencionamos uma generalização natural da versão k -vidas do modelo [ALMM] que surge de tomar o k como sendo uma variável aleatória. O mesmo raciocínio usado neste capítulo permite-nos concluir que esta generalização é adequada para descrever a variante *random stifling* do modelo [MT] introduzida no Capítulo 2.

Por outro lado, considerar o modelo [ALMM] em outro tipo de grafos finitos pode nos conduzir a uma melhor compreensão de diferentes processos reais de difusão de uma informação.

Apêndice A

Construção gráfica dos modelos

No que segue apresentamos uma construção gráfica dos modelos [DK] e [MT].

A.1 Construção do modelo [DK]

Consideramos o grafo completo de $N + 1$ vértices que denotamos por K_{N+1} e cujo conjunto de vértices denotamos por $[N + 1] := \{1, \dots, N + 1\}$. Dizemos que cada vértice do grafo esta em um dos estados: 0 (ignorante), 1 (informante) e 2 (contido). Denotamos ao processo por $\xi_t \in \{0, 1, 2\}^{[N+1]}$ e notamos que a cadeia $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ definida na Seção 1.3 pode ser obtida como

$$X(t) = \sum_{v \in [N+1]} I_{\{\xi_t(v)=0\}} \quad \text{e}$$
$$Y(t) = \sum_{v \in [N+1]} I_{\{\xi_t(v)=1\}}.$$

Daremos uma construção gráfica para o processo ξ_t . Para isto, consideramos uma família de processos de Poisson independentes de taxa 1, $\{L^{\{u,v\}} : u, v \in [N + 1]\}$, onde $\{u, v\}$ denota ao elo entre os vértices u e v .

Para a construção consideramos a região espaço-temporal $K_{N+1} \times (0, \infty)$. Associamos o processo $L^{\{u,v\}}$ ao elo $\{u, v\}$ e em cada chegada de um ponto deste processo fazemos as seguintes trocas de estado:

- Se u (ou v) está no estado 0 e v (ou u) está no estado 1: u (ou v) troca para o estado 1,
- se u (ou v) está no estado 1 e v (ou u) está no estado 2: u (ou v) troca para o estado 2,
- se ambos u e v estão no estado 1: ambos cambiam ao estado 2,
- nada acontece em qualquer outro caso.

Desta forma obtemos uma versão do processo estocástico ξ_t e portanto da cadeia $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ definida na Seção 1.3 com taxas dadas por (1.1). Observamos que consideramos processos de Poisson de taxa 1 sem perda de generalidade pois o processo pode ser definido com processos de Poisson com taxa $\lambda > 0$ mudando com isto a velocidade do processo.

A.2 Construção do modelo [MT]

Para a construção do modelo [MT] seguimos os mesmos passos da seção anterior. Neste caso consideramos o grafo completo direcionado, com um elo direcionado entre quaisquer dois vértices distintos. Denotamos ao grafo por $\vec{K}_{N+1}$ e ao conjunto de vértices por $[N+1]$. Dizemos que cada vértice do grafo está em um dos estados: 0, 1 e 2. Denotamos a este processo por $\eta_t \in \{0, 1, 2\}^{[N+1]}$ e observamos que podemos definir a cadeia $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ da Seção 1.4 como

$$X(t) = \sum_{v \in [N+1]} I_{\{\eta_t(v)=0\}} \quad \text{e}$$

$$Y(t) = \sum_{v \in [N+1]} I_{\{\eta_t(v)=1\}}.$$

Para a construção gráfica do processo η_t , consideramos uma família de processos de Poisson independentes de taxa 1, $\{L^{(u,v)} : (u,v) \in [N+1] \times [N+1] \text{ e } u \neq v\}$. Notemos que neste caso, a diferença da construção anterior, temos dois processos de Poisson associados para cada par de vértices. Podemos representar isto na região espaço-temporal $\vec{K}_{N+1} \times (0, \infty)$ e associando os pontos do processo $L^{(u,v)}$ ao elo direcionado no sentido de u para v . Desta maneira, cada chegada de um ponto de $L^{(u,v)}$ representa as seguintes trocas de estado:

- Se u está no estado 1 e v está no estado 0: v troca para o estado 1,
- se u está no estado 1 e v está no estado 1 ou 2: u troca para o estado 2,
- nada acontece em qualquer outro caso.

Desta forma obtemos uma versão do processo estocástico η_t e portanto da cadeia $\{(X(t), Y(t))\}_{t \geq 0}$ definida na Seção 1.4 com taxas dadas por (1.2).

