A Teia Browniana radial

León Alexander Valencia Henao

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes

Co-Orientador: Prof. Dr. Cristian Favio Coletti

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, Abril de 2012.

A Teia Browniana radial

Este exemplar corresponde à redação
final tese devidamente corrigida
e defendida por León Alexander Valencia Henao
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes - IME-USP.
- Prof. Dr. Cristian Favio Coletti - UFABC.
- Prof. Dr. Glauco Valle da Silva Coelho - UFRJ.
- Prof. Dr. Sebastian Pablo Grynberg - UBA.
- Prof. Dr. Christophe Frederic Gallesco - IMECC.

Agradecimentos

Ao professor meu orientador Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes, pelo apoio, por sua paciência, por sua confiança e especialmente pelo gran exemplo de profissionalismo e integridade.

Ao professor meu co-orientador Prof. Dr. Cristian Coletti, pelo apoio, por sua paciencia e especialmente por seus valiosos conselhos.

A todos os profesores de IME, com os quais tive o prazer de ter assistido aulas, especialmente ao Prof. Dr. Fabio Machado pela ajuda durante nesses anos todos.

A minha esposa Paola, pelo amor e enorme compreensão.

A minha familia pelo grande amor e carinho.

Aos meus amigos do IME pela companhia, por sua paciência e pelos conselhos.

Ao grande povo Brasileiro, sempre feliz, sempre sorrindo.

A minha filha Mariana e a minha esposa Paola.

Resumo

A Teia Browniana radial

Introduzimos uma familia de trajetórias aleatórias coalescentes com certo tipo de comportamento radial a qual chamaremos de Teia Poissoniana radial discreta. Mostramos que o limite fraco na escala difusiva desta familia é uma familia de trajetórias aleatórias coalescentes que chamaremos de Teia Browniana radial. Por fim, caraterizamos o objeto limite como um mapeamento continuo da Teia Browniana restrita num subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Palavras-chave: Teia Browniana, limite de escala, convergência fraca.

Abstract

The Radial Brownian Web

We introduce a family of coalescing random paths with certain kind of radial behavior. We call them the discrete radial Poisson Web. We show that under diffusive scaling this family converges in distribution to a family of coalescing random paths which we call radial Brownian Web. Finally, we characterize the limiting object as a continuous mapping of the Brownian Web restricted to a subset of $\mathbb{R}^2$.

Keywords: Brownian Web, scaling limit, weak convergence.

Sumário

Lista de Figuras **ix**

1 Introdução **1**

2 A Teia Browniana restrita **3**

2.1 Caracterização e convergência à Teia Browniana 3

2.2 Teia Browniana restrita 6

3 Teia Poissoniana radial discreta **9**

3.1 Descrição detalhada do modelo 9

3.2 Propriedades da Teia Poissoniana Radial Discreta. 13

3.3 Enunciado do Teorema principal 21

4 Aproximações do modelo **23**

4.1 Primeira aproximação. 23

4.2 Segunda aproximação 26

4.3 Terceira aproximação 27

4.4 Convergência de uma única trajetória 31

4.5 Transformação adequada. 33

5 Prova do teorema principal **37**

5.1 Tempo de Coalescência 37

5.2 Condição (I) 45

5.3 Condição B_1. 52

5.4 Condição B_2. 52

5.5 Prova do Teorema principal 56

A Convergência em distribuição **57**

B Alguns resultados **67**

Referências Bibliográficas **71**

Lista de Figuras

1.1 Descrição 2

3.1 J_k^n 11
3.2 Pontos especiais 12
3.3 Teia Poissoniana radial discreta 13

Capítulo 1

Introdução

Inicialmente vamos fazer uma descrição informal e simplificada do modelo e dos resultados. No capitulo 2 fazemos o detalhamento necessário e enunciamos nosso resultado de forma precisa. Considere n circuferências em $\mathbb{R}^2$ com centro na origem e raios $n, n-1, n-2, ..., 1$ respectivamente. Sobre cada circunferência consideremos um processo de Poisson de taxa 1 independente dos demais. Cada ponto de Poisson de cada circunferência se liga linearmente ao ponto mais próximo da circunferência interior seguinte -quando não houver tal ponto, então procuramos um ponto na circunferência interior seguinte- e assim sucessivamente até a origem. Nesta forma, obtemos uma familia de curvas poligonais -que chamaremos momentaneamente de "caminhos"- ligando os pontos de Poisson à origem. Veja a Figura 1.1 para uma representação esquemática de uma realização do modelo.

O objetivo deste trabalho a grosso modo é obter o limite de escala para uma subfamilia desta familia de curvas numa escala difusiva onde a direção radial cumpre o papel do tempo, e a direção angular cumpre o papel do espaço.

A familia de curvas limite está relacionada com a Teia Browniana por meio de uma transformação.

A motivação deste trabalho é a Árvore geradora radial de Bacelli e Bordenave [8]. Aquele modelo é também uma familia de curvas poligonais conectando pontos de um processo de Poisson no disco de raio n (mais um ponto na origem), de tal forma que cada ponto P se conecta ao ponto de Poisson mais próximo no disco aberto com centro na origem e cuja fronteira contém P, sucessivamente até a origem. Este modelo apresenta dependência, em particular falta de Markovianidade das trajetórias, que dificulta sua análise.

O ponte em comum com nosso modelo é a componente radial. Um segundo objetivo, é entender o efeito de essa componente em nosso modelo.

A tese esta dividida da seguinte forma. No capitulo 2 fazemos uma breve descrição da Teia Brow-

niana [1] para introduzir um objeto que chamaremos a Teia Browniana restrita (**TBR**) de uma forma natural. A **TBR** resulta sendo uma restrição da Teia Browniana sobre conjuntos da forma $\mathbb{R} \times [r, s]$, com $-\infty < r < s < \infty$. No capítulo 3 fazemos uma descrição formal de nosso modelo, que chamaremos Teia Poissoniana radial discreta (**TPRD**), mostramos algumas propriedades importantes e enunciamos de forma sucinta o teorema principal deste trabalho. No capítulo 4 estudamos familias de trajetórias, que chamaremos de "aproximações" a nosso modelo, que ajudam a entender o efeito da componente radial assim como também a encontrar o limite fraco na escala difusiva da **TPRD**. Finalmente, no capítulo 4 desenvolvemos todas as ferramentas para provar o teorema principal assim como a prova mesma do teorema, isto é, a convergência fraca na escala difusiva da **TPRD** a um mapeamento continuo da **TBR**.

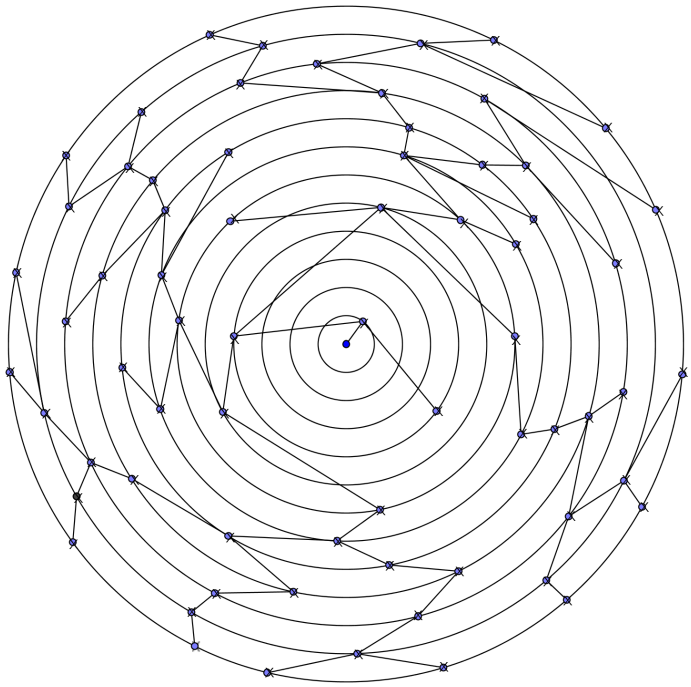

Figura 1.1: Descrição

Capítulo 2

A Teia Browniana restrita

Como anticipamos na introdução, a Teia Browniana tem um papel muito importante neste trabalho. Definiremos um objeto chamado Teia Browniana restrita, que pode se pensar como uma restrição da Teia Browniana em conjuntos da forma $\mathbb{R} \times [r, s]$ com $-\infty < r < s < \infty$.

A continuação faremos uma breve descrição da Teia Browniana, para logo introducir a Teia Browniana restrita de forma mais natural.

2.1 Caracterização e convergência à Teia Browniana

Seja $\left(\overline{\mathbb{R}}^2, \rho\right)$ a compactificação de $\mathbb{R}^2$ pela métrica ρ dada por

$$\rho\left((x_1, t_1), (x_2, t_2)\right) = \left|\frac{\tanh(x_1)}{1+|t_1|} - \frac{\tanh(x_2)}{1+|t_2|}\right| \vee |\tanh(t_1) - \tanh(t_2)|. \tag{2.1}$$

$\overline{\mathbb{R}}^2$ pode ser pensado como a imagem de $[-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty]$ pela função

$$(x, t) \rightsquigarrow (\Phi(x, t), \Psi(t)) \equiv \left(\frac{\tanh(x)}{1+|t|}, \tanh(t)\right). \tag{2.2}$$

Para $t_0 \in [-\infty, \infty]$ seja $C[t_0]$ o conjunto das funções f de $[t_0, \infty]$ a $[-\infty, \infty]$ tais que $\Phi(f(t), t)$ é continua. Com isso, definimos

$$\Pi = \cup_{t_0 \in [-\infty, \infty]} C[t_0] \times \{t_0\}, \tag{2.3}$$

sendo que $(f, t_0) \in \Pi$ representa um caminho em $\overline{\mathbb{R}}^2$ começando em $(f(t_0), t_0)$. Para $(f, t_0) \in \Pi$, denotamos por $\hat{f}$ a função que estende f a todo $[-\infty, \infty]$ definindo $f(t) = f(t_0)$ para $t < t_0$. Assim, definimos

$$d\left((f_1, t_1), (f_2, t_2)\right) = \sup_t |\Phi(\hat{f}_1(t), t) - \Phi(\hat{f}_2(t), t)| \vee |\Psi(t_1) - \Psi(t_2)|. \tag{2.4}$$

Nestas condições, (Π, d) é um espaço métrico completo separável.

Seja agora $\mathcal{H}$ o conjunto dos subconjuntos compactos de (Π, d), com $d_{\mathcal{H}}$ a métrica de Hausdorff induzida, i.e.,

$$d_{\mathcal{H}}(K_1, K_2) = \sup_{g_1 \in K_1} \inf_{g_2 \in K_2} d(g_1, g_2) \vee \sup_{g \in K_2} \inf_{g_1 \in K_1} d(g_1, g_2). \tag{2.5}$$

Temos então que $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ é também um espaço métrico completo separável.

Seja $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ a σ-álgebra associada à métrica $d_{\mathcal{H}}$.

Teorema 2.1.1 *Existe uma variável aleatória $\overline{\mathcal{W}}$ com valores em $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ cuja distribuição está univocamente determinada pelas três propriedades a seguir:*

1. *Para qualquer ponto determinístico $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ existe, quase certamente, um único caminho $W_{x,t}$ começando em (x, t).*
2. *Para qualquer número determinístico n e $(x_1, t_1), ..., (x_n, t_n) \in \mathbb{R}^2$ a lei conjunta de $W_{x_1,t_1}...$, W_{x_n,t_n} é a lei de movimentos Brownianos coalescentes (com constante de difusão unitária).*
3. *Para qualquer subconjunto denso enumerável $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, quase certamente, $\overline{\mathcal{W}}$ é o fecho em $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ de $\{W_{x,t} : (x, t) \in \mathcal{D}\}$.*

Dando continuidade, mostraremos uma forma de construir a teia Browniana. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade onde está definida uma família independente e identicamente distribuída (i.i.d.) de Movimentos Brownianos. Seja $\mathcal{D} = \{(x_j, t_j), j \geq 1\}$ um subconjunto denso de $\mathbb{R}^2$ e

$$W_j(t) = x_j + B_j(t - t_j), t \geq t_j \tag{2.6}$$

um caminho Browniano começando em x_j no instante t_j.
Agora, especificando regras de coalescência, construímos caminhos Brownianos coalescentes a partir da família de caminhos $\{W_j\}_{j \geq 1}$. Quando dois caminhos se encontram pela primeira vez, coalescem em um caminho, que é aquele do movimento Browniano com o menor índice. Os caminhos coalescentes serão denotados por $\tilde{W}_j, j \geq 1$. Formalmente, definimos

$$\tilde{W}_1 = W_1. \tag{2.7}$$

e para $j \geq 2$, tomamos $\tilde{W}_j$ a aplicação de $[t_j, \infty)$ em $\mathbb{R}$ definida da seguinte forma. Seja

$$\tau_j = \inf\{t \geq t_j : W_j(t) = \tilde{W}_i(t) \text{ para algum } 1 \leq i < j\}, \tag{2.8}$$

$$I_j = \min\{1 \leq i < j : W_j(\tau_j) = \tilde{W}_i(\tau_j)\} \tag{2.9}$$

o primeiro instante quando W_j encontra algum caminho $\tilde{W}_i$ com $i < j$, e a menor etiqueta entre tais caminhos. Definimos agora

$$\begin{aligned}\tilde{W}_j(t) &= W_j(t), \text{ se } t_j \leq t \leq \tau_j \\ &= \tilde{W}_{I_j}(t), \text{ se } t > \tau_j \end{aligned} \tag{2.10}$$

A seguir definimos $\mathcal{W}(\mathcal{D})$, o esqueleto da teia Browniana, começando do conjunto $\mathcal{D}$ da seguinte forma:

$$\tilde{\mathcal{W}}_k = \tilde{\mathcal{W}}_k(\mathcal{D}) = \{\tilde{W}_j : 1 \leq j \leq k\} \tag{2.11}$$

$$\tilde{\mathcal{W}} = \tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{D}) = \cup_k \tilde{\mathcal{W}}_k \tag{2.12}$$

Definição 2.1.1 *Seja $\overline{\mathcal{W}}(\mathcal{D})$ o fecho em (Π, d) de $\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{D})$. $\overline{\mathcal{W}}(\mathcal{D})$ é o objeto ao qual chamaremos teia Browniana.*

A teia Browniana $\overline{\mathcal{W}}(\mathcal{D})$ possui uma série de propriedades apresentadas na seguinte proposição.

