Um estudo sobre o Processo K não homogêneo

Gabriel Ribeiro da Cruz Peixoto

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, abril de 2011

Um estudo sobre o
Processo K não homogêneo

Esta versão definitiva da dissertação
contém as correções e alterações sugeridas pela
Comissão Julgadora durante a defesa realizada
por Gabriel Ribeiro da Cruz Peixoto em 22/2/2011.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Cristian Favio Coletti - UFABC
- Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Moraes Felinto de Oliveira - IMPA

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, José Milton e Hebe, que sempre priorizaram minha educação, me deram todas as oportunidades que puderam e me apoiaram em todas as minhas empreitadas.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Renato Fontes, que teve paciência de discutir e me guiar sempre que estive perdido durante esse trabalho, mas teve o cuidado de me dar mais perguntas do que respostas. Aprendi muito nesse processo.

Agradeço à minha família, que me atura até hoje. As baixinhas Raquel, Beatriz e Fernanda, meus avós Milton, Neide e Zina e minha tia Valéria.

Agradeço à todos meus professores, cujos ensinamentos me trouxeram até aqui. Em especial agradeço ao Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari, que me orientou durante minha iniciação científica e mudou minha visão da matemática.

Agradeço à todos meus amigos, sejam os que estudaram junto comigo, ou que simplesmente estavam lá quando eu queria me divertir. Em especial agradeço ao Daniel Valesin e ao Estéfano Alves de Souza, que revisaram esse texto.

Por fim gostaria de agradecer a banca examinadora, pelas inestimáveis sugestões para o presente texto.

Resumo

Processos K começaram a ser estudados nos anos 50 como uma fonte de contraexemplos e de comportamento patológico. Recentemente descobriu-se que eles são um limite de escalas para modelos de armadilha, fato que voltou a trazer certa atenção para eles.

Nesse trabalho vamos adotar uma abordagem construtiva, usando-a para mostrar a propriedade forte de Markov e calcular as taxas de transição e o gerador infinitesimal.
Palavras-chave: processos K, estados instantâneos, gerador infinitesimal.

Abstract

K Processes were studied in the 50's as a source of counter examples and of pathological behaviour. It is now know that they are a scaling limit for Trap Models, which led attention back to them.

In this work, we will adopt a constructive approach, using it to show the strong Markov propriety, calculate the transition rates and the infinitesimal generator.
Keywords: K processes, instantaneous states, infinitesimal generator.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Preliminares

Estudaremos uma família de processos markovianos em tempo contínuo sobre um espaço de estados enumerável. A primeira menção desse tipo de processos foi dada por Kolmogorov (1951). Seu objetivo era dar um exemplo de um processo que tivesse um estado com taxa de saída infinita.

Kendall e Reuter (1956) estudaram mais a fundo o exemplo de Kolmogorov, encontrando equações *forward* e *backward* para as probabilidades de transição.

Anos mais tarde, Reuter (1969) mostrou que apenas a matriz de taxas desse processo é suficiente para caracterizar as probabilidades de transição do exemplo de Kolmogorov. Ele também introduziu a não homogeneidade.

Os autores desses artigos abordaram o processo de uma maneira analítica. Em particular nenhum deles deu uma construção explícita para o processo estudado, se apoiando em teoremas de existência.

Recentemente, Fontes e Mathieu (2008) revisitaram esse tipo de processo com a motivação de que eles aparecem como limite de escala para Modelos de Armadilha. A maneira como abordamos o processo foi muito inspirada nesse trabalho e, em especial, a construção apresentada é uma adaptação da construção deles.

Nós estudamos uma família de processos que iremos chamar de Processos K não homogêneos, que é uma extensão natural dos processos estudados neste último artigo. A extensão vem do fato de darmos um peso para cada estado. Uma definição precisa do que são estes pesos será apresentada no Capítulo 2.

A adição de pesos resultou em um comportamento inesperado. Existem Processos K não homogêneos que não apresentam a propriedade de Feller. Iremos explicitar sobre quais condições isso acontece na Seção 4.3. Apesar disso, essa família possui propriedades que permitem que trabalhemos quase como se estivéssemos com processos de Feller.

1.2 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

- Apresentamos os Processos K não homogêneos de maneira construtiva, numa abordagem que - até onde sabemos - não aparece em outros textos.

- Calculamos explicitamente a matriz de taxas do Processo K. Assim fornecemos uma maneira de ligar nossa construção, quando $c > 0$, com os textos dos anos 50 e 60 citados anteriormente que não usa a teoria das formas de Dirichlet.

- Encontramos o gerador infinitesimal no caso homogêneo para $c = 0$.

1.3 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 vamos construir o Processo K não homogêneo e apresentar algumas definições básicas.

O Capítulo 3 vai nos fornecer ferramentas para trabalhar. Nele vamos apresentar uma maneira de aproximar processos K por processos markovianos de Saltos e provar a propriedade forte de Markov.

No Capítulo 4 vamos focar nas probabilidades de transição. Mostraremos que elas são funções contínuas no tempo e calcularemos suas derivadas na origem. Isso nos permitirá encontrar a medida invariante do processo. Aprofundando um pouco mais no cálculo de taxas de transição, exibiremos o gerador infinitesimal do processo no caso homogêneo.

Por fim mostraremos um resultado relativo à dimensão de Hausdorff do tempo em que o processo passa no infinito.

Capítulo 2

Construção do processo

2.1 Definições

Tomemos $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ A esse conjunto adicionaremos um novo símbolo, que denotaremos por ∞. Chamaremos esse novo conjunto de $\bar{\mathbb{N}}^*$.

O Processo K será um processo estocástico em tempo contínuo, cujo espaço de estados será $\bar{\mathbb{N}}^*$. Chamaremos os elementos de $\bar{\mathbb{N}}^*$ de estados ou sítios do processo.

Como parâmetros do processo, teremos uma família de números reais estritamente positivos, $\{\gamma_x, \lambda_x : x \in \mathbb{N}^*\}$, além de uma constante $c \in [0, \infty)$. Para um estado $x \in \mathbb{N}^*$, podemos interpretar γ_x como o tempo médio para o processo sair de x enquanto que λ_x vai controlar a taxa com que o processo tende a entrar em x. O parâmetro c controla o tempo em que o estado fica em ∞.

Seguindo Fontes e Mathieu (2008), iremos definir o Processo K através de uma construção. Para tanto consideremos um espaço de probabilidade que admita as seguintes famílias de variáveis aleatórias independentes:

- $\{N_x : x \in \mathbb{N}^*\}$: processos pontuais de Poisson independentes, onde N_x tem taxa λ_x para cada $x \in \mathbb{N}^*$.
- $\{T_0\} \cup \{T_n^x : x \in \mathbb{N}^*, n = 1, 2, 3, \dots\}$: variáveis aleatórias exponenciais de média 1.

Para $t \geqslant 0$, denotaremos por $N_x(t)$ o número de marcas do processo de Poisson N_x no intervalo $[0, t]$, marcas essas que iremos denotar por $0 < \sigma_1^x < \sigma_2^x < \dots$.

Agora podemos definir um processo estocástico auxiliar, que será nossa principal ferramenta para trabalhar com o Processo K. Para $t \geqslant 0$ e $y \in \bar{\mathbb{N}}^*$, sob a convenção que $\gamma_\infty = 0$ e $\sum_{n=1}^{0} \gamma_x T_n^x = 0$, definimos:

$$\Gamma(t) := \Gamma_c^y(t) = \gamma_y T_0 + \sum_{x \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N_x(t)} \gamma_x T_n^x + ct \tag{2.1}$$

Vamos impor algumas restrições sobre nossos parâmetros:

$$\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x \gamma_x < +\infty \tag{2.2}$$

$$\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x = \infty \tag{2.3}$$

A primeira fará com que Γ seja quase certamente ($q.c.$) finita para todo $t \in \mathbb{R}^+$, enquanto que a segunda fará com que o conjunto $\{\sigma_i^x : x \in \mathbb{N}^*,\ i \geqslant 1\}$ seja denso em $\mathbb{R}$. Veremos na Seção 2.2 que o Processo K sem essa segunda condição é bastante simples.

Denotaremos o Processo K com condição inicial $y \in \bar{\mathbb{N}}^*$ por X_c^y. Ele é definido para um instante $t \geqslant 0$ por:

$$X(t) = X_c^y(t) = \begin{cases} y, & \text{se } t < \gamma_y T_0 \\ x, & \text{se } \Gamma_c^y(\sigma_i^x -) \leqslant t < \Gamma_c^y(\sigma_i^x) \text{ para algum } i \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Para que essa definição faça sentido o limite a esquerda $\Gamma(\sigma_i^x -)$ deve existir. Isso será estabelecido na Proposição 3.3.

Omitiremos a condição inicial ou o parâmetro c das notações quando estes puderem ficar subentendidos.

Essa construção nos dá um acoplamento de Processos K com parâmetros $(\lambda_x, \gamma_x)_{x \in \mathbb{N}^*}$ para toda condição inicial y e todo $c \geqslant 0$.

2.2 Visualização do Processo

Unicamente para essa seção suporemos que $\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x < \infty$. Veremos que o Processo K com essa suposição é bastante simples. Usaremos essa simplicidade para explicar como nossa construção funciona. No resto do texto é assumido (2.3), que é exatamente o oposto.

A sobreposição de todos os processos de Poisson $\{N_x : x \in \mathbb{N}^*\}$ é um processo de Poisson de taxa $\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x$. Assim podemos $q.c.$ enumerar as marcas desse processo, denotando-as por $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots$.

O gráfico da função Γ, fora das marcas $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, é uma reta de inclinação c e, nas marcas, essa função dá saltos de tamanho $\gamma_x T_i^x$, para algum x e algum i. A Figura 2.1 ilustra uma possível realização de Γ.

Uma maneira de enxergar o Processo K é olhar para o eixo das ordenadas do gráfico de Γ. Se projetarmos um ponto t desse eixo no gráfico e ele "cair" em um salto da Γ, isso significa que no instante t o processo está no estado x cujo processo de Poisson gerou esse salto; caso contrário o processo está no ∞.

Com essa visualização, é fácil perceber que o Processo K é um processo markoviano de saltos.

Caso $c > 0$, iniciando em um estado y, o processo permanece nesse estado um tempo exponencial de média γ_y. Passado esse tempo ele pula para o ∞ onde permanece um tempo exponencial de média $\frac{c}{\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x}$, que é o tempo que demora para encontrarmos outra marca de um processo de Poisson. Depois disso escolhemos um novo estado y com probabilidade $\frac{\lambda_y}{\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x}$, e reiniciamos o procedimento.

Caso $c = 0$, o processo permanecerá em cada estado x um tempo exponencial de média γ_x, e escolhe pular para um novo estado y com probabilidade $\frac{\lambda_y}{\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x}$. Nesse caso o ∞ nunca é visitado. Vale até mesmo que $X^\infty(0) \neq \infty$ $q.c.$. De fato, para cada $y \in \mathbb{N}^*$, $P(X^\infty(0) = y) = \frac{\lambda_y}{\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x}$.

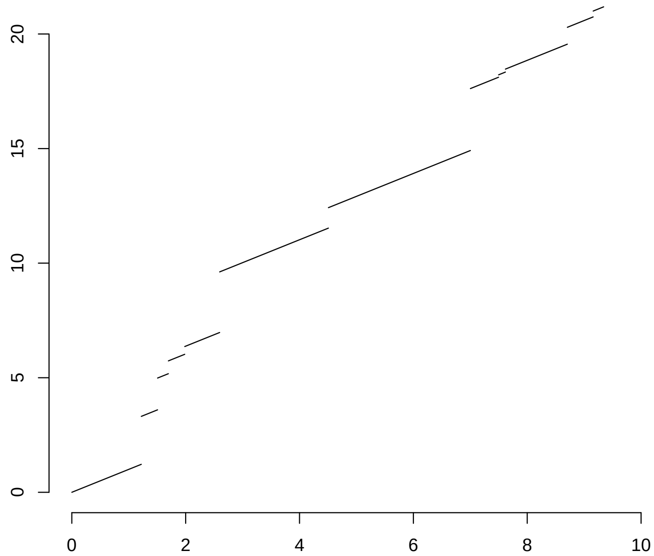

Figura 2.1: *Um exemplo de realização de* Γ *quando* $\sum_{x\in\mathbb{N}^*}\lambda_x < \infty$.

2.3 Topologia sobre o espaço de estados

Será útil para alguns resultados munirmos $\bar{\mathbb{N}}^*$ de uma topologia. Para isso considere a seguinte métrica:

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|, \tag{2.5}$$

para $x, y \in \bar{\mathbb{N}}^*$, sob a convenção de que $\frac{1}{\infty} = 0$.

Essa métrica induz uma topologia bastante natural, onde todo $x \in \mathbb{N}^*$ é um ponto isolado, e uma sequência converge ao ∞ nessa topologia se ela divergir para infinito da maneira usual.

Notemos que uma função $f : \bar{\mathbb{N}}^* \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se $f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Vale ainda que essa métrica é completa e gera uma topologia compacta. Assim temos boas propriedades para trabalhar.

Capítulo 3

Propriedades básicas do Processo K

Nesse capítulo estabeleceremos resultados que serão ferramentas básicas para trabalhar com o Processo K durante o resto da dissertação.

Apresentaremos uma maneira de aproximar o Processo K por processos markovianos de salto, bem como provaremos que o Processo K é fortemente markoviano.

3.1 Observações gerais

Nessa seção apontaremos várias observações sobre o Processo K, que serão usadas à exaustão em seções subsequentes.

Proposição 3.1. Γ *é* q.c. *estritamente crescente.*

Demonstração. Como estamos supondo que $\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x = \infty$, então o conjunto das marcas dos processos de Poisson é *q.c.* densa em $\mathbb{R}^+$. Em outras palavras, quase certamente, para todo $0 \leqslant s < t$, teremos que existe um $x \in \mathbb{N}^*$ e $i \geqslant 1$ tal que $s < \sigma_i^x < t$. Dessa forma, usando a definição de Γ, temos que:

$$\Gamma(t) - \Gamma(s) \geqslant \gamma_x T_i^x > 0.$$

□

Proposição 3.2. *Com probabilidade* 1, $\Gamma(t)$ *é finito para todo* $t \geqslant 0$.

Demonstração. Usando o Teorema da Convergência Monótona, podemos calcular:

$$\mathbb{E}\left[\Gamma^y(t)\right] = \gamma_y + t \sum_{x \in \mathbb{N}^*} \lambda_x \gamma_x + ct < \infty$$

Assim para cada $t \geqslant 0$ fixo, temos que $\Gamma(t)$ é quase certamente finito. Tomando uma sequência $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, temos que $P(\cap_{n=1}^{\infty} \{\Gamma^y(t_n) < \infty\} \cap \{\Gamma \text{ é crescente}\}) = 1$. Assim para realizações dentro desse evento, temos que $\Gamma(t_n) < \infty$ para todo n, e assim para cada $t \geqslant 0$ arbitrário podemos escolher um n tal que $t_n > t$. Dessa maneira $\Gamma(t) < \Gamma(t_n) < \infty$. □

Proposição 3.3. *A função* Γ *é quase certamente càdlàg, isso é, contínua à direita e tem limites à esquerda.*

Demonstração. Fixemos uma realização de Γ onde ela seja crescente e limitada em compactos. Vamos pedir ainda que cada processo de Poisson N_x, $x \in \mathbb{N}^*$, seja localmente finito. Tais realizações têm probabilidade 1.

O fato de Γ ser crescente e limitada em compactos já estabelece diretamente a existência dos limites à direita e à esquerda. Agora resta mostrar a continuidade à direita.

Para isso fixemos um $t \geqslant 0$ arbitrário. Para $s > 0$ temos:

$$\Gamma(t+s) - \Gamma(t) = cs + \sum_{x \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=N_x(t)+1}^{N_x(t+s)} \gamma_x T_i^x.$$

Para cada x, como N_x é localmente finito, vale que $N_x(t+s) = N_x(t)$ para s pequeno o suficiente. Dessa forma cada termo da série em x converge à zero. Encarando essa soma como uma integral sobre uma medida de contagem e usando o Teorema da Convergência Monótona, concluímos que:

$$\lim_{s \searrow 0} \Gamma(t+s) - \Gamma(t) = 0. \qquad \square$$

Proposição 3.4. *Para todo $t > 0$, $i \geqslant 1$ e $x \in \mathbb{N}^*$ vale que $\Gamma(t)$, $\Gamma(\sigma_i^x)$ e $\Gamma(\sigma_i^x-)$ são variáveis aleatórias com distribuição absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.*

Demonstração. Primeiramente fixemos um $t > 0$ e mostraremos que $\Gamma(t)$ tem distribuição absolutamente contínua em relação à Lebesgue.

Fixemos um boreliano A arbitrário que tenha medida de Lebesgue zero. Vamos mostrar que $P(\Gamma(t) \in A) = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, vale que:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_x T_i^x \in A\right) = 0,$$

já que as T_i^x são variáveis aleatórias contínuas e independentes.

Dessa forma vale que:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{N^x(t)} \gamma_x T_i^x \in A\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_x T_i^x \in A\right) \frac{e^{-\lambda_x t}(\lambda_x t)^n}{n!} \\ &= \mathbb{I}\{0 \in A\} e^{-\lambda_x t} \end{aligned}$$

Assim se denotarmos por ν a distribuição de $\sum_{x \geqslant 2} \sum_{i=1}^{N^x(s)} \gamma_x T_i^x$ e denotarmos por $A + s$ o conjunto A transladado por s, teremos que:

$$P\left(\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=1}^{N^x(t)} \gamma_x T_i^x \in A\right) = \int \nu(ds) P\left(\sum_{i=1}^{N^1(t)} \gamma_1 T_i^1 \in A - s\right).$$

Observemos que $0 \in A - s$ se e somente se $s \in A$, dessa forma a expressão acima vale $\nu(A) e^{-\lambda_1 t}$.

