Modelos de regressão lineares mistos sob a classe de distribuições normal-potência

Roger Jesús Tovar Falón

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Heleno Bolfarine

Coorientador: Prof. Dr. Guillermo Martínez Flórez

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES e CNPq

São Paulo, Novembro de 2017

Modelos de regressão lineares mistos sob a classe de distribuições normal-potência

Esta tese contém as correções e alterações sugeridas
pela Comissão Julgadora durante a defesa
realizada por Roger Jesús Tovar Falón em 27/11/2017.

O original encontra-se disponível no Instituto de
Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Heleno Bolfarine (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Guillermo Domingo Martínez Flórez - Universidad de Córdoba-Colombia
- Prof. Dr. Aldo William Medina Garay - DE-CCEN-UFPE
- Prof. Dr. Clécio da Silva Ferreira - UFJF
- Prof. Dr. Vicente Garibay Cancho - ICMC-USP

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter-me acompanhado e guiado em todo momento.

Aos meus pais, Marina e Nicolas, meus irmãos e meus sobrinhos, pelo apoio incondicional em todo momento e as forças que sempre me brindaram.

A Zunny pelo amor e carinho, pela sua paciência, compreensão e pelo apoio durante os dias e momentos de ausência.

A meu orientador o Professor Heleno Bolfarine, pela dedicação, compreensão e confiança em mim depositada, pela orientação que recebi ao longo da elaboração deste trabalho.

A Lina por ter compartilhado comigo parte deste tempo, pelo apoio, amor e compreensão durante os momentos difíceis, e pelos grandes momentos vividos durante os últimos anos em São Paulo.

A meu coorientador e amigo, o Professor Guillermo Martínez, em especial pela sua amizade todos estes anos, por ter-me motivado a seguir pelo caminho do trabalho acadêmico e pelas valiosas sugestões ao longo deste trabalho.

A todos os professores da banca examinadora pelas suas sugestões e contribuições importantes para que este trabalho pudesse ser melhorado.

Aos meus amigos e colegas do IME-USP, em especial Elizabeth, Aline e Fabiana, pelos gratos momentos compartilhados.

Ao meu amigo Haroldo Fortes, por ter-me aceito em casa e pela sua amizade.

Aos meus amigos e colegas da Colômbia aqui em São Paulo: Edgardo, Hugo, Mario, Duvan e Edwin, pela sua amizade.

Aos professores do Departamento de Estatística do IME-USP, pelos seus ensinamentos concedidos.

Aos meus amigos e colegas da Universidad de Córdoba, os professores Carlos Reales e Hugo Aduén, pelo apoio e a confiança depositada em mim para cursar meus estudos de Doutorado.

À Universidade de Córdoba por me dar a oportunidade de vir estudar nesta excelente Universidade.

Finalmente, agradeço o apoio financeiro por parte da CAPES e do CNPq.

Resumo

Neste trabalho são apresentadas algumas extensões dos modelos potência-alfa assumindo o contexto em que as observações estão censuradas ou limitadas. Inicialmente propomos um novo modelo assimétrico que estende os modelos t -assimétrico (Azzalini e Capitanio, 2003) e t -potência (Zhao e Kim, 2016) e inclui a distribuição t de Student como caso particular. Este novo modelo é capaz de ajustar dados com alto grau de assimetria e curtose, ainda maior do que os modelos t -assimétrico e t -potência. Em seguida estendemos o modelo t -potência às situações em que os dados apresentam censura, com alto grau de assimetria e caudas pesadas. Este modelo generaliza o modelo de regressão linear t de Student para dados censurados por Arellano-Valle *et al.* (2012)

O trabalho também introduz o modelo linear misto normal-potência para dados assimétricos. Aqui a inferência estatística é realizada desde uma perspectiva clássica usando o método de máxima verossimilhança junto com o método de integração numérica de Gauss-Hermite para aproximar as integrais envolvidas na função de verossimilhança. Mais tarde, o modelo linear com interceptos aleatórios para dados duplamente censurados é estudado. Este modelo é desenvolvido sob a suposição de que os erros e os efeitos aleatórios seguem distribuições normal-potência e normal-assimétrica. Para todos os modelos estudados foram realizados estudos de simulação a fim de estudar as suas bondades de ajuste e limitações. Finalmente, ilustram-se todos os métodos propostos com dados reais.

Palavras-chave: modelos lineares mistos, distribuição normal-potência, distribuição normal-assimétrica, estimação por máxima verossimilhança, quadratura de Gauss-Hermite.

Abstract

In this work some extensions of the alpha-power models are presented, assuming the context in which the observations are censored or limited. Initially we propose a new asymmetric model that extends the skew- t (Azzalini e Capitanio, 2003) and power- t (Zhao e Kim, 2016) models and includes the Student's t -distribution as a particular case. This new model is able to adjust data with a high degree of asymmetry and curse, even higher than the skew- t and power- t models. Then we extend the power- t model to situations in which the data present censorship, with a high degree of asymmetry and heavy tails. This model generalizes the Student's t linear censored regression model t by Arellano-Valle *et al.* (2012)

The work also introduces the power-normal linear mixed model for asymmetric data. Here statistical inference is performed from a classical perspective using the maximum likelihood method together with the Gauss-Hermite numerical integration method to approximate the integrals involved in the likelihood function. Later, the linear model with random intercepts for doubly censored data is studied. This model is developed under the assumption that errors and random effects follow power-normal and skew-normal distributions. For all the models studied, simulation studies were carried out to study their benefits and limitations. Finally, all proposed methods with real data are illustrated.

Keywords: linear mixed models, power-normal distribution, skew-normal distribution, maximum likelihood estimation, Gauss-Hermite quadrature.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
2 Preliminares	3
2.1 Truncamento e Censura	3
2.1.1 Truncamento	3
2.1.2 Censura	4
2.2 Modelo Linear Normal de Efeitos Mistos	4
2.2.1 Abordagem Marginal	5
2.2.2 Abordagem Condicional	5
2.3 Distribuições Normal-Assimétrica e t -Assimétrica	6
2.3.1 Distribuição Normal-Assimétrica	6
2.3.2 Distribuição Normal-Assimétrica Truncada	7
2.3.3 Distribuição t -Assimétrica	8
2.4 Distribuições Potência-Alfa	8
2.4.1 Distribuição Normal-Potência	9
2.4.2 Distribuição t -Potência	10
2.4.3 Momentos nos Modelos Normal-Potência e t -Potência	10
2.4.4 Distribuição Normal-Potência Multivariada	12
2.5 Quadratura de Gauss-Hermite	14
2.5.1 Quadratura de Gauss-Hermite Unidimensional	15
2.5.2 Quadratura de Gauss-Hermite Multidimensional	15
3 Extensões do Modelo t-Potência	16
3.1 Introdução	16
3.2 Modelo t -Assimétrico-Potência	17
3.2.1 Estimação	18
3.2.2 Matriz de Informação	21
3.2.3 Modelo PST de Locação e Escala	21
3.3 Aplicação	25

3.4	Modelo t -Potência para Dados Censurados e Truncados	28
3.4.1	O Modelo t -Potência para Dados Censurados	28
3.4.2	O Modelo t -Potência para Dados Truncados	30
3.5	O Modelo de Regressão Linear t -Potência Censurado	31
3.5.1	Momentos	32
3.5.2	Estimação	33
3.6	Seleção de Modelos e Análise de Resíduos	35
3.6.1	Seleção de Modelos	35
3.6.2	Análise de resíduos	35
3.7	Simulação	36
3.8	Aplicação	36
3.9	Conclusões	39
4	Modelos Lineares Mistos Normal-Potência	41
4.1	Introdução	41
4.2	O Modelo com Interceptos Aleatórios Normal-Potência	42
4.2.1	Momentos	42
4.2.2	Estimação	44
4.2.3	Predição de efeitos aleatórios	46
4.2.4	Seleção de modelos	46
4.2.5	Análise de resíduos	46
4.3	O Modelo Linear Misto Normal-Potência	48
4.3.1	Momentos	49
4.3.2	Estimação	50
4.4	Simulação	51
4.5	Aplicação	52
4.6	Conclusões	56
5	Modelos de Regressão Lineares Mistos Assimétricos para Dados Duplamente Censurados	57
5.1	Introdução	57
5.2	Modelo de Regressão Duplamente Censurado com Efeitos Aleatórios	57
5.2.1	Momentos	59
5.2.2	Estimação	60
5.3	Modelo PNDC-RE	60
5.3.1	Momentos no Modelo PNDC-RE	60
5.3.2	Estimação no Modelo PNDC-RE	61
5.3.3	Modelo PNT-RE	63
5.4	Modelo SNDC-RE	66
5.4.1	Momentos no Modelo SNDC-RE	67
5.4.2	Estimação no Modelo SNDC-RE	68

5.4.3	Modelo SNT-RE	69
5.5	Seleção de modelos	72
5.6	Simulação	72
5.7	Aplicações	73
5.7.1	Dados de Doença Periodontal	73
5.7.2	Dados de Colesterol	75
5.8	Conclusões	78
6	Conclusões Finais e Perspectivas Futuras	81
6.1	Conclusões Finais	81
6.2	Perspectivas Futuras	82
A	Tabelas das Simulações	83
B	Funções Escore e Matrizes de Informação.	88
B.1	Matriz de Informação para o Modelo PST	88
B.1.1	Modelo PST Padronizado	88
B.1.2	Modelo PST de Locação-Escala	91
B.2	Matriz de Informação Observada: Modelo PT Censurado	98
B.3	Matriz de Informação Observada: Modelo PT Truncado	100
B.4	Matriz de Informação Modelo PT-CR	103
B.4.1	Matriz de Informação Observada	103
B.4.2	Matriz de Informação Esperada	105
B.5	Função Escore e Matriz de Informação Observada no Modelo PNLMM	108
B.5.1	Função Escore	108
B.5.2	Matriz de Informação Observada	109
B.5.3	Função Escore para o PNLMM	112
B.6	Função Escore e Matriz de Informação Observada para o Modelo PNDC-RE	113
B.6.1	Função Escore	114
B.6.2	Matriz de Informação Observada	114
	Referências Bibliográficas	120

Lista de Figuras

2.1	Função densidade de probabilidade da $SN(\lambda)$ para $\lambda = -3$ (linha sólida), $\lambda = 0$ (linha tracejada), $\lambda = 1$ (linha pontilhada), $\lambda = 3$ (linha pontilhada-tracejada) e $\lambda = 5$ (linha longa-tracejada).	7
2.2	Função densidade de probabilidade de: (a) Distribuição $PN(\alpha)$ para $\alpha = 0.25$ (linha sólida), $\alpha = 0.50$ (linha tracejada), $\alpha = 1.0$ (linha pontilhada), $\alpha = 1.5$ (linha pontilhada-tracejada) e $\alpha = 3.5$ (linha longa-tracejada). (b) Distribuição $PT(\alpha, \nu = 5)$ para $\alpha = 0.25$ (linha sólida), $\alpha = 0.50$ (linha tracejada), $\alpha = 1.0$ (linha pontilhada), $\alpha = 1.5$ (linha pontilhada-tracejada) e $\alpha = 3.5$ (linha longa-tracejada)	11
2.3	Contornos da distribuição normal-potência 2-variada para of $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha)^\top$: (a) $(0.5, 0.5, 0.5)$, (b) $(0.10, 100, 100)$, (c) $(0.20, 0.20, 2.0)$ e (d) $(1.0, 1.0, 100)$	14
3.1	Função densidade de probabilidade de: (a) Distribuição $PST(\lambda, 2.5, 6)$ para $\lambda = -2.0$ (linha sólida), $\lambda = -1.0$ (linha tracejada), $\lambda = 0.5$ (linha pontilhada), $\lambda = 2.5$ (linha pontilhada-tracejada). (b) Distribuição $PST(-1, \alpha, 6)$ para $\alpha = 0.5$ (linha sólida), $\alpha = 0.75$ (linha tracejada), $\alpha = 1.5$ (linha pontilhada), $\alpha = 4$ (linha pontilhada-tracejada).	18
3.2	Perfil da função de log-verossimilhança $\ell_p(\alpha)$ (primeira linha), $\ell_p(\lambda)$ (segunda linha) e $\ell_p(\nu)$ (terceira linha). Tamanhos de amostras $n = 50$ (primeira coluna), $n = 100$ (segunda coluna), e $n = 200$ (terceira coluna).	20
3.3	Envelopes dos resíduos quantis aleatorizados para (a) Modelo T, (b) Modelo ST, (c) Model PT, (d) Modelo PST.	27
3.4	(a) Gráfico dos modelos ajustados aos dados de vulcões. PST (linha sólida), T (linha tracejada), PS (linha pontilhada) e ST (linha pontilhada-tracejada). (b) fda empírica de Y e fda de modelo PST ajustado.	28
3.5	Histograma dos Salários, dados de Mroz.	37
3.6	Envelopes dos resíduos tipo martingais transformados r_{MTi} , para (a) Modelo PT-CR. (b) Modelo T-CR. (c) Model SL-CR. (d) Modelo N-CR.	39
4.1	Dados de colesterol: (a) Histograma do nível de colesterol para 200 sujeitos do estudo de Framingham. (b) Trajetórias para cinco sujeitos aleatoriamente selecionados.	53

4.2	Gráfico de probabilidade meio-normal com envelope simulado para o modelo PN-PN (a), modelo N-PN (b), modelo N-SN (c), e modelo N-N (d).	55
5.1	Histograma para os dados de doença periodontal. Os "pinos" nos extremos representam a proporção de observações censuradas (9,8%) à esquerda e (8,1%) à direita.	74
5.2	Histograma para os dados de Colesterol. O "pino" no extremo inferior representa a frequência de observações censuradas (108) no valor $c_0 = 1.82$	77

Lista de Tabelas

3.1	Intervalo de valores para os coeficientes de assimetria e curtose dos modelos $ST(\lambda, \nu)$, $PT(\alpha, \nu)$ e $PST(\lambda, \alpha, \nu)$ baseados num estudo de simulação. Valores de λ de -40 a 40, α de 0.5 a 50, e $\nu = 2, 3, 4, 5, 6, 7$	19
3.2	Resumo estatístico para os dados de vulcões.	26
3.3	Estimativas dos parâmetros e erros padrão (EP) para os modelos T, ST, PT e PST ajustados aos dados de vulcões.	26
3.4	Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de vulcões.	26
3.5	Resumo estatístico para os dados de salários.	37
3.6	Estimativas de MV dos parâmetros e erros padrões (EP) obtidos no ajuste dos modelos PT-CR, T-CR, SL-CR e N-CR para os dados de <i>salários</i>	38
3.7	Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de salários.	38
4.1	Resumo estatístico para os dados de colesterol.	53
4.2	Estimativas de MV dos parâmetros e erros padrões (EP) obtidos no ajuste dos modelos PNP, NPN, NSN, e N para os dados de colesterol.	54
4.3	Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de colesterol.	54
5.1	Estimativas de MV dos parâmetros e erros padrões (EP) obtidos no ajuste dos modelos DCN-PN, DCPN-N, DCN-SN, DCSN-N e DCN-N aos dados de doença periodontal.	76
5.2	Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de doença periodontal.	77
5.3	Estimativas de MV dos parâmetros e erros padrões (EP) obtidos no ajuste dos modelos DCN-PN, DCPN-N, DCN-SN, DCSN-N e DCN-N aos dados de colesterol.	79
5.4	Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de colesterol.	80
A.1	Avaliação do desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança de $\beta_0, \beta_1, \eta, \alpha$ e ν no modelo PT-CR.	84
A.2	Avaliação do desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança de $\beta_0, \beta_1, \eta_e, \eta_g, \alpha_e$ e α_g no modelo com interceptos aleatórios normal-potência.	85
A.3	Avaliação do desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança de $\beta_0, \beta_1, \eta_e, \eta_g, \alpha_e$ e α_g no modelo PNDC-RE.	86

A.4	Avaliação do desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança de β_0 , β_1 , η_e , η_g , λ_e e λ_g no modelo SNDC-RE.	87
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Modelos lineares mistos (MLM's) tornaram-se bastante populares e são frequentemente usados na análise de medidas repetidas contínuas a partir de uma amostra de unidades em várias áreas do conhecimento, tais como agricultura, biologia, ensaios clínicos, pesquisas médicas e estudos de meio ambiente (veja por exemplo, Diggle *et al.* (2004), McCulloch *et al.* (2008) e Verbeke e Molenberghs (2009)). Estes modelos também têm sido estudados para análise de dados discretos (Molenberghs e Verbeke, 2005). Usualmente no ajuste dos modelos lineares mistos os efeitos aleatórios e o termo de erro são considerados ter uma distribuição normal; mas esta suposição pode não ser adequada e pode levar a consequências danosas para a inferência. Por exemplo, Vock *et al.* (2012) mostram que em geral, os estimadores de máxima verossimilhança não são consistentes quando a função densidade de probabilidade para os efeitos aleatórios é incorretamente especificada, e este efeito pode ser maior quanto mais a verdadeira densidade dos efeitos aleatórios desvia-se da densidade normal.

Uma complicação adicional na utilização dos modelos mistos para modelagem de dados longitudinais surge quando a resposta estudada é limitada ou censurada. Por exemplo, nos ensaios clínicos, a variável resposta pode tomar valores limites para uma parte dos dados; estes valores são chamados limites de detecção mínimo (LDm) quando temos truncamento à esquerda (como considerado em Martínez-Flórez *et al.* (2013b)) e máximo (LDM) quando temos truncamento à direita. Alguns trabalhos desenvolvidos neste contexto são: Hughes (1999), Jacqmin-Gadda *et al.* (2000), Pan e Louis (2000) e Wu (2002) entre outros).

Apesar de que uma variedade de métodos têm sido propostos para flexibilizar a suposição de normalidade dos efeitos aleatórios no uso dos modelos lineares mistos (Verbeke e Lasaffre (1997), Aitkin (1999), Chen *et al.* (2002) e Lee e Thompson (2008)), existe pouca literatura em que estes métodos têm sido implementados para dados longitudinais limitados ou censurados. Uma proposta de estudo interessante é considerar distribuições mais flexíveis para os efeitos aleatórios como a família de distribuições potência normal (Gupta e Gupta, 2008), as quais têm mostrado ser capazes de modelar o grau de variabilidade do viés e a curtose num conjunto de dados.

Embora os modelos mistos com respostas limitadas tem recebido considerável atenção na literatura recente, a grande maioria propõem a distribuição beta (no caso de proporções) para a modelagem da resposta; entre outros mencionamos Ferrari e Cribari-Neto (2004), Branscum *et al.* (2007), Bayes *et al.* (2012) e mais recentemente Galvis *et al.* (2014); uma alternativa a considerar para este tipo de dados é o modelo tobit modificado (Martínez-Flórez *et al.*, 2013b) que é uma extensão do modelo tobit (Tobin, 1958) o qual, em situações práticas em que os dados apresentam assimetria e curtose maior do que é esperado para o modelo normal, pode ser mais preciso que o modelo de regressão beta usual.

A abordagem Bayesiana também têm sido proposta para a inferência estatística nos modelos mistos (Branscum *et al.* (2007), Fong *et al.* (2010) e Figueroa-Zúñiga *et al.* (2013), e para

dados duplamente censurados como em Yu (2010) e Galvis *et al.* (2014)). Esta abordagem, contudo, tem sido prejudicada pela falta de implementação rápida e a dificuldade na especificação das distribuições a priori, além de ter que considerar prioris para os componentes de variância, que são particularmente problemáticos.

Um cenário interessante de estudo na literatura é portanto, considerar modelos mistos censurados com distribuições da classe potência normal para os erros e os efeitos aleatórios. Apresentaremos neste trabalho, um estudo dos modelos lineares mistos com respostas limitadas e censuradas, isto com o objetivo de preencher esta lacuna e propor alternativas de modelagem deste tipo de dados. Para a inferência dos modelos serão consideradas as abordagem clássica.

Organização do trabalho

Este trabalho tem a seguinte estrutura. O Capítulo 2 é um capítulo introdutório, que apresenta alguns conceitos de grande importância no desenvolvimento deste trabalho. Faz-se uma revisão do modelo linear misto introduzido por Laird e Ware (1982) e da família de distribuições potência-alfa junto com as principais características dessas distribuições. A distribuição normal-assimétrica e t -assimétrica são também apresentadas. Finalmente o método de integração numérica de Gauss-Hermite nas versões unidimensional e multidimensional é apresentada.

No Capítulo 3 fazemos extensões do modelo t -potência introduzido por Zhao e Kim (2016). Inicialmente introduzimos o modelo t -assimétrico-potência para a modelagem de dados com presença de assimetria e curtose. Para este modelo usamos o método de máxima verossimilhança para fazer a inferência dos parâmetros envolvidos no modelo. São apresentados os elementos da função escore bem como os elementos da matriz de informação observada. Uma aplicação a dados reais para mostrar o uso de modelo é também apresentada. Em seguida, o modelo de regressão t -potência censurado (PT-CR) é apresentado. O modelo PT-CR é útil para as situações em que os dados apresentam grau de assimetria e curtose maior do que o modelo normal usual. Apresentamos a metodologia de estimação dos parâmetros e uma simulação é realizada para estudar as bondades de ajuste e limitações do modelo. Por fim uma aplicação a dados reais é realizada.

O Capítulo 4 introduz o modelo de regressão linear normal-potência com interceptos aleatórios normal-potência. Derivamos os dois primeiros momentos da variável resposta e propomos um método de estimação dos parâmetros do modelo. Uma metodologia para obter as previsões dos interceptos aleatórios é proposta. Derivamos também a função escore aproximada e os elementos aproximados da matriz de informação observada. A extensão do modelo ao caso multivariado é também considerada neste capítulo. Para estudar as bondades dos estimadores de máxima verossimilhança realizamos uma simulação de Monte Carlo e finalmente uma aplicação a dados de colesterol é realizada para ilustrar a proposta.

Finalmente, no Capítulo 5 fazemos a extensão do modelo linear normal-potência com interceptos aleatórios normal-potência para as situações em que os dados (assimétricos e de caudas pesadas) apresentam censura ou estão limitados (duplamente censurados). São introduzidos dois novos modelos os quais são baseados nas distribuições normal-potência e normal-assimétrica. Para ambos os modelos derivamos os dois primeiros momentos e propomos uma metodologia de estimação dos parâmetros. Propomos também alguns critérios para a seleção dos modelos e uma simulação para estudar as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança é realizada. Por fim, uma aplicação com dados reais é apresentada.

Capítulo 2

Preliminares

Ao longo deste trabalho utilizaremos algumas notações as quais serão inicialmente denotadas neste capítulo.

Sendo assim, seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ uma variável aleatória seguindo uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 , e $\phi(\cdot | \mu, \sigma^2)$ denota a sua função densidade de probabilidade (fdp). $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ denotam respectivamente a fdp e a função de distribuição acumulada (fda) da normal padrão, isto é, $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

Similarmente $Y \sim T(\mu, \sigma, \nu)$ uma variável aleatória seguindo uma distribuição t de Student com parâmetro de locação μ , parâmetro de escala σ e graus de liberdade $\nu > 0$, e $t(\cdot | \mu, \sigma, \nu)$ denota a sua fdp. $t(\cdot | \nu)$ e $T(\cdot | \nu)$ denotam respectivamente a fdp e a fda da t de Student padrão com graus de liberdade ν , isto é, $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e

$$t(z | \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left\{1 + \frac{z^2}{\nu}\right\}^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (2.1)$$

e

$$T(z | \nu) = \int_{-\infty}^z t(s | \nu) ds. \quad (2.2)$$

Em geral, utilizamos a convenção tradicional denotado uma variável aleatória (ou um vetor aleatório) por uma letra maiúscula e sua realização pela letra minúscula correspondente. Vetores aleatórios e matrizes são representados por letras em negrito. $\mathbf{X}^\top$ é a transposição de $\mathbf{X}$.

2.1 Truncamento e Censura

Neste trabalho estudaremos alguns modelos regressão quando a variável resposta apresenta observações incompleta devido a censura. Seguindo [Garay \(2014\)](#) esclarecemos a diferença entre as duas principais causas de dados incompletos: a *censura* e o *truncamento* os quais serão utilizados ao longo de nosso texto.

2.1.1 Truncamento

O truncamento ocorre quando algumas observações, tanto na variável resposta como nas variáveis regressoras não estão disponíveis, isto é, o truncamento é caracterizado por uma condição que exclui certos indivíduos do estudo. Bem como [Garay \(2014\)](#) apresentamos o exemplo dado por [Colosimo e Giolo \(2006\)](#), em que o truncamento ocorre se, para a estimação da distribuição do tempo de vida dos moradores de uma certa localidade, for usada uma amostra retirada do banco de dados da previdência local. Desta forma, somente moradores que atingiram

a aposentadoria fazem parte da amostra. Assim, estas observações são conhecidas por truncadas à esquerda. Outros exemplos de truncamentos podem ser encontrados em [Nelson \(1990\)](#) e [Kalbfleish e Lawless \(1992\)](#).

2.1.2 Censura

A censura ocorre quando dados sobre a variável resposta não estão completamente disponíveis para algumas unidades da amostra, no entanto para estas unidades, os dados sobre as variáveis regressoras são totalmente conhecidos. Em varias situações práticas, a censura acontece por razões tais como as limitações dos equipamentos de medição ou do projeto experimental. Assim, informalmente podemos dizer que uma observação censurada contém apenas informações parciais sobre um evento de interesse. Por exemplo a agulha de uma escala que não fornece uma leitura acima de 200 kg para todos os objetos que pesam mais do que o limite.

Modelos envolvendo respostas censuradas com erros de observação normalmente distribuídos têm sido estudados extensivamente na literatura (veja por exemplo [Nelson \(1977\)](#); [Park et al. \(2007\)](#); [Stapleton e Young \(1984\)](#); [Thompson e Nelson \(2003\)](#) e [Vaida e Liu \(2009\)](#)).

Em modelos de regressão linear censurados com distribuição t de Student, os trabalhos de [Arellano-Valle et al. \(2012\)](#) e [Matos et al. \(2013\)](#) podem ser mencionados, a partir de uma abordagem clássica. Finalmente, modelos com respostas com erros de observação com uma classe de distribuição com caudas mais pesadas do que a normal, a partir de uma abordagem clássica e Bayesiana foram introduzidos por [Garay et al. \(2017\)](#).

2.2 Modelo Linear Normal de Efeitos Mistos

Um de nossos objetivos neste trabalho é estudar modelos de regressão mistos quando a variável resposta apresenta censura (à esquerda, direita ou dupla censura). Assim, descreveremos brevemente o modelo linear de efeitos mistos introduzido por [Laird e Ware \(1982\)](#).

O modelo linear de efeitos mistos introduzido por [Laird e Ware \(1982\)](#) é dado por

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

em que $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{im_i})^\top$ é o vetor de dimensão $m_i \times 1$ que contém as respostas correspondentes ao i -ésimo indivíduo para $i = 1, \dots, n$; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ de dimensão $p \times 1$ é o vetor de parâmetros de efeitos fixos; $\mathbf{X}_i$ é uma matriz de planejamento de dimensão $m_i \times p$ correspondente ao vetor de parâmetros de efeitos fixos $\boldsymbol{\beta}$; e $\mathbf{Z}_i$ é matriz de planejamento de dimensão $m_i \times q$, correspondente ao vetor de efeitos aleatórios $\boldsymbol{\gamma}_i = (\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{iq})^\top$ de dimensão $q \times 1$ em que $\boldsymbol{\gamma}_i$ segue distribuição $\boldsymbol{\gamma}_i \sim N_q(\mathbf{0}, \mathbf{D})$. O vetor de erros $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{im_i})^\top$ de dimensão $m_i \times 1$ segue uma distribuição normal com vetor de média zero e matriz de variância-covariância $\mathbf{R}_i$, isto é $\boldsymbol{\epsilon}_i \sim N_{m_i}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_i)$.

A inferência para o modelo (2.3) pode ser feita usando abordagem marginal em que os $\boldsymbol{\gamma}_i$'s são considerados como uma amostra aleatória independente da distribuição $N_q(\mathbf{0}, \mathbf{D})$ e é apropriada quando estamos interessados nos coeficientes específicos para o indivíduo i (veja [Verbeke e Molenberghs, 2009](#)). Outra abordagem é a condicional ([Verbeke et al., 2001](#)), em que os $\boldsymbol{\gamma}_i$'s são considerados como efeitos perturbadores e é adequada quando estamos interessados em um subconjunto de coeficientes de regressão que não varia entre os indivíduos.

Um caso especial do modelo linear normal de efeitos mistos muito utilizado na prática ocorre quando temos

$$\mathbf{D} = \sigma_g^2 \mathbf{I}_q \quad \mathbf{R}_i = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{m_i},$$

com $\sigma_g > 0$ e $\sigma_e > 0$, para $i = 1, \dots, n$. Nesse caso particular temos um modelo misto com

interceptos aleatórios. A seguir descreveremos as duas abordagens para a inferência no modelo linear normal de efeitos mistos.

2.2.1 Abordagem Marginal

O modelo linear normal de efeitos mistos proposto por [Laird e Ware \(1982\)](#) satisfaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_i\boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \\ \boldsymbol{\epsilon}_i &\stackrel{\text{ind}}{\sim} N_{m_i}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ \boldsymbol{\gamma}_i &\stackrel{\text{iid}}{\sim} N_q(\mathbf{0}, \mathbf{D}), \quad i = 1, \dots, n, \\ \boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_n, \boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_n, &\text{ são independentes.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que $\mathbf{R}_i$ é uma matriz $m_i \times m_i$ de variância-covariância definida positiva que depende de i somente através de sua dimensão m_i , $\mathbf{D}$ é uma matriz $q \times q$ de variância-covariância definida positiva. Segue de (2.4) que condicional aos efeitos aleatórios $\boldsymbol{\epsilon}_i$, $\mathbf{Y}_i$ segue uma distribuição normal com vetor de média $\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}$ e matriz de variância-covariância $\boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{Z}_i\mathbf{D}\mathbf{Z}_i^\top$.

Denotando a função densidade de probabilidade (fdp) de $\mathbf{Y}_i | \boldsymbol{\gamma}_i$ e a fdp de $\boldsymbol{\gamma}_i$ por $f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\gamma}_i)$ e $f(\boldsymbol{\gamma}_i)$ respectivamente, temos que a fdp marginal de do vetor $\mathbf{Y}_i$ é dada por

$$f(\mathbf{y}_i) = \int_{\mathbb{R}^q} f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\gamma}_i) f(\boldsymbol{\gamma}_i) d\boldsymbol{\gamma}_i; \quad (2.5)$$

a qual pode ser mostrado que é a fdp de uma normal multivariada de dimensão m_i com vetor de média $\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}$ e matriz de variância-covariância $\mathbf{V}_i = \mathbf{Z}_i\mathbf{D}\mathbf{Z}_i^\top + \mathbf{R}_i$, isto é

$$\mathbf{Y}_i \sim N_{m_i}(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}, \mathbf{Z}_i\mathbf{D}\mathbf{Z}_i^\top + \mathbf{R}_i)$$

A definição do modelo (2.3) através das fdp's $f(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\gamma}_i)$ e $f(\boldsymbol{\gamma}_i)$ é chamada a formulação hierárquica do modelo linear misto e a correspondente distribuição normal marginal de $\mathbf{Y}_i$ é chamada a formulação marginal do modelo.

Sobre abordagem marginal, a inferência estatística para o modelo linear normal de efeitos mistos é baseada no método da máxima verossimilhança ou no método da máxima verossimilhança restrita, (veja por exemplo [Laird e Ware, 1982](#)). Aqui, a média marginal $E[\mathbf{Y}_i] = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}$, é a média sobre todos os efeitos aleatórios e a inferência estatística para cada indivíduo é feita pelo condicionamento sobre os efeitos aleatórios $\boldsymbol{\gamma}_i$.

A estrutura de correlação entre as observações é indicada pela matriz $\mathbf{V}_i = \mathbf{Z}_i\mathbf{D}\mathbf{Z}_i^\top + \mathbf{R}_i$, essa estrutura pode ser induzida por meio do termo da variabilidade entre indivíduos $\mathbf{Z}_i\mathbf{D}\mathbf{Z}_i^\top$, ou por meio da matriz de variância-covariância das observações dentro do indivíduo, $\mathbf{R}_i$. Assim, mesmo que os erros $\boldsymbol{\epsilon}_i$ sejam independentes, as observações $\mathbf{Y}_i$ podem ser correlacionadas devido à variabilidade entre os indivíduos.

Diferentes estruturas de correlação para as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{R}_i$ têm sido consideradas por varios autores, veja por exemplo, [Fitzmaurice *et al.* \(2004\)](#); [Pinheiro e Bates \(2000\)](#); [Rocha \(2004\)](#); [Weiss \(2005\)](#), enquanto que mais detalhes sobre os métodos de estimação de máxima verossimilhança e máxima verossimilhança restrita podem ser encontrados em [Laird e Ware \(1982\)](#) e [Lindstrom e Bates \(1988\)](#).

2.2.2 Abordagem Condicional

A abordagem condicional é uma alternativa à estimação clássica pelo método da máxima verossimilhança e consiste na estimação dos parâmetros por meio da maximização da função de

verossimilhança dos dados $\mathbf{Y}_i$, condicional a estatísticas suficientes para os parâmetros perturbadores γ_i .

A principal vantagem da inferência condicional é que não são necessárias suposições adicionais em relação aos parâmetros de perturbação γ_i (Molenberghs e Verbeke, 2005; Verbeke *et al.*, 2001), e a inferência torna-se disponível para os parâmetros de interesse desconsiderando completamente os parâmetros de perturbação sem perda de qualquer informação; porém uma desvantagem é que precisam ser encontradas estatísticas suficientes para os γ_i e, posteriormente calcular e maximizar a função de verossimilhança condicional dos dados condicional a essas estatísticas. Detalhes desta abordagem podem ser consultados em Verbeke e Molenberghs (2009).

2.3 Distribuições Normal-Assimétrica e t -Assimétrica

Nesta seção vamos apresentar a classe de distribuições normal-assimétrica e t -assimétrica introduzidas por Azzalini (1985) e Azzalini e Capitanio (2003), respectivamente; as quais são extensões dos modelos normal e t de Student, respectivamente, e permitem modelar dados com maior grau de assimetria e curtose do que essas distribuições.

2.3.1 Distribuição Normal-Assimétrica

A família de densidades normal-assimétrica foi introduzida inicialmente por Azzalini (1985) como uma alternativa razoável ao modelo normal clássico, sendo muito útil na prática pela robustez do modelo contra afastamentos da suposição de normalidade dos dados sobre estudo.

Definição 1 Dizemos que uma variável aleatória X tem uma distribuição normal-assimétrica com parâmetro de locação ξ , parâmetro de escala $\eta > 0$ e parâmetro de assimetria λ , se sua fdp é da forma

$$f_{SN}(x | \xi, \eta, \lambda) = \frac{2}{\eta} \phi\left(\frac{x - \xi}{\eta}\right) \Phi\left(\lambda \left(\frac{x - \xi}{\eta}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Cometendo um pequeno abuso de notação, escreveremos $X \sim SN(\xi, \eta, \lambda)$ (*Skew-Normal*). Quando $\xi = 0$ e $\eta = 1$ temos a distribuição SN padronizada e escreveremos $SN(0, 1, \lambda) \equiv SN(\lambda)$. A densidade SN é simétrica quando $\lambda = 0$ e em tal caso a densidade normal é obtida. Quando λ tende a $+\infty$ (tende a $-\infty$), a variável aleatória X tende a uma variável aleatória metade-normal (*half-normal*) positiva (negativa) (Azzalini, 1985). Exemplos da densidade (2.6) para diferentes valores de λ são mostrados na Figura 2.1.

Seja $Z \sim SN(\lambda)$ então a média e a variância de Z são dados respectivamente por

$$E[Z] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad \text{Var}[Z] = 1 - \frac{2\lambda^2}{\pi(1 + \lambda^2)} \quad (2.7)$$

O principal problema da densidade SN é que sob a hipótese de simetria dos dados, isto é $\lambda = 0$, a matriz de informação de Fisher é singular e portanto as condições de regularidade não são satisfeitas para a inferência via máxima verossimilhança, limitando assim o uso do estimador de máxima verossimilhança na construção de testes de hipóteses baseados na estatística de razão de verossimilhanças.

Para resolver a dificuldade de singularidade da matriz de informação, Arellano-Valle e Azzalini (2008) propuseram a parametrização centrada da distribuição SN quando $\lambda = 0$, definido a variável aleatória $X = \xi + \eta \left(\frac{Z - E[Z]}{\sqrt{\text{Var}[Z]}} \right)$, em que ξ e η são parâmetros da variável aleatória X e $Z \sim SN(\lambda)$. Neste trabalho iremos considerar a forma usual da distribuição SN dada em (2.6),

Figura 2.1: Função densidade de probabilidade da $SN(\lambda)$ para $\lambda = -3$ (linha sólida), $\lambda = 0$ (linha tracejada), $\lambda = 1$ (linha pontilhada), $\lambda = 3$ (linha pontilhada-tracejada) e $\lambda = 5$ (linha longa-tracejada).

enquanto que mais detalhes sob a parametrização centrada da distribuição SN podem ser vistos em [Arellano-Valle e Azzalini \(2008\)](#).

2.3.2 Distribuição Normal-Assimétrica Truncada

A distribuição normal-assimétrica truncada a qual denotaremos por TSN (*Truncated Skew-Normal*) foi introduzida e estudada em detalhe por [Flecher et al. \(2010\)](#). Definimos a distribuição TSN a partir da densidade SN dada em (2.6) como segue

Definição 2 *Seja $X \sim SN(\xi, \eta, \lambda)$ e $a < b$, tal que $P(a < X < b) > 0$. A variável aleatória Y tem uma distribuição normal-assimétrica truncada no intervalo (a, b) , se esta tem a mesma distribuição que $X \mid X \in (a, b)$. Neste caso, escrevemos $Y \sim TSN_{(a,b)}(\xi, \eta, \lambda)$.*

Como uma consequência óbvia da Definição 2, podemos obter a densidade de $Y \sim TSN_{(a,b)}(\xi, \eta, \lambda)$ dada por

$$f_{TSN}(y \mid \xi, \eta, \lambda; (a, b)) = \frac{2}{\eta} \phi\left(\frac{y - \xi}{\eta}\right) \Phi\left(\lambda \left(\frac{y - \xi}{\eta}\right)\right) \times \left[F_{SN}\left(\frac{b - \xi}{\eta}\right) - F_{SN}\left(\frac{a - \xi}{\eta}\right) \right]^{-1} \quad (2.8)$$

e $f_{TSN}(y \mid \xi, \eta, \lambda; (a, b)) = 0$ em outro caso, em que $F_{SN}(\cdot)$ é a fda da distribuição normal-assimétrica padronizada.

Proposição 1 *Seja $Y \sim TSN_{(a,b)}(\xi, \eta, \alpha)$. Então, para $a < b$ a $E[Y^r]$ para $r = 1, 2$ é dada por*

$$E[Y] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{\Phi(\lambda_* z_b) - \Phi(\lambda_* z_a)}{F_{SN}(z_b) - F_{SN}(z_a)} - \frac{f_{SN}(z_b) - f_{SN}(z_a)}{F_{SN}(z_b) - F_{SN}(z_a)}$$

$$E[Y^2] = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \frac{\phi(\lambda_* z_b) - \phi(\lambda_* z_a)}{F_{SN}(z_b) - F_{SN}(z_a)} - \frac{z_b f_{SN}(z_b) - z_a f_{SN}(z_a)}{F_{SN}(z_b) - F_{SN}(z_a)}$$

em que $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ são a fdp e a fda da distribuição normal padronizada, respectivamente; $f_{SN}(\cdot)$ e $F_{SN}(\cdot)$ são a fdp e a fda da distribuição SN padronizada respectivamente, $z_a = \frac{a-\xi}{\eta}$, $z_b = \frac{b-\xi}{\eta}$ e $\lambda_* = \sqrt{1+\lambda^2}$.

A Proposição 1 é um resultado que pode ser obtido usando as expressões recorrentes dadas em Flecher *et al.* (2010).

2.3.3 Distribuição t -Assimétrica

Branco e Dey (2001) introduziram a distribuição t -assimétrica como um caso particular de uma classe mais geral de distribuições chamada de distribuições elípticas-assimétricas multivariadas, enquanto que Azzalini e Capitanio (2003) discutiram a distribuição t -assimétrica usando um procedimento geral que perturba a densidade da distribuição t de Student e gera um conjunto de densidades assimétricas. Neste trabalho iremos usar a distribuição t -assimétrica introduzida por Azzalini e Capitanio (2003) definida a seguir.

Definição 3 *Dizemos que uma variável aleatória X tem uma distribuição t -assimétrica com parâmetro de locação ξ , parâmetro de escala $\eta > 0$, parâmetro de assimetria λ e $\nu > 0$ graus de liberdade, se sua fdp é da forma*

$$f_{ST}(x | \xi, \eta, \lambda, \nu) = \frac{2}{\eta} t\left(\frac{x - \xi}{\eta} | \nu\right) T\left(\lambda \left(\frac{x - \xi}{\eta}\right) \sqrt{\frac{\nu + 1}{Q_x + \nu}} | \nu + 1\right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

em que $Q_x = ((x - \xi)/\eta)^2$, $t(\cdot | \nu)$ e $T(\cdot | \nu)$ são a fdp e a fda da distribuição t de Student padronizada dadas em (2.1) e (2.2), respectivamente.

Escreveremos $X \sim ST(\xi, \eta, \lambda, \nu)$ (*Skew-T*). Quando $\xi = 0$ e $\eta = 1$ temos a distribuição ST padronizada e escreveremos $ST(0, 1, \lambda, \nu) \equiv ST(\lambda, \nu)$.

2.4 Distribuições Potência-Alfa

A grande maioria do desenvolvimento deste trabalho é baseada nas distribuições da família potência-alfa as quais têm mostrado ser alternativas viáveis para modelar dados assimétricos (veja por exemplo Gupta e Gupta, 2008; Pewsey *et al.*, 2012), em particular as distribuições normal-potência (Gupta e Gupta, 2008) e t -potência (Zhao e Kim, 2016). A seguir apresentamos as definições e propriedades básicas dessas distribuições.

Começaremos definindo a classe de distribuições potência-alfa e potência-alfa truncada, logo em seguida introduzimos as distribuições potência-normal e potência- t .

Definição 4 *Dizemos que a variável aleatória X tem uma distribuição univariada potência-alfa com parâmetro de locação ξ , parâmetro de escala $\eta > 0$ e parâmetro de forma $\alpha > 0$, se a fdp de*

X é dada por

$$f_{AP}(x | \xi, \eta, \alpha) = \frac{\alpha}{\eta} f\left(\frac{x - \xi}{\eta}\right) \left\{ F\left(\frac{x - \xi}{\eta}\right) \right\}^{\alpha-1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

em que $F(\cdot)$ é uma função de distribuição absolutamente contínua com fdp dada por $f = dF$.

Escreveremos $X \sim AP(\xi, \eta, \alpha)$ (*Alpha-Power*). Quando $\xi = 0$ e $\eta = 1$ temos a distribuição potência-alfa padronizada e escrevemos $X \sim AP(\alpha)$.

O modelo AP foi derivado num contexto hidrológico como uma estatística de ordem fracionária por [Durrans \(1992\)](#), mas este modelo tem sido discutido amplamente por outros autores (Veja [Arnold, 2004](#); [Gupta e Gupta, 2008](#)). O modelo AP constitui uma alternativa à família de distribuições que podem ajustar alto grau de assimetria e/ou curtose em um conjunto de dados, por exemplo a família de distribuições normal-assimétrica de [Azzalini \(1985\)](#).

Se $Z \sim AP(\alpha)$, os momentos da variável Z não têm uma forma fechada mas fazendo a mudança de variável $U = F(Z)$, o r -ésimo momento da variável Z pode ser escrito como

$$E[Z^r] = \alpha \int_0^1 [F^{-1}(u)]^r u^{\alpha-1} du \quad (2.11)$$

em que $F^{-1}(\cdot)$ é a inversa da função $F(\cdot)$. Esta esperança concorda com a esperança da expressão $[F^{-1}(U)]^r$ de uma variável aleatória U com distribuição beta de parâmetros α e 1, isto é,

$$E[Z^r] = E[(F^{-1}(U))^r],$$

em que $U \sim \text{Beta}(\alpha, 1)$.

Definição 5 *Seja $X \sim AP(\xi, \eta, \alpha)$ e $a < b$, tal que $P(a < X < b) > 0$. A variável aleatória Y tem uma distribuição AP truncada no intervalo (a, b) , se esta tem a mesma distribuição que $X | X \in (a, b)$. Neste caso, escrevemos $Y \sim TAP_{(a,b)}(\xi, \eta, \alpha)$.*

Como uma consequência óbvia da Definição 5, podemos obter a densidade de $Y \sim TAP$ dada por

$$f_{TAP}(y | \xi, \eta, \alpha; (a, b)) = f_{AP}(y | \xi, \eta, \alpha) \left[F_{AP}\left(\frac{b - \xi}{\eta}\right) - F_{AP}\left(\frac{a - \xi}{\eta}\right) \right]^{-1} \quad (2.12)$$

e $f_{TAP}(y | \xi, \eta, \alpha; (a, b)) = 0$ em outro caso, em que $F_{AP}(\cdot)$ é a fda da distribuição AP padronizada.

