**ESTIMAÇÃO
E
TESTES DE HIPÓTESES
EM
CALIBRAÇÃO COMPARATIVA**

Paulo Tadeu Meira e Silva de Oliveira

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Estatística**
Orientador: **Prof. Dr. Heleno Bolfarine**

ESTIMAÇÃO EM TESTES DE HIPÓTESES DE CALIBRAÇÃO COMPARATIVA

Este exemplar corresponde
à redação final da
dissertação de mestrado devidamente corrigida
e defendida por
Paulo Tadeu Meira e Silva de Oliveira
e aprovada pela comissão julgadora.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Heleno Bolfarine (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Mônica Carneiro Sandoval - IME - USP
- Prof. Dr. Filidor Ildifonso Vilca-Labra - IMECC - Unicamp

São Paulo, 21 de Dezembro de 2001.

QUANDO FRACASSAMOS?

Fracassamos,
Quando visualizamos a derrota,
antes da batalha.
Quando abandonamos a luta,
com medo da discórdia.

Quando ouvimos o Não,
antes da pergunta.
Quando silenciemos,
com medo da resposta.

Fracassamos,
Quando o dia amanhece,
na hora que deitamos.
Quando o sono vem,
e não nos entregamos.

Quando o medo de sonhar,
se transforma em pesadelo.
Quando a vida se dilui,
na busca que fazemos.

Fracassamos,
Quando a chave da verdade,
abre as portas da mentira.
Quando lamentamos na chegada,
a hora da partida.

Quando o Amor vai a leilão,
no martelo da cobiça.
Fracassamos,
quando choramos a morte
diante da vida.

Maria Teresa Debatim
Do livro: As muitas faces de um sujeito.

O que para muitos era impossível,
mostrei ser possível.
Por mais difícil que seja a batalha,
Por mais difícil que seja a luta,
Não devemos desanimar,
Não devemos nos dispersar,
Devemos sempre lutar e sonhar...

Dedico esse trabalho aos meus pais,
Francisco e Geralda,
que me acompanhou sempre
nos bons e maus momentos,
na alegria e na tristeza,
na concórdia e na discórdia.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, o mais sincero e profundo agradecimento ao Professor Heleno Bolfarine por ter acreditado em mim, pela sugestão do tema, pelos conselhos e pela paciência *ad infinitum* durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimento especial para a professora Lisbeth K. Cordani pela ajuda que prestou a mim em um dado momento no final da graduação e a professora Mônica Carneiro Sandoval pela colaboração na revisão da versão final da tese.

Outro agradecimento especial para os colegas Mário Castro, Kátia H. G. Alfaro e Daisy Gomes Tutu pela disposição, auxílio e ensino da utilização do programa Ox.

Agradeço também ao Centro Acadêmico do Instituto de Matemática e Estatística, pela permissão de utilizar o mural para a colocação de anúncio divulgando o meu trabalho e a Gorethe pela indicação de pesquisadores para que eu pudesse fazer serviço de assessoria estatística, que possibilitou o meu sustento durante o mestrado.

Agradeço também o incentivo dos demais professores e colegas do departamento de estatística e sobretudo a minha família pelo apoio durante a realização desse trabalho.

Por fim, agradeço à Universidade de São Paulo pela oportunidade de poder melhorar a minha formação acadêmica e pelas facilidades dispensadas.

Resumo

Sabemos da literatura que Calibração Comparativa está ligada à comparação de eficiência de instrumentos de medição.

Neste trabalho discutimos estimação e testes de hipóteses em modelos de calibração comparativa. Para a estimação dos parâmetros do modelo, consideramos os algoritmos *EM* e o algoritmo BFGS do programa Ox.

Testes para algumas hipóteses de interesse são implementados usando as estatísticas da razão de verossimilhanças e de Wald.

Estudos de simulação são utilizados na comparação dos procedimentos. Uma aplicação é apresentada a um conjunto de dados constituído de medições de alturas de árvores com três, quatro e cinco hipsômetros.

Abstract

We know about the literature that Comparative Calibration it is linked the efficiency comparison of measurement instruments.

In this work we discuss estimates and tests of hypotheses in comparative calibration models. For the estimate of the parameters of the model, we consider the EM algorithm and the algorithm BFGS in the program Ox.

Testings for some hypotheses of interest are implemented using the likelihood ratio and Wald statistics.

Simulation studies are used in the comparison of the procedures. An application is presented to a data set, constituted of measurements of heights of trees with three, four and five hipsometers.

1 de março de 2002

Sumário

1	Introdução	2
1.1	O Modelo de calibração comparativa	2
1.1.1	Modelo de calibração comparativa estrutural	4
1.2	O problema das alturas das árvores	6
1.3	Objetivos	8
2	Estimação e testes de hipóteses no modelo de calibração comparativa	10
2.1	Introdução	10
2.2	A função de verossimilhança observada	10
2.3	Função de verossimilhança para os dados completos	11
2.4	Método dos momentos	11
2.5	Maximização pelo pacote Ox	13
2.6	O algoritmo EM	14
2.6.1	O Passo E	14
2.6.2	O passo M	15
2.7	Estimador da precisão	16
2.8	Testes de hipóteses de interesse	17
2.8.1	Hipóteses de interesse	17
2.8.2	Teste da razão de verossimilhanças	17
2.8.3	Teste de Wald	18
2.9	Estudos de Simulação	18
2.9.1	Algoritmo EM versus BFGS	21
3	Aplicações	27
3.1	Introdução	27
3.2	Hipóteses de Interesse	27
3.3	Análise de Variância	27
3.4	Estimadores de máxima verossimilhança	28
3.5	Eficiência dos instrumentos	29
3.6	Teste de Wald	31
3.6.1	Hipóteses de interesse	56
3.6.2	Estimadores de máxima verossimilhança	57
3.7	Teste da razão de verossimilhanças	62

3.8	Resultados	62
4	Conclusões	63
4.1	Dados reais	63
4.2	Dados simulados	63
4.3	De forma geral	64
A	Resultados importantes	65
B	Função de verossimilhança para os dados observados	71
C	Teste da razão de verossimilhanças	76
C.1	Função de verossimilhança para os dados observados.	76
C.1.1	Modelo sem restrição	76
C.1.2	Função de verossimilhança para a primeira hipótese de interesse . .	77
C.1.3	Razão de verossimilhanças para a primeira hipótese de interesse . .	78
C.1.4	Função de verossimilhança para a segunda hipótese de interesse . .	78
C.1.5	Razão de verossimilhanças para a segunda hipótese de interesse . .	79
D	Função de verossimilhança completa	80
E	Cálculos dos valores para esperança e variância para o Modelo Completo	97
F	Matriz de informação esperada.	101
G	Programas utilizados.	104

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho discutimos a eficiência de algoritmos de estimação dos parâmetros do modelo e testes para quantidades como vieses dos instrumentos de medição.

1.1 O Modelo de calibração comparativa

Muitas medidas podem ser feitas em processos ou indivíduos, sendo que o verdadeiro valor medido é desconhecido. O problema de comparar medições quando os dados resultam de dois ou mais métodos de medição se chama *calibração comparativa*, isto é, calibração comparativa é a comparação de instrumentos de medição quando cada um deles é usado para medir uma característica de um grupo de unidades experimentais (Fuller, 1987). Essas unidades podem ser originárias de uma população homogênea ou de uma população dividida em estratos ou subgrupos. As comparações requeridas podem ser de dois tipos: uma relativa à calibração dos instrumentos e outra sobre a consistência ou exatidão relacionada aos instrumentos.

Neste trabalho consideramos o problema de calibração, onde p instrumentos de medição são utilizados para medir a mesma quantidade desconhecida x , que é comum para um conjunto de n indivíduos. A principal suposição é a de que existe um instrumento padrão que mede a quantidade desconhecida (não observada), sem vício, que é a medida correta e que todos os métodos de medição para os p instrumentos possuem erros independentes e normalmente distribuídos.

Um modelo relacionando a quantidade desconhecida x aos valores observados obtidos com os vários instrumentos foi inicialmente proposto por Barnett (1969).

Supondo que temos $p \geq 2$ instrumentos para medir uma característica ou resposta em um grupo de n unidades experimentais, o modelo de calibração comparativa é dado por:

$$Y_{ij} = \alpha_i + \beta_i x_j + \varepsilon_{ij}, \quad (1.1)$$

onde:

- x_j : verdadeiro valor da característica de interesse na unidade j , $j = 1, \dots, n$;
- Y_{ij} : medida fornecida pelo instrumento i , para a característica da unidade j , $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$;
- α_i : vício aditivo do instrumento i ;
- β_i : vício multiplicativo do instrumento i ;
- ε_{ij} : erros de medição não correlacionados com:

$$E(\varepsilon_{ij}) = 0, Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, p ; \quad (1.2)$$

- ε_{ij} e x_j são independentes;
- $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_i^2)$.

A respeito da característica a ser medida no modelo (1.1), este pode ser classificado como:

- *Modelo de calibração comparativa funcional*, quando os x_j são fixos no universo de referência no qual a inferência está baseada.
- *Modelo de calibração comparativa estrutural*, quando os x_j são variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição.

O modelo de calibração comparativa estrutural. apresenta falta de identificabilidade e diferentes soluções são apresentadas para contornar esse problema. Bolfarine e Rojas (1995) discute com detalhes este problema de falta de identificabilidade. Barnett (1969) e Bolfarine e Rojas (1995) sugerem assumir que existe um instrumento de referência que mede x sem qualquer vício. Sem perda de generalidade no modelo (1.1) podemos considerar que o instrumento 1 é o instrumento de referência, isto é, $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 1$.

Neste contexto α_i e β_i caracterizam a relação entre os valores dados pelo instrumento i e os valores dados pelo instrumento de referência, chamado também de *instrumento padrão*, e as variâncias σ_i^2 avaliam a consistência da medida dos diferentes instrumentos.

O modelo de calibração comparativa funcional e estrutural para o caso $p = 2$ se reduz ao caso do modelo de regressão com erros nas variáveis usual.

O modelo de calibração comparativa funcional também apresenta dificuldades como pode ser visto em Bolfarine e Rojas (1995), Cap.5 e Vilca-Labra *et al.* (1998).

No modelo estrutural quando $p = 3$, Barnett (1969) consegue formas explícitas para os estimadores dos parâmetros do modelo com o método dos momentos e estes estimadores são de máxima verossimilhança se todas as estimativas das variâncias são não negativas. Para $p > 3$, não existem formas explícitas para os estimadores de máxima verossimilhança; portanto, Barnett (1969) propõe estimadores pelo método dos momentos considerando conjunto de três instrumentos e depois considera combinações lineares desses estimadores tal que minimizem as variâncias assintóticas. Carter (1981) estudou o modelo proposto por Barnett para $p = 3$ usando estimação de máxima verossimilhança restrita, consegue vários conjuntos de estimativas e as variâncias assintóticas dos estimadores.

1.1.1 Modelo de calibração comparativa estrutural

O modelo de calibração comparativa estrutural é dado pelas expressões (1.1), (1.2) com

$$x_j \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad j = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

Assim, pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} E(Y_{1j}) &= \mu_x, \quad Var(Y_{1j}) = \sigma_x^2 + \sigma_1^2, \\ IE(Y_{ij}) &= \alpha_i + \beta_i \mu_x, \quad Var(Y_{ij}) = \beta_i^2 \sigma_x^2 + \sigma_i^2, \quad i = 2, \dots, p, \\ Cov(Y_{1j}, Y_{ij}) &= \beta_i \sigma_x^2 \quad e \quad Cov(Y_{ij}, Y_{lj}) = \beta_i \beta_l \sigma_x^2, \quad i, l = 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dessa maneira é possível concluir que $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{pj})'$ tem distribuição normal multivariada com vetor de médias μ_y e matriz de covariâncias V_y dados por,

$$\begin{aligned} \mu_y &= \begin{pmatrix} \mu_x \\ \alpha_2 + \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ \alpha_p + \beta_p \mu_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \mu_x, \\ V_Y &= \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_1^2 & \beta_2 \sigma_x^2 & \cdots & \beta_p \sigma_x^2 \\ \beta_2 \sigma_x^2 & \beta_2^2 \sigma_x^2 + \sigma_2^2 & \cdots & \beta_2 \beta_p \sigma_x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_p \sigma_x^2 & \beta_2 \beta_p \sigma_x^2 & \cdots & \beta_p^2 \sigma_x^2 + \sigma_p^2 \end{pmatrix} = \Sigma + \sigma_x^2 \beta \beta', \end{aligned}$$

onde $\beta = (1, \beta_2, \dots, \beta_p)'$ e $\Sigma = \text{Diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$.

O vetor de parâmetros associados ao modelo é, então:

$$\theta' = (\mu_x, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_2, \dots, \beta_p, \sigma_x^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2).$$

O objetivo é fazer inferência acerca dos parâmetros em θ , portanto, a implementação de procedimentos inferenciais para θ depende das estimativas das variâncias dos estimadores. No caso do modelo estrutural, a informação de Fisher é obtida em Bolfarine e Rojas (1995). A inversa dessa matriz é a matriz de covariâncias assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança.

Na comparação dos instrumentos de medição para avaliar a qualidade do instrumento é importante inferir sobre a confiabilidade, a precisão e a eficiência dos instrumentos.

Confiabilidade: A confiabilidade do instrumento i , se define como:

$$\rho_i = \frac{\beta_i^2 \sigma_x^2}{\beta_i^2 \sigma_x^2 + \sigma_i^2}, \quad i = 1, \dots, p \quad (1.5)$$

O coeficiente ρ_i pode ser interpretado como a proporção da variação explicada pelo i -ésimo instrumento de calibração com relação a variação total e toma valores entre zero e um. Dizemos que o instrumento i forneceu medidas aproximadas da característica x quando ρ_i estiver próximo de um e se $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = 1$.

Precisão: Se conhecemos α_i e β_i então as medidas observadas Y_{ij} , $j = 1, \dots, n$ com o instrumento i pode ser calibrado como

$$Y_{ij}^* = \frac{Y_{ij} - \alpha_i}{\beta_i} = x_j + \frac{\varepsilon_{ij}}{\beta_i} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

de modo que estas quantidades são não viesados para x_j . Os erros de medição $(\varepsilon_{ij}/\beta_i)$ têm variância σ_i^2/β_i^2 . Portanto, a precisão do instrumento i é definida como o inverso da variância do erro de medição do instrumento calibrado, é definida por π_i e pode ser escrita como:

$$\pi_i = \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \text{com } \beta_1 = 1. \quad (1.6)$$

É importante salientar que neste trabalho vamos considerar a precisão e a eficiência dos instrumentos.

As variâncias σ_i^2 avaliam a consistência das medidas para os diferentes instrumentos em medidas repetidas de um mesmo indivíduo e foram assumidas como constantes de indivíduo para indivíduo.

Para este trabalho foram considerados a estimação de máxima verossimilhança de parâmetros desconhecidos pelo uso do algoritmo *EM* para o caso $p \geq 3$.

Os dados observados são definidos por $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$ e os dados não observados são definidos por $x = (x_1, \dots, x_n)'$. Conforme veremos mais a frente, essas duas partes colocadas juntas proporcionam uma função de verossimilhança tratável.

1.2 O problema das alturas das árvores

Em Dendometria (Setor da ciência que estuda a altura e o diâmetro das árvores), a medição de altura de árvores pode ser necessária para determinar o volume da madeira de um povoamento florestal ou para acompanhar o desenvolvimento florestal de uma região.

Para esse problema tivemos 10 árvores com diferentes alturas, 5 hipsômetros (instrumentos utilizados para medir a altura das árvores) e 4 observadores, sendo que cada um dos observadores fez 2 medições em cada árvore com cada instrumento e desses dados é importante salientar que:

- Foram utilizados os seguintes instrumentos: Trena (instrumento padrão, uma vez que, todas as medidas obtidas por este instrumento apresentam apenas erro de mensuração e não apresentam vieses); Altímetro de Blume Leiss; Altímetro de Haga; Hipsômetro de Weise e Altímetro de Prancheta.
- Embora as determinações de volumes podem ser feitas de forma independente da altura das árvores, esta é de fundamental importância quando resultados mais rigorosos são requeridos.
- Mesmo trabalhando com hipsômetros mais precisos, Bruce e Schumacher (1950) constataram que erros entre 0,30m e 0,60m não são raros, mesmo sob condições favoráveis. Usando instrumentos de menor precisão esse erro pode chegar a valores entre 0,90m e 1,50m.
- Ao executar um trabalho dessa ordem, mesmo operando cuidadosamente com instrumentos de alta precisão uma pequena inclinação na árvore pode causar erros apreciáveis.
- Conforme já foi dito no primeiro item dessa série, um dos instrumentos, a trena foi considerada como padrão e por esse motivo foi considerada como instrumento de referência, pois apresenta maior precisão nas mensurações, isto se deve ao fato de que a árvore foi cortada antes de ter a sua altura avaliada pela trena.

Apresentamos na próxima tabela os dados considerados em *Simões et al.* (1967). Nesse trabalho foi feito um estudo sobre a eficiência dos instrumentos baseado em análise de variância.

A consideração do modelo (1.1) para comparar a eficiência dos instrumentos de medição utilizados para medir alturas de árvores pode ser mais interessante em vários aspectos. Um deles está relacionado com a possibilidade de estudo de viéses através dos parâmetros α_i e β_i e também através das precisões, conforme definido na seção anterior.

Instrumentos	Tabela 1.1: Medida das alturas das árvores.									
	Observador 1					Observador 2				
	B-L	H	W	Pr	Tr	B-L	H	W	Pr	Tr
1a	22.3	23.4	23.5	22.6	21.4	22.3	23.2	22.0	23.0	21.4
1b	22.5	22.4	23.5	22.4	21.5	23.0	22.8	22.0	22.8	21.5
2a	20.7	21.5	21.0	20.6	19.2	20.6	21.2	20.0	21.2	18.9
2b	21.0	21.3	21.0	20.4	19.2	20.7	20.2	19.0	21.2	18.9
3a	23.6	23.9	23.5	22.8	23.3	23.0	22.5	23.0	25.0	23.2
3b	23.6	24.0	24.0	23.6	23.4	23.0	22.5	23.5	24.2	23.2
4a	21.0	22.2	20.5	20.4	20.3	21.0	20.9	20.5	21.8	20.2
4b	21.0	22.3	21.0	21.6	20.4	20.5	21.0	20.5	21.2	20.3
5a	19.3	21.7	19.5	21.0	19.9	20.5	22.0	21.0	21.4	19.9
5b	18.9	21.1	19.5	21.0	20.0	20.0	22.5	21.5	21.0	20.0
6a	20.0	21.0	19.5	19.4	19.3	20.0	21.0	20.0	20.0	19.2
6b	19.6	21.0	19.5	18.4	19.4	19.6	21.5	19.5	20.0	19.2
7a	16.3	17.0	17.5	17.6	17.5	17.5	18.0	18.0	19.0	17.3
7b	16.8	16.8	17.5	18.0	17.4	17.0	18.0	17.5	18.4	17.4
8a	14.8	15.4	14.5	14.0	14.4	15.0	14.5	15.0	15.0	14.3
8b	14.7	14.3	14.5	14.6	14.5	15.0	15.0	14.5	15.0	14.4
9a	21.2	22.0	20.0	20.2	22.0	19.5	20.0	20.5	21.4	21.9
9b	21.0	22.0	20.0	21.0	22.0	20.0	21.0	20.5	21.6	21.7
10a	14.4	15.0	14.0	14.4	14.7	14.5	15.5	14.0	14.0	14.7
10b	14.2	15.0	14.0	14.0	14.8	14.0	15.0	14.5	14.4	14.6

Instrumentos	Observador 3					Observador 4				
	B-L	H	W	Pr	Tr	B-L	H	W	Pr	Tr
1a	22.5	22.5	23.0	21.1	21.3	21.0	21.7	21.0	21.8	21.2
1b	22.5	22.5	22.5	22.4	21.4	21.5	22.5	21.5	22.0	21.2
2a	21.5	21.0	20.5	19.3	19.2	21.0	21.5	21.5	21.0	18.9
2b	21.0	21.0	20.5	19.4	19.2	21.5	21.7	21.5	21.0	18.9
3a	23.0	23.0	22.5	21.5	23.2	22.0	22.0	22.0	23.0	23.3
3b	23.2	23.0	23.0	22.2	23.2	22.5	22.7	22.2	22.5	23.3
4a	20.5	21.5	19.5	19.4	20.3	21.0	21.5	21.6	20.5	20.3
4b	20.7	22.0	19.5	19.6	20.3	21.5	22.0	21.8	21.0	20.3
5a	21.0	23.0	20.0	20.0	20.0	17.5	20.0	19.5	19.8	19.9
5b	21.0	22.5	21.0	21.0	20.0	18.5	19.5	20.0	19.6	19.9
6a	19.5	20.5	19.5	19.0	19.3	20.5	20.3	19.5	20.2	19.3
6b	19.5	20.2	20.0	19.0	19.3	19.5	21.0	20.0	19.8	19.3
7a	17.0	17.2	17.5	16.2	17.5	17.5	16.6	18.9	18.4	17.4
7b	16.2	17.2	17.0	16.5	17.5	17.0	16.8	17.5	18.5	17.4
8a	14.2	14.7	14.0	14.0	14.4	14.5	15.5	14.5	14.4	14.5
8b	14.5	15.0	14.5	14.2	14.4	14.8	16.0	14.7	14.2	14.5
9a	21.0	22.5	21.5	21.0	21.9	20.5	20.7	21.5	21.0	22.0
9b	20.5	22.2	21.5	20.7	21.9	21.5	21.0	21.0	20.5	22.0
10a	14.0	16.0	14.5	14.0	14.8	14.5	15.5	14.5	15.0	14.4
10b	14.2	16.0	14.0	13.7	14.8	14.0	15.3	15.0	15.2	14.4

1.3 Objetivos

O objetivo principal do trabalho é comparar a eficiência dos instrumentos de medição especificada através de vieses aditivos, multiplicativos e através da variância do modelo.

Para o atendimento desse objetivo, desenvolvemos um programa, utilizando o software Ox, que possibilita a utilização de p instrumentos com n medidas (indivíduo), cada um sendo de mesma característica ou de um mesmo grupo de indivíduos e para isso consideramos o uso do algoritmo *EM* que proporciona uma solução geral para a maximização da verossimilhança dos dados observados, utilizando-se os dados completos de maneira conveniente.

Uma importante característica desse algoritmo é que as estimativas das variâncias dos erros são sempre positivas, podendo ser visto como sendo um tipo de procedimento de maximização restrita.

Em seguida, calculamos a inversa da matriz de informação esperada para o modelo completo (para detalhes, vide apêndice F) do modelo completo para estimar a matriz de covariâncias dos estimadores de máxima verossimilhança, que é válida para amostras grandes.

Para resolver o problema do teste para hipóteses de interesse sobre os parâmetros

do modelo de calibração comparativa, podemos utilizar o teste de Wald.

Um outro teste que pode ser utilizado é o teste da razão da verossimilhanças (TRV). Neste caso são calculados os estimadores de máxima verossimilhança sob o modelo geral e sob a hipótese nula.

Um outro objetivo do trabalho é verificar quais das técnicas mostra uma maior sensibilidade para detectar diferenças entre os vieses dos instrumentos, se o teste de Wald ou da razão de verossimilhanças.

Capítulo 2

Estimação e testes de hipóteses no modelo de calibração comparativa

2.1 Introdução

Neste capítulo derivamos as funções de verossimilhança observada e completa para o modelo de calibração comparativa. Consideramos a obtenção dos estimadores explícitos pelo método dos momentos, a maximização da verossimilhança observada pelo BFGS do Ox, e da verossimilhança completa pelo algoritmo EM. A estimação da eficiência e da precisão bem como testes para determinadas hipóteses de interesse como razão de verossimilhanças e o teste de Wald também são considerados.

2.2 A função de verossimilhança observada

Representamos os dados observados por: $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{pj})$, $j = 1, \dots, n$. O logaritmo da função de verossimilhança para os dados observados é dada por:

$$l(\theta|y_1, \dots, y_n) = \ln(L(\theta)) = -n \ln \left((2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu), \quad (2.1)$$

onde:

$$\mu_y = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \vdots \\ \alpha_p + \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \quad V_y = \sigma_x^2 \beta \beta' + \Sigma,$$

e $\Sigma = \text{Diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$. Para maiores detalhes a respeito da obtenção da verossimilhança acima, vide Apêndice B.

2.3 Função de verossimilhança para os dados completos

A função de verossimilhança completa (não observada) incorpora os dados observados e não observados.

Para os dados observados temos uma distribuição normal multivariada com vetor de médias e matriz de covariâncias, com elementos dados por: $E[Y_{ij}] = \alpha_i + \beta_i \mu_x$, $Var[Y_{ij}] = \beta_i^2 \sigma_x^2 + \sigma_i^2$, e $Cov[Y_{ij}, Y_{kj}] = \sigma_x^2 \beta_i \beta_k, i \neq k = 1, \dots, n$.

Conforme já foi visto anteriormente, se $\mathbf{Z}_j = (\mathbf{x}_j, \mathbf{Y}_j)$ então, $E[\mathbf{Z}_j] = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix} = \mu_z$ e $Var[\mathbf{Z}_j] = \Sigma_z = \sigma_x^2 W, j=1, \dots, n$,

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ \beta & \beta\beta' + A \end{pmatrix} \text{ e } A = diag(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_x^2}, \dots, \frac{\sigma_p^2}{\sigma_x^2})$$

Assim, o logaritmo da função de verossimilhança completa para o vetor de parâmetros: $\theta' = (\mu, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_2, \dots, \beta_p, \sigma_x^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$ é dado por:

$$l(\theta|z_1, \dots, z_n) = -n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln |\Sigma_z| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{z}_j - \mu_z)' \Sigma_z^{-1} (\mathbf{z}_j - \mu_z), \quad (2.2)$$

onde $|\Sigma_z| = |\sigma_x^2 \mathbf{W}|$.

Para mais detalhes a respeito da função de verossimilhança para dados completos vide o Apêndice D.

2.4 Método dos momentos

Nesta seção, propomos estimar os parâmetros do modelo (1.3), com $p > 3$, pelo método dos momentos, de modo que precisamos obter os momentos populacionais e amostrais do vetor aleatório $\mathbf{Y}_j$.

Os momentos populacionais são dados em (1.4) e os momentos amostrais são dados a seguir.

Momentos amostrais

- Médias amostrais por instrumento.

$$\bar{Y}_i = \frac{\sum_{j=1}^n Y_{ij}}{n}.$$

- Variâncias e covariâncias amostrais.

$$S_{Y_i Y_i} = \frac{\sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{n},$$

e

$$S_{Y_{ij} Y_{i'j}} = \frac{\sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i) (Y_{i'j} - \bar{Y}_{i'})}{n}, i, i' = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n.$$

Igualando-se as médias, variâncias e covariâncias amostrais com as respectivas esperanças, variâncias e covariâncias populacionais, obtemos as seguintes equações de estimação:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_x &= \bar{Y}_1; & \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_1^2 &= S_{y_1 y_1}; & \hat{\beta}_2 \hat{\sigma}_x^2 &= S_{y_1 y_2}; \\ \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \hat{\mu}_x &= \bar{Y}_2; & \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_2^2 &= S_{y_2 y_2}; & \hat{\beta}_3 \hat{\sigma}_x^2 &= S_{y_1 y_3}; \\ \hat{\alpha}_3 + \hat{\beta}_3 \hat{\mu}_x &= \bar{Y}_3; & \hat{\beta}_3^2 \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_3^2 &= S_{y_3 y_3}; & & \vdots \\ & \vdots & \vdots & & \hat{\beta}_p \hat{\sigma}_x^2 &= S_{y_1 y_p}; \\ \hat{\alpha}_p + \hat{\beta}_p \hat{\mu}_x &= \bar{Y}_p; & \hat{\beta}_p^2 \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_p^2 &= S_{y_p y_p}; & \hat{\beta}_i \hat{\beta}_j \hat{\sigma}_x^2 &= S_{y_i y_j}; \end{aligned}$$

$$i, j = 2, \dots, p; i \neq j$$

Para $p = 3$ obtemos os seguintes estimadores:

$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{Y}_1, & \hat{\alpha}_2 &= \bar{Y}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{Y}_1, & \hat{\alpha}_3 &= \bar{Y}_3 - \hat{\beta}_3 \bar{Y}_1, \\ \hat{\sigma}_1^2 &= S_{Y_1 Y_1} - \hat{\sigma}_x^2, & \hat{\sigma}_2^2 &= S_{Y_2 Y_2} - \hat{\beta}_2^2 \hat{\sigma}_x^2, & \hat{\sigma}_3^2 &= S_{Y_3 Y_3} - \hat{\beta}_3^2 \hat{\sigma}_x^2, \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{S_{Y_2 Y_3}}{S_{Y_1 Y_3}}, & \hat{\beta}_3 &= \frac{S_{Y_2 Y_3}}{S_{Y_1 Y_2}}, & \hat{\sigma}_x^2 &= \frac{S_{Y_1 Y_2} S_{Y_1 Y_3}}{S_{Y_2 Y_3}}. \end{aligned}$
--

É importante salientar que para $p > 3$ os estimadores obtidos através método de momentos não são únicos, ou seja, resolvendo-se as equações acima, poderemos obter vários estimadores para um mesmo parâmetro. Mas, esses estimadores podem ser utilizados como valores iniciais para estimar os parâmetros usando o método de máxima verossimilhança, via algoritmo EM (Dempster et al, 1977).

2.5 Maximização pelo pacote Ox

A rotina *MaxBFGS* do pacote *Ox* maximiza uma função usando o método *quase-Newton* desenvolvido por Broyden, Fletcher, Shanno (BFGS) (ver Dornik, J.A., 1996).

Este método pode usar primeiras derivadas analíticas ou as primeiras derivadas numéricas e o processo de iteração não é influenciado pela escolha destas derivadas.

Nesta subrotina, o método *quase Newton* é usado(ver Gill et al., 1981) para maximizar a função $f(\theta)$, ou seja:

$$\theta(k+1) = \theta(k) + s(k)Q(k)^{-1}q(k), \quad (2.3)$$

onde:

- $\theta(k)$: valores das estimativas do parâmetro na iteração k ,
- $s(k)$: tamanho do passo, que normalmente é 1,
- $Q(k)$: matriz simétrica positiva definida,
- $q(k)$: primeira derivada da função (vetor escore),

O método BFGS avalia e atualiza diretamente $H = Q^{-1}$. Esse método é parecido com o método de Newton exceto que a inversa da matriz hessiana $(G(k))^{-1}$ é aproximada por uma matriz simétrica positiva definida $H(k)$ que é corrigida e atualizada para cada iteração.

Dois critérios de convergência são possíveis. Um deles baseado no vetor escore $q(k)$ (nulo quando avaliado no máximo) e o outro no vetor $\delta(k)$, que deve ser pequeno quando próximo do máximo.