Utilizando indução, concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, vale que:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=1}^{N^x(t)} \gamma_x T_i^x \in A\right) &= \exp\left\{-t \sum_{x=1}^{n} \lambda_x\right\} P\left(\sum_{x > n} \sum_{i=1}^{N^x(t)} \gamma_x T_i^x \in A\right) \\ &\leqslant \exp\left\{-t \sum_{x=1}^{n} \lambda_x\right\}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{x\in\mathbb{N}^*} \lambda_x = \infty$, tomando valores de n cada vez maiores, concluímos que:

$$P\left(\sum_{x\in\mathbb{N}^*} \sum_{i=1}^{N^x(t)} \gamma_x T_i^x \in A\right) = 0.$$

Observando a definição de Γ, concluímos a primeira parte dessa proposição:

$$P\left(\Gamma(t) \in A\right) = 0.$$

Fixado $i \geqslant 1$ e $x \in \mathbb{N}^*$, se denotarmos por g_i^x a densidade de uma distribuição gamma de parâmetros λ_x e i, que é a lei de σ_i^x, teremos que:

$$P\left(\sum_{z\neq x} \sum_{j=1}^{N^z(\sigma_i^x)} \gamma_z T_j^z + c\sigma_i^x \in A\right) = \int_0^\infty P\left(\sum_{z\neq x} \sum_{j=1}^{N^z(s)} \gamma_z T_j^z \in A - cs\right) g_i^x(s)ds.$$

Usando argumentos análogos aos que usamos para provar que $\Gamma(t)$ é uma variável contínua, concluímos que a probabilidade que está sendo integrada vale zero, e portanto a integral também vale zero.

Por construção, observamos que:

$$\Gamma_c^y(\sigma_i^x) = \gamma_y T_0 + \sum_{j=1}^{i} \gamma_x T_j^x + \sum_{z\neq x} \sum_{j=1}^{N^z(\sigma_i^x)} \gamma_z T_j^z + c\sigma_i^x,$$
$$\Gamma_c^y(\sigma_i^x-) = \gamma_y T_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_x T_j^x + \sum_{z\neq x} \sum_{j=1}^{N^z(\sigma_i^x)} \gamma_z T_j^z + c\sigma_i^x.$$

Dessa forma tanto $\Gamma(\sigma_i^x)$ quanto $\Gamma(\sigma_i^x-)$ são somas de variáveis aleatórias contínuas e independentes, sendo portanto também contínuas. □

Proposição 3.5. *Para todo $y \in \mathbb{N}^*$ e $t \geqslant 0$, vale que $X^y(t + \gamma_y T_0^y) = X^\infty(t)$.*

Demonstração. Fixemos um $y \in \mathbb{N}^*$ e observemos que $\Gamma^y(s) = \Gamma^\infty(s) + \gamma_y T_0^y$ para todo $s \geqslant 0$.

Fixada uma realização do processo, suponha que $X^\infty(t) = x \in \mathbb{N}^*$; assim existe um $i \geqslant 1$ tal que $\Gamma^\infty(\sigma_i^x-) \leqslant t < \Gamma^\infty(\sigma_i^x)$. Dessa forma, somando $\gamma_y T_0^y$ aos termos dessa desigualdade, temos que $\Gamma^y(\sigma_i^x-) \leqslant t + \gamma_y T_0^y < \Gamma^y(\sigma_i^x)$. E portanto $X^y(t + \gamma_y T_0^y) = x$.

Com raciocínio análogo, chegamos que se $X^y(t + \gamma_y T_0^y) = x \in \mathbb{N}^*$, então $X^\infty(t) = x$. De onde concluímos a igualdade desejada. □

Proposição 3.6. *O Processo K é quase certamente càdlàg.*

Demonstração. Iremos mostrar que o processo iniciado no ∞ é càdlàg, o que irá mostrar que o processo é càdlàg para qualquer condição inicial, visto que, iniciando em y, iremos permanecer em y até $\gamma_y T_0^y$, e depois continuaremos como uma cópia do processo iniciado no ∞.

Fixemos uma realização do processo, $T > 0$ e $\epsilon > 0$ arbitrários. Seguindo Billingsley (1999), vamos mostrar que existem $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ tais que $w[t_{i-1}, t_i) < \epsilon$ para todo $i = 1, \ldots, N$, onde $w(A) = \sup_{t,s\in A} d(X^\infty(t), X^\infty(s))$ para $A \subseteq \mathbb{R}$. Lembrando que estamos trabalhando com a métrica (2.5) sobre $\bar{\mathbb{N}}^*$.

Tomemos um $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $\operatorname{diam}\{x \in \bar{\mathbb{N}}^* : x > m\} = \frac{1}{m+1} < \epsilon$, onde $\operatorname{diam}(A)$ é o diâmetro do conjunto A.

Agora tomemos $S_1 < \ldots < S_M$ uma ordenação dos conjunto $\{\sigma_i^x : x \leqslant m,\ i \geqslant 1,\ \Gamma(\sigma_i^x) \leqslant T\}$. Finalmente fixemos $N = 2M+1$ se $\Gamma(S_M) < T$ e $N = 2M$ se $\Gamma(S_M) = T$. Tomemos $t_0 = 0$, $t_N = T$ e para $i = 1, \ldots, M$:

$$t_{2i-1} = \Gamma(S_i-)$$
$$t_{2i} = \Gamma(S_i).$$

Se $t \in [\Gamma(S_i-), \Gamma(S_i))$, temos que $X(t)$ é constante, enquanto que se $t \in [\Gamma(S_{i-1}), \Gamma(S_i-))$, temos que $X(t) > m$. Assim a variação nesse intervalo é menor ou igual à $\frac{1}{m} < \epsilon$. O mesmo ocorre nos intervalos $[t_0, t_1)$ e $[t_{N-1}, t_N)$. $\square$

Proposição 3.7. *$(X(t))_{t \geqslant 0}$ é* q.c. *contínuo fora de* $\{\Gamma(0), \Gamma(\sigma_i^x-), \Gamma(\sigma_i^x) : x \in \mathbb{N}^*\}$.

Demonstração. Tomemos t um ponto de descontinuidade de X. Como X é càdlàg, então existe um $\epsilon > 0$ tal que $d(X(t), X(t-)) > \epsilon$. Fixemos um $T > t$ e tomemos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ como na demonstração da Proposição 3.6. Se $t \notin \{t_0, \ldots, t_N\}$, então existe um i tal que $t \in (t_i, t_{i+1})$. Assim temos que $w[t_i, t_{i+1}) \geqslant d(X(t), X(t-)) > \epsilon$, o que contraria a nossa escolha de $\{t_0, \ldots, t_N\}$.

Assim temos que $t = t_i$ para algum i. Como os t_i's sempre foram escolhidos do conjunto proposto, temos que eles são os únicos candidatos possíveis para pontos de descontinuidade. $\square$

Corolário 3.8. *Qualquer $t > 0$ é quase certamente um ponto de continuidade do processo K.*

Demonstração. Mostramos que o conjunto dos pontos de pontos de descontinuidade do processo está contido em $\{\Gamma(0), \Gamma(\sigma_i^x-), \Gamma(\sigma_i^x) : x \in \mathbb{N}^*\}$.

Observando a Proposição 3.4, concluímos que todo $t > 0$ é *q.c.* um ponto de continuidade do processo. $\square$

3.2 Aproximações

Nessa seção vamos introduzir o que chamaremos de processos truncados, que serão processos markovianos de saltos que irão convergir para o Processo K original.

Primeiramente, para $n \in \mathbb{N}^*$ e $y \in \{1, \ldots, n, \infty\}$, vamos definir:

$$\Gamma^{(n)}(t) := \Gamma_c^{y,(n)}(t) = \gamma_y T_0 + \sum_{x=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_x(t)} \gamma_x T_i^x + ct.$$

O processo truncado em $n \in \mathbb{N}^*$, com estado inicial $y \in \{1, \ldots, n, \infty\}$ será:

$$X^{(n)}(t) = X_c^{y,(n)}(t) = \begin{cases} y, & \text{se } t < \gamma_y T_0 \\ x, & \text{se } \Gamma_c^{y,(n)}(\sigma_i^x-) \leqslant t < \Gamma_c^{y,(n)}(\sigma_i^x) \text{ para algum } i \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 3.9. *O processo $X^{(n)}$ é càdlàg e markoviano.*

Demonstração. Quando truncamos o processo K, ele se comporta de maneira análoga ao caso analisado na Seção 2.2, assim processo $X^{(n)}$ é um processo Markoviano de saltos, construído para ser contínuo à direita. $\square$

Construímos $\{X^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ e X num mesmo espaço de probabilidade. Assim é natural perguntar se $X^{(n)}$ converge para X de alguma forma.

Teorema 3.10. *$X^{\infty,(n)}(\bullet)$ converge para $X^{\infty}(\bullet)$ q.c. na métrica de Skorohod quando $n \to \infty$.*

A métrica de Skorohod é uma métrica sobre o espaço das trajetórias càdlàg que permite pequenas distorções temporais. Como referência recomendamos Billingsley (1999) e Ethier e Kurtz (1986).

Demonstração. Essa demonstração foi adaptada diretamente do *Lema 3.11* de Fontes e Mathieu (2008).

A Proposição 5.3 do Capítulo 3 de Ethier e Kurtz (1986) nos diz que uma sequências de tragetórias càdlàg (x_n) converge para outra tragetória càdlàg x se e somente se para todo $T > 0$ existir uma sequência de funções $\lambda_n : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bijetoras, crescentes e Lipschitz contínuas tais que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} d\left(x_n(t), x(\lambda_n(t))\right) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\lambda_n(t) - t| = 0.$$

Vamos mostrar que essa propriedade é válida quase certamente.

Como o processo sempre se inicia no ∞, não vamos mais carregar esse índice na notação.

Fixemos uma realização do processo e um $T > 0$. Para cada natural m, considere $\delta_m := \mathrm{diam}\{x \in \bar{\mathbb{N}}^* : x > m\} = \frac{1}{m+1}$. Tome ainda $0 = S_0^m < S_1^m < \dots$ uma ordenação de $\{0\} \cup \{\sigma_i^x : x \leqslant m, i \geqslant 1\}$. Considere ainda, para cada $n > m$:

$$L_n^m := \min\left\{ i \geqslant 1 : \Gamma^{(n)}(S_i^m) \geqslant T \right\}.$$

O conjunto $\{\sigma_i^x : x > m, i \geqslant 1\}$ é denso; assim, para n suficientemente grande, $\Gamma^{(n)}(S_{i+1}^m-) > \Gamma^{(n)}(S_i^m)$ para todo $i < L_n^m$.

Para esses valores de n, definimos $\lambda_n^m : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ da seguinte forma:

$$\lambda_n^m(t) = \begin{cases} \Gamma(S_i^m) + \frac{\Gamma(S_{i+1}^m-)-\Gamma(S_i^m)}{\Gamma^{(n)}(S_{i+1}^{(m)}-)-\Gamma^{(n)}(S_i^m)}\left[t - \Gamma^{(n)}(S_i^m)\right] & \text{se } \Gamma^{(n)}(S_i^m) \leqslant t \leqslant \Gamma^{(n)}(S_{i+1}^m-) \\ \Gamma(S_{i+1}^m-) - \Gamma^{(n)}(S_{i+1}^m-) + t & \text{se } \Gamma^{(n)}(S_{i+1}^m-) \leqslant t \leqslant \Gamma^{(n)}(S_{i+1}^m) \\ \Gamma(S_{L_n^m}^m) - \Gamma^{(n)}(S_{L_n^m}^m) + t & \text{se } t > \Gamma^{(n)}(S_{L_n^m}^m) \end{cases}$$

Para entendermos o que motivou essa definição, observemos que para $i = 0, \dots L_n^m$, temos que:

$$\lambda_n^m(\Gamma^{(n)}(S_i^m-)) = \Gamma(S_i^m-)$$
$$\lambda_n^m(\Gamma^{(n)}(S_i^m)) = \Gamma(S_i^m),$$

enquanto que nos pontos interiores interpolamos λ_n^m de maneira linear. Depois de $\Gamma^{(n)}(S_{L_n^m}^m)$, deixamos λ_n^m evoluir de maneira linear com coeficiente 1, já que isso não terá mais importância.

Como $\Gamma(t) \geqslant \Gamma^{(n)}(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos que $\lambda_n^m(t) \geqslant t$. Usando a linearidade por partes, o fato de que $\Gamma(\sigma_i^x) = \Gamma(\sigma_i^x -) + \gamma_x T_i^x$ e $\Gamma^{(n)}(S_{L_N^m}^m) \geqslant T$, teremos que:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\lambda_n^m(t) - t| \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant L_n^m} \{\Gamma(S_i^m) - \Gamma^{(n)}(S_i^m)\}.$$

Essa quantidade converge quase certamente a zero se mantivermos o m fixo e jogarmos o n para infinito. Assim para cada m existe um n_m tal que para $n \geqslant n_m$ vale que:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\lambda_n^m(t) - t| < \delta_m.$$

Podemos tomar a sequência $(n_m)_{m \geqslant 1}$ de modo que ela seja crescente. Agora vamos "invertê-la", isso é, para cada n em $\mathbb{Z} \cap [n_{i-1}, n_i)$, definimos $m_n = i$. Teremos que:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\lambda_n^{m_n}(t) - t| < \delta_{m_n}.$$

Observemos que m_n vai ao infinito quando $n \to \infty$ já que n_m é finito para cada m fixado.

Por construção, $t \in [\Gamma^{(n)}(S_i^m -), \Gamma^{(n)}(S_i^m))$ se e somente se $\lambda_n^m(t) \in [\Gamma(S_i^m -), \Gamma(S_i^m))$. Assim, para cada $x \in \{1, \ldots, m\}$, temos que $X(\lambda_n^m(t)) = x$ se e somente se $X^{(n)}(t) = x$. De onde concluímos que:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} d\left(X(\lambda_n^m(t)), X^{(n)}(t)\right) \leqslant \delta_m.$$

Tomando $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n^{m_n}$, concluímos que:

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\tilde{\lambda}_n(t) - t| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$
$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} d(X(\tilde{\lambda}_n(t)), X^{(n)}(t)) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \qquad \square$$

Corolário 3.11. *Para todo $y \in \bar{\mathbb{N}}^*$, todo $T > 0$ e quase toda trajetória do processo, existe uma sequência de funções $\lambda_n^y : [0, \infty) \to [0, \infty)$ contínuas e bijetoras tais que:*

$$\begin{aligned} \lambda_n^y(t) &\geqslant t \\ \sup_{t \in [0,T]} |\lambda_n^y(t) - t| &\leqslant \sup_{t \in [0,T]} |\lambda_n^\infty(t) - t| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \\ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} d(X^y(\lambda_n^y(t)), X^{y,(n)}(t)) &\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} d(X^\infty(\lambda_n(t)), X^{\infty,(n)}(t)) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dessa forma, temos que $X^{y,(n)}$ converge q.c. *para X^y na métrica de Skorohod, sendo essa convergência uniforme em y.*

Demonstração. Fixado um $T > 0$, tomemos $\lambda_n : [0, \infty) \to [0, \infty)$ como na demonstração do Teorema 3.10. Elas são funções contínuas crescentes tais que quase certamente:

$$\lambda_n(t) \geqslant t$$
$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\lambda_n(t) - t| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$
$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} d(X^\infty(\lambda_n(t)), X^{\infty,(n)}(t)) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Tomemos $\lambda_n^\infty = \lambda_n$ e para $y \in \mathbb{N}^*$ definimos:

$$\lambda_n^y(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t < \gamma_y T_0 \\ \gamma_y T_0 + \lambda_n(t - \gamma_y T_0), & \text{se } t \geqslant \gamma_y T_0 \end{cases}$$

Sabemos pela Proposição 3.5 que o processo iniciado em um $y \in \mathbb{N}^*$ permanece em y até o instante $\gamma_y T_0$. Depois disso ele será uma cópia do processo iniciado no ∞. Dessa forma forma concluímos (3.1). □

3.3 Propriedade de Markov

O objetivo dessa seção é provar que o Processo K é markoviano. Nossa estratégia será mostrar que a propriedade de Markov se mantém quando tomamos os limites dos processos truncados introduzidos na Seção 3.2.

Note que nem sempre o limite de processos markovianos é um processo markoviano. Para demonstrar que essa propriedade é mantida, vamos usar diversas propriedades da nossa construção, em particular da convergência dos processos truncados uniformemente na condição inicial.

Uma dificuldade introduzida ao aceitar pesos não homogêneos é a de que o processo pode não ser de Feller. Isso acontece porque podem existir estados y "grandes", onde γ_y também é grande; assim iniciar o processo nesses estados é diferente de iniciar no ∞. Mostraremos isso com detalhes na Seção 4.3.

Vamos contornar esse problema usando o fato que esses estados onde γ_y é grande são visitados com probabilidade baixa. Essa ideia será formalizada pela Proposição 3.12.

De forma intuitiva, se (x_n) é uma sequência de estados que converge um estado para x em $\bar{\mathbb{N}}^*$ e estes estados de fato podem ser visitados pelo Processo K em um tempo finito, então $\Psi_t(x_n)$ converge para $\Psi_t(x)$, onde Ψ_t é o semigrupo de transição definido abaixo. Usaremos esse tipo de ideia no lugar da propriedade de Feller.

Definição 3.1. *Denotaremos por $(\Psi_t)_{t>0}$ o semigrupo de transição do Processo K, isso é, para $t > 0$ e $f : \bar{\mathbb{N}}^* \to \mathbb{R}$:*

$$\Psi_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(X^x(t))\right]$$

Proposição 3.12. *Seja $V_t := \cup_{s\in[0,t]}\{X(s)\}\backslash\{\infty\}$ o conjunto de estados visitados pelo processo até o instante t. Então:*

$$\sum_{x \in V_t} \gamma_x < \infty,$$

quase certamente para todo $t > 0$.

Demonstração. Primeiramente fixemos um $t > 0$ arbitrário.