2.4.1 Distribuição Normal-Potência

[Durrans \(1992\)](#) considera o modelo (2.10) para o caso em que $F(\cdot) = \Phi(\cdot)$ é fda da distribuição normal padrão, e neste caso a família obtida é chamada de *classe de distribuições normal-potência assimétrica* e é denotada por PN (*power-normal*). A fdp de X é dada por

$$f_{PN}(x | \xi, \eta, \alpha) = \frac{\alpha}{\eta} \phi\left(\frac{x - \xi}{\eta}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{x - \xi}{\eta}\right) \right\}^{\alpha-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2.13)$$

Escreveremos $X \sim PN(\xi, \eta, \alpha)$ e se segue portanto que $PN(0, 1, \alpha) \equiv PN(\alpha)$ denota o modelo PN padronizado.

Quando $\alpha = 1$, o modelo (2.13) se reduz à distribuição normal de média ξ e variância η^2 ; e para $\alpha = 2$, o modelo contém a fdp da distribuição normal-assimétrica de [Azzalini \(1985\)](#)

para $\lambda = 1$. Valores de α tais que $0 < \alpha < 1$ ($\alpha > 1$) correspondem a uma assimetria negativa (positiva) na densidade (2.13). Exemplos da densidade PN são mostrados na Figura 2.2.

As distribuição PN e as suas principais propriedades têm sido estudadas amplamente por Durrans (1992); Gupta e Gupta (2004, 2008); Lehmann (1953) e Pewsey *et al.* (2012). Embora o modelo PN tem intervalo de assimetria mais curto do que o modelo SN de Azzalini (1985), o modelo PN pode ser capaz de ajustar dados com coeficiente de curtose maior do que o modelo SN e além disso, apresenta matriz de informação não singular, (veja Pewsey *et al.*, 2012). Finalmente extensões ao caso multivariado desse modelo são discutidas por Martínez-Flórez *et al.* (2013a) e Kundu e Gupta (2013).

2.4.2 Distribuição t -Potência

Zhao e Kim (2016) estudaram o caso para $F(\cdot) = T(\cdot)$ no modelo (2.10), em que $T(\cdot)$ é a fda da distribuição t de Student. Neste caso a fdp da variável aleatória X é dada por

$$f_{PT}(x | \xi, \eta, \alpha, \nu) = \frac{\alpha}{\eta} t\left(\frac{x - \xi}{\eta} | \nu\right) \left\{ T\left(\frac{x - \xi}{\eta} | \nu\right) \right\}^{\alpha-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2.14)$$

em que $\nu > 0$ são os graus de liberdade.

A classe de distribuições em (2.14) é chamada de *classe de distribuições t -potência assimétrica*, e escreveremos $X \sim PT(\xi, \eta, \alpha, \nu)$. Se segue que $PT(0, 1, \alpha, \nu) \equiv PT(\alpha, \nu)$ denota o modelo PT padronizado. Quando $\alpha = 1$, o modelo contém a distribuição t de Student e para $\alpha = 2$ contém a fdp da distribuição t assimétrica com $\lambda = 1$ estudada em detalhe por Azzalini e Capitanio (2003). Exemplos da densidade (2.14) são mostrados na Figura 2.2.

O modelo t -potência generaliza o amplamente conhecido modelo t de Student e para um mesmo grau de liberdade apresenta maior amplitude de assimetria e curtose em relação ao modelo t -assimétrico de Azzalini e Capitanio (2003), assim o modelo t -potência é capaz de lidar com dados com caudas ainda mais pesadas do que o modelo normal-assimétrico (veja Zhao e Kim, 2016).

Bem como no modelo normal-potência, o modelo t -potência apresenta matrix de informação não-singular e portanto podem ser usadas estatísticas de razão de verossimilhanças para a construção de testes de hipótese a partir de grandes amostras. Mais detalhes deste modelo podem ser consultadas em Zhao e Kim (2016).

2.4.3 Momentos nos Modelos Normal-Potência e t -Potência

Os momentos de uma variável aleatória com distribuição PN e PT podem ser obtidos a partir de (2.11) considerando as respectivas fdp's das distribuições PN e PT. Assim se $X \sim PN(\xi, \eta, \alpha)$ ou $X \sim PT(\xi, \eta, \alpha, \nu)$, segue que

$$E[X^r] = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \xi^k \eta^{r-k} \mu_{r-k}, \quad (2.15)$$

em que μ_j é o j -ésimo momento de uma variável aleatória $Y \sim PN(\alpha)$ ou $Y \sim PT(\alpha, \nu)$ padronizada, respectivamente, isto é,

$$\mu_j = \begin{cases} \int_0^1 \alpha [\Phi^{-1}(u)]^j u^{\alpha-1} du, & \text{se } Y \sim PN(\alpha) \\ \int_0^1 \alpha [T^{-1}(u | \nu)]^j u^{\alpha-1} du, & \text{se } Y \sim PT(\alpha, \nu) \end{cases}$$

Figura 2.2: Função densidade de probabilidade de: (a) Distribuição $PN(\alpha)$ para $\alpha = 0.25$ (linha sólida), $\alpha = 0.50$ (linha tracejada), $\alpha = 1.0$ (linha pontilhada), $\alpha = 1.5$ (linha pontilhada-tracejada) e $\alpha = 3.5$ (linha longa-tracejada). (b) Distribuição $PT(\alpha, \nu = 5)$ para $\alpha = 0.25$ (linha sólida), $\alpha = 0.50$ (linha tracejada), $\alpha = 1.0$ (linha pontilhada), $\alpha = 1.5$ (linha pontilhada-tracejada) e $\alpha = 3.5$ (linha longa-tracejada)

para $j = 1, 2, \dots$ e $\mu_0 = 1$.

Da Definição 5 se segue que se $Y \sim PN(\xi, \eta, \alpha)$ então a pdf da variável aleatória normal-potência truncada, denotada TPN (*Truncated Power-Normal*) no intervalo (a, b) , é dada por

$$f_{TPN}(y \mid \xi, \eta, \alpha; (a, b)) = \frac{\alpha}{\eta} \phi\left(\frac{y - \xi}{\eta}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{y - \xi}{\eta}\right) \right\}^{\alpha-1} \times \left[F_{PN}\left(\frac{b - \xi}{\eta}\right) - F_{PN}\left(\frac{a - \xi}{\eta}\right) \right]^{-1} \quad (2.16)$$

em que $F_{PN}(\cdot)$ é a fda da distribuição normal-potência padronizada.

Segue também da Definição 5 que $Y \sim PT(\xi, \eta, \alpha, \nu)$, a fdp de uma variável aleatória t -potência truncada, denotada TPT (*Truncated Power-t*) no intervalo (a, b) é dada por

$$f_{TPT}(y \mid \xi, \eta, \alpha, \nu; (a, b)) = \frac{\alpha}{\eta} t\left(\frac{y - \xi}{\eta} \mid \nu\right) \left\{ T\left(\frac{y - \xi}{\eta} \mid \nu\right) \right\}^{\alpha-1} \times \left[F_{PT}\left(\frac{b - \xi}{\eta}\right) - F_{PT}\left(\frac{a - \xi}{\eta}\right) \right]^{-1} \quad (2.17)$$

em que $F_{PT}(\cdot)$ é a fda da distribuição t -potência padronizada.

Proposição 2 Se $Y \sim TPN_{(a,b)}(\xi, \eta, \alpha)$, então o r -ésimo momento da variável aleatória Y é dado por

$$E[Y^r] = \sum_{k=0}^r \xi^k \eta^{r-k} \mu_{r-k} \quad (2.18)$$

em que

$$\mu_s = [F_{PN}(z_b) - F_{PN}(z_a)]^{-1} \int_{\Phi(z_a)}^{\Phi(z_b)} \alpha [\Phi^{-1}(u)]^s u^{\alpha-1} du, \quad s = 1, 2, \dots$$

e $\mu_0 = 1$, com $F_{PN}(z) = [\Phi(z)]^\alpha$ e $z_c = \frac{c-\xi}{\eta}$.

Proposição 3 *Seja $Z \sim PT(\alpha, \nu)$, então segue que $E[Z^r \mid Z + c > 0] = m_r(c \mid \nu)$, com*

$$m_r(c \mid \nu) = \frac{1}{1 - \{T(-c \mid \nu)\}^\alpha} \int_{T(-c \mid \nu)}^1 [T^{-1}(u \mid \nu)]^r \alpha u^{\alpha-1} du.$$

em que $T^{-1}(\cdot \mid \nu)$ é a função inversa da fda $T(\cdot \mid \nu)$.

Proposição 4 *Seja $Z \sim PT(\alpha, \nu)$, e defina $r(Z \mid \nu) = t(Z \mid \nu)/T(Z \mid \nu)$. Então*

$$(i) \ E \left\{ [r(Z \mid \nu)]^k \left(1 + \frac{Z^2}{\nu}\right)^{-m/2} Z^n \mid Z + c > 0 \right\} = \frac{[t(0 \mid \nu)]^k a_{kmn}(-c \mid \nu)}{1 - \{T(-c \mid \nu)\}^\alpha}, \text{ em que}$$

$$a_{kmn}(-c \mid \nu) = \int_{T(-c \mid \nu)}^1 [T^{-1}(u \mid \nu)]^n \left\{ 1 + \frac{[T^{-1}(u \mid \nu)]^2}{\nu} \right\}^{-\frac{k(\nu+1)+m}{2}} \alpha u^{\alpha-k-1} du$$

$$(ii) \ E \left\{ [r(Z \mid \nu)]^k \log \left(1 + \frac{Z^2}{\nu}\right) Z^n \mid Z + c > 0 \right\} = \frac{[t(0 \mid \nu)]^k a_{kn}(-c \mid \nu)}{1 - \{T(-c \mid \nu)\}^\alpha}, \text{ em que}$$

$$a_{kn}(-c \mid \nu) = \int_{T(-c \mid \nu)}^1 \log \left\{ 1 + \frac{[T^{-1}(u \mid \nu)]^2}{\nu} \right\} [T^{-1}(u \mid \nu)]^n \alpha u^{\alpha-k-1} du$$

$$(iii) \ E \left\{ [r(Z \mid \nu)]^k [b_{01}(Z \mid \nu)]^m Z^n \mid z + c > 0 \right\} = \frac{[t(0 \mid \nu)]^k b_{kmn}(-c \mid \nu)}{1 - \{T(-c \mid \nu)\}^\alpha}, \text{ em que}$$

$$b_{kmn}(-c \mid \nu) = \int_{T(-c \mid \nu)}^1 [b_{01}(T^{-1}(u \mid \nu))]^m [T^{-1}(u \mid \nu)]^n \alpha u^{\alpha-k-1} du$$

$$\text{com } b_{01}(c \mid \nu) = \int_{-\infty}^c \left\{ \log \left(1 + \frac{s^2}{\nu}\right) \right\} \frac{t(s \mid \nu)}{T(c \mid \nu)} ds.$$

2.4.4 Distribuição Normal-Potência Multivariada

Extensões do modelo normal-potência univariado (2.13) ao caso multivariado têm sido consideradas por alguns autores (Kundu e Gupta, 2013; Martínez-Flórez *et al.*, 2013a). Inicialmente, a distribuição normal-potência bivariada foi introduzida e estudada por Kundu e Gupta (2013). Os autores obtiveram essa distribuição usando a cópula de Clayton e considerando que as distribuições marginais seguem distribuições normal-potência. Os autores também propuseram a extensão do modelo normal-potência para p variáveis.

Por outro lado, Martínez-Flórez *et al.* (2013a) propuseram a extensão multivariada de modelo potência-alfa, seguindo a teoria de distribuições multivariadas a partir de distribuições condicionais proposto por Arnold *et al.* (1999).

A seguir consideramos o modelo normal-potência multivariado proposto por [Kundu e Gupta \(2013\)](#) que será usado para o desenvolvimento do modelo linear misto potência-normal no Capítulo 4.

Definição 6 O vetor aleatório $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^\top$ tem uma distribuição normal-potência p -variada com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha)^\top$; a qual é denotada por $PN_p(\boldsymbol{\alpha})$, se $\mathbf{Y}$ tem fdp conjunta dada por

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{c_1 \prod_{i=1}^p \phi(y_i) [\Phi(y_i)]^{-\alpha_i/\alpha-1}}{[\sum_{i=1}^p [\Phi(y_i)]^{-\alpha_i/\alpha} - (p-1)]^{\alpha+p}}, \quad y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_p > 0$, e $c_1 = \Gamma(\alpha + p)/\alpha^p \Gamma(\alpha) \prod_{i=1}^p \alpha_i$.

A Figura 2.3 mostra alguns contornos da densidade normal-potência bivariada (normal-potência 2-variada, PN_2), a qual é obtida tomando $p = 2$ em (2.19), para diferentes valores de $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha)^\top$. Nota-se que esses contornos não são elípticos e podem ser assimétricos.

Como as distribuições marginais da fdp conjunta (2.19) seguem distribuições normal-potência univariada (veja, [Kundu e Gupta, 2013](#)), podemos usar a equação (2.15) para obter o vetor de médias e a matriz de variâncias-covariâncias do vetor aleatório $\mathbf{Y}$. Assim, se $\mathbf{Y} \sim PN_p(\boldsymbol{\alpha})$, então o vetor de médias e a matriz de covariâncias de $\mathbf{Y}$ são dados por

$$E[\mathbf{Y}] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu}, \quad \text{e} \quad \text{Var}[\mathbf{Y}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}, \quad (2.20)$$

respectivamente, em que

$$\mu_i = \int_0^1 \alpha_i \Phi^{-1}(u) u^{\alpha_i-1} du,$$

e

$$\sigma_{ii} = \int_0^1 \alpha_i [\Phi^{-1}(u)]^2 u^{\alpha_i-1} du - \left(\int_0^1 \alpha_i \Phi^{-1}(u) u^{\alpha_i-1} du \right)^2,$$

para $i = 1, \dots, p$; e

$$\sigma_{ij} = \alpha(\alpha+1) \left\{ \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\Phi^{-1}(u^{-\alpha/\alpha_i}) \Phi^{-1}(v^{-\alpha/\alpha_j})}{(u+v-1)^{\alpha+2}} du dv \right\} - \mu_i \mu_j.$$

para $i \neq j$; com $i, j = 1, \dots, p$.

Seja $\mathbf{Y} \sim PN_p(\boldsymbol{\alpha})$, então a versão de locação-escala do modelo (2.19) é obtida pela definição de $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}$, em que $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_p)^\top$ e $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(\eta_1^2, \dots, \eta_p^2)$, com $\xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{R}$, e $\eta_1, \dots, \eta_p \in \mathbb{R}^+$. A fdp conjunta do vetor aleatório $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^\top$ é dada por

$$f(\mathbf{z}; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{c_2 \prod_{i=1}^p \phi\left(\frac{z_i - \xi_i}{\eta_i}\right) \left[\Phi\left(\frac{z_i - \xi_i}{\eta_i}\right)\right]^{-\alpha_i/\alpha-1}}{\left\{ \sum_{i=1}^p \left[\Phi\left(\frac{z_i - \xi_i}{\eta_i}\right)\right]^{-\alpha_i/\alpha} - (p-1) \right\}^{\alpha+p}} \quad (2.21)$$

em que $c_2 = \Gamma(\alpha + p)/\alpha^p \Gamma(\alpha) \prod_{i=1}^p \alpha_i/\eta_i$, para $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{R}$. Além disso, o vetor de média e a matriz de covariâncias são dados por

$$E[\mathbf{Z}] = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\mu} \quad \text{e} \quad \text{Var}[\mathbf{Z}] = \boldsymbol{\eta}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\eta}^{\frac{1}{2}} \quad (2.22)$$

Figura 2.3: Contornos da distribuição normal-potência 2-variada para of $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha)^T$: (a) (0.5, 0.5), (b) (0.10, 100, 100), (c) (0.20, 0.20, 2.0) e (d) (1.0, 1.0, 100).

com μ e η dados como em (2.20). Esta extensão é denotada por $\mathbf{Z} \sim \text{PN}_p(\xi, \eta, \alpha)$.

Propriedades adicionais da distribuição potência-normal p -variada podem ser encontradas em [Kundu e Gupta \(2013\)](#), especialmente para o caso $p = 2$.

2.5 Quadratura de Gauss-Hermite

O método da quadratura de Gauss é usado para aproximar integrais de funções em relação a um kernel dado por uma média ponderada do integrando avaliado em abscisas predeterminadas.

Neste trabalho usaremos o método da quadratura de Gauss-Hermite para aproximar as integrais envolvidas nas funções de verossimilhanças dos modelos mistos estudados nos Capítulos seguintes, portanto é necessário descrever brevemente esse método.

2.5.1 Quadratura de Gauss-Hermite Unidimensional

O método da quadratura de Gauss-Hermite unidimensional aproxima integrais da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-x^2) dx \quad (2.23)$$

por uma soma ponderada da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-x^2) dx \approx \sum_{k=1}^Q \omega_k g(x_k) \quad (2.24)$$

em que $g(x)$, com $x \in \mathbb{R}$ é uma função regular e o nó x_k é o k -ésimo zero do polinômio de Hermite de ordem Q , $H_Q(x)$,

$$H_Q(x) = (-1)^Q \exp(x^2/2) \frac{d^Q \exp(-x^2/2)}{dx^Q},$$

e os pesos ω_k dependem do número de nós Q , e do polinômio de Hermite $H_{Q-1}(x)$ avaliado em x_k ,

$$\omega_k(x_k) = \frac{2^{Q-1} Q! \sqrt{\pi}}{Q^2 (H_{Q-1}(x_k))^2}.$$

2.5.2 Quadratura de Gauss-Hermite Multidimensional

No método da quadratura de Gauss-Hermite multidimensional considera-se o vetor de dimensão m , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, uma função regular $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de peso $\omega(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$, e outra função $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$. A expressão (2.24) pode ser usada para aproximar a integral m -dimensional

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \omega(x_1, \dots, x_m) g(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m, \quad (2.25)$$

em que a função de peso é dada por

$$\omega(x_1, \dots, x_m) = \exp(-\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) = \exp(-x_1^2) \cdots \exp(-x_m^2) = \exp\left(-\sum_{i=1}^m x_i^2\right).$$

A quadratura de Gauss-Hermite unidimensional da forma (2.24) pode ser aplicada a cada um dos componentes de $\mathbf{x}$.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k_1=1}^{Q_1} \omega_{k_1}^{(1)} \cdots \sum_{k_m=1}^{Q_m} \omega_{k_m}^{(m)} g(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_m}^{(m)}) \quad (2.26)$$

em que $x_{k_r}^{(1)}$ é o k_r -ésimo zero do polinômio de Hermite de ordem Q_r , e $\omega_{k_r}^{(r)}$, $r = 1, \dots, m$ é o peso correspondente. Neste trabalho iremos denotar os x_k como os pontos da quadratura e Q como o número de pontos da quadratura. Mais detalhes sobre a quadratura de Gauss-Hermite podem ser vistos em [Evans e Swartz \(2000\)](#) e [Fahrmeir e Tutz \(2001\)](#) por exemplo.

Capítulo 3

Extensões do Modelo t -Potência

3.1 Introdução

Nos últimos anos, houve um interesse considerável na literatura estatística em relação a famílias flexíveis de distribuições capazes de modelar dados que apresentam alto ou baixo grau de assimetria, com curtose maior ou menor do que o modelo normal usual. Neste contexto, dois modelos considerados que têm mostrado um comportamento promissor em cenários não padronizados são a distribuição SN de [Azzalini \(1985\)](#); e a distribuição PN por [Durrans \(1992\)](#).

As duas principais características dos modelos SN e PN (maior intervalo de assimetria no modelo SN e maior grau de curtose no modelo PN com matriz de informação não singular) foram combinados por [Martínez-Flórez et al. \(2014\)](#) num novo modelo chamado de normal-assimétrico-potência e denotado PSN (*power-skew-normal*). Esse novo modelo inclui como casos particulares os modelos SN e PN e é capaz de modelar dados com maior ou menor grau de assimetria e curtose do que as distribuições SN e PN.

Outro conjunto de distribuições com matrizes de informação não singular, úteis para modelar dados assimétricos e de caudas pesadas são baseados em generalizações da distribuição t de Student, veja por exemplo [Azzalini e Capitanio \(2003\)](#); [Branco e Dey \(2001\)](#); [Gupta \(2003\)](#); [Sahu et al. \(2003\)](#) e [Jones e Faddy \(2003\)](#).

Recentemente, [Zhao e Kim \(2016\)](#) propõem a família de distribuições chamada de t -potência, como alternativa à distribuição ST de ([Azzalini e Capitanio, 2003](#)) para modelar dados com caudas ainda mais pesadas e coeficiente de curtose maior do que o modelo ST.

Neste capítulo propomos algumas extensões do modelo PT para as situações em que os dados apresentam censura ou truncamento, com a possibilidade de incluir covariáveis no modelo. Os novos modelos são particularmente atraentes devido ao fato que têm matriz de informação não singular e são capazes de ajustar dados com grau de assimetria e curtose maiores (ou menores) do que os modelos ST e PT.

O plano a seguir neste capítulo é como segue. Inicialmente na Seção 3.2 propomos o modelo t -assimétrico-potência para modelar dados com alto (ou baixo) grau de assimetria, e coeficiente de curtose maior (ou menor) do que os modelos expostos acima podem apresentar. Apresentamos também um procedimento de estimação dos parâmetros e estudamos o caso da versão de locação-escala do modelo. Este modelo inclui como caso particular o modelo normal-assimétrico-potência (veja [Martínez-Flórez et al., 2014](#)). Na Seção 3.3 ilustramos o nosso modelo usando um conjunto de dados sob altitudes de vulcões no mundo. Na Seção 3.4 introduzimos o modelo t -potência para dados censurados e truncados, apresentamos os elementos das matrizes de informação observadas dos modelos propostos. Na Seção 3.5 o modelo de regressão t -potência para dados censurados é introduzido. Este modelo generaliza o modelo de regressão t de Student censurado estudado em detalhe por [Arellano-Valle et al. \(2012\)](#), e o amplamente conhecido modelo Tobit ([Tobin,](#)

1958). Na Seção 3.6 propomos a metodologia para a análise de resíduos e a seleção do modelo. Na Seção 3.7 apresentamos um estudo de simulação em que mostramos que o método de estimação proposto oferece boas propriedades assintóticas dos estimadores dos parâmetros. Uma aplicação da utilidade do modelo introduzido a um conjunto de dados sob *Salários* de mulheres é apresentado na Seção 3.8. Finalmente, na Seção 3.9 discutimos as principais conclusões dos métodos propostos.

3.2 Modelo t -Assimétrico-Potência

Definição 7 Dizemos que a variável aleatória X tem uma distribuição t -assimétrica-potência com parâmetro de assimetria λ , parâmetro de forma α , e graus de liberdade ν , denotada por $PST(\lambda, \alpha, \nu)$, se sua fdp é dada por

$$f_{PST}(x | \lambda, \alpha, \nu) = \alpha f_{ST}(x | \lambda, \nu) [F_{ST}(x | \lambda, \nu)]^{\alpha-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

em que $f_{ST}(\cdot)$ denota a fdp da distribuição t -assimétrica padronizada com ν graus de liberdade $ST(\lambda)$, e $F_{ST}(\cdot)$ é a sua fda associada.

Como casos especiais do modelo (3.1) temos que para $\alpha = 1$, se segue o modelo ST, $f_{PST}(x | \lambda, \alpha = 1, \nu) \equiv f_{ST}(x | \lambda, \nu)$. O modelo PT com fdp $f_{PST}(x | \lambda = 0, \alpha, \nu) \equiv f_{PT}(x | \alpha, \nu)$ segue quando $\lambda = 0$. A distribuição t de Student é também um caso especial a qual segue tomando $\alpha = 1$ e $\lambda = 0$, isto é, $f_{PST}(x | \lambda = 0, \alpha = 1, \nu) \equiv f_T(x | \nu) = t(x | \nu)$. Quando $\nu \rightarrow +\infty$, a fdp da variável aleatória X converge para a fdp da distribuição normal-assimétrica-potência introduzida por Martínez-Flórez *et al.* (2014), denotada por $PSN(x; \lambda, \alpha)$, isto é, $f_{PST}(x | \lambda, \alpha, \nu \rightarrow +\infty) \equiv f_{PSN}(x | \lambda, \alpha)$, em que

$$f_{PSN}(x | \lambda, \alpha) = \alpha f_{SN}(x | \lambda) [F_{SN}(x | \lambda)]^{\alpha-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (3.2)$$

com $f_{SN}(\cdot)$ sendo a densidade da normal-assimétrica padronizada, e $F_{SN}(\cdot)$ é a sua fda associada.

Note-se também que os modelos SN e PN são casos particulares do modelo (3.1) tomando $\alpha = 1$ e $\nu \rightarrow +\infty$ ($f_{PST}(x | \lambda, \alpha = 1, \nu \rightarrow +\infty) \equiv f_{SN}(x | \lambda)$); e $\lambda = 0$ e $\nu \rightarrow +\infty$ ($f_{PST}(x | \lambda = 0, \alpha, \nu \rightarrow +\infty) \equiv f_{PN}(x | \alpha)$) respectivamente. Finalmente, o modelo normal é obtido fazendo $\alpha = 1$, $\lambda = 0$ e $\nu \rightarrow +\infty$ ($f_{PST}(x | \lambda = 0, \alpha = 1, \nu \rightarrow +\infty) \equiv f_N(x) \equiv N(0, 1)$).

A Figura 3.1 mostra o comportamento da distribuição PST para diferentes valores de λ e α quando $\nu = 6$. Pode-se observar que os parâmetros α e λ afetam a assimetria e a curtose da distribuição, com o qual se obtém um modelo mais flexível que os obtidos por Azzalini e Capitanio (2003) e Zhao e Kim (2016).

O r -ésimo momento de uma variável $X \sim PST(\lambda, \alpha, \nu)$ não tem forma fechada, mas com uma mudança de variável pode ser obtido como

$$E[X^r] = \mu_r = \alpha \int_0^1 [F_{ST}^{-1}(x | \lambda, \nu)]^r x^{\alpha-1} dx \quad (3.3)$$

em que $F_{ST}^{-1}(\cdot)$ denota a inversa da função $F_{ST}(\cdot)$. Os momentos centrais, $\mu'_r = E[(X - E[X])^r]$, para $r = 2, 3, 4$ podem ser obtidos usando $\mu'_2 = \mu_2 - \mu_1^2$, $\mu'_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3$ e $\mu'_4 = \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4$. Portanto, a variância, o coeficiente de variação, e coeficientes de assimetria e curtose podem ser obtidos como: $\text{Var}[X] = \sigma_X^2 = \mu'_2$, $\text{CV} = \sqrt{\mu'_2}/\mu_1$, $\sqrt{\beta_1} = \mu'_3/(\mu'_2)^{3/2}$ e $\beta_2 = \mu'_4/(\mu'_2)^2$, respectivamente.

A Tabela 3.1 apresenta o intervalo de possíveis valores para os coeficientes de assimetria e curtose para os modelos $ST(\lambda, \nu)$, $PT(\alpha, \nu)$ e $PST(\lambda, \alpha, \nu)$, com valores de λ entre -40 e 40, valores de α de 0.5 a 50, e valores de $\nu = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Os cálculos foram feitos usando a função

Figura 3.1: Função densidade de probabilidade de: (a) Distribuição $PST(\lambda, 2.5, 6)$ para $\lambda = -2.0$ (linha sólida), $\lambda = -1.0$ (linha tracejada), $\lambda = 0.5$ (linha pontilhada), $\lambda = 2.5$ (linha pontilhada-tracejada). (b) Distribuição $PST(-1, \alpha, 6)$ para $\alpha = 0.5$ (linha sólida), $\alpha = 0.75$ (linha tracejada), $\alpha = 1.5$ (linha pontilhada), $\alpha = 4$ (linha pontilhada-tracejada).

integrate do pacote estatístico R (R Development Core Team, 2017).

Pode-se observar da Tabela 3.1 que o intervalo de valores dos coeficientes de assimetria e curtose do modelo PST, contém os respectivos intervalos de valores dos coeficientes de assimetria e curtose dos modelos ST e PT. Isto é um indicador de que o modelo PST é mais flexível em termos de assimetria e curtose que os modelos ST e PT.

3.2.1 Estimação

No modelo PST consideramos o método de máxima verossimilhança para realizar a inferência do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \alpha, \nu)^\top$. Assim, dada uma amostra aleatória $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ com $X_i \sim PST(\lambda, \alpha, \nu)$, temos que a função de verossimilhança para o vetor $\boldsymbol{\theta}$ é dada por

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = (2\alpha)^n (\pi\nu)^{-\frac{n}{2}} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right\}^n \times \prod_{i=1}^n \left\{ 1 + \frac{x_i^2}{\nu} \right\}^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} T\left(\lambda x_i \sqrt{\frac{\nu+1}{x_i^2 + \nu}} \mid \nu + 1\right) \left\{ F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu) \right\}^{\alpha-1} \quad (3.4)$$

e a função de log-verossimilhança obtida de (3.4) é

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = & \text{cte} + n \log \alpha - \frac{n}{2} \log \nu + n \log \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \\ & - n \log \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{\nu+1}{2} \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \log T\left(\lambda x_i w_i \mid \nu + 1\right) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tabela 3.1: Intervalo de valores para os coeficientes de assimetria e curtose dos modelos $ST(\lambda, \nu)$, $PT(\alpha, \nu)$ e $PST(\lambda, \alpha, \nu)$ baseados num estudo de simulação. Valores de λ de -40 a 40, α de 0.5 a 50, e $\nu = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

ν	Amplitude	Modelo ST		Modelo PT		Modelo PST	
		Assimetria	Curtose	Assimetria	Curtose	Assimetria	Curtose
2	Min.	-0.9625	3.1698	-0.1190	1.5521	-2.4521	1.3951
	Max.	0.9625	3.4883	3.0395	10.4355	14.3140	864.3852
3	Min.	-0.9503	3.1460	-0.0855	1.3245	-2.1298	1.6282
	Max.	0.9503	3.3573	1.3621	3.2226	4.9023	114.0981
4	Min.	-1.8526	5.0989	-0.5303	3.4606	-1.8984	3.1525
	Max.	1.8526	7.8239	1.1783	5.2986	3.2146	29.8740
5	Min.	-0.9474	3.0507	-0.4753	1.1756	-1.9682	3.8623
	Max.	0.9474	3.3266	0.2712	3.1300	3.0461	19.9245
6	Min.	-1.6812	4.5543	-0.5330	3.9737	-1.6812	3.8919
	Max.	1.6812	7.2786	1.1180	5.1733	2.1446	11.8930
7	Min.	-0.9443	3.0068	-0.7104	1.2635	-1.5349	3.1358
	Max.	0.9443	3.3674	0.2430	3.0821	2.5362	15.9235

em que $w = \sqrt{\frac{\nu+1}{x^2+\nu}}$. A Figura 3.2 mostra os perfis da função de log-verossimilhança para α variando de 0.1 a 6 para amostras simuladas de uma distribuição $PST(-2, \alpha, 5)$, o perfil da função de log-verossimilhança para λ tomando valores de -6 a 6 para amostras simuladas de uma distribuição $PST(\lambda, 2.5, 10)$ e o perfil da função de log-verossimilhança para ν tomando valores de 0.9 a 40 para amostras simuladas de uma distribuição $PST(1.5, 0.5, \nu)$. Os tamanhos de amostras são 50, 100 e 200.

Definindo $r(x | \nu) = t(x | \nu)/T(x | \nu)$ e $R_\lambda(x | \nu) = (1 + (1 + \lambda^2)x^2/\nu)^{-\frac{\nu}{2}}/F_{ST}(x | \lambda, \nu)$, temos que os componentes da função escore $U_{\theta_i}(\boldsymbol{\theta})$ são obtidos derivando parcialmente $\ell(\boldsymbol{\theta}; X)$ em (3.5), com respecto a λ , α e ν , e ficam dados por

$$U_\lambda(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n x_i w_i r(\lambda x_i w_i | \nu + 1) - \frac{\alpha - 1}{\pi(1 + \lambda^2)} \sum_{i=1}^n R_\lambda(x_i | \nu), \quad (3.6)$$

$$U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log F_{ST}(x_i | \lambda, \nu), \quad (3.7)$$

Figura 3.2: Perfil da função de log-verossimilhança $\ell_p(\alpha)$ (primeira linha), $\ell_p(\lambda)$ (segunda linha) e $\ell_p(\nu)$ (terceira linha). Tamanhos de amostras $n = 50$ (primeira coluna), $n = 100$ (segunda coluna), e $n = 200$ (terceira coluna).

$$\begin{aligned}
 U_\nu(\boldsymbol{\theta}) = & \frac{n\alpha}{2} \left(\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{\nu} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right) \\
 & + \frac{\nu+1}{2\nu} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\nu} \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} \\
 & + \frac{\lambda}{2(\nu+1)} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{\nu} \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} w_i r(\lambda x_i w_i \mid \nu+1) \\
 & - \frac{\lambda}{2(\nu+1)} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\nu} \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} w_i r(\lambda x_i w_i \mid \nu+1) \\
 & - \frac{(\alpha-1)}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)} \sum_{i=1}^n R_\lambda(x_i \mid \nu) \\
 & + \frac{\alpha-1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{g(x_i; \nu)}{F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu)}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que $\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$ é a função digama, e

$$g(x; \nu) = \int_{-\infty}^x \left\{ \frac{(\nu+1)s^2}{\nu(s^2+\nu)} - \log \left(1 + \frac{s^2}{\nu} \right) \right\} f_{ST}(s | \lambda, \nu) ds - \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{s}{s^2+\nu} \left\{ 1 + \frac{(1+\lambda^2)s^2}{\nu} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} ds \quad (3.9)$$

Note-se que, se $\nu \rightarrow \infty$, então $U_\nu(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow 0$ e as equações (3.6) e (3.7) se reduzem às funções escore da distribuição normal-assimétrica-potência (veja [Martínez-Flórez et al., 2014](#)), as quais são dadas por

$$U_\lambda(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\phi(\lambda x_i)}{\Phi(\lambda x_i)} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\alpha-1)}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\sqrt{1+\lambda^2} x_i)}{F_{SN}(x_i | \lambda)}$$

e

$$U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log F_{SN}(x_i | \lambda)$$

O estimador de máxima verossimilhança para $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \alpha, \nu)^\top$ é obtido usando procedimentos iterativos baseados no algoritmo de Newton-Raphson usando as funções escore (3.6) - (3.8).

3.2.2 Matriz de Informação

Os elementos da matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$, denotados por $j_{\boldsymbol{\theta}_k \boldsymbol{\theta}_i}$, são obtidos depois de computar a segunda derivada parcial da função de log-verossimilhança (3.5) em relação a cada um dos parâmetros e multiplicar por -1, isto é, $j_{\boldsymbol{\theta}_k \boldsymbol{\theta}_i} = -\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) / \partial \boldsymbol{\theta}_k \partial \boldsymbol{\theta}_i$. Estes elementos são dados no Apêndice B.1.1. As estimativas das variâncias dos estimadores podem ser obtidas avaliando a inversa da matriz de informação observada $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ no estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\lambda}, \hat{\alpha}, \hat{\nu})^\top$.

Sob as condições usuais de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é assintoticamente normal com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariâncias $\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, isto é,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow N(\mathbf{0}, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})) \quad (3.10)$$

em que $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação esperada, obtida como $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = E[\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})]$.

3.2.3 Modelo PST de Locação e Escala

Considerando uma variável aleatória Z com distribuição PST(λ, α, ν), a extensão para locação-escala de Z pode ser obtida usando a transformação $X = \xi + \eta Z$, em que $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \mathbb{R}^+$. A fdp de Z é dada por

$$f_{PST}(x | \xi, \eta, \lambda, \alpha, \nu) = \alpha f_{ST}(x | \xi, \eta, \lambda, \nu) [F_{ST}(x | \xi, \eta, \lambda, \nu)]^{\alpha-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (3.11)$$

em que

$$f_{ST}(x | \xi, \eta, \lambda, \nu) = \frac{2}{\eta} t \left(\frac{x - \xi}{\eta} | \nu \right) T \left(\lambda \left(\frac{x - \xi}{\eta} \right) \sqrt{\frac{\nu+1}{Q_x + \nu}} | \nu + 1 \right), \quad x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

e

$$F_{ST}(x | \xi, \eta, \lambda, \nu) = \int_{-\infty}^x f_{ST}(s | \xi, \eta, \lambda, \nu) ds$$

Escreveremos esta extensão por $X \sim \text{PST}(\xi, \eta, \lambda, \alpha, \nu)$, portanto $\text{PST}(0, 1, \lambda, \alpha, \nu) \equiv \text{PST}(\lambda, \alpha, \nu)$, e temos que se $X \sim \text{PST}(\xi, \eta, \lambda, \alpha, \nu)$, a fda de X é dada por

$$F_{PST}(x \mid \xi, \eta, \lambda, \alpha, \nu) = [F_{ST}(x \mid \xi, \eta, \lambda, \nu)]^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (3.13)$$

O método da transformação inversa pode ser usado para gerar uma variável aleatória $X \sim \text{PST}(\xi, \eta, \lambda, \alpha, \nu)$ de (3.13), a partir de uma variável aleatória U com distribuição uniforme $U(0, 1)$, e aplicando a relação

$$X = \xi + \eta \times F_{ST}^{-1}(U^{1/\alpha} \mid \lambda, \nu)$$

em que $F_{ST}^{-1}(\cdot \mid \lambda, \nu)$ é a inversa da função $F_{ST}(\cdot \mid \lambda, \nu)$, (isto é, a fda da distribuição ST padrão com ν graus de liberdade).

O r -ésimo momento de uma variável aleatória $X \sim \text{PST}(\xi, \eta, \lambda, \alpha, \nu)$ pode ser calculado como

$$\mathbb{E}[X^r] = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \xi^k \eta^{r-k} \mu_{r-k}, \quad (3.14)$$

em que μ_j , é o j -ésimo momento de uma variável aleatória $Z \sim \text{PST}(\lambda, \alpha, \nu)$ para $j = 1, 2, \dots$, e $\mu_0 = 1$. O processo de inferência é realizado usando o método da máxima verossimilhança. Temos que, dada uma amostra aleatória $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ com $X_i \sim \text{PST}(\xi, \eta, \lambda, \alpha, \nu)$, a função de log-verossimilhança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\xi, \eta, \lambda, \alpha, \nu)^\top$ é dado por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = & \text{cte} + n \log(\alpha) - n \log(\eta) - \frac{n}{2} \log(\nu) \\ & + n \log \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - n \log \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{\nu+1}{2} \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right) \\ & + \sum_{i=1}^n \log T\left(\lambda z_i \sqrt{\frac{\nu+1}{z_i^2 + \nu}}; \nu+1\right) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \log F_{ST}(z_i \mid \lambda, \nu) \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que $z_i = (x_i - \xi)/\eta$. A função escore é dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = (U_\xi(\boldsymbol{\theta}), U_\eta(\boldsymbol{\theta}), U_\lambda(\boldsymbol{\theta}), U_\alpha(\boldsymbol{\theta}), U_\nu(\boldsymbol{\theta}))^\top$$

e seus componentes $U_{\theta_i}(\boldsymbol{\theta})$ são obtidos de (3.15) derivando parcialmente $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X})$ com relação a $\xi, \eta, \lambda, \alpha$ e ν dados por

$$\begin{aligned}
U_{\xi}(\boldsymbol{\theta}) = & \frac{\nu+1}{\eta} \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \\
& - \frac{\lambda\nu}{\eta} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\alpha-1}{\eta} \sum_{i=1}^n r_{\lambda}(z_i \mid \nu)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
U_{\eta}(\boldsymbol{\theta}) = & -\frac{n}{\eta} + \frac{\nu+1}{\eta} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \\
& - \frac{\lambda\nu}{\eta} \sum_{i=1}^n \frac{z_i w_i}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\alpha-1}{\eta} \sum_{i=1}^n z_i r_{\lambda}(z_i \mid \nu)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
U_{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = & \sum_{i=1}^n z_i w_i r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\alpha-1}{\pi(1+\lambda^2)} \sum_{i=1}^n R_{\lambda}(z_i \mid \nu),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$U_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log \Phi_{\lambda, \nu}(z_i), \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
U_{\nu}(\boldsymbol{\theta}) = & \frac{n\alpha}{2} \left(\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{\nu} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right) \\
& + \frac{\nu+1}{2\nu} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \\
& + \frac{\lambda}{2(\nu+1)} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^3}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} w_i r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\lambda}{2(\nu+1)} \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} w_i r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{(\alpha-1)}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)} \sum_{i=1}^n R_{\lambda}(z_i \mid \nu) + \frac{\alpha-1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{g(z_i; \nu)}{F_{ST}(z_i \mid \lambda, \nu)}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

em que $\psi(z)$ é a função digama, $w = \sqrt{\frac{\nu+1}{z^2+\nu}}$, $r(z \mid \nu) = t(z \mid \nu)/T(z \mid \nu)$, $r_{\lambda}(z \mid \nu) = f_{ST}(z \mid \lambda, \nu)/F_{ST}(z \mid \lambda, \nu)$, $R_{\lambda}(x \mid \nu) = (1 + (1 + \lambda^2)z^2/\nu)^{-\frac{\nu}{2}}/F_{ST}(z \mid \lambda, \nu)$ e $g(z; \nu)$ é a função definida em (3.9).

De novo como no modelo PST padronizado, os elementos da matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$, denotados por $j_{\boldsymbol{\theta}_k \boldsymbol{\theta}_i}$, são obtidos depois de computar a segunda derivada parcial da função de log-verossimilhança (3.15) e multiplicar por -1, isto é, $j_{\boldsymbol{\theta}_k \boldsymbol{\theta}_i} = -\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) / \partial \boldsymbol{\theta}_k \partial \boldsymbol{\theta}_i$. Estes elementos são dados no Apêndice B.1.2. Pode-se mostrar que para $\lambda = 0$ e $\alpha = 1$, as matrizes de informação observada e esperada, a qual é obtida como $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}[\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})]$ são não singulares quando ν é pequeno (veja Zhao e Kim, 2016).

Quando $\nu \rightarrow \infty$, a distribuição ST converge para a distribuição SN, e aqui nós lembramos que a matriz de informação de uma variável aleatória $X \sim \text{SN}(\xi, \eta, \lambda)$ denotada por $\mathbf{I}_\lambda(\boldsymbol{\varphi})$, em que $\boldsymbol{\varphi} = (\xi, \eta, \lambda)^\top$, é singular quando $\lambda = 0$. Portanto, é conveniente usar a representação centrada da ST estudada por [Arellano-Valle e Azzalini \(2013\)](#).

Inicialmente, a parametrização centrada da distribuição SN é uma alternativa ao problema da singularidade da matriz de informação da SN quando $\lambda = 0$, assim [Arellano-Valle e Azzalini \(2008\)](#) propuseram uma segunda representação da distribuição SN definindo uma nova variável aleatória X como

$$X = \mu + \sigma \left(\frac{Z - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{\text{Var}[Z]}} \right),$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ são parâmetros da variável aleatória X e $Z \sim \text{SN}(\lambda)$. Essa representação é chamada de parametrização centrada, uma vez que $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $\text{Var}[X] = \sigma^2$ e é denotada por $\text{SN}_c(\mu, \sigma, \gamma_1)$, em que $-0.9953 < \gamma_1 < 0.9953$.

Sob o modelo de parametrização centrado, μ , σ e $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1}$ representam como de costume, a média, o desvio padrão e o coeficiente de assimetria de X , respectivamente. Agora, se $Z \sim \text{SN}(\lambda)$ então $\mathbb{E}[Z] = b\delta$ e $\text{Var}[Z] = 1 - (b\delta)^2$, em que $b = \sqrt{2/\pi}$ e $\delta = \lambda/\sqrt{1 + \lambda^2}$; então segue que a variável aleatória X pode ser escrita na forma $X = \xi + \eta Z$ a qual tem uma distribuição $\text{SN}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda)$, em que

$$\lambda_1 = \mu - c\sigma\gamma_1^{1/3}, \quad \lambda_2 = \sigma\sqrt{1 + c^2\gamma_1^{2/3}}, \quad \lambda = \frac{c\gamma_1^{1/3}}{\sqrt{b^2 + c^2(b^2 - 1)\gamma_1^{2/3}}} \quad (3.21)$$

com $c = \{2/(4 - \pi)\}^{1/3}$. Sob essa designação, temos que a matriz de informação pode ser escrita na forma $\mathbf{I}_{\gamma_1} = \mathbf{D}^\top \mathbf{I}_\lambda \mathbf{D}$, em que $\mathbf{D}$ é uma matriz que representa a derivada dos parâmetros da representação padrão (λ_1 , λ_2 e λ) com relação aos novos parâmetros (μ , σ e γ_1). Segue também que a matriz de informação converge para a matriz diagonal $\boldsymbol{\Sigma}_c^{-1} = \text{diag}(\sigma^2, \sigma^2/2, 6)$, quando $\lambda \rightarrow 0$. Isso garante a existência e unicidade do estimador de máxima verossimilhança (EMV) de λ_1 e λ_2 para cada valor fixo de λ .