Proposição 2.1.1 *$\overline{\mathcal{W}}(\mathcal{D})$ possui as seguintes propriedades.*

1. *Quase certamente é um subconjunto compacto de (Π, d)*
2. *Quase certamente, $\overline{\mathcal{W}}(\mathcal{D}) = \lim_{k\to\infty} \tilde{W}_k(\mathcal{D})$, sendo que o limite é tomado em $\mathcal{H}$.*
3. *A distribuição de $\overline{\mathcal{W}}(\mathcal{D})$ independe de $\mathcal{D}$ e de seu ordenamento.*
4. *$\overline{\mathcal{W}}(\mathcal{D})$ satisfaz as propriedades 1 e 2 do Teorema 2.1.1; i.e., suas distribuições finito dimensionais correspondem às distribuições de movimentos Brownianos coalescentes. Mais ainda, também satisfaz a propriedade 3 do Teorema 2.1.1.*
5. *Quase certamente, para todo $\epsilon > 0$ e para todo $\theta = (f, t_0) \in \overline{\mathcal{W}}(\mathcal{D})$, existe um caminho $\theta_\epsilon = (g, t_0')$ no esqueleto $\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{D})$ tal que $g(s) = f(s)$ para todo $s \geq t_0 + \epsilon$.*

Daremos agora um critério de convergência para variáveis definidas em $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_\mathcal{H})$. Tal critério envolve uma variável aleatória de contagem definida a seguir.

Definição 2.1.2 *Dado $t_0 \in \mathbb{R}, t > 0, a < b$ e uma variável aleatória $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_\mathcal{H})$-valuada, χ, seja $\eta_\chi(t_0, t; a, b)$ o número de pontos distintos em $\mathbb{R} \times \{t_0 + t\}$ atingidos por caminhos em χ que também cruzam o segmento $[a, b] \times \{t_0\}$.*

Teorema 2.1.2 *Suponha que $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, ...$ são variáveis aleatórias com valores em $(\mathcal{H}, \mathcal{F}_\mathcal{H})$ com caminhos que não se cruzam. Se as condições a seguir são válidas, então a distribuição μ_n de $\mathcal{X}_n$ converge à distribuição $\mu_{\bar{\mathcal{W}}}$ da teia Browniana standard.*

- *(I) Para qualquer $y_1, y_2, ..., y_m \in \mathcal{D}$ determinísticos, em que $\mathcal{D}$ é um subconjunto (determinístico e arbitrário) denso e enumerável de $\mathbb{R}^2$, existem $\theta_n^{y_1}, ..., \theta_n^{y_m} \in \mathcal{X}_n$ tais que $\theta_n^{y_1}, ..., \theta_n^{y_m}$ convergem em distribuição a movimentos Brownianos coalescentes (com constante de difusão 1) começando em $y_1, y_2, ..., y_m$.*

- (B_1) $\forall\ t > 0, \limsup_{n\to\infty} \sup_{(a,t_0)\in\mathbb{R}^2} \mu_n(\eta_{\mathcal{X}_n}(t_0, t; a, a+\epsilon) \geq 2) \to 0$ *quando* $\epsilon \to 0+$*;*
- (B_2) $\forall\ t > 0, \epsilon^{-1} \limsup_{n\to\infty} \sup_{(a,t_0)\in\mathbb{R}^2} \mu_n(\eta_{\mathcal{X}_n}(t_0, t; a, a+\epsilon) \geq 3) \to 0$ *quando* $\epsilon \to 0+$

2.2 Teia Browniana restrita

Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ com $r < s$ e $A_{r,s} = \mathbb{R} \times [r, s]$. Seja $\bar{A}_{r,s}$ a compatificação de $A_{r,s}$ pela métrica $\bar{\rho}$ dada por:

$$\bar{\rho}((x_1, t_1), (x_2, t_2)) = \left| \frac{\tanh(x_1)}{1+|t_1|} - \frac{\tanh(x_2)}{1+|t_2|} \right| \vee |\tanh(t_1) - \tanh(t_2)|. \tag{2.13}$$

$\bar{A}_{r,s}$ pode ser pensado como a imagem de $[-\infty, \infty] \times [r, s]$ pela função

$$(x, t) \rightsquigarrow (\Phi(x, t), \Psi(t)) \equiv \left(\frac{\tanh(x)}{1+|t|}, \tanh(t) \right). \tag{2.14}$$

Para $t_0 \in [r, s]$ seja $\mathcal{C}_{r,s}[t_0]$ o conjunto das funções f de $[t_0, s]$ em $[-\infty, \infty]$ continuas. Definimos

$$\Pi_{r,s} = \bigcup_{t_0\in[r,s]} \mathcal{C}_{r,s}[t_0] \times \{t_0\} \tag{2.15}$$

sendo que $(f, t_0) \in \Pi_{r,s}$ representa um caminho em $\bar{A}_{r,s}$ começando em $(f(t_0), t_0)$ (tal caminho é um ponto no caso $t_0 = s$). Denotamos por $\hat{f}$ a função que estende f a todo $[r, s]$ definindo $f(t) = f(t_0)$ para $r \leq t \leq t_0$. Assim, definimos

$$d_{r,s}((f_1, t_1), (f_2, t_2)) = \sup_{r\leq t\leq s} \sup_t |\Phi(\hat{f}_1(t), t) - \Phi(\hat{f}_2(t), t)| \vee |\Psi(t_1) - \Psi(t_2)|. \tag{2.16}$$

Nestas condições, $(\Pi_{r,s}, d_{r,s})$ é um espaço métrico completo separável.

Seja agora $\mathcal{H}_{r,s}$ o conjunto dos subconjuntos compactos de $(\Pi_{r,s}, d_{r,s})$, com $d_{\mathcal{H}_{r,s}}$ a métrica de Hausdorff induzida, i.e.,

$$d_{\mathcal{H}_{r,s}}(K_1, K_2) = \sup_{g_1\in K_1} \inf_{g_2\in K_2} d_{r,s}(g_1, g_2) \vee \sup_{g_2\in K_2} \inf_{g_1\in K_1} d_{r,s}(g_1, g_2). \tag{2.17}$$

Temos então que $(\mathcal{H}_{r,s}, d_{\mathcal{H}_{r,s}})$ é também um espaço métrico completo separável.

Seja $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_{r,s}}$ a σ-álgebra associada à $d_{\mathcal{H}_{r,s}}$.

A continuação vamos a usar a Teia Browniana para caraterizar e dar criterios de convergência à Teia Browniana restrita.

Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ fixos, com $r < s$. Seja

$$\hat{\mathcal{H}}_r^s := \{\mathcal{J} \in \mathcal{H} : \text{Existe } \ (f, t_0) \in \mathcal{J} \ \text{ com } \ t_0 \in [r, s]\}.$$

Isto é, $\hat{\mathcal{H}}_r^s$ é o subconjunto de $\mathcal{H}$ formado pelas familias de trajetórias compactas que tem pelo menos uma trajetória saindo de $\bar{A}_{r,s}$. É claro que é um conjunto fechado de $\mathcal{H}$, portanto, $\hat{\mathcal{H}}_r^s$ é um espaço métrico completo separavél.

Consideremos o seguinte mapeamento $\mathfrak{T}$ de $\hat{\mathcal{H}}_r^s$ em $\mathcal{H}_{r,s}$,

$$\mathfrak{T}(K) = \{(f, t_0) \in K \text{ restrita ao conjunto } \bar{A}_{r,s} : t_0 \in [r, s]\} \tag{2.18}$$

Isto é, $\mathfrak{T}(K)$ é o conjunto de trajetórias de K que começam em pontos de $\bar{A}_{r,s}$ restritas ao conjunto $\bar{A}_{r,s}$.

Se $K \in \hat{\mathcal{H}}_r^s$, consideremos o conjunto $K' = \{(f, t_0) \in K : t_0 \in [r, s]\}$, segui que K' é um subconjunto fechado de K e portanto é um subconjunto compacto de trajetórias. Logo, é fácil ver que o conjunto formado pelas trajetórias de K' restritas ao conjunto $\bar{A}_{r,s}$ é compacto, isto é, $\mathfrak{T}(K) = \mathfrak{T}(K')$ é compacto. Portanto $\mathfrak{T}$ esta bem definida.

A continuidade de $\mathfrak{T}$ segue também naturalmente, pois se $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\hat{\mathcal{H}}_r^s$ tal que $K_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} K$, então claramente $\mathfrak{T}(K_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{T}(K)$.

Teorema 2.2.1 *Existe uma variavél aleatória $\bar{\mathcal{W}}_{r,s}$ com valores em $(\mathcal{H}_{r,s}, \mathfrak{F}_{\mathcal{H}_{r,s}})$ cuja distribuição está univocamente determinada pelas três propriedades a seguir:*

1. *Para qualquer ponto determinístico $(x, t) \in A_{r,s}$ existe, quase certamente, um único caminho $W_{x,t}$ começando em (x, t).*
2. *Para qualquer número determinístico n e $(x_1, t_1), ..., (x_n, t_n) \in A_{r,s}$ a lei conjunta de $W_{x_1,t_1}, ..., W_{x_n,t_n}$ é a lei de movimentos Brownianos coalescentes (com constante de difusão unitária).*
3. *Para qualquer subconjunto denso enumerável $\mathcal{D}$ de $A_{r,s}$, quase certamente, $\bar{\mathcal{W}}_{r,s}$ é o fecho em $(\mathcal{H}_{r,s}, \mathfrak{F}_{\mathcal{H}_{r,s}})$ de $\{W_{x,t} : (x, t) \in \mathcal{D}\}$,*

Prova: Do Teorema 2.1.1 temos que $\mathcal{W} \in \hat{\mathcal{H}}_r^s$ quase certamente, o resultado segue da continuidade de $\mathfrak{T}$ e o Teorema 2.1.1. □

Observação 2.2.1 *Caso $(x, t) = (x, s)$, então $W_{x,s}$ pode se pensar como um movimento Browniano começando em (x, s) e finalizando em (x, s) (um ponto).*

A variável aleatória $\bar{\mathcal{W}}_{r,s}$ será chamada de Teia Browniana restrita.

O teorema a seguir fornece critérios para verificar a convergência para a Teia Browniana restrita.

Dado $t_0 \in [r,s]$, $t > 0$, $a < b$ e $\mathcal{M}$ uma variável aleatória assumindo valores em $(\mathcal{H}_{r,s}, \mathfrak{F}_{\mathcal{H}_{r,s}})$, seja $\eta_{\mathcal{M}}(t_0, t; a, b)$ variável aleatória que assume valores em $\{0, 1, 2, ...\}$ representando o número de pontos distintos em $\mathbb{R} \times \{t_0 + t\}$ que são alcançados por caminhos de $\mathcal{M}$ que também tocam pontos em $[a, b] \times \{t_0\}$, definimos $\eta_{\mathcal{M}}(t_0, t; a, b) \equiv 0$ se $t_0 + t > s$.

Teorema 2.2.2 *Suponha que $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, ...$ são variáveis aleatórias com valores em $(\mathcal{H}_{r,s}, \mathfrak{F}_{\mathcal{H}_{r,s}})$ com caminhos que não se cruzam. Se as condições a seguir são válidas, então a distribuição μ_n de $\mathcal{X}_n$ converge à distribuição $\mu_{\bar{\mathcal{W}}_{r,s}}$ da teia Browniana restrita.*

- *(I) Para qualquer $y_1, y_2, ..., y_m \in \mathcal{D}$ determinísticos, em que $\mathcal{D}$ é um subconjunto (determinístico e arbitrário) denso e enumerável de $A_{r,s}$, existem $\theta_n^{y_1}, ..., \theta_n^{y_m} \in \mathcal{X}_n$ tais que $\theta_n^{y_1}, ..., \theta_n^{y_m}$ convergem em distribuição a movimentos Brownianos coalescentes (com constante de difusão 1) começando em $y_1, y_2, ..., y_m$.*
- *(B_1) $\forall\ t > 0, \limsup_{n\to\infty} \sup_{(a,t_0)\in A_{r,s}} \mu_n(\eta_{\mathcal{X}_n}(t_0, t; a, a+\epsilon) \geq 2) \to 0$ quando $\epsilon \to 0+$;*
- *(B_2) $\forall\ t > 0, \epsilon^{-1} \limsup_{n\to\infty} \sup_{(a,t_0)\in A_{r,s}} \mu_n(\eta_{\mathcal{X}_n}(t_0, t; a, a+\epsilon) \geq 3) \to 0$ quando $\epsilon \to 0+$*

Ideia da prova: O fato dos caminhos não se cruzarem, somado a condição (I) garantem que a sequência $(\mathcal{X}_n)_{n=1}^{\infty}$ é justa. As condições (B_1) e (I) garantem que todo limite subsequêncial $\mathcal{X}$ de $\{\mathcal{X}_n\}$ (com distribuição $\mu_{\mathcal{X}}$), e para qualquer ponto determinístico $(x,t) \in A_{r,s}$, existe $\mu_{\mathcal{X}}$ quase certamente ao menos um caminho começando de (x,t) (que é um ponto no caso $(x,t) = (x,s)$). Também que a distribuição dos caminhos começando desde subconjuntos finitos de $\mathcal{D}$ são movimentos Brownianos coalescentes (alguns caminhos podem ser simplesmente pontos). Isto mostra que $\mathcal{X}$ contem ao menos os caminhos da Brownian Web restrita $\bar{\mathcal{W}}_{r,s}$.
As condições (B_1) e (B_2) juntas implicam que $\mathbb{E}[\eta_{\mathcal{X}}(t_0, t; a, b)] \leq \mathbb{E}[\eta_{\overline{\mathcal{W}}}(t_0, t; a, b)] = 1 + \frac{b-a}{\sqrt{\pi t}}$ para todo $t_0 \in [r,s], t > 0, a, b \in \mathbb{R}$, o qual pelo Teorema 4.6 em [1] implica que $\mathcal{X}$ não contem caminhos extras aqueles de $\bar{\mathcal{W}}_{r,s}$. $\square$

Capítulo 3

Teia Poissoniana radial discreta

3.1 Descrição detalhada do modelo

Para obter o resultado de convergência fraca da família de curvas de nosso modelo é conveniente realizá-las num espaço apropriado, em que a família limite também esteja contida. Por isto, introduziremos algumas restrições à definição anterior. A primeira se refere ao fato que na escala difusiva que consideraremos, faz sentido incluir apenas caminhos poligonais iniciando numa região angular de ordem $\sqrt{n}$, levando em conta a região radial de ordem n. Nossa familia então serão aqueles caminhos poligonais iniciando em pontos de Poisson de um retângulo de lado maior de ordem n, ao longo da direção radial e lado menor de ordem $\sqrt{n}$ (de fato um pouco mais do que isto) excluindo a origem. Uma segunda restrição é que é desejável que tais caminhos sejam trajetórias -isto é, que sejam estritamente monotônas na região radial- o que nos fará modificar um pouco a definição de caminhos, restringido-os à região retangular mencionada acima. Esta segunda restrição não introduz uma modificação importante na medida em que os caminhos originais iniciando em pontos do retângulo são trajetórias simultaneamente com alta probabilidade. Chamaremos a familia de curvas desta definição mais precisa de Teia Poissoniana radial discreta (TPRD).