Denotemos por $V_t' = \{x \in \mathbb{N}^* : N^x(t) \geqslant 1\}$. Quase certamente vale que:

$$\sum_{x \in V_t'} \gamma_x T_1^x \leqslant \Gamma(t) < \infty.$$

Se denotarmos por ν a distribuição de V_t' sobre o conjunto das partes de $\mathbb{N}^*$, como V_t' só depende dos processos de Poisson $\{N^x : x \in \mathbb{N}^*\}$ e como esses são independentes de $\{T_1^x : x \in \mathbb{N}^*\}$, temos que:

$$\begin{aligned} 1 &= P\left(\sum_{x \in V_t'} \gamma_x T_1^x < \infty\right) \\ &= \int P\left(\sum_{x \in V} \gamma_x T_1^x < \infty\right) \nu(dV) \end{aligned}$$

Portanto, para ν quase todo $V \subseteq \mathbb{N}^*$ vale que $P(\sum_{x \in V} \gamma_x T_1^x < \infty) = 1$. Fixado um V desses, teremos que $\sum_{x \in V} \gamma_x < \infty$, já que uma soma de variáveis aleatórias exponenciais independentes é finita *q.c.* se e somente se a soma de suas médias convergir - ver Teorema 2.3.2 de Norris (1998).

Com isso concluímos que para ν quase todo V vale que $\sum_{x \in V} \gamma_x < \infty$, ou seja, $\sum_{x \in V_t'} \gamma_x < \infty$ *q.c.* .

Agora fixemos uma sequência (t_n), com $t_n \nearrow \infty$. Com probabilidade 1 vai valer que $\sum_{x \in V_{t_n}'} \gamma_x < \infty$ para todo n.

Notemos que $V_t' \subseteq V_s'$ sempre que $t \leqslant s$. Para qualquer $t > 0$, existe um n tal que $t_n > t$, e portanto:

$$\sum_{x \in V_t'} \gamma_x T_1^x \leqslant \sum_{x \in V_{t_n}'} \gamma_x T_1^x < \infty$$

Voltando a trabalhar com V_t, notemos que se $s < t$, então $V_s \subseteq V_t$. Observemos ainda que, por construção, $V_t' = V_{\Gamma(t)}$.

Agora fixemos uma realização do processo, onde $\Gamma(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ e $\sum_{x \in V_t'} \gamma_x < \infty$ para todo t. Pelo argumento anterior tais realizações têm probabilidade 1. Nelas, para um $t > 0$ arbitrário, vai existir um $s > 0$ tal que $\Gamma(s) > t$. Dessa forma:

$$\sum_{x \in V_t} \gamma_x \leqslant \sum_{x \in V_{\Gamma(s)}} \gamma_x = \sum_{x \in V_s'} \gamma_x < \infty.$$

De onde concluímos o que desejávamos. □

Proposição 3.13. *Para* $f : \bar{\mathbb{N}}^* \to \mathbb{R}$ *contínua e* $t, s > 0$ *fixados arbitrariamente, vale que* q.c. *:*

$$\lim_{n \to \infty} \Psi_s f(X^{(n)}(t)) = \Psi_s f(X(t)) \tag{3.2}$$

Demonstração. Usando o Corolário 3.8, temos que t é *q.c.* um ponto de continuidade do processo original. Assim, como $X^{(n)}$ converge *q.c.* para X na métrica de Skorohod, ele também converge pontualmente nos pontos de continuidade de X. Portanto $X^{(n)}(t) \to X(t)$ *q.c.* quando $n \to \infty$.

Vamos fixar agora uma dessas realizações e denotar por $y_n = X^{(n)}(t)$ e $y = X(t)$. Vamos separar em dois casos.

O primeiro admite que existe um n_0 tal que $y_n = y$ para todo $n > n_0$. Nesse caso (3.2) é evidente.

O segundo caso é o contrário do primeiro, isso é, para todo n_0 existe um $n > n_0$ tal que $y_n \neq y$. Como $y_n \to y$, então concluímos que y não é um ponto isolado; como o único ponto que não é isolado em $\bar{\mathbb{N}}^*$ é o ∞, concluímos que $y = \infty$.

Vamos ignorar os índices n onde $y_n = \infty$, visto que neles a igualdade em (3.2) é trivial.

Tomemos um $r > 0$ tal que $\Gamma^{(1)}(r-) > t$ e $t' = \Gamma(r)$. Se um estado $x \in \mathbb{N}^*$ foi visitado por um processo truncado $X^{(n)}$ até o instante t, então $\Gamma^{(n)}(\sigma_1^x-) \leqslant t$. Como $\Gamma^{(n)}$ é não decrescente em n, então $\sigma_1^x < r$. Já que $\Gamma(\bullet)$ é crescente, valerá que $\Gamma(\sigma_1^x-) < \Gamma(r) = t'$. Portanto se $x \in \mathbb{N}^*$ foi visitado por um processo truncado, então $x \in V_{t'}$.

Dessa forma, usando a Proposição 3.12 e o fato de que $y_n \to \infty$, concluímos que $\gamma_{y_n} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Se tomarmos um n suficientemente grande teremos que $\gamma_{y_n} T_0 < s$. Dessa forma usando a Proposição 3.5 teremos que:

$$\begin{aligned}\Psi_s f(\infty) - \Psi_s f(y_n) &= \mathbb{E}\left[f(X^\infty(s)) - f(X^{y_n}(s))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[f(X^\infty(s)) - f(X^\infty(s - \gamma_{y_n} T_0))\right]\end{aligned}$$

Pelo Corolário 3.8, s é *q.c.* um ponto de continuidade de X^∞ e, como $\gamma_{y_n} T_0$ converge à zero, temos que a quantidade dentro da esperança acima converge quase certamente à zero. Como f é contínua - e, portanto, limitada - o Teorema da Convergência Dominada nos garante que a esperança também converge à zero. □

Teorema 3.14. *O Processo K é um processo markoviano.*

Demonstração. Fixamos $m \geqslant 1$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_{m+1}$ e $f_1, \ldots, f_{m+1} : \bar{\mathbb{N}}^* \to \mathbb{R}$ funções contínuas.

Como $X^{(n)}$ é markoviano, se denotarmos por Ψ^n o semigrupo de transição do processo truncado, teremos que:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[f_1(X^{(n)}(t_1)) \ldots f_m(X^{(n)}(t_m)) f_{m+1}(X^{(n)}(t_{m+1}))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[f_1(X^{(n)}(t_1)) \ldots f_m(X^{(n)}(t_m)) \Psi^n_{t_{m+1}-t_m} f_{m+1}(X^{(n)}(t_m))\right]\end{aligned} \tag{3.3}$$

O Corolário 3.8 nos garante que *q.c.* $t_1, \ldots, t_{m+1}$ são pontos de continuidade do processo e, como a convergência na métrica de Skorohod garante a convergência pontual nos pontos de continuidade, temos que $f_i(X^{(n)}(t_i)) \to f_i(X(t_i))$ *q.c.* já que f_i é contínua, $i = 1, \ldots, m+1$.

Temos ainda que $f_1, \ldots f_{m+1}$ são limitadas porque são funções contínuas num espaço compacto. Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada, teremos que a parte da esquerda de (3.3) converge para:

$$\mathbb{E}\left[f_1(X(t_1)) \ldots f_m(X(t_m)) f_{m+1}(X(t_{m+1}))\right].$$

Agora vamos estimar a parte da direita por:

$$\mathbb{E}\left[f_1(X^{(n)}(t_1)) \ldots f_m(X^{(n)}(t_m)) \Psi_{t_{m+1}-t_m} f_{m+1}(X^{(n)}(t_m))\right] + \epsilon_n. \tag{3.4}$$

Usando a Proposição 3.13, temos que a parte da esquerda de (3.4) converge para:

$$\mathbb{E}\left[f_1(X(t_1)) \ldots f_m(X(t_m)) \Psi_{t_{m+1}-t_m} f_{m+1}(X(t_m))\right].$$

Resta mostrar que $\epsilon_n \to 0$. Para simplificar a notação, vamos denotar por $s = t_{m+1} - t_m$, $t = t_m$

e $g = f_{m+1}$. Usando o fato de $f_1, \dots, f_m$ serem limitadas, teremos que:

$$|\epsilon_n| \leqslant C \left| \mathbb{E}\left[\Psi_s^n g(X^{(n)}(t)) - \Psi_s g(X^{(n)}(t)) \right] \right|,$$

onde C é uma constante positiva.

Como a parte interna dessa esperança pode ser dominada por $2\|g\|$, se mostrarmos que ela converge quase certamente para zero, seguirá do Teorema da Convergência Dominada que a esperança também converge à zero.

Com o mesmo argumento que usamos na demonstração da Proposição 3.13, temos que existe um $t' > 0$ tal que $X^{(n)}(t) \in V_{t'}$ para todo n. Dessa forma:

$$\left| \Psi_s^n g(X^{(n)}(t)) - \Psi_s g(X^{(n)}(t)) \right| \leqslant \sup_{y \in V_{t'}} |\Psi_s^n g(y) - \Psi_s g(y)|$$

A Proposição 3.12 nos garante que, para quase todo $V_{t'}$, a condição da Proposição 3.15 é satisfeita. Portanto a quantidade acima vai à zero *q.c.* .

Dessa forma podemos concluir que:

$$\mathbb{E}\left[f_1(X(t_1)) \dots f_m(X(t_m)) f_{m+1}(X(t_{m+1})) \right] = \mathbb{E}\left[f_1(X(t_1)) \dots f_m(X(t_m)) \Psi_{t_{m+1}-t_m} f_{m+1}(X(t_m)) \right].$$

□

Proposição 3.15. *Seja* $A \subseteq \mathbb{N}^*$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\gamma_x : x \in A \text{ e } x > n\} = 0,$$

sob a convenção de que $\sup \varnothing = 0$. *Tomemos ainda* $f : \bar{\mathbb{N}}^* \to \mathbb{R}$ *contínua e* $t > 0$. *Nessas condições:*

$$\sup_{y \in A} |\Psi_t^n f(y) - \Psi_t f(y)| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{3.5}$$

onde Ψ^n *denota o semigrupo de transição de* $X^{(n)}$.

Demonstração. Mostremos primeiramente que cada "termo" de (3.5) converge para zero, ou seja, mostremos que $\Psi_t^n f(y) \to \Psi_t f(y)$ quando $n \to \infty$ para qualquer $y \in A$ fixado.

$$\Psi_t^n f(y) - \Psi_t f(y) = \mathbb{E}\left[f(X^{y,(n)}(t)) - f(X^y(t)) \right] \tag{3.6}$$

O Corolário 3.8 nos garante que t é *q.c.* um ponto de continuidade de X^y, assim $X^{y,(n)}(t) \to X^y(t)$ *q.c.* quando $n \to \infty$ e, como f é contínua, concluímos que $f(X^{y,(n)}(t)) \to f(X^y(t))$ *q.c.* .

Mas f também é limitada e assim considerando o Teorema da Convergência Monótona concluímos que (3.6) converge à zero quando $n \to \infty$.

Com isso o caso em que A é finito é trivial; portanto vamos supor que A é infinito.

Tomemos λ_n^y como no Corolário 3.11 para um $T > t$ qualquer. Vale que:

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in A} |\Psi_t^n f(y) - \Psi_t f(y)| &= \sup_{y\in A} \left|\mathbb{E}\left[f(X^{y,(n)}(t)) - f(X^y(t))\right]\right| \\
&\leqslant \sup_{y\in A} \left|\mathbb{E}\left[f(X^{y,(n)}(t)) - f(X^y(\lambda_n^y(t)))\right]\right| \\
&+ \sup_{y\in A} \left|\mathbb{E}\left[f(X^y(\lambda_n^y(t))) - f(X^y(t))\right]\right|.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Vamos tratar os dois termos dessa soma separadamente.

Por (3.1), temos que para todo y, quase certamente:

$$d(X^{y,(n)}(t), X^y(\lambda_n^y(t)) \leqslant \sup_{s\in[0,T]} d(X^{\infty,(n)}(s), X^\infty(\lambda_n^\infty(s)) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{3.8}$$

Como f é uma função contínua em um espaço compacto, ela é uniformemente contínua. Isso é, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta_\epsilon > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta_\epsilon$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Dessa forma, fixado um $\epsilon > 0$ arbitrário, teremos que:

$$\begin{aligned}
&\sup_{y\in A} \left|\mathbb{E}\left[f(X^{y,(n)}(t)) - f(X^y(\lambda_n^y(t)))\right]\right| \\
&\leqslant \sup_{y\in A} \left|\mathbb{E}\left[\left(f(X^{y,(n)}(t)) - f(X^y(\lambda_n^y(t)))\right) \mathbb{I}\{d(X^{y,(n)}(t), X^y(\lambda_n^y(t)) < \delta_\epsilon\}\right]\right| \\
&+ 2\|f\| \sup_{y\in A} P\left(d(X^{y,(n)}(t), X^y(\lambda_n^y(t)) \geqslant \delta_\epsilon\right) \\
&\leqslant \epsilon + 2\|f\| P\left(\sup_{s\in[0,T]} d(X^{\infty,(n)}(s), X^\infty(\lambda_n^\infty(s)) \geqslant \delta_\epsilon\right).
\end{aligned}$$

Essa última quantidade converge para ϵ quando $n \to \infty$ devido à (3.8). Como ϵ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que o primeiro termo de (3.7) converge à zero.

Para calcular o segundo termo, notemos que aquela quantidade, para cada $y \in A$ fixado vai à zero, já que t é *q.c.* um ponto de continuidade do processo e $\lambda_n^y(t) \to t$ quando $n \to \infty$. Dessa forma existe uma sequência (k_n) tal que $k_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ onde:

$$\max_{\substack{y\leqslant k_n \\ y\in A}} \left|\mathbb{E}\left[f(X^y(\lambda_n^y(t))) - f(X^y(t))\right]\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Agora vamos tomar $\delta_n = \sqrt{\sup\{\gamma_x : x \in A \text{ e } x > k_n\}}$. Por hipótese, temos que $\delta_n \to 0$. Notemos ainda que $\sup\{P(\gamma_y T_0 > \delta_n) : y \in A, y > k_n\} = e^{-\frac{1}{\delta_n}} \to 0$ quanto $n \to \infty$.

Como $\delta_n \to 0$, vamos apenas considerar n suficientemente grande, de forma que $\delta_n < t \leqslant \lambda_n^y(t)$. A segunda desigualdade vale de acordo com (3.1). Usando a Proposição 3.5 e separando nos casos

$\gamma_y T_0 < \delta_n$ e $\gamma_y T_0 \geqslant \delta_n$, teremos que:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{y>k_n\\ y\in A}} \left|\mathbb{E}\left[f(X^y(\lambda_n^y(t))) - f(X^y(t))\right]\right| \\
&\quad\leqslant \sup_{\substack{y>k_n\\ y\in A}} \mathbb{E}\left|\left[f(X^\infty(\lambda_n^y(t)-\gamma_y T_0)) - f(X^\infty(t-\gamma_y T_0))\right]\mathbb{I}\{\gamma_y T_0 < \delta_n\}\right| \qquad (3.9)\\
&\quad+ 2\|f\| \sup_{\substack{y>k_n\\ y\in A}} P(\gamma_y T_0 > \delta_n).
\end{aligned}$$

Nós escolhemos δ_n de forma que o segundo termo dessa soma vá à zero quando $n \to \infty$. Podemos dominar o primeiro termo por:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\substack{y>k_n\\ y\in A}} \sup_{0\leqslant s\leqslant \delta_n} |f(X^\infty(\lambda_n^y(t)-s)) - f(X^\infty(t-s))|\right].$$

A variável sobre a qual estamos tomando esperança é dominada por $2\|f\|$. Portando se mostrarmos que ela converge *q.c.* para zero, valerá que sua esperança também vai a zero.

Fixado um $\epsilon > 0$, tomemos $\epsilon' > 0$ tal que $d(x,y) < \epsilon'$ implique que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$; isso existe por causa da continuidade uniforme de f.

Como t é *q.c.* um ponto de continuidade de X^∞, existe um ϵ'' tal que se $|s| < \epsilon''$, então $d(X_t^\infty, X_{t+s}^\infty) < \frac{\epsilon'}{2}$.

Assim se tomarmos n_0 tal que para todo $n > n_0$, $\delta_n < \frac{\epsilon''}{2}$ e $\sup_{0\leqslant s\leqslant T} |\lambda_n^\infty(s) - s| < \frac{\epsilon''}{2}$, teremos que, para todo $y \in \bar{\mathbb{N}}^*$ e $s \leqslant \delta_n$:

$$|\lambda_n^y(t) - s - t| \leqslant |\lambda_n^y(t) - t| + |s| \leqslant \sup_{r\in[0,T]} |\lambda_n^\infty(r) - r| + |s| < \epsilon''$$

$$|t - s - t| = |s| < \epsilon''.$$

Portanto temos que:

$$d(X^\infty(\lambda_n^y(t)-s), X^\infty(t-s)) \leqslant d(X^\infty(\lambda_n^y(t)-s), X^\infty(t)) + d(X^\infty(t), X^\infty(t-s)) < \epsilon'.$$

De onde finalmente concluímos que quase certamente para todo $n > n_0$:

$$\sup_{\substack{y>k_n\\ y\in A}} \sup_{0\leqslant s\leqslant \delta_n} |f(X^\infty(\lambda_n^y(t)-s)) - f(X^\infty(t-s))| < \epsilon.$$

Como ϵ foi tomado arbitrariamente, concluímos que essa quantidade vai a zero *q.c.* . □

3.4 Propriedade Forte de Markov

Um resultado clássico - ver, por exemplo, Fristedt e Gray (1997) - diz que um processo de Feller markoviano é fortemente markoviano. Já comentamos que o Processo K não homogêneo pode não ser de Feller, mas ele goza de algumas propriedades que irão possibilitar demonstrar a propriedade forte de Markov de forma análoga à maneira pela qual a demonstramos para processos de Feller.

Para cada $t \geqslant 0$, vamos denotar por $\mathcal{F}_t$ a σ-álgebra gerada por $\{X(s) : s \in [0, t]\}$. Chamamos a família $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ de filtração mínima associada ao processo X. Vamos denotar ainda por $\mathcal{F}$ a σ-álgebra do espaço de probabilidades onde estamos trabalhando.

Definição 3.2. *Dizemos que uma variável aleatória positiva τ é um tempo de parada em relação à uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ quando $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ para todo $t > 0$.*

Definição 3.3. *A σ-álgebra associada à um tempo de parada τ será denotada por $\mathcal{F}_\tau$ e é definida por:*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geqslant 0\}.$$

Definição 3.4. *Dizemos que um processo estocástico é fortemente markoviano quando:*

$$P\left(X(t+\tau) \in A\right) = \int dP(X(\tau) = y) P(X^y(t) \in A),$$

para todo $t > 0$, A boreliano e τ tempo de parada q.c. *finito.*

Intuitivamente, um processo estocástico é fortemente markoviano se a sua distribuição depois de um tempo de parada não depender do que aconteceu antes desse tempo de parada.