Seguindo essa mesma linha de pensamento, nós propomos que Y segue uma distribuição ST de locação-escala (3.12) com parâmetro de locação $\xi \in \mathbb{R}$ e parâmetro de escala $\eta > 0$, isto é

$$\phi_{\lambda, \nu}(y; \xi, \eta) = \frac{2}{\eta} t\left(\frac{y - \xi}{\eta} \mid \nu\right) T\left(\lambda \left(\frac{y - \xi}{\eta}\right) \sqrt{\frac{\nu + 1}{Q_y + \nu}} \mid \nu + 1\right), \quad (3.22)$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$, com $Q_y = ((y - \xi)/\eta)^2$ e $z = (y - \xi)/\eta$, a qual é denotada $\text{ST}(\xi, \eta, \lambda, \nu)$. Essa representação faz relação com a parametrização direta da distribuição ST com vetor de parâmetro $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \lambda, \nu)^\top$. Então, segue que $Z_T = (Y - \xi)/\eta \sim \text{ST}(0, 1, \lambda, \nu)$, e pela representação estocástica da distribuição ST dada por $Z_T = Z/\sqrt{V}$, em que $Z \sim \text{SN}(0, 1, \lambda)$ e $V \sim \chi_\nu^2/\nu$. Isso leva a calcular os quatro primeiros cumulantes de Z_T denotados por $\mu_1(\delta, \nu)$, $\mu_2(\delta, \nu)$, $\mu_3(\delta, \nu)$ e $\mu_4(\delta, \nu)$ (veja [Arellano-Valle e Azzalini, 2013](#)).

A parametrização centrada da distribuição ST de uma variável aleatória Y segue da definição

de

$$\begin{aligned}
\mu_t &= E(Y) = \xi + \eta\mu_1(\delta, \nu) \\
&= \xi + \eta b_\nu \delta, \\
\sigma_t^2 &= \text{Var}(Y) = \eta^2 \mu_2(\delta, \nu) \\
&= \eta^2 \left\{ \frac{\nu}{\nu-2} - b_\nu^2 \delta^2 \right\}, \\
\gamma_{1t} &= \frac{\mu_3(\delta, \nu)}{\mu_2(\delta, \nu)^{3/2}} \\
&= \frac{b_\nu \delta}{\mu_2(\delta, \nu)^{3/2}} \left\{ \frac{\nu(3-\delta^2)}{\nu-3} - \frac{3\nu}{\nu-2} + 2b_\nu^2 \delta^2 \right\} \quad \text{e} \\
\gamma_{2t} &= \frac{\mu_4(\delta, \nu)}{\mu_2(\delta, \nu)^2} \\
&= \frac{1}{\mu_2(\delta, \nu)^2} \left\{ \frac{3\nu^2}{(\nu-2)(\nu-4)} - \frac{4b_\nu^2 \delta^2 \nu(3-\delta^2) + \frac{6b_\nu^2 \delta^2 \nu}{\nu-2} - 4b_\nu^4 \delta^4}{\nu-3} \right\} - 3.
\end{aligned}$$

A nova representação será definida como a distribuição t -assimétrica centrada com vetor de parâmetros $\bar{\boldsymbol{\rho}} = (\mu, \sigma^2, \gamma_1, \gamma_2)^\top$. De acordo com [Arellano-Valle e Azzalini \(2013\)](#), temos que a matriz de informação dessa representação pode ser escrita como

$$\mathbf{I}(\bar{\boldsymbol{\rho}}) = \mathbf{B}^\top \mathbf{I}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{B},$$

em que $\mathbf{B}$ é uma matriz que representa a derivada do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\rho}$ com respecto ao novo vetor $\bar{\boldsymbol{\rho}}$. Pode-se mostrar que $b_\nu \rightarrow b$ quando $\nu \rightarrow \infty$ (veja [Arellano-Valle e Azzalini, 2013](#)). Portanto, temos que os parâmetros do modelo ST centrado convergem para $\mu_t \rightarrow \mu$, $\sigma_t^2 \rightarrow \sigma^2$ e $\gamma_{1t} \rightarrow \gamma_1$, quando $\nu \rightarrow \infty$, isto é, os parâmetros da SN_c .

Então como $Z_T \rightarrow \text{SN}(0, 1, \lambda)$ quando $\nu \rightarrow \infty$, segue que a variável aleatória Y converge para uma distribuição com matriz de informação dada por

$$\mathbf{I}(\mu, \sigma^2, \gamma_1, \alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_1} & \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_1, \alpha} \\ \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_1, \alpha}^\top & I_{\alpha, \alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

quando $\nu \rightarrow \infty$, em que os elementos da diagonal correspondentes à informação do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}_1 = (\mu, \sigma^2, \gamma_1)$ e α ; e $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_1, \alpha}$ é a informação conjunta de $\boldsymbol{\theta}_1 = (\mu, \sigma^2, \gamma_1)^\top$ e α . Agora, para $\lambda \rightarrow 0$ e $\alpha = 1$, pode-se mostrar que $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_1} \rightarrow \text{diag}(\sigma^2, \sigma^2/2, 6)$, com determinante $0.3333/\sigma^4$, e $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}_1, \alpha} = (0.9031/\sigma, -0.5956/\sigma, 0.7206)^\top$, portanto, o determinante $|\mathbf{I}(\mu, \sigma^2, \gamma_1, \alpha)| \neq 0$, isto é, as linhas (ou colunas) da matriz $\mathbf{I}(\mu, \sigma^2, \gamma_1, \alpha)$ são linearmente independentes, e se conclui que a variável aleatória Y converge para uma distribuição com matriz de informação não singular quando $\nu \rightarrow \infty$.

3.3 Aplicação

Nesta seção, aplicamos o modelo proposto usando um conjunto de dados consistente de altitudes de 1520 vulcões do mundo. Os dados estão disponíveis em [Global Volcanism Program \(2013\)](#). A Tabela 3.2 mostra os coeficientes de assimetria e curtose para os dados. Note-se que os valores dos coeficientes de assimetria ($\sqrt{b_1} = 0.6461$) e curtose ($b_2 = 4.3809$) justificam o uso de um modelo assimétrico e de caudas pesadas como o modelo PST, por exemplo.

O conjunto de dados é analisado ajustando um modelo t de Student (T), t -assimétrico (ST),

Tabela 3.2: Resumo estatístico para os dados de vulcões.

n	Média	Variância	$\sqrt{b_1}$	b_2
1520	16.7760	15.6682	0.6461	4.3809

Tabela 3.3: Estimativas dos parâmetros e erros padrão (EP) para os modelos T, ST, PT e PST ajustados aos dados de vulcões.

θ	Modelo T		Modelo ST		Modelo PT		Modelo PST	
	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP
ξ	14.7835	0.3615	4.7469	0.6892	8.4027	0.7923	11.5509	0.1337
η	11.0045	0.3975	14.1532	0.7237	11.8146	0.4707	22.6885	0.0792
λ	—	—	1.5673	0.1838	—	—	5.2347	0.2870
α	—	—	—	—	1.7912	0.1147	0.3205	0.0347
ν	3.4156	0.3601	3.4075	0.3454	2.7473	0.2566	12.8734	2.9729

t -potência (PT) e t -assimétrico-potência (PST). Para comparar os modelos ajustados, usamos o Critério de Informação de Akaike (AIC), (Akaike, 1974), em que $AIC = -2\ell(\hat{\theta} | \mathbf{y}) + 2k$; Critério de informação Bayesiano (BIC), (Schwarz, 1978), em que $BIC = -2\ell(\hat{\theta} | \mathbf{y}) + \log(n)k$, e o AIC consistente, (CIAC) (Bozdogan, 1987), em que $CAIC = -2\ell(\hat{\theta} | \mathbf{y}) + k(1 + \log(n))$. Em todos os critérios temos que k é o número de parâmetros no modelo ajustado, e n é o tamanho da amostra.

A Tabela 3.3 apresenta as estimativas de máxima verossimilhança e os erros padrões (EP) para os modelos T, ST, PT e PST. Note-se que os valores dos erros padrão das estimativas de ξ e η no modelo PST são menores que os correspondentes erros padrões dos respectivos parâmetros para os modelos T, ST e PT. A Tabela 3.4 mostra os critérios de seleção considerados, além do valor da log-verossimilhança obtida para cada modelo considerado. As estimativas dos parâmetros foram obtidas pela maximização da função de verossimilhança usando o método de otimização numérico BFGS na função “*optim*” do pacote estatístico R (R Development Core Team, 2017).

De acordo com os critérios AIC, BIC e CAIC, o modelo PST parece proporcionar um melhor ajuste aos dados de vulcões que os modelos T, ST e PT, apoiando a afirmação de afastamento da simetria da variável altitude dos vulcões (Y).

A Figura 3.3 mostra os gráficos *qqplot* para os modelos ajustados. Dessa figura, pode-se ver claramente que o modelo PST se ajusta melhor aos dados do que os modelos T, ST, PT. Além disso, o teste de Kolmogorov-Smirnov produz a estatística de teste $D = 0,0027$ com $p - value = 0,6379$, indicando que o modelo PST é capaz de ajustar os dados sob estudo.

Tabela 3.4: Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de vulcões.

Critério	Model T	Modelo ST	Modelo PT	Modelo PST
$\ell(\theta)$	-6273.35	-6219.25	-6228.77	-6205.94
AIC	12552.70	12446.49	12465.53	12421.87
BIC	12568.68	12467.79	12486.53	12448.50
CAIC	12571.68	12471.79	12490.83	12453.50

Figura 3.3: Envelopes dos resíduos quantis aleatorizados para (a) Modelo T, (b) Modelo ST, (c) Model PT, (d) Modelo PST.

A Figura 3.4 (a) mostra o histograma da variável Y (altitude), enquanto que, a Figura 3.4 (b) apresenta a fda empírica (linha sólida) junto com a fda do modelo PST ajustado (linha pontilhada).

Consideramos agora testar a hipótese de nenhuma diferença entre as distribuições t de Student e PST para os dados de altitude dos vulcões, o que corresponde ao teste da hipótese

$$H_0 : (\lambda, \alpha) = (0, 1) \quad \text{contra} \quad H_1 : (\lambda, \alpha) \neq (0, 1),$$

usando a estatística de razão de verossimilhanças

$$\Lambda = \frac{L_T(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{L_{PST}(\hat{\boldsymbol{\theta}})},$$

Figura 3.4: (a) Gráfico dos modelos ajustados aos dados de vulcões. PST (linha sólida), T (linha tracejada), PS (linha pontilhada) e ST (linha pontilhada-tracejada). (b) fda empírica de Y e fda de modelo PST ajustado.

que produz o valor

$$-2\log(\Lambda) = 134.823$$

sendo maior que o valor crítico 5% chi-quadrado, $\chi_{5,95\%}^2 = 5,99$. Portanto, o modelo PST se ajusta melhor aos dados do que o modelo t de Student. O modelo PST também é comparado aos modelos ST e PT testando as hipóteses

$$H_{01} : \lambda = 0 \quad \text{contra} \quad H_{11} : \lambda \neq 0, \quad \text{e} \quad H_{02} : \alpha = 1 \quad \text{contra} \quad H_{12} : \alpha \neq 1,$$

respectivamente, usando a razão de verossimilhanças

$$\Lambda_1 = \frac{L_{ST}(\hat{\theta})}{L_{PST}(\hat{\theta})} \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = \frac{L_{PT}(\hat{\theta})}{L_{PST}(\hat{\theta})}.$$

Após avaliações numéricas, obtemos

$$-2\log(\Lambda_1) = 26.620 \quad \text{e} \quad -2\log(\Lambda_2) = 45.660,$$

que são maiores que o valor $\chi_{1,95\%}^2 = 3.84$. Note-se que o modelo PST proporciona melhor ajuste ao conjunto de dados analisado.

3.4 Modelo t -Potência para Dados Censurados e Truncados

Nesta seção introduzimos agora a extensão do modelo PT às situações em que os dados apresentam censura ou truncamento num valor da variável resposta.

3.4.1 O Modelo t -Potência para Dados Censurados

Inicialmente, suponha que a variável aleatória Y tem uma distribuição PT de parâmetros ξ , η , α e ν ; e consideremos uma amostra $Y_1, \dots, Y_n$, de tamanho n de Y , em que somente relatamos

aqueles valores Y_i maiores que uma constante k_i ; e que para valores $Y_i \leq k_i$ somente o valor k_i é relatado. Os valores observados Y_i^o podem ser escritos da forma

$$Y_i^o = \begin{cases} k_i, & \text{se } Y_i \leq k_i, \\ Y_i, & \text{se } Y_i > k_i, \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, n$. A amostra resultante é dita ser uma amostra PT censurada. Por conveniência, escolhemos trabalhar com o caso de censura à esquerda, mas os resultados podem ser estendíveis para outros tipos de censura.

Para observações $Y_i^o = k_i$, temos que $P(Y_i^o = k_i) = P(Y_i \leq k_i) = \left\{ T\left(\frac{k_i - \xi}{\eta} \mid \nu\right) \right\}^\alpha$, e para observações $Y_i^o = Y_i$ a distribuição de Y_i^o é a mesma de Y_i , isto é, $Y_i^o \sim \text{PT}(\xi, \eta, \alpha, \nu)$.

Temos interesse no vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\xi, \eta, \alpha, \nu)^\top$. A inferência estatística considerada para estimar $\boldsymbol{\theta}$ é baseada no método da máxima verossimilhança. Assim, procedendo como [Arellano-Valle et al. \(2012\)](#), usamos a reparametrização proposta por [Olsen \(1978\)](#) e fazemos $\gamma = \sigma\xi$, e $\sigma = 1/\eta$, então segue que a função de log-verossimilhança para o vetor $\boldsymbol{\varphi} = (\gamma, \sigma, \alpha, \nu)^\top$, dada uma amostra observada $\mathbf{Y}^o$, é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\varphi}; \mathbf{Y}^o) = & \alpha \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \log\{T(c_i \mid \nu)\} \\ & + \sum_{i=1}^n d_i \{\log \alpha + \log \sigma + \log t(z_i \mid \nu) + (\alpha - 1) \log T(z_i \mid \nu)\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

em que $c_i = \sigma k_i - \gamma$, $z_i = \sigma y_i - \gamma$ e d_i é uma variável indicadora com $d_i = 1$ se $Y_i^o = Y_i$; e $d_i = 0$ se $Y_i^o = k_i$. Os componentes da função escore $\mathbf{U}(\boldsymbol{\varphi})$ são obtidos derivando parcialmente $\ell(\boldsymbol{\varphi}; \mathbf{Y}^o)$ em (3.24) com relação às componentes γ , σ , α e ν , e ficam dados por

$$\begin{aligned} U_\gamma(\boldsymbol{\varphi}) = & -\alpha \sum_{i=1}^n (1 - d_i) r(c_i \mid \nu) \\ & + \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(\frac{\nu + 1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i - (\alpha - 1) r(z_i \mid \nu) \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} U_\sigma(\boldsymbol{\varphi}) = & \alpha \sum_{i=1}^n (1 - d_i) r(c_i \mid \nu) k_i \\ & + \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \frac{1}{\sigma} - \left(\frac{\nu + 1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i y_i + (\alpha - 1) r(z_i \mid \nu) y_i \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} U_\nu(\boldsymbol{\varphi}) = & \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \left\{ \psi\left(\frac{\nu + 1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - b_{01}(c_i \mid \nu) - \frac{c_i r(c_i \mid \nu)}{\nu} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi\left(\frac{\nu + 1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{\nu} \right. \\ & \left. - \log\left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right) + \left(\frac{\nu + 1}{\nu}\right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} \right\} \\ & + \frac{\alpha - 1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi\left(\frac{\nu + 1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - b_{01}(z_i \mid \nu) - \frac{z_i r(z_i \mid \nu)}{\nu} \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$U_{\alpha}(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \log\{T(c_i | \nu)\} + \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \frac{1}{\alpha} + \log T(z_i | \nu) \right\} \quad (3.28)$$

em que $r(x | \nu) = t(x | \nu)/T(x | \nu)$, $\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$ é a função digama e $b_{mn}(c_m | \nu + m)$ é o momento truncado definido por

$$b_{mn}(c_m | \nu + m) = \int_{-\infty}^{c_m} s^m \left\{ \log \left(1 + \frac{s^2}{\nu + m} \right) \right\}^n \frac{t(s | \nu + m)}{T(c_m | \nu + m)} ds, \quad (3.29)$$

com $c_m = \sqrt{\frac{\nu+m}{\nu}} c$ e $c_0 = c$. Os momentos b_{mn} em (3.29) são obtidos por integração numérica, por exemplo a função *integrate* no pacote estatístico R.

Os elementos da matriz de informação observada, denotados por $j_{\gamma\gamma}, j_{\gamma\sigma}, \dots, j_{\alpha\alpha}$; são obtidos multiplicando por -1 a segunda derivada parcial da função de log-verossimilhança com respeito a cada um dos parâmetros, isto é, $j_{\varphi_i \varphi_k} = -\partial^2 \ell(\boldsymbol{\varphi}; \mathbf{Y}^o) / \partial \varphi_i \partial \varphi_k$. Estes elementos $j_{\varphi_i \varphi_k}$ são apresentados no Apêndice B.2.

Para recuperar a matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ da parametrização original $\boldsymbol{\theta} = (\xi, \eta, \alpha, \nu)^\top$, temos que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = (\partial \boldsymbol{\varphi} / \partial \boldsymbol{\theta})^\top \mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi}) (\partial \boldsymbol{\varphi} / \partial \boldsymbol{\theta})$, em que a matriz Jacobiana é

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta} & -\frac{1}{\eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros ξ , η , α , e ν no modelo PT censurado são obtidas usando algoritmos iterativos baseados nas funções escore (3.25) - (3.28) e aplicando a transformação inversa $\xi = \gamma/\sigma$ e $\eta = 1/\sigma$. As estimativas das variâncias dos estimadores podem ser obtidas avaliando a inversa da matriz de informação observada $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\varphi})$ nos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\hat{\gamma}, \hat{\sigma}, \hat{\alpha}, \hat{\nu})^\top$ e pelo uso do resultado acima.

3.4.2 O Modelo *t*-Potência para Dados Truncados

Vamos considerar agora que antes da amostra ser selecionada, a distribuição de Y é truncada no valor k , de modo que somente podemos escolher observações tais que $Y \leq k$. Segue que a variável aleatória Y tem uma distribuição PT truncada e pela Definição 5, tem-se que a fdp de Y é dada por

$$f_{TPT}(y | \xi, \eta, \alpha; y \leq k) = \frac{\alpha}{\eta} t\left(\frac{y - \xi}{\eta} | \nu\right) \left[T\left(\frac{y - \xi}{\eta} | \nu\right) \right]^{\alpha-1} \left[T\left(\frac{k - \xi}{\eta} | \nu\right) \right]^{-\alpha} \quad (3.31)$$

para $-\infty < y \leq k$. Novamente, usamos a reparametrização proposta por Olsen (1978), em que $\gamma = \sigma\xi$ e $\sigma = 1/\eta$, e temos que a função de log-verossimilhança para o vetor $\boldsymbol{\varphi} = (\gamma, \sigma, \alpha, \nu)^\top$, dada uma amostra $\mathbf{Y}$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\varphi}; \mathbf{Y}) &= -n_1 \alpha \log\{T(c | \nu)\} \\ &+ \sum_{y_i \leq k}^n \{ \log \alpha + \log \sigma + \log t(z_i | \nu) + (\alpha - 1) \log T(z_i | \nu) \} \end{aligned} \quad (3.32)$$

em que $c = \sigma k - \gamma$, $z_i = \sigma y_i - \gamma$, e n_1 é o número de observações na amostra tais que $-\infty < y \leq k$. Derivando parcialmente a função de log-verossimilhança (3.32) com respeito aos componentes

do vetor $\boldsymbol{\varphi}$ obtemos os seguintes elementos da função escore

$$U_{\gamma}(\boldsymbol{\varphi}) = n_1 \alpha r(c | \nu) + \sum_{y_i \leq k} \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i - (\alpha-1) r(z_i | \nu) \right\} \quad (3.33)$$

$$U_{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) = -n_1 \alpha r(c | \nu) k + \sum_{y_i \leq k} \left\{ \frac{1}{\sigma} - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i + (\alpha-1) r(z_i | \nu) \right\} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} U_{\nu}(\boldsymbol{\varphi}) = & -\frac{n_1 \alpha}{2} \left\{ \psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - b_{01}(c | \nu) - \frac{cr(c | \nu)}{\nu} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{y_i \leq k} \left\{ \psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{1}{\nu} \right. \\ & \left. - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} \right\} \\ & + \frac{\alpha-1}{2} \sum_{y_i \leq k} \left\{ \psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - b_{01}(z_i | \nu) - \frac{z_i r(z_i | \nu)}{\nu} \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$U_{\alpha}(\boldsymbol{\varphi}) = -n_1 \log\{T(c | \nu)\} + \sum_{y_i \leq k} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \log T(z_i | \nu) \right\} \quad (3.36)$$

em que $r(x | \nu)$, $\psi(x)$ e $b_{mn}(c_m | \nu + m)$ são dados como no modelo PT censurado.

Para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros ξ , η , α e ν no modelo PT truncado, procedemos como no modelo PT censurado, e usamos métodos iterativos baseados no algoritmo de Newton-Rapshon usando as funções escore (3.33) - (3.36). De novo, para recuperar a matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ da parametrização original $\boldsymbol{\theta} = (\xi, \eta, \alpha, \nu)^{\top}$, usamos $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = (\partial \boldsymbol{\varphi} / \partial \boldsymbol{\theta})^{\top} \mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi}) (\partial \boldsymbol{\varphi} / \partial \boldsymbol{\theta})$, em que $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ é dado em (3.30). No Apêndice B.3 são apresentados os elementos da matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})$, denotados por $j_{\gamma\gamma}, j_{\gamma\sigma}, \dots, j_{\alpha\alpha}$.

3.5 O Modelo de Regressão Linear t -Potência Censurado

Motivados pelas grandes virtudes da distribuição PT para ajustar dados com alto grau de assimetria e curtose maior ou menor do que o modelo t de Student usual, introduzimos nesta seção o modelo de regressão linear t -Potência Censurado, que é denotado por modelo PT-CR, (*Power- t Censored Regression Model*).

O modelo PT-CR resulta da consideração da variável aleatória observada $Y_i^o = D_i Y_i$, em que $D_i = I(Y_i > 0)$ e $Y_i = \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i$, com $\epsilon_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PT}(0, \eta, \alpha, \nu)$, $i = 1, \dots, n$; isto é,

$$Y_i^o = \begin{cases} \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i, & \text{if } Y_i > 0, \\ 0, & \text{if } Y_i \leq 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

em que $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor de dimensão p de parâmetros desconhecidos, $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^{\top}$, $i = 1, \dots, n$, são vetores de covariáveis conhecidas, e ϵ_i , $i = 1, \dots, n$, são variáveis aleatórias independentes com distribuição PT, com parâmetro de locação 0, parâmetro de escala η , parâmetro de forma α , e graus de liberdade ν . A suposição anterior é equivalente a considerar que as variáveis aleatórias não observadas $Y_1, \dots, Y_n$ são independentes, com $Y_i \sim \text{PT}(\mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta}, \eta, \alpha, \nu)$, isto é, com fdp dada por

$$f(y_i | \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{\eta} t \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta}}{\eta} | \nu \right) \left[T \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta}}{\eta} | \nu \right) \right]^{\alpha-1}$$

$i = 1, \dots, n$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \eta, \alpha, \nu)^\top$. Para observações Y_i^o iguais a zero, a contribuição à função de verossimilhança é dada por

$$P(Y_i^o = 0) = \left\{ T \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}{\eta} \mid \nu \right) \right\}^\alpha,$$

e para observações Y_i^o maiores que zero, tem-se que $Y_i^o \sim \text{PT}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \eta, \alpha, \nu)$. Portanto, a função de verossimilhança do modelo PT-CR baseada em uma amostra observada $\mathbf{Y}^o$ é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) = & \prod_{i=1}^n \left\{ T \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}{\eta} \mid \nu \right) \right\}^{\alpha(1-d_i)} \left\{ \frac{\alpha}{\eta} t \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}{\eta} \mid \nu \right) \right. \\ & \left. \times \left[T \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}{\eta} \mid \nu \right) \right]^{\alpha-1} \right\}^{d_i} \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{if } Y_i^o > 0, \\ 0, & \text{if } Y_i^o = 0, \end{cases}$$

O modelo (3.37) é equivalente à situação mais geral em que o valor da censura associado à observação i é substituído pelo valor k_i (um valor conhecido), isto é,

$$Y_i^o = \begin{cases} \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i, & \text{if } Y_i > k_i, \\ k_i, & \text{if } Y_i \leq k_i, \end{cases} \quad (3.39)$$

$i = 1, \dots, n$. Note-se que, fazendo $Y_i^{o*} = Y_i^o - k_i$, $\mathbf{x}_i^* = (\mathbf{x}_i^\top, k_i)^\top$ e $\boldsymbol{\beta}^* = (\boldsymbol{\beta}^\top, -1)^\top$, tem-se o modelo previo em (3.37), assim, os resultados da inferência baseados no método da máxima verossimilhança podem ser usados para ajustar o modelo mais geral em (3.39).

Pode-se observar que o modelo (3.38) se reduz ao modelo de regressão t de Student censurado (Arellano-Valle *et al.*, 2012) quando $\alpha = 1$; e converge para o modelo Tobit normal-potência quando $\nu \rightarrow \infty$, (Martínez-Flórez *et al.*, 2013b). Finalmente, o modelo Tobit usual (Tobin, 1958) é obtido quando $\alpha = 1$ e $\nu \rightarrow \infty$.

3.5.1 Momentos

A média e a variância para a i -ésima resposta observada no modelo PT-CR é obtida desde que $Y_i^o = D_i Y_i$, em que $Y_i = \mu_i + \eta Z_i$, com $\mu_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$ e $Z_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{PT}(0, 1, \alpha, \nu)$, $i = 1, \dots, n$. Segue que

$$\begin{aligned} E[Y_i^o] &= E[Y_i \mid Y_i > 0] P(Y_i > 0) \\ &= (\mu_i + \eta E[Z_i \mid Z_i + c_i > 0]) (1 - \{T(-c_i \mid \nu)\}^\alpha) \\ \text{Var}[Y_i^o] &= E[Y_i^2 \mid Y_i > 0] P(Y_i > 0) - (E[Y_i^o])^2 \\ &= (\mu_i^2 + 2\eta \mu_i E[Z_i \mid Z_i + c_i > 0]) (\{T(-c_i \mid \nu)\}^\alpha) \\ &\quad \times (1 - \{T(-c_i \mid \nu)\}^\alpha) \\ &\quad + \eta^2 (E[Z_i^2 \mid Z_i + c_i > 0] (1 - \{T(-c_i \mid \nu)\}^\alpha) \\ &\quad - (E[Z_i \mid Z_i + c_i > 0])^2 (1 - \{T(-c_i \mid \nu)\}^\alpha)^2) \end{aligned}$$

em que $c_i = \mu_i/\eta$, e pela Proposição 3, tem-se que

$$E[Y_i^o] = \eta \{c_i + m_1(c_i | \nu)\} (1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha) \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_i^o] &= \eta^2 \{c_i^2 + 2c_i m_1(c_i | \nu)\} (\{T(-c_i | \nu)\}^\alpha) \\ &\quad \times (1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha) \\ &\quad + \eta^2 \left\{ m_2(c_i | \nu) - [m_1(c_i | \nu)]^2 (1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha) \right\} \\ &\quad \times (1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha) \end{aligned} \quad (3.41)$$

em que

$$m_r(c | \nu) = \frac{1}{1 - \{T(-c | \nu)\}^\alpha} \int_{T(-c|\nu)}^1 [T^{-1}(u | \nu)]^r \alpha u^{\alpha-1} du.$$

com $T^{-1}(\cdot | \nu)$ a inversa da fda $T(\cdot | \nu)$. Note que $m_r(c | \nu)$ é o momento $E[(T^{-1}(U | \nu))^r]$ de uma variável aleatória beta de parâmetros α e 1, truncada em $A = [T(-c | \nu), 1]$.

É importante ressaltar que $E[Y_i^o]$ e $\text{Var}[Y_i^o]$ são definidos para todo $\nu > 0$, e quando $\nu \rightarrow \infty$ segue que (3.40) e (3.41) convergem para a média e a variância do modelo Tobit normal-potência (Martínez-Flórez *et al.*, 2013b), respectivamente, isto é, quando $\nu \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} E[Y_i^o] &\longrightarrow \eta \{c_i + m_1(c_i)\} (1 - \{\Phi(-c_i)\}^\alpha) \\ \text{Var}[Y_i^o] &\longrightarrow \eta^2 \{c_i^2 + 2c_i m_1(c_i)\} (\{\Phi(-c_i)\}^\alpha) (1 - \{\Phi(-c_i)\}^\alpha) \\ &\quad + \eta^2 \left\{ m_2(c_i) - [m_1(c_i)]^2 (1 - \{\Phi(-c_i)\}^\alpha) \right\} (1 - \{\Phi(-c_i)\}^\alpha) \end{aligned}$$

em que

$$m_r(c) = \frac{1}{1 - \{\Phi(-c)\}^\alpha} \int_{\Phi(-c)}^1 [\Phi^{-1}(u)]^r \alpha u^{\alpha-1} du.$$

com $\Phi(\cdot)$ a fda da distribuição normal padronizada, e $\Phi^{-1}(\cdot)$ a função inversa de $\Phi(\cdot)$. Vale a pena ressaltar também que, se $\alpha = 1$ e $\nu \rightarrow \infty$, temos $m_1(c_i | \nu) \longrightarrow \phi(c_i)/\Phi(c_i)$ e $m_2(c_i | \nu) \longrightarrow (\Phi(c_i) - c_i \phi(c_i))/\Phi(c_i)$, portanto

$$\begin{aligned} E[Y_i^o] &\longrightarrow \eta \{c_i \Phi(c_i) + \phi(c_i)\} \\ \text{Var}[Y_i^o] &\longrightarrow \eta^2 \{c_i^2 \Phi(c_i) + 2c_i \phi(c_i)\} (1 - \Phi(c_i)) \\ &\quad + \eta^2 \{\Phi(c_i) - \phi(c_i)[c_i + \phi(c_i)]\} \end{aligned}$$

os quais são respectivamente, a média e a variância do modelo Tobit usual.

3.5.2 Estimação

No modelo PT-CR o vetor de parâmetros de interesse é $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \eta, \alpha, \nu)^\top$, e para fazer a inferência consideramos o método da máxima verossimilhança e usamos novamente a reparametrização de Olsen (1978), em que $\boldsymbol{\gamma} = \sigma \boldsymbol{\beta}$, e $\sigma = 1/\eta$. Definindo

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{if } Y_i^o > k_i, \\ 0, & \text{if } Y_i^o = k_i, \end{cases}$$

se segue que a função de log-verossimilhança para $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\gamma}^\top, \sigma, \alpha, \nu)^\top$ obtida de (3.38) sob a nova parametrização é dada por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\varphi}; \mathbf{Y}^o) &= \alpha \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \log\{1 - T(c_i | \nu)\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n d_i \{\log \alpha + \log \sigma + \log t(z_i | \nu) + (\alpha - 1) \log T(z_i | \nu)\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

em que $z_i = \sigma y_i - c_i$, com $c_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\gamma}$. Os componentes da função escore $\mathbf{U}(\boldsymbol{\varphi})$ são obtidos derivando $\ell(\boldsymbol{\varphi}; \mathbf{Y}^o)$ parcialmente com relação aos componentes $\boldsymbol{\gamma}$, η , α e ν . Depois de algumas manipulações algébricas obtemos as seguintes componentes da função escore

$$\begin{aligned} U_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\varphi}) &= -\alpha \sum_{i=1}^n (1 - d_i) r(-c_i | \nu) \mathbf{x}_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(\frac{\nu + 1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i - (\alpha - 1) r(z_i | \nu) \right\} \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$U_{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \frac{1}{\sigma} - \left(\frac{\nu + 1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i y_i + (\alpha - 1) r(z_i | \nu) y_i \right\} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} U_{\nu}(\boldsymbol{\varphi}) &= -\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \left\{ \psi \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - b_{01}(c_i | \nu) \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_i r(c_i | \nu)}{\nu} \right\} R(c_i | \nu) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{1}{\nu} \right. \\ &\quad \left. - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) + \left(\frac{\nu + 1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} \right\} \\ &\quad + \frac{\alpha - 1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - b_{01}(z_i | \nu) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z_i r(z_i | \nu)}{\nu} \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$U_{\alpha}(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \log\{1 - T(c_i | \nu)\} + \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \frac{1}{\alpha} + \log T(z_i | \nu) \right\} \quad (3.46)$$

em que $r(x | \nu) = t(x | \nu)/T(x | \nu)$, $R(x | \nu) = T(x | \nu)/(1 - T(x | \nu))$, $\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$ é a função digama e $b_{mn}(c_m | \nu + m)$ é o momento truncado definido em (3.29).

Note-se que, se $\alpha = 1$ as equações (3.43)-(3.45) são reduzidas às funções escore do modelo de regressão t de Student censurado, enquanto que, se $\alpha = 1$ e $\nu \rightarrow \infty$, então $r(c | \nu) \rightarrow r(c) = \phi(c)/\Phi(c)$, $R(c | \nu) \rightarrow R(c) = \Phi(c)/(1 - \Phi(c))$, e $U(\nu) \rightarrow 0$, portanto, as equações (3.43)-(3.44) se reduzem às funções escore de modelo Tobit usual.

Os elementos da matrix de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})$ para o modelo PT-CR denotados por $j_{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_j}$, podem ser obtidos computando a segunda derivada parcial de função de log-verossimilhança (3.42), isto é, $j_{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_j} = -\partial^2 \ell(\boldsymbol{\varphi}; \mathbf{Y}^o) / \partial \boldsymbol{\varphi}_i \partial \boldsymbol{\varphi}_j$, enquanto que a matriz de informação esperada é obtida como $\mathbf{I}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{E}[\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})]$, o qual envolve o computo de valores esperados truncados que não tem forma fechada e deveriam ser obtidos numericamente. O Apêndice B.4 apresenta as expressões para os elementos das matrizes $\mathbf{I}(\boldsymbol{\varphi})$ e $\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})$.

A matriz de informação esperada $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ da parametrização original $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \eta, \alpha, \nu)^\top$ pode ser recuperada usando $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = (\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\boldsymbol{\theta})^\top \mathbf{I}(\boldsymbol{\varphi})(\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\boldsymbol{\theta})$, em que

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta}\mathbf{I}_p & -\frac{1}{\eta^2}\boldsymbol{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, o estimador de máxima verossimilhança para $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \eta, \alpha, \nu)^\top$ pode ser obtido usando métodos iterativos baseados no algoritmo de Newton-Rapshon a partir da função escore (3.43) - (3.46) e aplicando a transformação inversa $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}/\sigma$ e $\eta = 1/\sigma$. As estimativas das variâncias dos estimadores podem ser obtidas avaliando a inversa da matriz de informação observada $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\varphi})$ nos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\sigma}, \hat{\alpha}, \hat{\nu})^\top$ e pelo uso do resultado acima.

3.6 Seleção de Modelos e Análise de Resíduos

Nesta seção propomos alguns critérios para a seleção do modelo ajustado e uma metodologia para a análise dos resíduos.

3.6.1 Seleção de Modelos

Existem muitas ferramentas de seleção de modelos que são geralmente utilizadas, tais como o Critério de Informação de Akaike (AIC), (Akaike, 1974), o Critério de informação Bayesiano (BIC) (Schwarz, 1978), e o AIC corrigido (AICc) (Sugiura, 1978), que são definidos por

$$-2\ell(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) + c(k, n)$$

em que o termo $c(k, n)$ é uma quantidade que depende do número de parâmetros livres que são estimados no modelo e k , é o número de observações na amostra n . Para o AIC temos que $c(k, n) = 2k$, enquanto que para o BIC temos que $c(k, n) = k \log(n)$. Para o AICc temos que $c(k, n) = 2k(k+1)/(n - (k+1))$.

Para a escolha do melhor modelo, nós usaremos os critérios AIC, BIC e AICc, isto é, o melhor modelo é aquele com o menor AIC, BIC ou AICc.

3.6.2 Análise de resíduos

A análise de resíduos tem como finalidade detectar a presença de observações atípicas e avaliar as suposições do modelo, podendo incluir testes formais para detectar afastamentos das suposições do modelo considerado, bem como gráficos informais para apresentar características gerais dos resíduos.

Seguindo Garay *et al.* (2017) e Arellano-Valle *et al.* (2012), neste trabalho considerou-se os resíduos martingais transformados r_{MTi} propostos por Barros *et al.* (2010) como ferramenta de diagnóstico para avaliar afastamentos do modelo postulado para a variável resposta, bem como detectar a presença de observações atípicas. Os resíduos são definidos como

$$r_{MTi} = \text{sign}(r_{Mi}) \sqrt{-2[r_{Mi} + \delta_i \log(\delta_i - r_{Mi})]}, \quad i = 1, \dots, n$$

em que $r_{Mi} = \delta_i + \log S(y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}})$ é o resíduo martingal proposto por Ortega *et al.* (2003), em que $\delta_i = 0, 1$ indica se a i -ésima observação é censurada ou não, respectivamente, $\text{sign}(r_{Mi})$ denota o

signal de r_{Mi} e $S(y_i; \hat{\theta}) = P_{\hat{\theta}}(Y_i > y_i)$ representa a função de sobrevivência avaliada em y_i , em que $\hat{\theta}$ representa as estimações de MV para θ .

Como sugerido por Garay *et al.* (2017), usamos este tipo de resíduos padronizados devido ao fato que são simetricamente distribuídos ao redor de zero, o que facilitará a construção dos envelopes simulados com pouco esforço computacional e será útil para detectar uma especificação incorreta do modelo, assim como a presença de observações atípicas.

3.7 Simulação

A fim de estudar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\nu}$ de β , η , α e ν , respectivamente; apresentamos um estudo de simulação de Monte Carlo com tamanhos de amostras $n = 150, 300, 750$, e 1000 . Consideramos o modelo PT-CR definido na Seção 3.5 com $\mathbf{x}_i^\top = (1, x_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Os verdadeiros valores dos parâmetros foram tomados como $\beta = (2, 1.5)^\top$, $\eta = 1.5$, $\alpha = 0.4, 2.5$ e $\nu = 3$. Consideramos também níveis de censura iguais a $p = 0, 10, 25$ e 45% . A covariável x_i foi gerada segundo uma distribuição uniforme $U(0.1, 20)$ como considerado em Garay *et al.* (2017). Para cada combinação de parâmetros, tamanhos de amostras e níveis de censura, foram geradas 2000 amostras do modelo PT-CR com erros $\epsilon_i \sim \text{PT}(0, \eta, \alpha, \nu)$. Para avaliar o desempenho dos estimadores foram considerados o viés relativo (VR) em valor absoluto e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM). Eles são dados por

$$\text{VR}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{2000} \sum_{j=1}^{2000} \left(\frac{\hat{\theta}_i^{(j)}}{\theta_i} - 1 \right), \text{REQM}(\hat{\theta}_i) = \sqrt{\frac{1}{2000} \sum_{j=1}^{2000} \left(\hat{\theta}_i^{(j)} - \theta_i \right)^2},$$

respectivamente, em que $\hat{\theta}_i^{(j)}$ é o estimador de θ_i para a j -ésima amostra, para $\theta_i \in \theta = (\beta^\top, \eta, \alpha, \nu)^\top$.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros foram computados usando a função *optim* do pacote estatístico R. A otimização da função de verossimilhança foi feita usando métodos iterativos baseados no algoritmo de Newton-Raphson usando as funções *score*. Pode-se observar da Tabela A.1 no Apêndice A que o VR e a REQM tendem a diminuir o valor de n aumenta, indicando que estimativas baseadas no método de máxima verossimilhança têm boas propriedades assintóticas. Esse padrão é o mesmo para os diferentes níveis de censura de p sob consideração.

3.8 Aplicação

Nesta seção, ilustramos o método desenvolvido considerando os dados descritos por Mroz (1987). O conjunto de dados referentes a *Salários*, é composto por 753 mulheres brancas casadas com idade entre 30 e 60 anos em 1975, em que 428 mulheres trabalharam em algum momento desse ano.

A variável de resposta y usada nesta aplicação é o rendimento médio por hora. Se o valor do rendimento for igual a zero, significa que essas mulheres não trabalharam no ano de estudo, assim essas observações serão consideradas como observações censuradas em zero. (censura à esquerda).

As covariáveis consideradas foram a idade da mulher (X_1), anos de escolaridade (X_2), o número de crianças menores de seis anos na casa (X_3) e o número de crianças entre seis e dezenove anos de idade (X_4). Esses dados foram analisados anteriormente por Arellano-Valle *et al.* (2012) usando um modelo de regressão t de Student censurado, e mais tarde por Garay *et al.* (2017)

Tabela 3.5: Resumo estatístico para os dados de salários.

	n	Média	EP	Assimetria	Curtose
Dados completos	753	2.3746	3.2418	2.7778	15.7967
Dados não censurados	428	4.1777	3.3103	3.0801	16.8212

Figura 3.5: Histograma dos Salários, dados de Mroz.

usando os modelos SMN-CR (*Scale Mixture of Normal Censored Regression Model*) [Garay et al. \(2017\)](#).

Nós analisamos os conjunto de dados descritos por [Mroz \(1987\)](#) ajustando um modelo PT-CR, e para comparar nossa proposta com outros métodos existentes na literatura, ajustamos os seguintes modelos SMN-CR propostos por [Garay et al. \(2017\)](#): T-CR (*Student-t censored regression model*), SL-CR (*Slash censored regression model*), e N-CR (*normal censored regression model*), isto é, o modelo Tobit usual.

A Tabela 3.5 mostra os coeficientes de assimetria e curtose para dados completos, bem como para as observações não censuradas. Pode-se observar que os valores dos coeficientes de assimetria e curtose justificam o uso de um modelo que seja capaz de acomodar alto grau de assimetria, por exemplo, o modelo PT-CR, além disso, o histograma das observações não censuradas dado na Figura 3.5 também suporta essa escolha.

A Tabela 3.6 apresenta as estimativas dos parâmetros com seus correspondentes erros padrão (EP) para os modelos PT-CR, T-CR, SL-CR e N-CR. A Tabela 3.7 apresenta alguns critérios de seleção de modelos juntamente com os valores da log-verossimilhança. Pode-se notar que, segundo os critérios AIC, BIC e AICc, o modelo PT-CR parece produzir melhor ajuste aos dados sob salários de Mroz que os modelos SMN-CR e que o modelo Tobit usual (modelo N-CR), apoiando afirmação de afastamento de erros simétricos. Além disso, o EP das estimativas dos parâmetros obtidos no modelo PT-CR é menor do que o DP das estimativas dos parâmetros obtidos com os modelos SMN-CR (modelos T-CR e SL-CR) e N-CR (modelo Tobit usual).

Uma indicação mais categórica de que um modelo assimétrico deveria ser considerado, resulta de testar a hipótese de um modelo simétrico (T-CR) contra um modelo assimétrico, isto é, um

Tabela 3.6: Estimativas de MV dos parâmetros e erros padrões (EP) obtidos no ajuste dos modelos PT-CR, T-CR, SL-CR e N-CR para os dados de *salários*.

θ	PT-CR		T-CR		SL-CR		N-CR	
	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP
β_0	-8.8412	0.3785	-1.0474	1.1549	-1.1445	1.4377	-2.7510	1.7334
β_1	-0.1331	0.0004	-0.1108	0.0204	-0.1084	0.0232	-0.1046	0.0276
β_2	0.4887	0.0050	0.6475	0.0658	0.6434	0.0635	0.7281	0.0831
β_3	-3.4010	0.1869	-3.1636	0.3878	-3.0958	0.3785	-3.0264	0.4406
β_4	-0.3053	0.0149	-0.2964	0.1247	-0.2946	0.1210	-0.2143	0.1527
η	4.1538	0.1320	3.2616	0.1731	2.5958	0.3071	4.5760	0.1697
α	12.8760	0.9871	—	—	—	—	—	—
ν	6.5899	0.9014	4.2000	0.8068	1.4061	0.4361	—	—

Tabela 3.7: Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de salários.