Vamos as definições. Sejam $\alpha \in (0,1)$ e $\delta \in (1/4, 1/3)$ fixos. Seja $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Definimos θ_z como sendo igual ao ângulo entre os vetores $\vec{z}$ e $-\vec{j} = (0,-1)$ e seja $\tilde{\theta}_z = sgn(x)\theta_z$. Para $n \in \mathbb{N}$ considere os conjuntos

$$\mathcal{B}_n := \mathcal{B}_n^{\delta,\alpha} := \left\{ z \in \mathbb{R} \times [-n, -n\alpha] : \left|\tilde{\theta}_z\right| \leq n^{\delta/2-1/2}/2 \right\} \tag{3.1}$$

e

$$\mathcal{A}_n := \mathcal{A}_n^{\delta,\alpha} := \left\{ z \in \mathbb{R} \times [-n, -n\alpha] : \left|\tilde{\theta}_z\right| \leq n^{\delta-1/2}/2 \right\}. \tag{3.2}$$

onde $\mathcal{A}_n$ é o retângulo que mencionamos acima.

Observação 3.1.1 *O fato de ter $\delta \in (0, 1/3)$ implica que com alta probabilidade, nossa família de curvas poligonais são trajetórias e o fato de ter $\delta > 1/4$ e $\alpha \in (0, 1)$ implica que com alta probabilidade, a família de curvas está contida no int$\mathcal{A}_n$, como mostraremos posteriormente.*

Para $n \in \mathbb{N}$, sejam $k_n = \lfloor n(1-\alpha) \rfloor$ e $A_k^n := [-\frac{\pi}{2}(n-k), \frac{\pi}{2}(n-k)]$ para $k = 0, 1, ..., k_n$. Seja $J_{k,n} : A_k^n \mapsto \tilde{A}_k^n$, a seguinte função bijetiva ($\tilde{A}_k^n = J_{k,n}(A_k^n)$),

$$J_{k,n}(r) = (n-k)\left(\sin\left(\frac{r}{n-k}\right), -\cos\left(\frac{r}{n-k}\right)\right), \quad 0 \leq k \leq k_n + 1. \tag{3.3}$$

Observação 3.1.2 *Se $r, s \in A_k^n$ então os pontos $J_{k,n}(r), J_{k,n}(s) \in \tilde{A}_k^n$ são tais que o comprimento do arco de circunferência em $\tilde{A}_k^n$ determinado por eles é igual ao comprimento do intervalo determinado por r, s (ver Figura 3.1). Isto é consequência do seguinte, $\tilde{\theta}_{J_{k,n}(r)} = \frac{r}{n-k}, \tilde{\theta}_{J_{k,n}(s)} = \frac{s}{n-k}$, com a norma euclideana $\|J_{k,n}(r)\| = \|J_{k,n}(s)\| = n-k$ e lembrando que ângulo $\times$ raio = comprimento do arco, temos que o comprimento do arco determinado por $J_{k,n}(r), J_{k,n}(s)$,*

$$\left|(n-k) \times \left(\frac{r}{n-k} - \frac{s}{n-k}\right)\right| = |r-s|.$$

Seja $(P_j)_{j=0}^{\infty}$ uma sequência de processos de Poisson independentes de taxa 1 em $\mathbb{R}$. Seja $P_k^n = P_k \cap A_k^n$, o conjunto de pontos do processo P_k sobre A_k^n, $k = 0, 1, ..., k_n + 1$ e seja $\hat{P}_k^n = J_{k,n}(P_k^n)$, isto é, os pontos que o processo P_k induz sobre $\tilde{A}_k^n$ pela função $J_{k,n}$, $k = 0, 1, ..., k_n$.

Dizemos que $\hat{P}_k^n$ é um processo de Poisson de taxa 1 em $\tilde{A}_k^n$ no sentido da função $J_{k,n}$ sobre P_k^n.

Sejam

$$u_k^n(+) = (n-k)\left(\sin\left(n^{\delta-1/2}\right), -\cos\left(n^{\delta-1/2}\right)\right) \quad \text{e} \quad u_k^n(-) = (n-k)\left(\sin\left(-n^{\delta-1/2}\right), -\cos\left(n^{\delta-1/2}\right)\right) \tag{3.4}$$

para $k = 0, 1, ..., k_n + 1$.

Definição 3.1.1 *Seja $\|\cdot\|$ a métrica euclideana em $\mathbb{R}^2$. Para $z_k \in \tilde{A}_k^n \cap \mathcal{A}_n$, sejam*

$$z_k(+) := \arg\min_{\tilde{z} \in \tilde{A}_{k+1}} \|z_k - \tilde{z}\|, \tag{3.5}$$

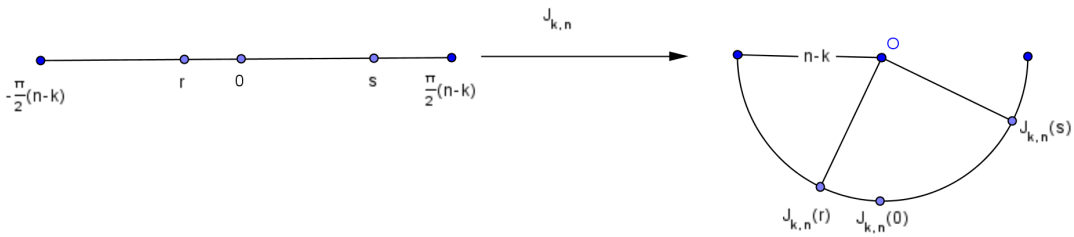

Figura 3.1: J_k^n

$$\gamma(z_k) := \arg\min_{\tilde{z}\in\{u_{k+1}^n(+),u_{k+1}^n(-)\}} \|z_k - \tilde{z}\|, \tag{3.6}$$

$$\beta(z_k) := \arg\min_{\tilde{z}\in\hat{P}_{k+1}^n} \|z_k - \tilde{z}\| \quad \textit{se existir ou} \quad \beta(z_k) = \gamma(z_k) \quad \textit{caso contrário} \tag{3.7}$$

e

$$G_k : \tilde{A}_k^n \times \tilde{A}_k^n \mapsto [0, \pi(n-k)] \quad \textit{onde} \quad G_k(z_k^1, z_k^2) = |J_{k,n}^{-1}(z_k^1) - J_{k,n}^{-1}(z_k^2)| \tag{3.8}$$

para $k = 0, 1, ..., k_n$. (Ver Figura 3.2). Note que pela observação 3.1.2 $G_k(z_k^1, z_k^2)$ é simplesmente o comprimento do arco de circunferência determinado pelos pontos z_k^1, z_k^2 em $\tilde{A}_k^n$.

Note que $\mathbb{P}\left[\arg\min_{\tilde{z}\in\hat{P}_{k+1}^n} \|z_k - \tilde{z}\| = \gamma(z_k)\right] = 0$, isto é, a probabilidade que um ponto de Poisson esteja sobre a fronteira de $\mathcal{A}_n$ é 0.

Seja $\kappa \in (0, 1/2 - \delta)$ fixo. Dado $z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n$, com $0 \leq k \leq k_n$ definimos $\beta^0(z_k) = z_k$ e

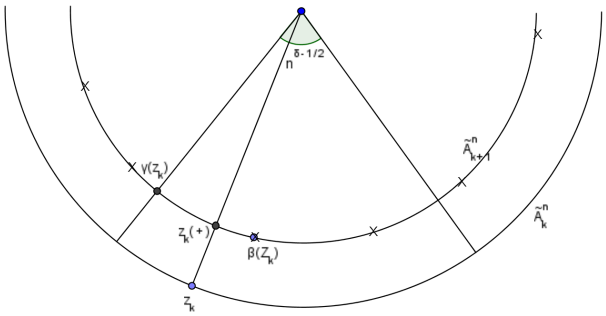

Figura 3.2: Pontos especiais

$\beta^j(z_k) = \beta(\beta^{j-1}(z_k))$ para $j = 1, 2, ..., k_n - k - j$. Seja

$$J(z_k) = \max\{j : \beta^j(z_k) \in \mathcal{A}_n \cap \hat{P}^n_{k+j} \quad \wedge \quad G_{k+j}(\beta^{j-1}(z_k)(+), \beta^j(z_k)) \leq n^\kappa\}.$$

se tal $j \in \mathbb{N}$ existir, caso contrario $J(z_k) = 0$.

Informalmente, $J(z_k)$ nos diz até qual circunfêrencia acontecem os eventos "bons", isto é, não temos saltos muito "longos" e continuamos interpolando no $int\mathcal{A}_n$. Depois de $J(z_k)$ vamos ligar o ultimo ponto à fronteira de $\mathcal{A}_n$ de um jeito adequado como veremos agora.

Seja $\xi^n_{z_k}$ a trajetória obtida por interpolação linear dos pontos

$$\{z_k, \beta^1(z_k), ..., \beta^{J(z_k)}(z_k), (0,0)\} \quad \text{se } J(z_k) + k = k_n + 1$$

ou

$$\{z_k, \beta^1(z_k), ..., \beta^{J(z_k)}(z_k), \gamma(\beta^{J(z_k)}(z_k)), (0,0)\} \quad \text{se } J(z_k) + k < k_n + 1$$

restrita ao conjunto $\mathbb{R} \times [-n, -n\alpha]$.

Considere,

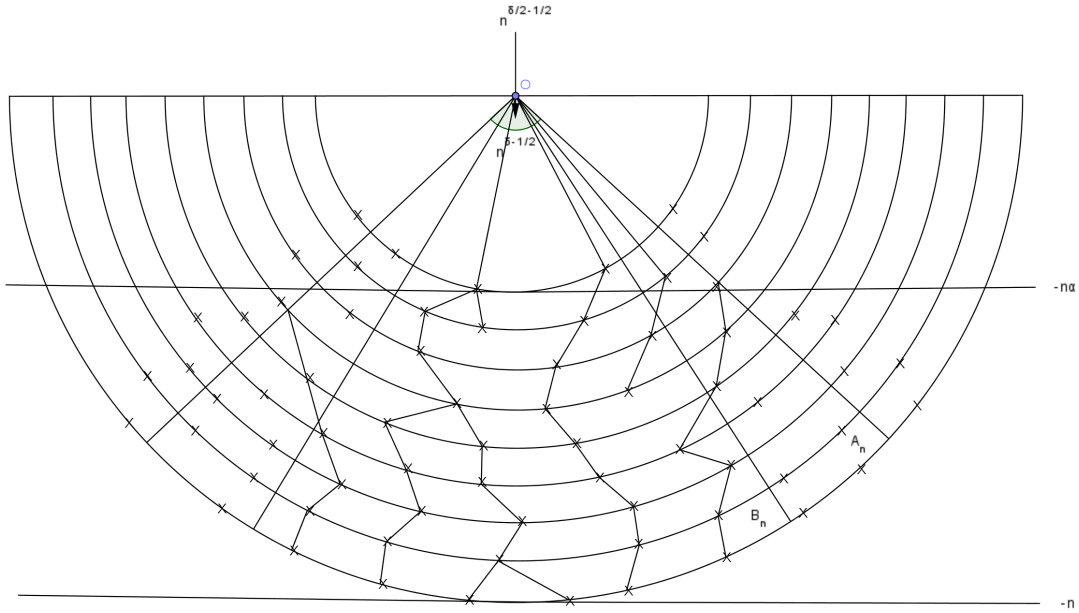

Figura 3.3: Teia Poissoniana radial discreta

$$\xi^n := \cup_{k=0}^{k_n} \left\{ \xi^n_{z_k} : z_k \in \hat{P}^n_k \cap \mathcal{B}_n \right\} \tag{3.9}$$

o conjunto de todas as trajetórias coalescentes que saem desde $\mathcal{B}_n$ restritas ao conjunto $\mathbb{R} \times [-n, -n\alpha]$. Ver Figura 3.3

3.2 Propriedades da Teia Poissoniana Radial Discreta.

Apresentaremos as propriedades do conjunto de trajetórias aleatórias ξ^n e além disso vamos mostrar porque as modificações feitas à TPRD restritas as trajetórias começando de $\mathcal{B}_n$ não são muito importantes.

Propriedades de ξ^n

1. $\mathbb{P}[\xi^n = \emptyset \ \ i.v] = 0$,
2. Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ determinístico tal que $\forall n \geq N_0$, $\xi^n \in \mathcal{H}_{-n,-n\alpha}$, isto é, ξ^n é um conjunto compacto de trajetórias em $\mathbb{R} \times [-n, -n\alpha]$ para todo $n \geq N_0$,

3. $\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq k_n}\left|\hat{P}_k^n\cap\mathcal{B}_n\right|>n\ \ i.v\right]=0,$

4. Com alta probabilidade, de cada conjunto $\tilde{A}_k^n\cap\mathcal{B}_n$ sai pelo menos uma trajetória.

5. O evento $\left\{\cup_{k=0}^{k_n}\cup_{z_k\in\hat{P}_k^n\cap\mathcal{B}_n}\cup_{j=k+1}^{k_n+1}\left\{G_j(\beta^{j-k-1}(z_k)(+),\beta^{j-k}(z_k))>n^{\kappa}\right\}\right\}$ não acontece infinitas vezes e

6. $\mathbb{P}\left[\cup_{k=0}^{k_n}\cup_{z\in\hat{P}_k\cap\mathcal{B}_n}\cup_{j=1}^{k_n-k+1}\{\beta^j(z)\notin int\mathcal{A}_n\}\ \ i.v\right]=0.$

Observação 3.2.1 *As propriedades* 5 *e* 6 *de* ξ^n *nos dizem precisamente que as modificações feitas não são muito importantes. Também, que com alta probabilidade, as trajetórias de* ξ^n *ficam no interior do conjunto* $\mathcal{A}_n$*.*

Prova das propriedades de ξ^n.

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\xi^n=\emptyset] &\leq \sum_{j=0}^{k_n}\mathbb{P}\left[\hat{P}_j^n\cap\mathcal{B}_n=\emptyset\right]\\
&\leq \sum_{j=0}^{k_n}\mathbb{P}\left[P_j\cap[-n^{\delta/2-1/2}(n-j),n^{\delta/2-1/2}(n-j)]=\emptyset\right]\\
&= \sum_{j=0}^{k_n}e^{-2n^{\delta/2-1/2}(n-j)}\\
&\leq ne^{-2\alpha n^{\delta/2+1/2}}
\end{aligned}$$

Pelo Lema de Borel-Cantelli obtemos $\mathbb{P}[\xi^n=\emptyset\quad i.v]=0.$ □

2. $\mathcal{H}_{-n,-n\alpha}$ denota o conjunto de subconjuntos compactos de trajetórias em $\mathbb{R}\times[-n,-n\alpha]$ com a métrica definida em 2.17.