- $\gamma(k) = q(k) - q(k-1)$: mudança no escore,

- $\delta(k) = \theta(k) - (k - 1)$: mudança no parâmetro,

É importante salientar que a matriz *quase hessiana* não pode ser usada para determinar os desvios padrões. Portanto, para obter a matriz de informação observada usamos outra sub-rotina do programa *Ox* chamada *Num2Derivative*, que fornece os valores da segunda derivada em relação às estimativas dos parâmetros.

No nosso caso, utilizamos esse método para calcular os valores para o vetor de parâmetros para a função observada.

2.6 O algoritmo EM

O algoritmo *EM* é utilizado para resolver um problema de estimação que é difícil de ser implementado, ou seja, a função de verossimilhança observada é difícil de ser maximizada, mas os dados observados (Y_j) podem ser vistos como uma função de alguma variável não observada (x_j) sob a qual a avaliação dos estimadores de máximo verossimilhança teria sido direta. A função de verossimilhança completa dos dados em (2.1) é uma família exponencial regular, o que simplifica a implementação do algoritmo *EM*.

Para ser possível a implementação do algoritmo *EM*, foi feita a derivação da função de verossimilhança completa (não observada, vide Apêndice D). Esta derivada incorpora os dados observados e os dados não observados, que são denotados por: $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{pj})'$ e $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)'$, respectivamente. Essas duas partes juntas proporcionam uma função de verossimilhança tratável.

Temos que a função de verossimilhança completa (distribuição normal multivariada) é da família exponencial usual. Portanto, na etapa E basta calcular a esperança das estatísticas suficientes com relação a variável não observada obtidas da função de verossimilhança.

A etapa M é implementada maximizando-se o logaritmo da função de verossimilhança completa definida anteriormente.

2.6.1 O Passo E

O passo E do algoritmo determina a esperança da função de verossimilhança dos dados não observados dado os dados observados. Mas desde que estamos lidando com famílias exponenciais regulares basta calcular os valores esperados das estatísticas suficientes que seguem da função de verossimilhança observada. Consequentemente, desde que as estatísticas suficientes só dependem de $x = (x_1, \dots, x_n)'$ através de x_j e x_j^2 o passo E é implementado calculando-se:

$$\hat{x}_j = \mathbb{E}[x_j | Y_j, \theta] = \mu_x + \frac{1}{c} \left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} Y_{1j} - \mu_x(c - 1) + \beta'_* A_1^{-1} (Y_{1j} - \alpha) \right] \quad (2.4)$$

e

$$Var[x_j|Y, \theta] = \frac{\sigma_x^2}{c}, \quad (2.5)$$

que leva a

$$\hat{x}_j^2 = \mathbb{E}[x_j^2|Y_j, \theta] = \hat{x}_j^2 + \frac{\sigma_x^2}{c}, \quad (2.6)$$

onde:

$$c = 1 + \sigma_x^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \text{ e } A_2 = \text{diag} \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_x^2}, \dots, \frac{\sigma_p^2}{\sigma_x^2} \right).$$

2.6.2 O passo M

O passo M do algoritmo é aquele que obtém o próximo valor dos parâmetros desconhecidos maximizando a verossimilhança dos dados com as estatísticas suficientes substituídas pelos valores esperados obtidos no passo E. Como mostrado em Dempster et al, (1977), cada passo do algoritmo incrementa a verossimilhança observada. Diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança observada chegamos nas seguintes equações:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \bar{x}, \quad (2.7)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \bar{x} \hat{\beta}_i, \quad (2.8)$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)(x_j - \bar{x})}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}, \quad (2.9)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2, \quad (2.10)$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - Y_{1j})^2, \quad (2.11)$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 - \frac{1}{n} \hat{\beta}_i^2 \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i - \hat{\beta}_i(x_j - \bar{x}))^2, \quad (2.12)$$

com $i=1, \dots, p$.

Assim, os ciclos do algoritmo EM entre (2.5) – (2.6) e (2.9) – (2.14) seguem até a convergência quando ocorre. Conforme provado em Dempster et al. (1977) cada iteração do algoritmo aumenta a verossimilhança observada. Note que os estimadores para α_i e β_i são estimadores de mínimos quadrados que dependem de x_j , que não é observado, $j = 1, \dots, n$.

2.7 Estimador da precisão

Um índice muito usado para avaliar a qualidade de um instrumento é a sua precisão (Alfaro, 2000) definida na seção 1.1.1.

Se $\pi_i = \pi_1$, $i \neq l$; $i, l = 1, \dots, p$, então, dizemos que os instrumentos i e l medem a quantidade de interesse com a mesma precisão. Contudo os parâmetros são desconhecidos e devem ser substituídos por estimativas consistentes.

Usando a propriedade da invariância dos estimadores de máxima verossimilhança podemos obter o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de π_i , isto é,

$$\hat{\pi}_i = \frac{\hat{\beta}_i^2}{\hat{\sigma}_i^2}, i = 1, \dots, p. \quad (2.13)$$

2.8 Testes de hipóteses de interesse

2.8.1 Hipóteses de interesse

Comparar instrumentos de medição significa na realidade fazer inferência sobre os parâmetros que medem os vícios aditivos e multiplicativos conjuntamente ou separadamente, dependendo do interesse. Assim, podemos considerar testes para hipóteses como:

- caso 1 - $H_0 : \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ e $\beta_2 = \dots = \beta_p = 1$, versus H_a : existe pelo menos uma diferença.
- caso 2 - $H_0 : \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \alpha$ e $\beta_2 = \dots = \beta_p = \beta$, versus H_a : existe pelo menos uma diferença.

Note que estas hipóteses podem ser escritas como: $H_0 : A\theta = \mathbf{b}$, para algum vetor $\mathbf{b}$, ou seja, tem uma representação na forma linear.

No teste de hipótese para o caso 1 o objetivo é verificar se os p instrumentos medem a característica sem vício, enquanto que no caso 2, o objetivo é verificar se os viéses são iguais para todos os instrumentos.

2.8.2 Teste da razão de verossimilhanças

Um teste que pode ser utilizado neste problema é o teste de razão de verossimilhança que é largamente aplicável como a estimação de máxima verossimilhança.

A desvantagem do teste da razão de verossimilhanças é que requer estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros sob o modelo geral e sob a hipótese nula, para o qual precisamos de um processo iterativo, uma vez que, em geral, não é possível obter expressões explícitas para estas estimativas sob a hipótese nula.

A função de verossimilhança observada está apresentada no Apêndice B. Para testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_a : \theta \in \Theta_0^c$ calculamos a estatística (Casella e Berger, 1990):

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta/x)}{\sup_{\Theta} L(\theta/x)}.$$

Os testes de razão de verossimilhanças são úteis também em situações onde existem complicações paramétricas, isto é, parâmetros que estão presentes no modelo, mas não são de interesse direto em termos inferenciais.

Para $n \rightarrow \infty$, $-2 \ln \lambda(x) \rightarrow \chi_s^2$,

Onde s é obtido através da diferença entre a quantidade de parâmetros existente no modelo geral e a quantidade de parâmetros existente no modelo restrito.

2.8.3 Teste de Wald

Como, para n grande, $\hat{\theta} \sim N(\theta, I_F^{-1}(\theta))$, podemos utilizar a estatística de Wald que é dada por:

$$W = (A\hat{\theta} - \mathbf{b})' [A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta})A']^{-1} (A\hat{\theta} - \mathbf{b}).$$

Para n grande $W \sim \chi_g^2$, onde g é o número de graus de liberdade é equivalente a quantidade de linhas da matriz A . Então H_0 será rejeitada se $W \geq \chi_{g(\alpha)}^2$ é obtido na Tabela de distribuição qui-quadrado com g graus de liberdade que deixa, $\alpha \cdot 100\%$ de área a sua direita.

A vantagem do teste de Wald em relação ao teste da razão de verossimilhanças é a seguinte:

- mais simples do ponto de vista computacional, pois utiliza apenas os estimadores dos parâmetros sob o modelo geral.

2.9 Estudos de Simulação

Nesta seção apresentamos um estudo de simulação utilizando o software OX para $p = 3$ instrumentos com a quantidade de observações em cada instrumento variando de $n = 10$ a $n = 50$ e a quantidade de simulações variando entre 100 a 5000 em cada uma dessas situações descritas acima, temos o modelo de calibração comparativa descrito no capítulo 1 com $x_j \sim N(50, 100)$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e $\varepsilon_3 \sim N(0, 25)$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ e $j = 1, \dots, n$.

As amostras foram geradas da seguinte maneira:

- Inicialmente foram geradas 100 amostras dos erros ε_{ij} com as distribuições acima e a seguir foram geradas x_{ij} e y_{ij} usando os valores de $\alpha_i, \beta_i, \mu_x, \sigma_x^2$ e $\sigma_i^2, i = 1, 2, 3$ considerados acima;
- Todo esse processo foi repetido para tamanhos de amostras $n = 20, 30, 40$ e 50 e quantidades de simulações iguais a 500, 1000, 2000, 3000, 4000 e 5000.
- objetivos da simulação: Teste de hipóteses

As hipóteses de interesse que foram consideradas são:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1.$$

e

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta.$$

Para cada simulação foram calculadas a estatística de Wald e da razão de verossimilhanças.

Teste de Wald

Para cada simulação foram obtidos:

- O vetor $\hat{\theta}' = (\hat{\mu}_x, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2)$,
- A matriz de informação de Fisher que foi obtida de acordo com as fórmulas mencionadas no Apêndice F.
- Em seguida foi calculada a inversa dessa matriz, que é uma matriz de covariâncias a ser usada na estatística de Wald.

Note que $H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1$, pode ser escrita na forma $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$; com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que $A\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)'$.

Para H_{01} , o número de graus de liberdade é 4.

Para verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles, a hipótese de interesse é dada por: $H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta$; onde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ com } A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3 \\ \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3 \end{pmatrix}.$$

O valor observado da estatística com o valor crítico obtido a partir da distribuição qui-quadrado com 4 graus de liberdade e nível de significância de 5%, para H_{01} .

Para H_{02} , o número de graus de liberdade é 2.

- determinar o número de vezes em que um determinado instrumento é mais eficiente que os demais.
- determinar o número de vezes em que um determinado instrumento é mais preciso que os demais.

A Tabela 2.1 apresenta a porcentagem de vezes em que um determinado instrumento foi mais eficiente em relação a certo número de simulações e tamanho de amostra.

Tabela 2.1 - Quantidade de simulações em que um determinado instrumento foi mais eficiente entre os três instrumentos(%).

quantidade de simulações	n = 10			n = 20			n = 30			n = 40			n = 50		
	instrumentos			instrumentos			instrumentos			instrumentos			instrumentos		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
100	35	34	31	36	26	38	30	38	32	40	28	32	32	40	28
500	32.6	34.8	32.6	31.6	32.2	36.2	32.6	35.4	32	32.2	35.2	32.6	31.8	37	31.2
1000	35.9	31.7	32.4	34.4	33.6	32	32.3	35.7	32	32.9	35.3	31.8	33.3	34.5	32.2
2000	36.1	31.5	32.5	34.1	33.4	32.8	32	34.4	33.7	34	34.2	31.9	33.8	34.1	32.1
3000	35.3	31.8	32.9	33.7	33.4	33	32.4	34.4	33.3	34	33.7	32.3	33.5	33.4	33.1
4000	34.5	32.9	32.6	33	33.7	33.4	32.3	34.1	33.6	34.3	33.2	32.5	33.2	33.5	33.4
5000	34.4	32.8	32.8	32.8	33.6	33.6	32	34.1	33.9	33.8	33.2	33	33.4	33.5	33.1

A Tabela 2.2 apresenta as mesmas quantidades para o caso da precisão.

Observando as tabelas de eficiência e de precisão foi possível observar que, quanto maior a quantidade de observações, as proporções tendem ao equilíbrio, isto é, a porcentagem de vezes em que um determinado instrumento é mais eficiente e mais preciso que os demais, tende a se igualar aos demais.

Tabela 2.2 - Quantidade de simulações em que um determinado instrumento foi mais preciso entre os três instrumentos(%).

quantidade de simulações	n = 10			n = 20			n = 30			n = 40			n = 50		
	instrumentos			instrumentos			instrumentos			instrumentos			instrumentos		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
100	25	42	33	36	23	41	29	35	36	36	34	30	29	44	27
500	29	38.8	32.2	30.6	32	37.4	31.4	34	34.6	31.4	34.8	33.8	29.6	38.2	32.2
1000	31.2	34.1	34.7	32.4	33.9	33.7	31.6	33.9	34.5	31.6	35.3	33.1	31.7	35.2	33.1
2000	32	33.7	34.4	33.1	33.8	33.1	32.8	33.3	34	32.8	34.7	32.6	33.6	33.7	32.8
3000	31.1	34.2	34.7	32.5	33.3	34.2	32.9	34.1	32.9	33.2	34.2	32.6	33.2	33.3	33.5
4000	30.2	35.1	34.7	32.2	33.6	34.3	32.7	33.9	33.4	32.9	34	33.1	33	33.5	33.5
5000	30.1	34.6	35.2	32	34	34	32.2	33.7	34.1	32.7	34.1	33.2	32.8	33.7	33.8

Foram calculadas as estimativas dos parâmetros para todos os tamanhos de amostra e quantidades de simulações que foram consideradas para os testes de Wald e da razão da verossimilhanças para as hipóteses de interesse para a equação (2.15), cujos resultados vem na Tabela 2.4.

Considerando a tabela 2.4, foi possível verificar que, quanto maior a quantidade de simulações e quanto maior o tamanho da amostra, mais os valores das estimativas dos parâmetros se aproximam dos valores teóricos e mais esses mesmos valores se ajustam a uma distribuição normal.

Nota-se na Tabela 2.3, que para cada tamanho de amostra (linha) e para cada quantidade de simulações (colunas) foram calculados as seguintes quantidades:

- “miss”: quantidade de simulações em que foi notada a presença de “missings” provenientes de problemas decorrentes com a inversão da matriz de informação. Este problema ocorre com maior frequência para tamanhos pequenos de amostra.

- *neg*: quantidade de simulações em que foi notada a presença de valores negativos na estatística do teste de Wald devido ao fato da inversa matriz de informação apresentar valores negativos na diagonal, muito próximos de zero (da ordem de 10^{-15} , aproximadamente).
- *rej*: quantidade de simulações em que foi notada a presença de valores de níveis descritivos (p valor) menores que 0,05, ou seja, quantidade de simulações em que o teste foi rejeitado para cada uma das hipóteses.
- *simaprov*: quantidade de testes considerados, isto é, descontados os casos miss e também os valores "neg".
- *prop*: proporção em porcentagem, isto é, o quociente entre quantidades de rejeições (*rej*) e quantidade total de simulações consideradas (*simaprov*).
- essa rotina foi repetida para as duas hipóteses de interesse e também para os testes de Wald e teste da razão de verossimilhança.

Verificando os resultados existente na tabela 2.3, é possível verificar que a proporção de rejeições em geral; diminui a medida em que aumenta o tamanho da amostra.

O cálculo do teste da razão de verossimilhanças parece apresentar mais problemas de cálculo que o de Wald, pois temos mais "miss" que "neg", em geral.

Pode-se verificar que o teste de Wald para a segunda hipótese de interesse foi a que obteve nível empírico (*prop*.) mais próximo do nível teórico (5%).

2.9.1 Algoritmo EM versus BFGS

O algoritmo BFGS como qualquer outro algoritmo de otimização numérica busca o ponto estacionário de uma determinada função. Ele pode ser considerado um algoritmo de quasi-Newton por não haver a necessidade de fornecer a matriz hessiana.

Esse algoritmo possui como vantagem, a não necessidade de os estimadores serem calculados de forma explícita, isto é, bastando apenas fornecer a função de verossimilhanças observada e é mais rápido em termos de tempo de processamento em relação ao algoritmo EM. Porém, possui como desvantagem, a necessidade de cálculos de inversas e determinantes de matrizes que podem acarretar problemas em certas ocasiões, principalmente com valores bem próximos de zero (da ordem de 10^{-15}).

O algoritmo EM também é utilizado para determinar pontos estacionários (máximos, mínimos ou cela), porém é usado na situação em que temos variáveis latentes.

Um exemplo em que o BFGS não converge e o EM converge para $p = 3$ instrumentos e tamanho de amostra igual a 10 é obtido quando se considera os dados simulados abaixo. Os parâmetros usados para simular os dados são os mesmos que usamos na seção 2.8.

42.833	48.977	39.950
33.434	31.059	26.692
49.384	40.638	37.025
44.025	53.836	50.576
47.619	42.388	41.481
34.576	38.913	35.990
42.906	43.227	45.350
57.542	50.429	47.909
26.688	39.953	41.846
46.118	59.380	57.958

A seguinte mensagem é obtida na saída do Ox:

Warning: invert: decomposition failed C:3sim.ox (275): main

Portanto, como consequência não ocorre a convergência dos estimadores no algoritmo BFGS, tornando impraticável também o cálculo do teste da razão de verossimilhança com o uso dos dados observados, enquanto que utilizando o algoritmo EM, a convergência costuma ocorrer em menos de 100 iterações.

Nesse caso em particular, obtemos pelo algoritmo EM os seguintes estimadores:

$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
42.513	-25.846	-26.271	1.6636	1.6171	22.212	50.183	0.11084	9.08

Conforme já foi visto anteriormente, o algoritmo EM consiste de duas etapas, ou seja:

- primeira - atualização da esperança condicional,
- segunda - maximização da função de verossimilhança não observada.

Podem ocorrer então dificuldades em termos de programação, uma vez que para cada situação, pode ser necessário escrever um programa diferente, o que costuma ser mais lento em termos de tempo de processamento ao compararmos com o tempo necessário no uso do BFGS e por fim, o uso do algoritmo EM é facilitado quando temos a forma explícita para os estimadores na etapa M.

O algoritmo EM possui como vantagem uma maior confiabilidade em termos computacionais, gerando menores problemas para o seu cálculo.

Tabela 2.3 - Resultados das simulações para as hipóteses de interesse.

Tabelas 2.4 - Valores das estimativas dos parâmetros
e dos desvios padrões para os dados simulados.
n = 10 - Estimativas dos parâmetros

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	50.288	3.157	1.212	0.940	0.975	74601.18	73399.07	17.954	20.162
500	52.585	9.573	4.177	0.812	0.924	66157.91	66741.23	18.715	19.010
1000	51.560	59.350	57.320	-0.305	-0.264	57476.67	57915.47	19.449	19.276
2000	51.593	40.655	38.927	0.1188	0.151	52576.27	53308.81	19.659	19.624
3000	51.958	32.076	30.891	0.310	0.334	49810.59	50818.36	19.454	19.373
4000	51.710	28.104	26.367	0.394	0.428	51427.39	52349.26	19.373	19.363
5000	51.951	25.323	23.666	0.459	0.491	48959.58	49812.2	19.405	19.326

n = 10 - Desvios padrões

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	5.848	19.730	21.642	0.390	0.414	353239.5	348090.2	16.785	14.213
500	40.367	239.261	229.122	4.924	4.817	366974.8	365804.5	15.940	14.277
1000	37.642	1634.955	1665.087	36.529	37.213	313369.8	311891.7	15.003	14.813
2000	40.603	1163.893	1183.885	25.981	26.441	309978.2	310122.7	15.398	15.107
3000	43.499	955.851	973.099	21.315	21.704	291565.5	292707	15.100	14.986
4000	42.696	867.662	884.430	19.307	19.677	298913	300724.9	15.093	14.892
5000	41.526	781.493	795.165	17.365	17.673	287985.8	289280.6	15.152	14.849

n = 20 - Estimativas dos parâmetros

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	50.676	1.474	2.034	0.972	0.962	30551.05	29947.46	24.244	22.647
500	49.964	-1.057	-1.714	1.018	1.031	10598.19	10343.5	22.518	21.624
1000	50.0645	0.668	0.889	0.984	0.980	6903.325	6711.443	22.066	22.141
2000	50.541	2.250	3.192	0.955	0.936	6529.438	6513.312	22.157	22.237
3000	50.331	5.077	6.011	0.896	0.878	8671.478	8643.134	22.101	22.172
4000	50.323	6.473	7.385	0.867	0.848	7738.735	7684.196	22.096	22.054
5000	50.518	29.504	31.068	0.407	0.376	8508.282	8533.08	22.097	22.083

n = 20 - Desvios padrões

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	3.707	13.900	13.163	0.271	0.261	237597.6	233787.4	12.570	13.064
500	2.849	49.001	56.284	0.933	1.052	129761	127661.8	12.341	11.534
1000	3.245	59.286	64.062	1.204	1.289	96908.26	95379.06	11.989	11.615
2000	13.606	101.236	101.553	2.049	2.038	100404.3	99820.08	11.999	11.716
3000	13.794	144.924	150.838	3.008	3.118	121978.2	121383.4	12.025	11.732
4000	12.289	150.985	154.516	3.139	3.204	111778.9	111145.6	11.975	11.739
5000	15.513	1644.217	1691.61	32.695	33.638	118962.9	118918.4	11.947	11.738

n = 30 - Estimativas dos parâmetros

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	49.947	-0.014	0.259	1.001	0.993	101.596	23.067	21.560	22.175
500	49.931	-1.035	-1.193	1.022	1.024	97.807	23.923	23.292	22.721
1000	49.922	-1.152	-0.556	1.024	1.011	106.073	30.601	22.920	23.366
2000	50.288	-1.394	-1.312	1.029	1.027	2795.63	2824.466	22.885	23.110
3000	50.259	-1.046	-0.976	1.021	1.019	1955.973	1953.668	22.803	23.265
4000	50.197	-0.865	-0.866	1.017	1.017	1984.026	1954.659	22.750	23.045
5000	50.179	-0.791	-0.785	1.016	1.016	2183.209	2137.705	22.762	23.075

n = 30 - Desvios padrões

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	2.008	7.488	7.837	0.148	0.158	34.255	10.808	9.233	9.304
500	2.027	25.671	32.156	0.499	0.627	32.	10.982	10.149	9.587
1000	2.056	19.018	23.465	0.370	0.458	282.567	227.796	10.043	10.044
2000	12.297	77.458	95.254	1.583	1.947	67848.26	70627.87	9.947	10.013
3000	10.444	63.403	77.922	1.296	1.593	55479.9	57758.06	9.830	9.974
4000	9.104	55.321	67.704	1.130	1.384	54774.8	56336.05	9.800	9.904
5000	8.270	49.629	60.675	1.014	1.240	55894.91	56966.09	9.806	9.930

n = 40 - Estimativas dos parâmetros

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	49.924	0.110	-0.014	0.996	1.0012	95.794	22.647	23.231	23.537
500	50.039	-0.460	-0.447	1.008	1.007	97.921	23.889	23.095	23.512
1000	49.912	-0.751	-0.433	1.014	1.008	97.278	23.752	23.205	23.843
2000	49.966	-0.960	-0.964	1.019	1.019	833.9275	748.387	23.240	23.764
3000	49.991	-0.765	-0.787	1.015	1.016	820.734	735.117	23.296	23.780
4000	50.002	0.027	0.203	0.999	0.995	952.811	864.415	23.379	23.725
5000	49.993	-0.023	0.142	1.	0.997	781.748	696.281	23.365	23.690

n = 40 - Desvios padrões

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	1.698	8.550	7.218	0.167	0.141	29.919	7.791	9.359	8.515
500	1.784	7.095	6.810	0.140	0.134	28.297	8.232	9.059	8.9
1000	1.775	6.904	7.062	0.137	0.140	27.544	8.596	8.824	8.777
2000	1.754	22.802	24.462	0.463	0.498	32897.08	32415.75	8.839	8.841
3000	2.693	19.105	20.474	0.388	0.416	28678.43	28233.78	8.770	8.798
4000	2.485	45.744	53.396	0.941	1.099	31740.91	31225.79	8.845	8.880
5000	2.361	41.473	48.753	0.853	1.002	28391.29	27930.52	8.852	8.767

n = 50 - Estimativas dos parâmetros

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	50.083	-1.197	-1.220	1.021	1.025	97.596	23.519	22.179	23.784
500	49.9	-0.692	-0.509	1.0139	1.011	99.156	24.177	23.222	24.129
1000	49.954	-0.762	-0.454	1.014	1.010	98.979	23.777	23.714	23.676
2000	49.954	-0.628	-0.339	1.012	1.007	98.703	23.605	23.980	23.863
3000	49.944	-0.477	-0.347	1.010	1.007	98.297	23.739	24.066	23.811
4000	49.946	-0.423	-0.293	1.009	1.006	98.124	23.816	23.904	23.862
5000	49.957	-0.400	-0.343	1.008	1.007	98.280	23.827	23.840	23.862

n = 50 - Desvios padrões

simulações	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
100	1.563	6.334	6.673	0.123	0.131	27.642	8.197	8.028	7.883
500	1.575	5.905	6.393	0.116	0.126	25.979	8.074	7.768	7.612
1000	1.572	6.048	6.303	0.118	0.125	25.809	7.748	7.805	7.721
2000	1.555	5.982	6.170	0.117	0.122	25.697	7.710	7.835	8.003
3000	1.558	5.899	6.153	0.116	0.122	25.660	7.842	7.819	7.906
4000	1.559	5.898	6.108	0.116	0.121	25.593	7.845	7.806	7.907
5000	1.553	5.988	6.125	0.118	0.121	25.410	7.902	7.817	7.857

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Introdução

Neste capítulo desenvolvemos um estudo detalhado para os dados das árvores apresentados no capítulo 1, considerando apenas o primeiro observador e a primeira observação para todos os instrumentos e todas as árvores, utilizando os seguintes procedimentos: análise de variância, máxima verossimilhança utilizando os algoritmos BFGS e EM, avaliando também a precisão e eficiência dos instrumentos. Para finalizar, para ambas as hipóteses de interesse foram implementados testes da razão de verossimilhança utilizando as estimativas obtidas pelo BFGS e de Wald utilizando as estimativas obtidas pelo EM e calculando também a matriz de informação.

3.2 Hipóteses de Interesse

Comparar instrumentos de medição significa fazer inferências sobre os parâmetros que medem os vícios aditivos e multiplicativos conjuntamente ou separadamente, dependendo do interesse. Nesse caso estamos interessados em testar as hipóteses descritas no capítulo 2.

Escrevendo as hipóteses H_{01} e H_{02} na forma $H_0 : A\theta = \mathbf{b}$, vamos utilizar a estatística de Wald mencionada na seção anterior para efetuar os testes.

3.3 Análise de Variância

Primeiramente consideremos um modelo de análise de variância com um fator (Neter, 1996), para os dados das árvores sendo que, neste caso, a hipótese nula não foi rejeitada (p-valor maior que 0,05). Esta hipótese não foi rejeitada também para dados simulados, de modo que, esse procedimento não pareceu ser adequado para comparação de instrumentos de medição, conforme pode ser observado na saída do Minitab logo abaixo:

Figura 3.1 - saída do MINITAB versão 13 da análise de variância.

One-way ANOVA: altura versus instrumento

Analysis of Variance for altura

Source	DF	SS	MS	F	P
instrume	4	8.28	2.07	0.21	0.931
Error	45	442.26	9.83		
Total	49	450.54			

				Individual 95% CIs For Mean Based on Pooled StDev			
Level	N	Mean	StDev	-----+-----+-----+-----+			
1	10	19.360	3.156	(-----*-----)			
2	10	20.310	3.265	(-----*-----)			
3	10	19.350	3.241	(-----*-----)			
4	10	19.300	3.068	(-----*-----)			
5	10	19.200	2.932	(-----*-----)			
Pooled StDev = 3.135				-----+-----+-----+-----+	18.0	19.5	21.0 22.5

Como a análise de variância utilizada em Simões et al, (1963) não consegue nesse caso atender aos nossos objetivos principais, uma vez que apenas compara médias e não têm condições de comparar viéses e precisões, partimos para outros testes conforme pode ser verificado na seção seguinte.

3.4 Estimadores de máxima verossimilhança

Numa primeira etapa de estudo apresentada a seguir foram calculados os testes de Wald e teste da razão de verossimilhança utilizando 3 instrumentos de cada vez, em uma segunda etapa utilizando 4 instrumentos de cada vez e numa ultima etapa utilizando os cinco instrumentos para um mesmo observador. Para facilitar na construção da tabela eles foram numerados da seguinte maneira: 1 = trena (instrumento padrão), 2 = Blume-Leiss, 3 = Haga, 4 = Weiss e 5 = Prancheta dendrométrica.

Ocorre que, para a implementação do teste, necessitamos dos estimadores de máxima verossimilhança, que foram calculados utilizando o programa Ox e o algoritmo EM, obtendo assim os estimadores da tabela 3.1 abaixo.

Como era de esperar, neste caso os estimadores obtidos pelos dois métodos coincidem, e é claro também com os estimadores explícitos obtidos no capítulo 2.

Entretanto, notamos problemas de convergência do Ox, especialmente em situações onde o tamanho da amostra é pequeno.

Tabelas 3.1 - Estimativas dos parâmetros para combinações de três instrumentos para os dados das árvores.

instrumentos	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$
2 e 3	19.360	0.490	-0.072	1.024	1.003	8.921	0.046	0.246	0.475
2 e 4	19.360	19.300	18.374	0.052	0.048	3527.4	3185.4	-0.010	0.410
2 e 5	19.360	0.414	1.719	1.028	0.903	8.887	0.080	0.210	0.493
3 e 4	19.360	-0.973	0.360	1.050	0.978	8.523	0.444	0.056	0.317
3 e 5	19.360	0.084	1.926	0.995	0.892	8.993	-0.026	0.547	0.578
4 e 5	19.360	0.741	1.340	0.959	0.923	8.698	0.269	0.481	0.336

Tabelas 3.2 - Estimativas dos parâmetros para combinações de quatro instrumentos.

instrumentos	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
2, 3 e 4	19.360	0.206	-0.351	0.613	1.038	1.018	0.965	8.758	0.208	0.150	0.384	0.314
2, 3 e 5	19.360	0.482	-0.064	1.784	1.024	1.003	0.900	8.919	0.047	0.239	0.483	0.520
2, 4 e 5	19.360	-11.048	-9.458	-7.743	1.620	1.485	1.392	3.658	1.346	-0.002	0.403	0.654
3, 4 e 5	19.360	-0.669	0.426	1.606	1.034	0.975	0.909	8.642	0.672	0.331	0.0708	0.083

Para $p = 3$ os três métodos podem ser utilizados (momentos, EM e BFGS do Ox), para a obtenção dos estimadores de máximo verossimilhança.

Em termos de convergência, é possível observar o seguinte:

- Nas combinações de quatro instrumentos(ver tabela 3.2) foi possível verificar que a convergência foi obtida em uma quantidade de iterações entre 50 a 100.
- No caso em que foram utilizados os cinco instrumentos(tabela 3.8), a quantidade de iterações foi por volta de 300.
- Nos casos em que foram utilizados combinações de 3 instrumentos (que não consta na tabela 3,1, a quantidade de iterações foi por volta de 50.