Critério	PT-CR	T-CR	SL-CR	N-CR
$\ell(\theta)$	-1413.942	-1440.145	-1436.286	-1481.655
AIC	2843.883	2894.291	2886.573	2975.311
AICc	2828.077	2880.441	2872.723	2963.424
BIC	2880.876	2926.659	2918.941	3003.055

modelo PT-CR, através das hipóteses

$$H_0 : \alpha = 1 \quad \text{versus} \quad H_1 : \alpha \neq 1,$$

usando a razão de verossimilhanças

$$\Lambda = \frac{L_{T-CR}(\hat{\theta})}{L_{PT-CR}(\hat{\theta})},$$

a qual para os dados em estudo produz o valor observado

$$-2 \log \Lambda = 52.41$$

que é maior que o valor crítico da chi-quadrado ao 5% com um grau de liberdade dado por $\chi_{1,95\%}^2 = 3.84$. Esta é uma indicação de que o modelo PT-CR parece ajustar melhor os dados de *salários* que o modelo T-CR.

Finalmente, com o objetivo de verificar se existe alguma especificação incorrecta nas suposições do modelo ajustado, os gráficos dos envelopes simulados para os resíduos tipo martingais transformados são mostrados na Figura 3.6. Essa figura indica que o modelo PT-CR é, aparentemente, mais indicado para o ajuste destes dados do que os modelos SMN-CR. Também pode-se observar que os modelos SMN-CR com caudas mais pesadas ajustam melhor os dados do que o modelo N-CR, uma vez que há poucas observações que se encontram fora dos envelopes.

Figura 3.6: Envelopes dos resíduos tipo martingais transformados r_{MTi} , para (a) Modelo PT-CR. (b) Modelo T-CR. (c) Model SL-CR. (d) Modelo N-CR.

3.9 Conclusões

Neste capítulo, introduzimos dois novos modelos assimétricos úteis para a modelagem de dados com alto grau de assimetria e coeficiente de curtose maior (ou menor) do que é possível obter com o modelo normal.

O primeiro modelo assimétrico (modelo PST) é baseado na combinação dos modelos t -assimétrico por [Azzalini e Capitanio \(2003\)](#) e t -potência por [Zhao e Kim \(2016\)](#). Este novo modelo apresenta amplos intervalos de assimetria e curtose, os quais são muito úteis para modelar dados assimétricos e de caudas pesadas. O problema da estimação dos parâmetros no modelo é resolvido usando o método de máxima verossimilhança, que é também usado para estudar as propriedades assintóticas dos estimadores sob a teoria de grandes amostras. A matriz de informa-

ção observada é analiticamente obtida e mostrada ser não singular, o que garante a validade dos resultados para estatísticas de razão de verossimilhanças com grandes amostras. Os elementos da função escore são também apresentados. Para este modelo proposto, uma aplicação a dados sobre altitude de vulcões no mundo ilustra o fato de que o novo modelo pode ser útil em aplicações reais.

O segundo modelo proposto (modelo PT-CR) é uma alternativa para o modelo de regressão t de Student censurado (modelo T-CR). O modelo é baseado na nova família de distribuições assimétricas e de caudas pesadas t -potência. Mais ainda, o modelo de regressão ordinário Tobit e o modelo de regressão t -Student censurado são casos especiais. Os elementos da matriz de informação observada e esperada são analiticamente obtidos permitindo a implementação direta da inferência neste tipo de modelos.

O problema da estimação dos parâmetros é tratado usando o método de máxima verossimilhança; e estatísticas de razão de verossimilhança baseados nas propriedades assintóticas dos estimadores para grandes amostras podem ser usados para teste de hipótese. Um estudo de simulação em pequena escala indica boa recuperação de parâmetros com a abordagem de estimativa desenvolvida. Uma aplicação para ilustrar a nossa proposta é apresentada e concluímos que o método proposto pode ser uma alternativa útil a outros modelos existentes na literatura, tais com o modelo T-CR de [Arellano-Valle *et al.* \(2012\)](#) e a classe de modelos de regressão de escala de mistura normais (SMN-CR) proposta por [Garay *et al.* \(2017\)](#).

Capítulo 4

Modelos Lineares Mistos Normal-Potência

4.1 Introdução

Como discutido no Capítulo 1, a suposição de normalidade dos efeitos aleatórios e os erros é muito comum em modelos lineares mistos (MLM's), mas esta suposição pode não ser adequada e pode levar a consequências prejudiciais para a inferência. Segundo alguns autores (veja, por exemplo [Arellano-Valle et al., 2005](#); [Butler e Louis, 1992](#); [Verbeke e Lasaffre, 1997](#)), apesar de que a inferência nos efeitos fixos pode ser robusta à não normalidade dos efeitos aleatórios, pode-se estar interessado na eficiência e na validade de inferência nos efeitos individuais. Mais ainda, estimação dos efeitos aleatórios menos restritivas pode fornecer considerável discernimento, por exemplo, a exclusão de covariáveis importantes pode ser sugerida pela assimetria na variável resposta revelando características críticas da heterogeneidade presente entre sujeitos ([Lachos, 2004](#)).

Recentemente, uma variedade de métodos têm sido propostos para relaxar a suposição de normalidade, por exemplo, [Zhang e Davidian \(2001\)](#) usaram a representação semi-não-paramétrica proposta por [Gallant e Nychka \(1987\)](#) para aproximar a densidade dos efeitos aleatórios e fornecer flexibilidade na captura de uma ampla gama de comportamentos não normais. [Pinheiro et al. \(2001\)](#) propuseram um modelo linear hierárquico de efeitos mistos robusto assumindo que os efeitos aleatórios e os erros dentro dos sujeitos seguem distribuições t multivariadas.

[Arellano-Valle et al. \(2005, 2007\)](#) usaram a distribuição normal-assimétrica para propor o modelo linear misto normal assimétrico (SNLMM). Aqui, os autores desenvolveram um algoritmo tipo EM para a inferência via máxima verossimilhança em abordagem clássica, e também, em uma perspectiva bayesiana ([Arellano-Valle et al., 2007](#)) derivaram um esquema MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) para realizar a inferência. A distribuição normal-assimétrica multivariada foi considerada também por [Lin e Lee \(2008\)](#) com um algoritmo híbrido eficiente para a obtenção de estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros. [Rosa et al. \(2003\)](#) realizaram análise a posteriori em modelos lineares de efeitos mistos com distribuições normais e independentes usando um esquema MCMC em uma abordagem bayesiana. Recentemente [Lachos et al. \(2010\)](#) apresentou uma nova classe de modelos lineares assimétricos baseados na distribuição normal-assimétrica e independentes.

Neste capítulo, nós introduzimos um novo método que é particularmente atraente em modelos lineares mistos assumindo que ambos, os efeitos aleatórios e o termo de erro no modelo seguem distribuições normal-potência. A suposição de distribuição normal-potência da flexibilidade para acomodar formas assimétricas à direita e à esquerda para os efeitos aleatórios e os erros. Curtose maior ou menor do que o usual modelo normal pode ser também acomodada.

O plano deste capítulo é como segue. Na Seção 4.2 introduzimos a versão univariada da proposta, considerando que tanto os erros como os efeitos aleatórios seguem uma distribuição normal-potência [Durrans \(1992\)](#). Chamamos este modelo de modelo com interceptos aleatórios normal-potência. Fazemos também um estudo detalhado do procedimento de estimação nesta classe de modelos, derivamos os dois primeiros momentos da variável resposta, e propomos uma metodologia para obter as predições dos interceptos aleatórios. Na Seção 4.3 generalizamos os resultados obtidos para o caso multivariado. Na Seção 4.4 apresentamos um estudo de simulação em que mostramos que o método de estimação proposto oferece boas propriedades assintóticas dos estimadores dos parâmetros. Na Seção 4.5 apresentamos uma aplicação do método proposto a um conjunto de dados de colesterol previamente analisado por [Zhang e Davidiam \(2001\)](#) usando técnicas semi-paramétricas, e por [Arellano-Valle *et al.* \(2005\)](#) usando modelos lineares mistos normal-assimétrico. Finalmente, na Seção 4.6 discutimos as principais conclusões do método proposto.

4.2 O Modelo com Interceptos Aleatórios Normal-Potência

Seja Y_{ij} o valor da j -ésima resposta medida para a i -ésima unidade amostral (*cluster*), para $j = 1, \dots, m_i$ e $i = 1, \dots, n$. Consideraremos o seguinte modelo com intercepto aleatório

$$Y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \epsilon_{ij}, \quad \text{com} \\ \gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g) \quad \text{e} \quad \epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e), \quad (4.1)$$

em que γ_i é independente de ϵ_{ij} , $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij1}, \dots, x_{ijp})^\top$ é um vetor conhecido que contem os valores das variáveis explicativas associadas aos efeitos fixos, e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ é um vetor de parâmetros descohecidos de componentes sistemáticos. Esta suposição leva ao modelo hierárquico:

$$Y_{ij} \mid \gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i, \eta_e, \alpha_e), \\ \gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g), \quad (4.2)$$

$i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$. No modelo (4.2), pode-se notar que, se $\alpha_g = \alpha_e = 1$, se obtem o modelo linear misto ordinario com ambos, o intercepto aleatório e termo do erro distribuidos normalmente. Por outro lado, com $\alpha_e = 1$, o modelo normal com intercepto aleatório normal-potência segue. O modelo normal-potência com intercepto aleatório normal é também um caso especial tomando $\alpha_g=1$.

4.2.1 Momentos

Seguindo a abordagem marginal apresentada para o caso do modelo linear normal de efeitos mistos apresentada na Seção 2.2.1, junto com a equação (2.15), é possível obter a média, a variância, a covariância e a correlação da distribuição marginal de Y_{ij} , descritas a seguir.

Média

A média marginal de Y_{ij} é calculada baseados na esperança condicional de Y_{ij} dado o efeito aleatório γ_i , isto é,

$$\begin{aligned} E[Y_{ij}] &= E[E(Y_{ij} \mid \gamma_i)] \\ &= E[\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + E(\epsilon_{ij})] \\ &= E\left[\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \eta_e \int_0^1 \alpha_e \Phi^{-1}(v) v^{\alpha_e-1} dv\right] \\ &= \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \eta_g \int_0^1 \alpha_g \Phi^{-1}(u) u^{\alpha_g-1} du + \eta_e \int_0^1 \alpha_e \Phi^{-1}(v) v^{\alpha_e-1} dv \\ &= \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_\gamma + \mu_\epsilon \end{aligned}$$

em que $\mu_\gamma = \eta_g m_1$ e $\mu_\epsilon = \eta_e m'_1$, com

$$m_1 = \int_0^1 \alpha_g \Phi^{-1}(u) u^{\alpha_g-1} du \quad \text{e} \quad m'_1 = \int_0^1 \alpha_e \Phi^{-1}(v) v^{\alpha_e-1} dv.$$

Variância

Para calcular a variância marginal de Y_{ij} usamos a propriedade da variância condicional dada por

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[E(Y \mid X)] + E[\text{Var}(Y \mid X)]$$

em que X e Y são duas variáveis aleatórias. Assim, usando essa expressão obtemos

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_{ij}] &= \text{Var}[E(Y_{ij} \mid \gamma_i)] + E[\text{Var}(Y_{ij} \mid \gamma_i)] \\ &= \text{Var}[\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \mu_\epsilon] + E[\text{Var}(\epsilon_{ij})] \\ &= \text{Var}[\gamma_i] + \text{Var}[\epsilon_{ij}] \\ &= \sigma_\gamma^2 + \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

em que $\sigma_\gamma^2 = \eta_g^2(m_2 - m_1^2)$ e $\sigma_\epsilon^2 = \eta_e^2(m'_2 - m'^2_1)$, com m_1 e m'_1 dados acima, e

$$m_2 = \int_0^1 \alpha_g [\Phi^{-1}(u)]^2 u^{\alpha_g-1} du \quad \text{e} \quad m'_2 = \int_0^1 \alpha_e [\Phi^{-1}(v)]^2 v^{\alpha_e-1} dv.$$

Covariância e correlação

Assumindo independência condicional dos Y_{ij} e usando a definição de covariância condicional dada por

$$\text{Cov}[Y, X] = \text{Cov}[E(Y \mid Z), E(X \mid Z)] + E[\text{Cov}(Y, X \mid Z)]$$

em que Y , X e Z são variáveis aleatórias, temos que a covariância entre Y_{ij} e $Y_{ij'}$, duas observações nos momentos j e j' do i -ésimo indivíduo, é dada por

$$\text{Cov}[Y_{ij}, Y_{ij'}] = \text{Cov}[E(Y_{ij} \mid \gamma_i), E(Y_{ij'} \mid \gamma_i)] + E[\text{Cov}(Y_{ij}, Y_{ij'} \mid \gamma_i)]$$

e pela independência condicional das observações, o termo $E[\text{Cov}(Y_{ij}, Y_{ij'} | \gamma_i)]$ é igual a zero, então a covariância de Y_{ij} fica dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y_{ij}, Y_{ij'}] &= \text{Cov}[E(Y_{ij} | \gamma_i), E(Y_{ij'} | \gamma_i)] \\ &= \text{Cov}[\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \mu_\epsilon, \mathbf{x}_{ij'}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \mu_\epsilon] + E[0] \\ &= \text{Cov}[\gamma_i, \gamma_i] \\ &= \sigma_\gamma^2, \end{aligned}$$

Note que as correlações entre as observações Y_{ij} e $Y_{ij'}$ para $j \neq j'$ são sempre maiores que zero, pois segue que $\text{Corr}(Y_{ij}, Y_{ij'}) = \sigma_\gamma^2 / (\sigma_\gamma^2 + \sigma_\epsilon^2) > 0$.

4.2.2 Estimação

A inferência estatística para o modelo de regressão linear com intercepto aleatório normal-potência proposta neste trabalho é baseada no método de máxima verossimilhança. Sejam $f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e)$ e $f_\gamma(\gamma_i; \eta_g, \alpha_g)$ as fdp de $Y_{ij} | \gamma_i$ e γ_i , respectivamente. Então, segue que a fdp marginal do vetor aleatório $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{im_i})^\top$, é dada por

$$f(\mathbf{y}_i; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \right\} f_\gamma(\gamma_i; \eta_g, \alpha_g) d\gamma_i, \quad (4.3)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \eta_e, \alpha_e, \eta_g, \alpha_g)^\top$ é o vetor de parâmetros a ser estimado no espaço paramétrico

$$\boldsymbol{\Theta} = \{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^q \mid \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \eta_e \in \mathbb{R}^+, \alpha_e \in \mathbb{R}^+, \eta_g \in \mathbb{R}^+, \alpha_g \in \mathbb{R}^+ \}$$

com $q = p + 4$, e a função de verossimilhança para o vetor $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)^\top$ é da forma

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \right\} f_\gamma(\gamma_i; \eta_g, \alpha_g) d\gamma_i, \quad (4.4)$$

A densidade marginal (4.3) e a função de verossimilhança (4.4) não tem expressões analíticas fechadas com no caso dos modelos lineares mistos normais, e a limitação na inferência estatística baseada no método da máxima verossimilhança é a avaliação das integrais envolvidas na função de verossimilhança (4.4). Geralmente essa limitação é resolvida usando métodos de integração de Monte Carlo, algoritmos tipo EM e métodos aproximados (Wu, 2010). Neste contexto, os métodos de Monte Carlo usam a quadratura de Gauss-Hermite ou técnicas de integração de Monte Carlo para aproximar a integral na função de verossimilhança (4.4) (veja Pinheiro e Chao, 2006), enquanto que os algoritmos tipo EM maximizam indiretamente a verossimilhança usando métodos numéricos estocásticos ou de Monte Carlo no passo E (Vaida *et al.*, 2007). Por fim, os métodos aproximados são denominados assim pelo fato de usar expansões de Taylor ou aproximações de Laplace para aproximar diretamente a função de verossimilhança.

Neste trabalho, utilizamos o método de integração numérica de Gauss-Hermite descrito na Seção 2.5.1 para a avaliação das integrais envolvidas na função de verossimilhança (4.4). Note-se

que precisamos avaliar a integral I_i , em que

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \right\} f_{\gamma}(\gamma_i; \eta_g, \alpha_g) d\gamma_i \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \right\} \frac{\alpha_g}{\sqrt{2\pi}\eta_g} \exp\left(-\frac{\gamma_i^2}{2\eta_g^2}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{\gamma_i}{\eta_g}\right) \right\}^{\alpha_g-1} d\gamma_i \end{aligned} \quad (4.5)$$

Fazendo a mudança de variável $u_i = \gamma_i/\sqrt{2}\eta_g$, a integral I_i fica dada por:

$$I_i = \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \sqrt{2}\eta_g u_i; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_i) \right\}^{\alpha_g-1} \frac{\alpha_g \exp(-u_i^2)}{\sqrt{\pi}} du_i$$

que tem a forma (2.23). Usando o método da quadratura de Gauss-Hermite a integral I_i pode ser aproximada como:

$$I_i \approx \sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \sqrt{2}\eta_g u_k; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_k) \right\}^{\alpha_g-1} \frac{\alpha_g \omega_k}{\sqrt{\pi}}$$

em que u_k são os pontos da quadratura e ω_k os pesos correspondentes. Portanto, a função de verossimilhança (4.4) pode ser aproximada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}) \approx \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \sqrt{2}\eta_g u_k; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_k) \right\}^{\alpha_g-1} \frac{\alpha_g \omega_k}{\sqrt{\pi}} \right) \quad (4.6)$$

e o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y})$ pode ser escrito como:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}) \approx \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \sqrt{2}\eta_g u_k; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_k) \right\}^{\alpha_g-1} \frac{\alpha_g \omega_k}{\sqrt{\pi}} \right). \quad (4.7)$$

A função escore aproximada é obtida diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y})$ em relação a cada um dos parâmetros e é dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}^{\top}(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_g}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_g}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\top}$$

No Apêndice B.5.1 são apresentadas as expressões para os componentes do vetor $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$. O estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^{\top}, \eta_e, \alpha_e, \eta_g, \alpha_g)^{\top}$ é obtido como solução ao sistema de equações $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$. Note-se que os estimadores dos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ não têm uma expressão fechada e precisam ser obtidos numericamente maximizando (4.7).

Sob as condições usuais de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é assintoticamente normal com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariâncias $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, isto é,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow N(\mathbf{0}, \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})) \quad (4.8)$$

em que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada, obtida como $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = -\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^{\top}$. Os elementos da matriz $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ são apresentados no Apêndice B.5.2. Para obter os desvios padrão precisa-se obter também de forma numérica as estimativas dos elementos de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$.

4.2.3 Predição de efeitos aleatórios

Além de obter estimativas dos parâmetros da distribuição marginal de $\mathbf{Y}_i$, muitas vezes precisa-se obter também as predições dos efeitos aleatórios. Essas predições refletem a variabilidade entre indivíduos e permitem a detecção de perfis especiais, por exemplo, indivíduos atípicos ou grupos de indivíduos que evoluem de forma diferente no tempo (veja [Molenberghs e Verbeke, 2005](#)). Também, se quer obter predições dos perfis individuais, as predições dos efeitos aleatórios são necessárias.

A abordagem usada para atribuir valores aos efeitos aleatórios é a metodologia que considera o melhor preditor empírico de Bayes. Assim, no modelo linear misto normal (2.3), por exemplo, a estimação dos efeitos aleatórios é baseada na distribuição a posteriori $f(\gamma_i | \mathbf{y}_i, \beta, \Sigma)$ dada por

$$f(\gamma_i | \mathbf{y}_i, \beta, \Sigma) = \frac{f(\mathbf{y}_i | \gamma_i, \beta) f(\gamma_i, \Sigma)}{\int_{\mathbb{R}^q} f(\mathbf{y}_i | \gamma_i, \beta) f(\gamma_i, \Sigma) d\gamma_i}$$

Geralmente, γ_i é predito por meio da média da distribuição a posteriori, chamada de média a posteriori de γ_i . Este preditor é denominado melhor preditor empírico de Bayes e é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_i &= E[\gamma_i | \mathbf{Y}_i] \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} \gamma_i f(\gamma_i | \mathbf{y}_i, \beta, \Sigma) d\gamma_i \end{aligned}$$

No modelo de regressão linear com interceptos aleatórios normal-potência, propomos usar essa abordagem para obter o melhor preditor linear dos interceptos aleatórios como segue

$$\tilde{\gamma}_i = E[\gamma_i | \mathbf{Y}_i] = \frac{\int_{\mathbb{R}} \gamma_i \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \hat{\beta}, \hat{\eta}_e, \hat{\alpha}_e) f_{\gamma}(\gamma_i; \hat{\eta}_g, \hat{\alpha}_g) d\gamma_i}{\int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \hat{\beta}, \hat{\eta}_e, \hat{\alpha}_e) f_{\gamma}(\gamma_i; \hat{\eta}_g, \hat{\alpha}_g) d\gamma_i} \quad (4.9)$$

em que $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$. As integrais no numerador e denominador de (4.9) são resolvidas usando quadratura de Gauss-Hermite, da mesma forma que a integral (4.5).

4.2.4 Seleção de modelos

Para a seleção de modelos, propomos avaliar a série de ajustes inspecionando critérios de informação, tais como o Critério de Informação de Akaike Marginal, $mAIC = -2\ell(\hat{\theta} | \mathbf{Y}) + 2pN/(N - p - 1)$, em que p é o número de parâmetros estimados no modelo considerado, e $N = \sum_{i=1}^n m_i$, (veja [Vaida e Blanchard, 2005](#)); o Critério de Informação Bayesiano de Schwarz, $BIC_h = -2\ell(\hat{\theta} | \mathbf{Y}) + p_r \log(n) + p_f \log(N)$, em que p_r é o número de parâmetros correspondentes à componente aleatória, p_f é o número de parâmetros correspondentes à componente fixa e $N = \sum_{i=1}^n m_i$ (veja [Delandre et al., 2014](#)). Propomos também usar o Critério de Informação de Akaike modificado, usualmente chamado de AIC consistente, $CAIC = -2\ell(\hat{\theta} | \mathbf{Y}) + p(1 + \log(N))$, e o Critério de Informação de Hannan-Quinn, $HQIC = -2\ell(\hat{\theta} | \mathbf{Y}) + p \log(\log(N))$, em que p é o número de parâmetros estimados no modelo sendo considerado. O melhor modelo é aquele com o menor mAIC (ou BIC_h ou CAIC ou HQIC).

4.2.5 Análise de resíduos

Seguindo [Usuga \(2013\)](#), nós propomos usar o gráfico de probabilidade meio normal com envelope simulado sugerido por [Atkinson \(1985\)](#) e [Kutner et al. \(2005\)](#) como ferramenta de diagnóstico para avaliar o afastamento da distribuição postulada para as respostas $\mathbf{Y}_i$'s bem com a presença de observações atípicas.

Para construir o gráfico de probabilidade meio normal com envelope simulado, pode ser usado o resíduo quantil aleatorizado, o resíduo condicional ou o resíduo marginal, os quais são definidos por [Usuga \(2013\)](#) como segue

Resíduo quantil aleatorizado

Tem como objetivo avaliar a adequação geral do modelo aos dados e é definido como

$$r_{qij} = \Phi^{-1}(F(y_{ij}; \hat{\beta}, \hat{\eta}_e, \hat{\alpha}_e, \tilde{\gamma}_i)), \quad (4.10)$$

$i = 1, \dots, n$, em que $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}_e$ e $\hat{\alpha}_e$ são os estimadores de máxima verossimilhança de β , η_e e α_e , respectivamente; $\tilde{\gamma}_i$ é o melhor preditor linear de γ_i ; Φ^{-1} é a função inversa da função de distribuição acumulada de uma variável aleatória com distribuição normal padrão, e $F(y_{ij}; \hat{\beta}, \hat{\eta}_e, \hat{\alpha}_e, \tilde{\gamma}_i)$ é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória com distribuição normal-potência, isto é,

$$F(y_{ij}; \hat{\beta}, \hat{\eta}_e, \hat{\alpha}_e, \tilde{\gamma}_i) = \left\{ \Phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \hat{\beta} - \tilde{\gamma}_i}{\hat{\eta}_e} \right) \right\}^{\hat{\alpha}_e}.$$

Resíduo condicional

Este resíduo incorpora o efeito da presença de observações atípicas e é dado por

$$r_{cij} = \frac{y_{ij} - \hat{E}[Y_{ij} | \tilde{\gamma}_i]}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}[Y_{ij} | \tilde{\gamma}_i]}} \quad (4.11)$$

em que $\hat{E}[Y_{ij} | \tilde{\gamma}_i] = \mathbf{x}_{ij}^\top \hat{\beta} + \tilde{\gamma}_i + \hat{\mu}_\epsilon$, com

$$\hat{\mu}_\epsilon = \hat{\eta}_e \int_0^1 \hat{\alpha}_e \Phi^{-1}(v) v^{\hat{\alpha}_e - 1} dv, \quad (4.12)$$

e $\widehat{\text{Var}}[Y_{ij} | \tilde{\gamma}_i] = \hat{\sigma}_\epsilon^2$, com

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \hat{\eta}_e^2 \left[\int_0^1 \hat{\alpha}_e [\Phi^{-1}(v)]^2 v^{\hat{\alpha}_e - 1} dv - \left(\int_0^1 \hat{\alpha}_e \Phi^{-1}(v) v^{\hat{\alpha}_e - 1} dv \right)^2 \right] \quad (4.13)$$

Resíduo marginal

O resíduo marginal padronizado incorpora o efeito da presença de observações atípicas e pode ser escrito como

$$r_{mij} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\hat{\sigma}_{ij}}$$

em que $\hat{\mu}_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \hat{\beta} + \hat{\mu}_\gamma + \hat{\mu}_\epsilon$ e $\hat{\sigma}_{ij}^2 = \hat{\sigma}_\gamma^2 + \hat{\sigma}_\epsilon^2$; com $\hat{\mu}_\epsilon$ e $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ dados em (4.12) e (4.13), respectivamente, e

$$\hat{\mu}_\gamma = \hat{\eta}_g \int_0^1 \hat{\alpha}_g \Phi^{-1}(u) u^{\hat{\alpha}_g - 1} du, \quad (4.14)$$

e

$$\hat{\sigma}_\gamma^2 = \hat{\eta}_g^2 \left[\int_0^1 \hat{\alpha}_g [\Phi^{-1}(u)]^2 u^{\hat{\alpha}_g - 1} du - \left(\int_0^1 \hat{\alpha}_g \Phi^{-1}(u) u^{\hat{\alpha}_g - 1} du \right)^2 \right] \quad (4.15)$$

sendo $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}_e$, $\hat{\alpha}_e$, $\hat{\eta}_g$ e $\hat{\alpha}_g$ os estimadores de máxima verossimilhança de β , η_e , α_e , η_g e α_g , respectivamente; e $\tilde{\gamma}_i$ é o melhor preditor linear de γ_i .

Resíduo aleatório

Exploram a presença de indivíduos atípicos e são definidos por

$$r_{ai} = \frac{\tilde{\gamma}_i}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}[\tilde{\gamma}_i]}}$$

com $i = 1, \dots, n$; $\tilde{\gamma}_i$ é o melhor preditor linear de γ_i e $\widehat{\text{Var}}[\tilde{\gamma}_i]$ é a variância estimada da distribuição do efeito aleatório.

Envelope simulado

Atkinson (1985) e Kutner *et al.* (2005) sugerem usar o gráfico de probabilidade metade-normal com envelope simulado como ferramenta de diagnóstico. Esse gráfico pode ser construído para cada um dos resíduos descritos anteriormente e permite identificar observações atípicas e avaliar as suposição sobre a distribuição da variável resposta.

Para a construção do gráfico, dispomos do k -ésimo valor ordenado ($k = 1, \dots, n$) do resíduo versus o correspondente valor esperado da estatística de ordem, em valor absoluto, da distribuição $N(0, 1)$ dado por

$$\Phi^{-1} \left(\frac{k + n - 1/8}{2n + 1/2} \right) \quad (4.16)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da $N(0, 1)$.

Para a construção do gráfico meio-normal com envelope simulado seguimos os seguintes passos

1. Simule uma amostra de n observações independentes para a variável resposta normal-potência usando a informação do modelo ajustado aos dados originais.
2. Ajuste às respostas normal-potência simuladas no passo 1 o mesmo modelo ajustado aos dados originais.
3. Calcule o resíduo proposto, e ordene os seus valores absolutos.
4. Repita os passos 1 a 3 k vezes.
5. Calcule o mínimo, a média e o máximo dos k resíduos.
6. Disponha no gráfico de probabilidade metade-normal do resíduo proposto os valores mínimos, médios e máximos dos dados simulados versus os correspondentes valores esperados em (4.16) e conecte os pontos para formar as bandas de confiança.

Segundo Atkinson (1985) é suficiente usar $k = 19$. As observações correspondentes aos resíduos fora das bandas de confiança devem ser identificadas e investigadas. Além disso, se há uma proporção considerável de pontos fora das bandas é evidência de que o modelo ajustado não é adequado.

4.3 O Modelo Linear Misto Normal-Potência

Nós consideraremos uma alternativa à proposta de Arellano-Valle *et al.* (2005) assumindo que os vetores aleatórios γ_i são independentes e identicamente distribuídos $\text{PN}_q(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}_g, \boldsymbol{\alpha}_g)$, com

$\boldsymbol{\eta}_g = \text{diag}(\eta_1^2, \dots, \eta_q^2)$ e $\boldsymbol{\alpha}_g = (\alpha_1, \dots, \alpha_q, \alpha)$; e para $j = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, n$, os ϵ_{ij} 's são independentes $\text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e)$, com $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{iq}$ independentes de ϵ_{ij} . Então, esta suposição leva ao modelo hierárquico que chamaremos de modelo linear misto normal-potência, e denotaremos por PNLMM (*Power-Normal Linear Mixed Model*):

$$\begin{aligned} Y_{ij} \mid \boldsymbol{\gamma}_i &\stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{PN}(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \mathbf{w}_{ij}^\top \boldsymbol{\gamma}_i, \eta_e, \alpha_e), \\ \boldsymbol{\gamma}_i &\stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}_q(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}_g, \boldsymbol{\alpha}_g), \end{aligned} \quad (4.17)$$

Aqui $\mathbf{x}_{ij}^\top = (x_{ij1}, \dots, x_{ijp})$ é a ij -ésima linha da matriz $\mathbf{X}_i$, e $\mathbf{w}_{ij}^\top = (w_{ij1}, \dots, w_{ijq})$ é a ij -ésima linha da matriz $\mathbf{W}_i$.

4.3.1 Momentos

Seguindo a mesma ideia dos modelos lineares com interceptos normal-potência, temos que os momentos do vetor aleatório $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{im_i})^\top$ podem ser obtidos usando a abordagem marginal nos modelos lineares mistos junto com a equação (2.20). Segue que a média de $\mathbf{Y}_i$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{Y}_i] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbf{Y}_i \mid \boldsymbol{\gamma}_i)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i \mid \boldsymbol{\gamma}_i)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\mu}_\epsilon] \\ &= \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}_i \boldsymbol{\mu}_\gamma + \boldsymbol{\mu}_\epsilon \end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{\mu}_\gamma = \boldsymbol{\eta}_g^{\frac{1}{2}} \mathbf{m}_g$, com $\mathbf{m}_g = (m_1, \dots, m_q)^\top$ e

$$m_k = \int_0^1 \alpha_k \Phi^{-1}(u) u^{\alpha_k-1} du, \quad k = 1, \dots, q;$$

$\boldsymbol{\mu}_\epsilon = \mu_\epsilon \mathbf{1}_{m_i}$, com $\mu_\epsilon = \eta_e m_e$ e

$$m_e = \int_0^1 \alpha_e \Phi^{-1}(v) v^{\alpha_e-1} dv.$$

A variância de $\mathbf{Y}_i$ é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{Y}_i] &= \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y}_i \mid \boldsymbol{\gamma}_i)] + \mathbb{E}[\text{Var}(\mathbf{Y}_i \mid \boldsymbol{\gamma}_i)] \\ &= \text{Var}[\mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\mu}_\epsilon] + \mathbb{E}[\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon] \\ &= \mathbf{W}_i^\top \text{Var}[\boldsymbol{\gamma}_i] \mathbf{W}_i + \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \\ &= \mathbf{W}_i \boldsymbol{\Sigma}_\gamma \mathbf{W}_i^\top + \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{\Sigma}_\gamma = \boldsymbol{\eta}_g^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\eta}_g^{\frac{1}{2}}$, com

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{q1} & \cdots & \sigma_{qq} \end{pmatrix}$$

sendo

$$\sigma_{kk} = \sigma_k^2 = \int_0^1 \alpha_k [\Phi^{-1}(u)]^2 u^{\alpha_k-1} du - m_k^2, \quad k = 1, \dots, q;$$

e

$$\sigma_{jk} = \alpha(\alpha + 1) \left\{ \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\Phi^{-1}(u^{-\alpha/\alpha_j}) \Phi^{-1}(v^{-\alpha/\alpha_k})}{(u + v - 1)^{\alpha+2}} du dv \right\} - m_j m_k;$$

para $j, k = 1, \dots, q$; com $j \neq k$; e $\Sigma_\epsilon = \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I}_{m_i}$ com

$$\sigma_\epsilon^2 = \eta_e^2 \left(\int_0^1 \alpha_e [\Phi^{-1}(u)]^2 u^{\alpha_e-1} du - m_e^2 \right).$$

4.3.2 Estimação

Para fazer inferência estatística no modelo linear misto normal-potência, consideramos novamente o método de máxima verossimilhança. Sejam $f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \beta, \eta_e, \alpha_e)$ e $f_\gamma(\gamma_i; \eta_g, \alpha_g)$ a fdp de $Y_{ij} | \gamma_i$ e γ_i , respectivamente, a fdp marginal do vetor aleatório $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{im_i})^\top$, é dada por

$$f(\mathbf{y}_i; \theta) = \int_{\mathbb{R}^q} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \beta, \eta_e, \alpha_e) \right\} f_\gamma(\gamma_i; \eta_g, \alpha_g) d\gamma_i, \quad (4.18)$$

em que $\theta = (\beta^\top, \eta_g^\top, \alpha_g^\top, \eta_e, \alpha_e)^\top$ é o vetor de parâmetros a ser estimado no espaço paramétrico

$$\Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^s \mid \beta \in \mathbb{R}^p, \eta_g \in \mathbb{R}^q, \alpha_g \in \mathbb{R}^{+(q+1)}, \eta_e \in \mathbb{R}^+, \alpha_e \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

com $s = p + 2q + 3$, e $\mathbb{R}^{+q} = \underbrace{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \dots \times \mathbb{R}^+}_{q \text{ vezes}}$. A função de verossimilhança para o vetor

$\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)^\top$ é da forma

$$L(\theta; \mathbf{Y}) = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^q} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \beta, \eta_e, \alpha_e) \right\} f_\gamma(\gamma_i; \eta_g, \alpha_g) d\gamma_i. \quad (4.19)$$

De novo a densidade marginal (4.18) e a função de verossimilhança (4.19) não têm expressões analíticas fechadas e utilizamos o método de integração numérica de Gauss-Hermite multivariado descrito na Seção 2.5.2 para a avaliação das integrais envolvidas na função de verossimilhança (4.4).

A integral I_i na função de verossimilhança (4.19) é dada por

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{\mathbb{R}^q} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \beta, \eta_e, \alpha_e) \right\} f_\gamma(\gamma_i; \eta_g, \alpha_g) d\gamma_i \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \beta, \eta_e, \alpha_e) \right\} \frac{\Gamma(\alpha + q)}{\alpha^q \Gamma(\alpha)} \prod_{l=1}^q \frac{\alpha_l}{\eta_l} \phi\left(\frac{\gamma_{il}}{\eta_l}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{\gamma_{il}}{\eta_l}\right) \right\}^{-\frac{\alpha_l}{\alpha} - 1} \\ &\quad \times \left(\sum_{l=1}^q \left\{ \Phi\left(\frac{\gamma_{il}}{\eta_l}\right) \right\}^{-\frac{\alpha_l}{\alpha}} - (q - 1) \right)^{-(\alpha + q)} d\gamma_i \end{aligned} \quad (4.20)$$

e fazendo a mudança de variável $u_{il} = \gamma_{il}/\sqrt{2}\eta_l$, para $l = 1, \dots, q$, temos que a integral I_i em

(4.20) fica dada por:

$$I_i = \int_{\mathbb{R}^q} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \mathbf{u}_i, \boldsymbol{\eta}_g; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \right\} \frac{\Gamma(\alpha + q)}{\alpha^q \Gamma(\alpha)} \prod_{l=1}^q \frac{\alpha_l}{\sqrt{\pi}} \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_{il}) \right\}^{-\frac{\alpha_l}{\alpha} - 1} \\ \times \left(\sum_{l=1}^q \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_{il}) \right\}^{-\frac{\alpha_l}{\alpha}} - (q-1) \right)^{-(\alpha+q)} \exp \left\{ -\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_i \right\} d\mathbf{u}_i \quad (4.21)$$

em que $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{iq})^\top$, e tem a forma (2.25). Segue que a função de verossimilhança (4.19) pode ser aproximada como:

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}) \approx \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{k_q=1}^{Q_q} \frac{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_q}}{\pi^{q/2}} \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\eta}_g; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \frac{\Gamma(\alpha + q)}{\alpha^q \Gamma(\alpha)} \right. \\ \left. \times \prod_{l=1}^q \alpha_l \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_{k_l}) \right\}^{-\frac{\alpha_l}{\alpha} - 1} \left(\sum_{l=1}^q \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_{k_l}) \right\}^{-\frac{\alpha_l}{\alpha}} - (q-1) \right)^{-(\alpha+q)} \right) \quad (4.22)$$

em que $\mathbf{u}_k = (u_{k1}, \dots, u_{kq})^\top$, e o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y})$ pode ser escrito como:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}) \approx \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{k_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{k_q=1}^{Q_q} \frac{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_q}}{\pi^{q/2}} \prod_{j=1}^{m_i} f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\eta}_g; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) \frac{\Gamma(\alpha + q)}{\alpha^q \Gamma(\alpha)} \right. \\ \left. \times \prod_{l=1}^q \alpha_l \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_{k_l}) \right\}^{-\frac{\alpha_l}{\alpha} - 1} \left(\sum_{l=1}^q \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_{k_l}) \right\}^{-\frac{\alpha_l}{\alpha}} - (q-1) \right)^{-(\alpha+q)} \right) \quad (4.23)$$

A função escore aproximada é obtida diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y})$ em relação a cada um dos parâmetros e é dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}^\top(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{U}_{\boldsymbol{\eta}_g}^\top(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}_g}^\top(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta}) \right)^\top$$

No Apêndice B.5.3 são apresentadas as expressões para os componentes do vetor $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$. O estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\eta}_g^\top, \boldsymbol{\alpha}_g^\top, \eta_e, \alpha_e)^\top$ é obtido como solução ao sistema de equações $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$. Sob as condições usuais de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, é assintoticamente normal com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariâncias $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, isto é,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow N(\mathbf{0}, \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})) \quad (4.24)$$

em que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada, obtida como $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = -\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top$.

4.4 Simulação

Com o intuito de estudar as propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\eta}_e$, $\hat{\alpha}_e$, $\hat{\eta}_b$ e $\hat{\alpha}_g$, de $\boldsymbol{\beta}$, η_e , α_e , η_g e α_g , respectivamente; realizamos um estudo de simulação de Monte Carlo, em que foi considerado o modelo linear com interceptos aleatórios

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + \gamma_i + \epsilon_{ij}, \quad (4.25)$$

com $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g)$ e $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e)$, para $j = 1, \dots, 5$ e $i = 1, \dots, n$. Os verdadeiros valores dos parâmetros foram tomados como $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 1.5$, $\eta_e = \eta_g = 0.50$, $\alpha_e = 0.50, 1.5$ e $\alpha_g = 0.50, 1.50, 3.0$. Nós tomamos esses valores de α para acomodar assimetria à esquerda (valores de α_e e α_g menores que 1) e à direita (valores de α_e e α_g maiores que 1). A covariável x_i foi gerada de acordo a uma distribuição $U(0.1, 20)$. Foram simulados 1000 conjuntos de dados de Monte Carlo de tamanhos $n = 50, 100, 200, 400$ e 700 do modelo (4.25).

Para estudar as propriedades assintóticas dos estimadores, consideramos o viés relativo (VR) em valor absoluto, e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) os quais são dados por

$$\text{VR}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \left(\frac{\hat{\theta}_i^{(k)}}{\theta_i} - 1 \right), \quad \text{REQM}(\hat{\theta}_i) = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \left(\hat{\theta}_i^{(k)} - \theta_i \right)^2},$$

respectivamente, em que $\hat{\theta}_i^{(k)}$ é o estimador de θ_i para a k -ésima amostra, para $\theta_i \in \boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \eta_e, \eta_g, \alpha_e, \alpha_g)^\top$. Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros foram computados usando a função *optim* do pacote estatístico [R Development Core Team \(2017\)](#), maximizando a função de logverossimilhança em (4.7). Em todas as simulações foram usados 15 pontos na quadratura de Gauss-Hermite para aproximar as integrais envolvidas na função de log-verossimilhança.

Da Tabela A.2 no Apêndice A pode-se observar que os estimadores dos parâmetros são estáveis. Também o VR e a REQM dos estimadores tendem se aproximar de zero quando o valor de n aumenta indicando que os estimadores baseados no método de máxima verossimilhança fornecem boas propriedades assintóticas. Esse padrão é o mesmo para os diferentes valores de α_e e α_g sob consideração. Concluimos que os estimadores de máxima verossimilhança funcionam bastante bem quando o tamanho das amostras é maior ou igual a 200.

4.5 Aplicação

Nesta seção aplicamos o modelo proposto a um conjunto de dados longitudinais coletados como parte do estudo de colesterol em Framingham (*Framingham cholesterol study*). O conjunto de dados consiste de 200 indivíduos aleatoriamente selecionados e inclui os níveis de colesterol em diferentes instantes de tempo, sexo e a idade no início do estudo (*baseline*). O conjunto de dados é reportado em [Zhang e Davidiam \(2001\)](#) em que foi mostrado mediante um estudo informal que o comportamento assimétrico é parcialmente explicado pelas covariáveis apresentadas e que os efeitos aleatórios podem não ser normalmente distribuídos.

A Tabela 4.1 apresenta os coeficientes de assimetria e curtose para os níveis do colesterol. Note-se que os valores dos coeficientes justificam o uso de um modelo assimétrico (modelo normal-potência, por exemplo). Além disso, o histograma dos níveis de colesterol dado na Figura 4.1 mostra claramente a presença de assimetria e parece adequado considerar um modelo potência-normal para analisar o conjunto de dados. Figura 4.1 também retrata as trajetórias de cinco indivíduos selecionados aleatoriamente. Este conjunto de dados também foi analisado anteriormente por [Arellano-Valle et al. \(2005\)](#) usando um modelo linear misto com efeitos aleatórios distribuídos normal-assimétrico.

O seguinte modelo linear misto foi adotado:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \text{sexo}_i + \beta_2 \text{idade}_i + \beta_3 t_{ij} + \gamma_i + \epsilon_{ij}, \quad (4.26)$$

em que Y_{ij} é o nível de colesterol (mg/dL) avaliado no j -ésimo tempo ($j = 1, \dots, m_i$) para o sujeito i ($i = 1, \dots, 200$), sexo_i é o indicador do sexo do sujeito ($0 = \text{feminino}$, $1 = \text{masculino}$);

Tabela 4.1: Resumo estatístico para os dados de colesterol.

n	Média	Erro padrão	Assimetria	Curtose
200	2.342	0.4595	0.6865	3.4423

Figura 4.1: Dados de colesterol: (a) Histograma do nível de colesterol para 200 sujeitos do estudo de Framingham. (b) Trajetórias para cinco sujeitos aleatoriamente selecionados.

$idade_i$ é a idade no início do estudo (em anos); e t_{ij} é $(tempo - 5)/10$, com tempo medido em anos.

Baseados nas considerações acima, os seguintes quatro modelos estatísticos, os quais diferem na distribuição dos erros e os efeitos aleatórios, foram analisados

- Um modelo com distribuição normal-potência para os erros e os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} \text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e)$ e $\gamma_i \stackrel{iid}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g)$; e que chamaremos (*modelo PN-PN*),
- Um modelo com distribuição normal para os erros e distribuição normal-potência para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} \text{N}(0, \eta_e^2)$ e $\gamma_i \stackrel{iid}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g)$; e que chamaremos (*modelo N-PN*),
- Um modelo com distribuição normal para os erros e distribuição normal-assimétrico para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} \text{N}(0, \eta_e^2)$ e $\gamma_i \stackrel{iid}{\sim} \text{SN}(0, \eta_g, \lambda_g)$; e que chamaremos (*modelo N-SN*),
- Um modelo com distribuição normal para os erros e os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} \text{N}(0, \eta_e^2)$ e $\gamma_i \stackrel{iid}{\sim} \text{N}(0, \eta_g^2)$; e que chamaremos (*modelo N-N*).