É claro que $\emptyset\in\mathcal{H}_{-n,-n\alpha}$, portanto é suficiente mostrar que dado $\xi^n\neq\emptyset$ todas as trajetórias aleatórias que pertencem a ξ^n estão formadas por interpolação linear de pontos cujas segundas componentes são estritamente crescentes.

Dado $u\in\mathbb{R}^2$, denotamos por $u(2)$ a segunda componente de u.

Dado $\xi^n\neq\emptyset$, seja $\xi_{z_k}^n\in\xi^n$ e suponhamos sem perda de generalidade que $k=0$. Temos que $\xi_{z_0}^n$ $(z_0\in\hat{P}_0^n\cap\mathcal{B}_n)$ esta formada por interpolação linear dos pontos

$$\left\{z_0, \beta^1(z_0), ..., \beta^{J(z_0)}(z_0), (0,0)\right\} \quad \text{se } J(z_0) = k_n + 1$$

ou

$$\left\{z_0, \beta^1(z_0), ..., \beta^{J(z_0)}(z_0), \gamma\left(\beta^{J(z_0)}(z_0)\right), (0,0)\right\} \quad \text{se } J(z_0) < k_n + 1$$

restrita ao conjunto $\mathbb{R} \times [-n, -n\alpha]$.

Dado que $\beta^{J(z_0)}(z_0) \in int\mathcal{A}_n$ então $\gamma\left(\beta^{J(z_0)}(z_0)\right)$ por definição tem segunda componente estritamente maior que a segunda componente de $\beta^{J(z_0)}(z_0) \in int\mathcal{A}_n$. Assim, para mostrar que ξ^n é uma trajetória é suficiente mostrar que dado $J(z_0) > 0$, ocorre que

$$z_0(2) < \beta^1(z_0)(2) < ... < \beta^{J(z_0)-1}(z_0)(2) < \beta^{J(z_0)}(z_0)(2).$$

Logo, se $J(z_0) > 0$, temos para $j = 1, ..., J(z_0)$

$$\beta^j(z_0)(2) = -(n-j)\cos\left(\frac{r_j}{n-j}\right) \tag{3.10}$$

onde $\left|\frac{r_j}{n-j}\right| < n^{\delta-1/2}/2$ e além disso $|r_j - r_{j-1}| < n^{\kappa}$.
Assim, para $j = 1, 2, ..., J(z_0)$

$$\begin{aligned}
\beta^j(z_0)(2) - \beta^{j-1}(z_0)(2) &= -(n-j)\cos\left(\frac{r_j}{n-j}\right) + (n-j+1)\cos\left(\frac{r_{j-1}}{n-j+1}\right) \\
&= (n-j)\left[\cos\left(\frac{r_{j-1}}{n-j+1}\right) - \cos\left(\frac{r_j}{n-j}\right)\right] + \cos\left(\frac{r_{j-1}}{n-j+1}\right)
\end{aligned}$$

Logo, do Teorema do valor médio,

$$\beta^j(z_0)(2) - \beta^{j-1}(z_0)(2) = (n-j)\sin(\alpha_j)\left(\frac{r_{j-1}}{n-j+1} - \frac{r_j}{n-j}\right) + \cos\left(\frac{r_{j-1}}{n-j+1}\right) \tag{3.11}$$

para algum α_j entre $\frac{r_{j-1}}{n-j+1}$ e $\frac{r_j}{n-j}$. Portanto $\exists c_0 > 0$ que não depende de n, z, j tal que

$$\begin{aligned}
\left|(n-j)\sin(\alpha_j)\left(\frac{r_{j-1}}{n-j+1}-\frac{r_j}{n-j}\right)\right| &\leq c_0(n-j)|\alpha_j|\left|\frac{(n-j)r_{j-1}-(n-j+1)r_j}{(n-j)(n-j+1)}\right| \\
&= c_0|\alpha_j|\left|\frac{(n-j)r_{j-1}-(n-j+1)r_j}{(n-j+1)}\right| \\
&= c_0|\alpha_j|\left|\frac{(n-j+1)r_{j-1}-(n-j+1)r_j-r_{j-1}}{(n-j+1)}\right| \\
&= c_0|\alpha_j||r_{j-1}-r_j|+c_0|\alpha_j|\left|\frac{r_{j-1}}{n-j+1}\right| \\
&\leq c_0 n^{\delta-1/2}n^{\kappa}+c_0 n^{\delta-1/2}n^{\delta-1/2} \\
&= c_0 n^{\delta-1/2+\kappa}+c_0 n^{2\delta-1}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Note que $\delta \in (1/4, 1/3)$ e $\kappa \in (0, 1/2-\delta)$, seja $N_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $c_0 n^{\delta-1/2+\kappa} + c_0 n^{2\delta-1} < 1/3$ e $\cos\left(n^{\delta-1/2}\right) \geq 1/2$. Portanto, de (3.11) e (3.12) obtemos que, para $n \geq N_0$,

$$\beta^j(z_0)(2) - \beta^{j-1}(z)(2) > 0, \quad \text{para} \quad j = 1, ..., J(z_0).$$

Assim, a sequência $\{(z_0)(2), \beta^1(z)(2), ..., \beta^{J(z_0)}(z_0)(2)\}$ é estritamente crescente. Portanto, $\forall n \geq N_0$, $\xi^n_{z_0} \in \mathcal{C}[(z_0)_2, -n\alpha]$. Logo, $\forall n \geq N_0$, $\xi^n \in \mathcal{H}_{-n,-n\alpha}$. □

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq k_n}\left|\hat{P}^n_k \cap \mathcal{B}_n\right| > n\right] &\leq \sum_{k=0}^{k_n}\mathbb{P}[|\hat{P}^n_k \cap \mathcal{B}_n| > n] \\
&= \sum_{k=0}^{k_n}\mathbb{P}\left[\left|P_k \cap [-(n-k)n^{\delta/2-1/2}, (n-k)n^{\delta/2-1/2}]\right| > n\right] \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_n}\mathbb{P}\left[\left|P_k \cap [-n^{\delta+1/2}, n^{\delta+1/2}]\right| > n\right] \\
&= \sum_{k=0}^{k_n}\mathbb{P}\left[\left|P_0 \cap [-n^{\delta+1/2}, n^{\delta+1/2}]\right| > n\right]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Seja $N_n = \left\{\left|P_0 \cap [-n^{\delta+1/2}, n^{\delta+1/2}]\right| > n\right\}$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_n] &= \mathbb{P}\left[|P_0 \cap [-n^{\delta+1/2}, n^{\delta+1/2}]| > n\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} T_i < 2n^{\delta+1/2}\right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

com $(T_i)_{1\leq i\leq n}$ variáveis aleatórias i.i.d exponenciais de taxa 1. Portanto, $M_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ tem distribuição Gamma de parâmetros n e 1. Isto é, tem função de densidade de probabilidade

$$f_{M_n}(t) = e^{-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0.$$

Assím,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} T_i < 2n^{\delta+1/2}\right] &= \int_0^{2n^{\delta+1/2}} e^{-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt \\ &\leq \frac{(2n^{\delta+1/2})^{(n-1)}}{(n-1)!}\int_0^{2n^{\delta+1/2}} e^{-t}dt \\ &\leq \frac{(2n^{\delta+1/2})^{(n-1)}}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

Da aproximação de Stirling $(n-1)! \approx \sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}$, obtemos para n suficientemente grande

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} T_i < 2n^{\delta+1/2}\right] \leq c_0 e^{-c_1 n}. \tag{3.15}$$

onde c_0, c_1 são constantes positivas que não dependem de n.
Logo, de (3.13), (3.14) e (3.15) obtemos,

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq k_n}\left|\hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n\right| \geq n\right] \leq c_0 n e^{-c_1 n} \tag{3.16}$$

Pelo Lema de Borel-Cantelli $\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq k\leq k_n}\left|\hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n\right| \geq n \quad i.v\right] = 0.$ □

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\min_{1\leq j\leq k_n} |\hat{P}_j^n \cap \mathcal{B}_n| = 0\right] &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{P}[|\hat{P}_j^n \cap \mathcal{B}_n| = 0] \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} e^{-2(n-j)n^{\delta/2-1/2}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} e^{-2\alpha n^{\delta/2+1/2}} \\
&\leq ne^{-2\alpha n^{\delta/2+1/2}}.
\end{aligned}$$

Portanto, com alta probabilidade de cada $(\tilde{A}_k^n)$ sai pelo menos uma trajetória e com alta probabilidade para cada ponto de saída $z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n$, $\beta^j(z_k) \in \hat{P}_k^n$, $j = 0, 1, ..., k_n + 1 - k$. □

5. Sejam $U_n := \left\{\cup_{k=0}^{k_n} \cup_{z\in\hat{P}_k\cap\mathcal{B}_n} \cup_{j=k+1}^{k_n+1} \{G_j(\beta^{j-k-1}(z)(+), \beta^{j-k}(z)) > n^\kappa\}\right\}$ e

$$D_n^k := \left\{\cup_{z\in\hat{P}_k\cap\mathcal{B}_n} \cup_{j=k}^{k_n+1} \{G_j(\beta^{j-k-1}(z)(+), \beta^{j-k}(z)) > n^\kappa)\}\right\} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, ..., k_n.$$

Assim,

$$\mathbb{P}[U_n] \leq \sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}[D_n^k]. \tag{3.17}$$

Logo, seja $V_n := \{|\hat{P}_0^n \cap \mathcal{B}_n| \leq n\} \cap \{\hat{P}_k^n \neq \emptyset, k = 0, 1, ..., k_n\}$. Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[D_n^0] &= \mathbb{P}[D_n^0|V_n]\mathbb{P}[V_n] + \mathbb{P}[D_n^0|V_n^c]\mathbb{P}[V_n^c] \\
&\leq \mathbb{P}[D_n^0|V_n] + \mathbb{P}[V_n^c]
\end{aligned}$$

Agora, $\mathbb{P}[D_n^0|V_n] \leq n^2 k_n e^{-n^\kappa} \leq n^3 e^{-n^\kappa}$ e da Propriedade 3 de ξ^n, segue

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[V_n^c] &\leq \mathbb{P}[|\hat{P}_0^n \cap \mathcal{B}_n| > n] + \mathbb{P}[\exists k, 0 \leq k \leq k_n : \hat{P}_k^n = \emptyset] \\
&\leq c_0 e^{-c_1 n} + \sum_{j=0}^{k_n} \mathbb{P}[\hat{P}_k^n = \emptyset] \\
&\leq c_0 e^{-c_1 n} + ne^{-2\alpha n}
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P}[D_n^0] \leq c_2 n^3 e^{-n^\kappa}$, $c_2 > 0$.

Analogamente se prova que,

$$\mathbb{P}[D_n^k] \leq c_2 n^3 e^{-n^\kappa} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, ..., k_n. \tag{3.18}$$

Logo, de (3.17) e (3.18), obtemos que

$$\mathbb{P}[U_n] \leq c_2 n^4 e^{-n^\kappa}.$$

O resultado segue do Lema de Borel-Cantelli. □

6. Sejam $R_n := \left\{ \cup_{k=0}^{k_n-1} \cup_{z_k \in \hat{P}_k \cap \mathcal{B}_n} \cup_{j=k+1}^{k_n} \{\beta^j(z_k) \notin int\mathcal{A}_n\} \right\}$ e

$$M_n^k := \left\{ \cup_{z_k \in \hat{P}_k \cap \mathcal{B}_n} \cup_{j=k+1}^{k_n} \{\beta^j(z_k) \notin int\mathcal{A}_n\} \right\}$$

para $k = 0, 1, ..., k_n - 1$.

Logo, seja $W_n := \{0 < |\hat{P}_0^n \cap \mathcal{B}_n| \leq n\}$. Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M_n^0] &= \mathbb{P}[M_n^0 | W_n]\mathbb{P}[W_n] + \mathbb{P}[M_n^0 | W_n^c]\mathbb{P}[W_n^c] \\ &\leq \mathbb{P}[M_n^0 | W_n] + \mathbb{P}[W_n^c] \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dado $z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{A}_n$ e lembrando que $\hat{P}_k^n = J_{k,n}(P_k^n)$ concluimos que z_k pode ser representado da seguinte forma:

$$z_k = (n-k)\left(\sin\left(\frac{\varepsilon_{z_k}}{n-k}\right), -\cos\left(\frac{\varepsilon_{z_k}}{n-k}\right)\right), \tag{3.20}$$

onde $\varepsilon_{z_k} \in P_k^n$ e $\left|\frac{\varepsilon_{z_k}}{n-k}\right| \leq n^{\delta-1/2}/2$.

Dado $z_0 \in \hat{P}_0^n \cap \mathcal{B}_n$, seja $b_0(z_0) = \tilde{\theta}_{z_0}$. Definimos indutivamente

$$b_j(z_0) = \frac{\arg\min_{x \in P_j} \left| b_{j-1}(z_0) - \frac{x}{n-j} \right|}{n-j}, \quad j = 1, 2, ..., k_n + 1. \tag{3.21}$$

Note que dado $b_{j-1}(z_0)$, $b_j(z_0) - b_{j-1}(z_0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{\arg\min_{x \in P_j}}{n-j}$. Seja $\varsigma_j(z_0) = b_j(z_0) - b_{j-1}(z_0)$, $j = 1, 2, ..., k_n + 1$.
Logo, o evento $\left\{\beta^j(z_0) \notin int\mathcal{A}_n \quad \text{para algum } j, 1 \leq j \leq k_n + 1\right\}$ esta contido no evento

$$\left\{\sup_{1\le j\le k_n+1}\left|b_0(z_0)+\sum_{i=1}^{j}\varsigma_i(z_0)\right|>n^{\delta-1/2}/2\right\}\cup D_n^0$$

onde $D_n^0=\left\{\cup_{z_0\in\hat{P}_0^n\cap\mathcal{B}_n}\cup_{j=1}^{k_n+1}\{G_j(\beta^{j-1}(z_0)(+),\beta^j(z_0))>n^\kappa)\}\right\}$.