3.5 Eficiência dos instrumentos

Para os dados das árvores obtemos os seguintes valores para eficiência para cada grupo de três instrumentos:

Tabela 3.3 - Resultados de eficiência para combinações de três instrumentos.

instrumentos	eficiência		
2 e 3	$e_1 = 0.99489$	$e_2 = 0.97440$	$e_3 = 0.94975$
2 e 4	$e_1 = 0.52543$	$e_2 = 1.0000$	$e_4 = 0.95167$
2 e 5	$e_1 = 0.99109$	$e_2 = 0.97813$	$e_5 = 0.93631$
3 e 4	$e_1 = 0.95052$	$e_3 = 0.99408$	$e_4 = 0.96262$
3 e 5	$e_1 = 1.0029$	$e_3 = 0.94213$	$e_5 = 0.92526$
4 e 5	$e_1 = 0.97005$	$e_4 = 0.94324$	$e_5 = 0.95662$

Para os dados das árvores obtemos os seguintes valores para precisão para cada grupo de tres instrumentos:

Tabela 3.4 - Precisão para combinações de três instrumentos.

instrumentos	precisão		
2 e 3	$\pi_1 = 21.822$	$\pi_2 = 4.2665$	$\pi_3 = 2.1198$
2 e 4	$\pi_1 = 0.00031388$	$\pi_2 = 0.27376$	$\pi_4 = 0.005589$
2 e 5	$\pi_1 = 12.521$	$\pi_2 = 5.0330$	$\pi_5 = 1.6544$
3 e 4	$\pi_1 = 2.2541$	$\pi_3 = 19.708$	$\pi_4 = 3.0216$
3 e 5	$\pi_1 = 38.011$	$\pi_3 = 1.8104$	$\pi_5 = 1.3766$
4 e 5	$\pi_1 = 3.7242$	$\pi_4 = 1.9106$	$\pi_5 = 2.5354$

É possível verificar que o primeiro instrumento, embora sendo considerado como sem viés, em geral foi considerado como o menos eficiente e de maior precisão.

Para os dados das árvores obtemos os seguintes valores para eficiência para cada grupo de quatro instrumentos:

Tabela 3.5 - Valores de eficiência para combinações de quatro instrumentos.

instrumentos	eficiência			
2, 3 e 4	$e_1 = 0.97678$	$e_2 = 0.98434$	$e_3 = 0.95943$	$e_4 = 0.96297$
2, 3 e 5	$e_1 = 0.99478$	$e_2 = 0.97506$	$e_3 = 0.94888$	$e_5 = 0.93281$
2, 4 e 5	$e_1 = 0.73094$	$e_2 = 1.000$	$e_4 = 0.95243$	$e_5 = 0.91553$
3, 4 e 5	$e_1 = 0.96376$	$e_3 = 0.97747$	$e_4 = 0.96922$	$e_5 = 0.92236$

Para os dados das árvores obtemos os seguintes valores para precisão para cada grupo de quatro instrumentos:

Tabela 3.6 - Valores de precisão para combinações de quatro instrumentos.

instrumentos	precisão			
2, 3 e 4	$\pi_1 = 4.8024$	$\pi_2 = 7.1752$	$\pi_3 = 2.7001$	$\pi_4 = 2.9694$
2, 3 e 5	$\pi_1 = 21.213$	$\pi_2 = 4.3831$	$\pi_3 = 2.0810$	$\pi_5 = 1.5567$
2, 4 e 5	$\pi_1 = 0.74270$	$\pi_2 = 1542.4$	$\pi_4 = 5.4734$	$\pi_5 = 2.9631$
3, 4 e 5	$\pi_1 = 3.0776$	$\pi_3 = 5.0202$	$\pi_4 = 3.6436$	$\pi_5 = 1.3747$

Agora, considerando todos os instrumentos, obtemos os seguintes resultados para eficiência e precisão:

Tabela 3.7 - Valores para estimativa e precisão considerando todos os instrumentos.

instrumentos	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
2, 3, 4 e 5	0.97974	0.98422	0.95643	0.96127	0.93422
instrumentos	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
2, 3, 4 e 5	5.5044	7.1013	2.4989	2.8254	1.6166

É possível verificar que o quinto instrumento foi considerado como o menos eficiente é o de menor precisão.

O segundo instrumento foi considerado o mais eficiente e o mais preciso.

3.6 Teste de Wald

Os estimadores da matriz de informação de Fisher (veja apêndice F), $\hat{I}$ e suas inversas, $\hat{I}^{-1}$ são dadas a seguir. Temos:

Instrumentos 2 e 3:

$$\hat{I} =$$

1.1166	0.16497	0.083603	3.1938	1.6186	0.00000
0.16497	34.576	-3.1081	669.39	-60.174	0.00000
0.083603	-3.1081	19.478	-60.174	377.10	0.00000
3.1938	669.39	-60.174	13267.	-1192.5	0.16432
1.6186	-60.174	377.10	-1192.5	7473.7	0.083272
0.00000	0.00000	0.00000	0.16432	0.083272	0.062336
0.00000	0.00000	0.00000	-24.746	-12.541	0.037308
0.00000	0.00000	0.00000	5.0883	-0.45740	0.039101
0.00000	0.00000	0.00000	-0.23180	1.4527	0.037546

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
-24.746	5.0883	-0.23180
-12.541	-0.45740	1.4527
0.037308	0.039101	0.037546
125.34	51.566	13.243
51.566	59.775	0.48303
13.243	0.48303	18.970

$\hat{I}^{-1} =$

0.89664	-0.0046913	-0.0045971	2.7256e-015	-4.2543e-016	-1.9869e-015
-0.0046913	1.3278	0.25524	-0.067069	-0.012941	0.18071
-0.0045971	0.25524	2.2984	-0.012941	-0.11603	0.17495
-7.2456e-022	-0.067069	-0.012941	0.0034643	0.00066843	-0.0093341
4.4983e-019	-0.012941	-0.11603	0.00066843	0.0059932	-0.0090365
-5.5324e-019	0.18071	0.17495	-0.0093341	-0.0090365	16.103
8.1382e-020	-0.029202	-0.026247	0.0015084	0.0013557	-0.00056858
-6.5624e-020	0.030526	0.022531	-0.0015768	-0.0011638	-0.0090701
-8.8504e-020	0.019423	0.026131	-0.0010033	-0.0013497	-0.030667
-2.0931e-016	-4.8064e-016	-2.0343e-016			
-0.029202	0.030526	0.019423			
-0.026247	0.022531	0.026131			
0.0015084	-0.0015768	-0.0010033			
0.0013557	-0.0011638	-0.0013497			
-0.00056858	-0.0090701	-0.030667			
0.014706	-0.012723	-0.010027			
-0.012723	0.027770	0.0082630			
-0.010027	0.0082630	0.059656			

Instrumentos 2 e 4:

$\hat{I} =$

0.0028380	0.055583	-0.0012368	1.0761	-0.023945	0.00000
0.055583	23.217	-22.888	449.48	-443.12	0.00000
-0.0012368	-22.888	24.924	-443.12	482.53	0.00000
1.0761	449.48	-443.12	94528.	-89485.	0.055642
-0.023945	-443.12	482.53	-89485.	97354.	-0.0012381
0.00000	0.00000	0.00000	0.055642	-0.0012381	4.0271e-007
0.00000	0.00000	0.00000	7.2189e-005	-1.6063e-006	5.5295e-013
0.00000	0.00000	0.00000	455.20	-448.75	1.5057e-015
0.00000	0.00000	0.00000	9.9855	-10.874	1.2642e-015
0.00000	0.00000	0.00000			
0.00000	0.00000	0.00000			
0.00000	0.00000	0.00000			
7.2189e-005	455.20	9.9855			
-1.6063e-006	-448.75	-10.874			
5.5295e-013	1.5057e-015	1.2642e-015			
4.9377e-007	0.00018936	9.3761e-008			
0.00018936	26.952	26.194			
9.3761e-008	26.194	31.061			

$\hat{I}^{-1} =$

671.33	-16.625	-15.233	-1.1739e-014	-1.0187e-014	1.6012e-009
-16.625	0.97854	0.88829	-0.0057863	-0.0048236	784.67
-15.233	0.88829	0.85505	-0.0048236	-0.0044272	652.87
-9.4414e-015	-0.0057863	-0.0048236	0.00029888	0.00024915	-40.531
-7.8904e-015	-0.0048236	-0.0044272	0.00024915	0.00022868	-33.723
1.2803e-009	784.67	652.87	-40.531	-33.723	7.9796e+006
-5.8624e-011	-36.357	-16.022	1.8780	0.82760	-2.5694e+005
1.5646e-013	0.097006	0.043596	-0.0050106	-0.0022519	685.40
-1.3167e-013	-0.081633	-0.036764	0.0042166	0.0018990	-576.77
-7.0566e-011	1.7861e-013	-1.5468e-013			
-36.357	0.097006	-0.081633			
-16.022	0.043596	-0.036764			
1.8780	-0.0050106	0.0042166			
0.82760	-0.0022519	0.0018990			
-2.5694e+005	685.40	-576.77			

2.0937e+006	-179.22	150.81
-179.22	0.46940	-0.39502
150.81	-0.39502	0.36462

Instrumentos 2 e 5:

$\hat{I} =$

1.1187	0.28524	0.10671	5.5222	2.0659	0.00000
0.28524	35.243	-4.6442	682.30	-89.912	0.00000
0.10671	-4.6442	18.554	-89.912	359.21	0.00000
5.5222	682.30	-89.912	13521.	-1781.5	0.28358
2.0659	-89.912	359.21	-1781.5	7118.2	0.10609
0.00000	0.00000	0.00000	0.28358	0.10609	0.062579
0.00000	0.00000	0.00000	-20.569	-7.6949	0.026591
0.00000	0.00000	0.00000	8.9332	-1.1772	0.028083
0.00000	0.00000	0.00000	-0.44040	1.7594	0.021680

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
-20.569	8.9332	-0.44040
-7.6949	-1.1772	1.7594
0.026591	0.028083	0.021680
97.097	50.368	7.0493
50.368	62.102	1.0784
7.0493	1.0784	17.213

$\hat{I}^{-1} =$

0.89664	-0.0082073	-0.0072112	6.5234e-016	2.5548e-018	-8.1826e-015
-0.0082073	1.3537	0.37217	-0.068405	-0.018841	0.33573
-0.0072112	0.37217	2.4610	-0.018841	-0.12424	0.29027
-1.8498e-018	-0.068405	-0.018841	0.0035333	0.00097318	-0.017342
1.6871e-018	-0.018841	-0.12424	0.00097318	0.0064172	-0.014993
5.4294e-018	0.33573	0.29027	-0.017342	-0.014993	16.092
-7.1415e-019	-0.037493	-0.026573	0.0019366	0.0013725	-0.0097760
8.7464e-019	0.039521	0.021404	-0.0020414	-0.0011056	0.0031294
1.1052e-020	0.012632	0.021393	-0.00065247	-0.0011050	-0.015371
2.2269e-016	-1.9474e-016	-2.8790e-016			
-0.037493	0.039521	0.012632			
-0.026573	0.021404	0.021393			

0.0019366	-0.0020414	-0.00065247
0.0013725	-0.0011056	-0.0011050
-0.0097760	0.0031294	-0.015371
0.019685	-0.016090	-0.0071320
-0.016090	0.029340	0.0048079
-0.0071320	0.0048079	0.060832

Instrumentos 3 e 4:

$\hat{I} =$

1.1678	0.87736	0.14437	16.986	2.7951	0.00000
0.87736	38.406	-23.095	743.54	-447.12	0.00000
0.14437	-23.095	27.770	-447.12	537.62	0.00000
16.986	743.54	-447.12	14726.	-8851.2	0.87326
2.7951	-447.12	537.62	-8851.2	10644.	0.14370
0.00000	0.00000	0.00000	0.87326	0.14370	0.068193
0.00000	0.00000	0.00000	-1.5136	-0.24906	0.00055509
0.00000	0.00000	0.00000	28.718	-17.269	0.00061200
0.00000	0.00000	0.00000	-2.8417	3.4169	0.00053128

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
-1.5136	28.718	-2.8417
-0.24906	-17.269	3.4169
0.00055509	0.00061200	0.00053128
21.047	14.204	0.38463
14.204	73.750	26.669
0.38463	26.669	38.558

$\hat{I}^{-1} =$

0.89664	-0.046583	-0.043402	3.7009e-016	-9.1859e-018	2.3309e-015
-0.046583	2.5508	2.0614	-0.12894	-0.10412	1.8707
-0.043402	2.0614	3.3538	-0.10412	-0.16941	1.6904
5.4690e-017	-0.12894	-0.10412	0.0066601	0.0053783	-0.096628
4.5147e-017	-0.10412	-0.16941	0.0053783	0.0087503	-0.087312
-7.9555e-016	1.8707	1.6904	-0.096628	-0.087312	16.086
1.6768e-017	-0.040148	-0.0097216	0.0020738	0.00050215	-0.028027
-1.8538e-017	0.044684	7.3772e-005	-0.0023081	-3.8105e-006	0.029608
1.2695e-017	-0.030806	0.0073612	0.0015912	-0.00038023	-0.019804

-1.6451e-016	1.4859e-016	-1.2725e-016
-0.040148	0.044684	-0.030806
-0.0097216	7.3772e-005	0.0073612
0.0020738	-0.0023081	0.0015912
0.00050215	-3.8105e-006	-0.00038023
-0.028027	0.029608	-0.019804
0.058003	-0.015591	0.010313
-0.015591	0.023290	-0.016123
0.010313	-0.016123	0.037135

Instrumentos 3 e 5:

$\hat{I} =$

1.1156	-0.058280	-0.049423	-1.1283	-0.95682	0.00000
-0.058280	19.235	0.80857	372.39	15.654	0.00000
-0.049423	0.80857	17.976	15.654	348.02	0.00000
-1.1283	372.39	15.654	7383.1	310.38	-0.058467
-0.95682	15.654	348.02	310.38	6899.8	-0.049581
0.00000	0.00000	0.00000	-0.058467	-0.049581	0.062225
0.00000	0.00000	0.00000	-21.814	-18.499	0.074136
0.00000	0.00000	0.00000	-1.0081	-0.042377	0.073417
0.00000	0.00000	0.00000	-0.035936	-0.79893	0.059024
0.00000	0.00000	0.00000			
0.00000	0.00000	0.00000			
0.00000	0.00000	0.00000			
-21.814	-1.0081	-0.035936			
-18.499	-0.042377	-0.79893			
0.074136	0.073417	0.059024			
65.219	19.843	14.270			
19.843	18.500	0.032689			
14.270	0.032689	16.157			

$\hat{I}^{-1} =$

0.89664	0.0026180	0.0023474	1.0177e-015	9.1823e-017	-1.3905e-015
0.0026180	2.4008	0.067317	-0.12132	-0.0035978	-0.18494
0.0023474	0.067317	2.5234	-0.0035978	-0.12746	-0.16762
-5.7018e-020	-0.12132	-0.0035978	0.0062665	0.00018584	0.0095525
2.4469e-019	-0.0035978	-0.12746	0.00018584	0.0065838	0.0086582

2.2676e-019	-0.18494	-0.16762	0.0095525	0.0086582	16.254
1.0116e-019	-0.082373	-0.074741	0.0042548	0.0038606	0.040450
-1.1181e-019	0.082342	0.080240	-0.0042532	-0.0041446	-0.10719
-7.7970e-020	0.072814	0.060151	-0.0037610	-0.0031070	-0.094439

1.4784e-015	1.1224e-015	2.5520e-015
-0.082373	0.082342	0.072814
-0.074741	0.080240	0.060151
0.0042548	-0.0042532	-0.0037610
0.0038606	-0.0041446	-0.0031070
0.040450	-0.10719	-0.094439
0.036916	-0.039459	-0.032472
-0.039459	0.096503	0.034832
-0.032472	0.034832	0.090685

Instrumentos 4 e 5:

$\hat{I} =$

1.1338	0.27657	0.38138	5.3544	7.3835	0.00000
0.27657	15.996	-6.6112	309.68	-127.99	0.00000
0.38138	-6.6112	20.674	-127.99	400.26	0.00000
5.3544	309.68	-127.99	6133.3	-2533.8	0.27273
7.3835	-127.99	400.26	-2533.8	7927.4	0.37608
0.00000	0.00000	0.00000	0.27273	0.37608	0.064270
0.00000	0.00000	0.00000	-4.0270	-5.5530	0.013354
0.00000	0.00000	0.00000	3.8479	-1.5904	0.012272
0.00000	0.00000	0.00000	-2.1930	6.8581	0.011365

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
-4.0270	3.8479	-2.1930
-5.5530	-1.5904	6.8581
0.013354	0.012272	0.011365
21.015	4.0129	7.6306
4.0129	12.794	2.1854
7.6306	2.1854	21.372

$\hat{I}^{-1} =$

0.89664	-0.025741	-0.024771	3.3705e-016	2.2531e-016	-1.6819e-016
---------	-----------	-----------	-------------	-------------	--------------

-0.025741	3.3498	1.1365	-0.16927	-0.057477	1.0537
-0.024771	1.1365	2.6332	-0.057477	-0.13310	1.0246
-2.2455e-017	-0.16927	-0.057477	0.0087431	0.0029689	-0.054426
-1.1603e-017	-0.057477	-0.13310	0.0029689	0.0068750	-0.052923
1.6314e-016	1.0537	1.0246	-0.054426	-0.052923	16.105
-1.0505e-017	-0.066392	-0.071012	0.0034294	0.0036679	-0.041785
7.7167e-018	0.060499	0.011711	-0.0031249	-0.00060492	0.0044952
4.2941e-018	0.018033	0.060425	-0.00093148	-0.0031211	0.017293

3.1619e-016	3.8976e-017	-1.6001e-016
-0.066392	0.060499	0.018033
-0.071012	0.011711	0.060425
0.0034294	-0.0031249	-0.00093148
0.0036679	-0.00060492	-0.0031211
-0.041785	0.0044952	0.017293
0.059691	-0.015756	-0.020504
-0.015756	0.084503	-0.0031444
-0.020504	-0.0031444	0.055330

Instrumentos 2 e 3:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.49028 & -0.071690 & 0.023746 & 0.0031865 \end{pmatrix}',$$

com:

$$\left[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A' \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 34.552 & -3.1205 & 668.92 & -60.413 \\ -3.1205 & 19.472 & -60.413 & 376.98 \\ 668.92 & -60.413 & 13245. & -1202.5 \\ -60.413 & 376.98 & -1202.5 & 7468.8 \end{pmatrix},$$

que leva ao valor da estatística $W = 31.407$.

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 4 graus de liberdade, $\chi^2_{s=4}(0,05) = 9.488$, temos que $31.407 > 9.488$, então rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, que pelo menos um instrumento tem viés aditivo não nulo ou pelo menos um deles tem viés multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$\mathbf{b} = A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 0.56197 & 0.020559 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A']^{-1} = \begin{pmatrix} 13.876 & 268.65 \\ 268.65 & 5324.1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 12.841$, que indica rejeição de H_0 , isto é, existe diferenças entre os vícios.

Instrumentos 2 e 4:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 19.300 & 18.374 & -0.94782 & -0.95219 \end{pmatrix}'$$

com:

$$\left[A \hat{I}_F^{-1} (\hat{\theta}) A' \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 22.129 & -22.864 & 428.41 & -442.65 \\ -22.864 & 24.924 & -442.65 & 482.52 \\ 428.41 & -442.65 & 44765. & -48306. \\ -442.65 & 482.52 & -48306. & 57009. \end{pmatrix}$$

que leva ao valor da estatística $W = 4280.4$.

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 4 graus de liberdade, $\chi_{s=4}^2(0, 05) = 9.488$, temos que $4280.4 > 9.4882$, então rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, que pelo menos um instrumento tem viés aditivo não nulo ou pelo menos um deles tem vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 0.92545 & 0.0043672 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$\left[A \hat{I}_F^{-1} (\hat{\theta}) A' \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 21.720 & 420.50 \\ 420.50 & 42326. \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 22.809$, que indica a rejeição de H_0 , isto é, existe diferenças entre os vícios.

Instrumentos 2 e 5:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.41437 & 1.7191 & 0.027667 & -0.097061 \end{pmatrix}',$$

com:

$$\begin{aligned} & [A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A']^{-1} = \\ & \begin{pmatrix} 35.170 & -4.6714 & 680.89 & -90.439 \\ -4.6714 & 18.544 & -90.439 & 359.01 \\ 680.89 & -90.439 & 13477. & -1795.7 \\ -90.439 & 359.01 & -1795.7 & 7113.0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que leva ao valor da estatística $W = 35.634$.

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 4 graus de liberdade, $\chi_{s=4}^2(0,05) = 9.488$, temos que $35.634 > 9.4882$, então rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, que pelo menos um instrumento tem viés aditivo não nulo ou pelo menos um deles tem vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \quad \beta_2 = \beta_3 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$\mathbf{b} = A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} -1.3047 & 0.12473 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A']^{-1} = \begin{pmatrix} 14.207 & 275.04 \\ 275.04 & 5449.7 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 19.448$, que indica a rejeição de H_0 , isto é, existe diferenças entre os vícios.

Instrumentos 3 e 4:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.97823 & 0.35969 & 0.050012 & -0.021678 \end{pmatrix}',$$

com:

$$\left[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A' \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 37.747 & -23.203 & 730.77 & -449.22 \\ -23.203 & 27.752 & -449.22 & 537.28 \\ 730.77 & -449.22 & 14446. & -8880.1 \\ -449.22 & 537.28 & -8880.1 & 10629. \end{pmatrix}$$

que leva ao valor da estatística $W = 1.3254$.

Comparando W com o valor crítico da qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 4 graus de liberdade, $\chi_{s=4}^2(0, 05) = 9.488$, temos que $1.3254 < 9.4882$, então não rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos não têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, nenhum instrumento tem viés aditivo não nulo ou vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} -1.3379 & 0.071690 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A']^{-1} = \begin{pmatrix} 26.668 & 516.30 \\ 516.30 & 10210. \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 1.1710$, que indica a não rejeição de H_0 , isto é, não existe diferenças entre os vícios.

Instrumentos 3 e 5:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.084098 & 1.9255 & -0.0048604 & -0.10772 \end{pmatrix}',$$

com:

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A']^{-1} = \begin{pmatrix} 19.232 & 0.80599 & 372.33 & 15.604 \\ 0.80599 & 17.974 & 15.604 & 347.97 \\ 372.33 & 15.604 & 7368.1 & 297.58 \\ 15.604 & 347.97 & 297.58 & 6888.8 \end{pmatrix}$$

que leva ao valor da estatística $W = 2.2277$.

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 4 graus de liberdade, $\chi_{s=4}^2(0,05) = 9.488$, temos que $2.2277 < 9.4882$, então não rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos não têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, que nenhum instrumento tem viés aditivo não nulo ou vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} -1.8414 & 0.10286 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A']^{-1} = \begin{pmatrix} 8.8883 & 172.08 \\ 172.08 & 3411.6 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 1.0479$, que indica a não rejeição de H_0 , isto é, não existe diferenças entre os vícios.

Caso 4 e 5:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.74104 & 1.3399 & -0.41376 & -0.077477 \end{pmatrix}'$$

com:

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A']^{-1} = \begin{pmatrix} 15.929 & -6.7042 & 308.38 & -129.79 \\ -6.7042 & 20.546 & -129.79 & 397.77 \\ 308.38 & -129.79 & 6104.2 & -2570.7 \\ -129.79 & 397.77 & -2570.7 & 7871.3 \end{pmatrix}$$

que leva ao valor da estatística $W = 1.3361$.

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 4 graus de liberdade, $\chi^2_{s=4}(0,05) = 9.488$, temos que $1.3361 < 9.4882$, então não rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos não têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, que nenhum instrumento tem viés aditivo não nulo vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - b = 0$, de onde obtemos:

$$A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} -0.59891 & 0.36101 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta})A']^{-1} = \begin{pmatrix} 12.240 & 236.96 \\ 236.96 & 4690.9 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 0.25703$, que indica a não rejeição de H_0 , isto é, não existe diferenças entre os vícios.

Passemos agora a mostrar os resultados para o teste de Wald em que foram utilizando quatro instrumentos de cada vez.

Obtemos o seguinte resultado para a matriz de informação de Fisher estimada $\hat{I}$ e para sua inversa $\hat{I}^{-1}$:

Instrumentos 2, 3 e 4:

$$\hat{I} =$$

1.1345	0.44418	0.17058	0.19776	8.5994	3.3024
0.44418	39.657	-10.322	-11.967	767.77	-199.84
0.17058	-10.322	22.112	-4.5957	-199.84	428.08

0.19776	-11.967	-4.5957	26.541	-231.69	-88.973
8.5994	767.77	-199.84	-231.69	15211.	-3958.2
3.3024	-199.84	428.08	-88.973	-3958.2	8480.3
3.8286	-231.69	-88.973	513.84	-4588.9	-1762.3
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.44133	0.16948
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-5.0515	-1.9399
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	15.428	-4.0157
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-1.5421	3.3034
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-2.0727	-0.79598
3.8286	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-231.69	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-88.973	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
513.84	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-4588.9	0.44133	-5.0515	15.428	-1.5421	-2.0727
-1762.3	0.16948	-1.9399	-4.0157	3.3034	-0.79598
10179.	0.19649	-2.2490	-4.6555	-0.68658	4.5970
0.19649	0.064349	0.0047655	0.0051391	0.0049347	0.0044402
-2.2490	0.0047655	61.386	17.452	2.5737	3.4592
-4.6555	0.0051391	17.452	78.635	5.3277	7.1607
-0.68658	0.0049347	2.5737	5.3277	24.446	1.0560
4.5970	0.0044402	3.4592	7.1607	1.0560	35.222

$\hat{I}^{-1} =$

0.89664	-0.021624	-0.021189	-0.020100	-9.2351e-016	-4.2887e-016
-0.021624	1.6737	0.97800	0.92764	-0.084516	-0.049380
-0.021189	0.97800	2.6520	0.90794	-0.049380	-0.13389
-0.020100	0.92764	0.90794	2.2486	-0.046837	-0.045841
-6.2058e-018	-0.084516	-0.049380	-0.046837	0.0043655	0.0025506
-2.5816e-018	-0.049380	-0.13389	-0.045841	0.0025506	0.0069157
-2.7154e-017	-0.046837	-0.045841	-0.11352	0.0024193	0.0023678
1.3225e-016	0.85285	0.83085	0.78845	-0.044052	-0.042916
-1.6363e-018	-0.014304	-0.011096	-0.010572	0.00073883	0.00057313
-4.2624e-019	0.014672	0.0015468	0.0013439	-0.00075784	-7.9895e-005
-7.1247e-019	-0.0017686	0.014340	0.00020779	9.1352e-005	-0.00074072
3.3724e-018	-0.0016091	0.00029192	0.011683	8.3112e-005	-1.5078e-005
1.6351e-016	3.2064e-015	1.5540e-017	8.7491e-017	1.6016e-017	6.0230e-018
-0.046837	0.85285	-0.014304	0.014672	-0.0017686	-0.0016091
-0.045841	0.83085	-0.011096	0.0015468	0.014340	0.00029192
-0.11352	0.78845	-0.010572	0.0013439	0.00020779	0.011683
0.0024193	-0.044052	0.00073883	-0.00075784	9.1352e-005	8.3112e-005

0.0023678	-0.042916	0.00057313	-7.9895e-005	-0.00074072	-1.5078e-005
0.0058638	-0.040726	0.00054609	-6.9416e-005	-1.0733e-005	-0.00060348
-0.040726	16.080	-0.0090995	0.0051460	-0.0015166	-0.00038105
0.00054609	-0.0090995	0.017573	-0.0038310	-0.00098862	-0.00093106
-6.9416e-005	0.0051460	-0.0038310	0.014107	-0.0026052	-0.0024516
-1.0733e-005	-0.0015166	-0.00098862	-0.0026052	0.041711	-0.00063363
-0.00060348	-0.00038105	-0.00093106	-0.0024516	-0.00063363	0.029083

Instrumentos 2, 3 e 5:

$\hat{I} =$

1.1169	0.16351	0.079283	0.066110	3.1655	1.5349
0.16351	35.546	-3.0264	-2.5235	688.17	-58.591
0.079283	-3.0264	19.227	-1.2236	-58.591	372.23
0.066110	-2.5235	-1.2236	18.215	-48.855	-23.690
3.1655	688.17	-58.591	-48.855	13639.	-1161.1
1.5349	-58.591	372.23	-23.690	-1161.1	7377.2
1.2799	-48.855	-23.690	352.64	-968.17	-469.46
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.16288	0.078980
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-22.363	-10.844
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	5.1838	-0.44135
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.21401	1.3596
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.14880	-0.072152
1.2799	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-48.855	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-23.690	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
352.64	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-968.17	0.16288	-22.363	5.1838	-0.21401	-0.14880
-469.46	0.078980	-10.844	-0.44135	1.3596	-0.072152
6989.0	0.065857	-9.0418	-0.36802	-0.086530	1.0740
0.065857	0.062372	0.032842	0.034448	0.033026	0.026578
-9.0418	0.032842	172.81	47.853	11.251	7.8230
-0.36802	0.034448	47.853	63.175	0.45795	0.31841
-0.086530	0.033026	11.251	0.45795	18.483	0.074865
1.0740	0.026578	7.8230	0.31841	0.074865	16.589

$\hat{I}^{-1} =$

0.89664	-0.0048280	-0.0047272	-0.0042407	7.9562e-016	2.1514e-016
-0.0048280	1.2762	0.23395	0.20954	-0.064429	-0.011834

-0.0047272	0.23395	2.3152	0.20343	-0.011834	-0.11684
-0.0042407	0.20954	0.20343	2.4283	-0.010599	-0.010288
2.4953e-018	-0.064429	-0.011834	-0.010599	0.0033279	0.00061127
-3.5742e-019	-0.011834	-0.11684	-0.010288	0.00061127	0.0060353
-3.2084e-019	-0.010599	-0.010288	-0.12254	0.00054746	0.00053140
-5.4903e-018	0.18607	0.18026	0.16234	-0.0096112	-0.0093110
4.5708e-019	-0.015040	-0.013548	-0.011965	0.00077684	0.00069979
-5.5012e-019	0.016339	0.010112	0.0089440	-0.00084394	-0.00052234
-2.0050e-019	0.0084664	0.016060	0.0067797	-0.00043731	-0.00082956
-1.5369e-019	0.0064992	0.0058852	0.012974	-0.00033570	-0.00030399
3.7378e-016	4.1211e-015	-6.5449e-017	1.6209e-016	2.9900e-016	-1.8162e-016
-0.010599	0.18607	-0.015040	0.016339	0.0084664	0.0064992
-0.010288	0.18026	-0.013548	0.010112	0.016060	0.0058852
-0.12254	0.16234	-0.011965	0.0089440	0.0067797	0.012974
0.00054746	-0.0096112	0.00077684	-0.00084394	-0.00043731	-0.00033570
0.00053140	-0.0093110	0.00069979	-0.00052234	-0.00082956	-0.00030399
0.0063297	-0.0083853	0.00061803	-0.00046198	-0.00035019	-0.00067015
-0.0083853	16.108	-0.00029571	-0.0075576	-0.027779	-0.024982
0.00061803	-0.00029571	0.0081593	-0.0061816	-0.0048376	-0.0037367
-0.00046198	-0.0075576	-0.0061816	0.020542	0.0032837	0.0025381
-0.00035019	-0.027779	-0.0048376	0.0032837	0.057062	0.0020204
-0.00067015	-0.024982	-0.0037367	0.0025381	0.0020204	0.062064