De nossa análise, resultou que a covariável sexo não foi significativa para os modelos considerados e portanto, não foi incluída. As estimativas dos parâmetros (apenas para as variáveis importantes), as quais foram obtidos usando a função *optim* no R ([R Development Core Team, 2017](#)), são mostradas na Tabela 4.2. As estimativas dos parâmetros μ_g e μ_e e seus respectivos

Tabela 4.2: Estimativas de MV dos parâmetros e erros padrões (EP) obtidos no ajuste dos modelos PNPN, NPN, NSN, e N para os dados de colesterol.

θ	Modelo PN-PN		Modelo N-PN		Modelo N-SN		Modelo N-N	
	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP
β_0	120.348	15.454	138.777	9.898	128.179	10.089	167.637	14.793
β_2	1.023	0.239	1.083	0.237	1.352	0.246	1.570	0.323
β_3	28.569	2.013	28.258	2.025	27.951	2.056	28.244	2.021
η_g	50.348	1.942	51.114	1.922	55.875	2.329	37.189	2.027
η_e	28.698	3.738	22.074	0.524	22.402	0.531	22.048	0.536
α_g	3.677	0.332	3.699	0.325	—	—	—	—
α_e	2.655	1.377	—	—	—	—	—	—
λ_g	—	—	—	—	3.459	0.698	—	—
μ_g	49.125	0.051	50.157	0.052	—	—	—	—
μ_e	21.961	0.031	—	—	—	—	—	—

Tabela 4.3: Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de colesterol.

Critério	Modelo PN-PN	Modelo N-PN	Modelo N-SN	Modelo N-N
$\ell(\theta)$	-4973.9	-4976.2	-4979.7	-4982.0
mAIC	9961.9	9964.5	9971.5	9974.1
BIC_h	9993.2	9990.8	9997.8	9997.1
CAIC	9996.5	9994.1	10001.1	9998.8
HQIC	9961.4	9964.0	9971.0	9973.7

erros padrão aproximados também mostrados na Tabela 4.2 foram obtidas usando integração numérica de Monte Carlo utilizando as estimativas de máxima verossimilhança de $\hat{\alpha}_g$, $\hat{\alpha}_e$, $\hat{\eta}_g$ e $\hat{\eta}_e$.

Para comparar o ajuste dos modelos, avaliamos uma série de ajustes por inspeção de critérios de informação apresentados na Seção 4.2.4 e que são mostrados na Tabela 4.3. De acordo com os critérios BIC_h e CAIC, o modelo NPN parece proporcionar um melhor ajuste aos dados de colesterol do que os outros modelos considerados, apoiando a afirmação de afastamento da normalidade do efeito aleatório. Também podemos ver a partir da Tabela 4.3 que de acordo com os critérios mAIC e HQIC, o modelo PN-PN é melhor do que o modelo N-PN, e todos os critérios indicam que o modelo PN-PN parece proporcionar um ajuste melhor do que o modelo N-SN e o modelo normal. Isso também pode ser observado comparando o gráfico de probabilidade meio-normal com envelope simulado para o resíduo Pearson (resíduo marginal padronizado) na Figura 4.2.

A suposição de distribuição normal-potência para os erros e os interceptos aleatórios é testada com a hipótese

$$H_{01} : (\alpha_g, \alpha_e) = (1, 1) \quad \text{versus} \quad H_{11} : (\alpha_g, \alpha_e) \neq (1, 1),$$

usando a estatística de razão de verossimilhança (RV)

$$\Lambda_1 = \frac{L_{N-N}(\hat{\theta})}{L_{PN-PN}(\hat{\theta})},$$

a qual sob os dados em consideração, leva a $-2 \log(\Lambda_1) = -2(\ell_{N-N}(\hat{\theta}) - \ell_{PN-PN}(\hat{\theta})) = 16.10$, com $p - \text{value} < 0.05$, com forte indicação contra a hipótese nula.

Figura 4.2: Gráfico de probabilidade meio-normal com envelope simulado para o modelo PN-PN (a), modelo N-PN (b), modelo N-SN (c), e modelo N-N (d).

Similarmente, a suposição de distribuição normal-potência para os efeitos aleatórios, e normalidade dos erros é testada usando a hipótese

$$H_{02} : \alpha_g = 1 \quad \text{versus} \quad H_{12} : \alpha_g \neq 1,$$

usando a estatística de RV

$$\Lambda_2 = \frac{L_{N-PN}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{L_{PN-PN}(\hat{\boldsymbol{\theta}})},$$

que para os dados sob estudo leva a $-2\log(\Lambda_2) = -2(\ell_{N-PN}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell_{PN-PN}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 5.04$, com $p\text{-value} = 0.0248$, com forte indicação em contra a hipótese nula. Portanto, o modelo N-PN

ajusta os dados de colesterol melhor do que o modelo linear com erros e interceptos aleatórios normalmente distribuídos, e o modelo PN-PN ajusta melhor os dados do que o modelo N-PN.

4.6 Conclusões

Neste capítulo, abordamos o problema de modelar a relação entre uma variável resposta com coeficiente de assimetria e curtose maior ou menor do que pode ser modelado pela distribuição normal; e um conjunto de variáveis explicativas. Propomos a distribuição normal-potência para dar flexibilidade ao termo do erro e ao efeito aleatório em um modelo linear misto.

A vantagem de considerar essa distribuição é que pode oferecer flexibilidade na captura de uma ampla gama de comportamentos não normais, incluindo formas assimétricas à esquerda e à direita, tendo a normalidade como caso especial. Derivamos os dois primeiros momentos da variável resposta, e propomos um método de estimação dos parâmetros do modelo, bem como uma metodologia para obter as predições dos interceptos aleatórios. A predição dos efeitos aleatórios foi realizada considerando a metodologia do melhor preditor de Bayes empírico. Derivamos também a função escore aproximada e os elementos aproximados da matriz de informação observada.

A análise residual também foi apresentada e as estimativas de parâmetros são obtidas usando a abordagem de máxima verossimilhança com métodos de integração numérica (quadratura de Gauss-Hermite) que também são usados para estudar propriedades assintóticas dos estimadores. Um estudo de simulação em pequena escala indica boa recuperação de parâmetros com o método de estimação desenvolvido. Além disso, apresentamos um exemplo de motivação para ilustrar a nossa proposta e concluímos que o modelo linear misto normal-potência pode ser uma alternativa útil a outros métodos existentes na literatura como o modelo linear misto normal-assimétrico (*Skew-normal linear mixed model*, SNLMM) por [Arellano-Valle *et al.* \(2005\)](#). Então, acreditamos que o modelo proposto neste capítulo amplia a opção na classe de modelos lineares mistos, para ajustar dados particularmente assimétricos com indicação de distribuição não normal para o efeito aleatório.

Capítulo 5

Modelos de Regressão Lineares Mistos Assimétricos para Dados Duplamente Censurados

5.1 Introdução

Uma variável aleatória é dita ser duplamente censurada, quando as medições acima do limite de detecção máximo e abaixo do limite de detecção mínimo, são tomadas como esses valores. Os limites de detecção mínimo e máximo são especificados pelo pesquisador e geralmente dependem do dispositivo de medição utilizado para produzir as medições. Por exemplo, nos dados sobre vacina analisados em [Moulton e Hasley \(1995\)](#) (dados censurados à esquerda), o limite de detecção mínimo foi tomado como 0,1 U.N. (unidades internacionais). Um cenário com resposta duplamente censurada é considerado em [Galvis *et al.* \(2014\)](#), em que o conjunto de dados é relacionado a um estudo clínico, em que a resposta de interesse é a proporção de locais doentes de um tipo específico de dente. Neste conjunto de dados, temos a situação de aumento de zeros e uns.

O modelo tobit usual ([Tobin, 1958](#)), algumas vezes usado em situações como as expostas acima, pode não ser adequado para modelar dados censurados em que os valores observados para a parte contínua, apresentam assimetria e curtose maior ou menor do que é esperado para o modelo normal; em tais situações, o modelo normal-potência pode ser uma alternativa viável.

[Martínez-Flórez *et al.* \(2015\)](#) introduzem o modelo normal-potência duplamente censurado como segue: suponhamos que $Y^* \sim \text{PN}(\xi, \eta, \alpha)$ e considere $(y_1^*, \dots, y_n^*)$, uma amostra aleatória de tamanho n de Y^* , e que parte dos y^* estão entre as constantes c_0 e c_2 , com $c_0 < c_2$. Para $y^* < c_0$, somente c_0 é observado e para $y^* > c_2$ somente c_2 é observado.

5.2 Modelo de Regressão Duplamente Censurado com Efeitos Aleatórios

Consideremos o modelo de regressão linear dado por

$$Y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \epsilon_{ij}, \quad (5.1)$$

em que Y_{ij} é o valor da j -ésima variável resposta para a i -ésima unidade amostral (sujeito), para $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m_i$; $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij1}, \dots, x_{ijp})^\top$ é um vetor conhecido de dimensão $p \times 1$ de variáveis explicativas associadas aos efeitos fixos para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$;

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ é um vetor de parâmetros desconhecido de dimensão $p \times 1$; os γ_i 's são variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas $f_\gamma(\gamma_i; \theta_\gamma)$, associadas à i -ésima unidade amostral; e os ϵ_{ij} 's são também variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas $f_\epsilon(\epsilon_{ij}; \theta_\epsilon)$, (independentes de γ_i).

Vamos supor que para uma amostra aleatória de vetores $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ de tamanho n em que para $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{im_i})^\top$, parte dos Y_{ij} estão entre as constantes c_{0ij} e c_{2ij} com $c_{0ij} < c_{2ij}$. Temos que para valores $Y_{ij} \leq c_{0ij}$ somente o valor c_{0ij} é relatado, enquanto que para valores $Y_{ij} \geq c_{2ij}$ somente o valor c_{2ij} é relatado. Portanto os valores observados Y_{ij}^o , podem ser escritos como

$$Y_{ij}^o = \begin{cases} c_{0ij}, & \text{se } Y_{ij} \leq c_{0ij}, \\ Y_{ij}, & \text{se } c_{0ij} < Y_{ij} < c_{2ij}, \\ c_{2ij}, & \text{se } Y_{ij} \geq c_{2ij}. \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m_i$. A amostra resultante é dita ser uma amostra duplamente censurada. Para as observações $Y_{ij}^o = c_{0ij}$, temos que

$$P(Y_{ij}^o = c_{0ij}) = P(Y_{ij} \leq c_{0ij}) = p_{0ij}$$

enquanto que para $Y_{ij}^o = c_{2ij}$, temos que

$$P(Y_{ij}^o = c_{2ij}) = P(Y_{ij} \geq c_{2ij}) = p_{2ij}$$

Finalmente, para respostas contínuas, isto é, $c_{0ij} < Y_{ij} < c_{2ij}$ vamos definir $P(c_{0ij} < Y_{ij} < c_{2ij}) = p_{1ij}$. Note-se que as probabilidades p_{0ij} , p_{1ij} e p_{2ij} dependem das distribuições assumidas para as variáveis aleatórias γ_i e ϵ_{ij} , e a ij -ésima resposta observada pode ser escrita como

$$Y_{ij}^o = D_{0ij}c_{0ij} + D_{2ij}c_{2ij} + (1 - D_{0ij} - D_{2ij})Y_{ij}, \quad (5.2)$$

em que $D_{0ij} = I(Y_{ij} \leq c_{0ij})$, $D_{2ij} = I(Y_{ij} \geq c_{2ij})$ e $Y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \beta + \gamma_i + \epsilon_{ij}$ com $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} f_\gamma(\gamma_i; \theta_\gamma)$ e $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} f_\epsilon(\epsilon_{ij}; \theta_\epsilon)$, $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m_i$.

Dada a função densidade de probabilidade (fdp) $f_\epsilon(\epsilon_{ij}; \theta_\epsilon)$, denotamos por $f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \beta, \theta_\epsilon)$ a fdp de $Y_{ij} | \gamma_i$ e considerando $f_\gamma(\gamma_i; \theta_\gamma)$, se segue que a fdp marginal do vetor aleatório observado $\mathbf{Y}_i^o = (Y_{i1}^o, \dots, Y_{im_i}^o)^\top$ é dado por

$$f(\mathbf{y}_i^o; \theta) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} [P(Y_{ij}^o = c_{0ij})]^{d_{0ij}} [P(Y_{ij}^o = c_{2ij})]^{d_{2ij}} \times [f_Y(y_{ij} | \gamma_i; \beta, \theta_\epsilon)]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \right\} f_\gamma(\gamma_i; \theta_\gamma) d\gamma_i, \quad (5.3)$$

em que

$$d_{0ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } Y_{ij}^o = c_{0ij}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad d_{2ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } Y_{ij}^o = c_{2ij}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A fdp marginal em (5.3) é composta pela contribuição de três partes, duas correspondentes aos valores que a variável aleatória Y_{ij} é censurada, e uma parte em que a variável aleatória Y_{ij} pode ser observada.

O modelo descrito acima, nós chamaremos de modelo de regressão duplamente censurados com efeitos aleatórios e será denotado por DCRM-RE (*Doubly Censored Regression Model with Random Effects*)

5.2.1 Momentos

Os momentos no modelo DCRM-RE, podem ser calculados seguindo o mesmo procedimento que nos modelos lineares mistos normal-potência no Capítulo 3. Usando a abordagem marginal para modelos mistos descrita na Seção 2.2.1 junto com a equação (5.2) é possível calcular a média e a variância de Y_{ij}^o ; e a covariância e correlação entre as observações Y_{ij}^o e $Y_{ij'}^o$.

Média

Definindo $\epsilon_{0ij} = c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i$ e $\epsilon_{2ij} = c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i$, se segue que a média da observação Y_{ij}^o é dada por

$$\begin{aligned} E[Y_{ij}^o] &= c_{0ij}P(Y_{ij} \leq c_{0ij}) + c_{2ij}P(Y_{ij} \geq c_{2ij}) \\ &\quad + E[Y_{ij} \mid c_{0ij} < Y_{ij} < c_{2ij}]P(c_{0ij} < Y_{ij} < c_{2ij}) \\ &= c_{0ij}p_{0ij} + c_{2ij}p_{2ij} + \left(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + E[\gamma_i] + E[\epsilon_{ij} \mid \epsilon_{0ij} < \epsilon_{ij} < \epsilon_{2ij}] \right) p_{1ij}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Variância

A variância da observação Y_{ij}^o pode ser calculada como

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_{ij}^o] &= c_{0ij}^2P(Y_{ij} \leq c_{0ij}) + c_{2ij}^2P(Y_{ij} \geq c_{2ij}) \\ &\quad + E[Y_{ij}^2 \mid c_{0ij} < Y_{ij} < c_{2ij}]P(c_{0ij} < Y_{ij} < c_{2ij}) - (E[Y_{ij}^o])^2 \\ &= c_{0ij}^2p_{0ij}(1 - p_{0ij}) + c_{2ij}^2p_{2ij}(1 - p_{2ij}) - 2c_{0ij}c_{2ij}p_{0ij}p_{2ij} \\ &\quad + \left\{ \text{Var}[\gamma_i] + \text{Var}[\epsilon_{ij} \mid \epsilon_{0ij} < \epsilon_{ij} < \epsilon_{2ij}] \right. \\ &\quad + (1 - p_{1ij}) \left(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + E[\gamma_i] + E[\epsilon_{ij} \mid \epsilon_{0ij} < \epsilon_{ij} < \epsilon_{2ij}] \right)^2 \\ &\quad \left. - 2(c_{0ij}p_{0ij} + c_{2ij}p_{2ij}) \left(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + E[\gamma_i] + E[\epsilon_{ij} \mid \epsilon_{0ij} < \epsilon_{ij} < \epsilon_{2ij}] \right) \right\} p_{1ij}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Covariância e Correlação

Assumindo independência condicional dos Y_{ij}^o , temos que a covariância entre Y_{ij}^o e $Y_{ij'}^o$, duas observações nos momentos j e j' ($j \neq j'$) do i -ésimo indivíduo, é dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] &= E[Y_{ij}^o Y_{ij'}^o] - E[Y_{ij}^o]E[Y_{ij'}^o] \\ &= E[Y_{ij}Y_{ij'} \mid c_{0ij} < Y_{ij} < c_{2ij}; c_{0ij'} < Y_{ij'} < c_{2ij'}]p_{1ij}p_{1ij'} \\ &\quad - E[Y_{ij} \mid c_{0ij} < Y_{ij} < c_{2ij}]E[Y_{ij'} \mid c_{0ij'} < Y_{ij'} < c_{2ij'}]p_{1ij}p_{1ij'} \\ &= p_{1ij}p_{1ij'}\text{Var}[\gamma_i]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Segue de (5.5) e (5.6) que a correlação entre Y_{ij} e $Y_{ij'}$, duas observações nos momentos j e j' ($j \neq j'$) do i -ésimo indivíduo, é dada por

$$\text{Corr}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] = \frac{p_{1ij}p_{1ij'}\text{Var}[\gamma_i]}{\sqrt{\text{Var}[Y_{ij}^o]}\sqrt{\text{Var}[Y_{ij'}^o]}} \quad (5.7)$$

5.2.2 Estimação

Para a inferência estatística no modelo DCRM-RE propomos usar o método da máxima verossimilhança. O vetor de parâmetros de interesse é $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_\gamma^\top, \boldsymbol{\theta}_\epsilon^\top)^\top$, em que $\boldsymbol{\theta}_\gamma$ de dimensão p_1 , e $\boldsymbol{\theta}_\epsilon$ de dimensão p_2 são os correspondentes vetores de parâmetros associados às distribuições f_γ e f_ϵ , respectivamente. Assim, o espaço paramétrico é dado por

$$\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^q \mid \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \boldsymbol{\theta}_\gamma \in \mathbb{R}^{p_1}, \boldsymbol{\theta}_\epsilon \in \mathbb{R}^{p_2})^\top$$

com $q = p + p_1 + p_2$. A função de verossimilhança baseada na amostra observada $\mathbf{Y}^o = (\mathbf{Y}_1^o, \dots, \mathbf{Y}_n^o)^\top$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) = & \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} [\mathbb{P}(Y_{ij}^o = c_{0ij})]^{d_{0ij}} [\mathbb{P}(Y_{ij}^o = c_{2ij})]^{d_{2ij}} \right. \\ & \left. \times [f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_\epsilon)]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \right\} f_\gamma(\gamma_i; \boldsymbol{\theta}_\gamma) d\gamma_i, \end{aligned} \quad (5.8)$$

Assim como no modelo linear misto normal-potência desenvolvido no Capítulo 3, a densidade marginal (5.3) e a função de verossimilhança (5.8) não têm expressões analíticas fechadas e a avaliação das integrais é feita usando o método de integração numérica de Gauss-Hermite unidimensional descrito na Seção 2.5.1.

5.3 Modelo Normal-Potência Duplamente Censurado com Efeitos Aleatórios

Estudamos nesta seção o caso particular em que as variáveis aleatórias γ_i e ϵ_{ij} no modelo (5.1) seguem uma distribuição normal-potência, isto é, $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g)$ e $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e)$, e portanto segue que $\boldsymbol{\theta}_\gamma = (\eta_g, \alpha_g)^\top$ e $\boldsymbol{\theta}_\epsilon = (\eta_e, \alpha_e)^\top$. Sob essa suposição, temos o modelo chamado de normal-potência duplamente censurado com efeitos aleatórios, e que nós denotaremos por modelo PNDC-RE (*Power-Normal Doubly Censored with Random Effects*).

As fdp's de $Y_{ij} \mid \gamma_i$ e γ_i são dadas por

$$f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_\epsilon) = \frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi\left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e}\right) \right\}^{\alpha_e - 1}, \quad \text{e} \quad (5.9)$$

$$f_\gamma(\gamma_i; \boldsymbol{\theta}_\gamma) = \frac{\alpha_g}{\eta_g} \phi\left(\frac{\gamma_i}{\eta_g}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{\gamma_i}{\eta_g}\right) \right\}^{\alpha_g - 1} \quad (5.10)$$

respectivamente.

5.3.1 Momentos no Modelo PNDC-RE

No modelo PNDC-RE a média e a variância da observação Y_{ij}^o e a covariância e a correlação entre as observações Y_{ij}^o e $Y_{ij'}^o$ são calculadas usando a Proposição 2. As probabilidades p_{0ij} , p_{1ij} e p_{2ij} definidas acima são dadas por

$$p_{0ij} = \left\{ \Phi(z_{0ij}^*) \right\}^{\alpha_e}, \quad (5.11)$$

$$p_{1ij} = \left\{ \Phi(z_{2ij}^*) \right\}^{\alpha_e} - \left\{ \Phi(z_{0ij}^*) \right\}^{\alpha_e}, \quad (5.12)$$

$$p_{2ij} = 1 - \left\{ \Phi(z_{2ij}^*) \right\}^{\alpha_e}, \quad (5.13)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada (fda) da distribuição normal padrão, $z_{0ij}^* = (c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i)/\eta_e$ e $z_{2ij}^* = (c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i)/\eta_e$. Então, de (5.4) e (5.5) temos que a média e a variância são dados por

$$E[Y_{ij}^o] = c_{0ij}p_{0ij} + c_{2ij}p_{2ij} + \eta_e \left(\frac{\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_\gamma}{\eta_e} + m_{ij}^{(1)} \right) p_{1ij} \quad (5.14)$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_{ij}^o] &= c_{0ij}^2 p_{0ij}(1 - p_{0ij}) + c_{2ij}^2 p_{2ij}(1 - p_{2ij}) - 2c_{0ij}c_{2ij}p_{0ij}p_{2ij} \\ &\quad + \eta_e^2 \left\{ \frac{\sigma_\gamma^2}{\eta_e^2} + (m_{ij}^{(2)} - [m_{ij}^{(1)}]^2) + (1 - p_{1ij}) \left(\frac{\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_\gamma}{\eta_e} + m_{ij}^{(1)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\eta_e} (c_{0ij}p_{0ij} + c_{2ij}p_{2ij}) \left(\frac{\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_\gamma}{\eta_e} + m_{ij}^{(1)} \right) \right\} p_{1ij}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

respectivamente; em que $\mu_\gamma = \eta_g m_1$, e $\sigma_\gamma^2 = \eta_g^2(m_2 - m_1^2)$ com

$$m_s = \int_0^1 \alpha_g [\Phi^{-1}(v)]^r v^{\alpha_g-1} dv, \quad s = 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

e

$$m_{ij}^{(r)} = \left(\{\Phi(z_{2ij}^*)\}^{\alpha_e} - \{\Phi(z_{0ij}^*)\}^{\alpha_e} \right)^{-1} \int_{\Phi(z_{0ij}^*)}^{\Phi(z_{2ij}^*)} \alpha_e [\Phi^{-1}(u)]^r u^{\alpha_e-1} du, \quad r = 1, 2, \dots$$

A covariância e a correlação entre duas observações Y_{ij}^o e $Y_{ij'}^o$, nos momentos j e j' ($j \neq j'$) do i -ésimo indivíduo, são obtidas de (5.6) e (5.7) e ficam dadas por

$$\text{Cov}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] = p_{1ij}p_{1ij'}\sigma_\gamma^2, \quad (5.17)$$

e

$$\text{Corr}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] = \frac{p_{1ij}p_{1ij'}\sigma_\gamma^2}{\sqrt{\text{Var}[Y_{ij}^o]}\sqrt{\text{Var}[Y_{ij'}^o]}}, \quad (5.18)$$

respectivamente.

5.3.2 Estimação no Modelo PNDC-RE

Substituindo as expressões para as fdp's $f_Y(y_{ij} \mid \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_e)$ e $f_\gamma(\gamma_i; \boldsymbol{\theta}_\gamma)$ dadas em (5.9) e (5.10) respectivamente, juntamente com as probabilidades p_{0ij} e p_{2ij} dadas em (5.11) e (5.13), a fdp marginal do vetor aleatório observado $\mathbf{Y}_i^o = (Y_{i1}^o, \dots, Y_{im_i}^o)^\top$ é da forma

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_i^o; \boldsymbol{\theta}) &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi \left(\frac{c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{0ij}\alpha_e} \left[1 - \left\{ \Phi \left(\frac{c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e} \right]^{d_{2ij}} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \left\{ \Phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e-1} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \Big\} \\ &\quad \times \frac{\alpha_g}{\eta_g} \phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \left\{ \Phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \right\}^{\alpha_g-1} d\gamma_i, \end{aligned} \quad (5.19)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\theta}_\epsilon^\top, \boldsymbol{\theta}_\gamma^\top)^\top$ é o vetor de parâmetros de interesse, com $\boldsymbol{\theta}_\epsilon = (\eta_e, \alpha_e)^\top$ e $\boldsymbol{\theta}_\gamma = (\eta_g, \alpha_g)^\top$. Procedendo como no modelo linear com interceptos aleatórios normal-potência, fazemos a mudança de variável $u_i = \gamma_i/\sqrt{2}\eta_g$ em (5.19), e obtemos a integral,

$$\begin{aligned} I_i = \int_{\mathbb{R}} & \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi \left(\frac{c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{0ij}\alpha_e} \left[1 - \left\{ \Phi \left(\frac{c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e} \right]^{d_{2ij}} \right. \\ & \times \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \left\{ \Phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e - 1} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \Big\} \\ & \times \frac{\alpha_g}{\sqrt{\pi}} \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_i) \right\}^{\alpha_g - 1} \exp(-u_i^2) du_i, \end{aligned} \quad (5.20)$$

a qual tem a forma (2.23). Assim, usando a quadratura de Gauss-Hermite unidimensional temos que I_i pode ser aproximada como

$$\begin{aligned} I_i \approx \sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} & \left[\Phi(z_{0ij}) \right]^{d_{0ij}\alpha_e} \left[1 - \left\{ \Phi(z_{2ij}) \right\}^{\alpha_e} \right]^{d_{2ij}} \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi(z_{ij}) \left\{ \Phi(z_{ij}) \right\}^{\alpha_e - 1} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\ & \times \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_k) \right\}^{\alpha_g - 1} \frac{\alpha_g \omega_k}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

em que $z_{0ij} = (c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k)/\eta_e$, $z_{2ij} = (c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k)/\eta_e$ e $z_{ij} = (y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k)/\eta_e$, com u_k e ω_k sendo os pontos e os pesos da quadratura respectivamente.

A função de verossimilhança aproximada para o vetor $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\theta}_\epsilon^\top, \boldsymbol{\theta}_\gamma^\top)^\top$, baseada na amostra observada $\mathbf{Y}^o$, é obtida de (5.8) e toma a forma

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) \approx \prod_{i=1}^n & \left(\sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi(z_{0ij}) \right]^{d_{0ij}\alpha_e} \left[1 - \left\{ \Phi(z_{2ij}) \right\}^{\alpha_e} \right]^{d_{2ij}} \right. \\ & \times \left. \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi(z_{ij}) \left\{ \Phi(z_{ij}) \right\}^{\alpha_e - 1} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_k) \right\}^{\alpha_g - 1} \frac{\alpha_g \omega_k}{\sqrt{\pi}} \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

e o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o)$ fica dado por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) \approx \sum_{i=1}^n & \log \left(\sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi(z_{0ij}) \right]^{d_{0ij}\alpha_e} \left[1 - \left\{ \Phi(z_{2ij}) \right\}^{\alpha_e} \right]^{d_{2ij}} \right. \\ & \times \left. \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi(z_{ij}) \left\{ \Phi(z_{ij}) \right\}^{\alpha_e - 1} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left\{ \Phi(\sqrt{2}u_k) \right\}^{\alpha_g - 1} \frac{\alpha_g \omega_k}{\sqrt{\pi}} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

A função escore aproximada, obtida diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y})$ em (5.23), em relação a cada um dos parâmetros é dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \left(U_{\boldsymbol{\beta}}^\top(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_g}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_g}(\boldsymbol{\theta}) \right)^\top \quad (5.24)$$

No Apêndice B.6.1 são apresentadas as expressões para os componentes do vetor $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$. O estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \eta_e, \alpha_e, \eta_g, \alpha_g)^\top$ é obtido como solução ao sistema de equações $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$. Note-se que os estimadores dos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ não têm uma expressão fechada e precisam ser obtidos numericamente maximizando (5.23).

Sob as condições usuais de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é assintoticamente normal com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariâncias $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, isto é,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow N(\mathbf{0}, \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})) \quad (5.25)$$

em que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada, obtida como $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = -\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top$. Os elementos da matriz $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ são apresentados no Apêndice B.6.2. Para obter os desvios padrão precisa-se obter também de forma numérica as estimativas dos elementos de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$.

5.3.3 Modelo Tobit Normal-Potência com Efeitos Aleatórios

Martínez-Flórez *et al.* (2013b) estudaram uma extensão do modelo Tobit (Tobin, 1958) considerando que os erros seguem a distribuição normal-potência. Nesta seção estendemos o modelo proposto por Martínez-Flórez *et al.* (2013b) com a incorporação de um efeito aleatório γ_i para o sujeito i , o qual segue uma distribuição normal-potência. o modelo resultante nós chamaremos de modelo tobit normal-potência com efeitos aleatórios, e é denotado por PNT-RE (*Power-Normal Tobit with Random Effects*).

O modelo PNT-RE é definido considerando a variável aleatória observada $Y_{ij}^o = D_{ij} Y_{ij}$, em que $D_{ij} = I(Y_{ij} > 0)$ e $Y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \epsilon_{ij}$, com $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g)$ e $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e)$, para $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m_i$; isto é

$$Y_{ij}^o = \begin{cases} \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \epsilon_{ij}, & \text{if } Y_{ij} > 0, \\ 0, & \text{if } Y_{ij} \leq 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

em que Y_{ij} é o valor da j -ésima variável aleatória resposta para a i -ésima unidade amostral, para $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m_i$; $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij1}, \dots, x_{ijp})^\top$ é um vetor conhecido de dimensão $p \times 1$ de variáveis explicativas associadas aos efeitos fixos, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ é um vetor de parâmetros desconhecido de dimensão $p \times 1$; γ_i são variáveis aleatórias independentes igualmente distribuídas $\text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g)$ associadas à i -ésima unidade amostral; e os ϵ_{ij} 's são também variáveis aleatórias independentes igualmente distribuídas $\text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e)$ (independentes de γ_i).

A suposição acima é equivalente a considerar que dado γ_i , as variáveis aleatórias não observadas Y_{ij}^o são independentes, $Y_{ij} | \gamma_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{PN}(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i, \eta_e, \alpha_e)$ com fdp dada por

$$f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) = \frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi\left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e}\right) \right\}^{\alpha_e - 1}$$

$i = 1, \dots, n$, em que

$$f_\gamma(\gamma_i; \eta_g, \alpha_g) = \frac{\alpha_g}{\eta_g} \phi\left(\frac{\gamma_i}{\eta_g}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{\gamma_i}{\eta_g}\right) \right\}^{\alpha_g - 1}$$

Para observações Y_{ij}^o iguais a zero, temos

$$P(Y_{ij}^o = 0) = \left\{ \Phi\left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i}{\eta_e}\right) \right\}^{\alpha_e},$$

e para observações Y_{ij}^o maiores que zero, tem-se que $Y_{ij}^o \sim \text{PN}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i, \eta_e, \alpha_e)$. Portanto a fdp

marginal do vetor aleatório observado $\mathbf{Y}_i^o = (Y_{i1}^o, \dots, Y_{im_i}^o)^\top$ é dado por

$$f(\mathbf{y}_i^o; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{\alpha_e(1-d_{ij})} \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right] \right. \\ \left. \times \left\{ \Phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e-1} \right\}^{d_{ij}} \left\{ \frac{\alpha_g}{\eta_g} \phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \left\{ \Phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \right\}^{\alpha_g-1} d\gamma_i \right\}, \quad (5.27)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \eta_e, \alpha_e, \eta_g, \alpha_g)^\top$, e

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } Y_{ij}^o > 0, \\ 0 & \text{se } Y_{ij}^o = 0. \end{cases}$$

Segue que a função de verossimilhança baseada na amostra observada $\mathbf{Y}^o = (\mathbf{Y}_1^o, \dots, \mathbf{Y}_n^o)^\top$ pode ser escrita como

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{\alpha_e(1-d_{ij})} \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right] \right\} \\ \times \left\{ \Phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e-1} \right\}^{d_{ij}} \left\{ \frac{\alpha_g}{\eta_g} \phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \left\{ \Phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \right\}^{\alpha_g-1} d\gamma_i \right\}. \quad (5.28)$$

O modelo (5.26) é equivalente à situação mais geral em que o valor da censura associado à observação ij -ésima é substituído pelo valor k_{ij} (um valor conhecido), isto é,

$$Y_{ij}^o = \begin{cases} \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \epsilon_{ij}, & \text{if } Y_{ij} > k_{ij}, \\ k_{ij}, & \text{if } Y_{ij} \leq k_{ij}. \end{cases} \quad (5.29)$$

para $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$. Note-se que, fazendo $Y_{ij}^{o*} = Y_{ij}^o - k_{ij}$, $\mathbf{x}_{ij}^* = (\mathbf{x}_{ij}^\top, k_{ij})^\top$ e $\boldsymbol{\beta}^* = (\boldsymbol{\beta}^\top, -1)^\top$, tem-se o modelo previo em (5.26). Assim, os resultados da inferência baseados no método da máxima verossimilhança podem ser usados para ajustar o modelo mais geral em (5.29).

Momentos no Modelo PNT-RE

Note-se que $Y_{ij}^o = D_{ij}Y_{ij}$, em que $Y_{ij} = \mu_{ij} + \gamma_i + \epsilon_{ij}$, com $\mu_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}$, $\gamma_i = \eta_g W_i$ com $W_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, 1, \alpha_g)$; e $\epsilon_{ij} = \eta_e Z_{ij}$ com $Z_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, 1, \alpha_e)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$.

Segue que a média e a variância da observação Y_{ij}^o são dados por

$$\begin{aligned} E[Y_{ij}^o] &= E[Y_{ij} \mid Y_{ij} > 0] P(Y_{ij} > 0) \\ &= \left(\mu_{ij} + \eta_g E[W_i] + \eta_e E[Z_{ij} \mid Z_{ij} + c_{ij} > 0] \right) \left(1 - \{\Phi(-c_{ij})\}^{\alpha_e} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Y_{ij}^o] &= \text{E}[Y_{ij}^2 \mid Y_{ij} > 0] \text{P}(Y_{ij} > 0) - (\text{E}[Y_{ij}^o])^2 \\
&= \eta_e^2 \left\{ \frac{\eta_g^2 \text{Var}[W_i]}{\eta_e^2} + \text{E}[Z_{ij}^2 \mid Z_{ij} + c_{ij} > 0] - \left(\text{E}[Z_{ij} \mid Z_{ij} + c_{ij} > 0] \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \{\Phi(-c_{ij})\}^{\alpha_e} \left(\frac{\mu_{ij} + \eta_g \text{E}[W_i]}{\eta_e} + \eta_e \text{E}[Z_{ij} \mid Z_{ij} + c_{ij} > 0] \right)^2 \right\} \left(1 - \{\Phi(-c_{ij})\}^{\alpha_e} \right),
\end{aligned}$$

em que $c_{ij} = (\mu_{ij} + \gamma_i)/\eta_e$, e pela Proposição 2, temos que

$$\text{E}[Y_{ij}^o] = \eta_e \left(\frac{\mu_{ij} + \mu_\gamma}{\eta_e} + m_{ij}^{(1)} \right) \left(1 - \{\Phi(-c_{ij})\}^{\alpha_e} \right) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Y_{ij}^o] &= \eta_e^2 \left\{ \frac{\sigma_\gamma^2}{\eta_e^2} + \left(m_{ij}^{(2)} - [m_{ij}^{(1)}]^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \{\Phi(-c_{ij})\}^{\alpha_e} \left(\frac{\mu_{ij} + \mu_\gamma}{\eta_e} + m_{ij}^{(1)} \right)^2 \right\} \left(1 - \{\Phi(-c_{ij})\}^{\alpha_e} \right) \quad (5.32)
\end{aligned}$$

em que $\mu_\gamma = \eta_g m_1$ e $\sigma_\gamma = \eta_g^2 (m_2 - m_1^2)$, com m_1 e m_2 dados em (5.16);

$$m_{ij}^{(r)} = \left(1 - \{\Phi(-c_{ij})\}^{\alpha_e} \right)^{-1} \int_{\Phi(-c_{ij})}^1 \alpha_e [\Phi^{-1}(u)]^r u^{\alpha_e-1} du, \quad r = 1, 2, \dots$$

A covariância e a correlação entre duas observações Y_{ij}^o e $Y_{ij'}^o$, nos momentos j e j' ($j \neq j'$) do i -ésimo sujeito ficam dadas por

$$\text{Cov}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] = \left(1 - \{\Phi(-c_{ij})\}^{\alpha_e} \right) \left(1 - \{\Phi(-c_{ij'})\}^{\alpha_e} \right) \sigma_\gamma^2, \quad (5.33)$$

e

$$\text{Corr}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] = \frac{\left(1 - \{\Phi(-c_{ij})\}^{\alpha_e} \right) \left(1 - \{\Phi(-c_{ij'})\}^{\alpha_e} \right) \sigma_\gamma^2}{\sqrt{\text{Var}[Y_{ij}^o]} \sqrt{\text{Var}[Y_{ij'}^o]}}, \quad (5.34)$$

respectivamente.

Estimação no Modelo PNT-RE

A estimação dos parâmetros no modelo PNT-RE é feita como no modelo PNDC-RE usando o método de máxima verossimilhança. O vetor de parâmetros de interesse é $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}, \eta_e, \alpha_e, \eta_g, \alpha_g)^\top$. Para a obtenção das estimativas desse vetor precisamos avaliar a integral

$$\begin{aligned}
I_i &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{\alpha_e(1-d_{ij})} \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left\{ \Phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e-1} \right]^{d_{ij}} \right\} \frac{\alpha_g}{\eta_g} \phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \left\{ \Phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \right\}^{\alpha_g-1} d\gamma_i, \quad (5.35)
\end{aligned}$$

a qual, fazendo a mudança de variável $u_i = \gamma_i / \sqrt{2}\eta_g$ fica da forma

$$I_i = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right]^{\alpha_e(1-d_{ij})} \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \Phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e-1} \right]^{d_{ij}} \right\} \left\{ \Phi \left(\sqrt{2}u_i \right) \right\}^{\alpha_g-1} \frac{\alpha_g}{\sqrt{\pi}} \exp(-u_i^2) du_i, \quad (5.36)$$

que tem a forma (2.23). Assim, usando a quadratura de Gauss-Hermite unidimensional temos que I_i em (5.36) pode ser aproximada como

$$I_i \approx \sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \sqrt{2}\eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right]^{\alpha_e(1-d_{ij})} \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right. \\ \left. \times \left\{ \Phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e-1} \right]^{d_{ij}} \left\{ \Phi \left(\sqrt{2}u_k \right) \right\}^{\alpha_g-1} \frac{\alpha_g \omega_k}{\sqrt{\pi}}. \quad (5.37)$$

Segue de (5.28) e (5.37) que o logaritmo da função de verossimilhança para o vetor $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}, \eta_e, \alpha_e, \eta_g, \alpha_g)^\top$ baseada na amostra observada $\mathbf{Y}^o = (\mathbf{Y}_1^o, \dots, \mathbf{Y}_n^o)^\top$ é da forma

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) \approx \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} \left[\Phi \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \sqrt{2}\eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right]^{\alpha_e(1-d_{ij})} \left[\frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \Phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right\}^{\alpha_e-1} \right]^{d_{ij}} \left\{ \Phi \left(\sqrt{2}u_k \right) \right\}^{\alpha_g-1} \frac{\alpha_g \omega_k}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (5.38)$$

Note-se que o modelo PNT-RE pode ser obtido também com um caso particular do modelo PNDC-RE quando fazemos $c_{0ij} = 0$ e $c_{2ij} \rightarrow +\infty$ para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$.

A função escore aproximada é obtida diferenciando o logaritmo da função deverossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y})$ em (5.38) em relação a cada um dos parâmetros e é dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}^\top(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_g}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_g}(\boldsymbol{\theta}) \right)^\top \quad (5.39)$$

As expressões para os componentes do vetor $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ podem ser obtidas a partir dos respectivos componentes da função escore do modelo PNDC-RE que foram dados no Apêndice B.6.1. O estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \eta_e, \alpha_e, \eta_g, \alpha_g)^\top$ é obtido como solução ao sistema de equações $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ e devem ser obtidos numericamente maximizando (5.38).

Sob as condições usuais de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é assintoticamente normal com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariâncias $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$, isto é,

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow N(\mathbf{0}, \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})) \quad (5.40)$$

em que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada, obtida como $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = -\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top$.

5.4 Modelo Normal-Assimétrico Duplamente Censurado com Efeitos Aleatórios

Uma alternativa ao modelo PNDC-RE resulta de considerar que as variáveis γ_i e ϵ_{ij} no modelo (5.1) seguem uma distribuição assimétrica-normal, isto é, $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_g, \lambda_g)$ e $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_e, \lambda_e)$,

e nesse caso temos $\boldsymbol{\theta}_\epsilon = (\eta_e, \lambda_e)^\top$ e $\boldsymbol{\theta}_\gamma = (\eta_g, \lambda_g)^\top$. O modelo obtido é chamado de modelo normal-assimétrico duplamente censurado com efeitos aleatórios, e é denotado por modelo SNDC-RE (*Skew-Normal Doubly Censored with Random Effects*). Se segue então que as fdp's de $Y_{ij} \mid \gamma_i$ e γ_i são dadas por

$$f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_\epsilon) = \frac{2}{\eta_e} \phi\left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e}\right) \Phi\left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e}\right), \quad \text{e} \quad (5.41)$$

$$f_\gamma(\gamma_i; \boldsymbol{\theta}_\gamma) = \frac{2}{\eta_g} \phi\left(\frac{\gamma_i}{\eta_g}\right) \Phi\left(\lambda_g \frac{\gamma_i}{\eta_g}\right) \quad (5.42)$$

respectivamente.

5.4.1 Momentos no Modelo SNDC-RE

Definindo $z_{0ij}^* = (c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i)/\eta_e$ e $z_{2ij}^* = (c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i)/\eta_e$, as probabilidades p_{0ij} , p_{1ij} e p_{2ij} ficam dadas por

$$p_{0ij} = F_{SN}(z_{0ij}^*), \quad (5.43)$$

$$p_{1ij} = F_{SN}(z_{2ij}^*) - F_{SN}(z_{0ij}^*), \quad (5.44)$$

$$p_{2ij} = 1 - F_{SN}(z_{2ij}^*), \quad (5.45)$$

em que $F_{SN}(\cdot)$ é a fda da distribuição SN padrão com parâmetro de assimetria λ_e , $SN(\lambda_e)$.

A média e a variância da observação Y_{ij}^o , bem como a covariância e a correlação entre as observações Y_{ij}^o e Y_{ij1}^o no modelo SNDC-RE são calculadas procedendo como no modelo PNDC-RE. De (5.4) e (5.5) junto com a Proposição 1 temos que a média e a variância de Y_{ij}^o são dadas por

$$E[Y_{ij}^o] = c_{0ij}p_{0ij} + c_{2ij}p_{2ij} + \eta_e \left\{ \frac{\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_\gamma}{\eta_e} + \mu_{ij}^{(1)} \right\} p_{1ij}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_{ij}^o] &= c_{0ij}^2 p_{0ij} (1 - p_{0ij}) + c_{2ij}^2 p_{2ij} (1 - p_{2ij}) - 2c_{0ij}c_{2ij}p_{0ij}p_{2ij} \\ &\quad + \eta_e^2 \left\{ \frac{\sigma_\gamma^2}{\eta_e^2} + \left(\mu_{ij}^{(2)} - [\mu_{ij}^{(1)}]^2 \right) + (1 - p_{1ij}) \left(\frac{\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_\gamma}{\eta_e} + \mu_{ij}^{(1)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\eta_e} (c_{0ij}p_{0ij} + c_{2ij}p_{2ij}) \left(\frac{\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + \mu_\gamma}{\eta_e} + \mu_{ij}^{(1)} \right) \right\} p_{1ij} \end{aligned}$$

com

$$\mu_\gamma = \eta_g \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_g}{\sqrt{1 + \lambda_g^2}} \quad \text{e} \quad \sigma_\gamma^2 = \eta_g^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_g^2}{1 + \lambda_g^2} \right), \quad (5.46)$$

$$\mu_{ij}^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_e}{\sqrt{1 + \lambda_e^2}} \frac{\Phi(\lambda_e^* z_{2ij}^*) - \Phi(\lambda_e^* z_{0ij}^*)}{F_{SN}(z_{2ij}^*) - F_{SN}(z_{0ij}^*)} - \frac{f_{SN}(z_{2ij}^*) - f_{SN}(z_{0ij}^*)}{F_{SN}(z_{2ij}^*) - F_{SN}(z_{0ij}^*)},$$

$$\mu_{ij}^{(2)} = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_e}{1 + \lambda_e^2} \frac{\phi(\lambda_e^* z_{2ij}^*) - \phi(\lambda_e^* z_{0ij}^*)}{F_{SN}(z_{2ij}^*) - F_{SN}(z_{0ij}^*)} - \frac{z_{2ij}^* f_{SN}(z_{2ij}^*) - z_{0ij}^* f_{SN}(z_{0ij}^*)}{F_{SN}(z_{2ij}^*) - F_{SN}(z_{0ij}^*)},$$

em que $\lambda_e^* = \sqrt{1 + \lambda_e^2}$.