Teorema 3.16. *O Processo K é fortemente markoviano.*

Demonstração. Fixada uma $f : \bar{\mathbb{N}}^* \to \mathbb{R}$ contínua e τ um tempo de parada sobre $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *q.c.* finito. Vamos mostrar que quase certamente:

$$\mathbb{E}\left[f(X(\tau + t)|\mathcal{F}_\tau\right] = \Psi_t f(X(\tau)), \tag{3.10}$$

Para cada $h > 0$, denotemos por:

$$\tau_h := \inf\left\{t \geqslant \tau : t = kh, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Observemos que $\tau_h \leqslant t$ se e somente se $\tau \leqslant \lfloor t \rfloor_h$, onde $\lfloor t \rfloor_h := \max\{kh \leqslant t : k \in \mathbb{N}\}$ Assim $\{\tau_h \leqslant kh\} \in \mathcal{F}_{\lfloor t \rfloor_h} \subseteq \mathcal{F}_t$ e portanto τ_h é um tempo de parada para a filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Notemos ainda que $\tau \leqslant \tau_h < \tau + h$. Assim τ_h é *q.c.* finito e $\tau_h \to \tau$ *q.c.* quando $h \to 0$.

Como em tempo discreto a propriedade de Markov é equivalente à propriedade forte de Markov, então teremos que para todo $h > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ vale que:

$$\mathbb{E}\left[f(X(\tau_h + kh))|\mathcal{F}_{\tau_h}\right] = \Psi_{kh} f(X(\tau_h)).$$

Fixemos um $t > 0$ e tomemos $h = t/k$, reescrevendo a expressão acima teremos que:

$$\mathbb{E}\left[f(X(\tau_h + t))|\mathcal{F}_{\tau_h}\right] = \Psi_t f(X(\tau_h)). \tag{3.11}$$

Vamos mostrar agora que para todo $h > 0$, $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau_h}$. Para isso tomemos um $A \in \mathcal{F}_\tau$ e um $t \geqslant 0$ arbitrários. Como $\{\tau \leqslant t\} \subseteq \{\tau_h \leqslant t\}$, então:

$$A \cap \{\tau_h \leqslant t\} = A \cap \{\tau \leqslant t\} \cap \{\tau_h \leqslant t\}.$$

Observemos agora que $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ porque $A \in \mathcal{F}_\tau$, enquanto que $\{\tau_h \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ porque τ_h é tempo de parada. Assim concluímos que $A \cap \{\tau_h \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ e, como isso vale para todo t, então $A \in \mathcal{F}_{\tau_h}$.

Usando a definição de esperança condicional em (3.11), teremos que para todo evento $B \in \mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau_h}$:

$$\mathbb{E}\left[f(X(\tau_h + t))\mathbb{I}\{B\}\right] = \mathbb{E}\left[\Psi_t f(X(\tau_h))\mathbb{I}\{B\}\right]. \tag{3.12}$$

Agora iremos fazer $h \searrow 0$ através de "divisores" de t.

Como f é uma função contínua e como X é um processo contínuo à direita e $\tau_h \searrow \tau$ quando $h \searrow 0$, então $f(X(\tau_h + t)) \to f(X(\tau + t))$ *q.c.* , e como f é limitada, então a parte da esquerda de (3.12) converge para:

$$\mathbb{E}\left[f(X(\tau + t))\mathbb{I}\{B\}\right],$$

quando $h \searrow 0$.

Consideremos que tenhamos mostrado que $\Psi_t f(X(\tau_h)) \to \Psi_t f(X(\tau))$ *q.c.* quando $h \searrow 0$. Com isso, já que $\Psi_t f$ é limitada, teremos que a parte da direita de (3.12) convergirá para:

$$\mathbb{E}\left[\Psi_t f(X(\tau))\mathbb{I}\{B\}\right].$$

Dessa forma, para todo $B \in \mathcal{F}_\tau$, valerá que:

$$\mathbb{E}\left[f(X(\tau + t))\mathbb{I}\{B\}\right] = \mathbb{E}\left[\Psi_t f(X(\tau))\mathbb{I}\{B\}\right].$$

Como $\Psi_t f(X(\tau))$ é mensurável em $\mathcal{F}_\tau$, concluímos que:

$$\mathbb{E}\left[f(X(\tau + t))|\mathcal{F}_\tau\right] = \Psi_t f(X(\tau)),$$

que é exatamente (3.10).

Portanto só resta mostrar que:

$$\Psi_t f(X(\tau_h)) \xrightarrow[q.c.]{h \searrow 0} \Psi_t f(X(\tau)). \tag{3.13}$$

É exatamente nesse ponto que nossa demonstração vai divergir da demonstração clássica. Se nosso processo fosse de Feller, então $\Psi_t f$ seria uma função contínua e essa convergência seria evidente. Para contornar esse problema, vamos usar a Proposição 3.12 de maneira parecida à que fizemos quando queríamos mostrar a propriedade de Markov simples.

Fixemos uma realização do processo onde $\sum_{x \in V_t} \gamma_x < \infty$ para todo t, $\tau < \infty$ e $X(\tau_h) \to X(\tau)$ quando $h \to 0$. Tais realizações têm probabilidade 1.

Tomemos uma sequência $h_n \searrow 0$ arbitrária. Vamos mostrar que:

$$\Psi_t f(X(\tau_{h_n})) \xrightarrow{n \to \infty} \Psi_t f(X(\tau)). \tag{3.14}$$

Se isso valer para toda sequência h_n, então concluiremos (3.13). Sem perda de generalidade podemos olhar apenas para as sequências onde $h_n \leqslant 1$ para todo n.

Se existir um n_0 tal que $n > n_0$ implica que $X(\tau_{h_n}) = X(\tau)$, então (3.14) é evidente.

Assim vamos supor o contrário, ou seja, que para todo n_0 existe um $n > n_0$ tal que $X(\tau_{h_n}) \neq$

$X(\tau)$. Dessa forma concluímos que $X(\tau)$ não é um ponto isolado de $\bar{\mathbb{N}}^*$. Como ∞ é o único ponto que não é isolado na topologia de $\bar{\mathbb{N}}^*$, então $X(\tau) = \infty$.

Vamos denotar por $y_n = X(\tau_{h_n})$. Desconsideraremos os índices n onde $y_n = \infty$, já que neles a igualdade em (3.14) é óbvia.

Como $h_n \leqslant 1$ e $\tau_h < \tau + h$, vale que $y_n \in V_{\tau+1}$ para todo n. Assim concluímos que $\gamma_{y_n} \to 0$ através da Proposição 3.12 já que $y_n \to \infty$.

Se tomarmos um n grande o suficiente, de forma que $\gamma_{y_n} T_0 < t$, usando a Proposição 3.5, teremos que:

$$f(X^\infty(t)) - f(X^{y_n}(t)) = f(X^\infty(t)) - f(X^\infty(t - \gamma_{y_n} T_0)).$$

Esta quantidade vai a zero *q.c.* porque $\gamma_{y_n} T_0 \to 0$ *q.c.* quando $n \to \infty$, t é *q.c.* um ponto de continuidade do processo e f é uma função contínua.

Como f é limitada, utilizando o Teorema da Convergência Dominada, concluíremos que:

$$\Psi_t f(\infty) - \Psi_t f(y_n) = \mathbb{E}\left[f(X^\infty(t)) - f(X^{y_n}(t))\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad \square$$

Capítulo 4

Probabilidades de transição

Nesse capítulo nos concentraremos em problemas ligados às probabilidades de transição do Processo K. Primeiramente trataremos de problemas relacionados à continuidade das mesmas, para depois calcularmos suas derivadas na origem. Isso nos permitirá calcular a medida invariante do processo. Por fim exibiremos o gerador infinitesimal no caso homogêneo e fecharemos o capítulo estudando a dimensão de Hausdorff do tempo em que o Processo K passa no infinito.

4.1 Continuidade das probabilidades de transição

Para deixar a nossa notação menos carregada, vamos introduzir a seguinte definição para $x, y \in \bar{\mathbb{N}}^*$ e $t > 0$:

$$p_{xy}(t) := P(X^x(t) = y).$$

Denotaremos ainda por $P(t)$ a "matriz" cujas entradas sejam $p_{xy}(t)$.

Nessa seção vamos estudar a continuidade dessas funções. Começaremos com uma caracterização básica das mesmas.

Proposição 4.1. *Para todo $x, y, z \in \bar{\mathbb{N}}^*$ e $t, s > 0$ vale que:*

1. $p_{xy}(t) \geqslant 0$
2. $\sum_{y \in \bar{\mathbb{N}}^*} p_{xy}(t) = 1$
3. $p_{xy}(t+s) = \sum_{z \in \bar{\mathbb{N}}^*} p_{xz}(t) p_{zy}(s)$
4. $p_{xy}(\bullet)$ *é uma função Lebesgue mensurável.*

Demonstração. Os três primeiros itens são consequência direta da definição de p_{xy} e da propriedade de Markov do processo. Para o quarto, consideremos $X^{x,(n)}$ como na Seção 3.2 e definiremos $p^n_{xy}(t) := P(X^{x,(n)}(t) = y)$. Observemos que p^n_{xy} é Lebesgue mensurável porque $X^{x,(n)}$ é um processo markoviano de saltos.

Fixado $x \in \bar{\mathbb{N}}^*$ e $y \in \mathbb{N}^*$, notemos que $f_y(z) := \mathbb{I}\{z = y\}$ é uma função contínua e todo $t > 0$ fixado é *q.c.* um ponto de continuidade de X^x. Assim podemos usar o Teorema 3.10, junto com o Teorema da Convergência Dominada, para concluir que $p^n_{xy}(t) \xrightarrow{n \to \infty} p_{xy}(t)$.

Assim, como limite de funções mensuráveis também é uma função mensurável, teremos que para todo $x \in \bar{\mathbb{N}}^*$ e $y \in \mathbb{N}^*$, p_{xy} é uma função mensurável.

Por fim, temos que $p_{x\infty}(t) = 1 - \sum_{y \in \mathbb{N}^*} p_{xy}(t)$. Assim $p_{x\infty}$ é limite de funções mensuráveis, e portanto também mensurável. □

Proposição 4.2. *Para todo $x, y \in \bar{\mathbb{N}}^*$, $p_{xy}(\bullet)$ é uma função contínua em $(0, \infty)$.*

Demonstração. Esse é um dos itens do Teorema 1 da primeira seção da parte II (pg. 120) de Chung (1967). □

Proposição 4.3. *Para $x \in \mathbb{N}^*$,*

$$\lim_{t \searrow 0} p_{xx}(t) = 1. \tag{4.1}$$

Demonstração. Como $x \in \mathbb{N}^*$, temos que:

$$p_{xx}(t) \geqslant P(\gamma_x T_0^x > t) = e^{-\frac{t}{\gamma_x}} \xrightarrow{t \searrow 0} 1.$$ □

Proposição 4.4. *Caso $c > 0$, vale que:*

$$\lim_{t \searrow 0} p_{\infty\infty}(t) = 1. \tag{4.2}$$

Demonstração. Consideremos a função:

$$\theta(t) = \int_0^t \mathbb{I}\{X^\infty(s) = \infty\} ds.$$

.

Pela construção do processo, temos que $\theta(t) \geqslant c\Xi(t)$, onde $\Xi(t)$ é a inversa de $\Gamma^\infty(t)$.

Como $\Gamma^\infty(t)$ é *q.c.* finito para todo t, então $\Xi(t) > 0$ *q.c.* . Portanto $\mathbb{E}[\theta(t)] > 0$. Usando o teorema de Fubini obtemos que:

$$\mathbb{E}[\theta(t)] = \int_0^t p_{\infty\infty}(s) ds$$

Assim obtemos que o conjunto dos $t > 0$ onde $p_{\infty\infty}(t) > 0$ tem medida de Lebesgue positiva. Em particular existe um $s > 0$ tal que $p_{\infty\infty}(s) > 0$. Fixemos tal s.

Tomemos uma sequência arbitrária (t_n), onde $t_n \searrow 0$ e $p_{\infty\infty}(t_n)$ convirja para um número real u quanto $n \to \infty$. Se mostrarmos que $u = 1$, seguirá que o limite dado em (4.2) existe e vale 1.

Usando as proposições 4.1 e 4.2, obteremos que:

$$p_{\infty\infty}(s) = \lim_{n\to\infty} p_{\infty\infty}(s + t_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{x \in \bar{\mathbb{N}}^*} p_{\infty x}(s) p_{x\infty}(t_n)$$

Pela Proposição 4.3, se $x \in \mathbb{N}^*$ então $p_{x\infty}(t_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Cada termo dessa soma é menor ou igual à $p_{\infty x}(s)$, que é somável em x. Assim usando o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que:

$$p_{\infty\infty}(s) = p_{\infty\infty}(s) u.$$

Já que $p_{\infty\infty}(s) > 0$, concluímos que $u = 1$. □

Proposição 4.5. *Caso $c = 0$, para todo $x \in \bar{\mathbb{N}}^*$ e $t > 0$, temos que $p_{x\infty}(t) = 0$.*

Demonstração. Essa demonstração é uma adaptação direta do Lema *3.15* de Fontes e Mathieu (2008).

Para $m \in \bar{\mathbb{N}}^*$ definimos:

$$\theta_m(t) := \int_0^t \mathbb{I}\{X_0^\infty(s) \geqslant m\}\, ds$$

Estamos interessados em estimar $\theta(t) := \theta_\infty(t)$. Para isso notemos que $\theta_m(t)$ é decrescente em m. Dessa forma, se Ξ for a função inversa de Γ^∞, teremos que:

$$\theta_\infty(t) \leqslant \theta_m(t) = \sum_{x \geqslant m} \sum_{i=1}^{\Xi(t)} \gamma_x T_i^x.$$

Como $\theta_m(t) \leqslant t$, essa série em x converge. Assim temos que $\lim_{m\to\infty} \theta_m(t) = 0$ *q.c.* e, portanto, $\theta(t) = 0$ *q.c.* . Dessa forma também vale que $\mathbb{E}[\theta(t)] = 0$. Agora usando o teorema de Fubini, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{I}\{X_0^\infty(s) = \infty\}\, ds\right] \\ &= \int_0^t P\{X_0^\infty(s) = \infty\}\, ds \\ &= \int_0^t p_{\infty\infty}(s) ds \end{aligned}$$

Dessa forma concluímos que $p_{\infty\infty}(t) = 0$ para Lebesgue quase todo t. A continuidade de $p_{\infty\infty}$ nos diz que $p_{\infty\infty}(t) = 0$ para todo $t > 0$.

Agora tomemos um $x \in \mathbb{N}^*$ arbitrário. Condicionando no valor de $\gamma_x T_0$ e usando a Proposição 3.5 teremos que:

$$p_{x\infty}(t) = \int_0^t p_{\infty\infty}(t-s) \frac{1}{\gamma_x} e^{-\frac{s}{\gamma_x}}\, ds.$$

Portanto para todo $t > 0$ vale que $p_{x\infty}(t) = 0$. □

4.2 Matriz Q

Nessa seção vamos calcular a matriz de taxas de transição do Processo K. Vamos definí-la pelo limite:

$$Q = \lim_{t \searrow 0} \frac{P(t) - I}{t},$$

onde I é a matriz identidade.

Vamos mostrar que, para o caso $c > 0$, essa matriz vale:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma_1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\gamma_1} \\ 0 & -\frac{1}{\gamma_2} & 0 & \cdots & \frac{1}{\gamma_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma_3} & \cdots & \frac{1}{\gamma_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\lambda_1}{c} & \frac{\lambda_2}{c} & \frac{\lambda_3}{c} & \cdots & -\infty \end{pmatrix}.$$

Enquanto que no caso $c = 0$, teremos:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & -\infty \end{pmatrix}.$$

Proposição 4.6. *Sejam $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x \neq y$, vale que:*

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{p_{xy}(t)}{t} = 0.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{p_{xy}(t)}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^t P(X^x(t) = y | \gamma_x T_0 = s) \frac{1}{\gamma_x} e^{-\frac{s}{\gamma_x}} ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t P(X^\infty(t-s) = y) \frac{1}{\gamma_x} e^{-\frac{s}{\gamma_x}} ds \\ &\leqslant \frac{1}{t\gamma_x} \int_0^t p_{\infty y}(t-s) ds \\ &= \frac{1}{t\gamma_x} \int_0^t p_{\infty y}(s) ds. \end{aligned}$$

Como $p_{\infty y}(t) \to 0$ quando $t \searrow 0$, então a quantidade acima também converge à zero. □

Proposição 4.7. *Para $x \in \mathbb{N}^*$, vale que:*

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{p_{xx}(t) - 1}{t} = -\frac{1}{\gamma_x}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} p_{xx}(t) &= P(\gamma_x T_0^x > t) + \int_0^t P(X^x(t) = y | \gamma_x T_0 = s) \frac{1}{\gamma_x} e^{-\frac{s}{\gamma_x}} ds \\ &= e^{-\frac{t}{\gamma_x}} + \int_0^t p_{\infty y}(t-s) \frac{1}{\gamma_x} e^{-\frac{s}{\gamma_x}} ds \end{aligned}$$

Fazendo contas análogas às da Proposição 4.6, podemos mostrar que o segundo termo dessa soma, dividido por t, vai para zero quando $t \searrow 0$. Tratando o primeiro termo obtemos:

$$\frac{e^{-\frac{t}{\gamma_x}}-1}{t} \xrightarrow{t\searrow 0} -\frac{1}{\gamma_x}.$$

Dessa forma:

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{p_{xx}(t)-1}{t} = -\frac{1}{\gamma_x}.$$

□

Proposição 4.8. *Para $x \in \mathbb{N}^*$, vale que:*

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{p_{\infty x}(t)}{t} = \begin{cases} \frac{\lambda_x}{c} & se\ c>0 \\ \infty & se\ c=0 \end{cases}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\frac{p_{\infty x}(t)}{t} &= \frac{1}{t}P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\Gamma^\infty(\sigma_i^x-)\leqslant t<\Gamma^\infty(\sigma_i^x)\}\right)\\
&= \frac{P\left(\Gamma^\infty(\sigma_1^x-)\leqslant t<\Gamma^\infty(\sigma_1^x)\right)}{t}+\frac{1}{t}P\left(\bigcup_{i=2}^{\infty}\{\Gamma^\infty(\sigma_i^x-)\leqslant t<\Gamma^\infty(\sigma_i^x)\}\right)\\
&= \frac{P\left(\Gamma^\infty(\sigma_1^x-)\leqslant t\right)}{t}-\frac{P\left(\Gamma^\infty(\sigma_1^x)\leqslant t\right)}{t}+\frac{1}{t}P\left(\bigcup_{i=2}^{\infty}\{\Gamma^\infty(\sigma_i^x-)\leqslant t<\Gamma^\infty(\sigma_i^x)\}\right) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que o segundo termo dessa soma vai a zero quando $t \searrow 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{P(\Gamma^\infty(\sigma_1^x)\leqslant t)}{t} &= \frac{1}{t}P\left(\gamma_x T_1^x+\sum_{y\neq x}\sum_{i=1}^{N_y(\sigma_1^x)}\gamma_y T_i^y+c\sigma_1^x\leqslant t\right)\\
&\leqslant \frac{1}{t}P\left(\gamma_x T_1^x+\sum_{y\neq x}\sum_{i=1}^{N_y(\sigma_1^x)}\gamma_y T_i^y\leqslant t\right)\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t P\left(\sum_{y\neq x}\sum_{i=1}^{N_y(\sigma_1^x)}\gamma_y T_i^y\leqslant t-s\,\middle|\,\gamma_x T_1^x=s\right)\frac{1}{\gamma_x}e^{-\frac{s}{\gamma_x}}ds\\
&\leqslant \frac{1}{\gamma_x t}\int_0^t P\left(\sum_{y\neq x}\sum_{i=1}^{N_y(\sigma_1^x)}\gamma_y T_i^y\leqslant t-s\right)ds\\
&= \frac{1}{\gamma_x t}\int_0^t P\left(\sum_{y\neq x}\sum_{i=1}^{N_y(\sigma_1^x)}\gamma_y T_i^y\leqslant s\right)ds
\end{aligned}$$

Quando $s \to 0$, a probabilidade dentro da integral converge para zero pela Proposição 3.4. Portanto o segundo termo de (4.3) converge à zero.