Agora, como $|b_0(z_0)|=|\tilde{\theta}_{z_0}|<n^{\delta/2-1/2}/2$. Temos que para n suficientemente grande

$$\left\{\sup_{1\le j\le k_n+1}\left|b_0(z_0)+\sum_{i=1}^{j}\varsigma_i(z_0)\right|>n^{\delta-1/2}/2\right\}\subset\left\{\sup_{1\le j\le k_n+1}\left|\sum_{i=1}^{j}\varsigma_i(z_0)\right|>\frac{n^{\delta-1/2}}{4}\right\}.$$

Seja $\varepsilon_j=\arg\min_{x\in P_j}|x|$, $j=1,...,k_n+1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M_n^0|W_n] &\le n\mathbb{P}\left[\sup_{1\le j\le k_n+1}\left|\sum_{i=1}^{j}\frac{\varepsilon_i}{n-i}\right|>\frac{n^{\delta-1/2}}{4}\right]+n\mathbb{P}[D_n^0]\\
&\le n\sum_{j=1}^{k_n+1}\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{j}\frac{\varepsilon_i}{n-i}\right|>\frac{n^{\delta-1/2}}{4}\right]+n\mathbb{P}[D_n^0]\\
&\le n\sum_{j=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{j}\frac{\varepsilon_i}{n-i}\right|>\frac{n^{\delta-1/2}}{4}\right]+n\sum_{j=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{k_n+1}\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{j}\frac{\varepsilon_i}{n-i}\right|>\frac{n^{\delta-1/2}}{4}\right]+n\mathbb{P}[D_n^0]\\
&\le n\lfloor\sqrt{n}\rfloor\times\lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-\frac{n-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{n^{\delta-1/2}}{4}}+n\sum_{j=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{k_n+1}\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{j}\frac{\varepsilon_i}{n-i}\right|>\frac{n^{\delta-1/2}}{4}\right]+n\mathbb{P}[D_n^0]\\
&\le n\lfloor\sqrt{n}\rfloor\times\lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-\frac{n-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{n^{\delta-1/2}}{4}}+n\sum_{j=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{k_n+1}\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{j}\frac{n\varepsilon_i}{n-i}\right|>\frac{n\times n^{\delta-1/2}}{4}\right]+n\mathbb{P}[D_n^0]\\
&\le n^2e^{-c_0n^\delta}+n\sum_{j=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{k_n+1}e^{-c_1j\left(\frac{n^{\delta-1/2}}{4}\right)^2}+n\mathbb{P}[D_n^0]\quad(c_0,c_1>0).
\end{aligned}\tag{3.22}$$

A última desigualdade é consequência da desigualdade de Bernstein para Martingais, onde $\left(\frac{n}{n-i}\varepsilon_i\right)_{i=0}^{k_n}$ é a sequência Martingal em relação à filtração $\mathcal{F}_i=\sigma(\varepsilon_0,\varepsilon_1,...,\varepsilon_i)$ e de (3.18), obtemos

$$\mathbb{P}[M_n^0|W_n]\le n^2e^{-c_0n^\delta}+n^2e^{-c_2n^{2\delta-1/2}}+c_3n^4e^{-n^\kappa},\quad\delta\in(1/4,1/3).\tag{3.23}$$

De (3.19) e (3.23), obtemos

$$\mathbb{P}[M_n^0]\le n^2e^{-c_0n^\delta}+n^2e^{-c_2n^{2\delta-1/2}}+c_3n^4e^{-n^\kappa}+\mathbb{P}[W_n^c]\tag{3.24}$$

Além disso, $\mathbb{P}[W_n^c]=\mathbb{P}[|\hat{P}_0^n\cap\mathcal{B}_n|=0]+\mathbb{P}[|\hat{P}_0^n\cap\mathcal{B}_n|>n]$. Da propriedade 3 de ξ^n obtemos

$$\mathbb{P}[W_n^c] \leq e^{-n^{\delta+1/2}} + c_4 e^{-c_5 n} \leq c_6 e^{-n^{\delta+1/2}}.$$

Portanto de (3.24),

$$\mathbb{P}[M_n^0] \leq n^2 e^{-c_0 n^\delta} + n^2 e^{-c_2 n^{2\delta-1/2}} + c_3 n^4 e^{-n^\kappa} + c_6 e^{-n^{\delta+1/2}} \leq c_7 n^4 e^{-n^\kappa} \quad (c_7 > 0). \tag{3.25}$$

Analogamente, mostramos que

$$\mathbb{P}[M_n^k] \leq c_7 n^4 e^{-n^\kappa}, \quad k = 0, 1, ..., k_n - 1 \tag{3.26}$$

Logo,

$$\mathbb{P}[R_n] \leq \sum_{k=0}^{k_n-1} \mathbb{P}[M_n^k] \leq c_7 n^5 e^{-n^\kappa}.$$

Por fim, do Lema de Borel-Cantelli segue que

$$\mathbb{P}[R_n \quad i.v] = 0.$$

como queriamos demonstrar. □

3.3 Enunciado do Teorema principal

O principal resultado neste trabalho é mostrar que ξ^n na escala difusiva converge fracamente para um mapeamento continuo da Teia Browniana restrita (em $\mathbb{R} \times [0, 1/\alpha - 1]$).

Sejam $F_\alpha := \mathbb{R} \times [-1, -\alpha]$ e $G_\alpha := \mathbb{R} \times [0, 1/\alpha - 1]$. Seja $\psi : F_\alpha \mapsto G_\alpha$ a seguinte homeomorfismo

$$\psi(x, t) = \left(\frac{x}{|t|}, \frac{1}{|t|} - 1 \right).$$

Assim

$$\psi^{-1}(x', t') = \left(\frac{x'}{t' + 1}, -\frac{1}{t' + 1} \right).$$

Para $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$, $\mathcal{H}_{r,s}$ representa o conjunto formado por subconjuntos compactos de trajetórias que saem de pontos em $\mathbb{R} \times [r, s]$ restritos ao mesmo conjunto com a métrica definida em (2.17).

Seja $T : \mathcal{H}_{-1,-\alpha} \longrightarrow \mathcal{H}_{0,1/\alpha-1}$ definida por

$$T(\mathcal{G}) = \{(\psi(f(t), t))\}_{(f(t),t)\in\mathcal{G}} \tag{3.27}$$

e seja

$$T^{-1}(\mathcal{F}) = \left\{(\psi^{-1}(f(t), t))\right\}_{(f(t),t)\in\mathcal{F}}.$$

Para $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_{-n,-n\alpha}$, definimos

$$\mathfrak{E}^n[\mathcal{F}] = \left\{\left(\frac{f(t)}{\sqrt{n}}, \frac{t}{n}\right) : (f(t), t) \in \mathcal{F}\right\}. \tag{3.28}$$

Note que $\mathfrak{E}^n[\mathcal{F}] \in \mathcal{H}_{-1,-\alpha}$.

O resultado principal deste trabalho é a convergência fraca na escala difusiva de ξ^n para um mapeamento continuo da Teia Browniana restrita (ver 2.2) em $\mathbb{R} \times [0, 1/\alpha - 1]$. Segue o enunciado formal do Teorema principal.

Teorema 3.3.1 *Seja $N_0 \in \mathbb{N}$ como na Propriedade 2 de ξ_n, considere a sequência $(\xi^n)_{n\geq N_0}$ em $\mathcal{H}_{-n,-n\alpha}$. Então, $(\xi^{\mathfrak{n}})_{n\geq N_0}$ é uma sequência em $\mathcal{H}_{-1,-\alpha}$ e*

$$\mathfrak{E}^n[\xi^n] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} T^{-1}(\bar{\mathcal{W}}_{0,1/\alpha-1}).$$

Capítulo 4

Aproximações do modelo

Seja $\tilde{\xi}^n = \mathfrak{E}^n[\xi^n]$, para mostrar o Teorema 3.3.1, é necessário construir um conjunto de "aproximações" a $\tilde{\xi}^n$. As ideias de cada aproximação, a grosso modo, são:

- para a primeira aproximação, fazemos uma projeção adequada de todos os pontos de Poisson de cada trajetória de ξ^n, identificamos os pontos projetados de cada trajetória e construimos uma nova trajetória dada pela interpolação linear de tais pontos, assim, temos uma nova família de trajetórias com a propriedade desejada.
- a ideia para a segunda aproximação é que as modificações feitas à TPRD não acontecem com alta probabilidade, nesse sentido pode-se dar "liberdade" ao comportamento do ângulo
- e finalmente a ideia para a terceira aproximação é que $\sin(x) \approx x$ para x suficientemente pequeno.

4.1 Primeira aproximação.

Seja $z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{A}_n$, para $0 \leq k \leq k_n + 1$, definimos:

$$h(z_k) := (n-k)\left(\sin\left(\frac{\varepsilon_{z_k}}{n-k}\right), -1\right). \tag{4.1}$$

Isto é, $h(z_k)$ é a projeção do ponto z_k sobre a linha reta $\mathbb{R} \times \{n-k\}$.

Sejam

$$\Gamma_n := \Gamma_n^{\delta,\alpha} := \left\{z : z \in \hat{P}_k^n \quad \text{e} \quad |\theta_z| \leq n^{\delta-1/2}/2 \quad \text{para algum} \quad k, 0 \leq k \leq k_n + 1\right\} \quad \text{e} \tag{4.2}$$

$$\tilde{\Gamma}_n := \tilde{\Gamma}_n^{\delta,\alpha} := \{h(z) : z \in \Gamma_n\}. \tag{4.3}$$

Seja ρ é a métrica de Hausdorff induzida pelos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$. Definimos $\rho(\emptyset,\emptyset)=0$.

Definição 4.1.1 *Para $A\subset\mathbb{R}^2$, seja $E^n(A):=\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{n}},\frac{y}{n}\right):(x,y)\in A\right\}$.*

Lema 4.1.1 $\rho\left(E^n(\Gamma_n),E^n(\tilde{\Gamma}_n)\right)\leq 1-\cos(n^{\delta-1/2}/2)$.

Prova: Se $\Gamma_n=\emptyset$ então $E^n(\Gamma_n)=E^n(\tilde{\Gamma}_n)=\emptyset$ assim $\rho\left(E^n(\Gamma_n),E^n(\tilde{\Gamma}_n)\right)=0$.

Se $\Gamma_n\neq\emptyset$, seja $z\in\Gamma_n$, logo

$$z=(n-k)\left(\sin\left(\frac{\epsilon_z}{n-k}\right),-\cos\left(\frac{\epsilon_z}{n-k}\right)\right)\quad\text{para algum } k\leq k_n,$$

onde $\epsilon_z\in\tilde{P}_k^n$ e $\left|\frac{\epsilon_z}{n-k}\right|\leq n^{\delta-1/2}/2$. Portanto,

$$h(z)=(n-k)\left(\sin\left(\frac{\epsilon_z}{n-k}\right),-1\right).$$

Assím,

$$\|E^n(\{z\})-E^n(\{h(z)\})\|=\frac{n-k}{n}\left[1-\cos\left(\frac{\epsilon_z}{n-k}\right)\right]\leq 1-\cos(n^{\delta-1/2}/2).$$

□

Dado $z_k\in\hat{P}_k^n\cap\mathcal{B}_n$, lembremos que $\tilde{\xi}_{z_k}^n$ é a trajetória obtida por interpolação linear dos pontos

$$\left\{z_k,\beta^1(z_k),...,\beta^{J(z_k)}(z_k),(0,0)\right\}\quad\text{se}\quad J(z_k)+k=k_n+1$$

ou

$$\left\{z_k,\beta^1(z_k),...,\beta^{J(z_k)}(z_k),\gamma\left(\beta^{J(z_k)}(z_k)\right)(0,0)\right\}\quad\text{se}\quad J(z_k)+k<k_n+1$$

restrita ao conjunto $\mathbb{R}\times[-n,-n\alpha]$.

Definimos $\xi_{z_k}^{1,n}$ como a trajetória obtida de interpolar linearmente os pontos

$$\left\{h(z_k),h(\beta^1(z_k)),...,h\left(\beta^{J(z_k)}(z_k)\right),(0,0)\right\}\quad\text{se}\quad J(z_k)+k=k_n+1$$

ou

$$\left\{h(z_k), h(\beta^1(z_k)), ..., h\left(\beta^{J(z_k)}(z_k)\right), h\left(\gamma\left(\beta^{J(z_k)}(z_k)\right)\right), (0,0)\right\} \quad \text{se} \quad J(z_k)+k<k_n+1$$

restrita ao conjunto $\mathbb{R}\times[-n,-n\alpha]$.

Definimos,

$$\xi^{1,n} := \left\{\xi^{1,n}_{z_k} : z_k \in \hat{P}_k \cap \mathcal{B}_n\right\}_{0\leq k\leq k_n}. \tag{4.4}$$

Isto é, $\xi^{1,n}$ é o conjunto de trajetórias coalescentes onde cada trajetória é identificada com exatamente uma trajetória de ξ^n restritas ao conjunto $\mathbb{R}\times[-n,-n\alpha]$.

Sejam

$$\tilde{\xi}^n := \mathfrak{E}^n(\xi^n) \quad \text{e} \quad \tilde{\xi}^{1,n} := \mathfrak{E}^n(\xi^{1,n}) \tag{4.5}$$

isto é, as correspondentes familias de trajetórias aleatórias coalescentes re-escaladas.

Lema 4.1.2 *Existe $N_0\in\mathbb{N}$ determinístico tal que para todo $n\geq N_0$ temos que $\tilde{\xi}^n, \tilde{\xi}^{1,n}\in\mathcal{H}_{-1,-\alpha}$.*

Prova: $\tilde{\xi}^{1,n}\in\mathcal{H}_{-1,-\alpha}$ para todo $n\in\mathbb{N}$ por construção e pela propriedade 2 de ξ^n, existe um $N_0\in\mathbb{N}$ determinístico tal que $\tilde{\xi}\in\mathcal{H}_{-1,-\alpha}$ para todo $n\geq N_0$. □

Lema 4.1.3 $d_{\mathcal{H}_{-1,-\alpha}}(\tilde{\xi}^n,\tilde{\xi}^{1,n}) \underset{n\to\infty}{\overset{q.c}{\to}} 0.$

Prova: Segui da observação 3.2.1, do fato que a interpolação dos pontos é de tipo linear e o Lema 4.1.1. □

Lembrando que nosso objetivo é encontrar o limite fraco de $\tilde{\xi}^n$, do lema anterior temos que é suficiente conhecer o limite fraco de $\tilde{\xi}^{1,n}$.

4.2 Segunda aproximação

Agora nosso objetivo é encontrar o limite fraco de $\tilde{\xi}^{1,n}$, com isso em mente, vamos a construir um conjunto de trajetórias aleatórias coalescentes que chamaremos $\tilde{\xi}^{2,n}$ com a propriedade que a distância entre ela e $\tilde{\xi}^{1,n}$ em $\mathcal{H}_{-1,-\alpha}$ vai para zero quase certamente e portanto elas terão o mesmo limite fraco.

Sejam

$$A_n := \left\{ \min_{1\leq j\leq k_n} |\hat{P}_j^n \cap \mathcal{B}_n| > 0 \right\},$$

$$B_n := \left\{ \cup_{k=0}^{k_n} \cup_{z\in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n} \cup_{j=k+1}^{k_n} \left\{ G_j\left(\beta^{j-1}(z)(+), \beta^j(z)\right) > n^{\kappa} \right\} \right\}^c,$$

$$C_n := \left\{ \cup_{k=0}^{k_n-1} \cup_{z\in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n} \cup_{j=k+1}^{k_n} \left\{ \beta^j(z) \notin \mathcal{A}_n \right\} \right\}^c$$

e $D_n = A_n \cap B_n \cap C_n$. Então $\tilde{\xi}^{2,n}$ terá as seguintes propriedades

(a) Dado D_n, $\tilde{\xi}^{1,n} = \tilde{\xi}^{2,n}$ e

(b) $d_{\mathcal{H}_{-1}^{-\alpha}}(\tilde{\xi}^{1,n}, \tilde{\xi}^{2,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c} 0$.