Instrumentos 2, 4 e 5:

$\hat{I} =$

2.7343	1.6982	-0.0065713	-0.0037971	32.878	-0.12722
1.6982	36.252	-22.889	-13.226	701.83	-443.14
-0.0065713	-22.889	24.895	0.051178	-443.14	481.97
-0.0037971	-13.226	0.051178	15.329	-256.06	0.99081
32.878	701.83	-443.14	-256.06	13724.	-8662.9
-0.12722	-443.14	481.97	0.99081	-8662.9	9421.9
-0.073511	-256.06	0.99081	296.77	-5005.7	19.369
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.6985	-0.0065724
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.0022352	-8.6490e-006
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	22.519	-14.219
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.055019	-0.059840
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.018370	-7.1082e-005
-0.073511	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-256.06	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.99081	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

296.77	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-5005.7	1.6985	0.0022352	22.519	0.055019	0.018370
19.369	-0.0065724	-8.6490e-006	-14.219	-0.059840	-7.1082e-005
5801.5	-0.0037977	-4.9976e-006	-8.2159	-0.00012302	-0.021290
-0.0037977	0.37383	8.7714e-008	2.3012e-007	1.9354e-007	1.6988e-007
-4.9976e-006	8.7714e-008	2.7607	1.0642	1.5935e-005	5.3204e-006
-8.2159	2.3012e-007	1.0642	65.710	26.196	8.7465
-0.00012302	1.9354e-007	1.5935e-005	26.196	30.988	0.00013096
-0.021290	1.6988e-007	5.3204e-006	8.7465	0.00013096	11.749

$\hat{I}^{-1} =$

0.50043	-0.21809	-0.20000	-0.18738	1.5090e-013	1.3661e-013
-0.21809	37.146	33.668	31.542	-1.9004	-1.7223
-0.20000	33.668	34.942	28.830	-1.7223	-1.7874
-0.18738	31.542	28.830	33.772	-1.6136	-1.4748
1.5024e-013	-1.9004	-1.7223	-1.6136	0.098164	0.088961
1.3596e-013	-1.7223	-1.7874	-1.4748	0.088961	0.092326
1.2767e-013	-1.6136	-1.4748	-1.7276	0.083346	0.076176
-6.7895e-013	8.5883	7.7791	7.2880	-0.44361	-0.40181
4.0975e-015	-0.051576	-0.011891	-0.011086	0.0026641	0.00061419
-1.0943e-014	0.13776	0.034440	0.032126	-0.0071157	-0.0017789
9.2471e-015	-0.11642	-0.029514	-0.027148	0.0060132	0.0015245
8.1438e-015	-0.10252	-0.025630	-0.024533	0.0052955	0.0013239
1.2851e-013	-6.7730e-013	4.1844e-015	-1.1123e-014	9.4507e-015	8.3732e-015
-1.6136	8.5883	-0.051576	0.13776	-0.11642	-0.10252
-1.4748	7.7791	-0.011891	0.034440	-0.029514	-0.025630
-1.7276	7.2880	-0.011086	0.032126	-0.027148	-0.024533
0.083346	-0.44361	0.0026641	-0.0071157	0.0060132	0.0052955
0.076176	-0.40181	0.00061419	-0.0017789	0.0015245	0.0013239
0.089234	-0.37645	0.00057263	-0.0016594	0.0014023	0.0012672
-0.37645	4.6798	-0.012088	0.032283	-0.027281	-0.024025
0.00057263	-0.012088	0.36677	-0.011788	0.0099612	0.0087722
-0.0016594	0.032283	-0.011788	0.030593	-0.025853	-0.022767
0.0014023	-0.027281	0.0099612	-0.025853	0.054118	0.019239
0.0012672	-0.024025	0.0087722	-0.022767	0.019239	0.10206

Instrumentos 3, 4 e 5:

$\hat{I} =$

1.1471	0.42460	0.32686	0.13229	8.2203	6.3280
0.42460	29.139	-13.713	-5.5503	564.12	-265.49
0.32686	-13.713	27.780	-4.2727	-265.49	537.82
0.13229	-5.5503	-4.2727	14.916	-107.45	-82.719
8.2203	564.12	-265.49	-107.45	11172.	-5256.3
6.3280	-265.49	537.82	-82.719	-5256.3	10651.
2.5612	-107.45	-82.719	288.76	-2127.4	-1637.7
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.42089	0.32400
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-2.6265	-2.0219
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	10.691	-5.0316
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-3.8734	7.8465
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.63452	-0.48846

2.5612	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-107.45	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-82.719	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
288.76	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-2127.4	0.42089	-2.6265	10.691	-3.8734	-0.63452
-1637.7	0.32400	-2.0219	-5.0316	7.8465	-0.48846
5718.4	0.13114	-0.81834	-2.0365	-1.2068	1.7052
0.13114	0.065791	0.0036223	0.0038729	0.0034427	0.0029917
-0.81834	0.0036223	27.890	6.3758	3.7783	0.61895
-2.0365	0.0038729	6.3758	42.453	9.4026	1.5403
-1.2068	0.0034427	3.7783	9.4026	38.586	0.91279
1.7052	0.0029917	0.61895	1.5403	0.91279	11.124

$\hat{I}^{-1} =$

0.89664	-0.033598	-0.031677	-0.029530	5.6062e-016	1.5941e-016
-0.033598	2.5422	1.4766	1.3781	-0.12842	-0.074578
-0.031677	1.4766	2.5725	1.2983	-0.074578	-0.12994
-0.029530	1.3781	1.2983	3.9048	-0.069604	-0.065576
2.2269e-017	-0.12842	-0.074578	-0.069604	0.0066331	0.0038522
4.5800e-017	-0.074578	-0.12994	-0.065576	0.0038522	0.0067116
1.8963e-017	-0.069604	-0.065576	-0.19721	0.0035952	0.0033872
-4.0590e-016	1.3277	1.2479	1.1611	-0.068581	-0.064460
6.7068e-018	-0.024819	-0.020884	-0.018320	0.0012820	0.0010787
1.3921e-018	0.024627	-0.00094447	0.0018929	-0.0012721	4.8785e-005
-7.4574e-018	-0.0035435	0.019061	0.00084709	0.00018303	-0.00098458
5.2968e-019	-0.0020258	-0.00051461	0.023756	0.00010464	2.6581e-005

1.1663e-016	-1.7072e-014	6.0076e-017	-4.0912e-017	-2.1621e-017	-4.0542e-017
-0.069604	1.3277	-0.024819	0.024627	-0.0035435	-0.0020258

-0.065576	1.2479	-0.020884	-0.00094447	0.019061	-0.00051461
-0.19721	1.1611	-0.018320	0.0018929	0.00084709	0.023756
0.0035952	-0.068581	0.0012820	-0.0012721	0.00018303	0.00010464
0.0033872	-0.064460	0.0010787	4.8785e-005	-0.00098458	2.6581e-005
0.010186	-0.059973	0.00094630	-9.7776e-005	-4.3755e-005	-0.0012271
-0.059973	16.076	-0.016983	0.0072858	0.0028525	-0.0021709
0.00094630	-0.016983	0.037634	-0.0052152	-0.0024456	-0.0011912
-9.7776e-005	0.0072858	-0.0052152	0.026075	-0.0059161	-0.0028923
-4.3755e-005	0.0028525	-0.0024456	-0.0059161	0.027846	-0.0013566
-0.0012271	-0.0021709	-0.0011912	-0.0028923	-0.0013566	0.090673

Instrumentos 2, 3 e 4:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = b$, com a matriz A e vetor b dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - b = \begin{pmatrix} 0.20562 & -0.35055 & 0.61257 & 0.038449 & 0.017590 & 0.034740 \end{pmatrix}',$$

com:

$$\left[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A' \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 39.483 & -10.389 & -12.045 & 764.40 & -201.14 & -233.18 \\ -10.389 & 22.086 & -4.6255 & -201.14 & 427.58 & -89.549 \\ -12.045 & -4.6255 & 26.507 & -233.18 & -89.549 & 513.17 \\ 764.40 & -201.14 & -233.18 & 15138. & -3983.5 & -4618.1 \\ -201.14 & 427.58 & -89.549 & -3983.5 & 8469.4 & -1774.1 \\ -233.18 & -89.549 & 513.17 & -4618.1 & -1774.1 & 10165. \end{pmatrix},$$

que leva ao valor da estatística $W = 38.339$.

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 6 graus de liberdade, $\chi^2_{s=4}(0,05) = 12.59$, temos que $38.339 > 12.59$, então rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, que pelo menos um instrumento tem viés aditivo não nulo ou

pelo menos um deles tem vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 0.55617 & -0.96312 & 0.020859 & 0.052331 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta})A']^{-1} = \begin{pmatrix} 30.923 & 16.984 & 598.67 & 328.80 \\ 16.984 & 23.657 & 328.80 & 458.01 \\ 598.67 & 328.80 & 11857. & 6511.8 \\ 328.80 & 458.01 & 6511.8 & 9071.6 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 31.184$, que indica rejeição de H_0 , isto é, existe diferenças entre os vícios.

Instrumentos 2, 3 e 5:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.48211 & -0.064202 & 1.7838 & 0.024168 & 0.0027997 & -0.10040 \end{pmatrix}',$$

com:

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta})A']^{-1} = \begin{pmatrix} 35.522 & -3.0380 & -2.5332 & 687.70 & -58.815 & -49.043 \\ -3.0380 & 19.221 & -1.2283 & -58.815 & 372.12 & -23.781 \\ -2.5332 & -1.2283 & 18.211 & -49.043 & -23.781 & 352.56 \\ 687.70 & -58.815 & -49.043 & 13624. & -1167.9 & -973.81 \\ -58.815 & 372.12 & -23.781 & -1167.9 & 7373.9 & -472.11 \\ -49.043 & -23.781 & 352.56 & -973.81 & -472.11 & 6986.7 \end{pmatrix},$$

que leva ao valor da estatística $W = 35.277$.

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 6 graus de liberdade, $\chi_{s=4}^2(0,05) = 12.59$, temos que $35.277 > 12.59$, então rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, que pelo menos um instrumento tem viés aditivo não nulo ou pelo menos um deles tem vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha, \quad \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 0.54631 & -1.8480 & 0.021368 & 0.10320 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta})A']^{-1} = \begin{pmatrix} 20.409 & 9.8244 & 395.11 & 190.20 \\ 9.8244 & 14.693 & 190.20 & 284.46 \\ 395.11 & 190.20 & 7830.4 & 3769.5 \\ 190.20 & 284.46 & 3769.5 & 5637.6 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 23.825$, que indica rejeição de H_0 , isto é, existe diferenças entre os vícios.

Instrumentos 2, 4 e 5:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -11.048 & -9.4576 & -7.7428 & 0.61974 & 0.48541 & 0.39167 \end{pmatrix}',$$

com:

$$\left[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A' \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 35.197 & -22.885 & -13.224 & 681.42 & -443.06 & -256.01 \\ -22.885 & 24.895 & 0.051169 & -443.06 & 481.97 & 0.99063 \\ -13.224 & 0.051169 & 15.329 & -256.01 & 0.99063 & 296.77 \\ 681.42 & -443.06 & -256.01 & 13307. & -8652.7 & -4999.8 \\ -443.06 & 481.97 & 0.99063 & -8652.7 & 9416.5 & 16.195 \\ -256.01 & 0.99063 & 296.77 & -4999.8 & 16.195 & 5799.6 \end{pmatrix},$$

que leva ao valor da estatística $W = 44.208$.

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 6 graus de liberdade, $\chi_{s=4}^2(0,05) = 12.59$, temos que $44.208 > 12.59$, então rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, que pelo menos um instrumento tem viés aditivo não nulo ou pelo menos um deles tem vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} -1.5906 & -1.7148 & 0.13433 & 0.93739 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta})A']^{-1} = \begin{pmatrix} 34.945 & 12.629 & 676.54 & 244.49 \\ 12.629 & 13.922 & 244.49 & 269.53 \\ 676.54 & 244.49 & 13212. & 4774.5 \\ 244.49 & 269.53 & 4774.5 & 5267.2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 41.863$, que indica a rejeição de H_0 , isto é, existe diferenças entre os vícios.

Instrumentos 3, 4 e 5:

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que, temos para cada caso:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.66871 & 0.42590 & 1.6055 & 0.034024 & -0.025098 & -0.091196 \end{pmatrix}',$$

com:

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta})A']^{-1} = \begin{pmatrix} 28.982 & -13.834 & -5.5993 & 561.08 & -267.83 & -108.40 \\ -13.834 & 27.687 & -4.3104 & -267.83 & 536.01 & -83.449 \\ -5.5993 & -4.3104 & 14.900 & -108.40 & -83.449 & 288.47 \\ 561.08 & -267.83 & -108.40 & 11106. & -5301.2 & -2146.2 \\ -267.83 & 536.01 & -83.449 & -5301.2 & 10611. & -1652.5 \\ -108.40 & -83.449 & 288.47 & -2146.2 & -1652.5 & 5712.0 \end{pmatrix},$$

que leva ao valor da estatística $W = 2.1785$

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 5% com 6 graus de liberdade, $\chi^2_{s=4}(0,05) = 12.59$, temos que $2.1785 < 12.59$, então não rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos não têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, nenhum instrumento tem viés aditivo não nulo ou vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} -1.0946 & -1.1797 & 0.059122 & 0.066098 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta})A']^{-1} = \begin{pmatrix} 25.196 & 7.5781 & 487.79 & 146.71 \\ 7.5781 & 13.866 & 146.71 & 268.45 \\ 487.79 & 146.71 & 9655.9 & 2904.7 \\ 146.71 & 268.45 & 2904.7 & 5315.4 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística $W = 2.0389$, que indica não rejeição de H_0 , isto é, não existe diferenças entre os vícios.

3.6.1 Hipóteses de interesse

Para os dados das árvores podemos estar interessados em testar as seguintes hipóteses:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 1;$$

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta$$

Escrevendo as hipóteses H_{01} e H_{02} na forma $H_0 : A\theta = \mathbf{b}$ vamos utilizar a estatística de Wald mencionada na seção anterior.

Com o objetivo de testar a precisão dos aparelhos independente da influência pessoal do observador na medição de altura total das árvores, foi feito um ensaio comparativo utilizando 5 aparelhos operados por um único observador e fazendo os testes de TRV e Wald.

Os aparelhos usados foram: o hipsômetro de Blume Leiss, o de Haga, o de Weiss, a Prancheta dendrométrica e a Trena.

Foram medidas 10 árvores utilizando os 5 instrumentos e um único observador, totalizando um total de 50 dados.

3.6.2 Estimadores de máxima verossimilhança

Acontece que, para a implementação do teste, necessitamos dos estimadores de máxima verossimilhança, que foram calculados utilizando o programa Ox e o algoritmo EM, obtendo assim os seguintes estimadores:

Tabela 3.8 - Estimativa dos parâmetros para todos os instrumentos para os dados das árvores.

$\hat{\theta}$	$\hat{\mu}_x$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$
	19.360	0.23719	-0.28999	0.65732	1.6378	1.0368	1.0145
$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}_x^2$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$	$\hat{\sigma}_5^2$
0.96295	0.90714	8.7847	0.18167	0.15138	0.41184	0.32819	0.50903

Verificando a tabela acima, é possível verificar que o maior viés aditivo é apresentado pelo instrumento 5, bem como o maior viés multiplicativo.

Obtemos o seguinte resultado para a matriz de informação de Fisher:

$$\hat{I} =$$

1.1317	0.39657	0.14262	0.16988	0.10318	7.6775
0.39657	42.199	-8.5812	-10.222	-6.2083	816.97
0.14262	-8.5812	21.195	-3.6761	-2.2328	-166.13
0.16988	-10.222	-3.6761	26.091	-2.6596	-197.89
0.10318	-6.2083	-2.2328	-2.6596	18.030	-120.19
7.6775	816.97	-166.13	-197.89	-120.19	16186.
2.7612	-166.13	410.33	-71.169	-43.226	-3290.8
3.2890	-197.89	-71.169	505.12	-51.489	-3919.9
1.9976	-120.19	-43.226	-51.489	349.06	-2380.8
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.39427
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-5.3687
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	14.701
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-1.0751
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-1.5255
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.56274

2.7612	3.2890	1.9976	0.00000	0.00000	0.00000
-166.13	-197.89	-120.19	0.00000	0.00000	0.00000
410.33	-71.169	-43.226	0.00000	0.00000	0.00000
-71.169	505.12	-51.489	0.00000	0.00000	0.00000
-43.226	-51.489	349.06	0.00000	0.00000	0.00000
-3290.8	-3919.9	-2380.8	0.39427	-5.3687	14.701
8129.4	-1409.8	-856.24	0.14180	-1.9308	-2.9895
-1409.8	10007.	-1019.9	0.16890	-2.2999	-3.5609
-856.24	-1019.9	6915.3	0.10259	-1.3969	-2.1628
0.14180	0.16890	0.10259	0.064043	0.0050786	0.0054595
-1.9308	-2.2999	-1.3969	0.0050786	78.539	18.386
-2.9895	-3.5609	-2.1628	0.0054595	18.386	89.036
2.6555	-0.46058	-0.27974	0.0052266	2.3780	3.6819
-0.54862	3.8938	-0.39691	0.0047093	3.3741	5.2241
-0.20238	-0.24107	1.6343	0.0041792	1.2447	1.9271

0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000
-1.0751	-1.5255	-0.56274
2.6555	-0.54862	-0.20238
-0.46058	3.8938	-0.24107
-0.27974	-0.39691	1.6343
0.0052266	0.0047093	0.0041792
2.3780	3.3741	1.2447
3.6819	5.2241	1.9271
22.461	0.67569	0.24926
0.67569	34.037	0.35366
0.24926	0.35366	16.254

$\hat{I}^{-1} =$

0.89664	-0.018836	-0.018430	-0.017494	-0.016480	6.0412e-016
-0.018836	1.5380	0.84576	0.80279	0.75635	-0.077650
-0.018430	0.84576	2.6387	0.78468	0.73913	-0.042699
-0.017494	0.80279	0.78468	2.1894	0.70163	-0.040530
-0.016480	0.75635	0.73913	0.70163	2.8988	-0.038185
1.1146e-017	-0.077650	-0.042699	-0.040530	-0.038185	0.0040109
-2.1200e-018	-0.042699	-0.13320	-0.039615	-0.037315	0.0022055
-7.5305e-019	-0.040530	-0.039615	-0.11052	-0.035422	0.0020935

3.1416e-018	-0.038185	-0.037315	-0.035422	-0.14633	0.0019724
-6.7034e-017	0.74070	0.72153	0.68523	0.64513	-0.038260
1.1949e-018	-0.010809	-0.0087770	-0.0083780	-0.0077475	0.00055832
-2.2013e-018	0.011113	0.0012951	0.0011494	0.0013315	-0.00057400
1.0318e-018	-0.00079710	0.012964	0.00026299	0.00033529	4.1173e-005
7.9441e-019	-0.00069121	0.00034855	0.010329	0.00036922	3.5703e-005
1.8607e-019	-0.00063482	0.00015407	0.00012612	0.012658	3.2790e-005
9.0769e-017	6.4283e-016	-7.9611e-016	7.2202e-015	-5.5364e-017	8.5156e-017
-0.042699	-0.040530	-0.038185	0.74070	-0.010809	0.011113
-0.13320	-0.039615	-0.037315	0.72153	-0.0087770	0.0012951
-0.039615	-0.11052	-0.035422	0.68523	-0.0083780	0.0011494
-0.037315	-0.035422	-0.14633	0.64513	-0.0077475	0.0013315
0.0022055	0.0020935	0.0019724	-0.038260	0.00055832	-0.00057400
0.0068804	0.0020462	0.0019274	-0.037269	0.00045336	-6.6894e-005
0.0020462	0.0057089	0.0018296	-0.035394	0.00043275	-5.9369e-005
0.0019274	0.0018296	0.0075583	-0.033323	0.00040018	-6.8776e-005
-0.037269	-0.035394	-0.033323	16.080	-0.0068729	0.0034627
0.00045336	0.00043275	0.00040018	-0.0068729	0.013521	-0.0027338
-6.6894e-005	-5.9369e-005	-6.8776e-005	0.0034627	-0.0027338	0.012069
-0.00066964	-1.3584e-005	-1.7319e-005	-0.0020952	-0.00095991	-0.0016515
-1.8003e-005	-0.00053350	-1.9071e-005	-0.00065778	-0.00090611	-0.0015577
-7.9581e-006	-6.5146e-006	-0.00065380	-0.0029355	-0.00068391	-0.0011780
-1.6551e-017	-5.5932e-017	-2.5368e-017			
-0.00079710	-0.00069121	-0.00063482			
0.012964	0.00034855	0.00015407			
0.00026299	0.010329	0.00012612			
0.00033529	0.00036922	0.012658			
4.1173e-005	3.5703e-005	3.2790e-005			
-0.00066964	-1.8003e-005	-7.9581e-006			
-1.3584e-005	-0.00053350	-6.5146e-006			
-1.7319e-005	-1.9071e-005	-0.00065380			
-0.0020952	-0.00065778	-0.0029355			
-0.00095991	-0.00090611	-0.00068391			
-0.0016515	-0.0015577	-0.0011780			
0.044995	-0.00054760	-0.00041363			
-0.00054760	0.029785	-0.00039045			
-0.00041363	-0.00039045	0.061799			

No caso de testar a hipótese:

$$H_{01} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 1;$$

que pode ser escrita como $H_{01} : A\theta = \mathbf{b}$, com a matriz A e vetor $\mathbf{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que:

$$A\hat{\theta} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.23719 & -0.28999 & 0.65732 & 1.6378 & 0.036819 & 0.014462 & -0.037052 & -0.092861 \end{pmatrix}'$$

com:

$$\left[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}) A' \right]^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 42.060 & -8.6312 & -10.281 & -6.2444 & 814.28 & -167.10 & -199.04 & -120.89 \\ -8.6312 & 21.177 & -3.6975 & -2.2458 & -167.10 & 409.99 & -71.584 & -43.478 \\ -10.281 & -3.6975 & 26.066 & -2.6751 & -199.04 & -71.584 & 504.63 & -51.789 \\ -6.2444 & -2.2458 & -2.6751 & 18.020 & -120.89 & -43.478 & -51.789 & 348.87 \\ 814.28 & -167.10 & -199.04 & -120.89 & 16128. & -3309.9 & -3942.6 & -2394.7 \\ -167.10 & 409.99 & -71.584 & -43.478 & -3309.9 & 8121.8 & -1418.2 & -861.40 \\ -199.04 & -71.584 & 504.63 & -51.789 & -3942.6 & -1418.2 & 9996.6 & -1026.1 \\ -120.89 & -43.478 & -51.789 & 348.87 & -2394.7 & -861.40 & -1026.1 & 6911.3 \end{pmatrix}$$

que leva ao valor da estatística $W = 44.346$.

Comparando W com o valor crítico de qui-quadrado a um nível de significância de 1% com 8 graus de liberdade, $\chi_{s=8}^2(0,01) = 20.0902$, temos que $44.346 > 20.0902$, então rejeitamos a hipótese nula o que significa que os instrumentos têm vícios aditivos e multiplicativos, ou seja, que pelo menos um instrumento tem viés aditivo não nulo ou pelo menos um deles tem vício multiplicativo diferente de um.

Agora, passemos a verificar se esses vícios aditivos e multiplicativos são todos iguais entre eles. Para este caso a hipótese de interesse é dada por:

$$H_{02} : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta;$$

onde a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que, $A\theta - \mathbf{b} = 0$, de onde obtemos:

$$A\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 0.52718 & -0.94731 & -0.98046 & 0.022357 & 0.051314 & 0.055809 \end{pmatrix}' \text{ e}$$

$$[A\hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta})A']^{-1} = \begin{pmatrix} 34.867 & 23.439 & 9.1578 & 675.20 & 453.78 & 177.29 \\ 23.439 & 32.083 & 12.542 & 453.78 & 621.12 & 242.80 \\ 9.1578 & 12.542 & 16.839 & 177.29 & 242.80 & 326.00 \\ 675.20 & 453.78 & 177.29 & 13374. & 8988.3 & 3511.9 \\ 453.78 & 621.12 & 242.80 & 8988.3 & 12304. & 4809.1 \\ 177.29 & 242.80 & 326.00 & 3511.9 & 4809.1 & 6458.1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o valor da estatística e $W = 39.166$, que é maior que $\chi_6^2(0,05) = 12,59$, 0 que indica rejeição de H_0 , isto é, existe diferenças entre os vícios.

Resumindo temos a seguinte tabela:

Tabela 3.9 - Teste de Wald

instrumentos	H ₀₁	nível descritivo	H ₀₂	nível descritivo
2 e 3	31.407	0.000001	12.841	0.000814
2 e 4	4280.4	0.000000	22.809	0.000006
2 e 5	35.634	0.000000	19.448	0.000030
3 e 4	1.3254	0.170797	1.1710	0.212642
3 e 5	2.2277	0.182834	1.0479	0.296088
4 e 5	1.3361	0.171254	0.25703	0.439700
2, 3 e 4	38.339	0.000004	31.184	0.000001
2, 3 e 5	35.277	0.0000017	23.825	0.000040
2, 4 e 5	44.208	0.0000	41.863	0.0000
3, 4 e 5	2.1785	0.0998021	2.0389	0.183905
2, 3, 4 e 5	44.346	0.0000002	39.166	0.000003

Observando a tabela acima, foi possível verificar que para os dados das árvores foi observado que os instrumentos 3, 4 e 5 (Haga, Weise e Prancheta dendrométrica) possuem os mesmos vieses aditivos e multiplicativos, que por sua vez, esse viés é diferente do viés do instrumento 2 (Blume-Leiss).

3.7 Teste da razão de verossimilhanças

O teste foi feito utilizando os mesmos dados utilizados no teste de wald e consideramos as mesmas hipóteses mencionadas na seção 3.1 deste trabalho e obtemos os seguintes resultados para as 10 árvores e as dez combinações de 3 instrumentos, combinações de quatro a quatro instrumentos e por fim para os 5 instrumentos:

Nota-se na tabela 3.10 que os vieses aditivos e multiplicativos ao comparar entre os instrumentos 3, 4 e 5 não diferem entre si. Contudo, esses mesmos vieses diferem ao comparar qualquer um ou mais desses instrumentos com o 2 (Brume-Leiss).

Tabela 3.10 - Teste da razão da Verossimilhança

instrumentos	H ₀₁	nível de sig.	H ₀₂	nível de sig.
2 e 3	8.5268	0.030003	7.4412	0.012109
2 e 4	9.1925	0.023188	8.3820	0.007565
2 e 5	8.8166	0.026837	7.9780	0.009259
3 e 4	3.6779	0.146181	3.4312	0.089928
3 e 5	4.6171	0.11474	3.2149	0.1002
4 e 5	3.5328	0.150978	0.4780	0.393701
2, 3 e 4	N/C	N/C	N/C	N/C
2, 3 e 5	8.8120	0.0592285	8.5639	0.02
2, 4 e 5	N/C	N/C	N/C	N/C
3, 4 e 5	N/C	N/C	N/C	N/C
2, 3, 4 e 5	N/C	N/C	N/C	N/C

É importante salientar que foram rejeitadas as hipóteses nulas para todos os casos em que o nível de significância foi menor que 5%.

Também, para este teste é importante observar o seguinte:

Os casos indicados por N/C foram decorridos por problema de precisão do software ox no cálculo de certos determinantes quando seus valores ficam bem próximos de zero (por volta de 10^{-15}) não foram calculados corretamente.

Nota-se também na tabela acima que ao aumentar a quantidade de três instrumentos para quatro, nota-se um aumento no valor do teste de razão de verossimilhança nas duas hipóteses de interesse.

3.8 Resultados

De forma geral, para os dados das árvores foi observado que os instrumentos 3, 4 e 5 (Haga, Weise e Prancheta dendrométrica) possuem os mesmos vieses aditivos e multiplicativos, que por sua vez, esse viés é diferente do viés do instrumento 2 (Blume-Leiss).

Capítulo 4

Conclusões

4.1 Dados reais

Para dados reais, comparando os resultados obtidos com a utilização do teste de Wald com o teste da razão de verossimilhanças é possível verificar que eles são na maioria das vezes equivalentes.

Após o cálculo, utilizando combinações de três a três, quatro a quatro e utilizando todos os instrumentos com os dados das árvores, foi possível observar o seguinte:

- Problemas quanto a precisão no cálculo de certos determinantes, principalmente quando os valores estão bem próximos de zero (por volta de 10^{-15}) acarretando problemas no cálculo dos testes, principalmente no cálculo da estatística da razão da verossimilhanças, com o programa acusando NaN (não foi possível calcular no Ox)
- Em outros casos mais raros a estatística da razão é negativa, o que gerou problemas para a comparação entre os testes de razão de verossimilhanças e Wald para as duas hipóteses de interesse.
- Quando não se verificam os problemas discutidos anteriormente, nota-se valores bem próximos para os dois testes.

Contudo, mesmo para dados reais, o teste da razão pode apresentar dificuldades de cálculo, especialmente em situações onde a matriz $\hat{\Sigma}$ tem determinante bem próximo de zero. Isso foi notado várias vezes no caso dos dados das árvores.

4.2 Dados simulados

Quando observamos a tabela 4.1 que contém os dados que foram gerados, notamos o seguinte:

- 1 - Quando aumentamos o tamanho da amostra notamos:

- diminuição na proporção de rejeições da hipótese nula em ambas as hipóteses de interesse no teste de Wald.
- estabilidade na proporção de rejeições para o teste de razão de verossimilhanças, fazendo com que ele independa do tamanho da amostra e também da quantidade de simulações.
- diminuição na quantidade de "missings" em ambos os testes (Wald e razão de verossimilhança)s.
- diminuição na quantidade de valores negativos (representados como "neg" em ambos os testes).

2 - Quando aumentamos a quantidade de simulações notamos:

- diminuição na proporção de rejeições no teste de Wald.
- estabilidade na proporção de rejeições no teste de razão de verossimilhanças.
- estabilidade na quantidade de "missings" e de "neg", ao fixar o tamanho da amostra e aumentar apenas a quantidade de simulações em todos os testes e hipóteses de interesse.

4.3 De forma geral

Para ambos os testes observamos o seguinte:

- Maior estabilidade do teste de Wald em relação ao teste da razão da verossimilhanças, ocorrendo uma menor incidência de problemas computacionais durante o cálculo.
- Foram tentadas simulações para o caso $p = 4$ instrumentos, mas aconteceu que a proporção de rejeições era muito alta e também a quantidade de "miss" e de "neg" é muito elevada, e sendo assim, essa parte é inviável para os objetivos do nosso trabalho.

Para a continuidade desse trabalho pretendemos estudar o comportamento desses testes através de simulações para diversos modelos de calibração comparativa e estudos sobre o poder dos testes de interesse.

Apêndice A

Resultados importantes

Resultado A.1 Se $\mathbf{A}$ é uma matriz $p \times p$ e $\mathbf{x}$ é um vetor $p \times 1$, então:

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = tr(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = tr(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}').$$

Resultado A.2 Seja $\mathbf{C}$ uma matriz inversível.