Agora notemos que, como Γ^∞ é não decrescente e $\sigma_1^x < \sigma_i^x$ para $i \geqslant 2$, então $\Gamma^\infty(\sigma_1^x) \leqslant \Gamma^\infty(\sigma_i^x-)$ e, assim, o evento no terceiro termo de (4.3) está contido no evento do segundo termo. Como mostramos que o segundo termo vai a zero, teremos que o terceiro também irá.

Resta calcular o limite do primeiro termo. Ao fazer isso estaremos também calculando o limite desejado.

Faremos isso usando o Teorema Tauberiano, que relaciona o comportamento a função de distribuição de uma variável aleatória positiva perto do zero com o comportamento de sua transformada de Laplace no infinito. Seguiremos o enunciado do Teorema*XIII.5.1* de Feller (1971).

O primeiro passo é calcular a transformada da Laplace ϕ de $\Gamma^\infty(\sigma_1^x-)$. Podemos calculá-la para um $u \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &:= \mathbb{E}\left[e^{-u\Gamma^\infty(\sigma_1^x-)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-u\left(c\sigma_1^x + \sum_{y\neq x}\sum_{i=1}^{N^y(\sigma_1^x)}\gamma_y\right)\right\}\right] \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\exp\left\{-u\left(ct + \sum_{y\neq x}\sum_{i=1}^{N^y(t)}\gamma_y T_i^y\right)\right\}\right]\lambda_x e^{-\lambda_x t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-uct}\,\mathbb{E}\left[\exp\left\{-u\sum_{y\neq x}\sum_{i=1}^{N^y(t)}\gamma_y T_i^y\right\}\right]\lambda_x e^{-\lambda_x t}dt.
\end{aligned}$$

Vamos nos concentrar na esperança que aparece na expressão acima. Usando a independência dos Processos de Poisson e das exponenciais envolvidas e o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que ela vale:

$$\begin{aligned}
&\prod_{y\neq x}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-u\sum_{i=1}^{N^y(t)}\gamma_y T_i^y\right\}\right] \\
&= \prod_{y\neq x}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-u\sum_{i=1}^{n}\gamma_y T_i^y\right\}\right]\frac{e^{-\lambda_y t}(\lambda_y t)^n}{n!} \\
&= \prod_{y\neq x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left\{-u\gamma_y T_1^y\right\}\right]\right)^n\frac{e^{-\lambda_y t}(\lambda_y t)^n}{n!} \\
&= \prod_{y\neq x}e^{-\lambda_y t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda_y t}{1+u\gamma_y}\right)^n \\
&= \prod_{y\neq x}e^{-\lambda_y t}\exp\left\{\frac{\lambda_y t}{1+u\gamma_y}\right\} \\
&= \exp\left\{-ut\sum_{y\neq x}\frac{\lambda_y\gamma_y}{1+u\gamma_y}\right\}.
\end{aligned}$$

Voltando à expressão original, obteremos que:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \int_0^\infty e^{-uct}\,\exp\left\{-ut\sum_{y\neq x}\frac{\lambda_y\gamma_y}{1+u\gamma_y}\right\}\lambda_x e^{-\lambda_x t}dt \\
&= \lambda_x\left(\lambda_x + uc + u\sum_{y\neq x}\frac{\lambda_y\gamma_y}{1+u\gamma_y}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Por enquanto vamos nos concentrar no caso $c > 0$. Para $u, v > 0$ teremos que:

$$\frac{\phi(uv)}{\phi(u)} = \frac{\lambda_x + uc + \sum_{y \neq x} \frac{u\lambda_y\gamma_y}{1+u\gamma_y}}{\lambda_x + uvc + \sum_{y \neq x} \frac{uv\lambda_y\gamma_y}{1+uv\gamma_y}} = \frac{\frac{\lambda_x}{u} + c + \sum_{y \neq x} \frac{\lambda_y\gamma_y}{1+u\gamma_y}}{\frac{\lambda_x}{u} + vc + \sum_{y \neq x} \frac{v\lambda_y\gamma_y}{1+uv\gamma_y}}.$$

Notemos que quando u vai ao infinito, os termos de cada uma das somas vai a zero monotonamente com u; assim usando o Teorema da Convergência Monótona, teremos que:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\phi(uv)}{\phi(u)} = \frac{1}{v}.$$

Com isso verificamos a condição do Teorema Tauberiano, de onde obtemos que:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{P(\Gamma^\infty(\sigma_1^x -) \leqslant t)}{\phi(\frac{1}{t})} = 1$$

Dessa maneira, se mostrarmos que $\frac{\phi(\frac{1}{t})}{t}$ converge para $\frac{\lambda_x}{c}$ quando $t \searrow 0$, teremos mostrado o nosso resultado.

$$\frac{\phi(\frac{1}{t})}{t} = \frac{1}{t}\lambda_x \left(\lambda_x + \frac{c}{t} + \sum_{y \neq x} \frac{1}{t} \frac{\lambda_x\gamma_x}{1 + \frac{\gamma_x}{t}} \right)^{-1} = \lambda_x \left(t\lambda_x + c + \sum_{y \neq x} \frac{\lambda_x\gamma_x}{1 + \frac{\gamma_x}{t}} \right)^{-1}.$$

Novamente cada termo da soma vai a zero monotonamente quanto $t \searrow 0$, assim pelo Teorema da Convergência Monótona, teremos que $\lim_{t \searrow 0} \frac{\phi(\frac{1}{t})}{t} = \frac{\lambda_x}{c}$.

Para tratar o caso $c = 0$ observemos que nossa construção do Processo K permite que acoplemos várias versões do processo, com c diferentes em um mesmo espaço de probabilidade. Basta usar os mesmos processos de Poisson e variáveis exponenciais para todos eles. Assim vamos colocar um índice c em Γ_c^y para denotar com qual valor de c estamos trabalhando.

Notemos que, para todo $y \in \bar{\mathbb{N}}^*$, Γ_c^y é crescente com c e, portanto, $P(\Gamma_c^\infty(\sigma_1^x -) \leqslant t)$ é monótona em c. Dessa forma teremos que, para todo $c > 0$:

$$\liminf_{t \searrow 0} \frac{P(\Gamma_0^\infty(\sigma_1^x -) \leqslant t)}{t} \geqslant \liminf_{t \searrow 0} \frac{P(\Gamma_c^\infty(\sigma_1^x -) \leqslant t)}{t} = \frac{\lambda_x}{c}.$$

Tomando $c > 0$ cada vez menores, concluiremos que $\frac{P(\Gamma_0^\infty(\sigma_1^x -))}{t} \xrightarrow{t \searrow 0} \infty$. □

Proposição 4.9.

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{p_{\infty\infty}(t) - 1}{t} = -\infty.$$

Demonstração. O caso $c = 0$ é trivial em vista da Proposição 4.5. Assim vamos supor que $c > 0$.

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, teremos que:

$$\frac{p_{\infty\infty}(t) - 1}{t} = -\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \frac{p_{\infty x}(t)}{t} \leqslant -\sum_{x=1}^{n} \frac{p_{\infty x}(t)}{t}. \tag{4.4}$$

Usando a Proposição 4.8, obtemos que a parte da direita converge para $-\sum_{x=1}^{n} \frac{\lambda_x}{c}$, quantidade essa que vai para $-\infty$ quando $n \to \infty$. Como a desigualdade (4.4) vale para todo n, concluímos que:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{p_{\infty\infty}(t) - 1}{t} = -\infty.$$

□

Proposição 4.10. *Para $x \in \mathbb{N}^*$, vale que:*

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{p_{x\infty}(t)}{t} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_x} & se\ c > 0 \\ 0 & se\ c = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Novamente o caso $c = 0$ é trivial em vista da Proposição 4.5. Assim vamos supor que $c > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{p_{x\infty}}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^t P(X^x(t) = \infty | \gamma_x T_0 = s) \frac{1}{\gamma_x} e^{-\frac{s}{\gamma_x}} ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t p_{\infty\infty}(t - s) \frac{1}{\gamma_x} e^{-\frac{s}{\gamma_x}} ds \\ &= \frac{e^{-t}}{\gamma_x} \frac{1}{t} \int_0^t p_{\infty\infty}(s) e^{\frac{s}{\gamma_x}} ds. \end{aligned}$$

A Proposição 4.4 nos diz que $p_{\infty\infty}(t) \xrightarrow{t \searrow 0} 1$, de onde concluímos que:

$$\frac{p_{x\infty}(t)}{t} \xrightarrow{t \searrow 0} \frac{1}{\gamma_x}.$$

□

4.3 Propriedade de Feller

Uma observação interessante que fizemos sobre Processos K não homogêneos é que eles podem não ser de Feller. Depois de calcular as taxas de transição, finalmente temos ferramentas para especificar explicitamente quando isso acontece.

Dizemos que um processo markoviano é de Feller se seu semigrupo Ψ_t apresentado na Definição 3.1 levar funções contínuas em funções contínuas.

Proposição 4.11. *São equivalentes:*

1. $\lim_{x \to \infty} \gamma_x = 0$
2. *O Processo K é um processo de Feller.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que se $\gamma_x \to 0$ quando $x \to \infty$, então o Processo K é de Feller.

Fixemos um $t > 0$ e uma $f : \bar{\mathbb{N}}^* \to \mathbb{R}$ contínua. Queremos mostrar que $\Psi_t f$ é uma função contínua, isso é, que $\Psi_t f(y) \to \Psi f(\infty)$ quando $y \to \infty$.

Notemos que:

$$\Psi_t f(\infty) - \Psi_t f(y) = \mathbb{E}\left[f(X^\infty(t)) - f(X^y(t))\right].$$

Como a quantidade dentro da esperança é limitada por $2\|f\|$, então, se mostrarmos que ela vai quase certamente à zero, seguirá pelo Teorema da Convergência Dominada que a esperança também irá a zero.

Como $\gamma_y \to 0$, então $\gamma_y T_0 \to 0$ $q.c.$. Assim, tomando y suficientemente grande, teremos que $\gamma_y T_0 < t$. Portanto usando a Proposição 3.5, teremos que:

$$f(X^\infty(t)) - f(X^y(t)) = f(X^\infty(t)) - f(X^\infty(t - \gamma_y T_0)).$$

O Corolário 3.8 nos garante que t é quase certamente um ponto de continuidade do processo, assim $X^\infty(t - \gamma_y T_0) \xrightarrow{y \to \infty} X^\infty(t)$ $q.c.$ e, como f é contínua, concluímos que a quantidade acima converge a zero $q.c.$.

Agora vamos mostrar que se γ_x não converge para zero quando $x \to \infty$, então o processo não é de Feller.

Se γ_x não convergir a zero, então existe um $\delta > 0$ e uma sequência crescente $(y_n)_n$ tal que $\gamma_{y_n} > \delta$ para todo n.

Por absurdo, vamos supor que o processo seja de Feller. Assim teremos que para todo $y \in \mathbb{N}^*$ e $t > 0$ vale que $p_{xy}(t) \to p_{\infty y}(t)$ quando $x \to \infty$. Usando a Proposição 3.5 teremos que:

$$p_{y_n y}(t) = \int_0^t \frac{1}{\gamma_{y_n}} e^{-\frac{s}{\gamma_{y_n}}} p_{\infty y}(t-s)ds \leqslant \frac{1}{\delta}\int_0^t p_{\infty y}(t-s)ds.$$

Tomando limite $n \to \infty$ obteremos:

$$\begin{aligned} p_{\infty y}(t) &\leqslant \frac{1}{\delta}\int_0^t p_{\infty y}(t-s)ds \\ &= \frac{1}{\delta}\int_0^t p_{\infty y}(s)ds. \end{aligned}$$

Como $p_{\infty y}(t) \to 0$ quando $t \searrow 0$, concluiremos que:

$$\frac{p_{\infty y}(t)}{t} \xrightarrow{t \searrow 0} 0,$$

o que contradiz a Proposição 4.8. $\square$

4.4 Medida invariante

O objetivo dessa seção é mostrar que a seguinte distribuição de probabilidade é uma medida invariante para o Processo K:

$$\pi(x) := \begin{cases} \frac{\lambda_x \gamma_x}{c + \sum_{y \in \mathbb{N}^*} \lambda_y \gamma_y} & \text{se } x \in \mathbb{N}^* \\ \frac{c}{c + \sum_{y \in \mathbb{N}^*} \lambda_y \gamma_y} & \text{se } x = \infty \end{cases} \tag{4.5}$$

Proposição 4.12. *O Processo K tem uma única distribuição invariante.*

Demonstração. Fixemos um número real $h > 0$ e consideremos uma cadeia de Markov em tempo discreto $(Y_n^{y,h})_{n\geqslant 0}$ dada por $Y_n^{y,h} = X^y(nh)$.

Fixado um estado $y \in \mathbb{N}^*$, definamos $M = \min\{i \geqslant 1 : \gamma_y T_i^y > h\}$. M é uma variável aleatória com distribuição geométrica com probabilidade de sucesso dada por $e^{-\frac{h}{\gamma_y}}$. Observemos que $X_t^y = y$ para todo $t \in [\Gamma^y(\sigma_M^y -), \Gamma^y(\sigma_M^x -) + \gamma_y T_M^y)$ e, como $\gamma_y T_M^y > h$, existe um múltiplo de h nesse intervalo. Assim se nh for esse múltiplo, vai valer que $Y_n^{y,h} = y$. Dessa maneira a esperança de tempo de retorno à um estado em (Y_n) é finita.

Para todo $x \in \bar{\mathbb{N}}^*$ e $y \in \mathbb{N}^*$ vale que $P(Y_1^{x,h} = y) > 0$. Temos ainda que $P(Y_1^{x,h} = \infty) > 0$ se $c > 0$, enquanto que $P(Y_1^{x,h} = \infty) = 0$ para $c = 0$. Assim a cadeia é irredutível no caso $c > 0$ e, no caso $c = 0$, temos que $\mathbb{N}^*$ é uma classe de comunicação fechada, enquanto que ∞ é um estado transiente.

Em todo caso, para cada escolha de h, existe uma única medida de probabilidade μ_h tal que para todo $n \geqslant 1$:

$$\mu_h(y) = \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_h(x) P(Y_n^{x,h} = y) = \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_h(x) P(X^x(nh) = y)$$

Fixando um inteiro $m \geqslant 1$ e um número real $h > 0$, temos que:

$$\begin{aligned}\mu_h(y) &= \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_h(x) P(Y_m^{x,h} = y)\\ &= \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_h(x) P(X^x(mh) = y)\\ &= \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_h(x) P(Y_1^{x,mh} = y).\end{aligned}$$

Portanto μ_h é uma medida invariante para $(Y_n^{\bullet,mh})_{n\geqslant 0}$ e, como ela é única, teremos que $\mu_h = \mu_{mh}$.