Apêndice B

Cadeias de Markov “density dependent”

Enunciamos os principais conceitos e teoremas de convergência que são aplicados ao longo da tese, referentes à teoria das cadeias de Markov “density dependent”. Como se trata de uma teoria muito citada na literatura, faremos uma abordagem rápida dos resultados. Para mais detalhes o leitor pode consultar o livro de [Andersson e Britton \(2000\)](#) (Capítulo 5) ou [Ethier e Kurtz \(2005\)](#) (Capítulo 11).

B.1 Definição e caracterização do processo

Para cada $n \geq 1$, seja $Z_n = (Z_n(t))_{t \geq 0}$ uma cadeia de Markov a tempo contínuo no espaço de estados d -dimensional $\mathbb{Z}^d$ governado pelas taxas de transição

$$q_{z, z+\ell}^{(n)} = n\beta_\ell\left(\frac{z}{n}\right), \quad z, \ell \in \mathbb{Z}^d.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} P(Z_n(t+h) = z + \ell | Z_n(t) = z) &= hn\beta_\ell\left(\frac{z}{n}\right) + o(h), \quad \ell \neq 0 \\ P(Z_n(t+h) = z | Z_n(t) = z) &= 1 - hn \sum_\ell \beta_\ell\left(\frac{z}{n}\right) + o(h). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Notemos que assim definidas as taxas dependem da “densidade” do processo. Esta é a justificação do nome de “density dependent” dado à cadeia de Markov Z_n .

Supomos que o processo tem no máximo um número enumerável de possíveis transições e que as funções $\beta_\ell(x)$ são contínuas. Além disto, supomos que o estado inicial do processo $Z_n(0)$ é não aleatório.

Uma maneira de caracterizar o processo Z_n é por meio de processos de Poisson. Com efeito, se consideramos processos de Poisson independentes de taxa 1, $Y_\ell = (Y_\ell(t))_{t \geq 0}$, definidos para cada uma das possíveis transições ℓ , podemos escrever

$$Z_n(t) = Z_n(0) + \sum_\ell \ell Y_\ell \left(n \int_0^t \beta_\ell \left(\frac{Z_n(s)}{n} \right) ds \right). \tag{B.2}$$

Para verificar que (B.2) satisfaz (B.1) notemos que dado $Z_n(t) = z$, a probabilidade que haverá

uma transição em

$$Y_\ell \left(n \int_0^t \beta_\ell \left(\frac{Z_n(s)}{n} \right) ds \right)$$

durante $(t, t+h)$ é $hn\beta_\ell \left(\frac{z}{n} \right) + o(h)$ pois o integrando é igual a $n\beta_\ell \left(\frac{z}{n} \right)$ até o primeiro salto depois de t . Observemos que os processos são definidos no mesmo espaço de probabilidade para diferentes valores de n , pois na construção usamos os mesmos processos de Poisson. No que segue mostraremos teoremas limites para os processos $\{Z_n\}$.

B.2 Lei dos Grandes Números

Para formular uma Lei dos Grandes Números definimos a função drift F por

$$F(x) = \sum_{\ell} \ell \beta_\ell(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d \quad (\text{B.3})$$

e consideramos o processo $\bar{Z}_n(t) = n^{-1}Z_n(t)$. Deste modo, a equação (B.2) é equivalente a

$$\bar{Z}_n(t) = \bar{Z}_n(0) + \sum_{\ell} \ell n^{-1} \tilde{Y}_\ell \left(n \int_0^t \beta_\ell(\bar{Z}_n(s)) ds \right) + \int_0^t F(\bar{Z}_n(s)) ds, \quad (\text{B.4})$$

onde $\tilde{Y}_\ell(t) = Y_\ell(t) - t$ é o processo Poisson centrado na sua média. Supondo que o número de possíveis transições do processo é finito e observando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} \left| \frac{\tilde{Y}_\ell(ns)}{n} \right| = 0 \quad \text{q.c.,} \quad t \geq 0$$

é fácil ver que o segundo termo do lado direito de (B.4) será pequeno para n suficientemente grande. Isto sugere que $\bar{Z}_n(t)$ se assemelha à função vetorial determinística $z(t)$ definida como a solução da equação integral

$$z(t) = z(0) + \int_0^t F(z(s)) ds. \quad (\text{B.5})$$

Esta ideia é formalizada no seguinte teorema e vale para no máximo um número enumerável de possíveis transições do processo.