Vamos construir agora o conjunto de trajetórias $\tilde{\xi}^{2,n}$. Dado $z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n$, $0 \leq k \leq k_n$ temos que

$$z_k = (n-k)\left(\sin\left(\frac{\epsilon_{z_k}}{n-k}\right), -\cos\left(\frac{\epsilon_{z_k}}{n-k}\right)\right)$$

onde $J_{k,n}(\epsilon_{z_k}) = z_k$, $\epsilon_{z_k} \in P_k$ e $\left|\frac{\epsilon_{z_k}}{n-k}\right| \leq n^{\delta/2-1/2}/2$.

Seja $b_0(z_k) = \frac{\epsilon(z_k)}{n-k}$, definimos indutivamente

$$b_j(z_k) = \frac{\arg\min_{x\in P_{j+k}} \left| b_{j-1}(z_k) - \frac{x}{n-j-k} \right|}{n-j-k},$$

para $j = 1, 2, ..., k_n - k + 1$. Note que dado $b_{j-1}(z_k)$, temos que $b_j(z_k) - b_{j-1}(z_k) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{\arg\min_{x\in P_{j+k}} |x|}{n-j-k}$.

Seja $\varsigma_j(z_k) = b_j(z_k) - b_{j-1}(z_k)$ para $j = 1, 2, ..., k_n - k + 1$.

Seja $\tilde{\xi}_{z_k}^{2,n}$ a trajetória aleatória determinada pela interpolação linear dos pontos,

$$\left\{(n-k)\left(\frac{\sin\left(b_0(z_k)\right)}{\sqrt{n}},-\frac{1}{n}\right)\right\},\left\{(n-k-j)\left(\frac{\sin\left(b_j(z_k)\right)}{\sqrt{n}},-\frac{1}{n}\right)\right\}_{1\leq j\leq k_n-k+1}$$

restrita ao conjunto $\mathbb{R}\times[-1,-\alpha]$.

Seja

$$\tilde{\xi}^{2,n} := \left\{\tilde{\xi}^{2,n}_{z_k} : z_k \in \hat{P}^n_k \cap \mathcal{B}_n\right\}_{0\leq k\leq k_n}. \tag{4.6}$$

Observação 4.2.1 $\tilde{\xi}^{1,n}\mathbb{I}_{\{D_n\}} = \tilde{\xi}^{2,n}\mathbb{I}_{\{D_n\}}$.

Lema 4.2.1 $d_{\mathcal{H}_{-1,-\alpha}}(\tilde{\xi}^{1,n},\tilde{\xi}^{2,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c} 0$.

Prova: Das propriedades $4,5$ e 6 obtemos que $\mathbb{P}[D_n^c] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. O lema segui da observação 4.2.1. $\square$

4.3 Terceira aproximação

Precisamos de uma última aproximação ao conjunto de trajetórias $\tilde{\xi}^n$ que chamaremos $\tilde{\xi}^{3,n}$ tal que a distância em $\mathcal{H}_{-1,-\alpha}$ entre $\tilde{\xi}^{2,n}$ e $\tilde{\xi}^{3,n}$ vai para zero em probabilidade e novamente isto implica que o limite fraco terá que ser o mesmo.

Dado $z_k \in \hat{P}^n_k \cap \mathcal{B}_n$, seja $\tilde{\xi}^{3,n}_{z_k}$ a trajetória aleatória obtida por interpolação linear dos pontos,

$$\left\{(n-k)\left(\frac{b_0(z_k)}{\sqrt{n}},-\frac{1}{n}\right)\right\},\left\{(n-k-j)\left(\frac{b_j(z_k)}{\sqrt{n}},-\frac{1}{n}\right)\right\}_{1\leq j\leq k_n-k+1}$$

restrita ao conjunto $\mathbb{R}\times[-1,-\alpha]$. Seja

$$\tilde{\xi}^{3,n} := \left\{\tilde{\xi}^{3,n}_{z_k} : z_k \in \hat{P}^n_k \cap \mathcal{B}_n\right\}_{0\leq k\leq k_n} \tag{4.7}$$

Seja $\rho_k(x,y) := \sup_{\{-(n-k)/n\leq t\leq -\alpha\}} |x(t)-y(t)|$, $\forall x,y \in \mathcal{C}[-(n-k)/n,-\alpha]$ para $k=0,1,...,k_n+1$.

Lema 4.3.1 $d_{\mathcal{H}_{-1,-\alpha}}(\tilde{\xi}^{2,n}, \tilde{\xi}^{3,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0.$

Prova: Como cada trajetória de $\tilde{\xi}^{3,n}$ é identificada com exatamente uma trajetória de $\tilde{\xi}^{2,n}$, mostrar que

$$d_{\mathcal{H}_{-1,-\alpha}}(\tilde{\xi}^{2,n}, \tilde{\xi}^{3,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$$

é equivalente a mostrar o seguinte:

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \quad \text{tal que} \quad \rho_k(\tilde{\xi}^{2,n}_{z_k}, \tilde{\xi}^{3,n}_{z_k}) > \epsilon \text{ para algum } k, 0 \leq k \leq k_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Seja $\epsilon > 0$ fixo, logo

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \rho_k(\tilde{\xi}^{2,n}_{z_k}, \tilde{\xi}^{3,n}_{z_k}) > \epsilon \text{ para algum } k, 0 \leq k \leq k_n] \\ &\qquad \leq \sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \rho_k(\tilde{\xi}^{2,n}_{z_k}, \tilde{\xi}^{3,n}_{z_k}) > \epsilon]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Agora, se $z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n$ é tal que $\rho_k(\tilde{\xi}^{2,n}_{z_k}, \tilde{\xi}^{3,n}_{z_k}) > \epsilon$, então necessariamente a distância entre algum dos pontos identificados tem que ser maior que $\epsilon/2$ pois a interpolação é de tipo linear. Isto é, o evento

$$\left\{\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \rho_k(\tilde{\xi}^{2,n}_{z_k}, \tilde{\xi}^{3,n}_{z_k}) > \epsilon\right\}$$

esta contido no evento

$$\left\{\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\leq j\leq k_n-k+1} \left|\frac{n-k-j}{\sqrt{n}} b_j(z_k) - \frac{n-k-j}{\sqrt{n}} \sin(b_j(z_k))\right| > \epsilon/2\right\}.$$

Assim, de (4.8),

$$\mathbb{P}[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \rho_k(\tilde{\xi}^{2,n}_{z_k}, \tilde{\xi}^{3,n}_{z_k}) > \epsilon \text{ para algum } k, 0 \leq k \leq k_n] \leq$$

$$\sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}\left[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\leq j\leq k_n-k+1} \left|\frac{n-k-j}{\sqrt{n}} b_j(z_k) - \frac{n-k-j}{\sqrt{n}} \sin(b_j(z_k))\right| > \epsilon/2\right] \leq$$

$$\sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}\left[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\le j\le k_n-k+1} \frac{n-k-j}{\sqrt{n}} \left|b_j(z) - \sin(b_j(z))\right| > \epsilon/2\right] \le$$

$$\sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}\left[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\le j\le k_n-k+1} \frac{n-k-j}{n}\sqrt{n} \left|b_j(z) - \sin(b_j(z))\right| > \epsilon/2\right] \le$$

$$\sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}\left[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\le j\le k_n-k+1} \sqrt{n} \left|b_j(z) - \sin(b_j(z))\right| > \epsilon/2\right] \le$$

$$\sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}\left[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\le j\le k_n-k+1} \left|b_j(z) - \sin(b_j(z))\right| > n^{-1/2}\epsilon/2\right].$$

Usando que $|\sin(x) - x| \le C|x|^3$ com $C > 0$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}\left[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\le j\le k_n-k+1} \left|b_j(z) - \sin(b_j(z))\right| > n^{-1/2}\epsilon/2\right] \le$$

$$\sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}\left[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\le j\le k_n-k+1} \left|b_j(z)\right|^3 > c_0 n^{-1/2}\epsilon/2\right] \le$$

$$\sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}\left[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\le j\le k_n-k+1} \left|b_j(z)\right| > (c_0\epsilon/2)^{1/3} n^{-1/6}\right],$$

para alguma constante $c_0 > 0$, lembrando que

$$b_j(z_k) = b_0(z_k) + \sum_{i=1}^{j} \varsigma_i(z_k), \quad j = 1, ..., k_n - k + 1$$

e que $|b_0(z_k)| \le n^{\delta/2-1/2}/2$ e $\delta \in (1/4, 1/3)$, obtemos que,

$$\mathbb{P}[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \rho_k(\tilde{\xi}_{z_k}^{2,n}, \tilde{\xi}_{z_k}^{3,n}) > \epsilon \text{ para algum } k, 0 \le k \le k_n] \le$$

$$\sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}\left[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\le j\le k_n-k+1} \left|\sum_{i=1}^{j} \varsigma_i(z_k)\right| > (c_0\epsilon/2)^{1/3} n^{-1/6}/2\right].$$

Sejam $C_n^k := \left\{\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\le j\le k_n-k+1} \left|\sum_{i=1}^{j} \varsigma_i(z_k)\right| > c_1\epsilon^{1/3} n^{-1/6}\right\}$ para $k = 0, ..., k_n$.
Logo,

$$\mathbb{P}[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \rho_k(\tilde{\xi}_{z_k}^{2,n}, \tilde{\xi}_{z_k}^{3,n}) > \epsilon \text{ para algum } k, 0 \leq k \leq k_n] \leq \sum_{k=0}^{k_n} \mathbb{P}[C_n^k] \tag{4.9}$$

Seja $W_n^0 := \left\{0 < |\hat{P}_0^n \cap \mathcal{B}_n| < n\right\}$, então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[C_n^0] &= \mathbb{P}[C_n^0|W_n^0]\mathbb{P}[W_n^0] + \mathbb{P}[C_n^0|(W_n^0)^c]\mathbb{P}[(W_n^0)^c] \\ &\leq \mathbb{P}[C_n^0|W_n^0] + \mathbb{P}[(W_n^0)^c] \end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(W_n^0)^c] &= \mathbb{P}[|\hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n| = 0] + \mathbb{P}[|\hat{P}_0^n \cap \mathcal{B}_n| \geq n] \\ &= e^{-n^{\delta/2+1/2}} + \mathbb{P}[|\hat{P}_0^n \cap \mathcal{B}_n| \geq n]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

De (3.16) e (4.11) segue que existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$\mathbb{P}[(W_n^0)^c] \leq c_2 e^{-n^{\delta/2+1/2}} \tag{4.12}$$

Além disso,

$$\mathbb{P}[C_n^0|W_n^0] = \mathbb{P}\left[\text{existe } z_0 \in \hat{P}_0^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \sup_{0\leq j\leq k_n+1} \left|\sum_{i=1}^{j} \varsigma_j(z_0)\right| > c_1\epsilon^{1/3}n^{-1/6} \middle| W_n^0\right]. \tag{4.13}$$

Lembrando que $\varsigma_j(z) \overset{\mathcal{D}}{=} \frac{\arg\min_{x\in P_j}|x|}{n-j}$ para $j = 1, 2, ..., k_n + 1$, obtemos que

$$\mathbb{P}[C_n^0|W_n^0] \leq n\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq j\leq k_n+1} \left|\sum_{i=1}^{j} \frac{\varepsilon_i}{n-j}\right| > c_1\epsilon^{1/3}n^{-1/6}\right]$$

onde $(\varepsilon_j)_{j=1}^{k_n+1}$ são i.i.d com $\varepsilon_1 \overset{\mathcal{D}}{=} \arg\min_{x\in P_0}|x|$, também como $\delta \in (1/4, 1/3)$ temos que para n suficientemente grande $c_1\epsilon^{1/3}n^{-1/6} > n^{\delta-1/2}$, então para n suficientemente grande temos que

$$\mathbb{P}[C_n^0|W_n^0] \leq n\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq j\leq k_n+1} \left|\sum_{i=1}^{j} \frac{\varepsilon_i}{n-j}\right| > n^{\delta-1/2}\right] \tag{4.14}$$

de (3.22) e (4.14) segue que

$$\mathbb{P}[C_n^0|W_n^0] \leq n \times (ne^{-c_3 n^\delta} + ne^{-c_4 n^{2\delta-1/2}}) = n^2 e^{-c_3 n^\delta} + n^2 e^{-c_4 n^{2\delta-1/2}}. \tag{4.15}$$

Assim, de (4.10), (4.12) e (4.15) obtemos

$$\mathbb{P}[C_n^0] \leq n^2 e^{-c_3 n^\delta} + n^2 e^{-n^{2\delta-1/2}} + c_2 e^{-n^{\delta/2+1/2}} \leq c_5 e^{-n^{2\delta-1/2}}.$$

Analogamente se pode mostrar que

$$\mathbb{P}[C_n^k] \leq c_5 e^{-n^{2\delta-1/2}}, \text{ para } k = 0, 1, ..., k_n + 1. \tag{4.16}$$

Logo, de (4.11) segui que

$$\mathbb{P}[\text{existe } z_k \in \hat{P}_k^n \cap \mathcal{B}_n \text{ tal que } \rho_k(\tilde{\xi}_{z_k}^{2,n}, \tilde{\xi}_{z_k}^{3,n}) > \epsilon \text{ para algum } k, 0 \leq k \leq k_n] \leq$$

$$c_5 \sum_{k=0}^{k_n} e^{-n^{2\delta-1/2}} \leq c_5 n e^{-n^{2\delta-1/2}},$$

o resultado segue do fato que $\delta \in (1/4, 1/3)$.

□

4.4 Convergência de uma única trajetória

Vamos mostrar agora a convergência de uma única trajetória de $\tilde{\xi}^{3,n}$. Isto é importante pois mostrará que com as propriedades da Teia Browniana restrita, a transformação que precisamos é aquela mostrada no Teorema 3.3.1.
Lembremos que $\mathcal{B}_n := \left\{ z \in \mathbb{R} \times [-n, -n\alpha] : |\tilde{\theta}_z| \leq n^{\delta/2-1/2}/2 \right\}$, assim $E^n[\mathcal{B}_n] = \left\{ \left(\frac{x}{\sqrt{n}}, \frac{y}{n} \right) : (x, y) \in \mathcal{B}_n \right\}$, é fácil mostrar a seguinte observação.