Assim concluímos que $\mu_h = \mu_1$ para todo $h > 0$ racional. Fixado um $h > 0$ irracional, tome uma sequência de números racionais (h_n) que convirjam para h. Teremos que:

$$\begin{aligned}\mu_1(y) &= \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_1(x) P(Y_1^{x,h_n} = y)\\ &= \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_1(x) P(X^x(h_n) = y)\\ &= \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_1(x) p_{xy}(h_n).\end{aligned}$$

Cada termo dessa soma é dominado por $\mu_1(x)$, que tem soma 1. Assim usando a Proposição 4.2 e o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que:

$$\begin{aligned}\mu_1(y) &= \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_1(x) p_{xy}(h)\\ &= \sum_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} \mu_1(x) P(Y_1^{x,h} = y).\end{aligned}$$

Dessa forma μ_1 é uma probabilidade invariante para $(Y_n^{\bullet,h})_n$ e, como a probabilidade invariante é única, concluímos que $\mu_1 = \mu_h$ para todo $h > 0$. $\square$

Proposição 4.13. *A probabilidade π definida em (4.5) é a medida invariante do Processo K, caso $c > 0$.*

Demonstração. Seja μ a única probabilidade invariante do nosso processo que encontramos na Proposição 4.12. Para todo $t > 0$, vale que:

$$\frac{\mu(y)}{t} = \sum_{x \in \bar{\mathbb{N}}^*} \mu(x) \frac{p_{xy}(t)}{t}$$

Rearranjando os termos, teremos que para todo $y \in \mathbb{N}^*$:

$$0 = \mu(\infty)\frac{p_{\infty y}(t)}{t} + \mu(y)\frac{p_{yy}(t) - 1}{t} + \sum_{x \in \mathbb{N}^* \backslash \{y\}} \mu(x)\frac{p_{xy}(t)}{t}.$$

As Proposições 4.7 e 4.8 nos fornecem os limites dos dois primeiros termos, enquanto que a Proposição 4.6 nos garante que $\frac{p_{xy}(t)}{t}$ converge à zero quando $t \searrow 0$ para cada $x \in \mathbb{N}^* \backslash \{y\}$.

Levando em conta que $p_{xy}(t) \leqslant P(\Gamma^x(\sigma_1^y-) \leqslant t) \leqslant P(\Gamma^\infty(\sigma_1^y-) \leqslant t)$, quantidade essa que não depende de x. Na demonstração da Proposição 4.8 mostramos que $\frac{1}{t}P(\Gamma^\infty(\sigma_1^y-) \leqslant t)$ converge para $\frac{\lambda_y}{c}$ quanto $t \searrow 0$. Portanto, para t suficientemente pequeno, teremos que existe uma constante H que não depende de x, tal que $\frac{p_{xy}(t)}{t} \leqslant H$ para todo $x \in \mathbb{N}^* \backslash \{y\}$.

Como $\mu(x)$ é somável em x, o Teorema da Convergência Dominada nos garante que:

$$\sum_{x \in \mathbb{N}^* \backslash \{y\}} \mu(x)\frac{p_{xy}(t)}{t} \xrightarrow{t \searrow 0} 0.$$

Assim obtemos que, para cada $y \in \mathbb{N}^*$:

$$0 = \mu(\infty)\frac{\lambda_y}{c} - \mu(y)\frac{1}{\gamma_y}.$$

Adicionando a restrição de que $\sum_{x \in \bar{\mathbb{N}}^*} \mu(x) = 1$, obteremos um sistema de equações cuja uma única solução é a π dada em (4.5). $\square$

Lema 4.14. *Para todo $t > 0$ e $y \in \bar{\mathbb{N}}^*$, vale que:*

$$X_c^y(t) \xrightarrow[\text{q.c.}]{c \searrow 0} X_0^y(t)$$

Demonstração. Observe que $\Gamma_c^y(t) - \Gamma_0^y(t) = ct \xrightarrow{c \searrow 0} 0$.

Pela Proposição 4.5, temos que $P(X_0^y(t) = \infty) = 0$.

Ainda sabemos que $\Gamma_0^y(\sigma_i^x-)$ é uma variável aleatória contínua. Assim $P(\Gamma_0^y(\sigma_i^x-) = t) = 0$.

Dessa forma vamos fixar uma realização do processo onde $X_0^y(t) = x < \infty$ e $\Gamma_0^y(\sigma_i^x-) \neq t$ para todo $x \in \mathbb{N}^*$ e $i \geqslant 1$. Tais realizações têm probabilidade 1.

Agora há duas possibilidades. A primeira é que $t < \gamma_y T_0$. Nesse caso teremos que para qualquer $c \geqslant 0$, vale que $X_c^y = y$. Assim a convergência é trivial.

A segunda possibilidade é que $t \geqslant \gamma_y T_0$. Nesse caso, existe um $i \geqslant 1$ tal que $\Gamma_0^y(\sigma_i^x-) < t < \Gamma_0^y(\sigma_i^x)$. Portanto para $c > 0$ pequeno o suficiente, teremos que $\Gamma_c^y(\sigma_i^x-) < t < \Gamma_c^y(\sigma_i^x)$ e assim $X_c^y(t) = x$. □

Proposição 4.15. *A probabilidade π definida em* (4.5) *é a medida invariante do processo K, caso $c = 0$.*

Demonstração. Vamos denotar a probabilidade definida em (4.5) por π_c

Mostramos na Proposição 4.5 que para todo $y \in \bar{\mathbb{N}}^*$, $P(X^y(t) = \infty) = 0$. Assim é trivial verificar que $0 = \pi_0(\infty) = \sum_{y \in \bar{\mathbb{N}}^*} \pi_0(y) P(X^y(t) = \infty)$.

A partir de agora fixemos um $x \in \mathbb{N}^*$ arbitrário. Vamos mostrar que:

$$\pi_0(x) = \sum_{y \in \bar{\mathbb{N}}^*} \pi_0(y) P(X_0^y(t) = x).$$

Observemos que $f_x(y) = \mathbb{I}\{y = x\}$ é uma função contínua e limitada. Dessa forma, pelo Lema 4.14, obtemos que $f_x(X_c^y(t)) \xrightarrow{c \searrow 0} f_x(X_0^y(t))$ *q.c.* para todo $y \in \bar{\mathbb{N}}^*$.

Assim aplicando o Teorema da Convergência Dominada concluímos que:

$$P(X_c^y(t) = x) = \mathbb{E}[f_x(X_c^y(t))] \xrightarrow{c \searrow 0} \mathbb{E}[f_x(X_0^y(t))] = P(X_0^y(t) = x).$$

Como π_c é invariante para (X_c^y), teremos que para todo $x \in \mathbb{N}^*$ e $t \geqslant 0$:

$$\pi_c(x) = \sum_{y \in \bar{\mathbb{N}}^*} \pi_c(y) P(X_c^y(t) = x).$$

Observando (4.5), notamos que $\pi_c(y) \xrightarrow{c \searrow 0} \pi_0(y)$ para todo $y \in \bar{\mathbb{N}}^*$ e que $\pi_c(y) \leqslant \pi_0(y)$ para todo $y \in \mathbb{N}^*$ e $c > 0$. Dessa forma podemos tomar o limite $c \searrow 0$ e usar o Teorema da Convergência Dominada para obter que:

$$\pi_0(x) = \sum_{y \in \bar{\mathbb{N}}^*} \pi_0(y) P(X_0^y(t) = x).$$

De onde concluímos que π_0 é uma medida invariante para o Processo K no caso $c = 0$. □

4.5 Gerador infinitesimal

O gerador infinitesimal é muitas vezes usado no estudo de processos estocásticos para garantir a existência do processo estudado. Descrevem-se as taxas de transição por meio de uma expressão e argumenta-se, geralmente usando o teorema de Hille-Yosida, que existe um processo com essa expressão como gerador.

Nós estamos indo na direção oposta. Já temos uma construção do nosso processo e queremos saber como é o seu gerador.

Por simplicidade, vamos nos limitar ao caso homogêneo, isso é, $\lambda_x = 1$ para todo $x \in \mathbb{N}^*$.

O exemplo K1 de Kendall e Reuter (1956) é o nosso Processo K homogêneo, com $c = 1$ e $\gamma_x = 1/\alpha_{x+1}$. Nesse artigo eles calcularam o gerador infinitesimal, $\mathcal{A}$, de tal processo. Seu domínio é o conjunto das funções $f : \bar{\mathbb{N}}^* \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(\infty)}{\gamma_x}$ existe e vale $\sum_{x\in\mathbb{N}^*}[f(\infty) - f(x)]$, série essa que tem que convergir absolutamente. Em funções f desse domínio, o gerador vale:

$$\mathcal{A}f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(\infty) - f(x)}{\gamma_x} & \text{se } x \in \mathbb{N}^* \\ \displaystyle\sum_{y\in\mathbb{N}^*} [f(y) - f(\infty)] & \text{se } x = \infty. \end{cases}$$

Nós vamos tratar apenas do caso $c = 0$.

O primeiro passo será definir a classe de funções sobre a qual definiremos o gerador. Essa classe tem que ser pequena o suficiente para que o gerador esteja bem definido, mas rica o suficiente para que ele caracterize o semigrupo. A classe adotada será:

$$\mathfrak{D} = \left\{ f \in \mathcal{C} : \sum_{x\in\mathbb{N}^*} |f(x) - f(\infty)| < \infty, \sum_{x\in\mathbb{N}^*} (f(x) - f(\infty)) = 0, \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(\infty)}{\gamma_x} \text{ existe} \right\}, \tag{4.6}$$

onde $\mathcal{C}$ é o conjunto das funções de $\bar{\mathbb{N}}^*$ em $\mathbb{R}$ contínuas.

Definição 4.1. *O gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ é uma função $\mathcal{A} : \mathfrak{D} \to \mathcal{C}$, definida através do limite:*

$$\mathcal{A}f = \lim_{t\searrow 0} \frac{\Psi_t f - f}{t}, \tag{4.7}$$

onde Ψ é o semigrupo de transição apresentado na Definição 3.1.

Agora vamos mostrar nas proposições 4.16 e 4.17 que esse limite de fato existe e calcular o seu valor.

Proposição 4.16. *Para $f \in \mathfrak{D}$ e $x \in \mathbb{N}^*$, vale que:*

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{\Psi_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{f(\infty) - f(x)}{\gamma_x} \tag{4.8}$$

Demonstração. Esse resultado vale para toda $f \in \mathcal{C}$. Não facilitará em nada nos restringir à $\mathfrak{D}$. Assim vamos fixar uma $f \in \mathcal{C}$ e $x \in \mathbb{N}^*$ arbitrários.

Para um $\epsilon > 0$ fixado arbitrariamente vamos mostrar que:

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{\Psi_t f(x) - f(x)}{t} \leqslant \frac{f(\infty) - f(x) + \epsilon}{\gamma_x} \tag{4.9}$$

$$\liminf_{t\searrow 0} \frac{\Psi_t f(x) - f(x)}{t} \geqslant \frac{f(\infty) - f(x) - \epsilon}{\gamma_x}, \tag{4.10}$$

de onde conclui-se (4.8) imediatamente.

Agora observemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_t f(x) - f(x)}{t} &= \sum_{y\in\bar{\mathbb{N}}^*} [f(y) - f(x)] \frac{p_{xy}(t)}{t} \\ &= \sum_{y\in\bar{\mathbb{N}}^*\setminus\{x\}} [f(y) - f(x)] \frac{p_{xy}(t)}{t}. \end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{C}$, podemos tomar um $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $m > x$ e $f(y) < f(\infty) + \epsilon$ para $y > m$. Com base na Proposição 4.6 concluímos que cada termo da série acima converge para zero quanto $t \searrow 0$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \searrow 0} \frac{\Psi_t f(x) - f(x)}{t} &= \limsup_{t \searrow 0} \sum_{y>m} [f(y) - f(x)] \frac{p_{xy}(t)}{t} \\
&\leqslant [f(\infty) - f(x) + \epsilon] \limsup_{t \searrow 0} \sum_{y>m} \frac{p_{xy}(t)}{t} \\
&= [f(\infty) - f(x) + \epsilon] \limsup_{t \searrow 0} \frac{1 - P\left(X^x(t) \leqslant m\right)}{t} \\
&= [f(\infty) - f(x) + \epsilon] \limsup_{t \searrow 0} \left[\frac{1 - p_{xx}(t)}{t} - \sum_{\substack{y \leqslant m \\ y \neq x}} \frac{p_{xy}(t)}{t} \right]
\end{aligned}$$

Agora usando a Proposição 4.7, verificamos que o primeiro termo da expressão acima converge para $\frac{1}{\gamma_x}$, enquanto que o segundo converge para zero pela Proposição 4.6. Dessa forma concluímos (4.9). A expressão (4.10) pode ser demonstrada de forma análoga. □

Proposição 4.17. *Para $f \in \mathfrak{D}$, vale que:*

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\Psi_t f(\infty) - f(\infty)}{t} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(\infty) - f(x)}{\gamma_x} \tag{4.11}$$

Demonstração. Fixemos uma $h \in \mathfrak{D}$ arbitrária. Vamos denotar por $\bar{h}(x) = h(x) - h(\infty)$, além disso vamos definir $L = \lim_{x \to \infty} -\bar{h}(x)/\gamma_x$, limite que existe pela definição de $\mathfrak{D}$. Sem perda de generalidade vamos supor que $L \geqslant 0$.

Por toda essa demonstração, vamos supor que $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_x$ para todo $x > 2$. Não perdemos generalidade ao fazer essa suposição porque basta trocar 1 e 2 no nosso argumento pelos estados que têm γ máximo. Tais estados existem porque $\gamma_x \to 0$ quando $x \to \infty$.

Outra notação que usaremos será:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{<x>}(t) &= \sum_{z \in \mathbb{N}^* \setminus \{x\}} \sum_{i=1}^{N^z(t)} \gamma_y T_i^z \\
\Gamma^{<x,y>}(t) &= \sum_{z \in \mathbb{N}^* \setminus \{x,y\}} \sum_{i=1}^{N^z(t)} \gamma_y T_i^z .
\end{aligned}$$

Para um $\epsilon > 0$ fixado arbitrariamente, vamos mostrar que:

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{\Psi_t h(\infty) - h(\infty)}{t} \leqslant L + \epsilon \tag{4.12}$$

$$\liminf_{t \searrow 0} \frac{\Psi_t h(\infty) - h(\infty)}{t} \geqslant L - \epsilon, \tag{4.13}$$

de onde concluiremos (4.11) imediatamente.

Agora vamos começar a fazer as contas de fato.

$$\begin{aligned}\Psi_t h(\infty) - h(\infty) &= \sum_{x\in\mathbb{N}*} \bar{h}(x) P\left(X^{\infty}(t) = x\right) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{N}*} \bar{h}(x) P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ pela } 1^a \text{ vez}\right) \\ &+ \sum_{x\in\mathbb{N}*} \bar{h}(x) P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ não pela } 1^a \text{ vez}\right)\end{aligned}$$

O Lema 4.18 nos diz que o segundo termo, dividido por t converge para zero quando $t \searrow 0$, assim podemos nos concentrar apenas nas primeiras visitas. Usando o fato de que $\sum_{x\in\mathbb{N}*} \bar{h}(x) = 0$, podemos escrever o primeiro termo da expressão acima como:

$$\begin{aligned}&\sum_{x\in\mathbb{N}*} \bar{h}(x) \left[P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ pela } 1^a \text{ vez}\right) - P\left(X^{\infty}(t) = 1 \text{ pela } 1^a \text{ vez}\right)\right] \\ &= \sum_{x>1} \bar{h}(x) \left[P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ pela } 1^a \text{ vez}\right) - P\left(X^{\infty}(t) = 1 \text{ pela } 1^a \text{ vez}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.14}$$

Agora podemos escrever:

$$\begin{aligned}P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ pela } 1^a \text{ vez}\right) &= P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ pela } 1^a \text{ vez}, \sigma_1^x < \sigma_1^1\right) \\ &+ P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ pela } 1^a \text{ vez}, \sigma_1^x > \sigma_1^1\right),\end{aligned}$$

e com base nisso reescrever (4.14) como:

$$\sum_{x>1} \bar{h}(x) \left[P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ pela } 1^a \text{ vez}, \sigma_1^x < \sigma_1^1\right) - P\left(X^{\infty}(t) = 1 \text{ pela } 1^a \text{ vez}, \sigma_1^1 < \sigma_1^x\right)\right] + \epsilon_t \tag{4.15}$$

Para mostrar que $\frac{\epsilon_t}{t} \to 0$ quando $t \searrow 0$, note que:

$$\left|\frac{\epsilon_t}{t}\right| \leqslant \frac{1}{t} \sum_{x>1} |\bar{h}(x)| P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ pela } 1^a \text{ vez}, \sigma_1^x > \sigma_1^1\right) \tag{4.16}$$

$$+ \frac{1}{t} \sum_{x>1} |\bar{h}(x)| P\left(X^{\infty}(t) = 1 \text{ pela } 1^a \text{ vez}, \sigma_1^1 > \sigma_1^x\right) \tag{4.17}$$

Para dominar (4.16), note que $\Gamma^{<1,x>}(\sigma_1^x)$ domina estocasticamente $\Gamma^{<1,2>}(\sigma_1^2)$. Dessa forma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t} P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ pela } 1^a \text{ vez}, \sigma_1^x > \sigma_1^1\right) &\leqslant \frac{1}{t} P(\Gamma^{<1,x>}(\sigma_1^x) \leqslant t, \gamma_1 T_1^1 \leqslant t) \\ &\leqslant P(\Gamma^{<1,2>}(\sigma_1^2) \leqslant t) \frac{1 - e^{-t/\gamma_1}}{t} \\ &\leqslant \frac{P(\Gamma^{<1,2>}(\sigma_1^2) \leqslant t)}{\gamma_1}.\end{aligned}$$

Essa última quantidade não depende de x e vai a zero quando $t \searrow 0$. Dessa forma concluímos que (4.16) converge a zero quando $t \searrow 0$.

Para controlar (4.17), notemos que se $X(t) = 1$ e $\sigma_1^1 > \sigma_1^x$ então o processo passou por 1 e por x até o instante t. Como $\gamma_1 \geqslant \gamma_x$, usando a propriedade de falta de memória da exponencial nos σ's, obtemos que a probabilidade de termos passado por 1 e por x é menor ou igual à probabilidade do processo ter passado por x pelo menos duas vezes. Dessa forma, usando o Lema 4.18, concluímos que (4.16) converge à zero quando $t \searrow 0$.

Voltando a trabalhar com (4.15), notemos que, condicionado em $\{\sigma_1^x < \sigma_1^1\}$, σ_1^x tem distribuição exponencial de média 1/2. Ainda vale que $\Gamma^{<1,x>}(\bullet)$ é independente de $\{\sigma_1^x, \sigma_1^1\}$. Assim se S for uma v.a. exponencial de média 1/2 independente de todo o processo, teremos que a distribuição de $\Gamma^{<1,x>}(\sigma_1^x)$ condicionada em $\sigma_1^x < \sigma_1^1$ será igual à distribuição de $\Gamma^{<1,x>}(S)$.