Teorema B.2.1. *Supomos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Z}_n(0) = z_0$ e que para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^d$,*

$$\sum_{\ell} |\ell| \sup_{x \in K} \beta_\ell(x) < \infty \quad (\text{B.6})$$

e que existe uma constante $M_K > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq M_K |x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in K.$$

Então, para todo $t \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} |\bar{Z}_n(s) - z(s)| = 0, \quad q.c.,$$

onde $z(t)$ é a única solução para (B.5).

Demonstração. Ver Teorema 11.2.1 de [Ethier e Kurtz \(2005\)](#).

B.3 Teorema Central do Limite

Se definimos

$$W_\ell^n(t) = \sqrt{n} (n^{-1} Y_\ell(nt) - t) = n^{-1/2} \tilde{Y}_\ell(nt)$$

sabemos que W_ℓ^n converge para o movimento Browniano padrão W_ℓ . Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n(t) &:= \sqrt{n} (\bar{Z}_n(t) - z(t)) \\ &= \mathcal{V}_n(0) + \sum_\ell \ell W_\ell^n \left(\int_0^t \beta_\ell (\bar{Z}_n(s)) ds \right) + \int_0^t \sqrt{n} (F(\bar{Z}_n(s)) - F(z(s))) ds. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Notemos que $\mathcal{V}_n(0) = \sqrt{n} (\bar{Z}_n(0) - z(0))$ em (B.7) é por hipótese não aleatório. A segunda igualdade é consequência direta da definição de W_ℓ^n , $\bar{Z}_n$ e z . Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{n} (F(\bar{Z}_n(s)) - F(z(s))) &= \sqrt{n} \partial F(z(s)) (\bar{Z}_n(s) - z(s)) + o\left(\sqrt{n} |\bar{Z}_n(s) - z(s)|^2\right) \\ &= \partial F(z(s)) \mathcal{V}_n(s) + o(|\bar{Z}_n(s) - z(s)|) \mathcal{V}_n(s), \end{aligned}$$

onde $\partial F = (\partial_j F_i)$ é a função matricial de derivadas parciais. Do Teorema B.2.1 sabemos que $\bar{Z}_n$ converge para z , e que W_ℓ^n converge para W_ℓ , um movimento Browniano padrão. Isto sugere que $\mathcal{V}_n$ converge para um processo $\mathcal{V}$ definido pela equação integral

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(0) + \sum_\ell \ell W_\ell^n \left(\int_0^t \beta_\ell (z(s)) ds \right) + \int_0^t \partial F(z(s)) \mathcal{V}(s) ds. \quad (\text{B.8})$$

Isto é formalizado no seguinte teorema.

Teorema B.3.1. *Supomos que para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^d$,*

$$\sum_\ell |\ell|^2 \sup_{x \in K} \beta_\ell(x) < \infty, \quad (\text{B.9})$$

e que ∂F é contínua. Supomos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}_n(0) = \mathcal{V}(0) \quad (\text{constante}).$$

Então

$$\mathcal{V}_n \Rightarrow \mathcal{V},$$

onde $\Rightarrow$ denota convergência em distribuição e $\mathcal{V}$ é o processo definido na equação (B.8). Este

processo $\mathcal{V}$ é um processo vectorial Gaussiano com matriz de covariância

$$\text{Cov}(\mathcal{V}(t), \mathcal{V}(r)) = \int_0^{r \wedge t} \Phi(t, s) G(z(s)) [\Phi(r, s)]^T ds, \quad (\text{B.10})$$

onde Φ é a função matricial definida como a solução de

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, s) = \partial F(z(t)) \Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = \mathbb{I}, \quad (\text{B.11})$$

e $G(x) = \sum_{\ell} \ell \ell^T \beta_{\ell}(x)$.

Demonstração. Ver Teorema 11.2.3 de [Ethier e Kurtz \(2005\)](#).

Mais ainda, pode-se provar o seguinte teorema que será de nosso interesse.

Teorema B.3.2. *Seja φ continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^d$. Sejam $\bar{Z}_n$ e z definidos como antes, com $\varphi(z(0)) > 0$, e supomos que as condições do Teorema [B.3.1](#) são satisfeitas. Seja,*

$$\tau_n = \inf\{t : \varphi(\bar{Z}_n(t)) \leq 0\} \quad (\text{B.12})$$

e

$$\tau = \inf\{t : \varphi(z(t)) \leq 0\}. \quad (\text{B.13})$$

Supomos que $\tau < \infty$ e

$$\nabla \varphi(z(\tau)) \cdot F(z(\tau)) < 0. \quad (\text{B.14})$$

Então,

$$\sqrt{n}(\tau_n - \tau) \Rightarrow -\frac{\nabla \varphi(z(\tau)) \cdot \mathcal{V}(\tau)}{\nabla \varphi(z(\tau)) \cdot F(z(\tau))} \quad (\text{B.15})$$

e

$$\sqrt{n}(\bar{Z}_n(\tau_n) - z(\tau)) \Rightarrow \mathcal{V}(\tau) - \frac{\nabla \varphi(z(\tau)) \cdot \mathcal{V}(\tau)}{\nabla \varphi(z(\tau)) \cdot F(z(\tau))} F(z(\tau)). \quad (\text{B.16})$$

Demonstração. Ver Teorema 11.4.1 de [Ethier e Kurtz \(2005\)](#).