Observação 4.4.1 $\cup_{n=1}^{\infty} E^n[\mathcal{B}_n] = \mathbb{R} \times [-1, -\alpha]$

Lema 4.4.1 *Dado* $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [-1, -\alpha]$ *fixo, temos que*

$$\mathbb{P}\left[\inf_{z_{\lfloor n(1+t_0) \rfloor} \in \hat{P}^n_{\lfloor n(1+t_0) \rfloor} \cap \mathcal{B}_n} \left\| \tilde{\xi}^{3,n}_{z_{\lfloor n(1+t_0) \rfloor}}(0) - (x_0, t_0) \right\| > 2n^{\delta/2-1/2} \quad i.v \right] = 0. \tag{4.17}$$

Prova: Seja $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [-1, -\alpha]$. Para n suficientemente grande obtemos:

$$(\sqrt{n}x_0 - n^\delta, \sqrt{n}x_0 + n^\delta) \subset (-n^{\delta/2-1/2}[n - \lfloor n(1+t_0)\rfloor], n^{\delta/2-1/2}[n - \lfloor n(1+t_0)\rfloor]) \tag{4.18}$$

Seja $\tilde{x}^n = \left(x_0, -\frac{n-\lfloor n(1+t_0)\rfloor}{n}\right)$, logo

$$\|\tilde{x}^n - (x_0, t_0)\| \leq \frac{1}{n}. \tag{4.19}$$

De (4.18), (4.19) e do fato que $J^{-1}_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor,n}(\xi^n_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}}(0)) \in P_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}$ segue que

$$\left\{\inf_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}\in \hat{P}^n_{\lfloor n(1-t_0)\rfloor}\cap \mathcal{B}_n} \left\|\tilde{\xi}^{3,n}_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}}(0) - (x_0, t_0)\right\| > 2n^{\delta/2-1/2}\right\} \subset \left\{P_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor} \cap (\sqrt{n}x_0 - n^\delta, \sqrt{n}x_0 + n^\delta) = \emptyset\right\}$$

assim,

$$\mathbb{P}\left[\inf_{z\in \hat{P}_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}\cap \mathcal{B}_n} \left\|\tilde{\xi}^{3,n}_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}}(0) - (x_0, t_0)\right\| > 2n^{\delta/2-1/2}\right] \leq e^{-2n^\delta}.$$

O lema segue do Lema de Borel-Cantelli. □

Vamos mostrar agora a convergência fraca para uma trajetória saindo de um ponto em $\mathbb{R}\times[-1,-\alpha]$

Teorema 4.4.1 *Dado $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}\times[-1,-\alpha]$ fixo, existe uma sequência $\tilde{\xi}^{3,n}_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}} \in \tilde{\xi}^{3,n}$ tal que*

$$\tilde{\xi}^{3,n}_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} t\left(\frac{x_0}{t_0} + cB[g(t)]\right), \quad em \quad \mathcal{C}[t_0, -\alpha], \tag{4.20}$$

onde para t fixo, $B[g(t)] \overset{\mathcal{D}}{=} N(0, g(t))$, $\{B[g(t)]\}_{t\in[t_0,-\alpha]}$ é um processo com incrementos independentes, $c = \sqrt{2Var[\arg\min_{x\in P_0}|x|]}$ e $g(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{|t|} - \frac{1}{|t_0|}$.

Prova: Se $t_0 = -\alpha$, a prova segue do lema anterior, isto é, teríamos convergência quase certa para um ponto.

Vamos fazer a prova para $\tilde{x} = (0, -1)$ para qualquer outro ponto a demonstração é análoga. Do lema anterior é suficiente com encontrar a convergência em distribuição da sequência de trajetórias aleatórias obtidas por interpolação linear dos pontos,

$$\{(0,-1)\}, \left\{\left(\frac{(n-j)}{n}\sum_{i=1}^{j}\sqrt{n}\varsigma_i(\tilde{x}^n), -\frac{n-j}{n}\right)\right\}_{j=1}^{k_n+1} \tag{4.21}$$

restrita ao espaço $\mathbb{R}\times[-1,-\alpha]$, onde $\varsigma_i = \frac{\arg\min_{x\in P_i}|x|}{n-i}$. Pelo Teorema A.0.2 temos que a sequência converge fracamente ao processo

$$\left(c(1-t)B\left[\frac{1}{1-t}-1\right], t-1\right), \quad \text{em} \quad \mathcal{C}[0,1-\alpha],$$

que é igual em distribuição ao processo

$$\left(ctB\left[\frac{1}{|t|}-1\right], t\right), \quad -1\leq t\leq -\alpha.$$

□

Observação 4.4.2 *No teorema anterior, se mostra como deve ser a transformação que precisamos, toda vez que ela tem que mapear o objeto limite anterior, num movimento Browniano saindo de algum ponto.*

4.5 Transformação adequada.

Agora trabalharemos com a Teia Browniana restrita (ver 2.2). Nosso objetivo é mostrar que existe um homeomorfismo T de $\mathcal{H}_{-1,-\alpha}$ em $\mathcal{H}_{0,1/\alpha-1}$ tal que $T[\tilde{\xi}^{3,n}]\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{W}}_{0,1/\alpha-1}$ e portanto $\tilde{\xi}^{3,n}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}}T^{-1}[\bar{\mathcal{W}}_{0,1/\alpha-1}]$.

Considere o homeomorfismo T de $\mathcal{H}_{-1,-\alpha}$ em $\mathcal{H}_{0,1/\alpha-1}$, como em (3.27).

Lembremos que $\tilde{\xi}^{3,n}_{z_k}$ é a trajetória aleatória obtida por interpolação linear dos pontos

$$\left\{\left(\frac{n-k}{n}\sqrt{n}b_0(z_k), -\frac{n-k}{n}\right), \left(\frac{n-k-j}{n}\sqrt{n}b_j(z_k), -\frac{n-k-j}{n}\right)_{j=1}^{k_n-k+1}\right\} \tag{4.22}$$

Portanto, $T(\tilde{\xi}^{3,n}_{z_k})$ é a trajetória cujos pontos de interpolação devida a T são

$$\left\{\left(\sqrt{n}b_0(z_k), \frac{k}{n-k}\right), \left(\sqrt{n}b_j(z_k), -\frac{k+j}{n-(k+j)}\right)_{j=1}^{k_n-k+1}\right\} \tag{4.23}$$

Do Teorema 4.4.1, dado $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}\times[-1,-\alpha]$ existe uma sequência $\tilde{\xi}^{3,n}_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}}\in\tilde{\xi}^{3,n}$ tal que

$$\tilde{\xi}^{3,n}_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} t\left\{\frac{x_0}{t_0}+cB\left[\frac{1}{|t|}-\frac{1}{|t_0|}\right]\right\}, \quad \text{em} \quad \mathcal{C}[t_0,-\alpha]. \tag{4.24}$$

Logo, do Teorema do mapeamento continuo

$$T[\tilde{\xi}^{3,n}_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}}] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \left(\frac{x_0}{t_0} + cB\left[\frac{1}{|t|} - \frac{1}{|t_0|}\right], \frac{1}{|t|} - 1\right), \quad \text{em} \quad \mathcal{C}[t_0, -\alpha].$$

Seja $t^{'} = \frac{1}{|t|} - 1$, então

$$T[\tilde{\xi}^{3,n}_{z_{\lfloor n(1+t_0)\rfloor}}] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \left(\frac{x_0}{t_0} + cB\left[t' - t'_0\right], t'\right), \quad \text{em} \quad \mathcal{C}[t'_0, 1/\alpha - 1].$$

com $t'_0 = \frac{1}{|t_0|} - 1$.

Vamos a denotar a $T[\tilde{\xi}^{3,n}]$ como

$$Y^n := T[\tilde{\xi}^{3,n}]. \tag{4.25}$$

Assim, temos o seguinte lema,

Lema 4.5.1 *Dado $(x'_0, t'_0) \in \mathbb{R} \times [0, 1/\alpha - 1]$ existe uma sequência $Y^n_{(x'_0,t'_0)} \in Y^n$ tal que*

$$Y^n_{(x'_0,t'_0)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \left(x'_0 + cB\left[t - t'_0\right], t'\right), \quad em \quad \mathcal{C}[t'_0, 1/\alpha - 1].$$

Observação 4.5.1 *Seja $m_k = \frac{k}{n-k}$ e $E_k = [-n^{\delta/2-1}(n-k), n^{\delta/2-1}(n-k)] \times \{m_k\}$, $0 \le k \le k_n + 1$. Sejam $(R_k)_{k=1}^{k_n+1}$ processos de Poisson independentes em $\mathbb{R}$, R_k com taxa $\frac{n-k}{\sqrt{n}}$. Dado $u \in E_k$, $k = 1, 2, ..., k_n$, denotamos por*

$$u^{1,k} = \arg\min_{v \in R_{k+1} \times \{m_{k+1}\}} \|u - v\| \tag{4.26}$$

e indutivamente,

$$u^{j,k} = \arg\min_{v \in R_{k+j} \times \{m_{k+j}\}} \|u^{j-1,k} - v\| \tag{4.27}$$

onde $u^{0,k} = u$ e $j = 1, ..., k_n - k + 1$. Então, seja $\hat{Y}^{n,T}_u$ a trajetória aleatória obtida de interpolar os pontos

$$\{u, u^{1,k}, ..., u^{k_n-k+1}\}$$

usando T*, isto é, logo de interpolar linearmente os pontos* $\{T^{-1}(u), T^{-1}(u^{1,k}), ..., T^{-1}(u^{k_n-k+1})\}$ *denotamos (como um abuso de notação) a trajetória restrita ao conjunto* $\mathbb{R}\times[-1,-\alpha]$ *como* $\tilde{\xi}^{3,n}_{T^{-1}(u)}$ *e* $\hat{Y}^{n,T}_u = T[\tilde{\xi}^{3,n}_{T^{-1}(u)}]$*. Seja*

$$\hat{Y}^{n,T} =: \left\{\hat{Y}^{n,T}_u : u \in \cup_{k=0}^{k_n} E_k \cap (R_k \times \{m_k\})\right\}. \tag{4.28}$$

segue que $\hat{Y}^{n,T} \overset{\mathcal{D}}{=} Y^n$*.*

Capítulo 5

Prova do teorema principal

Para mostrar o Teorema 3.3.1, precisamos provar que $\hat{Y}^{n,T}$ ($\hat{Y}^{n,T} \overset{\mathcal{D}}{=} T[\tilde{\xi}^{3,n}]$) converge em distribuição à Teia Browniana radial restrita, isto é, $\hat{Y}^{n,T}$ satisfaz as condições $(I), (B_1)$ e (B_2) no Teorema 2.2.2. Para esta finalidade, usaremos dois lemas da secção seguinte

5.1 Tempo de Coalescência

Sejam $(Q_k)_{k=0}^{\infty}$ processos de Poisson em $\mathbb{R}$ independentes, Q_k com taxa $\frac{n-k}{n}$ para $k = 0, 1, ..., k_n$ e para Q_k com $k > k_n$ taxa $\frac{n-k_n}{n}$. Considere o subconjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$ formado por $\cup_{k=0}^{\infty} Q_k \times \{k\}$.

Dado um ponto $u = (u_0, k) \in \mathbb{R} \times \{k\}$, seja $\tilde{u}^{1,k} = \arg\min_{v \in Q_{k+1} \times \{k+1\}} \|u - v\|$ e indutivamente

$$\tilde{u}^{j,k} = \arg\min_{v \in Q_{k+j+1} \times \{k+j+1\}} \|\tilde{u}^{j-1,k} - v\| \quad j = 1, 2, ...$$

onde $\tilde{u}^{0,k} = u$. Seja X^u a trajetória obtida de interpolar linearmente os pontos $\{u, \tilde{u}^{1,k}, ..., \tilde{u}^{j,k}, ...\}$.

Sejam $u, w \in \mathbb{R} \times \{0\}$ com $u = (u_1, 0)$,$w = (w_1, 0)$ e $u_1 < v_1$. Considere X^u,X^w e para $t \geq 0$,

$$Z_t = Z_t(u, w) = X_t^v - X_t^w. \tag{5.1}$$

Suponhamos que $w_1 - u_1 = 1$. Definimos

$$\tau := \min\{t \geq 0 : Z_t = 0\}. \tag{5.2}$$

Proposição 5.1.1 *Existe uma constante $C > 0$, tal que $\mathbb{P}[\tau > t] \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$.*

Prova: Como $\{Z_t(u,v), t \geq 0\}$ é um Martingal não negativo em $\mathbb{L}^2$, pelo Teorema de representação de Skorohod existe um movimento Browniano com coeficiente de difusão 1 começando em 1 e tempos de parada $0 = T_0, T_1, T_2, ...$ satisfazendo:

$$Z_t \stackrel{\mathcal{D}}{=} B[T_t] \tag{5.3}$$

onde $0 = T_0, T_1, T_2, ...$ são tais que

$$T_t = \inf\{s \geq T_{t-1} : B[s] - B[T_{t-1}] \notin (U_t(B(T_{t-1})), V_t(B[T_{t-1}]))\}, \tag{5.4}$$

onde $\{(U_t(r), V_t(r)), t \geq 1, r \in [0,\infty)\}$ é uma familia de vetores aleatórios independentes e no presente caso, para todo $r \geq 0$, $t, t' \geq k_n$, $(U_t(r), V_t(r)) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (U_{t'}(r), V_{t'}(r))$ e $(U_t(r), V_t(r)) \in [-r, 0) \times (0,\infty)$ q.c.

Seja $\tau' := \inf\{t \geq 0 : B[t] = 0\}$. Temos que $\tau > t$ se e somente se $\tau' > T_t$, logo

$$\mathbb{P}[\tau > t] = \mathbb{P}[\tau' > T_t]. \tag{5.5}$$

Dado $\varsigma > 0$ por determinar, seguindo as ideias em [2], temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau' > T_t] &= \mathbb{P}[\{\tau' > T_t\} \cap \{T_t > \varsigma t\}] + \mathbb{P}[\{\tau' > T_t\} \cap \{T_t \leq \varsigma t\}] \\
&\leq \mathbb{P}[\tau' > \varsigma t] + \mathbb{P}[\{\tau' > T_t\} \cap \{T_t \leq \varsigma t\}] \\
&\leq \frac{c_0}{\sqrt{t}} + \mathbb{P}[\{\tau' > T_t\} \cap \{T_t \leq \varsigma t\}]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

onde $c_0 = c_0(\varsigma) \in (0,\infty)$. Agora, dado $\lambda > 0$ por determinar

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\{\tau' > T_t\} \cap \{T_t \leq \varsigma t\}] &\leq \mathbb{P}[\{\tau' > T_t\} \cap \{e^{-\lambda T_t} \geq e^{-\lambda \varsigma t}\}] \\
&= \mathbb{P}[\{\Pi_{i=1}^t \mathbb{I}_{\{Z_i > 0\}} > 0\} \cap \{e^{-\lambda T_t} \geq e^{-\lambda \varsigma t}\}] \\
&= \mathbb{P}[\Pi_{i=1}^t \mathbb{I}_{\{Z_i > 0\}} e^{-\lambda T_t} \geq e^{-\lambda \varsigma t}] \\
&\leq e^{\lambda \varsigma t} \mathbb{E}[\Pi_{i=1}^t \mathbb{I}_{\{Z_i > 0\}} e^{-\lambda T_t}]
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Note que, $T_t = \sum_{i=1}^t (T_i - T_{i-1}) = \sum_{i=1}^t S_i(Z_{i-1})$ onde $(S_i(r), i \in \mathbb{N}, r > 0)$ são variáveis aleatórias independentes, entanto para $r > 0$, $(S_i(r), i \in \mathbb{N})$ não são identicamente distribuídas. Então,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Pi_{i=1}^{t}\mathbb{I}_{\{Z_i>0\}}e^{-\lambda T_t}] &= \mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{t}\mathbb{I}_{\{Z_i>0\}}\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{t}S_i(Z_{i-1})\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{t-1}\mathbb{I}_{\{Z_i>0\}}\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{t-1}S_i(Z_{i-1})\right\}\mathbb{I}_{\{Z_t>0\}}\exp\left\{-\lambda S_t(Z_{t-1})\right\}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right)\right] \\
&\leq \sup_{r>0}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_t>0\}}e^{-\lambda S_t(Z_{t-1})}|Z_{t-1}=r\right]\mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{t-1}\mathbb{I}_{\{Z_i>0\}}\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{t-1}S_i(Z_{i-1})\right\}\right] \\
&\leq \Pi_{i=1}^{t}\sup_{r>0}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_i>0\}}e^{-\lambda S_i(Z_{i-1})}|Z_{i-1}=r\right]
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

onde $\{\mathcal{F}_t\}$ é a sigma álgebra gerada por $Z_0, Z_1, ..., Z_t$.