Se $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \lambda\mathbf{b}\mathbf{b}'$, então

$$|A| = |C|(1 + C^{-1}b) \text{ e } A^{-1} = C^{-1} - \frac{\lambda C^{-1}b b' C^{-1}}{1 + b C^{-1}b}.$$

Mais detalhes são encontrados em Rao (1973).

Resultado A.3 DETERMINANTE DE UM PRODUTO - se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes quadradas de ordem n , então,

$$|AB| = |A||B|.$$

Demonstração, vide Ayres (1976)

Consequência de (A.3): Se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$, temos que $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

Resultado A.4 DERIVADA DE UM DETERMINANTE - Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem n , cujos elementos são funções diferenciáveis de uma variável x .

Então, a derivada, $\frac{d}{dx}|A|$, de $|A|$ em relação a x , é a soma de n determinantes obtidos substituindo os elementos da primeira linha (ou coluna) de $|A|$ por suas derivadas em relação a x .

Demonstração, vide Ayres (1976).

Resultado A.5 Seja A uma matriz diagonal, então essa matriz será inversível e terá como resultado uma outra matriz A^{-1} diagonal cujos elementos dessa diagonal terão valores inversos aos dos respectivos elementos da matriz diagonal A , ou seja, se

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_p^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix}.$$

Resultado A.6 Se A é uma matriz que pode ser particionada, de modo que:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$|A| = |A_{22}| |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|,$$

e

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix}.$$

onde:

$$\begin{aligned} A^{11} &= (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1}, & A^{12} &= -A_{11}^{-1} A_{12} A^{22}, \\ A_{21} &= -A^{22} A_{21} A_{11}^{-1} & A^{22} &= (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1}. \end{aligned}$$

Resultado A.7 - Sejam a e b constantes reais, I_n matriz identidade e J_n matriz com todos os elementos iguais a 1, então,

$$aI_n + bJ_n^{-1} = \frac{1}{a} \left(I_n - \frac{b}{a+b} J_n \right),$$

$$|aI_n + bJ_n| = a^{n-1} (a + nb), \quad a \neq 0, a \neq nb.$$

Resultado A.8 Em termos de derivadas parciais podemos destacar os seguintes resultados Kaplan (1985):

- Seja $Z = f(x, y)$ uma função definida num domínio D do plano xy e seja (x_1, y_1) um ponto de D . Então, a função $f(x_1, y_1)$ depende unicamente de x e é definida num intervalo que contém x_1 . Logo é possível que exista a sua derivada em relação

a x , no ponto $x = x_1$. Se essa derivada existir, seu valor será chamado de *derivada parcial* de $f(x, y)$ em relação a x no ponto (x_1, y_1) , e ela é designada por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1)$ ou por $\frac{\partial z}{\partial x}(x_1, y_1)$,

Defini-se analogamente a *derivada parcial* $\frac{\partial z}{\partial y}(x_1, y_1)$; desta vez, fixamos x , que igualmente a x_1 , e derivamos em relação a y . Com isso obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) = \frac{\partial z}{\partial y} \text{ em relação ao ponto } (x_1, y_1),$$

- **Derivada de uma função com respeito a um vetor:** Seja f uma função de n variáveis reais independentes $x_1, x_2, \dots, x_k$. A derivada da função f com respeito ao vetor X , onde $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \end{pmatrix}'$ é denotado por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e é definido por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix}',$$
- Seja ℓ uma função linear de k variáveis reais independentes definidas por $\ell(x) = \sum_{i=1}^k a_i x_i = a'x = x'a$, onde $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}'$ e os a_i são constantes. Então $\frac{\partial \ell}{\partial x} = a$,
- Seja q uma forma quadrática de k variáveis reais independentes $x_1, x_2, \dots, x_k$ definida por $q(x) = x'Ax$, onde $A = [a_{ij}]$ é uma matriz simétrica $k \times k$ de constantes.

$$\text{Então } \frac{\partial q}{\partial x} = 2Ax,$$

- **Derivada de uma função com respeito a uma matriz.** Seja f uma função de uma matriz X de dimensão $m \times n$ definida por:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \text{ e assume que cada derivada parcial } \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} \text{ existe. Então}$$

a derivada de f com respeito a matriz X é denotada por $\frac{\partial f}{\partial X}$ e definida por $\left[\frac{\partial f}{\partial X_{ij}} \right]$.

- Seja a um vetor $k \times 1$ de constantes e seja X uma matriz simétrica $k \times k$ de variáveis reais independentes e define uma função u por: $u(x) = a'xa$; então $\frac{\partial u}{\partial x} = 2aa' - D_{aa'}$, onde $D_{aa'}$ é definida como uma matriz diagonal $k \times k$ do qual o i -ésimo elemento dessa diagonal é igual a diagonal do elemento da matriz aa' ,
- Seja X uma matriz simétrica não singular $k \times k$ de variáveis reais independentes, então $\frac{\partial(\log|X|)}{\partial X} = 2X^{-1} - D_{X^{-1}}$, onde $D_{X^{-1}}$ é uma matriz diagonal com o i -ésimo elemento da diagonal é igual ao i -ésimo elemento da diagonal X^{-1} ,

- Seja X uma matriz $k \times k$ de variáveis reais independentes; então $\frac{\partial[\text{tr}(X)]}{\partial X} = I$.

Resultado A.9 Seja $f_x(x/\theta) = h(x) = h(x) \exp \sum_{i=1}^p T_i(x) c_i(\theta) + d(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$ e todo x pertencente ao suporte da distribuição de X e seja C o interior do conjunto onde $(c_1(\theta), c_2(\theta), \dots, c_p(\theta))'$ está definido para todo $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$. Se as equações

$$E_\theta(T_i(X)) = T_i(X),$$

para $i = 1, 2, \dots, p$, tem solução $\hat{\theta}(X) = (\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X), \dots, \hat{\theta}_p(X))'$, para o qual $\hat{\theta}(X) = (c_1\hat{\theta}(X), c_2\hat{\theta}(X), \dots, c_p\hat{\theta}(X))' \in C$, então $\hat{\theta}(X)$ é o único estimador de máxima verossimilhança do parâmetro θ .

Demonstração: Veja Bickel e Doksum (1976).

Resultado A.10 Seja $y_k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{pk})'$ com distribuição normal multivariada, com vetor de médias $\mu_t = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ e matriz de covariância Σ , onde os elementos de Σ são do tipo σ_{ij} . Seja uma amostra aleatória de vetores independentes $Y_k, k = 1, \dots, n$, onde:

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ik}$$

e $S_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{ik} - \bar{Y}_i)(y_{jk} - \bar{Y}_j)$, com $i, j = 1, \dots, p$. Então,

- $E(\bar{Y}_i \bar{Y}_j) = \frac{1}{n} \sigma_{ij} + \mu_i \mu_j$,
- $Cov(S_{ij}, S_{km}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ik} \sigma_{jm} + \sigma_{im} \sigma_{jk})$,
- $Var(S_{ij}) = \frac{1}{n} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} + \sigma_{ij}^2)$.

Prova: Veja Fuller (1987).

Resultado A.11 Principais propriedades de somatórios e produtórios.

- $\sum_{i=k}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=k}^n a_i$,
- $\sum_{i=k}^n \alpha = (n - k + 1) \alpha$,

- $\sum_{i=k}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=k}^n a_i + \sum_{i=k}^n b_i,$
- $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij},$
- $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right),$
- $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right),$
- $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_i b_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_i b_j \right),$
- $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j,$
- $\prod_{i=1}^n k a_i = k^n \prod_{i=1}^n a_i,$
- $\prod_{i=k}^n \alpha = \alpha^{n-k+1},$
- $\prod_{i=k}^n a_i b_i = \prod_{i=k}^n a_i \prod_{i=k}^n b_i,$
- $\prod_{i,j=1}^n a_{ij} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n a_{ij},$
- $\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n a_{ij} \right) = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^n a_{ij} \right),$
- $\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m a_i b_j \right) = \prod_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n a_i b_j \right).$

Mais detalhes em Neter et al (1994) e Neter, Wasserman e Whitmore (1993).

Resultado A.12 Seja A um vetor linha dimensão $1 \times p$, Σ uma matriz dimensão $p \times p$ e B um vetor coluna dimensão $p \times 1$.

Então:

$$A\Sigma B = B^t\Sigma A^t.$$

Mais detalhes em Graybill, (1983).

obs.

- $|A|$ significa determinante da matriz A.
- Os resultados descritos neste apêndice, foram utilizados nos apêndices B, C e D.

Apêndice B

Função de verossimilhança para os dados observados

Obs.: Para este apêndice e o próximo, o símbolo "′" significa derivada e o símbolo "t" como expoente significa matriz transposta.

Assim, para os dados observados a função de verossimilhança pode ser escrita a partir da função distribuição normal p-variada, com função densidade dada por:

$$f(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{Y}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{Y}-\mu)}, \quad (\text{B.1})$$

com vetor de médias e matriz de covariâncias dada, respectivamente por:

$$\mu = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \mu_x \\ \vdots \\ \alpha_p + \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \quad e \quad \Sigma = \sigma_x^2 \beta \beta' + \Psi,$$

onde $\psi = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$.

Assim, para o caso dos dados observados obtemos o seguinte logaritmo da função de verossimilhança:

$$\begin{aligned} \ln(L(\theta|y_1, \dots, y_n)) &= -n \ln \left((2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu), \\ &= -n \left[\frac{p}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln |\sigma_x^2 \beta \beta' + \psi| \right] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\text{tr} \Sigma^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mu) (\mathbf{Y}_j - \mu)' \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Seja $I = \frac{1}{2} \ln |\sigma_x^2 \beta \beta' + \psi|$, $II = \Sigma^{-1}$ e $III = (\mathbf{Y}_i - \mu) (\mathbf{Y}_i - \mu)'$.

Temos:

$I = \frac{1}{2} \ln |\sigma_x^2 \beta \beta' + \psi|$, $I = \frac{1}{2} \ln |\psi| |(\sigma_x^2 \beta' \psi^{-1} \beta + 1)|$, ou seja,

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right) \left| \left(\sigma_x^2 \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + 1 \right) \right|,$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right) \left| \left(\sigma_x^2 \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & \frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + 1 \right) \right|,$$

que pode ser escrito como:

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \ln (\sigma_i^2) \right) + \ln \left(\sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_i^2}{\sigma_i^2} + 1 \right).$$

Note também que:

$$II = \Sigma^{-1} = \psi^{-1} - \frac{\sigma_x^2 \psi^{-1} \beta \beta' \psi^{-1}}{1 + \beta' \psi^{-1} \beta},$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} - \frac{\sigma_x^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix}}{1 + \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} - \frac{\sigma_x^2 \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^2}{(\sigma_1^2)^2} & \frac{\beta_2 \beta_1}{\sigma_2^2 \sigma_1^2} & \cdots & \frac{\beta_p \beta_1}{\sigma_p^2 \sigma_1^2} \\ \frac{\beta_1 \beta_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} & \frac{\beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & \frac{\beta_p \beta_2}{\sigma_p^2 \sigma_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_1 \beta_p}{\sigma_1^2 \sigma_p^2} & \frac{\beta_2 \beta_p}{\sigma_2^2 \sigma_p^2} & \cdots & \frac{\beta_p^2}{(\sigma_p^2)^2} \end{pmatrix}}{1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}},$$

de modo que

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta_1^2}{(\sigma_1^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & -\frac{\sigma_x^2 \beta_2 \beta_1}{\sigma_2^2 \sigma_1^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & -\frac{\sigma_x^2 \beta_p \beta_1}{\sigma_p^2 \sigma_1^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \\ -\frac{\sigma_x^2 \beta_1 \beta_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & -\frac{\sigma_x^2 \beta_p \beta_2}{\sigma_p^2 \sigma_2^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\sigma_x^2 \beta_1 \beta_p}{\sigma_1^2 \sigma_p^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & -\frac{\sigma_x^2 \beta_2 \beta_p}{\sigma_2^2 \sigma_p^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta_p^2}{(\sigma_p^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \end{pmatrix}.$$

$$III = (\mathbf{Y}_j - \mu) (\mathbf{Y}_j - \mu)',$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x & Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x & \cdots & Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)^2 & (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x) & \cdots & (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x) (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x) \\ (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) & (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)^2 & \cdots & (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x) (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x) & (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x) & \cdots & (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando II por III temos:

$$\begin{aligned} II.III &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta_1^2}{(\sigma_1^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & -\frac{\sigma_x^2 \beta_2 \beta_1}{\sigma_2^2 \sigma_1^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & -\frac{\sigma_x^2 \beta_p \beta_1}{\sigma_p^2 \sigma_1^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \\ -\frac{\sigma_x^2 \beta_1 \beta_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & -\frac{\sigma_x^2 \beta_p \beta_2}{\sigma_p^2 \sigma_2^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\sigma_x^2 \beta_1 \beta_p}{\sigma_1^2 \sigma_p^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & -\frac{\sigma_x^2 \beta_2 \beta_p}{\sigma_2^2 \sigma_p^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta_p^2}{(\sigma_p^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x & Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x & \cdots & Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{\sigma_1^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_1 \beta_i (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \\ \frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_2 \beta_i (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \\ \vdots \\ \frac{(Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)}{\sigma_p^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_p \beta_i (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)}{(\sigma_p^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x & Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x & \cdots & Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} N \left(\frac{\frac{N}{\sigma_1^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_1 \beta_i N}{(\sigma_1^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) & LN \sigma_1^2 - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_1 \beta_i N}{(\sigma_1^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & M \left(\frac{\frac{N}{\sigma_1^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_1 \beta_i N}{(\sigma_1^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) \\ N \left(\frac{\frac{L}{\sigma_2^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_2 \beta_i L}{(\sigma_2^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) & L \left(\frac{\frac{L}{\sigma_2^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_2 \beta_i L}{(\sigma_2^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) & \cdots & M \left(\frac{\frac{L}{\sigma_2^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_2 \beta_i L}{(\sigma_2^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N \left(\frac{\frac{M}{\sigma_p^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_p \beta_i M}{(\sigma_p^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) & L \left(\frac{\frac{M}{\sigma_p^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_p \beta_i M}{(\sigma_p^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) & \cdots & M \left(\frac{\frac{M}{\sigma_p^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_p \beta_i M}{(\sigma_p^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) \end{pmatrix},$$

onde $N = (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)$, $L = (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)$ e $M = (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)$.

Além disso, tr(II.III) é dado por:

$$\begin{aligned}
& (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x) \left(\frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{\sigma_1^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_1 \beta_i (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) + \\
& (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) \left(\frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_2 \beta_i (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right) + \cdots + \\
& (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x) \left(\frac{(Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)}{\sigma_p^2} - \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_p \beta_i (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)}{(\sigma_p^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)^2}{\sigma_1^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta_1 (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)^2}{(\sigma_1^2)^2} \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i}{\left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} + \\
&\frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)^2}{\sigma_2^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta_2 (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)^2}{(\sigma_2^2)^2} \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i}{\left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} + \dots + \\
&\frac{(Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)^2}{\sigma_p^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta_p (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)^2}{(\sigma_p^2)^2} \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i}{\left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)}, \\
&\sum_{i=1}^p \left[\frac{(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)^2}{\sigma_i^2} \right] - \sum_{i=1}^p \left[\frac{\sigma_x^2 \beta_i (Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)^2}{(\sigma_i^2)^2} \right] \sum_{i=1}^p \left[\frac{\beta_i}{\left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right],
\end{aligned}$$

Agora, para $\ln L(\theta)$ temos:

$$\begin{aligned}
\ln(\theta) &= -n \left[\ln(2\pi) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \ln(\sigma_i^2) \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_i^2}{\sigma_i^2} + 1 \right) \right] \\
&- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^p \left[\frac{(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)^2}{\sigma_i^2} \right] - \sum_{i=1}^p \left[\frac{\sigma_x^2 \beta_i (Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)^2}{(\sigma_i^2)^2} \right] \sum_{i=1}^p \left[\frac{\beta_i}{\left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right] \right],
\end{aligned}$$

que fica:

$$\begin{aligned}
\ln(L(\theta)) &= -n \left[\ln(2\pi) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \ln(\sigma_i^2) \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_i^2}{\sigma_i^2} + 1 \right) \right] \\
&- \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^p \left[\frac{(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)^2}{\sigma_i^2} \right] - \sum_{i=1}^p \left[\frac{\sigma_x^2 \beta_i (Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)^2}{(\sigma_i^2)^2} \right] \frac{\sum_{i=1}^p \beta_i}{\left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)} \right]. \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

Apêndice C

Teste da razão de verossimilhanças

Consideremos a seguir a obtenção do teste da razão de verossimilhança para verificar os seguintes casos:

- caso 1 - verificar se os p instrumentos medem a característica sem vício.
- caso 2 - verificar se os vieses são iguais para os mesmos p instrumentos.

Para que seja possível fazer esse teste, foi considerada uma população p-variada, considerando as condições e suposições estabelecidas no capítulo 2.1 e apêndice B.

Para efeito de notação, foi considerado 01 para a função de verossimilhança da primeira hipótese de interesse e 02 para a função de verossimilhança para a segunda hipótese de interesse.

C.1 Função de verossimilhança para os dados observados.

C.1.1 Modelo sem restrição

Para os dados observados, temos a seguinte função de verossimilhança.

$$L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n (|\Sigma|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Y_j - \mu_Y)' \Sigma^{-1} (Y_j - \mu_Y) \right] \quad (C.1)$$

utilizando o resultado A.1 do apêndice A podemos expressar como:

$$L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n (|\Sigma|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \text{tr} \left[\Sigma^{-1} (Y_j - \mu_Y) (Y_j - \mu_Y)' \right] \right\},$$

$$L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n (|\Sigma|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} tr \left[\Sigma^{-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \mu_Y) (Y_j - \mu_Y)' \right] \right\},$$

$$L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^n (|\Sigma|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} tr \left[\Sigma^{-1} \sum_{j=1}^n \left[\begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x & \cdots & Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}' \right] \right] \right\},$$

onde Σ e Σ^{-1} são dada no apêndice B.

C.1.2 Função de verossimilhança para a primeira hipótese de interesse

Para a hipótese; $H_{01} : \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0; \beta_2 = \cdots = \beta_p = 1$ temos a seguinte função de verossimilhança:

$$L(\theta_{01}) = \frac{1}{(2\pi)^n (|\Sigma_{01}|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} tr \left[\Sigma_{01}^{-1} \sum_{j=1}^n \left[\begin{pmatrix} Y_{1j} - \mu_{x_{01}} \\ \vdots \\ Y_{pj} - \mu_{x_{01}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1j} - \mu_{x_{01}} & \cdots & Y_{pj} - \mu_{x_{01}} \end{pmatrix}' \right] \right] \right\},$$

com:

$$\Sigma_{01} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_1^2 & \sigma_x^2 & \sigma_x^2 & \cdots & \sigma_x^2 \\ \sigma_x^2 & \sigma_x^2 + \sigma_2^2 & \sigma_x^2 & \cdots & \sigma_x^2 \\ \sigma_x^2 & \sigma_x^2 & \sigma_x^2 + \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_x^2 & \sigma_x^2 & \sigma_x^2 & \cdots & \sigma_x^2 + \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\Sigma_{01}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_1^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} & -\frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2 \sigma_1^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} & \cdots & -\frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2 \sigma_1^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} \\ -\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} & \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_2^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} & \cdots & -\frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2 \sigma_2^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2 \sigma_p^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} & -\frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2 \sigma_p^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} - \frac{\sigma_x^2}{(\sigma_p^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i^2} \right)} \end{pmatrix}.$$

C.1.3 Razão de verossimilhanças para a primeira hipótese de interesse

Como visto anteriormente, a estatística da razão de verossimilhanças é dada por:

$$\lambda_1 = \frac{L(\hat{\theta}_{01}; X)}{L(\hat{\theta}; X)},$$

que resulta em:

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{(2\pi)^n (|\hat{\Sigma}_{01}|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} tr \left[\hat{\Sigma}_{01}^{-1} \sum_{j=1}^n \left[\begin{pmatrix} Y_{1j} - \hat{\mu}_{x_{01}} \\ \vdots \\ Y_{pj} - \hat{\mu}_{x_{01}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1j} - \hat{\mu}_{x_{01}} & \cdots & Y_{pj} - \hat{\mu}_{x_{01}} \end{pmatrix}' \right] \right] \right\}}{\frac{1}{(2\pi)^n (|\hat{\Sigma}|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} tr \left[\hat{\Sigma}^{-1} \sum_{j=1}^n \left[\begin{pmatrix} Y_{1j} - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 \hat{\mu}_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \hat{\alpha}_p - \hat{\beta}_p \hat{\mu}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1j} - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 \hat{\mu}_x & \cdots & Y_{pj} - \hat{\alpha}_p - \hat{\beta}_p \hat{\mu}_x \end{pmatrix}' \right] \right] \right\}}.$$

C.1.4 Função de verossimilhança para a segunda hipótese de interesse

Para a hipótese; $H_{02} : \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = \alpha; \beta_2 = \cdots = \beta_p = \beta$ temos a seguinte função de verossimilhança:

$$L(\theta_{02}) = \frac{1}{(2\pi)^n (|\Sigma_{02}|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} tr \left[\Sigma_{02}^{-1} \sum_{j=1}^n \left[\begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_{02} - \beta_{02} \mu_{x_{02}} \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_{02} - \beta_{02} \mu_{x_{02}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_{02} - \beta_{02} \mu_{x_{02}} & \cdots & Y_{pj} - \alpha_{02} - \beta_{02} \mu_{x_{02}} \end{pmatrix}' \right] \right] \right\},$$

com:

$$\Sigma_{02} = \begin{pmatrix} \beta^2 \sigma_x^2 + \sigma_1^2 & \beta^2 \sigma_x^2 & \beta^2 \sigma_x^2 & \cdots & \beta^2 \sigma_x^2 \\ \beta^2 \sigma_x^2 & \beta^2 \sigma_x^2 + \sigma_2^2 & \beta^2 \sigma_x^2 & \cdots & \beta^2 \sigma_x^2 \\ \beta^2 \sigma_x^2 & \beta^2 \sigma_x^2 & \beta^2 \sigma_x^2 + \sigma_3^2 & \cdots & \beta^2 \sigma_x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^2 \sigma_x^2 & \beta^2 \sigma_x^2 & \beta^2 \sigma_x^2 & \cdots & \beta^2 \sigma_x^2 + \sigma_p^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\Sigma_{02}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{\hat{\sigma}_x^2 \beta^2}{(\sigma_1^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta^2}{\sigma_i^2}\right)} & -\frac{\sigma_x^2 \beta^2}{\sigma_2^2 \sigma_1^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & -\frac{\sigma_x^2 \beta^2}{\sigma_p^2 \sigma_1^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta^2}{\sigma_i^2}\right)} \\ -\frac{\sigma_x^2 \beta^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta^2}{\sigma_i^2}\right)} & \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta^2}{(\sigma_2^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & -\frac{\sigma_x^2 \beta^2}{\sigma_p^2 \sigma_2^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta^2}{\sigma_i^2}\right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\sigma_x^2 \beta^2}{\sigma_1^2 \sigma_p^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta^2}{\sigma_i^2}\right)} & -\frac{\sigma_x^2 \beta^2}{\sigma_2^2 \sigma_p^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta^2}{\sigma_i^2}\right)} & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} - \frac{\sigma_x^2 \beta^2}{(\sigma_p^2)^2 \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta^2}{\sigma_i^2}\right)} \end{pmatrix}.$$

C.1.5 Razão de verossimilhanças para a segunda hipótese de interesse

Neste caso a estatística é dada por:

$$\lambda_2 = \frac{L(\hat{\theta}_{02}; X)}{L(\hat{\theta}; X)},$$

que resulta em:

$$\lambda_2 = \frac{\frac{1}{(2\pi)^n (|\hat{\Sigma}_{02}|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} tr \left[\hat{\Sigma}_{02}^{-1} \sum_{j=1}^n \left[\begin{pmatrix} Y_{1j} - \hat{\alpha}_{02} - \hat{\beta}_{02} \hat{\mu}_{x_{02}} \\ \vdots \\ Y_{pj} - \hat{\alpha}_{02} - \hat{\beta}_{02} \hat{\mu}_{x_{02}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1j} - \hat{\alpha}_{02} - \hat{\beta}_{02} \hat{\mu}_{x_{02}} & \cdots & Y_{pj} - \hat{\alpha}_{02} - \hat{\beta}_{02} \hat{\mu}_{x_{02}} \end{pmatrix}' \right] \right\}}{\frac{1}{(2\pi)^n (|\hat{\Sigma}|)^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} tr \left[\hat{\Sigma}^{-1} \sum_{j=1}^n \left[\begin{pmatrix} Y_{1j} - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 \hat{\mu}_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \hat{\alpha}_p - \hat{\beta}_p \hat{\mu}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1j} - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1 \hat{\mu}_x & \cdots & Y_{pj} - \hat{\alpha}_p - \hat{\beta}_p \hat{\mu}_x \end{pmatrix}' \right] \right\}}.$$

O cálculo dos estimadores $\hat{\theta}_{02}$ e $\hat{\theta}$ obtidos pela verossimilhança maximizada deve ser feito utilizando procedimentos computacionais.

Apêndice D

Função de verossimilhança completa

Agora, para os dados completos (incorpora as variáveis não observadas), a função de verossimilhança pode ser escrita a partir de uma distribuição normal *p variada* com função densidade dada por:

$$f(\theta/Z) = \frac{1}{2\pi |\Sigma_Z|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (Z - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z - \mu_Z) \right], \quad (\text{D.1})$$

com vetor de médias e matriz de covariâncias dadas, respectivamente, por:

$$\mu_Z = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \alpha_1 + \beta_1 \mu_x \\ \vdots \\ \alpha_p + \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \quad e \quad \Sigma_Z = \sigma_x^2 \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ \beta & \beta \beta' + A \end{pmatrix},$$

com $A = \text{diag} \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_x^2}, \dots, \frac{\sigma_p^2}{\sigma_x^2} \right)$.

Assim, para o caso dos dados completos obtemos o seguinte logaritmo da função de verossimilhança:

$$\begin{aligned} \ln(L(\theta/Z)) &= -n \ln \left(2\pi |\Sigma_Z|^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) (Z_j - \mu_Z)' \right], \\ &= -n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(|\Sigma_Z|) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \text{tr} \left[\Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) (Z_j - \mu_Z)' \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Seja $I = |\Sigma_Z|$, $II = \Sigma_Z^{-1}$ e $III = (Z_j - \mu_Z)(Z_j - \mu_Z)'$, de modo que:

$$I = |\Sigma_Z| = |\sigma_x^2| \cdot \begin{vmatrix} 1 & \beta' \\ \beta & \beta\beta' + A \end{vmatrix} = \sigma_x^2 |\beta\beta' + A - \beta\beta'| = \sigma_x^2 |A| = \sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2,$$

$$II = \Sigma_Z^{-1} = \left(\sigma_x^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ \beta & \beta\beta' + A \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2} \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ \beta & \beta\beta' + A \end{pmatrix}^{-1}.$$

Seja $A_{11} = 1$, $A_{12} = \beta'$, $A_{21} = \beta$ e $A_{22} = \beta\beta' + A$:

$$A^{11} = (\sigma_x^2)^{-1} [1 - \beta'(\beta\beta' + A)^{-1}\beta]^{-1},$$

$$= (\sigma_x^2)^{-1} \left[1 - \beta' \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}\beta\beta'A^{-1}}{1 + \beta'A^{-1}\beta} \right) \beta \right]^{-1},$$

$$= (\sigma_x^2)^{-1} \left[1 - \beta' \left(\begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \beta\beta' \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix}}{1 + \beta' \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \beta} \right) \beta \right]^{-1},$$

que resolvendo obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} &= (\sigma_x^2)^{-1} \left[1 - \beta' \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} - \frac{(\sigma_x^2 \beta_1)^2}{K(\sigma_1^2)^2} & -\frac{\sigma_x^2 \beta_2}{\sigma_2^2} \frac{\sigma_x^2 \beta_1}{K\sigma_1^2} & \dots & -\frac{\sigma_x^2 \beta_p}{\sigma_p^2} \frac{\sigma_x^2 \beta_1}{K\sigma_1^2} \\ -\frac{\sigma_x^2 \beta_1}{\sigma_1^2} \frac{\sigma_x^2 \beta_2}{K\sigma_2^2} & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} - \frac{(\sigma_x^2 \beta_2)^2}{K(\sigma_2^2)^2} & \dots & -\frac{\sigma_x^2 \beta_p}{\sigma_p^2} \frac{\sigma_x^2 \beta_2}{K\sigma_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\sigma_x^2 \beta_1}{\sigma_1^2} \frac{\sigma_x^2 \beta_p}{K\sigma_p^2} & -\frac{\sigma_x^2 \beta_2}{\sigma_2^2} \frac{\sigma_x^2 \beta_p}{K\sigma_p^2} & \dots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} - \frac{(\sigma_x^2 \beta_p)^2}{K(\sigma_p^2)^2} \end{pmatrix} \beta \right]^{-1}, \\ &= (\sigma_x^2)^{-1} \left[1 - \left(\frac{\sigma_x^2 \beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\beta_1}{K\sigma_1^2} \sum_{i=1}^p \frac{(\sigma_x^2 \beta_i)^2}{\sigma_i^2} \quad \frac{\sigma_x^2 \beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\beta_2}{K\sigma_2^2} \sum_{i=1}^p \frac{(\sigma_x^2 \beta_i)^2}{\sigma_i^2} \quad \dots \quad \frac{\sigma_x^2 \beta_p}{\sigma_p^2} - \frac{\beta_p}{K\sigma_p^2} \sum_{i=1}^p \frac{(\sigma_x^2 \beta_i)^2}{\sigma_i^2} \right) \beta \right]^{-1}, \\ &= (\sigma_x^2)^{-1} \left[1 - \left(\sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 (\beta_i)^2}{\sigma_i^2} - \left(\frac{(\beta_1)^2}{K\sigma_1^2} + \frac{(\beta_2)^2}{K\sigma_2^2} + \dots + \frac{(\beta_p)^2}{K\sigma_p^2} \right) \sum_{i=1}^p \frac{(\sigma_x^2 \beta_i)^2}{\sigma_i^2} \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
A^{11} &= (\sigma_x^2)^{-1} \left[1 - \left(\sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 (\beta_i)^2}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^p \frac{(\beta_i)^2}{K \sigma_i^2} \sum_{i=1}^p \frac{(\sigma_x^2 \beta_i)^2}{\sigma_i^2} \right) \right]^{-1}, \\
&= (\sigma_x^2)^{-1} \left[1 - \left(K - 1 - \frac{(K-1)}{K} (K-1) \right) \right]^{-1} = (\sigma_x^2)^{-1} \left[1 - \left(K - 1 - \frac{(K-1)^2}{K} \right) \right]^{-1},
\end{aligned}$$

que resolvendo, chegamos em:

$$A^{11} = (\sigma_x^2)^{-1} \left[\frac{1}{K} \right]^{-1} = (\sigma_x^2)^{-1} K = \frac{K}{\sigma_x^2}.$$

$$A^{22} = (\sigma_x^2)^{-1} \left(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \right)^{-1},$$

$$= (\sigma_x^2)^{-1} (\beta \beta' + A - \beta.1.\beta')^{-1} = (\sigma_x^2)^{-1} (A)^{-1} =$$

$$(\sigma_x^2)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix},$$

$$A^{22} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix}.$$

$$A^{21} = -(\sigma_x^2)^{-1} A^{22} A_{21} A_{11}^{-1} = -(\sigma_x^2)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \beta.1 = - \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} \\ \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \end{pmatrix}.$$

$$A^{12} = -(\sigma_x^2)^{-1} A_{11}^{-1} A_{12} A^{22} = -(\sigma_x^2)^{-1} 1\beta' \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & \frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \end{pmatrix}.$$

onde $K = 1 + \sigma_x^2 \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}$ e é importante salientar que esse mesmo valor de K é utilizado em todo o apêndice D e também em todo o apêndice E.