A covariância e a correlação entre duas observações Y_{ij}^o e $Y_{ij'}^o$, nos momentos j e j' ($j \neq j'$) do i -ésimo indivíduo, são obtidas de (5.6) e (5.7) e ficam dadas por

$$\text{Cov}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] = p_{1ij}p_{1ij'}\sigma_\gamma^2, \quad (5.47)$$

e

$$\text{Corr}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] = \frac{p_{1ij}p_{1ij'}\sigma_\gamma^2}{\sqrt{\text{Var}[Y_{ij}^o]}\sqrt{\text{Var}[Y_{ij'}^o]}}, \quad (5.48)$$

respectivamente, em que σ_γ^2 é dado em (5.46).

5.4.2 Estimação no Modelo SNDC-RE

A fdp marginal do vetor aleatório observado $\mathbf{Y}_i^o = (Y_{i1}^o, \dots, Y_{im_i}^o)^\top$ é obtida substituindo as expressões para as probabilidades p_{0ij} e p_{2ij} dadas em (5.43) e (5.45); e sob a suposição de $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_g, \alpha_g)$ e $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_e, \alpha_e)$, temos que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_i^o; \boldsymbol{\theta}) &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN} \left(\frac{c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{0ij}} \left[1 - F_{SN} \left(\frac{c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{2ij}} \right. \\ &\quad \times \left. \left[\frac{2}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \Phi \left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \right\} \\ &\quad \times \frac{2}{\eta_g} \phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \Phi \left(\lambda_g \frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) d\gamma_i, \end{aligned} \quad (5.49)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\theta}_\epsilon^\top, \boldsymbol{\theta}_\gamma^\top)^\top$ é o vetor de parâmetros de interesse, com $\boldsymbol{\theta}_\epsilon = (\eta_e, \lambda_e)^\top$ e $\boldsymbol{\theta}_\gamma = (\eta_g, \lambda_g)^\top$. Fazendo a mudança de variável $u_i = \gamma_i / \sqrt{2}\eta_g$ em (5.49) obtemos a integral,

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN} \left(\frac{c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{0ij}} \left[1 - F_{SN} \left(\frac{c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{2ij}} \right. \\ &\quad \times \left. \left[\frac{2}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \Phi \left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \right\} \\ &\quad \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Phi(\sqrt{2}\lambda_g u_i) \exp(-u_i^2) du_i, \end{aligned} \quad (5.50)$$

a qual tem a forma (2.23). Assim usando a quadratura de Gauss-Hermite unidimensional temos que I_i pode ser aproximada como

$$\begin{aligned} I_i &\approx \sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN}(z_{0ij}) \right]^{d_{0ij}} \left[1 - F_{SN}(z_{2ij}) \right]^{d_{2ij}} \left[\frac{2}{\eta_e} \phi(z_{ij}) \Phi(\lambda_e z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\ &\quad \times \Phi(\sqrt{2}\lambda_g u_k) \frac{2\omega_k}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

em que $z_{0ij} = (c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k) / \eta_e$, $z_{2ij} = (c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k) / \eta_e$ e $z_{ij} = (y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k) / \eta_e$, com u_k e ω_k sendo os pontos e os pesos da quadratura respectivamente.

A função de verossimilhança aproximada para o vetor $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\theta}_\epsilon^\top, \boldsymbol{\theta}_\gamma^\top)^\top$, baseados na amos-

tra observada $\mathbf{Y}^o$, é obtida de (5.8) e toma a forma

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) \approx \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN}(z_{0ij}) \right]^{d_{0ij}} \left[1 - \left\{ F_{SN}(z_{2ij}) \right\} \right]^{d_{2ij}} \left[\frac{2}{\eta_e} \phi(z_{ij}) \Phi(\lambda_e z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \right. \\ \left. \times \Phi(\sqrt{2}\lambda_g u_k) \frac{2\omega_k}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (5.52)$$

e o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o)$ fica dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) \approx \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN}(z_{0ij}) \right]^{d_{0ij}} \left[1 - \left\{ F_{SN}(z_{2ij}) \right\} \right]^{d_{2ij}} \left[\frac{2}{\eta_e} \phi(z_{ij}) \Phi(\lambda_e z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \right. \\ \left. \times \Phi(\sqrt{2}\lambda_g u_k) \frac{2\omega_k}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (5.53)$$

A função escore aproximada é obtida diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y})$ em (5.53) em relação a cada um dos parâmetros e é dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}^{\top}(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\lambda_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_g}(\boldsymbol{\theta}), U_{\lambda_g}(\boldsymbol{\theta}) \right)^{\top} \quad (5.54)$$

O estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^{\top}, \eta_e, \lambda_e, \eta_g, \lambda_g)^{\top}$ é obtido como solução ao sistema de equações $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$. Note-se que os estimadores dos componentes de $\boldsymbol{\theta}$ não têm uma expressão fechada e precisam ser obtidos numericamente maximizando (5.53).

5.4.3 Modelo Tobit Normal-Assimétrico com Efeitos Aleatórios

Quando no modelo (5.26) substituímos a suposição de distribuição normal-potência para as variáveis aleatórias γ_i e ϵ_{ij} pela suposição de distribuição normal-assimétrica, o modelo resultante é chamado de modelo tobit normal-assimétrico com efeitos aleatórios, e é denotado por SNT-RE (*Skew-normal Tobit with Random Effects*). Assim, procedendo como no modelo PNT-RE, consideramos a variável aleatória observada $Y_{ij}^o = D_{ij} Y_{ij}$, em que $D_{ij} = I(Y_{ij} > 0)$ e $Y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^{\top} \boldsymbol{\beta} + \gamma_i + \epsilon_{ij}$, com $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_g, \lambda_g)$ e $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_e, \lambda_e)$, para $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m_i$.

Se segue então que $Y_{ij} \mid \gamma_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{SN}(\mathbf{x}_{ij}^{\top} \boldsymbol{\beta} + \gamma_i, \eta_e, \lambda_e)$, com fdp dada por

$$f_{Y|\gamma}(y_{ij} \mid \gamma_i; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \lambda_e) = \frac{2}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^{\top} \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \Phi \left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^{\top} \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right)$$

$i = 1, \dots, n$, e

$$f_{\gamma}(\gamma_i; \eta_g, \lambda_g) = \frac{2}{\eta_g} \phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \Phi \left(\lambda_g \frac{\gamma_i}{\eta_g} \right)$$

Para observações Y_{ij}^o iguais a zero, temos

$$P(Y_{ij}^o = 0) = F_{SN} \left(-\frac{\mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta} + \gamma_i}{\eta_e} \right),$$

e para observações Y_{ij}^o maiores que zero, tem-se que $Y_{ij}^o \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{SN}(\mathbf{x}_{ij}^{\top} \boldsymbol{\beta} + \gamma_i, \eta_e, \lambda_e)$. Portanto a fdp

marginal do vetor aleatório observado $\mathbf{Y}_i^o = (Y_{i1}^o, \dots, Y_{im_i}^o)^\top$ é dado por

$$f(\mathbf{y}_i^o; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN} \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{(1-d_{ij})} \left[\frac{2}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right] \right. \\ \left. \times \Phi \left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{ij}} \right\} \frac{2}{\eta_g} \phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \Phi \left(\lambda_g \frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) d\gamma_i, \quad (5.55)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \eta_e, \lambda_e, \eta_g, \lambda_g)^\top$, e

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } Y_{ij}^o > 0, \\ 0 & \text{se } Y_{ij}^o = 0. \end{cases}$$

Segue que a função de verossimilhança baseada na amostra observada $\mathbf{Y}^o = (\mathbf{Y}_1^o, \dots, \mathbf{Y}_n^o)^\top$ pode ser escrita como

$$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN} \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{(1-d_{ij})} \left[\frac{2}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right] \right. \\ \left. \times \Phi \left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{ij}} \right\} \frac{2}{\eta_g} \phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \Phi \left(\lambda_g \frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) d\gamma_i, \quad (5.56)$$

Momentos no Modelo SNT-RE

A média e a variância do valor observado Y_{ij}^o no modelo SNT-RE são calculados desde que $Y_{ij}^o = D_{ij}Y_{ij}$, em que $Y_{ij} = \mu_{ij} + \gamma_i + \epsilon_{ij}$, com $\mu_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}$, $\gamma_i = \eta_g W_i$ com $W_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, 1, \lambda_g)$; e $\epsilon_{ij} = \eta_e Z_{ij}$ com $Z_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, 1, \lambda_e)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$, assim

$$\begin{aligned} E[Y_{ij}^o] &= E[Y_{ij} \mid Y_{ij} > 0] P(Y_{ij} > 0) \\ &= \left(\mu_{ij} + \eta_g E[W_i] + \eta_e E[Z_{ij} \mid Z_{ij} + c_{ij} > 0] \right) \left(1 - F_{SN}(-c_{ij}) \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_{ij}^o] &= E[Y_{ij}^2 \mid Y_{ij} > 0] P(Y_{ij} > 0) - (E[Y_{ij}^o])^2 \\ &= \eta_e^2 \left\{ \frac{\eta_g^2 \text{Var}[W_i]}{\eta_e^2} + E[Z_{ij}^2 \mid Z_{ij} + c_{ij} > 0] - \left(E[Z_{ij} \mid Z_{ij} + c_{ij} > 0] \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + F_{SN}(-c_{ij}) \left(\frac{\mu_{ij} + \eta_g E[W_i]}{\eta_e} + \eta_e E[Z_{ij} \mid Z_{ij} + c_{ij} > 0] \right)^2 \right\} \left(1 - F_{SN}(-c_{ij}) \right), \end{aligned}$$

em que $c_{ij} = (\mu_{ij} + \gamma_i)/\eta_e$, e pela Proposição 1, temos que

$$E[Y_{ij}^o] = \eta_e \left(\frac{\mu_{ij} + \mu_\gamma}{\eta_e} + \mu_{ij}^{(1)} \right) \left(1 - F_{SN}(-c_{ij}) \right) \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_{ij}^o] &= \eta_e^2 \left\{ \frac{\sigma_\gamma^2}{\eta_e^2} + \left(\mu_{ij}^{(2)} - [\mu_{ij}^{(1)}]^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + F_{SN}(-c_{ij}) \left(\frac{\mu_{ij} + \mu_\gamma}{\eta_e} + \mu_{ij}^{(1)} \right)^2 \right\} \left(1 - F_{SN}(-c_{ij}) \right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

em que μ_γ e σ_γ^2 são dados em (5.46); e

$$\begin{aligned}\mu_{ij}^{(1)} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_e}{\sqrt{1 + \lambda_e^2}} \frac{\Phi(\lambda_e^* c_{ij})}{1 - F_{SN}(-c_{ij})} + \frac{f_{SN}(c_{ij})}{1 - F_{SN}(-c_{ij})} \\ \mu_{ij}^{(2)} &= 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_e}{1 + \lambda_e^2} \frac{\phi(\lambda_e^* c_{ij})}{1 - F_{SN}(-c_{ij})} - \frac{c_{ij} f_{SN}(c_{ij})}{1 - F_{SN}(-c_{ij})}\end{aligned}$$

em que $\lambda_e^* = \sqrt{1 + \lambda_e^2}$.

A covariância e a correlação entre duas observações Y_{ij}^o e $Y_{ij'}^o$, nos momentos j e j' ($j \neq j'$) do i -ésimo sujeito ficam dadas por

$$\text{Cov}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] = \left(1 - F_{SN}(-c_{ij})\right) \left(1 - F_{SN}(-c_{ij'})\right) \sigma_\gamma^2, \quad (5.60)$$

e

$$\text{Corr}[Y_{ij}^o, Y_{ij'}^o] = \frac{\left(1 - F_{SN}(-c_{ij})\right) \left(1 - F_{SN}(-c_{ij'})\right) \sigma_\gamma^2}{\sqrt{\text{Var}[Y_{ij}^o]} \sqrt{\text{Var}[Y_{ij'}^o]}}, \quad (5.61)$$

respectivamente.

Estimação no Modelo SNT-RE

Para a inferência estatística no modelo SNT-RE propomos o método da máxima verossimilhança. O vetor de parâmetros de interesse é $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}, \eta_e, \lambda_e, \eta_g, \lambda_g)^\top$, e para a obtenção das estimativas do vetor $\boldsymbol{\theta}$ precisamos avaliar a integral

$$\begin{aligned}I_i &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN} \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{(1-d_{ij})} \left[\frac{2}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \Phi \left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{ij}} \left\} \frac{2}{\eta_g} \phi \left(\frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) \Phi \left(\lambda_g \frac{\gamma_i}{\eta_g} \right) d\gamma_i, \quad (5.62)\end{aligned}$$

a qual fazendo a mudança de variável $u_i = \gamma_i / \sqrt{2}\eta_g$ fica da forma

$$\begin{aligned}I_i &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN} \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right]^{(1-d_{ij})} \left[\frac{2}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \Phi \left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_i}{\eta_e} \right) \right]^{d_{ij}} \left\} \Phi \left(\sqrt{2}\lambda_g u_i \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u_i^2) du_i, \quad (5.63)\end{aligned}$$

Usando a quadratura de Gauss-Hermite unidimensional temos que I_i em (5.63) pode ser aproximada como

$$\begin{aligned}I_i &\approx \sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN} \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \sqrt{2}\eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right]^{(1-d_{ij})} \left[\frac{2}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right] \\ &\quad \times \left[\Phi \left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right]^{d_{ij}} \Phi \left(\sqrt{2}\lambda_g u_k \right) \frac{2\omega_k}{\sqrt{\pi}}. \quad (5.64)\end{aligned}$$

Segue de (5.56) e (5.64) que o logaritmo da função de verossimilhança para o vetor $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}, \eta_e, \lambda_e, \eta_g, \lambda_g)^\top$ baseada na amostra observada $\mathbf{Y}^o = (\mathbf{Y}_1^o, \dots, \mathbf{Y}_n^o)^\top$ é da forma

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) \approx \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{k=1}^Q \prod_{j=1}^{m_i} \left[F_{SN} \left(-\frac{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \sqrt{2} \eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right]^{(1-d_{ij})} \left[\frac{2}{\eta_e} \phi \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2} \eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right] \right. \\ \left. \times \Phi \left(\lambda_e \frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2} \eta_g u_k}{\eta_e} \right) \right]^{d_{ij}} \Phi \left(\sqrt{2} \lambda_g u_k \right) \frac{2\omega_k}{\sqrt{\pi}} \right), \end{aligned} \quad (5.65)$$

A função escore aproximada é obtida diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y})$ em (5.65), em relação a cada um dos parâmetros e é dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}^\top(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\lambda_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_g}(\boldsymbol{\theta}), U_{\lambda_g}(\boldsymbol{\theta}) \right)^\top. \quad (5.66)$$

O estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \eta_e, \lambda_e, \eta_g, \lambda_g)^\top$ é obtido como solução ao sistema de equações $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ e devem obtidos numericamente maximizando (5.65).

5.5 Seleção de modelos

Para a seleção de modelos, propomos avaliar a série de ajustes de modelos inspecionando os critérios de informação usados no modelo PNLMM. Lembramos aqui os critérios considerados. O Critério de Informação de Akaike Marginal, $mAIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}} | \mathbf{Y}) + 2pN/(N - p - 1)$, em que p é o número de parâmetros estimados no modelo considerado, e $N = \sum_{i=1}^n m_i$, (veja Vaida e Blanchard, 2005); o Critério de Informação Bayesiano de Schwarz, $BIC_h = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}} | \mathbf{Y}) + p_r \log(n) + p_f \log(N)$, em que p_r é o número de parâmetros correspondentes à componente aleatória, p_f é o número de parâmetros correspondentes à componente fixa (veja Delandre et al., 2014). Propomos também usar o Critério de Informação de Akaike modificado, usualmente chamado de AIC consistente, $CAIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}} | \mathbf{Y}) + p(1 + \log(N))$, e o Critério de Informação de Hannan-Quinn, $HQIC = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}} | \mathbf{Y}) + p \log(\log(N))$, em que p é o número de parâmetros estimados no modelo sendo considerado. Assim como no modelo PNLMM, o melhor modelo é aquele com o menor mAIC (ou BIC_h ou CAIC ou HQIC).

5.6 Simulação

Com o intuito de estudar as propriedades do estimador de máxima verossimilhança $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\theta}_\epsilon^\top, \boldsymbol{\theta}_\gamma^\top)^\top$, realizamos um estudo de simulação de Monte Carlo em que foi considerado o modelo linear misto

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + \gamma_i + \epsilon_{ij}, \quad (5.67)$$

para $j = 1, \dots, 5$ e $i = 1, \dots, n$. Nós consideramos dois cenários.

No primeiro cenário supomos que $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g)$, e $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e)$, portanto $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)^\top$, $\boldsymbol{\theta}_\epsilon = (\eta_e, \alpha_e)^\top$ e $\boldsymbol{\theta}_\gamma = (\eta_g, \alpha_g)^\top$, em que os verdadeiros valores dos parâmetros foram tomados como $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = -1.5$, $\eta_e = \eta_g = 1.50$, $\alpha_e = 0.50, 1.5$ e $\alpha_g = 0.50, 3.0$. Tomamos esses valores de α para acomodar assimetria à esquerda (valores de $\alpha < 1$) e à direita (valores de $\alpha > 1$).

No segundo cenário supomos que $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_g, \lambda_g)$, e $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_e, \lambda_e)$, portanto $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)^\top$, $\boldsymbol{\theta}_\epsilon = (\eta_e, \lambda_e)^\top$ e $\boldsymbol{\theta}_\gamma = (\eta_g, \lambda_g)^\top$, em que os verdadeiros valores dos parâmetros foram

tomados como $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = -1.5$, $\eta_e = \eta_g = 1.50$, $\lambda_e = -2.5, 1.5$ e $\alpha_g = -1.5, 1.5, 2.5$. O valores de λ foram assumidos para acomodar assimetria à esquerda (valores de $\lambda < 0$) e à direita (valores de $\lambda > 0$).

Nos dois cenários descritos acima, a covariável x_i foi gerada de acordo com uma distribuição $U(0.1, 20)$ e foram simulados 1000 conjuntos de dados de Monte Carlo de tamanhos $n = 50, 100, 200, 500$ e 1000 do modelo (5.67). Consideramos também níveis de censura iguais a $p_0 = 10, 15\%$ (à esquerda), e $p_2 = 10, 20\%$ à direita.

Para estudar as propriedades assintóticas dos estimadores, consideramos o viés relativo (VR) em valor absoluto, e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) as quais são dados por

$$VR(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \left(\frac{\hat{\theta}_i^{(k)}}{\theta_i} - 1 \right), \quad REQM(\hat{\theta}_i) = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \left(\hat{\theta}_i^{(k)} - \theta_i \right)^2},$$

respectivamente, em que $\hat{\theta}_i^{(k)}$ é o estimador de θ_i para a k -ésima amostra, para $\theta_i \in \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\theta}_\epsilon^\top, \boldsymbol{\theta}_\gamma^\top)^\top$. Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros foram computados usando a função *optim* do pacote estatístico R (R Development Core Team, 2017).

Das Tabelas A.3 e A.4 no Apêndice A pode-se observar que os estimadores dos parâmetros são estáveis. Também o VR e a REQM dos estimadores tendem se aproximar de zero quando o valor de n aumenta indicando que os estimadores baseados no método de máxima verossimilhança fornecem boas propriedades assintóticas. Esse padrão é o mesmo para os diferentes valores de α_e e α_g sob consideração.

5.7 Aplicações

Nesta seção aplicamos os modelos estudados a dois conjuntos de dados. O primeiro deles são relacionados dados de doença periodontal e foram analisados previamente por Galvis *et al.* (2014) e Fernandes *et al.* (2006). O segundo conjunto de dados correspondem aos longitudinais estudo de colesterol em Framingham analisados no Capítulo 4.

5.7.1 Dados de Doença Periodontal

O objetivo desta aplicação é ilustrar o uso dos modelos PNDC-RE e SNDC-RE desenvolvidos anteriormente. O conjunto de dados usado nesta aplicação são relacionados a um estudo de periodontologia clínica. O nível de inserção clínica (NIC), um marcador clínico da doença periodontal (DP), foi registrado em cada um de 6 locais do dente por dente para 28 dentes. (considerado dentição total, excluindo os 4 terceiros molares). Com 290 sujeitos, o interesse foi quantificar a extensão e gravidade de DP para os tipos de dentes (4 caninos e 8 incisivos, pré-molares e molares). A variável resposta foi: “Proporção de locais doentes do dente, para cada um dos quatro tipos de dentes (com $NIC \geq 3$ mm)”. Isso dá origem a uma estrutura de dados em cluster em que cada sujeito registra 4 observações correspondentes aos 4 tipos de dentes. Os dentes perdidos foram considerados “perdidos devido à DP”, em que todos os locais para esse dente contribuíram para a categoria doente. As covariáveis consideradas neste conjunto de dados incluem o sexo (0=feminino;1=masculino), idade do sujeito no momento do exame (em anos, variando de 26 a 87 anos), indicador do status de hemoglobina glicosilada, HbA1c (0= controlada, $< 7\%$; 1= não controlada $\geq 7\%$) e indicador do status de Tabagismo (0= não fumante, 1= fumante). A categoria de fumante é composta tanto de fumantes atuais como passadas.

Para esta análise, foram consideradas os tipos de dentes incisivos, pré-molares e molares a fim de ter um conjunto de dados com uma estrutura de assimetria. A categoria tipo de dente

Figura 5.1: Histograma para os dados de doença periodontal. Os "pinos" nos extremos representam a proporção de observações censuradas (9,8%) à esquerda e (8,1%) à direita.

incisivos foi considerada como linha base. A Figura 5.1 apresenta o histograma para os dados da doença periodontal.

Para a análise dos dados foi adotado o seguinte modelo linear com intercepto aleatório:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \text{sexo}_i + \beta_2 \text{idade}_i + \beta_3 \text{hba1c.d} + \beta_4 \text{premolar}_{ij} + \beta_5 \text{molar}_{ij} + \gamma_i + \epsilon_{ij}, \quad (5.68)$$

em que Y_{ij} é a proporção de locais doentes do dente, para cada um dos três tipos de dentes considerados avaliado no j -ésimo tipo de dente ($j = 1, 2, 3$) para o sujeito i ($i = 1, \dots, 290$).

Os seguintes modelos estatísticos, os quais diferem na distribuição dos erros e os efeitos aleatórios foram analisados

- Modelo 1: Um modelo com distribuição normal para os erros e distribuição normal-Potência para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_e^2)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g)$; e que chamaremos (*modelo DCN-PN*),
- Modelo 2: Um modelo com distribuição normal-potência para os erros e distribuição normal para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_g^2)$; e que chamaremos (*modelo DCPN-N*),
- Modelo 3: Um modelo com distribuição normal para os erros e distribuição normal-assimétrico para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_e^2)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_g, \lambda_g)$; e que chamaremos (*modelo DCN-SN*),
- Modelo 4: Um modelo com distribuição normal-assimétrico para os erros e distribuição normal para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_e, \lambda_e)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_g^2)$; e que nós chamaremos (*modelo DCSN-N*),
- Modelo 5: Um modelo com distribuição normal para os erros e os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_e^2)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_g^2)$; e que chamaremos (*modelo DCN-N*).

As estimativas dos parâmetros (apenas para as variáveis significativas no modelo) foram obtidos usando a função *optim* no R (R Development Core Team, 2017), e são mostrados na Tabela 4.2. Para o ajuste dos modelos foram usados 25 pontos da quadratura de Gauss-Hermite.

Escolhimos esse número de pontos de quadratura porque o aumento de pontos contribuiu pouco à aproximação do logaritmo da função de log-verossimilhança, isto é, as estimativas se mantiveram no mesmo valor à medida que aumentamos o número de pontos da quadratura.

A Tabela 5.2 mostra os critérios de comparação dos modelos ajustados. Segundo a tabela, todos os criterios (mAIC, BIC_h, CAIC e HQIC), indicam que o modelo 4 (modelo DCN-SN) parece proporcionar um melhor ajuste aos dados da doença periodontal em relação aos outros modelos considerados, apoiando a contenção de afastamento da normalidade do efeito aleatório.

A suposição de distribuição normal-potência para os interceptos aleatórios é testada com a hipótese

$$H_{01} : \alpha_g = 1 \quad \text{versus} \quad H_{11} : \alpha_g \neq 1,$$

usando a estatística de razão de verossimilhança (RV)

$$\Lambda_1 = \frac{L_{DCN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{L_{DCN-PN}(\hat{\boldsymbol{\theta}})},$$

a qual sob os dados em consideração, leva a $-2 \log(\Lambda_1) = -2(\ell_{DCN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell_{DCN-PN}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 12.091$, com p -value = 0.0005, com forte indicação em contra a hipótese nula.

Similarmente, a suposição de distribuição normal-potência para os efeitos aleatórios, e normalidade dos erros é testada usando a hipótese

$$H_{02} : \alpha_e = 1 \quad \text{versus} \quad H_{12} : \alpha_e \neq 1,$$

usando a estatística de RV

$$\Lambda_2 = \frac{L_{DCN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{L_{DCPN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}})},$$

que para os dados sob estudo leva a $-2 \log(\Lambda_2) = -2(\ell_{DCN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell_{DCPN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 1.6824$, com p -value = 0.1946059, e portanto rejeitamos a hipótese nula de que os erros seguem uma distribuição normal-potência.

As hipóteses acima permitem concluir que os efeitos aleatórios seguem uma distribuição assimétrica, assim o modelo 1 parece ser um modelo que ajusta bem aos dados em relação ao modelo normal.

5.7.2 Dados de Colesterol

Consideramos agora os dados de colesterol do estudo de Framingham que foram usados no Capítulo 4 para ilustrar os modelos tobit normal-potência com efeitos aleatórios (PNT-RE) e tobit normal-assimétrico com efeitos aleatórios (SNT-RE). Vamos supor que a variável resposta Y_{ij} , nível de colesterol em mg/dL (dividido por 100) avaliado no j -ésimo tempo ($j = 1, \dots, m_i$) para o sujeito i ($i = 1, \dots, 200$) apresenta censura no valor $c_0 = 1.82$. (Este valor foi determinado considerando que o 10% das observações menores foi censurada). Esclarecemos que esta aplicação tem com objetivo simplesmente ilustrar o uso dos modelos PNT-RE e SNT-RE.

A Figura 5.2 apresenta o histograma para os dados de colesterol com a presença de censura no valor $c_0 = 1.82$. Note-se claramente a presença de assimetria e parece adequado considerar um modelo com efeitos aleatórios assimétricos para analisar o conjunto de dados.

Baseados nos resultados obtidos na Seção 4.5 em que a variável sexo não foi significativa,

Tabela 5.1: Estimativas de MV dos parâmetros e erros padrões (EP) obtidos no ajuste dos modelos DCN-PN, DCPN-N, DCN-SN, DCSN-N e DCN-N aos dados de doença periodontal.

θ	Modelo DCN-PN		Modelo DCPN-N		Modelo DCN-SN		Modelo DCSN-N		Modelo DCN-N	
	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP
β_0	-0.4651	0.0708	-0.1272	0.2501	-0.2995	0.0632	-0.0254	0.0990	0.1087	0.0990
β_1	-0.1060	0.0271	-0.1465	0.0430	-0.1072	0.0257	-0.1466	0.0431	-0.1425	0.0424
β_2	0.0105	0.0010	0.0086	0.0017	0.0101	0.0010	0.0086	0.0017	0.0088	0.0017
β_3	-0.2269	0.0146	-0.2204	0.0156	-0.2262	0.0145	-0.2201	0.0154	-0.2279	0.0146
β_4	-0.1539	0.0144	-0.1517	0.0144	-0.1532	0.0142	-0.1515	0.0144	-0.1544	0.0144
η_g	0.3841	0.0137	0.2863	0.0140	0.4276	0.0150	0.2862	0.0140	0.2859	0.0138
η_e	0.1683	0.0052	0.2379	0.0628	0.1668	0.0051	0.2197	0.0221	0.1679	0.0055
α_g	4.8033	0.3827	—	—	—	—	—	—	—	—
α_e	—	—	3.9732	4.8030	—	—	—	—	—	—
λ_g	—	—	—	—	2.8578	0.5775	—	—	—	—
λ_e	—	—	—	—	—	—	1.4003	0.5439	—	—

Tabela 5.2: Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de doença periodontal.

Critério	Modelo DCN-PN	Modelo DCPN-N	Modelo DCN-SN	Modelo DCSN-N	Modelo DCN-N
$\ell(\theta)$	-139.9031	-145.1074	-132.8446	-145.1626	-145.9486
mAIC	295.9734	306.3820	281.8564	306.4924	306.0271
BIC _h	331.7569	343.2641	317.6399	343.3745	338.1780
CAIC	341.9541	352.3627	327.8371	352.4731	346.2767
HQIC	333.9541	344.3627	319.8371	344.4731	339.2767

Figura 5.2: Histograma para os dados de Colesterol. O "pino" no extremo inferior representa a frequência de observações censuradas (108) no valor $c_0 = 1.82$.

adotamos o seguinte modelo linear misto:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \text{idade}_i + \beta_2 t_{ij} + \gamma_i + \epsilon_{ij}, \quad (5.69)$$

sendo idade_i é a idade no início do estudo (em anos); e t_{ij} é $(\text{tempo} - 5)/10$, com tempo medido em anos.

Os seguintes modelos estatísticos, os quais diferem na distribuição dos erros e os efeitos aleatórios foram considerados

- Modelo 1: Um modelo com distribuição normal para os erros e distribuição normal-Potência para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_e^2)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_g, \alpha_g)$; e que chamaremos (*modelo DCN-PN*),
- Modelo 2: Um modelo com distribuição normal-potência para os erros e distribuição normal para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{PN}(0, \eta_e, \alpha_e)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_g^2)$; e que chamaremos (*modelo DCPN-N*),
- Modelo 3: Um modelo com distribuição normal para os erros e distribuição normal-assimétrico para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_e^2)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_g, \lambda_g)$; e que chamaremos (*modelo DCN-SN*),
- Modelo 4: Um modelo com distribuição normal-assimétrico para os erros e distribuição normal para os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{SN}(0, \eta_e, \lambda_e)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_g^2)$; e que chamaremos (*modelo DCSN-N*),

- Modelo 5: Um modelo com distribuição normal para os erros e os efeitos aleatórios, isto é, $\epsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_e^2)$ e $\gamma_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \eta_g^2)$; e que chamaremos (*modelo DCN-N*).

As estimativas dos parâmetros (apenas para as variáveis significativas no modelo) foram obtidos usando a função *optim* no R ([R Development Core Team, 2017](#)), e são mostrados na Tabela 4.2. Para o ajuste dos modelos foram usados 23 pontos da quadratura de Gauss-Hermite. Escolhimos esse número de pontos de quadratura porque o aumento de pontos contribuiu pouco à aproximação do logaritmo da função de log-verossimilhança, isto é, as estimativas se mantiveram no mesmo valor à medida que aumentamos o número de pontos da quadratura.

A Tabela 5.2 mostra os critérios de comparação dos modelos ajustados. Segundo a tabela, todos os criterios (mAIC, BIC_h, CAIC e HQIC), indicam que o modelo 4 (modelo DCN-PN) parece proporcionar um melhor ajuste aos dados de colesterol em relação aos outros modelos considerados, apoiando a contenção de afastamento da normalidade do efeito aleatório.

A suposição de distribuição normal-potência para os interceptos aleatórios é testada com a hipótese

$$H_{01} : \alpha_g = 1 \quad \text{versus} \quad H_{11} : \alpha_g \neq 1,$$

usando a estatística de razão de verossimilhança (RV)

$$\Lambda_1 = \frac{L_{DCN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{L_{N-PN}(\hat{\boldsymbol{\theta}})},$$

a qual sob os dados em consideração, leva a $-2 \log(\Lambda_1) = -2(\ell_{DCN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell_{DCN-PN}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 21.8808$, com $p\text{-value} < 0.0005$, com forte indicação em contra a hipótese nula.

Similarmente, a suposição de distribuição normal-potência para os efeitos aleatórios, e normalidade dos erros é testada usando a hipótese

$$H_{02} : \alpha_e = 1 \quad \text{versus} \quad H_{12} : \alpha_e \neq 1,$$

usando a estatística de RV

$$\Lambda_2 = \frac{L_{DCN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{L_{DCPN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}})},$$

que para os dados sob estudo leva a $-2 \log(\Lambda_2) = -2(\ell_{DCN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell_{DCPN-N}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = 11.4112$, com $p\text{-value} = 0.00073$, com forte indicação em contra a hipótese nula. Pode-se concluir que os efeitos aleatórios seguem uma distribuição normal-potência, assim o modelo 1 parece ser um modelo que ajusta bem aos dados em relação ao modelos DCN-SN e DCSN-N.

5.8 Conclusões

Neste capítulo, introduzimos um modelo de regressão linear misto que permite modelar dados que apresentam censura (à esquerda ou à direita ou ambos) ou que estão limitados em um intervalo de valores; e possuem coeficiente de assimetria e curtose maior ou menor do que pode ser modelado pelo modelo normal. Em particular, propomos as distribuições normal-potência ([Durrans, 1992](#)) e normal-assimétrica ([Azzalini, 1985](#)) para dar flexibilidade ao termo do erro e ao efeito aleatório em um modelo linear misto.

Mesmo como no Capítulo 3, a vantagem de considerar as distribuições PN e SN é que podem oferecer flexibilidade na captura de uma ampla gama de comportamentos não normais, incluindo formas assimétricas à esquerda e à direita, tendo a normalidade como caso especial (no caso do modelo PN). Derivamos os dois primeiros momentos da variável resposta e propomos um método

Tabela 5.3: Estimativas de MV dos parâmetros e erros padrões (EP) obtidos no ajuste dos modelos DCN-PN, DCPN-N, DCN-SN, DCSN-N e DCN-N aos dados de colesterol.

θ	Modelo DCN-PN		Modelo DCPN-N		Modelo DCN-SN		Modelo DCSN-N		Modelo DCN-N	
	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP	Estimativa	EP
β_0	1.3759	0.1085	1.5432	0.1947	1.4958	0.1333	1.4977	0.1634	1.6538	0.1669
β_1	0.0110	0.0026	0.0166	0.0034	0.0112	0.0032	0.0166	0.0034	0.0161	0.0037
β_2	0.2945	0.0214	0.2967	0.0214	0.2935	0.0214	0.2968	0.0214	0.2939	0.0213
η_g	0.5293	0.0215	0.3820	0.0209	0.5124	0.0250	0.3820	0.0206	0.3840	0.0212
η_e	0.2269	0.0058	0.2534	0.0351	0.2274	0.0058	0.2614	0.0262	0.2256	0.0059
α_g	3.5040	0.3225	—	—	—	—	—	—	—	—
α_e	—	—	1.4785	0.7387	—	—	—	—	—	—
λ_g	—	—	—	—	1.9510	0.3876	—	—	—	—
λ_e	—	—	—	—	—	—	0.8004	0.3865	—	—

Tabela 5.4: Critérios de seleção dos modelos ajustados aos dados de colesterol.

Critério	Modelo DCN-PN	Modelo DCPN-N	Modelo DCDCN-SN	Modelo DCSN-N	Modelo DCN-N
$\ell(\boldsymbol{\theta})$	-270.7423	-275.9771	-271.6029	-275.9851	-281.6827
mAIC	553.5656	564.0352	555.2868	564.0512	573.4232
BIC_h	579.8845	592.0066	581.6057	592.0226	596.4670
CAIC	589.1895	599.6591	590.9107	599.6751	603.1195
HQIC	583.1895	593.6591	584.9107	593.6751	598.1195

de estimação dos parâmetros do modelo. As estimativas desses parâmetros são obtidas usando a abordagem de máxima verossimilhança com métodos de integração numérica (quadratura de Gauss-Hermite) que também são usados para estudar propriedades assintóticas dos estimadores.

Com casos particulares dos modelos considerados temos os modelos tobit normal-potência com efeitos aleatórios (PNT-RE), e modelo tobit normal-assimétrico com efeitos aleatórios (PNT-RE), os quais estendem o modelo Tobit usual ([Tobin, 1958](#)) com interceptos aleatórios normais

Apresentamos um exemplo de motivação para ilustrar a nossa proposta e concluímos que podem ser alternativas úteis a outros métodos existentes na literatura como o modelo linear beta misto por [Figueroa-Zúñiga *et al.* \(2013\)](#). Então, acreditamos que o modelo proposto neste capítulo amplia a opção na classe de modelos lineares mistos, para ajustar dados particularmente assimétricos com indicação de distribuição não normal para o efeito aleatório.

Capítulo 6

Conclusões Finais e Perspectivas Futuras

6.1 Conclusões Finais

Neste trabalho estudamos algumas extensões dos modelos potência-alfa (Gupta e Gupta, 2008). Inicialmente estudamos extensões do modelo PT às situações em que a variável resposta apresenta censura ou truncamento além de ter assimetria e/ou curtose maior do que o modelo normal usual pode ajustar. O modelo é denotado por CR-PT é uma alternativa para os modelos de regressão t de Student censurado (Arellano-Valle *et al.*, 2012) e os modelos sobre a classe de distribuições SNM (Garay *et al.*, 2017), sendo capaz de modelar dados com caudas mais pesadas do que os modelos tobit normal e tobit t -Student usual.

No trabalho também estudamos extensões do modelo normal-potência para às situações dos modelos com efeitos aleatórios (modelos lineares mistos) quando os dados apresentam dupla censura (ou censura à esquerda ou à direita). Como casos particulares encontra-se extensões dos modelos tobit normal usual com efeitos aleatórios, denotados PNT-RE e SNT-RE (sob a suposição de que os erros e os efeitos aleatórios seguem uma distribuição normal-assimétrica).

A inferência estatística dos modelos estudados neste trabalho é realizada desde a abordagem clássica e é baseada no método da máxima verossimilhança. Para a obtenção de estimativas dos parâmetros dos modelos estudados é necessário o uso do método de integração numérica de Gauss-Hermite para aproximar as integrais envolvidas na função de log-verossimilhança.

Para uma grande parte dos modelos estudados foram realizados estudos de simulação a fim de estudar as suas bondades e limitações. Os resultados das simulações mostram boas propriedades assintóticas dos estimadores obtidas pelo método.

Aplicações com dados reais sob altitudes de vulcões do mundo, *salário* de mulheres casadas, níveis de colesterol e doença periodontal mostram que os modelos estudados podem ser alternativas úteis para a modelagem de dados com as características consideradas (grau de assimetria e curtose maior do que o modelo normal usual, por exemplo)

Entre as principais bondades dos modelos estudados, ressaltamos que podem oferecer flexibilidade na captura de uma ampla gama de comportamentos não normais, incluindo formas assimétricas à esquerda e à direita, tendo a normalidade como caso especial. Os modelos são também úteis para modelar dados com caudas ainda mais pesadas do que alguns modelos existentes na literatura. O uso de estatísticas baseados na razão de verossimilhanças no caso dos modelos sob a suposição de distribuição normal-potência, é também uma das bondades dos modelos, por exemplo a hipótese assimetria dos erros e o termo do erro nos modelos com efeitos aleatórios podem ser realizadas.

Consideramos que os modelos estudados constituem uma alternativa viável para a modelagem

de dados longitudinais o em *cluster* quando a variável resposta apresenta assimetia e censura.

6.2 Perspectivas Futuras

Varios trabalhos de pesquisa podem ser derivados e/ou direcionados a partir dos resultados deste trabalho, entre eles podemos mencionar os seguintes:

- Estudar a inferência estatística do modelo de regressão linear t -potência censurado.
- Explorar a metodologia de análise dos resíduos e métodos diagnósticos para os modelos PNDC-RE, PNT-RE, SNDC-RE e PNT-RE desenvolvidos no Capítulo 5.
- Propor a inferência estatística dos modelos lineares mistos normal-potência (PNLMM) estudados no Capítulo 4 desde uma perspectiva Bayesiana.
- Considerar a abordagem Bayesiana para fazer a inferência estatística dos modelos de regressão lineares mistos assimétricos para dados duplamente censurados (PNDC-RE e SNDC-RE), que foram estudados no Capítulo 5.
- Considerar a distribuição t -potência estudada por Zhao e Kim (2016) como modelo alternativo aos modelos estudados neste trabalho e realizar o estudo desde uma perspectiva clássica e Bayesiana.
- Criar um pacote estatístico que permita ajustar os modelos estudados e para disponibilizar no R para su uso livre.

Apêndice A

Tabelas das Simulações

A seguir apresentamos as tabelas dos estudos de simulação feitos para os distintos modelos estudados.

Apêndice B

Funções Escore e Matrizes de Informação.

B.1 Matriz de Informação para o Modelo PST

Apresentamos nesta seção as expressões para elementos da matriz de informação observada do modelo PST nas versões padronizada e de locação-escala desenvolvidos na Seção 3.2.