Referências Bibliográficas

- O. S. M. Alves, E. Lebensztayn, F. P. Machado e M. Z. Martinez. Random walks systems on complete graphs. *Bull. Braz. Math. Soc.*, 37 (4):571–580, 2006. Citado na pág. [28](#)
- O. S. M. Alves, F. P. Machado e S Yu. Popov. Phase transition for the frog model. *Electron. J. Probab.*, 7 (16):1–21, 2002a. Citado na pág. [28](#)
- O. S. M. Alves, F. P. Machado e S. Yu. Popov. The shape theorem for the frog model. *Ann. Appl. Probab.*, 12 (2):533–546, 2002b. Citado na pág. [28](#)
- H. Andersson e T. Britton. *Stochastic epidemic models and their statistical analysis*. Springer Verlag, New York, 2000. Lecture Notes in Statistics, Vol. 151. Citado na pág. [2](#), [34](#)
- S. Belen. *The behaviour of stochastic rumours*. PhD thesis, School of Mathematical Sciences, The University of Adelaide, Austrália, Julho 2008. Citado na pág. [6](#), [13](#), [28](#), [31](#)
- S. Belen e C. E. M. Pearce. Rumours with random initial conditions. *ANZIAM J.*, 45:393–400, 2004. Citado na pág. [2](#), [6](#), [13](#)
- H. Carnal. Calcul des probabilités et modélisation. *El. Math.*, 49 (4):168–173, 1994. Citado na pág. [2](#), [6](#), [13](#)
- R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey e D. E. Knuth. On the lambert w function. *Adv. Comput. Math.*, 5 (4):329–359, 1996. Citado na pág. [10](#)
- D. J. Daley e J. Gani. *Epidemic Modelling: an Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Citado na pág. [2](#), [5](#), [7](#), [19](#), [23](#)
- D. J. Daley e D. G. Kendall. Stochastic rumours. *J. Inst. Math. Appl.*, 1:42–55, 1965. Citado na pág. [1](#), [4](#), [5](#)
- K. Dietz. Epidemics and rumours: a survey. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. A*, 130 (4):505–528, 1967. Citado na pág. [2](#)
- S. N. Ethier e T. G. Kurtz. *Markov Process: Characterization and Convergence*. John Wiley & Sons Inc., New York, 2005. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Citado na pág. [2](#), [15](#), [34](#), [36](#), [37](#)
- W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1*. John Wiley and Sons, New York, segunda edition, 1957. Citado na pág. [1](#)
- J. Gani. The maki-thompson rumour model: a detailed analysis. *Environ. Modelling Software*, 15:721–725, 2000. Citado na pág. [2](#)
- W. Goffman e V. A. Newill. Generalization of epidemic theory: an application to the transmission of ideas. *Nature*, 204 (4955):225–228, 1964. Citado na pág. [1](#)