Então,

$$\Sigma_z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{K}{\sigma_x^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix}.$$

$$III = (Z_j - \mu_Z) (Z_j - \mu_Z)',$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x & Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x & Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x & \cdots & Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}', \\
&= \begin{pmatrix} A^2 & BA & CA & \cdots & DA \\ BA & B^2 & CB & \cdots & DB \\ CA & CB & C^2 & \cdots & DC \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ DA & DB & CD & \cdots & D^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para obter o traço do produto de II por III, primeiramente calculamos os valores das caselas $c_{11}, c_{22}, \dots, c_{pp}$ do produto de II por III que obtemos:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \left(\frac{K}{\sigma_x^2} A^2 - \frac{\beta_1 BA}{\sigma_1^2} - \frac{\beta_2 CA}{\sigma_2^2} \dots - \frac{\beta_p DA}{\sigma_p^2} \right), \\
c_{11} &= \frac{KA^2}{(\sigma_x^2)} - \frac{\beta_1 BA}{\sigma_1^2} - \frac{\beta_2 CA}{\sigma_2^2} \dots - \frac{\beta_p DA}{\sigma_p^2}, \\
c_{11} &= \frac{K(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)} - \frac{\beta_1(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)(x_j - \mu_x)}{\sigma_1^2} - \frac{\beta_2(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)(x_j - \mu_x)}{\sigma_2^2} \dots - \frac{\beta_p(Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)(x_j - \mu_x)}{\sigma_p^2}, \\
c_{11} &= \frac{K(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)} - \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)(x_j - \mu_x)}{\sigma_i^2} = \frac{K(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)} - (x_j - \mu_x) \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)}{\sigma_i^2}, \\
c_{22} &= -\frac{\beta_1 BA}{\sigma_1^2} + \frac{B^2}{\sigma_1^2} = -\frac{\beta_1(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)((x_j - \mu_x))}{\sigma_1^2} + \frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)^2}{\sigma_1^2}, \\
c_{33} &= -\frac{\beta_2 CA}{\sigma_2^2} + \frac{C^2}{\sigma_2^2} = -\frac{\beta_2(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)((x_j - \mu_x))}{\sigma_2^2} + \frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)^2}{\sigma_2^2}, \\
c_{p+1,p+1} &= -\frac{\beta_p DA}{\sigma_p^2} + \frac{D^2}{\sigma_p^2} = -\frac{\beta_p(Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)((x_j - \mu_x))}{\sigma_p^2} + \frac{(Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)^2}{\sigma_p^2},
\end{aligned}$$

Em seguida temos:

$$tr(II.III) = c_{11} + c_{22} + c_{33} + \dots + c_{(p+1)(p+1)},$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)} - (x_j - \mu_x) \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)}{\sigma_i^2} - \frac{\beta_1(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)(x_j - \mu_x)}{\sigma_1^2} + \frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)^2}{\sigma_x^2 \sigma_1^2} + \frac{\beta_2(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)(x_j - \mu_x)}{\sigma_2^2} + \\
&\quad \frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)^2}{\sigma_x^2 \sigma_2^2} - \frac{\beta_p(Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)(x_j - \mu_x)}{\sigma_p^2} + \frac{(Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x)^2}{\sigma_x^2 \sigma_p^2}, \\
&= \frac{K(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)} - (x_j - \mu_x) \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)}{\sigma_i^2} - (x_j - \mu_x) \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)}{\sigma_i^2} + \sum_{i=1}^p \frac{(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)^2}{\sigma_i^2}, \\
&= \frac{K(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)} - 2(x_j - \mu_x) \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)}{\sigma_i^2} + \sum_{i=1}^p \frac{(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)^2}{\sigma_i^2}.
\end{aligned}$$

Agora, temos:

$$\ln(L(\theta/Z)) =$$

$$= -n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{k(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)} - 2(x_j - \mu_x) \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i (Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)}{\sigma_i^2} + \sum_{i=1}^p \frac{(Y_{ij} - \alpha_i - \beta_i \mu_x)^2}{\sigma_i^2} \right]. \quad (\text{D.3})$$

onde:

$$A = (x_j - \mu_x), \quad B = (Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x), \quad C = (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x),$$

$$D = (Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x), \quad \text{e } K = 1 + \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_x^2 \beta_i^2}{\sigma_i^2}.$$

Passemos agora a calcular os estimadores para os parâmetros utilizados no algoritmo EM.

Passemos a calcular: $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \mu_x}$, mas antes, temos de calcular a derivada dos seguintes termos de $\ln(L(\theta/Z))$ em relação a μ_x :

$$\begin{aligned} \left[-n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(|\Sigma_Z|) \right]' &= 0, \\ \left[\Sigma_Z^{-1} \right]' &= \left[\begin{pmatrix} \frac{k}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \right]' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \\ [(Z - \mu_Z)]' &= \left[\begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \right]' = \begin{pmatrix} -1 \\ -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ \vdots \\ -\beta_p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \mu_x} &= \left[-n \ln(2\pi |\Sigma|^{1/2}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= \left[-n \ln(2\pi |\Sigma|^{1/2}) \right]' - \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= 0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[\Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[(\Sigma_Z^{-1})' (Z_j - \mu_Z) + (\Sigma_Z^{-1}) (Z_j - \mu_Z) \right]', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[(\Sigma_Z^{-1}) (Z_j - \mu_Z)' \right], \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2 \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z), \\
&= - \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z), \\
&= - \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} -1 \\ -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ \vdots \\ -\beta_p \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{K}{\sigma_x^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\
&= - \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} -\frac{K}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} & \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & \frac{\beta_p}{\sigma_p^2} - \frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\
&= - \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} -\frac{K}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\
&= - \sum_{j=1}^n \left[-\frac{K}{\sigma_x^2} (x_j - \mu_x) + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} (x_j - \mu_x) \right], \\
&= - \sum_{j=1}^n \left[(x_j - \mu_x) \left(-\frac{K}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right], \\
&= - \left(-\frac{K}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \right) \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_x), \\
&= - \left(-\frac{K}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j - \sum_{j=1}^n \mu_x \right), \\
&= - \left(-\frac{K}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \right) (n\bar{x} - n\mu_x),
\end{aligned}$$

que igualando a zero temos:

$$- \left(-\frac{K}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \right) (n\bar{x} - n\mu_x) = 0 \Rightarrow (n\bar{x} - n\mu_x) = 0 \Rightarrow n\bar{x} = n\mu_x \Rightarrow \mu_x = \bar{x}.$$

Portanto, temos:

$$\hat{\mu}_x = \bar{x}. \quad (\text{D.4})$$

Agora, passemos a calcular: $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \alpha_i}$, mas antes, temos de calcular a derivada dos seguintes termos de $\ln(L(\theta/Z))$ em relação a $\partial \alpha_i$:

$$\begin{aligned} [(Z - \mu_z)]' &= \left[\begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \right]' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \left[-n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(|\Sigma_Z|) \right]' &= 0, \\ \left[\Sigma_Z^{-1} \right]' &= \left[\begin{pmatrix} \frac{k}{\sigma_x^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \right]' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Agora temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \alpha_i} &= \left[-n \ln(2\pi |\Sigma|^{1/2}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= \left[-n \ln(2\pi |\Sigma|^{1/2}) \right]' - \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= 0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[\Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[(\Sigma_Z^{-1})' (Z_j - \mu_Z) + (\Sigma_Z^{-1}) (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[(\Sigma_Z^{-1}) (Z_j - \mu_Z)' \right], \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2 \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z), \\ &= -\sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{k}{\sigma_x^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\
&= - \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & -\frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\
&= - \sum_{j=1}^n \frac{\beta_2 (x_j - \mu_x)}{\sigma_2^2} - \frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2}, \\
&= - \frac{1}{\sigma_2^2} \sum_{j=1}^n [\beta_2 (x_j - \mu_x) - (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)], \\
&= - \frac{1}{\sigma_2^2} \left[\beta_2 \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_x) - \sum_{j=1}^n (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) \right], \\
&= - \frac{1}{\sigma_2^2} [\beta_2 (n\bar{x} - n\bar{x}) - (n\bar{Y}_2 - n\alpha_2 - n\beta_2 n\bar{x})], \\
&= - \frac{1}{\sigma_2^2} [- (n\bar{Y}_2 - n\alpha_2 - n\beta_2 n\bar{x})].
\end{aligned}$$

Igualando $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \alpha_i}$ a zero temos:

$$\begin{aligned}
&= - (n\bar{Y}_2 - n\alpha_2 - n\beta_2 n\bar{x}) = 0, \\
&= -n (\bar{Y}_2 - \alpha_2 - \beta_2 \bar{x}) = 0, \\
&= (\bar{Y}_2 - \alpha_2 - \beta_2 \bar{x}) = 0, \text{, que fica: } \hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_2 - \beta_2 \bar{x},
\end{aligned}$$

que generalizando temos:

$$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \beta_i \bar{x}. \quad (\text{D.5})$$

Agora, passemos a calcular: $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \beta_i}$, mas antes, temos de calcular a derivada dos seguintes termos de $\ln(L(\theta/Z))$ em relação a $\partial \beta_i$:

$$[(Z - \mu_z)]' = \left[\begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \right]' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu_x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[-n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(|\Sigma_Z|) \right]' = 0,$$

$$\left(\frac{K}{\sigma_x^2} \right)' = \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}}{\sigma_x^2} \right)' = \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \right)' = \frac{2\beta_i}{\sigma_i^2},$$

$$\left[\Sigma_Z^{-1} \right]' = \left[\begin{pmatrix} \frac{K}{\sigma_x^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \right]' = \begin{pmatrix} \frac{2\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & -\frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \beta_i} &= \left[-n \ln(2\pi |\Sigma|^{1/2}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= \left[-n \ln(2\pi |\Sigma|^{1/2}) \right]' - \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= 0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[\Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[(\Sigma_Z^{-1})' (Z_j - \mu_Z) + (\Sigma_Z^{-1}) (Z_j - \mu_Z)' \right], \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[(\Sigma_Z^{-1})' (Z_j - \mu_Z) \right], \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2 \left[(Z_j - \mu_Z)^t \right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[(\Sigma_Z^{-1})' (Z_j - \mu_Z) \right], \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu_x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{K}{\sigma_x^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{2\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & -\frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\
&= - \sum_{j=1}^n 2 \begin{pmatrix} \frac{\mu_x \beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & -\frac{\mu_x}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} \frac{(x_j - \mu_x) \beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2} & 0 & -\frac{(x_j - \mu_x)}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\
&= - \sum_{j=1}^n 2 \frac{\mu_x \beta_2 (x_j - \mu_x)}{\sigma_2^2} + \frac{2 \mu_x (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2} + \frac{(x_j - \mu_x)^2 \beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{(x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2} - \frac{(x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2}, \\
&= - \sum_{j=1}^n -2 \frac{\mu_x (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2} + \frac{2 (x_j - \mu_x)^2 \beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{2 (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2}, \\
&= \sum_{j=1}^n 2 \frac{\mu_x (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2} - \frac{2 (x_j - \mu_x)^2 \beta_2}{\sigma_2^2} + \frac{2 (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{\sigma_2^2}, \\
&= \frac{2}{\sigma_2^2} \left[\sum_{j=1}^n \mu_x (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) - (x_j - \mu_x)^2 \beta_2 + (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) \right],
\end{aligned}$$

Tomando $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \beta_i} = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\sigma_2^2} \left[\sum_{j=1}^n \mu_x (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) - (x_j - \mu_x)^2 \beta_2 + (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) \right] = 0, \\
& \sum_{j=1}^n \mu_x (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) - (x_j - \mu_x)^2 \beta_2 + (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) = 0, \\
& \mu_x \sum_{j=1}^n (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) - \beta_2 \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_x)^2 + \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) = 0, \\
& \mu_x \sum_{j=1}^n (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) + \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) = \beta_2 \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_x)^2.
\end{aligned}$$

Sabemos que: $\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \beta_i \bar{x}$ e que $\hat{\mu}_x = \bar{x}$ então:

$$\bar{x} \sum_{j=1}^n (Y_{2j} - (\bar{Y}_i - \beta_i \bar{x}) - \beta_2 \bar{x}) + \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) (Y_{2j} - (\bar{Y}_i - \beta_i \bar{x}) - \beta_2 \bar{x}) = \beta_2 \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2,$$

$$\begin{aligned}
\bar{x} \sum_{j=1}^n (Y_{2j} - \bar{Y}_2 + \beta_2 \bar{x} - \beta_2 \bar{x}) + \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) (Y_{2j} - \bar{Y}_2 + \beta_2 \bar{x} - \beta_2 \bar{x}) &= \beta_2 \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2, \\
\bar{x} \sum_{j=1}^n (Y_{2j} - \bar{Y}_2) + \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) (Y_{2j} - \bar{Y}_2) &= \beta_2 \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2, \\
\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) (Y_{2j} - \bar{Y}_2) &= \beta_2 \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2.
\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
\beta_2 \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) (Y_{2j} - \bar{Y}_2), \\
\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) (Y_{2j} - \bar{Y}_2)}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2},
\end{aligned}$$

que generalizando temos:

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) (Y_{ij} - \bar{Y}_i)}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}. \quad (\text{D.6})$$

Agora, passemos a calcular: $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \sigma_x^2}$, mas antes, temos de calcular a derivada dos seguintes termos de $\ln(L(\theta/Z))$ em relação a $\partial \sigma_x^2$:

$$\begin{aligned}
[(Z - \mu_z)]' &= \left[\begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \right]' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\left[-n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(|\Sigma_Z|) \right]' &= \left[-\frac{n}{2} \ln \left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right) \right]', \\
&= -\frac{n}{2} \frac{\left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right)'}{\left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right)} = -\frac{n}{2} \frac{\left(\prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right)'}{\left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{K}{\sigma_x^2}\right)' &= \left(\frac{1+\sigma_x^2 \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}}{\sigma_x^2}\right)' = \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}\right)' = -\frac{1}{(\sigma_x^2)^2}, \\ \left[\Sigma_z^{-1}\right]' &= \left[\left(\begin{array}{ccccc} \frac{K}{\sigma_x^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{array}\right)\right]' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\sigma_x^2)^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Agora temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \sigma_x} &= \left[-n \ln(2\Pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z)\right]', \\ &= \left[-n \ln(2\Pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}})\right]' - \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z)\right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z)\right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t\right]' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[\Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z)\right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)^t \left[(\Sigma_Z^{-1})' (Z_j - \mu_Z)\right], \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\sigma_x^2)^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} -\frac{(x_j - \mu_x)}{(\sigma_x^2)^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n -\frac{(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)^2}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)^2}. \end{aligned}$$

Agora, igualando $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \sigma_x^2}$ a zero, temos:

$$0 = -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)^2},$$

$$\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_x^2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)^2},$$

$$n = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_x^2)},$$

$$n\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - \mu_x)^2.$$

Assim obtemos para o estimador de $\hat{\sigma}_x^2$ o seguinte resultado:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \hat{\mu}_x)^2}{n}, \text{ que fica:}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{n}. \quad (\text{D.7})$$

Agora, passemos a calcular: $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \sigma_1^2}$, mas antes, temos de calcular a derivada dos seguintes termos de $\ln(L(\theta/Z))$ em relação a $\partial \sigma_1^2$:

$$\begin{aligned} [(Z - \mu_z)]' &= \left[\begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \right]' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \left[-n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(|\Sigma_Z|) \right]' &= \left[-\frac{n}{2} \ln \left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right) \right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{\left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right)'}{\left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right)} = -\frac{n}{2} \frac{\left(\sigma_x^2 \prod_{i=2}^p \sigma_i^2 \right)'}{\left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\left((\sigma_1^2)^2 \right)}, \\ \left(\frac{K}{\sigma_x^2} \right)' &= \left(\frac{1 + \sigma_x^2 \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}}{\sigma_x^2} \right)' = -\frac{\beta_1^2}{\sigma_1^2} = -\frac{1}{\sigma_1^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_z^{-1} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{K}{\sigma_x^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \end{bmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\sigma_1^2)^2} & \frac{1}{(\sigma_1^2)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{(\sigma_1^2)^2} & -\frac{1}{(\sigma_1^2)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \sigma_1^2} &= \left[-n \ln \left(2\Pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= \left[-n \ln \left(2\Pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right) \right]' - \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[\Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]' \right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)^t \left[\left(\Sigma_Z^{-1} \right)' (Z_j - \mu_Z) \right], \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\sigma_1^2)^2} & \frac{1}{(\sigma_1^2)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{(\sigma_1^2)^2} & -\frac{1}{(\sigma_1^2)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} -\frac{(x_j - \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2} + \frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2} & \frac{(x_j - \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2} - \frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n -\frac{(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_1^2)^2} + \frac{(x_j - \mu_x)(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2} + \frac{(x_j - \mu_x)(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2} - \frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)^2}{(\sigma_1^2)^2}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n -\frac{(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_1^2)^2} + 2 \frac{(x_j - \mu_x)(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2} - \frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)^2}{(\sigma_1^2)^2}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_1^2)^2} - 2 \frac{(x_j - \mu_x)(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)}{(\sigma_1^2)^2} + \frac{(Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x)^2}{(\sigma_1^2)^2}, \end{aligned}$$

Agora, substituindo μ_x por $\bar{x}$, α_1 por 0 e β_1 por 1 temos:

$$\begin{aligned} &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{(\sigma_1^2)^2} - 2 \frac{(x_j - \bar{x})(Y_{1j} - 0 - 1\bar{x})}{(\sigma_1^2)^2} + \frac{(Y_{1j} - 0 - 1\bar{x})^2}{(\sigma_1^2)^2}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{(\sigma_1^2)^2} - 2 \frac{(x_j - \bar{x})(Y_{1j} - \bar{x})}{(\sigma_1^2)^2} + \frac{(Y_{1j} - \bar{x})^2}{(\sigma_1^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{(\sigma_1^2)^2} - 2 \frac{(x_j - \bar{x})(Y_{1j} - \bar{x})}{(\sigma_1^2)^2} + \frac{(Y_{1j} - \bar{x})^2}{(\sigma_1^2)^2}, \\
&= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x} - Y_{1j} + \bar{x})^2}{(\sigma_1^2)^2}, \\
&= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - Y_{1j})^2}{(\sigma_1^2)^2}, \\
&= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} + \frac{1}{2(\sigma_1^2)^2} \sum_{j=1}^n (x_j - Y_{1j})^2.
\end{aligned}$$

Igualando $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \sigma_1^2}$ a zero, temos:

$$\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_1^2)} = \frac{1}{2(\sigma_1^2)^2} \sum_{j=1}^n (x_j - Y_{1j})^2,$$

ou seja,

$$(\hat{\sigma}_1^2) = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - Y_{1j})^2}{n}. \quad (\text{D.8})$$

Agora, passemos a calcular: $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \sigma_i^2}$, considerando $i \geq 1$, mas antes, temos de calcular a derivada dos seguintes termos de $\ln(L(\theta/Z))$ em relação a $\partial \sigma_i^2$:

$$\begin{aligned}
[(Z - \mu_z)]' &= \left[\begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix} \right]' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\left[-n \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(|\Sigma_Z|) \right]' &= \left[-\frac{n}{2} \ln \left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right) \right]', \\
&= -\frac{n}{2} \frac{\left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right)'}{\left(\sigma_x^2 \prod_{i=1}^p \sigma_i^2 \right)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)^2}, i \neq 2 \\
\left(\frac{K}{\sigma_x^2} \right)' &= \left(\frac{1 + \sigma_x^2 \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}}{\sigma_x^2} \right)' = -\frac{\beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_z^{-1} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k}{\sigma_2^2} & -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} \\ -\frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\beta_p}{\sigma_p^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \end{bmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2} & 0 & \frac{\beta_2}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2}{(\sigma_2^2)^2} & 0 & -\frac{1}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \sigma_2^2} &= \left[-n \ln \left(2\Pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= \left[-n \ln \left(2\Pi |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right) \right]' - \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)' \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[(Z_j - \mu_Z)^t \Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) + (Z_j - \mu_Z)^t \left[\Sigma_Z^{-1} (Z_j - \mu_Z) \right]' \right]', \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Z_j - \mu_Z)^t \left(\Sigma_Z^{-1} \right)' (Z_j - \mu_Z), \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -\frac{\beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2} & 0 & \frac{\beta_2}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2}{(\sigma_2^2)^2} & 0 & -\frac{1}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} -\frac{\beta_2^2 (x_j - \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2} + \frac{\beta_2 (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2} & 0 & \frac{\beta_2 (x_j - \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2} - \frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j - \mu_x \\ Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1 \mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p \mu_x \end{pmatrix}, \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[-\frac{\beta_2^2 (x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_2^2)^2} + \frac{\beta_2 (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2} + \frac{\beta_2 (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2} - \frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)^2}{(\sigma_2^2)^2} \right], \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[-\frac{\beta_2^2 (x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_2^2)^2} + 2 \frac{\beta_2 (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2} - \frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)^2}{(\sigma_2^2)^2} \right], \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\beta_2^2 (x_j - \mu_x)^2}{(\sigma_2^2)^2} - 2 \frac{\beta_2 (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)}{(\sigma_2^2)^2} + \frac{(Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)^2}{(\sigma_2^2)^2} \right], \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} + \frac{1}{2(\sigma_2^2)^2} \sum_{j=1}^n \left[\beta_2^2 (x_j - \mu_x)^2 - 2\beta_2 (x_j - \mu_x) (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x) + (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)^2 \right], \\ &= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} + \frac{1}{2(\sigma_2^2)^2} \sum_{j=1}^n [\beta_2 (x_j - \mu_x) - (Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2 \mu_x)]^2. \end{aligned}$$

Agora, substituindo α_2 por $\bar{Y}_2 - \beta_2 \mu_x$ temos:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} + \frac{1}{2(\sigma_2^2)^2} \sum_{j=1}^n \left[\beta_2 (x_j - \mu_x) - (Y_{2j} - (\bar{Y}_2 - \beta_2 \mu_x) - \beta_2 \mu_x) \right]^2, \\
&= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} + \frac{1}{2(\sigma_2^2)^2} \sum_{j=1}^n \left[\beta_2 (x_j - \mu_x) - (Y_{2j} - \bar{Y}_2 + \beta_2 \mu_x - \beta_2 \mu_x) \right]^2, \\
&= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} + \frac{1}{2(\sigma_2^2)^2} \sum_{j=1}^n \left[\beta_2 (x_j - \mu_x) - (Y_{2j} - \bar{Y}_2) \right]^2.
\end{aligned}$$

Agora, substituindo μ_x por $\bar{x}$ temos:

$$= -\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} + \frac{1}{2(\sigma_2^2)^2} \sum_{j=1}^n \left[\beta_2 (x_j - \bar{x}) - (Y_{2j} - \bar{Y}_2) \right]^2.$$

Igualando $\frac{\partial \ln(L(\theta/Z))}{\partial \sigma_i^2}$ a zero, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2} \frac{1}{(\sigma_2^2)} &= \frac{1}{2(\sigma_2^2)^2} \sum_{j=1}^n \left[\beta_2 (x_j - \bar{x}) - (Y_{2j} - \bar{Y}_2) \right]^2, \\
n &= \frac{1}{(\sigma_2^2)} \sum_{j=1}^n \left[\beta_2 (x_j - \bar{x}) - (Y_{2j} - \bar{Y}_2) \right]^2, \\
n (\sigma_2^2) &= \sum_{j=1}^n \left[\beta_2 (x_j - \bar{x}) - (Y_{2j} - \bar{Y}_2) \right]^2,
\end{aligned}$$

que resulta em:

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\beta_2 (x_j - \bar{x}) - (Y_{2j} - \bar{Y}_2) \right]^2,$$

que generalizando temos:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\beta_i (x_j - \bar{x}) - (Y_{ij} - \bar{Y}_i) \right]^2, \quad (\text{D.9})$$

resultado valido para $i \geq 2$.

Apêndice E

Cálculos dos valores para esperança e variância para o Modelo Completo

Neste caso, temos:

$$f(\theta/Z) = \frac{1}{(2\pi)^{|\Sigma_z|^{\frac{1}{2}}}} \exp -\frac{1}{2} (Z - \mu_z)^t \Sigma_z^{-1} (Z - \mu_z), \quad (\text{E.1})$$

onde:

$$\theta/Z \sim N(\mu_z, \Sigma_z),$$

$$Z = \begin{pmatrix} x_j \\ Y_{1j} \\ Y_{2j} \\ \vdots \\ Y_{pj} \end{pmatrix}, \mu_Z = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \alpha_1 + \beta_1 \mu_x \\ \alpha_2 + \beta_2 \mu_x \\ \vdots \\ \alpha_p + \beta_p \mu_p \end{pmatrix} \text{ e } \Sigma_z = \sigma_x^2 \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ \beta & \beta \beta' + A \end{pmatrix},$$

com:

$$A = \text{diag} \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_x^2}, \dots, \frac{\sigma_p^2}{\sigma_x^2} \right).$$

Agora, queremos calcular:

$$\hat{x}_j = \mathbb{E}[x_j/Y_j; \theta] = \mu_x + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (Y - \mu_Y), \quad (\text{E.2})$$

Conforme está descrito em Johnson et al. (1998).

onde:

$$X = x, Y_j = \begin{pmatrix} Y_{1j} \\ Y_{2j} \\ \vdots \\ Y_{pj} \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \Sigma_{11} = \sigma_x^2, \Sigma_{12} = \beta' \sigma_x^2, \Sigma_{21} = \beta \sigma_x^2, \Sigma_{22} = \sigma_x^2 (\beta \beta' + A).$$

Agora, passemos a calcular Σ_{22}^{-1} , que pode ser escrito como:

$$\Sigma_{22}^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2} \left[A^{-1} - \frac{1 \cdot A^{-1} \beta \beta' A^{-1}}{1 + \beta' A^{-1} \beta} \right], \text{ com:}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix}. \text{ Ent\~ao:}$$

$$\Sigma_{22}^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2} \left[\begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix}}{1 + \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_x^2}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}} \right],$$

que resolvendo, obtemos o seguinte resultado:

$$\Sigma_{22}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} - \frac{\sigma_x^2}{K} \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^2}{(\sigma_1^2)^2} & \frac{\beta_1 \beta_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} & \cdots & \frac{\beta_1 \beta_p}{\sigma_1^2 \sigma_p^2} \\ \frac{\beta_1 \beta_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} & \frac{\beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & \frac{\beta_2 \beta_p}{\sigma_2^2 \sigma_p^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_1 \beta_p}{\sigma_1^2 \sigma_p^2} & \frac{\beta_2 \beta_p}{\sigma_2^2 \sigma_p^2} & \cdots & \frac{\beta_p^2}{(\sigma_p^2)^2} \end{pmatrix} \right].$$

Agora, para $\hat{x}_j$ temos:

$$\hat{x}_j = \mu_x + \sigma_x^2 \left(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} - \frac{\sigma_x^2}{K} \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^2}{(\sigma_1^2)^2} & \frac{\beta_1\beta_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \cdots & \frac{\beta_1\beta_p}{\sigma_1^2\sigma_p^2} \\ \frac{\beta_1\beta_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{\beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & \frac{\beta_2\beta_p}{\sigma_2^2\sigma_p^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_1\beta_p}{\sigma_1^2\sigma_p^2} & \frac{\beta_2\beta_p}{\sigma_2^2\sigma_p^2} & \cdots & \frac{\beta_p^2}{(\sigma_p^2)^2} \end{pmatrix} \right] \\
& \begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1\mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2\mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p\mu_x \end{pmatrix}, \\
& \hat{x}_j = \mu_x + \sigma_x^2, \\
& = \left[\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} - \frac{\sigma_x^2}{K} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^2}{(\sigma_1^2)^2} & \frac{\beta_1\beta_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \cdots & \frac{\beta_1\beta_p}{\sigma_1^2\sigma_p^2} \\ \frac{\beta_1\beta_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{\beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & \frac{\beta_2\beta_p}{\sigma_2^2\sigma_p^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_1\beta_p}{\sigma_1^2\sigma_p^2} & \frac{\beta_2\beta_p}{\sigma_2^2\sigma_p^2} & \cdots & \frac{\beta_p^2}{(\sigma_p^2)^2} \end{pmatrix} \right] \\
& \begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1\mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2\mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p\mu_x \end{pmatrix}, \\
& \hat{x}_j = \mu_x + \sigma_x^2 \left[\begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} & \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} & \cdots & \frac{\beta_p}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} - \frac{\sigma_x^2}{K} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} & \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} & \cdots & \frac{\beta_p}{\sigma_1^2} \end{pmatrix} \right], \\
& \begin{pmatrix} Y_{1j} - \alpha_1 - \beta_1\mu_x \\ Y_{2j} - \alpha_2 - \beta_2\mu_x \\ \vdots \\ Y_{pj} - \alpha_p - \beta_p\mu_x \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\hat{x}_j = \mu_x + \frac{1}{K} \left[\frac{\sigma_x^2 Y_{1j}}{\sigma_1^2} - \mu_x (K-1) + \beta^* A^{-2} (Y_{ij} - \alpha_i) \right]. \quad (\text{E.3})$$

Agora, temos de calcular $Var(x_j/Y_j, \theta)$, que pode ser obtida através da seguinte fórmula:

$$Var(x_j/Y_j, \theta) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}. \quad (\text{E.4})$$

Então,

$$Var(x_j/Y_j, \theta) = 1.\sigma_x^2 - \beta' \sigma_x^2 \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_p^2} \end{pmatrix} - \frac{\sigma_x^2}{K} \begin{pmatrix} \frac{\beta_1^2}{(\sigma_1^2)^2} & \frac{\beta_1 \beta_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} & \cdots & \frac{\beta_1 \beta_p}{\sigma_1^2 \sigma_p^2} \\ \frac{\beta_1 \beta_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} & \frac{\beta_2^2}{(\sigma_2^2)^2} & \cdots & \frac{\beta_2 \beta_p}{\sigma_2^2 \sigma_p^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_1 \beta_p}{\sigma_1^2 \sigma_p^2} & \frac{\beta_2 \beta_p}{\sigma_2^2 \sigma_p^2} & \cdots & \frac{\beta_p^2}{(\sigma_p^2)^2} \end{pmatrix} \right] \beta \sigma_x^2,$$

que resolvendo, obtemos o seguinte resultado:

$$Var(x_j/Y_j, \theta) = \frac{\sigma_x^2}{K},$$

Portanto:

$$Var(x_j/Y_j, \theta) = \frac{\sigma_x^2}{K}. \quad (E.5)$$

Assim, teremos:

$$E[x_j^2/Y_j, \theta] = \hat{x}_j^2 + \frac{\sigma_x^2}{K}. \quad (E.6)$$

Apêndice F

Matriz de informação esperada.