B.1.1 Modelo PST Padronizado

Computando a segunda derivada parcial da função de log-verossimilhança (3.5) e multiplicando por -1, obtemos os elementos da matriz de informação observada do modelo PST padronizado. Inicialmente definimos $w = \sqrt{\frac{\nu+1}{x^2+\nu}}$, $r(x | \nu) = t(x | \nu)/T(x | \nu)$, $r_\lambda(x | \nu) = f_{ST}(x | \lambda, \nu)/F_{ST}(x | \lambda, \nu)$ e $R_\lambda(x | \nu) = (1 + (1 + \lambda^2)x^2/\nu)^{-\frac{\nu}{2}}/F_{ST}(x | \lambda, \nu)$, assim, denotando elementos da matriz de informação observada do modelo PST como $j_{\lambda\lambda}, j_{\lambda\alpha}, \dots, j_{\alpha\nu}, j_{\nu\nu}$, e depois algumas manipulações algébricas, segue-se que

$$\begin{aligned} j_{\lambda\lambda} = & \frac{\lambda(\nu+2)}{\nu} \sum_{i=1}^n x_i^3 w_i \left(1 + (1 + \lambda^2) \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda x_i w_i | \nu + 1) \\ & + \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n x_i \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} [r(\lambda x_i w_i | \nu + 1)]^2 \\ & - \frac{2(\alpha-1)}{\pi} \frac{\lambda}{(1 + \lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + (1 + \lambda^2) \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(x_i | \nu) \\ & - \frac{\alpha-1}{\pi} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \frac{\nu+2}{\nu} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(1 + (1 + \lambda^2) \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(x_i | \nu) \\ & + \frac{\alpha-1}{\pi^2(1 + \lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n [R_\lambda(x_i | \nu)]^2 \\ \\ j_{\lambda\alpha} = & \frac{1}{\pi(1 + \lambda^2)} \sum_{i=1}^n R_\lambda(x_i | \nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\lambda\nu} = & -\frac{1}{2\nu(\nu+1)} \sum_{i=1}^n x_i(x_i^2-1)w_i \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda x_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda^2}{2\nu^2} \frac{\nu+2}{(\nu+1)^2} \sum_{i=1}^n x_i^3(x_i^2-1)w_i \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} \left(1 + (1+\lambda^2)\frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda x_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda}{2\nu^2} \sum_{i=1}^n x_i^2(x_i^2-1) \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-2} [r(\lambda x_i w_i \mid \nu+1)]^2 \\
& + \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)} \frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n R_\lambda(x_i \mid \nu) + \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n [R_\lambda(x_i \mid \nu)]^2 \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(1 + (1+\lambda^2)\frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(x_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi(1+\lambda^2)} \sum_{i=1}^n \frac{g(x_i, \nu)}{F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu)} R_\lambda(x_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{g_1(x_i, \nu)}{F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu)}
\end{aligned}$$

$$j_{\alpha\alpha} = \frac{n}{\alpha^2}$$

$$\begin{aligned}
j_{\alpha\nu} = & -\frac{n}{2}\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{n}{2}\psi\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{n}{2\nu} \\
& + \frac{1}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n R_\lambda(x_i \mid \nu) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{g(x_i, \nu)}{F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\nu\nu} = & -\frac{n\alpha}{2\nu^2} - \frac{n\alpha}{4}\psi_1\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{n\alpha}{4}\psi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{\nu-1}{2\nu^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} \\
& + \frac{\nu+1}{2\nu^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-2} \\
& + \frac{\lambda}{4(\nu+1)^2} \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n x_i(x_i^2 - 1)(x_i^2 + 4\nu + 3)w_i \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda x_i w_i \mid \nu + 1) \\
& - \frac{\lambda}{4\nu(\nu+1)} \left(\psi\left(\frac{\nu+2}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{1}{\nu+1} \right) \\
& \quad \sum_{i=1}^n x_i(x_i^2 - 1)w_i \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda x_i w_i \mid \nu + 1) \\
& - \frac{\lambda^3}{4(\nu+1)} \frac{\nu+2}{\nu^3} \sum_{i=1}^n x_i^3(x_i^2 - 1) \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-2} \left(1 + (1 + \lambda^2) \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda x_i w_i \mid \nu + 1) \\
& + \frac{\lambda}{4\nu(\nu+1)} \sum_{i=1}^n x_i(x_i^2 - 1) \ln\left(1 + \frac{\lambda^2 x_i^2}{\nu + x_i^2}\right) r(\lambda x_i w_i \mid \nu + 1) \\
& + \frac{\lambda^2}{4\nu^3(\nu+1)} \sum_{i=1}^n x_i^2(x_i^2 - 1)^2 \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-3} [r(\lambda x_i w_i \mid \nu + 1)]^2 \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)^2} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n R_\lambda(x_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{4\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{\nu} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(1 + (1 + \lambda^2) \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(x_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{4\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + (1 + \lambda^2) \frac{x_i^2}{\nu}\right) R_\lambda(x_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{4\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \left(\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{\nu} \right) \sum_{i=1}^n R_\lambda(x_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n \frac{g(x_i, \nu)}{F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu)} R_\lambda(x_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{4\pi^2(\nu+1)^2} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n [R_\lambda(x_i \mid \nu)]^2 \\
& + \frac{\alpha-1}{4} \sum_{i=1}^n \left(\frac{g(x_i, \nu)}{F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu)} \right)^2 - \frac{\alpha-1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{g_2(x_i, \nu)}{F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu)}
\end{aligned}$$

em que $\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x)$ e $\psi_1(x) = \frac{d}{dx} \psi(x)$ são as funções digama e trigama respectiva-

mente, $g(x; \nu)$ é dado em (3.9) e

$$\begin{aligned}
 g_1(x; \nu) = & \int_{-\infty}^x \left\{ \frac{(\nu+1)s^2}{\nu(s^2+\nu)} - \log \left(1 + \frac{s^2}{\nu} \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{(1+\lambda^2)s^2}{\nu} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} s ds \\
 & - \int_{-\infty}^x \frac{s}{s^2+\nu} \left\{ 1 + \frac{(1+\lambda^2)s^2}{\nu} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} ds \\
 & + \int_{-\infty}^x \frac{\lambda^2(\nu+2)s^3}{(s^2+\nu)(\nu+(1+\lambda^2)s^2)} \left\{ 1 + \frac{(1+\lambda^2)s^2}{\nu} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} ds
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 g_2(x; \nu) = & \int_{-\infty}^x \left\{ \frac{s^2(s^2\nu - 2\nu - s^2)}{\nu^2(s^2+\nu)^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{(\nu+1)s^2}{\nu(s^2+\nu)} - \log \left(1 + \frac{s^2}{\nu} \right) \right]^2 \right\} f_{ST}(s | \lambda, \nu) ds \\
 & + \frac{\lambda}{2\pi(\nu+1)} \int_{-\infty}^x \frac{s(s^2-1)}{(s^2+\nu)} \left\{ \frac{(\nu+1)s^2}{\nu(s^2+\nu)} - \log \left(1 + \frac{s^2}{\nu} \right) \right\} \\
 & \quad \times \left\{ 1 + \frac{(1+\lambda^2)s^2}{\nu} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} ds \\
 & + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{s}{(s+\nu)^2} \left\{ 1 + \frac{(1+\lambda^2)s^2}{\nu} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} ds \\
 & + \frac{\lambda}{2\pi} \left(\psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{1}{\nu} \right) \int_{-\infty}^x \frac{s}{s^2+\nu} \left\{ 1 + \frac{(1+\lambda^2)s^2}{\nu} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} ds \\
 & - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^x \frac{s}{s^2+\nu} \left\{ \frac{(\nu+2)(1+\lambda^2)s^2}{\nu(\nu+(1+\lambda^2)s^2)} - \log \left(1 + \frac{(1+\lambda^2)s^2}{\nu} \right) \right\} \\
 & \quad \times \left\{ 1 + \frac{(1+\lambda^2)s^2}{\nu} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} ds
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

B.1.2 Modelo PST de Locação-Escala

Procedendo como no modelo PST padronizado, os elementos da matriz de informação observada para o modelo PST de locação-escala são obtidos computando a segunda derivada da

função de log-verossimilhança em (3.15), e são dado por

$$\begin{aligned}
 j_{\xi\xi} = & -\frac{1}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \\
 & + \frac{\lambda}{\eta^2} \sum_{i=1}^n z_i w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
 & + \frac{2}{\eta^2} \frac{\lambda}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
 & + \frac{\lambda^3}{\eta^2} \frac{\nu+2}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
 & + \frac{\lambda^2}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-3} [r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1)]^2 \\
 & - \frac{\lambda}{\eta^2} \frac{\alpha-1}{\pi} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
 & + \frac{\alpha-1}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r_\lambda(z_i \mid \nu) + \frac{\alpha-1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n [r_\lambda(z_i \mid \nu)]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j_{\xi\eta} = & \frac{2}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \\
 & + \frac{\lambda^3}{\eta^2} \frac{\nu+2}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
 & + \frac{2}{\eta^2} \frac{\lambda}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
 & - \frac{\lambda}{\eta^2} \sum_{i=1}^n w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
 & + \frac{\lambda^2}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-3} [r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1)]^2 \\
 & - \frac{\lambda}{\eta^2} \frac{\alpha-1}{\pi} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
 & - \frac{\alpha-1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n r_\lambda(z_i \mid \nu) + \frac{\alpha-1}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r_\lambda(z_i \mid \nu) \\
 & + \frac{\alpha-1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n z_i [r_\lambda(z_i \mid \nu)]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\xi\lambda} = & -\frac{\lambda^2}{\eta} \frac{\nu+2}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\lambda}{\eta} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} [r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1)]^2 \\
& + \frac{\alpha-1}{\pi\eta} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{\pi\eta} \frac{1}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n r_\lambda(z_i \mid \nu) R_\lambda(z_i \mid \nu)
\end{aligned}$$

$$j_{\xi\alpha} = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n r_\lambda(z_i \mid \nu)$$

$$\begin{aligned}
j_{\xi\nu} = & -\frac{1}{\eta\nu} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} + \frac{\nu+1}{\eta\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \\
& + \frac{\lambda}{\eta\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda}{2\eta} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \sum_{i=1}^n (z_i^2 - 1) w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda^3}{2\eta} \frac{\nu+2}{\nu^2(\nu+1)} \sum_{i=1}^n z_i^2 (z_i^2 - 1) w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\lambda^2}{2\eta} \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i (z_i^2 - 1) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-3} [r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1)]^2 \\
& + \frac{\lambda}{2\pi\eta} \frac{\alpha-1}{\nu+1} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{2\pi\eta(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n r_\lambda(z_i \mid \nu) R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{2\eta} \frac{\nu+1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\eta} \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right) r_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\eta} \sum_{i=1}^n \frac{g(z_i, \nu)}{F_{ST}(z_i \mid \lambda, \nu)} r_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\lambda}{2\pi\eta} \frac{\alpha-1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\eta\eta} = & -\frac{n}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} + \frac{2}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \\
& - \frac{2\lambda}{\eta^2} \sum_{i=1}^n z_i w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\lambda}{\eta^2 \nu} \sum_{i=1}^n z_i^3 w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda^3}{\eta^2} \frac{\nu+2}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^3 w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda^2}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-3} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\lambda}{\eta^2} \frac{\alpha-1}{\pi} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& - \frac{2(\alpha-1)}{\eta^2} \sum_{i=1}^n z_i r_\lambda(z_i \mid \nu) - \frac{\alpha-1}{\eta^2} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^3 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 r_\lambda(z_i \mid \nu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\eta\lambda} = & \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n z_i w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda^2}{\eta} \frac{\nu+2}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^3 w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda}{\eta} \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} [r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1)]^2 \\
& - \frac{\alpha-1}{\pi\eta} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{\pi\eta} \frac{1}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n r_\lambda(z_i \mid \nu) R_\lambda(z_i \mid \nu)
\end{aligned}$$

$$j_{\eta\lambda} = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n z_i r_\lambda(z_i \mid \nu)$$

$$\begin{aligned}
j_{\eta\nu} = & -\frac{1}{\eta\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} + \frac{1}{\eta} \frac{\nu+1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \\
& + \frac{\lambda}{\eta\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i^3 w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda}{2\eta} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \sum_{i=1}^n z_i (z_i^2 - 1) w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\lambda^3}{2\eta} \frac{\nu+2}{\nu^2(\nu+1)} \sum_{i=1}^n z_i^3 (z_i^2 - 1) w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\lambda^2}{2\eta\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 (z_i^2 - 1) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-3} [r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1)]^2 \\
& + \frac{\lambda}{2\pi\eta} \frac{\alpha-1}{\nu(\nu+1)} \sum_{i=1}^n z_i^2 (z_i^2 - 1) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{2\pi\eta(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n z_i r_\lambda(z_i \mid \nu) R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{2\eta} \frac{\nu+1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i^3 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\eta} \sum_{i=1}^n z_i \log\left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right) r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\eta} \sum_{i=1}^n z_i \frac{g(z_i, \nu)}{F_{ST}(z_i \mid \lambda, \nu)} r_\lambda(z_i \mid \nu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\lambda\lambda} = & \frac{\lambda(\nu+2)}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^3 w_i \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\nu+1}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} [r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1)]^2 \\
& - \frac{2(\alpha-1)}{\pi} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{\pi} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \frac{\nu+2}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + (1+\lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{\pi^2(1+\lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n [R_\lambda(z_i \mid \nu)]^2
\end{aligned}$$

$$j_{\lambda\alpha} = \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)} \sum_{i=1}^n R_\lambda(z_i \mid \nu)$$

$$\begin{aligned}
j_{\lambda\nu} = & -\frac{1}{2\nu(\nu+1)} \sum_{i=1}^n z_i(z_i^2-1)w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda^2}{2\nu^2} \frac{\nu+2}{(\nu+1)^2} \sum_{i=1}^n z_i^3(z_i^2-1)w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \left(1 + (1+\lambda^2)\frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1) \\
& + \frac{\lambda}{2\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i^2(z_i^2-1) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} [r(\lambda z_i w_i \mid \nu+1)]^2 \\
& + \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)} \frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n R_\lambda(z_i \mid \nu) + \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n [R_\lambda(z_i \mid \nu)]^2 \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + (1+\lambda^2)\frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi(1+\lambda^2)} \sum_{i=1}^n \frac{g(z_i, \nu)}{F_{ST}(z_i \mid \lambda, \nu)} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{g_1(z_i, \nu)}{F_{ST}(z_i \mid \lambda, \nu)}
\end{aligned}$$

$$j_{\alpha\alpha} = \frac{n}{\alpha^2}$$

$$\begin{aligned}
j_{\alpha\nu} = & -\frac{n}{2} \psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{n}{2} \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{n}{2\nu} \\
& + \frac{1}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n R_\lambda(z_i \mid \nu) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{g(z_i, \nu)}{F_{ST}(x_i \mid \lambda, \nu)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\nu\nu} = & -\frac{n\alpha}{2\nu^2} - \frac{n\alpha}{4}\psi_1\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + \frac{n\alpha}{4}\psi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{\nu-1}{2\nu^3} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} \\
& + \frac{\nu+1}{2\nu^3} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \\
& + \frac{\lambda}{4(\nu+1)^2} \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n z_i(z_i^2 - 1)(z_i^2 + 4\nu + 3)w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} r(\lambda z_i w_i \mid \nu + 1) \\
& - \frac{\lambda}{4\nu(\nu+1)} \left(\psi\left(\frac{\nu+2}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{1}{\nu+1} \right) \\
& \quad \sum_{i=1}^n z_i(z_i^2 - 1)w_i \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu + 1) \\
& - \frac{\lambda^3}{4(\nu+1)} \frac{\nu+2}{\nu^3} \sum_{i=1}^n z_i^3(z_i^2 - 1) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-2} \left(1 + (1 + \lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} r(\lambda z_i w_i \mid \nu + 1) \\
& + \frac{\lambda}{4\nu(\nu+1)} \sum_{i=1}^n z_i(z_i^2 - 1) \log\left(1 + \frac{\lambda^2 z_i^2}{\nu + z_i^2}\right) r(\lambda z_i w_i \mid \nu + 1) \\
& + \frac{\lambda^2}{4\nu^3(\nu+1)} \sum_{i=1}^n z_i^2(z_i^2 - 1)^2 \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-3} [r(\lambda z_i w_i \mid \nu + 1)]^2 \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)^2} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{4\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{\nu} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(1 + (1 + \lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right)^{-1} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{4\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n \log\left(1 + (1 + \lambda^2) \frac{z_i^2}{\nu}\right) R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{4\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \left(\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{\nu} \right) \sum_{i=1}^n R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& - \frac{\alpha-1}{2\pi(\nu+1)} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sum_{i=1}^n \frac{g(z_i, \nu)}{F_{ST}(z_i \mid \lambda, \nu)} R_\lambda(z_i \mid \nu) \\
& + \frac{\alpha-1}{4\pi^2(\nu+1)^2} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \sum_{i=1}^n [R_\lambda(z_i \mid \nu)]^2 \\
& + \frac{\alpha-1}{4} \sum_{i=1}^n \left(\frac{g(z_i, \nu)}{F_{ST}(z_i \mid \lambda, \nu)} \right)^2 - \frac{\alpha-1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{g_2(z_i, \nu)}{F_{ST}(z_i \mid \lambda, \nu)}
\end{aligned}$$

em que $w = \sqrt{\frac{\nu+1}{z^2+\nu}}$, $r(z \mid \nu) = \frac{t(z \mid \nu)}{T(z \mid \nu)}$, $R_\lambda(z \mid \nu) = \frac{1}{F_{ST}(z \mid \lambda, \nu)} \left\{ 1 + (1 + \lambda^2) z^2 / \nu \right\}^{-\frac{\nu}{2}}$, e $r_\lambda(z \mid \nu) = \frac{f_{ST}(z \mid \lambda, \nu)}{F_{ST}(z \mid \lambda, \nu)}$; e $g(z; \nu)$, $g_1(z; \nu)$ e $g_2(z; \nu)$ são dados em (3.9), (B.1) e (B.2) respectivamente.

B.2 Matriz de Informação Observada: Modelo PT Censurado

As expressões para os elementos da matriz de informação observada do modelo PT censurado são dados a seguir. Estes elementos são obtidos calculando a segunda derivada da função de log-verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\varphi}; \mathbf{Y}^o)$ em (3.24), em que $\boldsymbol{\varphi} = (\gamma, \sigma, \alpha, \nu)^\top$ e multiplicando por -1.

$$\begin{aligned}
 j_{\gamma\gamma} &= \alpha \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \left\{ r(c_i | \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} c_i \right\} r(c_i | \nu) \\
 &\quad + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} - \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^2 \right\} \\
 &\quad + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n d_i \left\{ r(z_i | \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i \right\} r(z_i | \nu) \\
 j_{\gamma\sigma} &= -\alpha \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \left\{ r(c_i | \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} c_i \right\} k_i r(c_i | \nu) \\
 &\quad - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} - \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^2 \right\} y_i \\
 &\quad - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n d_i \left\{ r(z_i | \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i \right\} y_i r(z_i | \nu)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\gamma\nu} &= \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c_i^2}{\nu} + b_{01}(c_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \log \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - c_i r(c_i | \nu)) \right\} r(c_i | \nu) \\
&\quad + \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^3 \right\} \\
&\quad + \frac{\alpha-1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} + b_{01}(z_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - z_i r(z_i | \nu)) \right\} r(z_i | \nu) \\
j_{\gamma\alpha} &= \sum_{i=1}^n (1 - d_i) r(c_i | \nu) + \sum_{i=1}^n d_i r(z_i | \nu) \\
j_{\sigma\sigma} &= \alpha \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} c_i + r(c_i | \nu) \right\} r(c_i | \nu) k_i^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \frac{1}{\sigma^2} + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left[\left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} - \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^2 \right] y_i^2 \right\} \\
&\quad + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i + r(z_i | \nu) \right\} r(z_i | \nu) y_i^2 \\
j_{\sigma\nu} &= -\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c_i^2}{\nu} + b_{01}(c_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \log \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - c_i r(c_i | \nu)) \right\} k_i r(c_i | \nu) \\
&\quad - \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^3 \right\} y_i \\
&\quad - \frac{\alpha-1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} + b_{01}(z_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - z_i r(z_i | \nu)) \right\} y_i r(z_i | \nu) \\
j_{\sigma\alpha} &= -\sum_{i=1}^n (1 - d_i) r(c_i | \nu) k_i - \sum_{i=1}^n d_i r(z_i | \nu) y_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\nu\nu} = & \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n (1-d_i) \left\{ \psi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) - \psi_1\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{2}{\nu(\nu+1)} + b_{01}^2(c_i | \nu) \right. \\
& - \frac{1}{\nu} b_{01}(c_i | \nu) + \frac{1}{\nu} \left(2b_{01}(c_i | \nu) - \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \right) c_i r(c_i | \nu) \\
& + \frac{1}{\nu+2} \frac{T(c_{2i} | \nu+2)}{T(c_i | \nu)} b_{21}(c_{2i} | \nu+2) - b_{02}(c_i | \nu) \\
& + \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c_i^2}{\nu} - \log \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right) + \frac{c_i}{\nu} r(c_i | \nu) \right] c_i r(c_i | \nu) \Big\} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi_1\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{2}{\nu^2} - \frac{4}{\nu^3} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i^2 \right. \\
& + \frac{2}{\nu^3} \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^4 \Big\} \\
& + \frac{\alpha-1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) - \psi_1\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \frac{2}{\nu(\nu+1)} + b_{01}^2(z_i | \nu) \right. \\
& - \frac{1}{\nu} b_{01}(z_i | \nu) + \frac{1}{\nu} \left(2b_{01}(z_i | \nu) - \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \right) z_i r(z_i | \nu) \\
& + \frac{1}{\nu+2} \frac{T(z_{2i} | \nu+2)}{T(z_i | \nu)} b_{21}(z_{2i} | \nu+2) - b_{02}(z_i | \nu) \\
& + \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) + \frac{z_i}{\nu} r(z_i | \nu) \right] z_i r(z_i | \nu) \Big\} \\
j_{\nu\alpha} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (1-d_i) \left\{ \psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - b_{01}(c_i | \nu) - \frac{c_i r(c_i | \nu)}{\nu} \right\} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - b_{01}(z_i | \nu) - \frac{z_i r(z_i | \nu)}{\nu} \right\} \\
j_{\alpha\alpha} = & \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

B.3 Matriz de Informação Observada: Modelo PT Truncado

As expressões para os elementos da matriz de informação observada do modelo PT truncado são dados a seguir. Estes elementos são obtidos calculando a segunda derivada da função de

log-verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\varphi}; \mathbf{Y})$ em (3.32), em que $\boldsymbol{\varphi} = (\gamma, \sigma, \alpha, \nu)^\top$.

$$\begin{aligned}
j_{\gamma\gamma} &= -n_1\alpha \left\{ r(c \mid \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c^2}{\nu} \right)^{-1} c \right\} r(c \mid \nu) \\
&\quad + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \sum_{y_i \leq k} \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} - \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^2 \right\} \\
&\quad + (\alpha - 1) \sum_{y_i \leq k} \left\{ r(z_i \mid \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i \right\} r(z_i \mid \nu) \\
j_{\gamma\sigma} &= n_1\alpha \left\{ r(c \mid \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c^2}{\nu} \right)^{-1} c \right\} k r(c \mid \nu) \\
&\quad - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \sum_{y_i \leq k} \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} - \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^2 \right\} y_i \\
&\quad - (\alpha - 1) \sum_{y_i \leq k} \left\{ r(z_i \mid \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i \right\} y_i r(z_i \mid \nu) \\
j_{\gamma\nu} &= -\frac{n_1\alpha}{2} \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c^2}{\nu} + b_{01}(c \mid \nu) \right. \\
&\quad \left. - \log \left(1 + \frac{c^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - c r(c \mid \nu)) \right\} r(c \mid \nu) \\
&\quad + \frac{1}{\nu^2} \sum_{y_i \leq k} \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^3 \right\} \\
&\quad + \frac{\alpha-1}{2} \sum_{y_i \leq k} \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} + b_{01}(z_i \mid \nu) \right. \\
&\quad \left. - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - z_i r(z_i \mid \nu)) \right\} r(z_i \mid \nu) \\
j_{\gamma\alpha} &= -n_1 r(c \mid \nu) + \sum_{y_i \leq k} r(z_i \mid \nu) \\
j_{\sigma\sigma} &= -n_1\alpha \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c^2}{\nu} \right)^{-1} c + r(c \mid \nu) \right\} r(c \mid \nu) k^2 \\
&\quad + \sum_{y_i \leq k} \left\{ \frac{1}{\sigma^2} + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left[\left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} - \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^2 \right] y_i^2 \right\} \\
&\quad + (\alpha - 1) \sum_{y_i \leq k} \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i + r(z_i \mid \nu) \right\} r(z_i \mid \nu) y_i^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\sigma\nu} &= \frac{n_1\alpha}{2} \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c^2}{\nu} + b_{01}(c | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \log \left(1 + \frac{c^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - cr(c | \nu)) \right\} kr(c | \nu) \\
&\quad - \frac{1}{\nu^2} \sum_{y_i \leq k} \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^3 \right\} y_i \\
&\quad - \frac{\alpha-1}{2} \sum_{y_i \leq k} \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} + b_{01}(z_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - z_i r(z_i | \nu)) \right\} y_i r(z_i | \nu) \\
j_{\sigma\alpha} &= n_1 r(c_i | \nu) k_i - \sum_{y_i \leq k} r(z_i | \nu) y_i \\
j_{\nu\nu} &= -\frac{n_1\alpha}{4} \left\{ \psi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right) - \psi_1 \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{2}{\nu(\nu+1)} + b_{01}^2(c | \nu) \right. \\
&\quad - \frac{1}{\nu} b_{01}(c | \nu) + \frac{1}{\nu} \left(2b_{01}(c | \nu) - \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \right) cr(c | \nu) \\
&\quad + \frac{1}{\nu+2} \frac{T(c_2 | \nu+2)}{T(c | \nu)} b_{21}(c_2 | \nu+2) - b_{02}(c | \nu) \\
&\quad \left. + \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c^2}{\nu} - \log \left(1 + \frac{c^2}{\nu} \right) + \frac{c}{\nu} r(c | \nu) \right] cr(c | \nu) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{y_i \leq k} \left\{ \psi_1 \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right) + \frac{2}{\nu^2} - \frac{4}{\nu^3} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\nu^3} \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^4 \right\} \\
&\quad + \frac{\alpha-1}{4} \sum_{y_i \leq k} \left\{ \psi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right) - \psi_1 \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{2}{\nu(\nu+1)} + b_{01}^2(z_i | \nu) \right. \\
&\quad - \frac{1}{\nu} b_{01}(z_i | \nu) + \frac{1}{\nu} \left(2b_{01}(z_i | \nu) - \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \right) z_i r(z_i | \nu) \\
&\quad + \frac{1}{\nu+2} \frac{T(z_{2i} | \nu+2)}{T(z_i | \nu)} b_{21}(z_{2i} | \nu+2) - b_{02}(z_i | \nu) \\
&\quad \left. + \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) + \frac{z_i}{\nu} r(z_i | \nu) \right] z_i r(z_i | \nu) \right\} \\
j_{\nu\alpha} &= \frac{n_1}{2} \left\{ \psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - b_{01}(c_i | \nu) - \frac{c_i r(c_i | \nu)}{\nu} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{y_i \leq k} \left\{ \psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - b_{01}(z_i | \nu) - \frac{z_i r(z_i | \nu)}{\nu} \right\} \\
j_{\alpha\alpha} &= \sum_{y_i \leq k} \frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

B.4 Matriz de Informação Modelo PT-CR

B.4.1 Matriz de Informação Observada

Computando a segunda derivada parcial da função de log-verissimilhança (3.42) obtemos os elementos da matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})$ para o modelo PT-CR model. Temos que

$$\begin{aligned}
 j\gamma\gamma^\top &= \alpha \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \left\{ r(-c_i \mid \nu) - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} c_i \right\} \\
 &\quad \times r(-c_i \mid \nu) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \\
 &\quad + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} - \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^2 \right\} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \\
 &\quad + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n d_i \left\{ r(z_i \mid \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i \right\} \\
 &\quad \times r(z_i \mid \nu) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \\
 j\gamma\sigma &= - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} - \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^2 \right\} y_i \mathbf{x}_i \\
 &\quad - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n d_i \left\{ r(z_i \mid \nu) + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i \right\} \\
 &\quad \times r(z_i \mid \nu) y_i \mathbf{x}_i \\
 j\gamma\nu &= \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n (1 - d_i) \left\{ \left(\psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) (1 + R(c_i \mid \nu)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\nu} (1 + c_i r(c_i \mid \nu) R(c_i \mid \nu)) - R(c_i \mid \nu) b_{01}(c_i \mid \nu) - \log \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c_i^2}{\nu} \right\} r(-c_i \mid \nu) \mathbf{x}_i \\
 &\quad + \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^3 \right\} \mathbf{x}_i \\
 &\quad + \frac{\alpha - 1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} + b_{01}(z_i \mid \nu) \right. \\
 &\quad \left. - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - z_i r(z_i \mid \nu)) \right\} r(z_i \mid \nu) \mathbf{x}_i \\
 j\gamma\alpha &= \sum_{i=1}^n (1 - d_i) r(-c_i \mid \nu) \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n d_i r(z_i \mid \nu) \mathbf{x}_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\sigma\sigma &= \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \frac{1}{\sigma^2} + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left[\left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} - \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^2 \right] y_i^2 \right\} \\
&\quad + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n I_i \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i + r(z_i | \nu) \right\} r(z_i | \nu) y_i^2 \\
j\sigma\nu &= -\frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^3 \right\} y_i \\
&\quad - \frac{\alpha-1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} + b_{01}(z_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) - \frac{1}{\nu} (1 - z_i r(z_i | \nu)) \right\} r(z_i | \nu) y_i \\
j\sigma\alpha &= -\sum_{i=1}^n d_i r(z_i | \nu) y_i \\
j\nu\nu &= +\frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n (1-d_i) \left\{ \psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - b_{01}(c_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{c_i}{\nu} r(c_i | \nu) \right\}^2 R(c_i | \nu) (1 + R(c_i | \nu)) \\
&\quad - \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n (1-d_i) \left\{ \psi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right) - \psi_1 \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{2}{\nu(\nu+1)} + b_{01}^2(c_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\nu} b_{01}(c_i | \nu) + \frac{1}{\nu} \left(2b_{01}(c_i | \nu) - \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \right) c_i r(c_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\nu+2} \frac{T(c_{2i} | \nu+2)}{T(c_i | \nu)} b_{21}(c_{2i} | \nu+2) - b_{02}(c_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c_i^2}{\nu} - \log \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right) + \frac{c_i}{\nu} r(c_i | \nu) \right] \right. \\
&\quad \left. \times c_i r(c_i | \nu) \right\} R(c_i | \nu) \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi_1 \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right) + \frac{2}{\nu^2} - \frac{4}{\nu^3} \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} z_i^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\nu^3} \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-2} z_i^4 \right\} \\
&\quad + \frac{\alpha-1}{4} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right) - \psi_1 \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{2}{\nu(\nu+1)} + b_{01}^2(z_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\nu} b_{01}(z_i | \nu) + \frac{1}{\nu} \left(2b_{01}(z_i | \nu) - \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \right) z_i r(z_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\nu+2} \frac{T(z_{2i} | \nu+2)}{T(z_i | \nu)} b_{21}(z_{2i} | \nu+2) - b_{02}(z_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{z_i^2}{\nu} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \log \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu} \right) + \frac{z_i}{\nu} r(z_i | \nu) \right] z_i r(z_i | \nu) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\nu\alpha &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (1-d_i) \left\{ \psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - b_{01}(c_i | \nu) - \frac{c_i}{\nu} r(c_i | \nu) \right\} \\
&\quad \times R(c_i | \nu) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \left\{ \psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) - b_{01}(z_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{z_i}{\nu} r(z_i | \nu) \right\} \\
j\alpha\alpha &= -\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

em que $\psi_1(x) = \frac{d}{dx}\psi(x)$ é a função trigama.

B.4.2 Matriz de Informação Esperada

A matriz de informação esperada $\mathbf{I}(\boldsymbol{\varphi})$ é obtida tomando $\mathbf{I}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbb{E}[\mathbf{J}(\boldsymbol{\varphi})]$, que envolve o computo de momentos truncados que não têm forma fechada e devem ser obtidos numericamente.

Temos que os elementos $I_{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_j}$ da matriz de informação esperada são dados por

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{\gamma\gamma} &= \sum_{i=1}^n \left\{ r(-c_i | \nu) - \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \left(1 + \frac{c_i}{\nu}\right)^{-1} c_i \right\} \phi_{\alpha}(-c_i | \nu) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\top} \\
&\quad + \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \sum_{i=1}^n \left\{ a_{020}(-c_i | \nu) - \frac{2}{\nu} a_{042}(-c_i | \nu) \right\} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\top} \\
&\quad + (\alpha - 1) t(0 | \nu) \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) a_{121}(-c_i | \nu) \right. \\
&\quad \left. + t(0 | \nu) a_{200}(-c_i | \nu) \right\} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\top} \\
\mathbf{I}_{\gamma\sigma} &= -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \sum_{i=1}^n \{ a_{021}(-c_i | \nu) + c_i a_{020}(-c_i | \nu) \} \mathbf{x}_i \\
&\quad + \frac{2}{\sigma} \left(\frac{\nu+1}{\nu^2}\right) \sum_{i=1}^n \{ a_{043}(-c_i | \nu) + c_i a_{042}(-c_i | \nu) \} \mathbf{x}_i \\
&\quad - (t(0 | \nu))^2 \left(\frac{\alpha-1}{\sigma}\right) \sum_{i=1}^n \{ a_{201}(-c_i | \nu) + c_i a_{200}(-c_i | \nu) \} \mathbf{x}_i \\
&\quad - t(0 | \nu) \left(\frac{\alpha-1}{\sigma}\right) \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \sum_{i=1}^n \{ a_{122}(-c_i | \nu) \\
&\quad + c_i a_{121}(-c_i | \nu) \} \mathbf{x}_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\gamma\nu} &= \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) (1 + R(c_i | \nu)) \right. \\
&\quad - \frac{1}{\nu} (1 + c_i r(c_i | \nu) R(c_i | \nu)) - R(c_i | \nu) b_{01}(c_i | \nu) - \log \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c_i^2}{\nu} \left. \right\} \phi_{\alpha}(-c_i | \nu) \mathbf{x}_i \\
&\quad + \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^n \left\{ a_{021}(-c_i | \nu) - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) a_{043}(-c_i | \nu) \right\} \mathbf{x}_i \\
&\quad + t(0 | \nu) \left(\frac{\alpha-1}{2} \right) \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) a_{122}(-c_i | \nu) - a_{10}(-c_i | \nu) \right. \\
&\quad + b_{110}(-c_i | \nu) - \frac{1}{\nu} (a_{100}(-c_i | \nu) - t(0 | \nu) a_{201}(-c_i | \nu)) \left. \right\} \mathbf{x}_i \\
I_{\gamma\alpha} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \phi_{\alpha}(-c_i | \nu) \mathbf{x}_i + t(0 | \nu) \sum_{i=1}^n a_{100}(-c_i | \nu) \mathbf{x}_i \\
I_{\sigma\sigma} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) [a_{022}(-c_i | \nu) + 2c_i a_{021}(-c_i | \nu) \right. \\
&\quad + c_i^2 a_{020}(-c_i | \nu) - \frac{2}{\nu} (a_{044}(-c_i | \nu) + 2c_i a_{043}(-c_i | \nu) \\
&\quad + c_i^2 a_{042}(-c_i | \nu))] \left. \right\} \\
&\quad + t(0 | \nu) \left(\frac{\alpha-1}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) [a_{123}(-c_i | \nu) + 2c_i a_{122}(-c_i | \nu) \right. \\
&\quad + c_i^2 a_{121}(-c_i | \nu)] + t(0 | \nu) [a_{202}(-c_i | \nu) + 2c_i a_{201}(-c_i | \nu) \\
&\quad + c_i^2 a_{200}(-c_i | \nu)] \left. \right\} \\
I_{\sigma\nu} &= - \frac{1}{\sigma\nu^2} \sum_{i=1}^n \{ a_{022}(-c_i | \nu) + c_i a_{021}(-c_i | \nu) \\
&\quad - \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) [a_{044}(-c_i | \nu) + c_i a_{043}(-c_i | \nu)] \} \{T(-c_i | \nu)\}^{\alpha} \\
&\quad - t(0 | \nu) \left(\frac{\alpha-1}{2\sigma} \right) \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\nu+1}{\nu^2} \right) [a_{123}(-c_i | \nu) + c_i a_{122}(-c_i | \nu)] \right. \\
&\quad - a_{11}(-c_i | \nu) - c_i a_{10}(-c_i | \nu) + b_{111}(-c_i | \nu) + c_i b_{110}(-c_i | \nu) \\
&\quad - \frac{1}{\nu} [a_{101}(-c_i | \nu) + c_i a_{100}(-c_i | \nu)] \\
&\quad + \frac{1}{\nu} [t(0 | \nu) a_{202}(-c_i | \nu) + c_i t(0 | \nu) a_{201}(-c_i | \nu)] \left. \right\} \\
I_{\sigma\alpha} &= - \frac{t(0 | \nu)}{\sigma} \sum_{i=1}^n \{ a_{101}(-c_i | \nu) + c_i a_{100}(-c_i | \nu) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\nu\nu} = & \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ \psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - b_{01}(c_i | \nu) - \frac{c_i}{\nu} r(c_i | \nu) \right\}^2 \\
& \times R(c_i | \nu) (1 + R(c_i | \nu)) \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha \\
& - \frac{\alpha}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ \psi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right) - \psi_1 \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{2}{\nu(\nu+1)} + b_{01}^2(c_i | \nu) \right. \\
& - \frac{1}{\nu} b_{01}(c_i | \nu) + \frac{1}{\nu} \left(2b_{01}(c_i | \nu) - \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \right) c_i r(c_i | \nu) \\
& - b_{02}(c_i | \nu) + \frac{T(c_{2i} | \nu+2) b_{21}(c_{2i} | \nu+2)}{(\nu+2) T(c_{2i} | \nu)} \\
& + \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right)^{-1} \frac{c_i^2}{\nu} \right. \\
& \left. - \log \left(1 + \frac{c_i^2}{\nu} \right) + \frac{c_i}{\nu} r(c_i | \nu) \right] c_i r(c_i | \nu) \left. \right\} R(c_i | \nu) \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ \psi_1 \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right) + \frac{2}{\nu^2} - \frac{4a_{022}(-c_i | \nu)}{\nu^3 (1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha)} \right. \\
& + \frac{2}{\nu^3} \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right) \frac{a_{044}(-c_i | \nu)}{(1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha)} \left. \right\} (1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha) \\
& + \frac{\alpha-1}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ \psi_1 \left(\frac{\nu}{2} \right) - \psi_1 \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{2}{\nu(\nu+1)} \right. \\
& + \frac{b_{020}(-c_i | \nu)}{1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha} - \frac{b_{010}(-c_i | \nu)}{\nu(1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha)} \\
& + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2t(0 | \nu) b_{111}(-c_i | \nu)}{1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha} - \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \frac{t(0 | \nu) a_{101}(-c_i | \nu)}{(1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha)} \right] \\
& - E[b_{02}(z_i | \nu)] + \left(\frac{1}{\nu+2} \right) E \left[\frac{T(z_{2i} | \nu+2)}{T(z_i | \nu)} b_{21}(z_{2i} | \nu+2) \right] \\
& + \frac{t(0 | \nu)}{\nu(1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha)} \left[\left(\frac{\nu+1}{\nu^2} \right) a_{123}(-c_i | \nu) - a_{11}(-c_i | \nu) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\nu} t(0 | \nu) a_{202}(-c_i | \nu) \right] \left. \right\} (1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha) \\
I_{\nu\alpha} = & \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \left\{ \psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - b_{01}(c_i | \nu) - \frac{c_i}{\nu} r(c_i | \nu) \right\} \\
& \times (r(-c_i | \nu))^{-1} \phi_\alpha(-c_i | \nu) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \psi \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{b_{010}(-c_i | \nu)}{1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha} \right. \\
& \left. - \frac{t(0 | \nu) a_{101}(-c_i | \nu)}{\nu(1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha)} \right\} (1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha) \\
I_{\alpha\alpha} = & \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n (1 - \{T(-c_i | \nu)\}^\alpha)
\end{aligned}$$

em que b_{01} , b_{02} , e b_{21} são dados por (3.29) e devem ser obtidos numericamente. Os componentes a_{kmn} , a_{kn} and b_{kmn} , são dados na Proposição 4 de ven ser computados numericamente também.

B.5 Função Escore e Matriz de Informação Observada no Modelo PNLMM

Apresentamos nesta seção as expressões para elementos da função escore e a matriz de informação observada do modelo de regressão linear misto normal-potência desenvolvido na Capítulo 3.

B.5.1 Função Escore

Considerando a fdp da distribuição normal-potência (2.13) e considerando o modelo de regressão normal-potência com intercepto aleatório potência-normal dado em (4.2), o logaritmo da função de verossimilhança aproximada (4.7) pode ser expresso como

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}) \approx \sum_{i=1}^n \log B_i \quad (\text{B.3})$$

em que

$$B_i = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i$$

e

$$A_i = \exp \left(m_i \log(\alpha_e/\eta_e) + \sum_{j=1}^{m_i} \log \phi(z_{ij}) + (\alpha_e - 1) \sum_{j=1}^{m_i} \log \Phi(z_{ij}) + \log(\alpha_g) + (\alpha_g - 1) \log \Phi(\sqrt{2}u_k) \right)$$

com $z_{ij} = (y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k)/\eta_e$. A função escore é obtida diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança (B.3) em relação a cada um dos parâmetros. Definindo $v_{ij} = \frac{\phi(z_{ij})}{\Phi(z_{ij})}$, obtemos que $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{U}_\beta^\top(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_g}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_g}(\boldsymbol{\theta}))^\top$, com

$$\begin{aligned} U_\beta(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{X}_i^\top \mathbf{D}_{i1}}{B_i}, & U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{D_{i2}}{B_i}, & U_{\eta_g}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{D_{i3}}{B_i}, \\ U_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{D_{i4}}{B_i}, & U_{\alpha_g}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{D_{i5}}{B_i} \end{aligned}$$

em que $\mathbf{X}_i$ é uma matriz de dimensão $m_i \times p$ com linhas $\mathbf{x}_{ij}^\top = (x_{ij1}, \dots, x_{ijp})$, para $j = 1, \dots, m_i$, e

$$\mathbf{D}_{i1} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1}^\top \mathbf{E}_{i1},$$

com $\mathbf{P}_{i1} = \text{diag}\{1/\eta_e, \dots, 1/\eta_e\}$ uma matriz $m_i \times m_i$, e $\mathbf{E}_{i1} = (e_{i11}, \dots, e_{im_i1})^\top$ um vetor de dimensão $m_i \times 1$ de elementos $e_{ij1} = z_{ij} - (\alpha_e - 1)v_{ij}$. A quantidade D_{i2} em $U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta})$ é dada por

$$D_{i2} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1}^{*\top} \mathbf{E}_{i2},$$

em que $\mathbf{P}_{i1}^* = (1/\eta_e, \dots, 1/\eta_e)^\top$ é um vetor de dimensão $m_i \times 1$, e $\mathbf{E}_{i2} = (e_{i12}, \dots, e_{im_i2})^\top$ é um vetor de dimensão $m_i \times 1$ de elementos $e_{ij2} = -1 + z_{ij}^2 - (\alpha_e - 1)z_{ij}v_{ij}$. A quantidade D_{i3} em $U_{\eta_g}(\boldsymbol{\theta})$ é dada por

$$D_{i3} = \sum_{k=1}^Q \frac{\sqrt{2}\omega_k u_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1}^{*\top} \mathbf{E}_{i1},$$

e a quantidade D_{i4} in $U_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta})$ é dada por

$$D_{i4} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{1}_{m_i}^\top \mathbf{E}_{i3},$$

em que $\mathbf{E}_{i3} = (e_{ij3}, \dots, e_{im_i3})^\top$ é um vetor de dimensão $m_i \times 1$ com elementos $e_{ij3} = \frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij})$ e $\mathbf{1}_{m_i}$ é um vetor de uns de dimensão $m_i \times 1$. Finalmente a quantidade D_{i5} em $U_{\alpha_g}(\boldsymbol{\theta})$ é dada por

$$D_{i5} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i Q_4,$$

em que $Q_4 = \frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2}u_k)$.

B.5.2 Matriz de Informação Observada

A matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ de ordem $(p+5) \times (p+5)$ para o modelo de regressão normal-potência com intercepto aleatório distribuído normal-potência é dada por:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_{\beta\beta} & \dot{\mathbf{j}}_{\beta\eta_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\beta\eta_g} & \dot{\mathbf{j}}_{\beta\alpha_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\beta\alpha_g} \\ \dot{\mathbf{j}}_{\eta_e\beta} & \dot{\mathbf{j}}_{\eta_e\eta_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\eta_e\eta_g} & \dot{\mathbf{j}}_{\eta_e\alpha_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\eta_e\alpha_g} \\ \dot{\mathbf{j}}_{\eta_g\beta} & \dot{\mathbf{j}}_{\eta_g\eta_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\eta_g\eta_g} & \dot{\mathbf{j}}_{\eta_g\alpha_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\eta_g\alpha_g} \\ \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_e\beta} & \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_e\eta_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_e\eta_g} & \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_e\alpha_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_e\alpha_g} \\ \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_g\beta} & \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_g\eta_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_g\eta_g} & \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_g\alpha_e} & \dot{\mathbf{j}}_{\alpha_g\alpha_g} \end{bmatrix}$$

em que $\dot{\mathbf{j}}_{\boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_k}$ é obtida como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{j}}_{\boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_k} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{U}_k(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \left(\frac{1}{B_i} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{B_i} \frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_j \partial \boldsymbol{\theta}_k} - \frac{1}{B_i^2} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \right) \end{aligned} \tag{B.4}$$

Baseados em (B.4) obtemos as derivadas apresentadas a seguir

$$\begin{aligned}
j_{\beta^\top \beta} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^\top \left(\frac{\mathbf{D}_{i1} \mathbf{D}_{i1}^\top}{B_i^2} - \frac{\mathbf{D}_{i6}}{B_i} \right) \mathbf{X}_i, & j_{\eta_g \alpha_e} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i3} D_{i4}}{B_i^2} - \frac{D_{i16}}{B_i} \right), \\
j_{\beta \eta_e} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^\top \left(\frac{\mathbf{D}_{i1} D_{i2}}{B_i^2} - \frac{\mathbf{D}_{i7}}{B_i} \right), & j_{\eta_g \alpha_g} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i3} D_{i5}}{B_i^2} - \frac{D_{i17}}{B_i} \right), \\
j_{\beta \eta_g} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^\top \left(\frac{\mathbf{D}_{i1} D_{i3}}{B_i^2} - \frac{\mathbf{D}_{i8}}{B_i} \right), & j_{\alpha_e \alpha_e} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i4}^2}{B_i^2} - \frac{D_{i18}}{B_i} \right), \\
j_{\beta \alpha_e} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^\top \left(\frac{\mathbf{D}_{i1} D_{i4}}{B_i^2} - \frac{\mathbf{D}_{i9}}{B_i} \right), & j_{\alpha_e \alpha_g} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i4} D_{i5}}{B_i^2} - \frac{D_{i19}}{B_i} \right), \\
j_{\beta \alpha_g} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^\top \left(\frac{\mathbf{D}_{i1} D_{i5}}{B_i^2} - \frac{\mathbf{D}_{i10}}{B_i} \right), & j_{\alpha_g \alpha_g} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i5}^2}{B_i^2} - \frac{D_{i20}}{B_i} \right), \\
j_{\eta_e \eta_e} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i2}^2}{B_i^2} - \frac{D_{i11}}{B_i} \right), & j_{\eta_e \alpha_g} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i2} D_{i5}}{B_i^2} - \frac{D_{i14}}{B_i} \right), \\
j_{\eta_e \eta_g} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i2} D_{i3}}{B_i^2} - \frac{D_{i12}}{B_i} \right), & j_{\eta_g \eta_g} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i3}^2}{B_i^2} - \frac{D_{i15}}{B_i} \right), \\
j_{\eta_e \alpha_e} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{i2} D_{i4}}{B_i^2} - \frac{D_{i13}}{B_i} \right).
\end{aligned}$$

em que B_i , $\mathbf{D}_{i1}$, D_{i2} , D_{i3} , D_{i4} e D_{i5} são definidos como acima, e nós definimos também

$$\mathbf{D}_{i6} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1} \left(\mathbf{E}_{i1} \mathbf{E}_{i1}^\top + \mathbf{R}_{i1} \right) \mathbf{P}_{i1},$$

com $\mathbf{R}_{i1} = \text{diag}\{r_{i11}, \dots, r_{im_i1}\}$ uma matriz $m_i \times m_i$ de elementos $r_{ij1} = -1 - (\alpha_e - 1)(z_{ij}v_{ij} + v_{ij}^2)$. A matriz $\mathbf{D}_{i7}$ é definida por

$$\mathbf{D}_{i7} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1} \left(\mathbf{E}_{i1} \mathbf{E}_{i2}^\top + \mathbf{R}_{i2} \right) \mathbf{P}_{i1}^*,$$

com $\mathbf{R}_{i2} = \text{diag}\{r_{i12}, \dots, r_{im_i2}\}$ uma matriz $m_i \times m_i$ de elementos $r_{ij2} = -2z_{ij} - (\alpha_e - 1)(-v_{ij} + z_{ij}^2 v_{ij} + z_{ij} v_{ij}^2)$. As matrizes $\mathbf{D}_{i8}$ e $\mathbf{D}_{i9}$ são dadas por

$$\mathbf{D}_{i8} = \sum_{k=1}^Q \frac{\sqrt{2} u_k \omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1} \left(\mathbf{E}_{i1} \mathbf{E}_{i1}^\top + \mathbf{R}_{i1} \right) \mathbf{P}_{i1}^* \quad \text{e}$$

$$\mathbf{D}_{i9} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1} \left(\mathbf{E}_{i1} \mathbf{E}_{i3}^\top + \mathbf{R}_{i3} \right) \mathbf{P}_{i1}^*,$$

respectivamente, com $\mathbf{R}_{i3} = \text{diag}\{r_{i13}, \dots, r_{im_i3}\}$ uma matriz $m_i \times m_i$ com elementos $r_{ij3} = -v_{ij}$.