Notemos que $X^\infty(t) = x$ pela primeira vez se e somente se $\Gamma^{<x>}(\sigma_1^x) \leqslant t < \Gamma^{<x>}(\sigma_1^x) + \gamma_x T_1^x$.

Levando em conta todas as considerações anteriores, se denotarmos por f_x a densidade de $\Gamma^{<1,x>}(S)$ e por F_x a sua função de distribuição, podemos escrever (4.15), a menos do ϵ_t, por:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{x>1} \bar{h}(x) \int_0^t f_x(s) \left(e^{-\frac{t-s}{\gamma_x}} - e^{-\frac{t-s}{\gamma_1}}\right) ds \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{x>1} \bar{h}(x) \int_0^t f_x(s) \left(1 - e^{-\frac{t-s}{\gamma_x}}\right) ds \qquad (4.18)\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{x>1} \bar{h}(x) \int_0^t f_x(s) \left(1 - e^{-\frac{t-s}{\gamma_1}}\right) ds \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Para controlar (4.19), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{t}\sum_{x>1} \bar{h}(x) \int_0^t f_x(s) \left(1 - e^{-\frac{t-s}{\gamma_1}}\right) ds\right| &\leqslant \sum_{x>1} |\bar{h}(x)| \int_0^t f_x(s) \frac{1}{t} \left(1 - e^{-\frac{t-s}{\gamma_1}}\right) ds \\
&\leqslant \sum_{x>1} |\bar{h}(x)| \frac{F_x(t)}{\gamma_1} ds.
\end{aligned}$$

Observemos que cada termo dessa série converge para zero quando $t \searrow 0$, enquanto que eles são dominados por $|\bar{h}(x)|/\gamma_1$, que é somável. Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que (4.19) dividido por t converge para zero quando $t \searrow 0$.

Fazendo uma integração por partes, obtemos que (4.18) é igual à:

$$-\frac{1}{2}\sum_{x>1} \frac{\bar{h}(x)}{\gamma_x} \left[\int_0^t F_x(s) e^{-\frac{t-s}{\gamma_x}} ds\right].$$

Como $F_x(t) \to 0$ quanto $t \searrow 0$, temos que cada termo da série acima dividido por t converge para zero quando $t \searrow 0$. Assim podemos nos preocupar apenas com a cauda da série. Para isso tomemos um $m > 2$ tal que $-\frac{\bar{h}(x)}{\gamma_x} < L + \epsilon$ sempre que $x > m$.

Como $\gamma_2 \geqslant \gamma_x$, então $\Gamma^{<1,x>}$ domina estocasticamente $\Gamma^{<1,2>}$. Dessa forma $F_x(t) \leqslant F_2(t)$.

Com todas essas considerações, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \searrow 0} \frac{\Psi_t h(\infty) - h(\infty)}{t} &\leqslant (L+\epsilon) \limsup_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{F_2(s)}{2} \sum_{x>m} e^{-\frac{t-s}{\gamma_x}} ds \\
&= (L+\epsilon) \limsup_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{F_2(s)}{2} \left[2 + \sum_{x>2} e^{-\frac{t-s}{\gamma_x}}\right] ds \\
&\quad - (L+\epsilon) \limsup_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{F_2(s)}{2} \left[2 + \sum_{x=3}^{m} e^{-\frac{t-s}{\gamma_x}}\right] ds
\end{aligned}$$

O segundo termo dessa soma vale zero já que $F_2(s) \to 0$ quando $s \searrow 0$ e a soma dentro da integral é finita. Resta calcular o primeiro termo. Para isso vamos definir:

$$\Phi(t) := \int_0^t \frac{F_2(s)}{2} \left[2 + \sum_{x>2} e^{-\frac{t-s}{\gamma_x}} \right] ds.$$

Vamos mostrar que $\Phi(t) = t$. Faremos isso calculando a transformada de Laplace de Φ e a identificando com a da identidade.

Notemos que Φ é a convolução de duas outras funções; assim vamos calcular a transformada de Laplace delas. Para um $\beta > 0$ fixado, usando integração por partes, podemos calcular a transformada de Laplace da primeira por:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\beta t} \frac{F_2(t)}{2} dt &= \frac{1}{2\beta} \int_0^\infty e^{-\beta t} f_2(t) dt \\
&= \frac{1}{2\beta} \mathbb{E}\left[\exp\{-\beta \Gamma^{<1,2>}(S)\} \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left(2 + \sum_{x>2} \frac{\beta\gamma_x}{1+\beta\gamma_x} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Enquanto que a segunda irá valer:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\beta t} \left[2 + \sum_{x>2} e^{-\frac{t}{\gamma_x}} \right] dt &= \frac{2}{\beta} + \sum_{x>2} \int_0^\infty \exp\left\{ -\left(\beta + \frac{1}{\gamma_x} \right) t \right\} dt \\
&= \frac{2}{\beta} + \sum_{x>2} \frac{\gamma_x}{1+\beta\gamma_x} \\
&= \frac{1}{\beta} \left(2 + \sum_{x>2} \frac{\beta\gamma_x}{1+\beta\gamma_x} \right)
\end{aligned}$$

Multiplicando as duas, obteremos que:

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} \Phi(t) dt = \frac{1}{\beta^2}.$$

Agora identificamos essa transformada de Laplace com a da identidade, já que:

$$\int_0^\infty t e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta^2}.$$

Dessa forma podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \searrow 0} \frac{\Psi_t h(\infty) - h(\infty)}{t} &\leqslant (L+\epsilon) \limsup_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \Phi(t) \\
&= L + \epsilon.
\end{aligned}$$

Com isso mostramos (4.12). Podemos mostrar (4.13) de forma análoga, mas em vez de usar que $\Gamma^{<1,x>}$ domina $\Gamma^{<1,2>}$, usaremos que $\Gamma^{<1>}$ domina $\Gamma^{<1,x>}$. Também teremos que inserir $x = 2$ na soma que define Φ. $\square$

Lema 4.18. *Para $h \in \mathfrak{D}$, vale que:*

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \sum_{x \in \mathbb{N}^*} |h(x) - h(\infty)| P\left(X^{\infty} \textit{passou mais que 1 vez por } x \textit{ até o instante } t\right) = 0. \tag{4.20}$$

Demonstração. Novamente vamos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma_1 \geqslant \gamma_x$ para todo $x \in \mathbb{N}^*$. Vamos também denotar por $f(x) = |h(x) - h(\infty)|$.

Usando o fato que $\Gamma^{<x>}(\sigma_2^x)$ domina estocasticamente $\Gamma^{<1>}(\sigma_2^1)$ e que $\Gamma^{<1>}$ tem incrementos estacionários e independentes, podemos estimar:

$$\begin{aligned}
P\left(\Gamma^{<x>}(\sigma_2^x) \leqslant t\right) &\leqslant P\left(\Gamma^{<1>}(\sigma_2^1) \leqslant t\right) \\
&= P\left(\exp\left\{-\frac{\Gamma^{<1>}(\sigma_2^1)}{t}\right\} \geqslant e^{-1}\right) \\
&\leqslant e\,\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\Gamma^{<1>}(\sigma_2^1)}{t}\right\}\right] \\
&= e\left\{\mathbb{E}\left[-\frac{\Gamma^{<1>}(\sigma_1^1)}{t}\right]\right\}^2 \\
&= e\left(1 + \sum_{y>1} \frac{\gamma_y}{t + \gamma_y}\right)^{-2} \\
&\leqslant e\left(\sum_{y \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_y}{t + \gamma_y}\right)^{-2}
\end{aligned}$$

Observemos que o evento $\{X^{\infty}$ passou mais que 1 vez por x até o instante $t\}$ está contido no evento $\{\Gamma^{<x>}(\sigma_2^x) \leqslant t,\ \gamma_x T_1^x \leqslant t\}$. Assim usando a estimativa acima e o fato que $\Gamma^{<x>}(\sigma_2^x)$ é independente de T_1^x, obtemos que:

$$\frac{1}{t} \sum_{x \in \mathbb{N}^*} f(x) P\left(X^{\infty}(t) = x \text{ não pela primeira vez}\right) \leqslant \text{cte} \left(\sum_{y \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_y}{t + \gamma_y}\right)^{-2} \sum_{x \in \mathbb{N}^*} f(x) \frac{1 - e^{-t/\gamma_x}}{t}.$$

Se denotarmos por $A_t = \{x \in \mathbb{N}^* : \gamma_x > t\}$, podemos escrever a quantidade acima por:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \sum_{y>1} \frac{\gamma_y}{t + \gamma_y}\right)^{-2} \sum_{x \in \mathbb{N}^*} f(x) \frac{1 - e^{-t/\gamma_x}}{t} &= \left(\sum_{y \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_y}{t + \gamma_y}\right)^{-2} \sum_{x \in A_t} f(x) \frac{1 - e^{-t/\gamma_x}}{t} \\
&+ \left(\sum_{y \in \mathbb{N}^*} \frac{\gamma_y}{t + \gamma_y}\right)^{-2} \sum_{x \notin A_t} f(x) \frac{1 - e^{-t/\gamma_x}}{t}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Vamos mostrar que os dois termos convergem a zero quando $t \searrow 0$.

Para o primeiro termo notemos que, para cada $t > 0$ fixado, A_t é um conjunto finito mas a sua cardinalidade vai para o infinito quando $t \searrow 0$. Observemos também que, como $h \in \mathfrak{D}$, então $f(x)/\gamma_x$ converge; assim essa quantidade é limitada por uma constante. Se denotarmos por $\#A_t$ a cardinalidade de A_t, poderemos escrever:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{y\in\mathbb{N}^*}\frac{\gamma_y}{t+\gamma_y}\right)^{-2}\sum_{x\in A_t}f(x)\frac{1-e^{-t/\gamma_x}}{t} &\leqslant \left(\sum_{y\in A_t}\frac{\gamma_y}{t+\gamma_y}\right)^{-2}\sum_{x\in A_t}\frac{f(x)}{\gamma_x}\\ &\leqslant \text{cte}\left(\sum_{y\in A_t}\frac{\gamma_y}{2\gamma_y}\right)^{-2}\#A_t\\ &= \text{cte}\left(\frac{1}{2}\#A_t\right)^{-2}\#A_t\\ &\leqslant \text{cte}\,\frac{1}{\#A_t}\xrightarrow{t\searrow 0}0.\end{aligned}$$

Com isso concluímos que o primeiro termo de (4.21) converge a zero quando $t \searrow 0$.

Vamos tratar agora o segundo. Como $\frac{f(x)}{\gamma_x}$ converge, então essa sequência é limitada. Assim $f(x) \leqslant \text{cte}\ \gamma_x$. Juntando isso ao fato de que $1 - e^{-t/\gamma_x} \leqslant 1$ podemos escrever:

$$\left(\sum_{y\in\mathbb{N}^*}\frac{\gamma_y}{t+\gamma_y}\right)^{-2}\sum_{x\notin A_t}f(x)\frac{1-e^{-t/\gamma_x}}{t} \leqslant \text{cte}\left(\sum_{y\in\mathbb{N}^*}\frac{\gamma_y}{t+\gamma_y}\right)^{-2}\sum_{x\notin A_t}\frac{\gamma_x}{t}. \tag{4.22}$$

Agora vamos separar em 2 casos. O primeiro ocorre quando $\sum_{x\notin A_t}\frac{\gamma_x}{t}$ é limitado. Nesse caso é fácil ver que o denominador de (4.22) diverge quando $t \searrow 0$. Dessa forma a expressão acima converge para zero quanto $t \searrow 0$.

O segundo ocorre quando $\sum_{x\notin A_t}\frac{\gamma_x}{t}$ vai para o infinito quanto $t \searrow 0$.

Quando $y \notin A_t$, vale que $\gamma_y \leqslant t$ e, consequentemente, $\frac{\gamma_x}{t+\gamma_x} \geqslant \frac{\gamma_y}{2t}$. Portanto podemos dominar (4.22) a menos da constante por:

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{y\notin A_t}\frac{\gamma_y}{t}\right)^{-2}\sum_{x\notin A_t}\frac{\gamma_x}{t}\xrightarrow{t\searrow 0}0. \qquad \square$$

Teorema 4.19. *A função $\mathcal{A}$, definida nas proposições 4.16 e 4.17 é um gerador infinitesimal que caracteriza o semigrupo Ψ_t.*

Demonstração. Seguindo Liggett (1985), munindo $\mathcal{C}$ da norma do supremo, vamos mostrar que:

1. $\mathcal{A}$ leva funções de $\mathfrak{D}$ em $\mathcal{C}$;

2. $\mathfrak{D}$ é denso em $\mathcal{C}$.

3. A imagem de $I - \mathcal{A}$ é densa em $\mathcal{C}$, onde I é a identidade.

O item 1 é evidente de (4.8) e (4.11).

Para o item 2, tomemos uma $g \in \mathcal{C}$ e $\epsilon > 0$ arbitrários e vamos encontrar uma $f \in \mathfrak{D}$ tal que $\|f - g\| < \epsilon$.

Como g é contínua, existe um n_0 tal que $|g(x) - g(\infty)| < \epsilon/2$ para $x > n_0$. Fixemos tal n_0. Vamos definir $f(x) = g(x)$ para $x \leqslant n_0$.

Agora tomemos um m tal que $\frac{1}{m}|\sum_{x=1}^{n_0}(g(x) - g(\infty))| < \epsilon/2$ e, para $n_0 < x \leqslant n_0 + m$, definamos $f(x) = g(\infty) - \frac{1}{m}\sum_{x=1}^{n_0}(g(x) - g(\infty))$.

Para $x > n_0 + m$ ou $x = \infty$, tomemos $f(x) = g(\infty)$.

Como $f(x) = f(\infty)$ para $x > n_0 + m$, então f é contínua, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(\infty)}{\gamma_x} = 0$ e $\sum_{x\in\mathbb{N}^*} |f(x) - f(\infty)| < \infty$. Vale ainda que:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{N}^*} (f(x) - f(\infty)) &= \sum_{x=1}^{n_0} (f(x) - f(\infty)) + \sum_{x=n_0+1}^{m} (f(x) - f(\infty)) \\
&= \sum_{x=1}^{n_0} (g(x) - g(\infty)) + m \left(-\frac{1}{m} \sum_{x=1}^{n_0} (g(x) - g(\infty)) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto $f \in \mathfrak{D}$. Ainda $\sup_{x\in\bar{\mathbb{N}}^*} |f(x) - g(x)| < \epsilon$ por construção. Assim concluímos que $\mathfrak{D}$ é denso em $\mathcal{C}$.

Resta mostrar o item 3. Para isso vamos mostrar que a imagem de $I - \mathcal{A}$ é o conjunto das funções contínuas.

Tomemos uma $g \in \mathcal{C}$ e vamos encontrar uma $f \in \mathfrak{D}$ tal que $f - \mathcal{A}f = g$.

Observemos que $\sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_x}{1+\gamma_x} < \infty$ e g é limitada. Assim a constante L abaixo está bem definida:

$$L := -\left(\sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_x}{1+\gamma_x} \right)^{-1} \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_x}{1+\gamma_x} \left[g(x) - g(\infty) \right].$$

Com base nela, vamos definir:

$$f(x) = \begin{cases} g(\infty) - L & \text{se } x = \infty \\ \frac{1}{1+\gamma_x} \left[\gamma_x g(x) + g(\infty) - L \right] & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com base nessa definição, observamos que:

$$\frac{f(x) - f(\infty)}{\gamma_x} = \frac{g(x) - g(\infty)}{1+\gamma_x} + \frac{L}{1+\gamma_x} \xrightarrow{x\to\infty} L.$$

Usando a definição de L, podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{N}^*} |f(x) - f(\infty)| &\leqslant \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_x}{1+\gamma_x} |g(x) - g(\infty)| + \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_x}{1+\gamma_x} |L| < \infty \\
\sum_{x\in\mathbb{N}^*} \left[f(x) - f(\infty) \right] &= \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_x}{1+\gamma_x} \left[g(x) - g(\infty) \right] + \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_x}{1+\gamma_x} L \\
&= \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_x}{1+\gamma_x} \left[g(x) - g(\infty) \right] - \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\gamma_x}{1+\gamma_x} \left[g(x) - g(\infty) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Observando (4.6), concluímos que $f \in \mathfrak{D}$.

Para verificar que $f - \mathcal{A}f = g$, observe que para $x \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
f(\infty) - \mathcal{A}f(\infty) &= g(\infty) - L - (-L) = g(\infty) \\
f(x) - \mathcal{A}f(x) &= \frac{1}{1+\gamma_x} \left[\gamma_x g(x) + g(\infty) - L \right] - \left(-\frac{g(x) - g(\infty)}{1+\gamma_x} - \frac{L}{1+\gamma_x} \right) \\
&= \frac{\gamma_x g(x)}{1+\gamma_x} + \frac{g(x)}{1+\gamma_x} = g(x)
\end{aligned}$$

$\square$

4.6 Tempo no infinito

Na demonstração da Proposição 4.4 mostramos que, no caso $c > 0$, o tempo que o processo passa no infinito tem medida de Lebesgue positiva quase certamente.

Usando a Proposição 4.5, podemos mostrar que a medida de Lebesgue do tempo em que o processo passa no infinito vale zero quase certamente no caso $c = 0$.

Nessa seção expandiremos um pouco o caso $c = 0$. Especificamente apresentaremos uma maneira de calcular a dimensão de Hausdorff do tempo em que o processo passa no infinito. Para o restante dessa seção, consideraremos sempre que $c = 0$.

Em vista da Proposição 3.5, vamos considerar somente o Processo K iniciado no ∞, visto que o conjunto dos instantes onde o processo está no infinito ao iniciar em um estado y é igual ao mesmo conjunto do processo iniciado em ∞ mas transladado.

Definição 4.2. *Vamos denotar por $\mathcal{R}$ a imagem de Γ^{∞}. Isso é:*

$$\mathcal{R} := \{t \geqslant 0 : \exists s \geqslant 0 \text{ tal que } \Gamma^{\infty}(s) = t\}.$$

Proposição 4.20. *Para quase toda realização do processo, vale que:*

$$\mathcal{R} = \{t \geqslant 0 : X(t) = \infty\}$$

Demonstração. Vamos fixar uma realização do nosso processo onde Γ é estritamente crescente, càdlàg, limitada em compactos e $\lim_{t\to\infty} \Gamma(t) = \infty$.