Nesta seção consideramos a matriz de informação de Fisher do modelo observado, que denotamos por: $I_F(\theta)$ onde $I_F(\theta) = -\text{IE} \left[\frac{\partial^2 \ln(\theta/Z)}{\partial \tilde{\theta} \partial \tilde{\theta}'} \right]$. A matriz de informação para o modelo de calibração comparativa calculada em Bolfarine e Rojas (1995). Segue das propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança para n grande,

$$\hat{\theta} \approx N \left(\theta, I_F^{-1}(\theta) \right).$$

Os elementos da matriz de informação esperada $I_F^{-1}(\theta)$ derivada em Rojas e Bolfarine (1995) são dados por:

$$I_{\mu_x \mu_x} = \frac{n \left(1 - \frac{1}{\sigma_x^2 v} \right)}{\sigma_x^2};$$

$$I_{\mu_x \alpha_k} = \frac{n \beta_k}{v \sigma_k^2 \sigma_x^2};$$

$$I_{\mu_x \beta_k} = \frac{n \beta_k \mu_x}{v \sigma_x^2 \sigma_k^2};$$

$$I_{\mu_x \sigma_x^2} = I_{\mu_x \sigma_1^2} = I_{\mu_x \sigma_k^2} = 0;$$

$$I_{\alpha_k \alpha_k} = \frac{n}{\sigma_k^2} \left(1 - \frac{\beta_k^2}{v \sigma_k^2} \right);$$

$$I_{\alpha_k \alpha_l} = -\frac{n \beta_k \beta_l}{v \sigma_k^2 \sigma_l^2};$$

$$I_{\alpha_k \beta_k} = -\frac{n\beta_k^2 \mu_x}{v\sigma_k^4} + \frac{n\mu_x}{\sigma_k^2};$$

$$I_{\alpha_k \beta_l} = -\frac{n\beta_k \beta_l \mu_x}{v\sigma_k^2 \sigma_l^2};$$

$$I_{\alpha_x \sigma_x^2} = I_{\alpha_k \sigma_1^2} = I_{\alpha_k \sigma_k^2} = I_{\alpha_k \sigma_l^2} = 0;$$

$$I_{\beta_k \beta_k} = \frac{n}{\sigma_k^2}(\mu_x^2 + \sigma_x^2 - 1v) + \frac{n\beta_k^2}{v\sigma_k^4}(2/v - \sigma_x^2 - \mu_x^2);$$

$$I_{\beta_k \beta_l} = \frac{n\beta_k \beta_l}{v\sigma_k^2 \sigma_l^2}(2v - (\sigma_x^2 + \mu_x^2));$$

$$I_{\beta_k \sigma_x^2} = \frac{n\beta_k}{v\sigma_k^2 \sigma_x^4}(\sigma_x^2 - 1/v);$$

$$I_{\beta_k \sigma_1^2} = -\frac{n\beta_k}{v^2 \sigma_k^2 \sigma_1^4};$$

$$I_{\beta_k \sigma_k^2} = \frac{n\beta_k}{v\sigma_k^4} - \frac{n\beta_k^3}{v^2 \sigma_k^6};$$

$$I_{\beta_k \sigma_l^2} = -\frac{n\beta_k \beta_l^2}{v^2 \sigma_k^2 \sigma_l^4};$$

$$I_{\sigma_x^2 \sigma_x^2} = \frac{n}{2\sigma_x^4} - \frac{n}{v\sigma_x^6} + \frac{n}{2v^2 \sigma_x^8};$$

$$I_{\sigma_x^2 \sigma_l^2} = \frac{n}{2v^2 \sigma_x^4 \sigma_l^4};$$

$$I_{\sigma_x^2 \sigma_k^2} = \frac{n\beta_k^2}{2v^2 \sigma_x^4 \sigma_l^4};$$

$$I_{\sigma_l^2 \sigma_l^2} = \frac{n}{2\sigma_l^4} - \frac{n}{v\sigma_l^6} + \frac{n}{2v^2\sigma_l^8};$$

$$I_{\sigma_1^2 \sigma_k^2} = \frac{n\beta_k^2}{2v^2\sigma_1^4\sigma_k^4};$$

$$I_{\sigma_k^2 \sigma_k^2} = \frac{n}{2\sigma_k^4} - \frac{n\beta_k^2}{v\sigma_k^6} + \frac{n\beta_k^4}{2v^2\sigma_k^8};$$

$$I_{\sigma_k^2 \sigma_l^2} = \frac{n\beta_k^2\beta_l^2}{2v^2\sigma_k^4\sigma_l^4};$$

$$\text{com } v = \frac{1}{\sigma_x^2} + \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}; k \neq l = 2, \dots, p.$$

Apêndice G

Programas utilizados.

Para a elaboração dessa dissertação foram desenvolvidas ou utilizadas adaptações de diversos programas feitos, utilizando o software Ox.

O primeiro programa foi desenvolvido para fazer simulações, considerando $p = 3$ instrumentos.

O segundo programa foi desenvolvido também em Ox para que seja utilizado os dados reais das árvores também para $p = 3$ instrumentos.

Primeiro Programa.

```
#include <oxstd.h> #include <oxfloat.h> //define M_PI #include
<oxdraw.h> #include <maximize.h> #import <maximize> decl dados;
// programa que calcula a estatistica de WALD e TRV para as
// seguintes hipoteses de interesse:
// 1 - todos os alfas = 0 e todos os betas igual a 1
// 2 - todos os alfas igual a alfa e todos os betas igual a beta.
// inicializacao metodo dos momentos
// note que para este caso, foram utilizados os instrumentos 1, 2 e 3.
// utilizando dados simulados
fLogVero(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    decl n, mi, sigma, mi_x, alfa2, alfa3, beta2, beta3, sigma2x, sigma2_1;
    decl sigma2_2, sigma2_3,i,parcela;
    n=rows(dados');
    mi_x=vP[0];
    alfa2=vP[1];
    alfa3=vP[2];
    beta2=vP[3];
    beta3=vP[4];
    sigma2x=vP[5];
```

```

sigma2_1=vP[6];
sigma2_2=vP[7];
sigma2_3=vP[8];
mi=zeros(3,1); //dimens\~{a}o do vetor de m\~{e}dias mi
mi[0]=mi_x;
mi[1]=alfa2+beta2*mi_x;
mi[2]=alfa3+beta3*mi_x;

sigma=zeros(3,3); //dimens\~{a}o da matriz de covariancias sigma
sigma[0][0]=sigma2x+sigma2_1;
sigma[0][1]=beta2*sigma2x;
sigma[0][2]=beta3*sigma2x;
sigma[1][1]=beta2^2*sigma2x+sigma2_2;
sigma[1][2]=beta2*beta3*sigma2x;
sigma[2][2]=beta3^2*sigma2x+sigma2_3;
sigma[1][0]=sigma[0][1];
sigma[2][0]=sigma[0][2];
sigma[2][1]=sigma[1][2];
parcela=zeros(n,1);
    for (i=0;i<n;++i)
    {
        parcela[i]=(dados[][i]-mi) '*invert(sigma)*(dados[][i]-mi);
    }

    // fun\c{c}\~{a}o verossimilhan\c{c}a
    adFunc[0]=-0.5*n*(log(M_2PI)+log(determinant(sigma)))+
    sumc(parcela)/n);

return 1;
}
fLogVero1(const vP1, const adFunc1, const avScore,
const amHess1) {
    decl n1, mi1, sigma1, mi_x1, alfa21, alfa31, beta21, beta31,
    sigma2x1;
    decl sigma2_11, sigma2_21, sigma2_31,i1,parcela1;
    n1=rows(dados');
    mi_x1=vP1[0];
    alfa21=0;
    alfa31=alfa21;
    beta21=1;
    beta31=beta21;
    sigma2x1=vP1[1];
    sigma2_11=vP1[2];

```

```

sigma2_21=vP1[3];
sigma2_31=vP1[4];
mi1=zeros(3,1); //dimens\~{a}o do vetor de m\~{e}dias mi
mi1[0]=mi_x1;
mi1[1]=alfa21+beta21*mi_x1;
mi1[2]=alfa31+beta31*mi_x1;

sigma1=zeros(3,3); //dimens\~{a}o da matriz de covariancias sigma
sigma1[0][0]=sigma2x1+sigma2_11;
sigma1[0][1]=beta21*sigma2x1;
sigma1[0][2]=beta31*sigma2x1;
sigma1[1][1]=beta21^2*sigma2x1+sigma2_21;
sigma1[1][2]=beta21*beta31*sigma2x1;
sigma1[2][2]=beta31^2*sigma2x1+sigma2_31;
sigma1[1][0]=sigma1[0][1];
sigma1[2][0]=sigma1[0][2];
sigma1[2][1]=sigma1[1][2];
parcela1=zeros(n1,1);
    for (i1=0;i1<n1;++i1)
    {
        parcela1[i1]=(dados[][i1]-mi1)'\*invert(sigma1)*
        (dados[][i1]-mi1);
    }

    // fun\c{c}\~{a}o verossimilhan\c{c}a
    adFunc1[0]=-0.5*n1*(log(M_2PI)+log(determinant(sigma1)))+
    sumc(parcela1)/n1);

return 1;
}
fLogVero2(const vP2, const adFunc2, const avScore2,
const amHess2)
{
    decl n2, mi2, sigma2, mi_x2, alfa22, alfa32, beta22, beta32, sigma2x2,
    decl sigma2_12, sigma2_22, sigma2_32,i2,parcela2;
    n2=rows(dados');
    mi_x2=vP2[0];
    alfa22=vP2[1];
    alfa32=alfa22;
    beta22=vP2[2];
    beta32=beta22;
    sigma2x2=vP2[3];
    sigma2_12=vP2[4];

```

```

sigma2_22=vP2[5];
sigma2_32=vP2[6];
mi2=zeros(3,1); //dimens\~{a}o do vetor de m\{e}dias mi
mi2[0]=mi_x2;
mi2[1]=alfa22+beta22*mi_x2;
mi2[2]=alfa32+beta32*mi_x2;

sigma2=zeros(3,3); //dimens\~{a}o da matriz de covariancias sigma
sigma2[0][0]=sigma2x2+sigma2_12;
sigma2[0][1]=beta22*sigma2x2;
sigma2[0][2]=beta32*sigma2x2;
sigma2[1][1]=beta22^2*sigma2x2+sigma2_22;
sigma2[1][2]=beta22*beta32*sigma2x2;
sigma2[2][2]=beta32^2*sigma2x2+sigma2_32;
sigma2[1][0]=sigma2[0][1];
sigma2[2][0]=sigma2[0][2];
sigma2[2][1]=sigma2[1][2];
parcela2=zeros(n2,1);
    for (i2=0;i2<n2;++i2)
    {
        parcela2[i2]=(dados[][i2]-mi2) '*invert(sigma2)*(dados[][i2]-mi2);
    }
// println("determiante de sigma 2 e",determinant(sigma2));
// fun\c{c}\~{a}o verossimilhan\c{c}a
adFunc2[0]=-0.5*n2*(log(M_2PI)+log(determinant(sigma2)))+
sumc(parcela2)/n2);

return 1;
}

main() { decl uuu,cont1,cont2,cont3,cont4,cont5,cont6,cont7,cont8,
cont9,cont10,cont11,cont12;
decl matrizsim,vetorsim,j,k;
cont1=0;
cont2=0;
cont3=0;
cont4=0;
cont5=0;
cont6=0;
cont7=0;
cont8=0;
cont9=0;
cont10=0;

```

```

cont11=0;
cont12=0;

decl
sim,contsim,erro1,erro2,erro3,ya,y1a,y2a,y3a,x,erro,naux,alf10,alf20,alf30;
decl bet10,bet20,bet30,cov, ybarra1, ybarra2, ybarra3, sy1y1,
sy1y2, sy1y3, sy2y2, sy2y3, sy3y3;

decl trv1,trv2,wald1,wald2,matrizsimul;
sim=2000;
matrizsimul=zeros(sim,4);
contsim=1; trv1=zeros(sim);
trv2=zeros(sim);
wald1=zeros(sim);
wald2=zeros(sim);
decl conte1, conte2, conte3, contpi1, contpi2, contpi3;

conte1 = 0;
conte2 = 0;
conte3 = 0;
contpi1 = 0;
contpi2 = 0;
contpi3 = 0;

while (contsim<sim)
{
naux=20;
alf10=0;
alf20=0;
alf30=0;
bet10=1;
bet20=1;
bet30=1;
x=10*rann(naux,1)+50;
erro1=5*rann(naux,1);
y1a=alf10+bet10*x+erro1;
erro2=5*rann(naux,1);
y2a=alf20+bet20*x+erro2;
erro3=5*rann(naux,1);
y3a=alf30+bet30*x+erro3;
ya=y1a~y2a~y3a;
dados=ya';
//print("dados utilizados",dados);

```

```

cov=variance(dados');
// matriz da covariancia das observa\c{c}\~{o}es
sy1y1=cov[0][0];
sy1y2=cov[0][1];
sy1y3=cov[0][2];
sy2y2=cov[1][1];
sy2y3=cov[1][2];
sy3y3=cov[2][2];
ybarra1=meanr(dados[0][]);
ybarra2=meanr(dados[1][]);
ybarra3=meanr(dados[2][]);

// estimadores sem restri\c{c}\~{o}es
decl mi_xMV=ybarra1;
decl sigma2xMV=sy1y2*sy1y3/sy2y3;

decl beta2MV=sy1y2/sigma2xMV;

decl beta3MV=sy1y3/sigma2xMV;
decl alfa2MV=ybarra2-beta2MV*mi_xMV;
decl alfa3MV=ybarra3-beta3MV*mi_xMV;

decl sigma2_1MV=sy1y1-sigma2xMV;

decl sigma2_2MV=sy2y2-beta2MV^2*sigma2xMV;

decl sigma2_3MV=sy3y3-beta3MV^2*sigma2xMV;

//println("METODO DE MAXIMO VEROSSIMILHANCA");
// println("mi_x(s/r)=",mi_xMV);
// println("ALFA2",alfa2MV);
// println("ALFA3",alfa3MV);
// println("BETA2",beta2MV);
// println("BETA3",beta3MV);
// println("SIGMA2X",sigma2xMV);
// println("SIGMA1",sigma2_1MV);
// println("SIGMA2",sigma2_2MV);
// println("SIGMA3",sigma2_3MV);

decl teta=zeros(9,1);
teta[0]=mi_xMV;
teta[1]=alfa2MV;
teta[2]=alfa3MV;

```

```

teta[3]=beta2MV;
teta[4]=beta3MV;
teta[5]=sigma2xMV;
teta[6]=sigma2_1MV;
teta[7]=sigma2_2MV;
teta[8]=sigma2_3MV;

decl func;
fLogVero(teta,&func,0,0);
// println("valores iniciais dos parametros s\~{a}o",teta);
decl n=rows(dados');

// println("o valor da fun\c{c}\~{a}o no ponto teta e:",func);

decl mhess=unit(9);
MaxBFGS(fLogVero,&teta,&func,0,1);
// println("ponto de m\~{a}ximo", teta);
// println("valor m\~{a}ximo da fun\c{c}\~{a}o", n*func);
Num2Derivative(fLogVero,teta,&mhess);
// println("matriz de informa\c{c}\~{a}o observada",-1 .*invert(mhess));
// println("matriz de covariancia observada=",-1 .*mhess);
decl teta1=zeros(5,1);
teta1[0]=mi_xMV;
teta1[1]=sigma2xMV;
teta1[2]=sigma2_1MV;
teta1[3]=sigma2_2MV;
teta1[4]=sigma2_3MV;

decl func1; fLogVero1(teta1,&func1,0,0);
// println("valores iniciais dos parametros s\~{a}o",teta1);
decl n1=rows(dados');

// println("o valor da fun\c{c}\~{a}o no ponto teta e:",func1);

decl mhess1=unit(5);
MaxBFGS(fLogVero1,&teta1,&func1,0,1);
// println("ponto de m\~{a}ximo", teta1);

//println("valor m\~{a}ximo da fun\c{c}\~{a}o", n1*func1);
Num2Derivative(fLogVero1,teta1,&mhess1);
// println("matriz de informa\c{c}\~{a}o observada",-1 .*invert(mhess1));
// println("matriz de covariancia observada=",-1 .*mhess1);
decl trv1,trv2; trv1=func-func1;

```

```

// println("o valor do trv1 e:",trv1);
decl teta2=zeros(7,1);
teta2[0]=mi_xMV;
teta2[1]=alfa2MV;
teta2[2]=beta2MV;
teta2[3]=sigma2xMV;
teta2[4]=sigma2_1MV;
teta2[5]=sigma2_2MV;
teta2[6]=sigma2_3MV;

decl func2; fLogVero2(teta2,&func2,0,0);
// println("valores iniciais dos parametros s\~{a}o",teta2);
decl n2=rows(dados');

// println("o valor da fun\c{c}\~{a}o no ponto teta e:",func2);

decl mhess2=unit(7);
MaxBFGS(fLogVero2,&teta2,&func2,0,1);
// println("ponto de m\~{a}ximo", teta2);

// println("valor m\~{a}ximo da fun\c{c}\~{a}o", n2*func2);
Num2Derivative(fLogVero2,teta2,&mhess2);
// println("matriz de informa\c{c}\~{a}o observada",-1 .*invert(mhess2));
// println("matriz de covariancia observada",-1 .*mhess2);
trv2=func-func2;
// println("o valor do trv2 e:",trv2);
decl y1,y2,y3; y1=submat(dados',0,n,0,0);
//println(y1);
y2=submat(dados',0,n,1,1);
//println(y2);
y3=submat(dados',0,n,2,2);
//println(y3);

// metodo dos momentos.
decl mix,alfa1,alfa2,alfa3,beta1,beta2,beta3,vsigma,sigma1;

decl sigma2,sigma3,sigma2x,valfa,vbeta;
mix = meanc(y1);
alfa1=0;
alfa2=meanc(y2)-mix*((sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))/
(sumc(y1.*y3)/n-mix*meanc(y3)));
alfa3=meanc(y3)-mix*((sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))/
(sumc(y1.*y2)/n-mix*meanc(y2)));

```



```

valfa=alfa1~alfa2~alfa3;
beta1=1;
beta2=(sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))/(sumc(y1.*y3)/n-meanc(y1)
*meanc(y3));
beta3=(sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))/(sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)
*meanc(y2));
vbeta=beta1~beta2~beta3;
sigma2x=(sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)*meanc(y2))*(sumc(y1.*y3)/n-meanc(y1)
*meanc(y3))
/(sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3));
sigma1=(varc(y1)-((sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)*meanc(y2))*
(sumc(y1.*y3)/n-meanc(y1)*meanc(y3)))/(sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3)));
sigma2=(varc(y2)-((sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))*
(sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)*meanc(y2)))/(sumc(y1.*y3)/n-meanc(y1)*meanc(y3)));
sigma3=(varc(y3)-((sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))*
(sumc(y1.*y3)/n-meanc(y1)*meanc(y3)))/(sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)*meanc(y2)));
vsigma=sigma1~sigma2~sigma3;
//impressao dos valores iniciais para os estimadores
//println("METODO DOS MOMENTOS");
//println("sigma2x",sigma2x);
//println("sigma1",sigma1);
//println("sigma2",sigma2);
//println("sigma3",sigma3);
//println("mix",mix);
//println("alfa1",alfa1);
//println("alfa2",alfa2);
//println("alfa3",alfa3);
//println("beta1",beta1);
//println("beta2",beta2);
//println("beta3",beta3);
decl c,conv,i,j,cont,xj,xj2; conv=100; i=0; while (i < conv) {
//passo E
c=1+sigma2x.*(((beta1.^2)./sigma1)+((beta2.^2)./sigma2)+((beta3.^2)
./sigma3));
xj = mix+(sigma2x./c).*((beta1.*(y1-alfa1-beta1.*mix))./sigma1+
(beta2.*(y2-alfa2-beta2.*mix))./sigma2+(beta3.*(y3-alfa3-beta3.*mix))
./sigma3);
xj2=sigma2x./(1+sigma2x.*(((beta1.^2)./sigma1)+((beta2.^2)./sigma2)+
((beta3.^2)./sigma3)))+xj.^2;
//passo M
mix=meanc(xj)*constant(1,n,1);
sigma2x=(sumc(xj2)/n-meanc(xj)^2)*constant(1,n,1);
beta1=1;

```

```

beta2=((sumc(y2.*xj)-n*meanc(xj)*meanc(y2))/(n*(sumc(xj2)/n-meanc(xj)^2)))
*constant(1,n,1);
beta3 =
((sumc(y3.*xj)-n*meanc(xj)*meanc(y3))/(n*(sumc(xj2)/n-meanc(xj)^2)))
*constant(1,n,1);
alfa1 = 0;
alfa2 = meanc(y2)-mix.*beta2;

alfa3 = meanc(y3)-mix.*beta3;

sigma1=((sumc(xj2)-2*sumc(xj.*y1)+sumc(y1.^2))/n)*constant(1,n,1);

sigma2 = (varc(y2)-(beta2.^2).*sigma2x);

sigma3 = (varc(y3)-(beta3.^2).*sigma2x);
i=i+1;
}
//println("METODO EM");
//println("mix :",submat(mix,0,0,0,1));
//println("alfa2 :",submat(alfa2,0,0,0,1));
//println("\{a\}lfa3 :",submat(alfa3,0,0,0,1));
//println("beta2 :",submat(beta2,0,0,0,1));
//println("beta3 :",submat(beta3,0,0,0,1));
//println("sigmax :",submat(sigma2x,0,0,0,1));
//println("sigma1 :",submat(sigma1,0,0,0,1));
//println("sigma2 :",submat(sigma2,0,0,0,1));
//println("sigma3 :",submat(sigma3,0,0,0,1));
decl alfa,beta,vphi,v1,v2,p,v,dphix,dmux;
beta=1~submat(beta2,0,0,0,1)~submat(beta3,0,0,0,1);
vphi=submat(sigma1,0,0,0,1)~submat(sigma2,0,0,0,1)~submat(sigma3,0,0,0,1);
alfa=0~submat(alfa2,0,0,0,1)~submat(alfa3,0,0,0,1);
//println("vbeta",beta);
//println("vphi",vphi);
//println("valfa",alfa);
dmux= submat(mix,0,0,0,1);
//println("dmux",dmux);
dphix = submat(sigma2x,0,0,0,1);
//println("dphix",dphix);
v1 = 1/dphix;
// println("valor de v1 = ", v1, "\n");
v2 = beta[0]^2/vphi[0]+beta[1]^2/vphi[1]+beta[2]^2/vphi[2];
// println("valor de v2 = ",v2, "\n") ;

```

```

        v = v1 +v2;
//      println("valor de v = ",v, "\n") ;
        beta=beta';
        vphi=vphi';
        alfa=alfa';
// calculo da eficiencia do instrumento
decl efic; efic=(beta.^2*dphix)./(beta.^2*dphix+vphi); println("
eficiencia dos instrumentos e : " ,efic);

if (efic[0] > efic[1])

if (efic[0] > efic[2])
    conte1=conte1+1;

if (efic[1] > efic[0])

if (efic[1] > efic[2])
    conte2=conte2+1;

if (efic[2] > efic[0])

if (efic[2] > efic[1])
    conte3=conte3+1;

// calculo da precisao

decl pi,vetum;
vetum = ones(3);
pi = vetum./((beta.^2)./vphi);
println("valor da precisao ",pi);

if (pi[0] > pi[1])

if (pi[0] > pi[2])
    contpi1=contpi1+1;

if (pi[1] > pi[0])

if (pi[1] > pi[2])
    contpi2=contpi2+1;

if (pi[2] > pi[0])

```

```

if (pi[2] > pi[1])
    contpi3=contpi3+1;

// calculo do estimador de maximo verossimilhanca da precisao
decl emvpi;
emvpi = (beta.^2)./vphi;

println(" valor do estimador de maximo verossimilhanca da precisao
: ",emvpi);

// calculo das submatrizes que compo~e a matriz de informa~c~o de fishe
decl num, Imixmix, Imixalfak, Imixbetak;

decl Imixsigmax, Imixsigma1, Imixsigmak, Ialfakalfak;

decl Ialfakalfal, Ialfakbetal, Ialfakbetak, Ibetakbetak;

decl Ialfaksigmax, Ialfaksigma1, Ialfaksignal;

decl Ibetakbetal, Ibetaksigmax, Ibetaksigma1, Ibetaksigmak;

decl Ibetaksignal, Isigmaxsigmax, Isigmaxsigma1;

decl Isigmaxsigmak, Isigma1sigma1, Isigma1sigmak;

decl Isigmaksigmak, Isigmaksignal,iaux;
num = 20;
p = 2;
Imixmix = num*(1-1/(dphix*v))/dphix;
Imixalfak = (beta[1:] ./vphi[1:])*(num/(v*dphix));
Imixbetak = num*beta[1:]*dmux ./ (v*vphi[1:]*dphix);
Imixsigmax = 0;
Imixsigma1 = 0;
Ialfakalfak = num*(1-beta[1:].*beta[1:] ./ (vphi[1:]*v))./vphi[1:];
Imixsigmak = zeros(p,1);
Ialfaksigmax = zeros(p,1);
Ialfaksigma1 = zeros(p,1);
Ialfaksignal = zeros(p,p);
Ialfakalfal = -num * (beta[1:] * beta[1:]') ./ (v * vphi[1:] * vphi[1:]') ;
for (i = 0; i < p; ++i)
    Ialfakalfal[i][i] = Ialfakalfak[i];
Ialfakbetal = -num * (beta[1:] * beta[1:]')*dmux ./ (v * vphi[1:] *
vphi[1:]') ;

```

```

Ialfakbetak = -num*beta[1:]*beta[1:]*dmux./(v*vphi[1:]*vphi[1:])
+num*dmux./(vphi[1:]);
for (i = 0; i < p; ++i)
    Ialfakbetal[i][i] = Ialfakbetak[i];
Ibetakbetak = (num*(dmux^2+dphix-1/v))./(v*vphi[1:]+(num*beta[1:]
*beta[1:]*(2/v-dphix-dmux^2))./(v*vphi[1:]*vphi[1:]));
Ibetakbetal = num*(beta[1:]*beta[1:]')/(v*vphi[1:]*vphi[1:]')*
(2/v-dphix-dmux^2);
for (i = 0; i < p; ++i)
    Ibetakbetal[i][i] = Ibetakbetak[i];
Ibetaksigmax = (num*beta[1:]*(dphix-1/v))./(v*vphi[1:]*dphix^2);
Ibetaksigma1 = -num * beta[1:] ./ (v^2 * vphi[1:] * vphi[0]^2) ;
Ibetaksigmak = (num * beta[1:] ./ (v*vphi[1:]*vphi[1:])).*
(1-beta[1:]*beta[1:]/(v*vphi[1:]));
Ibetaksigma1 = -num *( beta[1:]*beta[1:]'.^2) ./ (v^2 * vphi[1:]
* vphi[1:]'.^2) ;
for (i = 0; i < p; ++i)
    Ibetaksigma1[i][i] = Ibetaksigmak[i];
Isigmaxsigmax = num/(2*dphix^2)-num/(v*dphix^3)+num/(2*v^2*dphix^4);
Isigmaxsigma1 = num/(2*v^2*dphix^2*vphi[0]^2);
Isigmaxsigmak = num*(beta[1:]*beta[1:])./(2*v^2*dphix^2*vphi[0]^2);
Isigma1sigma1 = num/(2*vphi[0]^2)-num/(v*vphi[0]^3)+num/(2*v^2*vphi[0]^4);
Isigma1sigmak = num*(beta[1:]*beta[1:])./(2*v^2*vphi[0]^2*vphi[1:]^2);
Isigmaksigmak = num./(2*vphi[1:]*vphi[1:])-num*(beta[1:]
*beta[1:])./(v*vphi[1:]*vphi[1:]*vphi[1:])+num*(beta[1:]*beta[1:]
.*beta[1:]
*beta[1:])./(2*v^2*vphi[1:]*vphi[1:]*vphi[1:]*vphi[1:]);
Isigmaksigma1 = num*(beta[1:]^2)*(beta[1:]^2)'./(2*v^2*(vphi[1:]^2)
*(vphi[1:]^2)');
for (i = 0; i < p; ++i)
    Isigmaksigma1[i][i] = Isigmaksigmak[i];
// concatena\c{c}\~{a}o das submatrizes
decl Imix, Ialfa, Ibeta, Isigmax, Isigma1, Isigma;
Imix = Imixmix | Imixalfak | Imixbetak | Imixsigmax | Imixsigma1
| Imixsigmak;
Ialfa = Imixalfak'|Ialfakalfal|Ialfakbetal|Ialfaksigmax'|Ialfaksigma1'
|Ialfaksigma1;
Ibeta = Imixbetak'|Ialfakbetal'|Ibetakbetal|Ibetaksigmax'|Ibetaksigma1'
|Ibetaksigma1';
Isigmax = Imixsigmax | Ialfaksigmax | Ibetaksigmax | Isigmaxsigmax |
Isigmaxsigma1 | Isigmaxsigmak;
Isigma1 = Imixsigma1 | Ialfaksigma1 | Ibetaksigma1 | Isigmaxsigma1 |
Isigma1sigma1 | Isigma1sigmak;

```

```

    Isigma = Imixsignal' | Ialfasignal | Ibetasignal | Isigmaxsignal' |
    Isigma1signal' | Isigmaksignal;
// matriz de informa\c{c}\~{a}o de fisher
decl I;
    I = Imix ~ Ialfa ~ Ibeta ~ Isigmax ~ Isigma1 ~ Isigma;
//      println("valor de I = ",I, "\n") ;
//      matriz inversa da informa\c{c}\~{a}o de fisher
decl Inv;
    Inv = invert(I);
//      println("valor de Inv = ",Inv, "\n") ;
decl C,C1,C2,C3,W,b,W2,b2;
    b = <0;
        0;
        1;
        1>;
    C = <0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0>;
    teta = dmu | alfa[1:] | beta[1:] | dphix | vphi;
// Estatistica de Wald para testar a seguinte hipotese: alfa2 = alfa3 =
// alfa2=alfa3 = alfa e beta2 = beta3 = beta
    W = (C*teta-b)'*invert(C*Inv*C')*(C*teta-b);
//      println("valor de W = ",W, "\n") ;
    b2 = <0;
        0>;
    C1 = <0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0>;
    teta = dmu | alfa[1:] | beta[1:] | dphix | vphi;
// Estatistica de Wald para testar a seguinte hipotese: alfa2 = alfa3 = 0
// e beta2 = beta3 = 1
    W2 = (C1*teta-b2)'*invert(C1*Inv*C1')*(C1*teta-b2);
//      println("valor de W2 = ",W2, "\n") ;
//      println("W1 = ",W,"W2 = ",W2, "\n");

vetorsim=trv1~trv2~W~W2;
println(vetorsim);

matrizsimul=matrizsimul|vetorsim;
println(" simulacao numero: ",contsim);
contsim=contsim+1;
if (trv1 > 9.488)
{