$\mathbf{D}_{i10}$ e D_{i11} são dados respectivamente por

$$\mathbf{D}_{i10} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i^* E_4 \mathbf{P}_{i1} \mathbf{E}_{i1} \mathbf{P}_{i1}^{*\top} \quad \text{e}$$

$$D_{i11} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1}^{*\top} \left(\mathbf{E}_{i2} \mathbf{E}_{i2}^\top + \mathbf{R}_{i4} \right) \mathbf{P}_{i1}^*,$$

com $\mathbf{R}_{i4} = \text{diag}\{r_{i14}, \dots, r_{im_i4}\}$ uma matriz $m_i \times m_i$ de elementos $r_{ij4} = 1 - 3z_{ij}^2 - (\alpha_e - 1)(-2z_{ij}v_{ij} + z_{ij}^2v_{ij} + z_{ij}^2v_{ij}^2)$. As quantidades D_{i12} e D_{i13} são dadas por

$$D_{i12} = \sum_{k=1}^Q \frac{\sqrt{2}u_k\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1}^{*\top} \left(\mathbf{E}_{i2} \mathbf{E}_{i1}^\top + \mathbf{R}_{i2} \right) \mathbf{P}_{i1}^* \quad \text{e}$$

$$D_{i13} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{1}_{m_i}^\top \left(\mathbf{E}_{i2} \mathbf{E}_{i3}^\top + \mathbf{R}_{i5} \right) \mathbf{P}_{i1}^*,$$

respectivamente, com $\mathbf{R}_{i5} = \text{diag}\{r_{i15}, \dots, r_{im_i5}\}$ uma matriz $m_i \times m_i$ de elementos $r_{ij5} = -z_{ij}v_{ij}$. As quantidades D_{i14} , D_{i15} e D_{i16} são dadas por

$$D_{i14} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i E_4 \mathbf{P}_{i1}^{*\top} \mathbf{E}_{i2},$$

$$D_{i15} = \sum_{k=1}^Q \frac{2u_k^2\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{P}_{i1}^{*\top} \left(\mathbf{E}_{i1} \mathbf{E}_{i1}^\top + \mathbf{R}_{i1} \right) \mathbf{P}_{i1}^* \quad \text{e}$$

$$D_{i16} = \sum_{k=1}^Q \frac{\sqrt{2}u_k\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i^* \mathbf{1}_{n_i}^\top \left(\mathbf{E}_{i1} \mathbf{E}_{i3}^\top + \mathbf{R}_{i6} \right) \mathbf{P}_{i1}^*,$$

com $\mathbf{R}_{i6} = \text{diag}\{r_{i16}, \dots, r_{im_i6}\}$ uma matriz $m_i \times m_i$ de elementos $r_{ij6} = -v_{ij}$. As quantidades D_{i17} e D_{i18} são dadas por

$$D_{i17} = \sum_{k=1}^Q \frac{\sqrt{2}u_k\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i E_4 \mathbf{P}_{i1}^{*\top} \mathbf{E}_{i1} \quad \text{e}$$

$$D_{i18} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \mathbf{1}_{m_i}^\top \left(\mathbf{E}_{i3} \mathbf{E}_{i3}^\top + \mathbf{R}_{i7} \right) \mathbf{1}_{m_i},$$

com $\mathbf{R}_{i7} = \text{diag}\{r_{i17}, \dots, r_{im_i7}\}$ uma matriz $m_i \times m_i$ de elementos $r_{ij7} = -1/\alpha_e^2$. Finalmente, nós definimos

$$D_{i19} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i E_4 \mathbf{1}_{m_i}^\top \mathbf{E}_{i3} \quad \text{e}$$

$$D_{i20} = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left(E_4^2 - \frac{1}{\alpha_g^2} \right).$$

B.5.3 Função Escore para o PNLMM

Considerando a fdp da distribuição normal-potência (2.13) e considerando o modelo de regressão linear misto normal-potência dado em (4.17), temos que

$$f_{Y|\gamma}(y_{ij} | \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\eta}_g; \boldsymbol{\beta}, \eta_e, \alpha_e) = \frac{\alpha_e}{\eta_e} \phi(z_{ij}) \{\Phi(z_{ij})\}^{\alpha_e-1}$$

em que $z_{ij} = (y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2} \mathbf{w}_{ij}^\top \boldsymbol{\eta}_g^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_k) / \eta_e$, $\mathbf{u}_k = (u_{k_1}, \dots, u_{k_q})^\top$, e assim, o logaritmo da função de verossimilhança aproximada (4.23) pode ser expresso como

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}) \approx \sum_{i=1}^n \log B_i \quad (\text{B.5})$$

em que

$$B_i = \sum_{k_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{k_q=1}^{Q_q} \frac{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_q}}{\pi^{q/2}} A_i$$

com

$$\begin{aligned} A_i = \exp \bigg\{ & m_i \log \left(\frac{\alpha_e}{\eta_e} \right) + \sum_{j=1}^{m_i} \log \phi(z_{ij}) + (\alpha_e - 1) \sum_{j=1}^{m_i} \log \Phi(z_{ij}) \\ & + \sum_{l=1}^q \log(\alpha_l) + \sum_{l=1}^{q-1} \log \left(1 + \frac{l}{\alpha} \right) - \sum_{l=1}^q \left(\frac{\alpha_l}{\alpha} + 1 \right) \log \Phi \left(\sqrt{2} u_{k_l} \right) \\ & - (\alpha + q) \log \left\{ \sum_{l=1}^q \left[\Phi \left(\sqrt{2} u_{k_l} \right) \right]^{-\alpha_l/\alpha} - (q-1) \right\} \bigg\} \end{aligned}$$

sendo u_{k_l} e ω_{k_l} os pontos e os pesos da quadratura de Gauss-Hermite multidimensional para $l = 1, \dots, q$, respectivamente. A função escore é obtida diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança (B.5) em relação a cada um dos parâmetros, e fica dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}^\top(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{U}_{\boldsymbol{\eta}_g}^\top(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}_g}^\top(\boldsymbol{\theta}), U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta}), \right)^\top,$$

em que $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = (U_{\beta_1}(\boldsymbol{\theta}), \dots, U_{\beta_p}(\boldsymbol{\theta}))^\top$, $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\eta}_g}(\boldsymbol{\theta}) = (U_{\eta_1}(\boldsymbol{\theta}), \dots, U_{\eta_q}(\boldsymbol{\theta}))^\top$, e $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\alpha}_g}(\boldsymbol{\theta}) = (U_{\alpha_1}(\boldsymbol{\theta}), \dots, U_{\alpha_q}(\boldsymbol{\theta}), U_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}))^\top$, com

$$\begin{aligned} U_{\beta_l}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{k_q=1}^{Q_q} \frac{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_q}}{\pi^{q/2}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left\{ z_{ij} - (\alpha_e - 1) \frac{\phi(z_{ij})}{\Phi(z_{ij})} \right\} \frac{x_{ijl}}{\eta_e} \\ &\quad \text{para } l = 1, \dots, p; \\ U_{\eta_r}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{k_q=1}^{Q_q} \frac{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_q}}{\pi^{q/2}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left\{ z_{ij} - (\alpha_e - 1) \frac{\phi(z_{ij})}{\Phi(z_{ij})} \right\} \frac{\sqrt{2} w_{ijr} u_{k_r}}{\eta_e} \\ &\quad \text{para } r = 1, \dots, q; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\alpha_r}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{k_q=1}^{Q_q} \frac{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_q}}{\pi^{q/2}} A_i \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{\alpha_r} - \frac{1}{\alpha} \log \Phi(\sqrt{2}u_{k_r}) \left(1 - \frac{(\alpha + q) [\Phi(\sqrt{2}u_{k_r})]^{-\alpha_r/\alpha}}{\sum_{l=1}^q [\Phi(\sqrt{2}u_{k_l})]^{-\alpha_l/\alpha} - (q-1)} \right) \right\} \\
&\quad \text{para } r = 1, \dots, q; \\
U_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{k_q=1}^{Q_q} \frac{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_q}}{\pi^{q/2}} A_i \\
&\quad \times \left\{ -\sum_{l=1}^{q-1} \frac{l}{\alpha(\alpha + l)} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{l=1}^q \alpha_l \log \Phi(\sqrt{2}u_{k_l}) \right. \\
&\quad \left. - \log \left\{ \sum_{l=1}^q [\Phi(\sqrt{2}u_{k_l})]^{-\alpha_l/\alpha} - (q-1) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\alpha + q) \sum_{l=1}^q \alpha_l [\Phi(\sqrt{2}u_{k_l})]^{-\alpha_l/\alpha} \log \Phi(\sqrt{2}u_{k_l})}{\alpha^2 \left(\sum_{l=1}^q [\Phi(\sqrt{2}u_{k_l})]^{-\alpha_l/\alpha} - (q-1) \right)} \right\} \\
U_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{k_q=1}^{Q_q} \frac{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_q}}{\pi^{q/2}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left\{ -1 + z_{ij}^2 - (\alpha_e - 1) \frac{\phi(z_{ij})}{\Phi(z_{ij})} \right\} \frac{1}{\eta_e}; \\
U_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k_1=1}^{Q_1} \cdots \sum_{k_q=1}^{Q_q} \frac{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_q}}{\pi^{q/2}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left\{ \frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right\};
\end{aligned}$$

B.6 Função Escore e Matriz de Informação Observada para o Modelo PNDC-RE

Apresentamos nesta seção as expressões para elementos da função escore e a matriz de informação observada do modelo PNDC-RE. O logaritmo da função de verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o)$ dado em (5.23) pode ser expresso como

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}^o) = \sum_{i=1}^n \log B_i \quad (\text{B.6})$$

em que

$$B_i = \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i$$

com

$$\begin{aligned}
A_i &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^{m_i} d_{0ij} \alpha_e \log \Phi(z_{0ij}) + d_{2ij} \log \left(1 - \{\Phi(z_{2ij})\}^{\alpha_e} \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - d_{0ij} - d_{2ij}) \left(\log(\alpha_e/\eta_e) + \log \phi(z_{ij}) + (\alpha_e - 1) \log \Phi(z_{ij}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \log \alpha_g + (\alpha_g - 1) \log \Phi(\sqrt{2}u_k) \right\}, \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

sendo $z_{0ij} = (c_{0ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k)/\eta_e$, $z_{2ij} = (c_{2ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k)/\eta_e$ e $z_{ij} = (y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} - \sqrt{2}\eta_g u_k)/\eta_e$

B.6.1 Função Escore

Diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança (B.6) em relação a cada um dos parâmetros obtemos os componentes do vetor de escore $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ dado em (5.24) a seguir:

$$\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left(-\alpha_e \mathbf{X}_{0i}^\top \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{W}_{0i} + \mathbf{X}_{1i}^\top \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{Q}_{1i} + \mathbf{X}_{2i}^\top \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{H}_{2i} \right), \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{U}_{\eta_e}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left(-\alpha_e \mathbf{Z}_{0i}^\top \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{W}_{0i} + \boldsymbol{\Lambda}_i^{*\top} \mathbf{Q}_{2i} + \mathbf{Z}_{2i}^\top \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{H}_{2i} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{U}_{\eta_g}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\sqrt{2}\omega_k u_k}{\sqrt{\pi}} A_i \boldsymbol{\Lambda}_i^{*\top} \left(-\alpha_e \mathbf{W}_{0i} + \mathbf{Q}_{1i} + \mathbf{H}_{2i} \right), \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{U}_{\alpha_e}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left(\mathbf{1}_{m_i}^\top \mathbf{P}_{0i} + \mathbf{1}_{n_i}^\top \mathbf{Q}_{3i} - \frac{1}{\alpha_e} \mathbf{P}_{2i}^\top \mathbf{H}_{2i} \right), \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{U}_{\alpha_g}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left(\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2}u_k) \right), \quad (\text{B.12})$$

em que $\mathbf{X}_{0i}$, $\mathbf{X}_{1i}$ e $\mathbf{X}_{2i}$ são matrizes de dimensão $m_i \times 1$ associadas aos valores $Y_{ij}^o = c_{0ij}$, $Y_{ij}^o = Y_{ij}$ e $Y_{ij} = c_{2ij}$ respectivamente; $\mathbf{Z}_{0i} = (z_{0i1}, \dots, z_{0im_i})^\top$ e $\mathbf{Z}_{2i} = (z_{2i1}, \dots, z_{2im_i})^\top$ são vetores de dimensão $m_i \times 1$; $\boldsymbol{\Lambda}_i = \text{diag}\{1/\eta_e, \dots, 1/\eta_e\}$ é uma matriz de dimensão $m_i \times 1$, e $\boldsymbol{\Lambda}_i^* = (1/\eta_e, \dots, 1/\eta_e)^\top$ é um vetor de dimensão $m_i \times 1$. As quantidades, $\mathbf{Q}_{1i}$, $\mathbf{Q}_{2i}$ e $\mathbf{Q}_{3i}$ são vetores de dimensão $m_i \times 1$ com componentes dados respectivamente por $q_{1ij} = z_{ij} - (\alpha_e - 1)w_{ij}$, $q_{2ij} = -1 + z_{ij}^2 - (\alpha_e - 1)z_{ij}w_{ij}$ e $q_{3ij} = \frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij})$ com $w_{ij} = \phi(z_{ij})/\Phi(z_{ij})$. $\mathbf{W}_{0i} = (w_{0i1}, \dots, w_{0im_i})^\top$ com $w_{0ij} = \phi(z_{0ij})/\Phi(z_{0ij})$ e $\mathbf{H}_{2i} = (h_{2i1}, \dots, h_{2im_i})^\top$; $\mathbf{P}_{0i}$, e $\mathbf{P}_{2i}$ são vetores $m_i \times 1$ com $p_{0ij} = \log \Phi(z_{0ij})$ e $p_{2ij} = w_{2ij}^{-1} \log \Phi(z_{2ij})$ com $w_{2ij} = \phi(z_{2ij})/\Phi(z_{2ij})$. Finalmente $r_{0ij} = \alpha_e \phi(z_{0ij})/\Phi(z_{0ij})$ e $h_{2ij} = (\alpha_e \phi(z_{2ij})[\Phi(z_{2ij})]^{\alpha_e-1})/(1 - [\Phi(z_{2ij})]^{\alpha_e})$ são as funções de risco e risco inverso da distribuição normal-potência respectivamente.

B.6.2 Matriz de Informação Observada

Os elementos da matriz de informação observada $\mathbf{j}_{\boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_k}$ para o modelo PNDC-RE dada em são obtidos calculado a segunda derivada da função de log-verossimilhança (B.6) em relação a cada um dos parâmetros, isto é, usando a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\boldsymbol{\theta}_j \boldsymbol{\theta}_k} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{U}_k(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \left(\frac{1}{B_i} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{B_i} \frac{\partial^2 B_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_j \partial \boldsymbol{\theta}_k} - \frac{1}{B_i^2} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} \frac{\partial B_i}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \right) \end{aligned}$$

e são dados por

$$\begin{aligned}
j_{\beta_l \beta_{l'}} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1) w_{ij}) x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& \left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl'}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1) w_{ij}) x_{ijl'}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl'}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& + \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e (z_{0ij} + w_{0ij}) w_{0ij} x_{ijl} x_{ijl'}}{\eta_e^2} \right]^{d_{0ij}} \left[-\frac{(1 + (\alpha_e - 1) (z_{ij} + w_{ij}) w_{ij}) x_{ijl} x_{ijl'}}{\eta_e^2} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\
& \left. \left[\frac{(z_{2ij} - (\alpha_e - 1) w_{2ij} - h_{2ij}) h_{2ij} x_{ijl} x_{ijl'}}{\eta_e^2} \right]^{d_{2ij}} \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1) w_{ij}) x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl'}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1) w_{ij}) x_{ijl'}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl'}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right\} \\
j_{\beta_l \eta_e} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1) w_{ij}) x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1 + z_{ij}^2 - (\alpha_e - 1) z_{ij} w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& + \sum_{j=1}^{n_i} \left[-\frac{\alpha_e (z_{0ij}^2 - 1 + w_{0ij} z_{0ij}) w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e^2} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(-2z_{ij} - (\alpha_e - 1) (z_{ij}^2 w_{ij} - w_{ij} + z_{ij} w_{ij}^2)) x_{ijl}}{\eta_e^2} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\
& \left. \left[\frac{(z_{2ij}^2 - (\alpha_e - 1) z_{2ij} w_{2ij} - 1 - z_{2ij} h_{2ij}) h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e^2} \right]^{d_{2ij}} \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1) w_{ij}) x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1 + z_{ij}^2 - (\alpha_e - 1) z_{ij} w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j\beta_l\eta_g = & -\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1)w_{ij})x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1)w_{ij})\sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \\
& + \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e (z_{0ij} + w_{0ij}) w_{0ij} x_{ijl} \sqrt{2} u_k}{\eta_e^2} \right]^{d_{0ij}} \left[-\frac{(1 + (\alpha_e - 1)(z_{ij} + w_{ij})w_{ij})x_{ijl} \sqrt{2} u_k}{\eta_e^2} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\
& \left. \left[\frac{(z_{2ij} - (\alpha_e - 1)w_{2ij} - h_{2ij})h_{2ij} x_{ijl} \sqrt{2} u_k}{\eta_e^2} \right]^{d_{2ij}} \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1)w_{ij})x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1)w_{ij})\sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right\} \\
j\beta_l\alpha_e = & -\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1)w_{ij})x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left(\sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{d_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \\
& + \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[-\frac{w_{ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\
& \left. \left[\frac{(h_{2ij}(\alpha_e^{-1} + \log \Phi(z_{2ij})) + \alpha_e^{-1} w_{2ij}^{-1} h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij}))x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1)w_{ij})x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{d_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{d_{2ij}} \right) \right\} \\
j\beta_l\alpha_g = & -\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1)w_{ij})x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2} u_k) \right) \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1)w_{ij})x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} x_{ijl}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2} u_k) \right] \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\eta_e \eta_e} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1+z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{ij}w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right)^2 \right. \right. \\
& + \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{\alpha_e(2z_{0ij}w_{0ij}-z_{0ij}^3w_{0ij}-z_{0ij}^2w_{0ij}^2)}{\eta_e^2} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{1-3z_{ij}^2-(\alpha_e-1)(z_{ij}^3w_{ij}+z_{ij}^2w_{ij}^2-2z_{ij}w_{ij})}{\eta_e^2} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\
& \left. \left[\frac{(-1+z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{2ij}w_{2ij}-z_{2ij}h_{2ij})h_{2ij}}{\eta_e^2} \right]^{d_{2ij}} \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1+z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{ij}w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right)^2 \Bigg\} \\
j_{\eta_e \eta_g} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1+z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{ij}w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij}-(\alpha_e-1)w_{ij})\sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \\
& + \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e(z_{0ij}^2-1+w_{0ij}z_{0ij})w_{0ij}\sqrt{2} u_k}{\eta_e^2} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(-2z_{ij}-(\alpha_e-1)(z_{ij}^2w_{ij}-w_{ij}+z_{ij}w_{ij}^2))\sqrt{2} u_k}{\eta_e^2} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\
& \left. \left[\frac{(z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{2ij}w_{2ij}-1-z_{2ij}h_{2ij})h_{2ij}\sqrt{2} u_k}{\eta_e^2} \right]^{d_{2ij}} \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1+z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{ij}w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij}-(\alpha_e-1)w_{ij})\sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right\} \\
j_{\eta_e \alpha_e} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1+z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{ij}w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left(\sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{d_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \\
& + \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{w_{0ij} z_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[-\frac{w_{ij} z_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\
& \left. \left[\frac{(h_{2ij}(\alpha_e^{-1} + \log \Phi(z_{2ij})) + \alpha_e^{-1} w_{2ij}^{-1} h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})) z_{ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1+z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{ij}w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{d_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{d_{2ij}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\eta_e \alpha_g} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1+z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{ij}w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2}u_k) \right) \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e z_{0ij} w_{0ij}}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{-1+z_{ij}^2-(\alpha_e-1)z_{ij}w_{ij}}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2}u_k) \right] \right) \right\} \\
j_{\eta_g \eta_g} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij}-(\alpha_e-1)w_{ij})\sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}\sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& + \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e(z_{0ij}+w_{0ij})w_{0ij}2u_k^2}{\eta_e^2} \right]^{d_{0ij}} \left[-\frac{(1+(\alpha_e-1)(z_{ij}+w_{ij})w_{ij})2u_k^2}{\eta_e^2} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\
& \left. \left[\frac{(z_{2ij}-(\alpha_e-1)w_{2ij}-h_{2ij})h_{2ij}2u_k^2}{\eta_e^2} \right]^{d_{2ij}} \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij}-(\alpha_e-1)w_{ij})\sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}\sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \left. \right\}^2 \\
j_{\eta_g \alpha_e} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij}-(\alpha_e-1)w_{ij})\sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}\sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
& \left(\sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{d_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& + \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{w_{0ij} \sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[-\frac{w_{ij} \sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \\
& \left. \left[\frac{(h_{2ij}(\alpha_e^{-1} + \log \Phi(z_{2ij})) + \alpha_e^{-1} w_{2ij}^{-1} h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})) \sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right] \\
& - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij}-(\alpha_e-1)w_{ij})\sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij}\sqrt{2}u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \\
& \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{I_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{d_{2ij}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{\eta_g \alpha_g} &= - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1) w_{ij}) \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2} u_k) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{\alpha_e w_{0ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{0ij}} \left[\frac{(z_{ij} - (\alpha_e - 1) w_{ij}) \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[\frac{h_{2ij} \sqrt{2} u_k}{\eta_e} \right]^{d_{2ij}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2} u_k) \right] \right) \right\} \\
j_{\alpha_e \alpha_e} &= - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{d_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{I_{2ij}} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{m_i} \left[-\frac{1}{\alpha_e} \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij} (1 - \{\Phi(z_{2ij})\}^{\alpha_e})} \right]^{I_{2ij}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{d_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{d_{2ij}} \right)^2 \right\} \\
j_{\alpha_e \alpha_g} &= - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{d_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{I_{2ij}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2} u_k) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \sum_{j=1}^{m_i} [\log \Phi(z_{0ij})]^{d_{0ij}} \left[\frac{1}{\alpha_e} + \log \Phi(z_{ij}) \right]^{1-d_{0ij}-d_{2ij}} \left[-\frac{h_{2ij} \log \Phi(z_{2ij})}{\alpha_e w_{2ij}} \right]^{I_{2ij}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2} u_k) \right] \right) \right\} \\
j_{\alpha_g \alpha_g} &= - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\left(\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2} u_k) \right)^2 - \frac{1}{\alpha_g^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{B_i^2} \left(\sum_{k=1}^Q \frac{\omega_k}{\sqrt{\pi}} A_i \left[\frac{1}{\alpha_g} + \log \Phi(\sqrt{2} u_k) \right] \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- Aitkin (1999)** M. Aitkin. A general maximum likelihood analysis of variance components in generalized linear models. *Biometrics*, 55:117–128. Citado na pág. [1](#)
- Akaike (1974)** H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *Autom Control IEEE Trans*, 19:716–723. Citado na pág. [26](#), [35](#)
- Arellano-Valle e Azzalini (2008)** R. B. Arellano-Valle e A. Azzalini. The centred parametrization for the multivariate skew-normal distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 99(7):1362–1382. doi: 10.1016/j.jmva.2008.01.020. Citado na pág. [6](#), [7](#), [24](#)
- Arellano-Valle e Azzalini (2013)** R. B. Arellano-Valle e A. Azzalini. The centred parametrization and related quantities of the skew- t distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 113:73–90. doi: 10.1016/j.jmva.2011.05.016. Citado na pág. [24](#), [25](#)
- Arellano-Valle et al. (2005)** R. B. Arellano-Valle, H. Bolfarine e V. H. Lachos. Skew-normal linear mixed models. *Journal of Data Science*, 3(4):415–438. Citado na pág. [41](#), [42](#), [48](#), [52](#), [56](#)
- Arellano-Valle et al. (2007)** R. B. Arellano-Valle, H. Bolfarine e V. H. Lachos. Bayesian inference for skew-normal linear mixed models. *Journal of Applied Statistics*, 34(6):663–682. Citado na pág. [41](#)
- Arellano-Valle et al. (2012)** R. B. Arellano-Valle, L. M. Castro, G. González-Farías e K. A. Muñoz Gajardo. Student- t censored regression model: properties and inference. *Statistical Methods & Applications*, 21(4):453–473. doi: 10.1007/s10260-012-0199-y. Citado na pág. [iii](#), [iv](#), [4](#), [16](#), [29](#), [32](#), [35](#), [36](#), [40](#), [81](#)
- Arnold (2004)** B.C. Arnold. Discussion of jones, m. c. families of distribution arising from distribution of order statistics. *Test*, 13:23–25. Citado na pág. [9](#)
- Arnold et al. (1999)** B.C. Arnold, E. Castillo e J. M. Sarabia. *Conditionally Specification of Statistical Model*. Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York. Citado na pág. [12](#)
- Atkinson (1985)** A. C. Atkinson. *Plots, Transformations and Regression: An Introduction to Graphical Methods of Diagnostic Regression Analysis*. Oxford University Press", New York. Citado na pág. [46](#), [48](#)
- Azzalini (1985)** A. Azzalini. A class of distributions which includes the the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12:171–178. Citado na pág. [6](#), [9](#), [10](#), [16](#), [78](#)
- Azzalini e Capitanio (2003)** A. Azzalini e A. Capitanio. Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t -distribution. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, 65(2):367–389. doi: 10.1111/1467-9868.00391. Citado na pág. [iii](#), [iv](#), [6](#), [8](#), [10](#), [16](#), [17](#), [39](#)

- Barros et al. (2010)** M. Barros, M. Galea, M. González e V. Leiva. Influence diagnostics in the tobit censored response model. *Statistical Methods & Applications*, 19(3):379–397. doi: 10.1007/s10260-010-0135-y. Citado na pág. 35
- Bayes et al. (2012)** C. L. Bayes, J. L. Bazán e C. García. A new robust regression model for proportions. *Bayesian Analysis*, 7(4):841–866. Citado na pág. 1
- Bozdogan (1987)** H. Bozdogan. Model selection and akaike’s information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika.*, 52(3):345–370. doi: 10.1007/BF02294361. Citado na pág. 26
- Branco e Dey (2001)** M. D. Branco e D. K. Dey. A general class of multivariate skew-elliptical distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 79(1):99–113. doi: 10.1006/jmva.2000.1960. Citado na pág. 8, 16
- Branscum et al. (2007)** A. J. Branscum, W. O. Johnson e M. C. Thurmond. Bayesian beta regression: Applications to household expenditure data and genetic distance between foot and mouth disease viruses. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 49(3):287–301. Citado na pág. 1
- Butler e Louis (1992)** S. M. Butler e T. A. Louis. Random effects models with non parametrics priors. *Statistics in Medicine*, 11:1981–2000. Citado na pág. 41
- Chen et al. (2002)** J. Chen, D. Zhang e M. Davidian. A monte carlo em algorithm for generalized linear mixed models with flexible random effects distributions. *Biostatistics*, 3:347–360. Citado na pág. 1
- Colosimo e Giolo (2006)** E. A. Colosimo e S. R. Giolo. *Análise de Sobrevida Aplicada*. ABE-Projeto Fisher. Citado na pág. 3
- Delandre et al. (2014)** M. Delandre, M. Lavielle e M. A. Poursat. A note on BIC in mixed-effects models. *Electronic Journal of Statistics*, 8(1):456–475. doi: 10.1214/14-EJS890. Citado na pág. 46, 72
- Diggle et al. (2004)** P. J. Diggle, P. Heagerty, Liang K. Y. e S. L. Zeger. *Analysis of Longitudinal Data*. Oxford University Press, Oxford, second ed. Citado na pág. 1
- Durrans (1992)** S. R. Durrans. Distributions of fractional order statistics in hydrology. *Water Resources Research*, 28:1649–1655. Citado na pág. 9, 10, 16, 42, 78
- Evans e Swartz (2000)** M. Evans e T. B. Swartz. *Approximating Integrals via Monte Carlo and Deterministic Methods*. Oxford University Press, New York, first ed. Citado na pág. 15
- Fahrmeir e Tutz (2001)** L. Fahrmeir e G. Tutz. *Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models*. Springer Verlag, New York, second ed. Citado na pág. 15
- Fernandes et al. (2006)** J. Fernandes, C. Salinas, S. London, R. Wiegand, E. Hill, E. Slate, J. Grewal, P. Werner, J. Sanders e M. Lopes-Virella. Prevalence of periodontal disease in gullah african american diabeticsm. *Journal of Dental Research*, 85:997. Citado na pág. 73
- Ferrari e Cribari-Neto (2004)** S. L. Ferrari e F. Cribari-Neto. Beta regression for modelling rates and proportion. *Journal of Applied Statistics*, 31:799–815. Citado na pág. 1

- Figueroa-Zúñiga et al. (2013)** J. Figueroa-Zúñiga, R. Arellano-Valle e S. L. Ferrari. Mixed beta regression: A bayesian perspective. *Computational Statistics and Data Analysis*, 61:137–147. Citado na pág. [1](#), [80](#)
- Fitzmaurice et al. (2004)** G. M. Fitzmaurice, N. M. Laid e J. H. Ware. *Applied Longitudinal Analysis*. Wiley-Interscience, New Jersey. Citado na pág. [5](#)
- Flecher et al. (2010)** C. Flecher, D. Allard e P. Naveau. Truncated skew-normal distributions: moments, estimation by weighted moments and application to climatic data. *Metron-International Journal of Statistics*, 68(3):331–345. Citado na pág. [7](#), [8](#)
- Fong et al. (2010)** Y. Fong, H. Rue e J. Wakefield. Bayesian inference for generalized linear mixed models. *Biostatistics*, 11(3):397–412. Citado na pág. [1](#)
- Gallant e Nychka (1987)** A. R. Gallant e D. W. Nychka. Semi-nonparametric maximum likelihood estimation. *Econometrica*, 55(2):363–390. doi: 10.2307/1913241. Citado na pág. [41](#)
- Galvis et al. (2014)** D. M. Galvis, D. Bandyopadhyay e V. H. Lachos. Augmented mixed beta regression models for periodontal proportion data. *Statistics in Medicine*, 33(21):3759–3771. doi: 10.1002/sim.6179. Citado na pág. [1](#), [2](#), [57](#), [73](#)
- Garay et al. (2017)** A. M. Garay, V. H. Lachos, H. Bolfarine e C. R. B Cabral. Linear censored regression models with scale mixtures of normal distributions. *Statistical Papers*, 58(1):247–278. doi: 10.1007/s00362-015-0696-9. Citado na pág. [4](#), [35](#), [36](#), [37](#), [40](#), [81](#)
- Garay (2014)** A. W. Garay. *Modelos de regressão para dados Censurados sob Distribuições Simétricas*. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil. Citado na pág. [3](#)
- Global Volcanism Program (2013)** Global Volcanism Program. Volcanoes of the world, v. 4.6.0. venzke, e (ed.). Smithsonian Institution. doi: dx.doi.org/10.5479/si.GVP.VOTW4-2013. Citado na pág. [25](#)
- Gupta (2003)** A. K. Gupta. Multivariate skew t -distribution. *Statistics*, 37(4):359–363. doi: 10.1080/715019247. Citado na pág. [16](#)
- Gupta e Gupta (2004)** R. C. Gupta e R. D. Gupta. Generalized skew normal model. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*, 13(2):501–524. Citado na pág. [10](#)
- Gupta e Gupta (2008)** R. D. Gupta e R. C. Gupta. Analyzing skewed data by power normal model. *Test*, 17(1):197–210. doi: 10.1007/s11749-006-0030-x. Citado na pág. [1](#), [8](#), [9](#), [10](#), [81](#)
- Hughes (1999)** J. P. Hughes. Mixed effects models with censored data with application to hiv rna levels. *Biometric*, 55:625–629. Citado na pág. [1](#)
- Jacqmin-Gadda et al. (2000)** H. Jacqmin-Gadda, R. Thiébaud, G. Chêne e D. Commenges. Analysis of left-censored longitudinal data with application to viral load in hiv infection. *Bioestatistics*, 1(4):397–412. Citado na pág. [1](#)
- Jones e Faddy (2003)** M. C. Jones e M. J. Faddy. A skew extension of the t -distribution, with applications. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, 65(1):159–174. Citado na pág. [16](#)
- Kalbfleish e Lawless (1992)** J. Kalbfleish e J. Lawless. Some useful statistical methods for truncated data. *Journal of Quality and Technology*, 24:145–152. Citado na pág. [4](#)

- Kundu e Gupta (2013)** D Kundu e R. D. Gupta. Power-normal distribution. *Statistics*, 47(1):110–125. doi: 10.1080/02331888.2011.568620. Citado na pág. [10](#), [12](#), [13](#), [14](#)
- Kutner et al. (2005)** M. Kutner, C. J. Nachtsheim, J. Neter e W. Li. *Applied Linear statistical Models*. McGraw-Hill, New York, fifth ed. Citado na pág. [46](#), [48](#)
- Lachos (2004)** V. H. Lachos. *Modelos lineares mistos assimetricos*. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil. Citado na pág. [41](#)
- Lachos et al. (2010)** V. H. Lachos, P. Ghosh e R. B. Arellano-Valle. Likelihood based inference for skew-normal independent linear mixed models. *Statistica Sinica*, 20(1):303–322. Citado na pág. [41](#)
- Laird e Ware (1982)** N. M. Laird e J. H. Ware. Random-effects models for longitudinal data. *Biometrics*, 38(4):963–974. Citado na pág. [2](#), [4](#), [5](#)
- Lee e Thompson (2008)** K. J. Lee e S. G. Thompson. Flexible parametric models for random-effects distributions. *Statistics in Medicine*, 27:418–43. Citado na pág. [1](#)
- Lehmann (1953)** E. L. Lehmann. The power of rank tests. *Ann Math Stat*, 24:23–43. Citado na pág. [10](#)
- Lin e Lee (2008)** T. I. Lin e J. K. Lee. Estimation and prediction in linear mixed models with skew-normal random effects for longitudinal data. *Statistics in Medicine*, 27(9):1490–1507. doi: 10.1002/sim.3026. Citado na pág. [41](#)
- Lindstrom e Bates (1988)** M. J. Lindstrom e D. M. Bates. Newton-raphson and em algorithms for linear mixed-effects models for repeated-measures data. *Journal of the American Statistical Association*, 83(404):1014–1022. Citado na pág. [5](#)
- Martínez-Flórez et al. (2013a)** G. Martínez-Flórez, B. C. Arnold, H. Bolfarine e H. W. Gómez. The multivariate alpha-power model. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 143(7):1244–1255. doi: 10.1016/j.jspi.2013.01.008. Citado na pág. [10](#), [12](#)
- Martínez-Flórez et al. (2013b)** G. Martínez-Flórez, H. Bolfarine e H. W. Gómez. The alpha-power tobit model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42(4):633–643. doi: 10.1080/03610926.2011.630770. Citado na pág. [1](#), [32](#), [33](#), [63](#)
- Martínez-Flórez et al. (2014)** G. Martínez-Flórez, H. Bolfarine e H. W. Gómez. Skew-normal alpha-power model. *Statistic: A journal of Theoretical and Applied Statistics*, 48(6):1414–1428. doi: 10.1080/02331888.2013.826659. Citado na pág. [16](#), [17](#), [21](#)
- Martínez-Flórez et al. (2015)** G. Martínez-Flórez, H. Bolfarine e H. W. Gómez. Doubly censored power-normal regression models with inflation. *Test*, 24(2):265–286. Citado na pág. [57](#)
- Matos et al. (2013)** L. A. Matos, M. O. Pretes, M. H. Chen e V. H. Lachos. Likelihood-based inference for mixed-effects models with censored response using the multivariate-*t* distribution. *Statistica Sinica*, 23:1323–1342. Citado na pág. [4](#)
- McCulloch et al. (2008)** C. E. McCulloch, S. R. Searle e J. M. Neuhaus. *Generalized, Linear, and Mixed Models*. John Wiley and Sons, New York, second ed. Citado na pág. [1](#)
- Molenberghs e Verbeke (2005)** G. Molenberghs e G. Verbeke. *Models for Discrete Longitudinal Data*. Springer Verlag, New York. Citado na pág. [1](#), [6](#), [46](#)

- Moulton e Hasley (1995)** L. H. Moulton e N. A. Hasley. A mixture model with detection limits for regression analyses of antibody response to vaccine. *Biometrics*, 51:1570–1578. Citado na pág. 57
- Mroz (1987)** T. A. Mroz. The sensitivity of an empirical model of married women's hours of work to economic and statistical assumptions. *Econometrica*, 55(4):765–799. doi: 10.2307/1911029. Citado na pág. 36, 37
- Nelson (1977)** F. D Nelson. Censored regression models with unobserved, stochastic censoring thresholds. *Journal of Econometrics*, 6:309–327. Citado na pág. 4
- Nelson (1990)** W. Nelson. Hazard plotting of left truncated life data. *Journal of Quality and Technology*, 22:230–238. Citado na pág. 4
- Olsen (1978)** R. J. Olsen. Note on the uniqueness of the maximum likelihood estimator for the tobit model. *Econometrica*, 46(5):1211–1215. Citado na pág. 29, 30, 33
- Ortega et al. (2003)** E. M. Ortega, H. Bolfarine e G. A. Paula. Influence diagnostics in generalized log-gamma regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, 42:165–186. Citado na pág. 35
- Pan e Louis (2000)** W. Pan e T. A Louis. Mixed-effects model for multivariate censored data. *Biometrics*, 56(1):160–166. Citado na pág. 1
- Park et al. (2007)** J. W. Park, M. G. Genton e S. K. Ghosh. Censored times series analysis with autoregressive moving average models. *Canadian Journal of Statistics*, 35:151–168. Citado na pág. 4
- Pewsey et al. (2012)** A. Pewsey, H. W. Gómez e H. Bolfarine. Likelihood-based inference for power distributions. *Test*, 21(4):775–789. doi: 10.1007/s11749-011-0280-0. Citado na pág. 8, 10
- Pinheiro e Bates (2000)** J. C. Pinheiro e D. M. Bates. *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*. Springer Verlag, New York. Citado na pág. 5
- Pinheiro e Chao (2006)** J. C. Pinheiro e E. C. Chao. Efficient laplacian and adaptative gaussian quadrature algorithms for multilevel generalized linear mixed models. *American Statistical Association*, 15(1):58–81. Citado na pág. 44
- Pinheiro et al. (2001)** J. C. Pinheiro, C. Liu e Y. N. Wu. Efficient algorithms for robust estimation in linear mixed-effects models using the multivariate t distribution. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 10(2):249–276. doi: 10.1198/10618600152628059. Citado na pág. 41
- R Development Core Team (2017)** R Development Core Team. R: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria. R Foundation for Statistical Computing. URL <http://www.R-project.org>. ISBN 3-900051-07-0. Citado na pág. 18, 26, 52, 53, 73, 75, 78
- Rocha (2004)** F. M. Rocha. Seleção de estruturas de covariância em dados com medidas repetidas. dissertação de mestrado. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil. Citado na pág. 5
- Rosa et al. (2003)** G. J. M Rosa, C.R. Padovani, e G. Gianola. Robust linear mixed models with normal/independent distributions and bayesian MCMC implementation. *Biometrical Journal*, 45(5):573–590. doi: 10.1002/bimj.200390034. Citado na pág. 41

- Sahu et al. (2003)** S. K. Sahu, D. K. Dey e M. D Branco. A new class of multivariate skew distributions with applications to bayesian regression models. *The Canadian Journal of Statistics*, 31(2):129–150. doi: 10.2307/3316064. Citado na pág. 16
- Schwarz (1978)** G. Schwarz. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2):461–464. Citado na pág. 26, 35
- Stapleton e Young (1984)** D. C. Stapleton e J. D. Young. Censored normal regression with measurement error on the dependent variable. *Econometrica*, páginas 737–760. Citado na pág. 4
- Sugiura (1978)** N. Sugiura. Further analysis of the data by akaike’s information criterion and the finite corrections. *Communications In Statistics - Theory And Methods*, 7(1):13–26. doi: 10.1080/03610927808827599. Citado na pág. 35
- Thompson e Nelson (2003)** M. L. Thompson e K. P. Nelson. Linear regression with Type I interval and left-censored responde data. *Environmental and Ecological Statistics*, 10:221–230. Citado na pág. 4
- Tobin (1958)** J. Tobin. Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica*, 26(1):25–36. Citado na pág. 1, 16, 32, 57, 63, 80
- Usuga (2013)** O. C. Usuga. *Modelos de regressão beta com efeitos aleatórios normais e não normais para dados longitudinais*. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil. Citado na pág. 46, 47
- Vaida e Blanchard (2005)** F. Vaida e S. Blanchard. Conditional akaike information for mixed-effects models. *Biometrika*, 92:351–370. doi: 10.1093/biomet/92.2.351. Citado na pág. 46, 72
- Vaida e Liu (2009)** F. Vaida e L. Liu. Fast implementation for normal mixed effects models with censored response. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 18:797–817. Citado na pág. 4
- Vaida et al. (2007)** F. Vaida, A. Fitzgerald e V. DeGruttola. Efficient hybrid em for linear and nonlinear mixed effects models with censored response. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(12):5718–5730. Citado na pág. 44
- Verbeke e Lasaffre (1997)** G. Verbeke e E. Lasaffre. The effects of misspecifying the random-effects distribution in linear mixed models for longitudinal data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 23:541–556. Citado na pág. 1, 41
- Verbeke e Molenberghs (2009)** G. Verbeke e G. Molenberghs. *Linear Mixed Models for Longitudinal Data*. Springer Verlag, New York, second ed. Citado na pág. 1, 4, 6
- Verbeke et al. (2001)** G. Verbeke, B. Spiessens e E. Lassafre. Condicional linear mixed models. *The American Statistician*, 55(1):25–34. Citado na pág. 4, 6
- Vock et al. (2012)** D. M. Vock, M. Davidiam, A. A. Tsiatis e A. J. Muir. Mixed model analysis of censored longitudinal data with flexible random-effects density. *Biostatistics*, 13(1):61–73. Citado na pág. 1
- Weiss (2005)** R. E. Weiss. *Modeling Longitudinal Data*. Springer Verlag, New York. Citado na pág. 5

- Wu (2002)** L. Wu. A joint model for nonlinear mixed-effects models with censoring and covariates measured with error, with application to aids studies. *Journal of the American Statistical Association*, 97(460):955–964. Citado na pág. [1](#)
- Wu (2010)** L. Wu. *Mixed Effects Models for Complex Data*. Chapman and Hall/CRC, Florida. Citado na pág. [44](#)
- Yu (2010)** B. Yu. A bayesian mcmc approach to survival analysis with doubly-censored data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54:1921–1929. Citado na pág. [2](#)
- Zhang e Davidiam (2001)** D Zhang e M. Davidiam. Linear mixed models with flexible distributions of random effects for longitudinal data. *BIOMETR*, 57:975–802. Citado na pág. [41](#), [42](#), [52](#)
- Zhao e Kim (2016)** J. Zhao e H. M. Kim. Power t distribution. *Communications for Statistical Applications and Methods*, 23(4):321–334. doi: 10.5351/CSAM.2016.23.4.321. Citado na pág. [iii](#), [iv](#), [2](#), [8](#), [10](#), [16](#), [17](#), [23](#), [39](#), [82](#)