- B. Hayes. Rumours and errors. *American Scientist*, 93:207–211, 2005. Citado na pág. 22
- K. Kawachi. Deterministic models for rumor transmission. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 9:1989–2028, 2008. Citado na pág. 2, 23
- M. Kosfeld. Rumours and markets. *J. Math. Econom.*, 41:646–664, 2005. Citado na pág. 1
- T. G. Kurtz, E. Lebensztayn, A. R. Leichsenring e F. P. Machado. Limit theorems for an epidemic model on the complete graph. *Alea*, 4:45–55, 2008. Citado na pág. 28, 29, 30, 31
- E. Lebensztayn, F. P. Machado e S. Popov. An improved upper bound for the critical probability of the frog model on homogeneous trees. *J. Statist. Phys.*, 119 (1-2):331–345, 2005. Citado na pág. 28
- E. Lebensztayn, F. P. Machado e P. M. Rodriguez. Limit theorems for a general stochastic rumour model. *arXiv: math.PR/1003.4995*, 2010a. Citado na pág. 19
- E. Lebensztayn, F. P. Machado e P. M. Rodriguez. On the behaviour of a rumor process with random stifling. *Environ. Modelling Software*, Aceito para publicação, 2010b. Citado na pág. 7
- C. Lefevre e P. Picard. Distribution of the final extent of a rumour process. *J. Appl. Prob.*, 31: 244–249, 1994. Citado na pág. 2
- D. P. Maki e M. Thompson. *Mathematical Models and Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973. Citado na pág. 1, 2, 6
- M. Nekovee, Y. Moreno, G. Bianconi e M. Marsili. Theory of rumour spreading in complex social networks. *Phys. A*, 374:457–470, 2007. Citado na pág. 1
- C. E. M. Pearce. On the exact solution of the general stochastic rumour. *Math. Comput. Modelling*, 31:289–298, 2000. Citado na pág. 2, 23
- B. Pittel. On a daley-kendall model of random rumours. *J. Appl. Probab.*, 27:14–27, 1990. Citado na pág. 2, 5
- S. Yu. Popov. Frogs and some other interacting random walks models. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, AC:277–288, 2003. Citado na pág. 28
- A. Rapoport. Spread of information through a population with socio-structural bias: I. assumption of transitivity. *Bull. Math. Biophys.*, 15:523–533, 1953a. Citado na pág. 1
- A. Rapoport. Spread of information through a population with socio-structural bias: Ii. various models with partial transitivity. *Bull. Math. Biophys.*, 15:535–546, 1953b. Citado na pág. 1
- A. Rapoport e L. I. Rebhun. On the mathematical theory of rumour spread. *Bull. Math. Biophys.*, 14:375–383, 1952. Citado na pág. 1
- H. C. Schramm. An analytic framework for the war of ideas. Master’s thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, California, Estados Unidos, 2006. Citado na pág. 1, 5
- A. Sudbury. The proportion of the population never hearing a rumour. *J. Appl. Prob.*, 22: 443–446, 1985. Citado na pág. 2, 6, 14, 22
- R. Watson. On the size of a rumour. *Stoch. Proc. Appl.*, 27:141–149, 1988. Citado na pág. 2, 5, 6, 14, 22

Índice Remissivo

- cadeia de Markov
 - “density dependent”, 15, 24, 34
 - caracterização, 34
 - Lei dos Grandes Números, 35
 - Teorema Central do Limite, 36
 - geral, 20
 - reduzida, 15
- contidos, 4
- função
 - drift*, 16, 25
 - derivadas parciais, 18, 26
 - de Lambert, 10
 - ramo inferior, 10, 21
 - ramo principal, 10, 21
- grafo completo, 28–30
- ignorantes, 4
 - proporção de
 - Lei dos Grandes Números, 10, 22
 - Teorema Central do Limite, 12, 22
- informantes, 4
- limite determinístico, 15, 24
- modelo epidemico
 - SIR, 2
- modelos de passeios aleatórios
 - modelo [ALMM], 28
 - modelo auxiliar, 29, 31
 - variante *k-vidas*, 28, 31
 - sapos, 28
- modelos de rumores
 - Daley-Kendall (ou [DK]), 4, 20, 22
 - variante (α, p) , 5, 20
 - variante (α, p, q) , 19, 20, 23
 - variante *k-fold stifling*, 5
 - geral, 20
 - Hayes, 20, 22
 - história, 1
 - Kawachi, 20, 23
 - Maki-Thompson (ou [MT]), 6, 13, 20, 22
 - variante *k-fold stifling*, 6, 13, 28, 30, 31
 - variante *random stifling*, 7, 13
 - Pearce, 20, 23
- mudança do tempo, 15, 24
- neutros, 19
 - proporção de
 - Lei dos Grandes Números, 22
 - Teorema Central do Limite, 22
- partícula, 28
 - ativa, 28, 29
 - inativa, 28, 29
- passeio aleatório, 28, 29, 31
- probabilidades de transição
 - para cadeias de Markov “density dependent”, 34
 - para o modelo [DK], 4
 - variante (α, p) , 5
 - para o modelo [MT], 6
 - para o modelo SIR, 2
- redução da dimensão, 15
- tempo de absorção, 9, 20
- transições
 - para cadeias de Markov “density dependent”, 34
 - para o modelo [ALMM]
 - modelo auxiliar, 29
 - para o modelo [DK], 4
 - variante (α, p) , 5
 - variante (α, p, q) , 19
 - para o modelo [MT], 6
 - variante *k-fold stifling*, 30
 - variante *random stifling*, 8
 - para o modelo de rumor geral, 20
 - para o modelo SIR, 2