Nessas realizações, tome um $t \in \mathcal{R}$. Assim existe um (único por Γ ser crescente) $s \geqslant 0$ tal que $\Gamma(s) = t$. Por absurdo, vamos supor que $X(t) = x < \infty$. Assim existe um $i \geqslant 1$ tal que $\Gamma(\sigma_i^x-) \leqslant t < \Gamma(\sigma_i^x)$. Portanto $\Gamma(s) < \Gamma(\sigma_i^x)$. Como Γ é crescente, concluímos que $s < \sigma_i^x$, de onde concluímos que $\Gamma(\sigma_i^x-) > \Gamma(s) = t$, o que contraria a hipótese.

Agora tomemos um $t \geqslant 0$ tal que $X(t) = \infty$. Definamos $s = \inf\{r \geqslant 0 : \Gamma(r) > t\}$. Usando a definição do ínfimo e o fato de Γ ser crescente e càdlàg, concluímos que $\Gamma(s-) \leqslant t$ e $\Gamma(s) \geqslant t$. Agora, por absurdo, suponhamos que $\Gamma(s) > t$. Assim teremos que $\Gamma(s-) \leqslant t < \Gamma(s)$. Como os pontos de descontinuidade de Γ correspondem às marcas dos processos de Poisson, teremos que existe um $\sigma_i^x = s$, de onde concluímos a contradição de que $X(t) = x \neq \infty$. Portanto, como não pode acontecer que $\Gamma(s) > t$, teremos que $\Gamma(s) = t$ e assim $t \in \mathcal{R}$. □

Proposição 4.21. *Se denotarmos por $\bar{\mathcal{R}}$ o fecho de $\mathcal{R}$, Teremos que:*

$$\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{\Gamma(s-) : s > 0\}.$$

Demonstração. Novamente consideremos as realizações onde Γ é càdlàg, crescente e limitada em compactos.

Fixado um $s > 0$ vamos mostrar que $\Gamma(s-) \in \bar{\mathcal{R}}$. Para isso tomemos uma sequência $(s_n)_{n\geqslant 1}$ tal que $s_n \nearrow s$. Por definição, temos que $\Gamma(s_n) \in \mathcal{R}$ para todo n e $\Gamma(s_n) \to \Gamma(s-)$. De onde concluímos que $\Gamma(s-) \in \bar{\mathcal{R}}$.

Agora tomemos um $t \in \bar{\mathcal{R}} \backslash \mathcal{R}$. Por definição existe uma sequência $(t_n)_n \in \mathcal{R}$ tal que $t_n \to t$. Como $t_n \in \mathcal{R}$, existe s_n tal que $\Gamma(s_n) = t_n$.

Notemos que (s_n) é limitada, assim existe uma subsequência de (s_n) que seja convergente. Assim, sem perda de generalidade, vamos supor que (s_n) seja convergente e denotar seu limite por s.

Como $s_n \to s$, $\Gamma(s_n) \to t$ e Γ é càdlàg, então temos que $t \in \{\Gamma(s), \Gamma(s-)\}$. Já que estamos supondo que $t \notin \mathcal{R}$, seque que $t = \Gamma(s-)$. □

Proposição 4.22. *$\bar{\mathcal{R}} \backslash \mathcal{R}$ é quase certamente enumerável.*

Demonstração. O conjunto dos pontos onde Γ não é contínua é $\{\sigma_i^x : x \in \mathbb{N}^*,\ i \geqslant 1\}$. Assim temos que $\bar{\mathcal{R}} \backslash \mathcal{R} \subseteq \{\Gamma(\sigma_i^x -) : x \in \mathbb{N}^*,\ i \geqslant 1\}$, que é um conjunto enumerável. □

Proposição 4.23. *Γ^∞ é um subordinador, isso é, um processo que toma valores em $[0, \infty)$, iniciado em zero, crescente, contínuo à direita, que tem incrementos estacionários e independentes.*

Demonstração. Já mostramos que Γ é crescente e contínua à direita, e basta olhar para a definição para ver que $\Gamma^\infty(0) = 0$.

Tomemos $\mathcal{F}_t$ a σ-álgebra gerada por $\{\Gamma(s) : s \in [0, t]\}$ e repare que para $t, s > 0$:

$$\Gamma(t+s) - \Gamma(t) = \sum_{x \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=N(t)+1}^{N(t+s)} \gamma_x T_i^x.$$

Agora usando o fato das $\{T_i^x : x \in \bar{\mathbb{N}}^*,\ i \geqslant 1\}$ serem independentes e identicamente distribuídas e os processos de Poisson terem incrementos estacionários e independentes, teremos que essa quantidade é independente de $\mathcal{F}_t$ e tem a mesma distribuição que $\Gamma(s) - \Gamma(0)$. □

Proposição 4.24. *O expoente de Laplace de Γ_0^∞ é dado por:*

$$\Phi(u) = u \sum_{x \in \mathbb{N}^*} \frac{\lambda_x \gamma_x}{1 + u\gamma_x}.$$

Isso é, para $u \geqslant 0$, teremos que:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-u\Gamma_0^\infty(t)\right\}\right] = \exp\left\{-t\Phi(u)\right\}.$$

Agora temos ferramentas para calcular a dimensão de Hausdorff de $\mathcal{R}$. Mas antes vamos introduzir brevemente o que é a dimensão de Hausdorff de um conjunto.

Para um $\epsilon > 0$ e um boreliano A vamos denotar por $\mathcal{I}_\epsilon(A)$ a família de todas as coberturas de A por um número enumerável de intervalos de comprimento menor que ϵ.

Para um $\rho > 0$, $\epsilon > 0$ e um boreliano A, definimos:

$$m_\epsilon^\rho(A) := \inf_{\mathcal{I} \in \mathcal{I}_\epsilon(A)} \sum_{I \in \mathcal{I}} (\mathrm{l}(I))^\rho, \tag{4.23}$$

onde $\mathrm{l}(I)$ é o comprimento do intervalo I.

Quando diminuímos ϵ, diminuímos o número de coberturas possíveis, assim o ínfimo aumenta. Portanto o limite de (4.23) quando $\epsilon \searrow 0$ existe e assim faz sentido definir:

$$m^\rho(A) := \lim_{\epsilon \searrow 0} m_\epsilon^\rho(A).$$

É possível mostrar que $m^\rho(\bullet)$ é uma medida sobre os borelianos de $\mathbb{R}$, medida essa que chamados de medida de Hausdorff de dimensão ρ. A medida de Hausdorff de dimensão 1 é a medida de Lebesgue.

Também vale que se $m^\rho(A) = 0$, então $m^{\rho'}(A) = 0$ para todo $\rho' > \rho$ e, se $m^\rho(A) > 0$, então $m^{\rho'}(A) = \infty$ para todo $\rho' < \rho$.

Definição 4.3. *Definimos a dimensão de Hausdorff de um boreliano A como:*

$$\dim_H(A) = \sup\{\rho > 0 : m^\rho(A) < \infty\} = \inf\{\rho > 0 : m^\rho(A) = 0\}.$$

Teorema 4.25. *Para todo $t > 0$, vale que quase certamente:*

$$\dim_H(\mathcal{R}^\infty \cap [0,t]) = \dim_H(\bar{\mathcal{R}}^\infty \cap [0,t]) = \liminf_{u\to\infty} \frac{\log \Phi(u)}{\log u}. \tag{4.24}$$

Demonstração. A primeira igualdade vem do fato de um conjunto enumerável não alterar a dimensão de Hausdorff de um conjunto, enquanto que a segunda é o Corolário 5.3 de Bertoin (1999), traduzido para a nossa notação. □

Proposição 4.26. *Supondo que $\sup_{x\in\mathbb{N}^*} \lambda_x < \infty$ e que existam um $\delta > 0$ e um $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\gamma_x \leqslant x^{-(1+\delta)}$ para todo $x > n_0$, vai valer que:*

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\log \Phi(u)}{\log u} \leqslant \frac{1}{1+\delta}. \tag{4.25}$$

Demonstração. Tomemos $H > 0$ tal que $\lambda_x \leqslant H$ para todo $x \in \mathbb{N}^*$. Assim teremos que para alguma constante C:

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \sum_{x\in\mathbb{N}^*} \frac{\lambda_x}{\frac{1}{u\gamma_x} + 1} \\
&\leqslant C + \sum_{x>n_0} \frac{H}{\frac{x^{1+\delta}}{u} + 1} \\
&= u^{\frac{1}{1+\delta}} \left[\frac{C}{u^{\frac{1}{1+\delta}}} + \frac{1}{u^{\frac{1}{1+\delta}}} \sum_{x>n_0} \frac{H}{\left(\frac{x}{u^{\frac{1}{1+\delta}}}\right)^{1+\delta} + 1} \right].
\end{aligned}$$

Agora vamos nos concentrar na quantidade dentro dos colchetes. Para isso vamos fazer a mudança de variáveis $v = u^{\frac{1}{1+\delta}}$. Se tomarmos v inteiro maior que n_0 e agruparmos os termos da série entre múltiplos de v, obteremos:

$$\frac{C}{v} + \frac{1}{v} \sum_{x>n_0} \frac{H}{\left(\frac{x}{v}\right)^{1+\delta} + 1} \leqslant \frac{C}{v} + \sum_{y=1}^{\infty} \frac{H}{y^{1+\delta} + 1} \xrightarrow{v\to\infty} C',$$

onde C' é uma constante positiva.

Como u tender para o infinito é equivalente à v ir para o infinito e como o limite seguindo v inteiro é um limitante superior para $\liminf$, teremos que:

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{\log\Phi(u)}{\log u}\leqslant\frac{1}{1+\delta}+\liminf_{u\to\infty}\frac{\log C'}{\log u}$$
$$=\frac{1}{1+\delta}.\qquad\square$$

Proposição 4.27. *Supondo que* $\inf_{x\in\mathbb{N}^*}\lambda_x>0$ *e que existam um* $\delta>0$ *e um* $n_0\in\mathbb{N}^*$ *tal que* $\gamma_x\geqslant x^{-(1+\delta)}$ *para todo* $x>n_0$*, vai valer que:*

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{\log\Phi(u)}{\log u}\geqslant\frac{1}{1+\delta}. \tag{4.26}$$

Demonstração. Tomemos $H>0$ tal que $\lambda_x\geqslant H$ para todo $x\in\mathbb{N}^*$. Dessa forma:

$$\Phi(u)=\sum_{x\in\mathbb{N}^*}\frac{\lambda_x}{\frac{1}{u\gamma_x}+1}$$
$$\geqslant\sum_{x>n_0}\frac{H}{\left(\frac{x}{u^{\frac{1}{1+\delta}}}\right)^{1+\delta}+1}.$$

Portanto, tomando $u>n_0$, e agrupando a série em somas sobre os inteiros que estão entre os múltiplos de u, teremos que:

$$\Phi(u^{1+\delta})\geqslant\sum_{x>n_0}\frac{H}{\left(\frac{x}{u}\right)^{1+\delta}+1}$$
$$\geqslant\sum_{x\geqslant u}\frac{H}{\left(\frac{x}{u}\right)^{1+\delta}+1}$$
$$\geqslant\lfloor u\rfloor\sum_{y=1}^{\infty}\frac{H}{y^{1+\delta}+1}.$$

Dessa forma:

$$\frac{\log\Phi(u)}{\log u}\geqslant\frac{\log\lfloor u^{\frac{1}{1+\delta}}\rfloor}{\log u}+\frac{1}{\log u}\sum_{y=1}^{\infty}\frac{H}{y^{1+\delta}+1}.$$

Como essa série é convergente, ao fazer $u\to\infty$ o segundo termo desaparecerá, enquanto que o primeiro irá convergir para $\frac{1}{1+\delta}$, de onde concluímos que:

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{\log\Phi(u)}{\log u}\geqslant\frac{1}{1+\delta}.\qquad\square$$

Corolário 4.28. *Supondo que* $\inf_{x\in\mathbb{N}^*}\lambda_x>0$ *e* $\sup_{x\in\mathbb{N}^*}\lambda_x<\infty$ *vale que:*

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{\log\Phi(u)}{\log u}\leqslant-\left(\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x}\right)^{-1} \tag{4.27}$$
$$\liminf_{u\to\infty}\frac{\log\Phi(u)}{\log u}\geqslant-\left(\liminf_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x}\right)^{-1}, \tag{4.28}$$

sob a convenção que $-\frac{1}{-\infty}=0$ *e* $-\frac{1}{0-}=+\infty$.

Demonstração. Como estamos supondo que $\inf_{x\in\mathbb{N}^*}\lambda_x > 0$, então $\lim_{x\to\infty}\gamma_x = 0$ por causa de (2.2). Portanto:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x}\leqslant 0.$$

A parte da esquerda de (4.27) é a dimensão de Hausdorff de um conjunto que tem medida de Lebesgue zero. Assim (4.27) é evidente quando $\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x}\geqslant -1$.

Quando esse lim sup é estritamente menor que -1, podemos tomar $\delta > 0$ tal que:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x}\leqslant -(1+\delta). \tag{4.29}$$

Pela definição do limite superior, para todo $\epsilon > 0$, existe um $n_0\in\mathbb{N}^*$ tal que para todo $x > n_0$:

$$\frac{\log\gamma_x}{\log x}\leqslant -(1+\delta)+\epsilon,$$

o que implica que, $\gamma_x\leqslant x^{-(1+\delta-\epsilon)}$ para $x > n_0$.

Dessa maneira, usando a Proposição 4.26, concluímos que para todo $\epsilon\in(0,\delta)$, vale que:

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{\log\Phi(u)}{\log u}\leqslant\frac{1}{1+\delta-\epsilon},$$

Como $\epsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, concluímos que:

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{\log\Phi(u)}{\log u}\leqslant\frac{1}{1+\delta}$$

Quando $\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x} > -\infty$, então podemos tomar δ de forma que (4.29) valha com igualdade, de onde concluiremos (4.27).

Por fim, caso $\limsup_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x} = -\infty$, então podemos tomar δ arbitrariamente grande, de onde concluiremos:

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{\log\Phi(u)}{\log u}\leqslant 0.$$

Para mostrar (4.28), notemos que $\inf_{x\in\mathbb{N}^*}\lambda_x > 0$ junto com (2.2) implica que:

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x}\leqslant -1.$$

A partir daqui podemos proceder de maneira análoga, usando a Proposição 4.27, para mostrar (4.28). □

Corolário 4.29. *Supondo que* $\inf_{x\in\mathbb{N}^*}\lambda_x > 0$, $\sup_{x\in\mathbb{N}^*}\lambda_x < \infty$ *e* $\lim_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x}$ *exista, então:*

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{\log\Phi(u)}{\log u} = -\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log\gamma_x}{\log x}\right)^{-1} \tag{4.30}$$

Demonstração. Esse Corolário é uma consequência direta do Corolário 4.28. □

Capítulo 5

Conclusões

Nessa dissertação fizemos um estudo razoavelmente completo sobre os Processos K não homogêneos. Usamos uma abordagem construtiva e buscamos ao máximo manter nossos argumentos em nível elementar, sem abusar de teorias sofisticadas.

Para estudos futuros, podemos sugerir:

- Calcular o gerador no caso não homogêneo. Além das dificuldades óbvias em generalizar nossos argumentos, o fato do processo poder não ser de Feller introduz uma dificuldade adicional de não podermos enxergar o semigrupo de transição como um operador sobre as funções contínuas de $\bar{\mathbb{N}}^*$.

- Encontrar uma fórmula mais específica para a dimensão de Hausdorff do tempo em que o processo passa no infinito. Nós apenas apresentamos cotas para (4.24).

Referências Bibliográficas

Bertoin(1999) Jean Bertoin. Subordinators: examples and applications. Em *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997)*, volume 1717 of *Lecture Notes in Math.*, páginas 1–91. Springer, Berlin. Citado na pág. 45

Billingsley(1999) Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures.* Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edição. ISBN 0-471-19745-9. doi: 10.1002/9780470316962. URL http://dx.doi.org/10.1002/9780470316962. A Wiley-Interscience Publication. Citado na pág. 9, 11

Chung(1967) Kai Lai Chung. *Markov chains with stationary transition probabilities.* Second edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 104. Springer-Verlag New York, Inc., New York. Citado na pág. 24

Ethier e Kurtz(1986) Stewart N. Ethier e Thomas G. Kurtz. *Markov processes.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York. ISBN 0-471-08186-8. doi: 10.1002/9780470316658. URL http://dx.doi.org/10.1002/9780470316658. Characterization and convergence. Citado na pág. 11

Feller(1971) William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York. Citado na pág. 28

Fontes e Mathieu(2008) Luiz Renato G. Fontes e Pierre Mathieu. K-processes, scaling limit and aging for the trap model in the complete graph. *Ann. Probab.*, 36(4):1322–1358. ISSN 0091-1798. doi: 10.1214/07-AOP360. URL http://dx.doi.org/10.1214/07-AOP360. Citado na pág. 1, 3, 11, 25

Fristedt e Gray(1997) Bert Fristedt e Lawrence Gray. *A modern approach to probability theory.* Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA. ISBN 0-8176-3807-5. Citado na pág. 18

Kendall e Reuter(1956) David George Kendall e Gerd Edzard Harry Reuter. Some pathological Markov processes with a denumerable infinity of states and the associated semigroups of operators on l. Em *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III*, páginas 377–415. Erven P. Noordhoff N.V., Groningen. Citado na pág. 1, 34

Kolmogorov(1951) Andrei Nikolaevich Kolmogorov. On the differentiability of the transition probabilities in stationary Markov processes with a denumberable number of states. *Moskov. Gos. Univ. Učenye Zapiski Matematika*, 148(4):53–59. Citado na pág. 1

Liggett(1985) Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems*, volume 276 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-96069-4. Citado na pág. 41

Norris(1998) J. R. Norris. *Markov chains*, volume 2 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-48181-3. Reprint of 1997 original. Citado na pág. 14

Reuter(1969) Gerd Edzard Harry Reuter. Remarks on a Markov chain example of Kolmogorov. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 13:315–320. Citado na pág. 1