```

```

cont1++;
}
if (trv1 >= 0)
{
cont5++;
}
trv2=func-func2;
if (trv2 > 7.81)
{
cont2++;
}
if (trv2 >= 0)
{
cont6++;
}
if (W > 9.488)
{
cont3++;
}

if (W >= 0)
{
cont7++;
}
if (W2 > 5.991)
{
cont4++;
}
if (W2 >= 0)
{
cont8++;
}
println("quantidade de rejeicoes no primeiro teste e: ",cont1);
println("quantidade de rejeicoes no segundo teste",cont2);
println("quantidade de rejeicoes no primeiro teste de Wald e: "
,cont3);
println("quantidade de rejeicoes no segundo teste de Wald e: "
,cont4);
println(" quantidades de resultados positivos em TW1 e:"
,cont7);
println(" quantidades de resultados positivos em TW2 e:"
,cont8);

```

```

println(" quantidades de resultados positivos em TRV1 e:"
,cont5);
println(" quantidades de resultados positivos em TRV2 e:"
,cont6);
decl prop1,prop2,prop3,prop4;
prop1 = (cont3/cont7)*100;
prop2 = (cont4/cont8)*100;
prop3 = (cont1/cont5)*100;
prop4 = (cont2/cont6)*100;
//println(" proporcao de rejeicoes para TW1 e: " ,prop1," %" );
//println(" proporcao de rejeicoes para TW2 e: " ,prop2," %" );
//println(" proporcao de rejeicoes para TRV1 e: " ,prop3," %" );
//println(" proporcao de rejeicoes para TRV2 e: " ,prop4," %" );
decl MATRIZSIM,ORDTRV1,ORDTRV2,ORDWALD1,ORDWALD2;
MATRIZSIM =
submat(matrizsimul,sim,2*sim-1,0,3);
// println("matriz com os dados gerados",MATRIZSIM);
trv1=submat(MATRIZSIM,0,sim-1,0,0);
trv2=submat(MATRIZSIM,0,sim-1,1,1);
wald1=submat(MATRIZSIM,0,sim-1,2,2);
wald2=submat(MATRIZSIM,0,sim-1,3,3); ORDTRV1=sortc(trv1);
ORDTRV2=sortc(trv2); ORDWALD1=sortc(wald1); ORDWALD2=sortc(wald2);
println(ORDTRV1); println(ORDTRV2); println(ORDWALD1);
println(ORDWALD2);
println("quantidade de vezes em que o instruemnto 1 \'{e} mais eficiente:
",conte1);
println("quantidade de vezes em que o instruemnto 2 \'{e} mais eficiente:
",conte2);
println("quantidade de vezes em que o instruemnto 3 \'{e} mais eficiente:
",conte3);
println("quantidade de vezes em que o instruemnto 1 \'{e} mais preciso:
",contpi1);
println("quantidade de vezes em que o instruemnto 2 \'{e} mais preciso:
",contpi2);
println("quantidade de vezes em que o instruemnto 3 \'{e} mais preciso:
",contpi3);
}

```

Segundo Programa.

```

#include <oxstd.h> #include <oxfloat.h> //define M_PI #include
<oxdraw.h> #include <maximize.h> #import <maximize> decl dados;

```



```

// programa que calcula a estatística de WALD e TRV para as
// seguintes hipóteses de interesse:
// 1 - todos os alfas = 0 e todos os betas igual a 1
// 2 - todos os alfas igual a alfa e todos os betas igual a beta.
// inicialização método dos momentos
// note que para este caso, foram utilizados os instrumentos 1, 2 e 3.
fLogVero(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess)
{
    decl n, mi, sigma, mi_x, alfa2, alfa3, beta2, beta3, sigma2x, sigma2_1;
    decl sigma2_2, sigma2_3, i, parcela;
    n=rows(dados');
    mi_x=vP[0];
    alfa2=vP[1];
    alfa3=vP[2];
    beta2=vP[3];
    beta3=vP[4];
    sigma2x=vP[5];
    sigma2_1=vP[6];
    sigma2_2=vP[7];
    sigma2_3=vP[8];
    mi=zeros(3,1); //dimens\~{a}o do vetor de m\{e}dias mi
    mi[0]=mi_x;
    mi[1]=alfa2+beta2*mi_x;
    mi[2]=alfa3+beta3*mi_x;

    sigma=zeros(3,3); //dimens\~{a}o da matriz de covariâncias sigma
    sigma[0][0]=sigma2x+sigma2_1;
    sigma[0][1]=beta2*sigma2x;
    sigma[0][2]=beta3*sigma2x;
    sigma[1][1]=beta2^2*sigma2x+sigma2_2;
    sigma[1][2]=beta2*beta3*sigma2x;
    sigma[2][2]=beta3^2*sigma2x+sigma2_3;
    sigma[1][0]=sigma[0][1];
    sigma[2][0]=sigma[0][2];
    sigma[2][1]=sigma[1][2];
    parcela=zeros(n,1);
    for (i=0; i<n; ++i)
    {
        parcela[i]=(dados[i][i]-mi)'*invert(sigma)*
        (dados[i][i]-mi);
    }

    // fun\c{c}\~{a}o verossimilhan\c{c}a

```

```

        adFunc[0]=-0.5*n*(log(M_2PI)+log(determinant(sigma))+
        sumc(parcela)/n);

return 1;
}
fLogVerol(const vP1, const adFunc1, const avScore,
const amHess1)
{
    decl n1, mi1, sigma1, mi_x1, alfa21, alfa31, beta21, beta31, sigma2x1;
    decl sigma2_11, sigma2_21, sigma2_31,i1,parcela1;
    n1=rows(dados');
    mi_x1=vP1[0];
    alfa21=0;
    alfa31=alfa21;
    beta21=1;
    beta31=beta21;
    sigma2x1=vP1[1];
    sigma2_11=vP1[2];
    sigma2_21=vP1[3];
    sigma2_31=vP1[4];
    mi1=zeros(3,1); //dimens\~{a}o do vetor de m\~{e}dias mi
    mi1[0]=mi_x1;
    mi1[1]=alfa21+beta21*mi_x1;
    mi1[2]=alfa31+beta31*mi_x1;

    sigma1=zeros(3,3); //dimens\~{a}o da matriz de covariancias sigma
    sigma1[0][0]=sigma2x1+sigma2_11;
    sigma1[0][1]=beta21*sigma2x1;
    sigma1[0][2]=beta31*sigma2x1;
    sigma1[1][1]=beta21^2*sigma2x1+sigma2_21;
    sigma1[1][2]=beta21*beta31*sigma2x1;
    sigma1[2][2]=beta31^2*sigma2x1+sigma2_31;
    sigma1[1][0]=sigma1[0][1];
    sigma1[2][0]=sigma1[0][2];
    sigma1[2][1]=sigma1[1][2];
    parcela1=zeros(n1,1);
    for (i1=0;i1<n1;++i1)
    {
        parcela1[i1]=(dados[][i1]-mi1) '*invert(sigma1)*
        (dados[][i1]-mi1);
    }

    // fun\c{c}\~{a}o verossimilhan\c{c}a

```

```

        adFunc1[0]=-0.5*n1*(log(M_2PI)+log(determinant(sigma1))+
        sumc(parcela1)/n1);

return 1;
}
fLogVero2(const vP2, const adFunc2, const avScore2,
const amHess2) {
    decl n2, mi2, sigma2, mi_x2, alfa22, alfa32, beta22, beta32, sigma2x2;
    decl sigma2_12, sigma2_22, sigma2_32,i2,parcela2;
    n2=rows(dados');
    mi_x2=vP2[0];
    alfa22=vP2[1];
    alfa32=alfa22;
    beta22=vP2[2];
    beta32=beta22;
    sigma2x2=vP2[3];
    sigma2_12=vP2[4];
    sigma2_22=vP2[5];
    sigma2_32=vP2[6];
    mi2=zeros(3,1); //dimens~{a}o do vetor de m\{e}dias mi
    mi2[0]=mi_x2;
    mi2[1]=alfa22+beta22*mi_x2;
    mi2[2]=alfa32+beta32*mi_x2;

    sigma2=zeros(3,3); //dimens~{a}o da matriz de covariancias sigma
    sigma2[0][0]=sigma2x2+sigma2_12;
    sigma2[0][1]=beta22*sigma2x2;
    sigma2[0][2]=beta32*sigma2x2;
    sigma2[1][1]=beta22^2*sigma2x2+sigma2_22;
    sigma2[1][2]=beta22*beta32*sigma2x2;
    sigma2[2][2]=beta32^2*sigma2x2+sigma2_32;
    sigma2[1][0]=sigma2[0][1];
    sigma2[2][0]=sigma2[0][2];
    sigma2[2][1]=sigma2[1][2];
    parcela2=zeros(n2,1);
    for (i2=0;i2<n2;++i2)
    {
        parcela2[i2]=(dados[] [i2]-mi2)'*invert(sigma2)*(dados[] [i2]-mi2);
    }
// println("determiante de sigma 2 e",determinant(sigma2));
// fun~{c}{c}~{a}o verossimilhan~{c}{c}a
    adFunc2[0]=-0.5*n2*(log(M_2PI)+log(determinant(sigma2))+
    sumc(parcela2)/n2);

```

```

return 1;
}

main()
{
decl cov, ybarra1, ybarra2, ybarra3, sy1y1, sy1y2, sy1y3,
sy2y2, sy2y3, sy3y3;

dados=< /*22.3, 20.7, 23.6, 21,    19.3, 20,    16.3, 14.8, 21.2, 14.4;
      23.4, 21.5, 23.9, 22.2, 21.7, 21,    17,    15.4, 22,    15;*/
      23.5, 21,    23.5, 20.5, 19.5, 19.5, 17.5, 14.5, 20,    14;
      22.6, 20.6, 22.8, 20.4, 21, 19.4, 17.6, 14, 20.2, 14.4;
      21.4, 19.2, 23.3, 20.3, 19.9, 19.3, 17.5, 14.4, 22, 14.7>;
print("dados utilizados",dados);
cov=variance(dados');
// matriz da covariancia das observa\c{c}\~{o}es
sy1y1=cov[0][0];
sy1y2=cov[0][1];
sy1y3=cov[0][2];
sy2y2=cov[1][1];
sy2y3=cov[1][2];
sy3y3=cov[2][2];
ybarra1=meanr(dados[0][]);
ybarra2=meanr(dados[1][]);
ybarra3=meanr(dados[2][]);

// estimadores sem restri\c{c}\~{o}es
decl mi_xMV=ybarra1;
decl sigma2xMV=sy1y2*sy1y3/sy2y3;
decl beta2MV=sy1y2/sigma2xMV;
decl beta3MV=sy1y3/sigma2xMV;
decl alfa2MV=ybarra2-beta2MV*mi_xMV;
decl alfa3MV=ybarra3-beta3MV*mi_xMV;
decl sigma2_1MV=sy1y1-sigma2xMV;
decl sigma2_2MV=sy2y2-beta2MV^2*sigma2xMV;
decl sigma2_3MV=sy3y3-beta3MV^2*sigma2xMV;

print("mi_x(s/r)=",mi_xMV);
print(alfa2MV);
print(alfa3MV);
print(beta2MV);
print(beta3MV);

```

```

    print(sigma2xMV);
    print(sigma2_1MV);
    print(sigma2_2MV);
    print(sigma2_3MV);

    decl teta=zeros(9,1);
    teta[0]=mi_xMV;
    teta[1]=alfa2MV;
    teta[2]=alfa3MV;
    teta[3]=beta2MV;
    teta[4]=beta3MV;
    teta[5]=sigma2xMV;
    teta[6]=sigma2_1MV;
    teta[7]=sigma2_2MV;
    teta[8]=sigma2_3MV;

    decl func;
    fLogVero(teta,&func,0,0);
    println("valores iniciais dos parametros s\~{a}o",teta);
    decl n=rows(dados');

    println("o valor da fun\c{c}\~{a}o no ponto teta e:",func);

    decl mhess=unit(9);
    MaxBFGS(fLogVero,&teta,&func,0,1);
    println("ponto de m\~{a}ximo", teta);
    println("valor m\~{a}ximo da fun\c{c}\~{a}o", n*func);
    Num2Derivative(fLogVero,teta,&mhess);
    println("matriz de informa\c{c}\~{a}o observada",-1 .*invert(mhess));
    println("matriz de covariancia observada",-1 .*mhess);
    decl teta1=zeros(5,1);
    teta1[0]=mi_xMV;
    teta1[1]=sigma2xMV;
    teta1[2]=sigma2_1MV;
    teta1[3]=sigma2_2MV;
    teta1[4]=sigma2_3MV;

    decl func1;
    fLogVero1(teta1,&func1,0,0);
    println("valores iniciais dos parametros s\~{a}o",teta1);
    decl n1=rows(dados');

    println("o valor da fun\c{c}\~{a}o no ponto teta e:",func1);

```

```

decl mhess1=unit(5);
MaxBFGS(fLogVero1,&teta1,&func1,0,1);
println("ponto de m\ '{a}ximo", teta1);

println("valor m\ '{a}ximo da fun\c{c}\~{a}o", n1*func1);
Num2Derivative(fLogVero1,teta1,&mhess1);
println("matriz de informa\c{c}\~{a}o observada",-1 .*invert(mhess1));
println("matriz de covariancia observada",-1 .*mhess1);
decl trv1,trv2; trv1=func-func1;
println("o valor do trv1 e:",trv1);
decl teta2=zeros(7,1);
teta2[0]=mi_xMV;
teta2[1]=alfa2MV;
teta2[2]=beta2MV;
teta2[3]=sigma2xMV;
teta2[4]=sigma2_1MV;
teta2[5]=sigma2_2MV;
teta2[6]=sigma2_3MV;

decl func2;
fLogVero2(teta2,&func2,0,0);
// println("valores iniciais dos parametros s\~{a}o",teta2);
decl n2=rows(dados');

// println("o valor da fun\c{c}\~{a}o no ponto teta e:",func2);

decl mhess2=unit(7);
MaxBFGS(fLogVero2,&teta2,&func2,0,1);
println("ponto de m\ '{a}ximo", teta2);

println("valor m\ '{a}ximo da fun\c{c}\~{a}o", n2*func2);
Num2Derivative(fLogVero2,teta2,&mhess2);
println("matriz de informa\c{c}\~{a}o observada",-1 .*invert(mhess2));
println("matriz de covariancia observada",-1 .*mhess2);
trv2=func-func2;
println("o valor do trv2 e:",trv2);
decl y1,y2,y3; y1=submat(dados',0,n,0,0);
//println(y1);
y2=submat(dados',0,n,1,1);
//println(y2);
y3=submat(dados',0,n,2,2);
//println(y3);

```

```

// metodo dos momentos.
decl mix, alfa1, alfa2, alfa3, beta1, beta2, beta3, vsigma;

decl sigma1, sigma2, sigma3, sigma2x, valfa, vbeta;
  mix = meanc(y1);
  alfa1=0;
  alfa2=meanc(y2)-mix*((sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))/(sumc(y1.*y3)
/n-mix*meanc(y3)));
  alfa3=meanc(y3)-mix*((sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))
/(sumc(y1.*y2)/n-mix*meanc(y2)));
  valfa=alfa1~alfa2~alfa3; beta1=1;
  beta2=(sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))/(sumc(y1.*y3)/n-meanc(y1)
*meanc(y3));
  beta3=(sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))/(sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)
*meanc(y2));
  vbeta=beta1~beta2~beta3;
  sigma2x=(sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)*meanc(y2))*(sumc(y1.*y3)/n
-meanc(y1)*meanc(y3))/(sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3));
  sigma1=(varc(y1)-((sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)*meanc(y2))*
(sumc(y1.*y3)/n-meanc(y1)*meanc(y3)))/(sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3)));
  sigma2=(varc(y2)-((sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))*
(sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)*meanc(y2)))/(sumc(y1.*y3)/n-meanc(y1)*meanc(y3)));
  sigma3=(varc(y3)-((sumc(y2.*y3)/n-meanc(y2)*meanc(y3))*
(sumc(y1.*y3)/n-meanc(y1)*meanc(y3)))/(sumc(y1.*y2)/n-meanc(y1)*meanc(y2)));
  vsigma=sigma1~sigma2~sigma3;
//impressao dos valores iniciais para os estimadores
println("sigma2x",sigma2x);
println("sigma1",sigma1);
println("sigma2",sigma2);
println("sigma3",sigma3);
println("mix",mix);
println("alfa1",alfa1);
println("alfa2",alfa2);
println("alfa3",alfa3);
println("beta1",beta1);
println("beta2",beta2);
println("beta3",beta3);
decl c, conv, i, j, cont, xj, xj2;
conv=100;
i=0; while (i < conv)
{
  //passo E

```

```

c=1+sigma2x.*(((beta1.^2)./sigma1)+((beta2.^2)./sigma2)+((beta3.^2)./sigma3));
xj = mix+(sigma2x./c).*((beta1.*(y1-alfa1-beta1.*mix))./sigma1+
(beta2.*(y2-alfa2-beta2.*mix))./sigma2+(beta3.*(y3-alfa3-beta3.*mix))./sigma3);
xj2=sigma2x./(1+sigma2x.*(((beta1.^2)./sigma1)+((beta2.^2)
./sigma2)+((beta3.^2)./sigma3)))+xj.^2;
//passo M
mix=meanc(xj)*constant(1,n,1);
sigma2x=(sumc(xj2)/n-meanc(xj)^2)*constant(1,n,1);
beta1=1;
beta2 =
((sumc(y2.*xj)-n*meanc(xj)*meanc(y2))/(n*(sumc(xj2)/n-meanc(xj)^2)))
*constant(1,n,1);
beta3 =
((sumc(y3.*xj)-n*meanc(xj)*meanc(y3))/(n*(sumc(xj2)/n-meanc(xj)^2)))
*constant(1,n,1);
alfa1 = 0;
alfa2 = meanc(y2)-mix.*beta2;
alfa3 = meanc(y3)-mix.*beta3;
sigma1 =
((sumc(xj2)-2*sumc(xj.*y1)+sumc(y1.^2))/n)*constant(1,n,1);
sigma2 = (varc(y2)-(beta2.^2).*sigma2x);
sigma3 = (varc(y3)-(beta3.^2).*sigma2x); i=i+1;
}
println("mix:",submat(mix,0,0,0,1));
println("alfa2 :",submat(alfa2,0,0,0,1));
println("\{a\}lfa3 :",submat(alfa3,0,0,0,1));
println("beta2 :",submat(beta2,0,0,0,1));
println("beta3 :",submat(beta3,0,0,0,1));
println("sigmax :",submat(sigma2x,0,0,0,1));
println("sigma1 :",submat(sigma1,0,0,0,1));
println("sigma2 :",submat(sigma2,0,0,0,1));
println("sigma3 :",submat(sigma3,0,0,0,1));
decl alfa,beta,vphi,v1,v2,p,v,dphix,dmux;
beta=1~submat(beta2,0,0,0,1)~submat(beta3,0,0,0,1);
vphi=submat(sigma1,0,0,0,1)~submat(sigma2,0,0,0,1)~submat(sigma3,0,0,0,1);
alfa=0~submat(alfa2,0,0,0,1)~submat(alfa3,0,0,0,1);
println("vbeta",beta); println("vphi",vphi);
println("valfa",alfa); dmux= submat(mix,0,0,0,1);
println("dmux",dmux); dphix = submat(sigma2x,0,0,0,1);
println("dphix",dphix);
v1 = 1/dphix;
println("valor de v1 = ", v1, "\n");
v2 = beta[0]^2/vphi[0]+beta[1]^2/vphi[1]+beta[2]^2/vphi[2];

```



```

println("valor de v2 = ",v2, "\n") ;
v = v1 +v2;
println("valor de v = ",v, "\n") ;
beta=beta';
vphi=vphi';
alfa=alfa';
// calculo da eficiencia do instrumento
decl efic;
efic=(beta.^2*dphix)./(beta.^2*dphix+vphi);
println(" eficiencia dos instrumentos e : " ,efic);
// calculo da precisao
decl pi; pi = 1./((beta'.^2)./vphi);
println("valor da precisao ",pi);
// calculo do estimador de maximo verossimilhanca da precisao
decl emvpi;
emvpi = (beta'.^2)./vphi;
println(" valor do estimador de maximo verossimilhanca da precisao
: ",emvpi);
// calculo das submatrizes que compoem a matriz de informacao
de fisher
decl num,Imixmix, Imixalfak, Imixbetak;
decl Imixsigmax, Imixsigma1, Imixsigmak, Ialfakalfak;
decl Ialfakalfal, Ialfakbetal, Ialfakbetak, Ibetakbetak;
decl Ialfaksigmax, Ialfaksigma1, Ialfaksigma1;
decl Ibetakbetal, Ibetaksigmax, Ibetaksigma1, Ibetaksigmak;
decl Ibetaksigma1, Isigmaxsigmax, Isigmaxsigma1;
decl Isigmaxsigmak, Isigma1sigma1, Isigma1sigmak;
decl Isigmaksigmak, Isigmaksigma1,iaux; num = 80; p = 2;
Imixmix = num*(1-1/(dphix*v))/dphix;
Imixalfak = (beta[1:] ./vphi[1:])*(num/(v*dphix));
Imixbetak = num*beta[1:]*dmux ./ (v*vphi[1:]*dphix);
Imixsigmax = 0;
Imixsigma1 = 0;
Ialfakalfak = num*(1-beta[1:]*beta[1:] ./ (vphi[1:]*v))./vphi[1:];
Imixsigmak = zeros(p,1);
Ialfaksigmax = zeros(p,1);
Ialfaksigma1 = zeros(p,1);
Ialfaksigma1 = zeros(p,p);
Ialfakalfal = -num * (beta[1:] * beta[1:]') ./ (v * vphi[1:] * vphi[1:]') ;
for (i = 0; i < p; ++i)
    Ialfakalfal[i][i] = Ialfakalfak[i];
Ialfakbetal = -num * (beta[1:] * beta[1:]')*dmux ./ (v * vphi[1:] *
vphi[1:]') ;

```

```

Ialfakbetak = -num*beta[1:].*beta[1:]*dmux./(v*vphi[1:].*vphi[1:])
+num*dmux./(vphi[1:]);
for (i = 0; i < p; ++i)
    Ialfakbetal[i][i] = Ialfakbetak[i];
Ibetakbetak = (num*(dmux^2+dphix-1/v))./(v*vphi[1:]+(num*beta[1:].
*beta[1:]*(2/v-dphix-dmux^2))./(v*vphi[1:].*vphi[1:]));
Ibetakbetal = num*(beta[1:].*beta[1:]')/(v*vphi[1:].*vphi[1:]')*
(2/v-dphix-dmux^2);
for (i = 0; i < p; ++i)
    Ibetakbetal[i][i] = Ibetakbetak[i];
Ibetaksigmax = (num*beta[1:]*(dphix-1/v))./(v*vphi[1:]*dphix^2);
Ibetaksigma1 = -num * beta[1:] ./ (v^2 * vphi[1:] * vphi[0]^2) ;
Ibetaksigmak = (num * beta[1:] ./ (v*vphi[1:].*vphi[1:])).*
(1-beta[1:].*beta[1:]./(v*vphi[1:]));
Ibetaksigma1 = -num *( beta[1:].*beta[1:]'.^2) ./ (v^2 * vphi[1:]
* vphi[1:]'.^2) ;
for (i = 0; i < p; ++i)
    Ibetaksigma1[i][i] = Ibetaksigmak[i];
Isigmaxsigmax = num/(2*dphix^2)-num/(v*dphix^3)+num/(2*v^2*dphix^4);
Isigmaxsigma1 = num/(2*v^2*dphix^2*vphi[0]^2);
Isigmaxsigmak = num*(beta[1:].*beta[1:])./(2*v^2*dphix^2*vphi[0]^2);
Isigma1sigma1 = num/(2*vphi[0]^2)-num/(v*vphi[0]^3)+num/(2*v^2*vphi[0]^4);
Isigma1sigmak = num*(beta[1:].*beta[1:])./(2*v^2*vphi[0]^2*vphi[1:].^2);
Isigmaksigmak = num./(2*vphi[1:].*vphi[1:])-num*(beta[1:].
*beta[1:])./(v*vphi[1:].*vphi[1:].*vphi[1:])+num*(beta[1:].*beta[1:]
.*beta[1:]
*beta[1:])./(2*v^2*vphi[1:].*vphi[1:].*vphi[1:].*vphi[1:]);
Isigmaksigma1 = num*(beta[1:].^2)*(beta[1:].^2)'./(2*v^2*(vphi[1:].^2)
*(vphi[1:].^2)');
for (i = 0; i < p; ++i)
    Isigmaksigma1[i][i] = Isigmaksigmak[i];
// concatena\c{c}\~{a}o das submatrizes
decl Imix, Ialfa, Ibeta, Isigmax, Isigma1, Isigma;
Imix = Imixmix | Imixalfak | Imixbetak | Imixsigmax | Imixsigma1
| Imixsigmak;
Ialfa = Imixalfak'|Ialfakalfal|Ialfakbetal|Ialfaksigmax'|Ialfaksigma1'
|Ialfaksigma1;
Ibeta = Imixbetak'|Ialfakbetal'|Ibetakbetal|Ibetaksigmax'|Ibetaksigma1'
|Ibetaksigma1';
Isigmax = Imixsigmax | Ialfaksigmax | Ibetaksigmax | Isigmaxsigmax |
Isigmaxsigma1 | Isigmaxsigmak;
Isigma1 = Imixsigma1 | Ialfaksigma1 | Ibetaksigma1 | Isigmaxsigma1 |
Isigma1sigma1 | Isigma1sigmak;

```

```

    Isigma = Imixsignal' | Ialfasignal | Ibetasignal | Isigmaxsignal' |
    Isigma1signal' | Isigmaksignal;
// matriz de informa\c{c}\~{a}o de fisher
decl I;
    I = Imix ~ Ialfa ~ Ibeta ~ Isigmax ~ Isigma1 ~ Isigma;
    println("valor de I = ",I, "\n") ;
//      matriz inversa da informa\c{c}\~{a}o de fisher
decl Inv;
    Inv = invert(I);
    println("valor de Inv = ",Inv, "\n") ;
decl C,C1,C2,C3,W,b,W2,b2;
    b = <0;
        0;
        1;
        1>;
    C = <0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0>;
    teta = dmu | alfa[1:] | beta[1:] | dphix | vphi;
// Estatística de Wald para testar a seguinte hipótese: alfa2 = alfa3
// alfa2=alfa3 = alfa e beta2 = beta3 = beta
    W = (C*teta-b)'*invert(C*Inv*C')*(C*teta-b);
    println(" valor de C*teta-b " ,C*teta-b);
    println(" valor de invert(C*Inv*C') " ,invert(C*Inv*C'));
    println("valor de W = ",W, "\n") ;
    b2 = <0;
        0>;
    C1 = <0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
        0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0>;
    teta = dmu | alfa[1:] | beta[1:] | dphix | vphi;
//      println("valor de teta = ",teta, "\n") ;
// Estatística de Wald para testar a seguinte hipótese:
    alfa2 = alfa3 = 0
// e beta2 = beta3 = 1
    W2 = (C1*teta-b2)'*invert(C1*Inv*C1')*(C1*teta-b2);
    println(" valor de C1*teta-b2 " ,C1*teta-b2);
    println(" valor de invert(C1*Inv*C1') " ,invert(C1*Inv*C1'));
    println("valor de W2 = ",W2, "\n") ;
// println("W1 = ",W,"W2 = ",W2, "\n");
}

```

É importante salientar que para os casos com 4 e 5 instrumentos foram feitas

expansões do programa mostrado acima para 3 instrumentos.

Referências Bibliográficas

- [1] ALFARO, Katia Hermelinda Garcia, (2000) *Modelo de Calibração Comparativa em Grupos*, Tese, IME-USP
- [2] AYRES JR., Frank (1976), *Matrizes*, Coleção Schaum, Editora McGRAW HILL DO BRASIL LTDA.
- [3] BARNETT, V. D., Simultaneous pairwise linear structural relationships, *Biometrics*, 25 (1969), pp. 129–142.
- [4] BICKEL, Peter Jonh e DOKSUM, Kjelli A. (1977), *Mathematical Statistical* San Francisco, Holden Day - USA.
- [5] BOLFARINE, Heleno e ROJAS, Manuel Galea, (1995), Maximum Likelihood Estimation of Simultaneous Pairwise Linear Structural Relationships, *Biometrical Journal*, 37, pp. 673–689.
- [6] CASELLA, GEORGE e BERGER, ROGER L. (1990), *Statistical Inference*, Wadsworth Brooks, California, EUA
- [7] CARTER, R., L. (1981), Restricted Maximum Likelihood Estimation of Bias and Reliability in the Comparison of Several Measuring Methods *Biometrics*, 37, pp. 733–741.
- [8] DEMPSTER, A. P. N. M. and RUBIN. D. B. (1977), Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm. *Journal Roayl Statistical Society Ser B* 39, pp. 1–38
- [9] DORNIK, J. A. (1996). Ox An Objeted Oriented Matrix Program Language, *International Thomson Business Press.*, IP. London
- [10] DORNIK, J. A. (1998). Objeted oriented matrix program using Ox 2.0. *Timberlake Consultants Ltd*, London
- [11] FULLER, W. A., (1987), *Measurement Error Models*, Wiley, New York
- [12] GRAYBILL, F. A. (1983), *Matrices with applications in statistics*. Second Edition, Wadsworth.

- [13] GILL, Philip E.; MURRAY, Walter e WRIGHT, Margaret, H. (1981), *Practical Optimization*, Academic Press, New York, EUA.
- [14] JOHNSON, Richard A. e WICHERN, DEAN W.(1998), *Applied Multivariate statistical Analysis*, Fourth Edition, Prentice Hall, Upper saddle River, New Jersey EUA
- [15] KAPLAN, WILFRED (1985). *Cálculo Avançado*, volume 1, quinta edição, *Editora Edgard Blucher Ltda*, Rio de Janeiro Brasil
- [16] NETER, Jonh, KUTNER, Michael H., NACHTSHEIM, Christopher J. e WASSERMAN, William (1996), *Applied Linear statistical Models*, Fourth Edition, *Irwin*, Chicago, EUA
- [17] NETER, Jonh, WASSERMAN, William e WHITMORE, G.A., (1993), *Applied Statistics*, Fourth Edition, *Allyn and Bacon*, Boston, EUA
- [18] RAO, Calyampudi Radhakrishma (1973), *Linear Statistifcal Inference and Its Apli-cations*, Second Edition, Jonh Wiley & Sons, New York, EUA.
- [19] SIMÕES, João M., MELLO, Helladio do A. e BARBIN, Décio. (1967), Eficiência dos Aparelhos e Influência do Operador na Medição de altura Total das Árvores, *O solo*, 2, pp. 57–63