Note que $\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_t>0\}}e^{-\lambda S_{t-1}(Z_{t-1})}|Z_{t-1}=r\right] \leq \mathbb{P}[Z_t>0|Z_{t-1}=r]$. Isto é, $\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_t>0\}}e^{-\lambda S_{t-1}(Z_{t-1})}|Z_{t-1}=r\right]$ é limitado superiormente pela probabilidade do evento de não coalescência no nível t dado que a distancia entre os processos no nível $t-1$ foi de r. Assim,

$$
\sup_{r\leq 10}\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_1>0\}}e^{-\lambda S_1(Z_{t-1})}|Z_{t-1}=r\right] \leq \sup_{r\leq 10}\mathbb{P}[Z_t>0|Z_{t-1}=r] = \mathbb{P}[Z_t>0|Z_{t-1}=10]. \tag{5.9}
$$

Devido a invariância por translação dos processos de Poisson temos que $0<r_1<r_2$ implica que $\mathbb{P}[Z_t>0|Z_{t-1}=r_1] \leq \mathbb{P}[Z_t>0|Z_{t-1}=r_2]$, isto justifica a igualdade no lado direito de (5.9).

Definição 5.1.1 *Dado $x\in\mathbb{R}$ fixo, seja $p(x)=\arg\min_{y\in Q_t}|y-x|$.*

Seja $B:=\{p(0)\neq p(10)\}$, devido a invariância por translação dos processos de Poisson temos que

$$
\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[Z_t>0|Z_{t-1}=10].
$$

Agora, considere o evento

$$
C = \{|[-10,0]\cap Q_t|=0\}\cap\{|(0,10)\cap Q_t|=1\}\cap\{|[10,20]\cap Q_t|=0\}
$$

Claramente $C\subset B^c$. Seja κ_t a taxa do processo Q_t.

$$
\mathbb{P}[C] = e^{-\kappa_t 20}e^{-\kappa_t 10}\kappa_t 10 \geq e^{-30}\alpha 10 = c_0 > 0.
$$

pois $\kappa_t\in[\alpha,1]$. Note que c_0 não depende de t. Lembrando que $\mathbb{P}[B]=\mathbb{P}[Z_t>10|Z_{t-1}=10]$, obtemos que $\mathbb{P}[Z_t>0|Z_{t-1}=10]\leq 1-c_0=c_1<1$. De (5.9),

$$\sup_{r\leq 10} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_t>0\}} e^{-\lambda S_t(Z_{t-1})} | Z_{t-1}=r\right] \leq c_1 < 1. \tag{5.10}$$

Agora, queremos mostrar que existe uma constante $c_2 < 1$ que não depende de t tal que

$$\sup_{r\geq 10} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda S_t(r)}\right] \leq c_2. \tag{5.11}$$

De aqui para o frente consideremos unicamente o caso $r \geq 10$.

A estratégia para mostrar (5.11) é escolher adequadamente um conjunto R_{ϵ_0} tal que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda S_t(r)}\right] \leq \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in R_{\epsilon_0}](1-a(\epsilon_0)) + a(\epsilon_0)$$

onde $a(\epsilon_0)$ e $\mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in R_{\epsilon_0}] \in (0,1)$ não dependem de t, r.

Seja $\epsilon > 0$ dado, considere os conjuntos $A_\epsilon := (-\epsilon, 0) \times (0, \infty)$ e $B_\epsilon := [-r, 0) \times (0, \epsilon)$.
Seja $F^t(x) = \mathbb{P}[Z_t - r \leq x | Z_{t-1} = r]$. Em [6] pag 403, temos que:

$$\mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_\epsilon \cup B_\epsilon] = \frac{1}{c}\int\int_{(u,v)\in A_\epsilon \cup B_\epsilon} (v-u) dF^t(u) dF^t(v)$$

$$\leq \frac{1}{c}\int\int_{(u,v)\in(-\epsilon,0)\times(0,\infty)} (v-u) dF^t(u) dF^t(v) + \frac{1}{c}\int\int_{(u,v)\in[-r,0)\times(0,\epsilon)} (v-u) dF^t(u) dF^t(v) \tag{5.12}$$

onde $c = c(r) = \int_{-r}^{0} (-u) dF^t(u) = \int_0^\infty v dF^t(v)$, note que $c < \infty$ pois os incrementos são devidos ao ponto do processo de Poisson mais perto assim a distribuição tem cauda exponencial.

$$\frac{1}{c}\int\int_{(u,v)\in(-\epsilon,0)\times(0,\infty)} (v-u) dF^t(u) dF^t(v)$$

$$= \frac{1}{c}\int\int_{(u,v)\in(-\epsilon,0)\times(0,\infty)} v dF^t(u) dF^t(v) + \frac{1}{c}\int\int_{(u,v)\in(-\epsilon,0)\times(0,\infty)} (-u) dF^t(u) dF^t(v)$$

$$\leq \int_{u\in(-\epsilon,0)} dF^t(u) + \frac{1}{c}\int_{u\in(-\epsilon,0)} (-u) dF^t(u) = \mathbb{P}[-\epsilon \leq Z_t - r \leq 0 | Z_{t-1} = r] + \frac{1}{c}\int_{u\in(-\epsilon,0)} (-u) dF^t(u)$$

Portanto,

$$\frac{1}{c}\int\int_{(u,v)\in(-\epsilon,0)\times(0,\infty)} (v-u) dF^t(u) dF^t(v) \leq \mathbb{P}[-\epsilon \leq Z_t - r \leq 0 | Z_{t-1} = r] + \frac{\epsilon}{c}. \tag{5.13}$$

Analogamente,

$$\frac{1}{c}\int\int_{(u,v)\in[-r,0)\times(0,\epsilon)}(v-u)dF^t(u)dF^t(v) \leq \mathbb{P}[0 \leq Z_t - r \leq \epsilon | Z_{t-1} = r] + \frac{\epsilon}{c}. \tag{5.14}$$

Assim, de (5.12), (5.13) e (5.14) temos que

$$\mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_\epsilon \cup B_\epsilon] \leq \mathbb{P}[-\epsilon \leq Z_t - r \leq \epsilon | Z_{t-1} = r] + \frac{2\epsilon}{c}. \tag{5.15}$$

De novo, pela invariância por translação dos processos de Poisson

$$\mathbb{P}[-\epsilon \leq Z_t - r \leq \epsilon | Z_{t-1} = r] = \mathbb{P}[-\epsilon \leq p(r) - p(0) - r \leq \epsilon] \tag{5.16}$$

Lembremos que $r \geq 10$. Considere os eventos, $C_1 := \{[-10/4, 10/4] \cap Q_t \neq \emptyset\}$ e $C_2 := \{[-10/4 + r, r + 10/4] \cap Q_t \neq \emptyset\}$ portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[-\epsilon \leq p(r) - p(0) - r \leq \epsilon] &\leq \mathbb{P}[-\epsilon \leq p(r) - p(0) - r \leq \epsilon | C_1 \cap C_2]\mathbb{P}[C_1 \cap C_2] + \mathbb{P}[{C_1}^c \cup {C_2}^c] \\ &= \mathbb{P}[-\epsilon \leq p(r) - p(0) - r \leq \epsilon | C_1 \cap C_2](1 - e^{-5\kappa_t})^2 + [1 - (1 - e^{-5\kappa_t})^2].\end{aligned}$$

Dado $C_1 \cap C_2$, $p(r)$ e $p(0)$ ficam independentes, assim

$$\mathbb{P}[-\epsilon \leq p(r) - p(0) - r \leq \epsilon | C_1 \cap C_2] \leq \mathbb{P}[|[-\epsilon/2, \epsilon/2] \cap Q_t| \geq 1].$$

Portanto

$$\mathbb{P}[-\epsilon \leq p(r) - p(0) - r \leq \epsilon | C_1 \cap C_2] \leq 1 - e^{-\kappa_t \epsilon}. \tag{5.17}$$

Assim de (5.15),(5.16) e (5.17) segue que

$$\sup_{r \geq 10} \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_\epsilon \cup B_\epsilon] \leq (1 - e^{-k_t \epsilon})(1 - e^{-5\kappa_t})^2 + [1 - (1 - e^{-5\kappa_t})^2] + \frac{2\epsilon}{c}.$$

Dado que $\kappa_t \in [\alpha, 1]$, obtemos

$$\sup_{r \geq 10} \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_\epsilon \cup B_\epsilon] \leq (1 - e^{-\epsilon})(1 - e^{-5})^2 + [1 - (1 - e^{-5\alpha})^2] + \frac{2\epsilon}{c}. \tag{5.18}$$

Lembrando que $c = c(r) = \int_{-r}^{0}(-u)dF^t(u) = \int_0^\infty v dF^t(v)$, note que c depende do nível t e de r, mais para valores de r superiores a 10 (de fato maior que qualquer constante positiva fixa), c pode ser limitada inferiormente por uma constante que não depende de t e tampouco depende de r. Vejamos,

$$\begin{aligned} c = \int_0^\infty v dF^t(v) &\geq \int_1^\infty v dF^t(v) \\ &\geq \mathbb{P}[Z_t - r \geq 1 | Z_{t-1} = r]. \end{aligned} \tag{5.19}$$

De novo, pela invariância por translação temos que

$$\mathbb{P}[Z_t - r \geq 1 | Z_{t-1} = r] = \mathbb{P}[p(r) - p(0) \geq r + 1]$$

Lembrando que $r \geq 10$. Considere o evento, $D = \{|[1, -2] \cap Q_t| = 1\} \cap \{|[-1, 10] \cap Q_t| = 0\} \cap \{|[r-1, r] \cap Q_t| = 1\}$. Note que $D \subset \{p(r) - p(0) \geq r + 1\}$, portanto

$$\mathbb{P}[Z_t - r \geq 1 | Z_{t-1} = r] \geq \mathbb{P}[D] = e^{-11\kappa}(\kappa)^2 e^{-2\kappa} = e^{-13\kappa}(\kappa)^2 \geq e^{-13}\alpha^2. \tag{5.20}$$

De (5.18) e (5.20) obtemos,

$$\sup_{r \geq 10} \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_\epsilon \cup B_\epsilon] \leq (1 - e^{-\epsilon})(1 - e^{-5})^2 + [1 - (1 - e^{-5\alpha})^2] + \frac{2\epsilon e^{13}}{\alpha^2}.$$

Seja ϵ_0 suficientemente pequeno tal que

$$(1 - e^{-\epsilon_0})(1 - e^{-5})^2 + [1 - (1 - e^{-5\alpha})^2] + \frac{2\epsilon_0 e^{13}}{\alpha^2} = c_2(\epsilon_0) < 1$$

Assim,

$$\sup_{r \geq 10} \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0}] \leq c_2(\epsilon_0). \tag{5.21}$$

Agora, para $r \geq 10$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Z_t > 0\}} e^{-\lambda S_t(r)}] \leq \mathbb{E}\left[e^{-\lambda S_t(r)}\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[e^{-\lambda S_t(r)} \mathbb{I}_{\{(U_t, V_t) \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0}\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\lambda S_t(r)} \mathbb{I}_{\{(U_t, V_t) \in (A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0})^c\}}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{-\lambda S_t(r)} \mathbb{I}_{\{(U_t, V_t) \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0}\}} \middle| (U_t(r), V_t(r))\right)\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{-\lambda S_t(r)} \mathbb{I}_{\{(U_t, V_t) \in (A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0})^c\}} \middle| (U_t(r), V_t(r))\right)\right]$$

$$\leq \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0}] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{-\lambda S_t(r)} \mathbb{I}_{\{(U_t, V_t) \in [-r, -\epsilon_0) \times [\epsilon_0, \infty)\}} \middle| (U_t(r), V_t(r))\right)\right].$$

Dado (U_t, V_t), $S_t(r)$ é o tempo de parada de B definido por $(U_t(r), V_t(r))$, portanto se

$T_{\epsilon_0} := \inf\{t > 0 : B[t] \notin (-\epsilon_0, \epsilon_0)\}$ de [6] pág 400, temos que

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda S_t(r)}] \leq \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0}] + \mathbb{E}[e^{-\lambda T_{\epsilon_0}}]\mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in (A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0})^c]$$

$$\leq \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0}] + \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda}\epsilon_0)}[1 - \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0}]].$$

$$= \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0}] \left(1 - \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda}\epsilon_0)}\right) + \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda}\epsilon_0)}.$$

Logo de (5.21) obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{r\geq 10} \mathbb{E}[e^{-\lambda S_t(r)}] &\leq \sup_{r\geq 10} \mathbb{P}[(U_t(r), V_t(r)) \in A_{\epsilon_0} \cup B_{\epsilon_0}] \left(1 - \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda}\epsilon_0)}\right) + \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda}\epsilon_0)} \\ &\leq c_1(\epsilon_0) \left(1 - \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda}\epsilon_0)}\right) + \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda}\epsilon_0)}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Seja $c_3 := c_3(\epsilon_0) = c_2(\epsilon_0)\left(1 - \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda}\epsilon_0)}\right) + \frac{1}{\cosh(\sqrt{2\lambda}\epsilon_0)} < 1$ e seja $c_4 = c_4(\epsilon_0) = c_3(\epsilon_0) \vee c_1 < 1$. Então de (5.22) e (5.10) obtemos

$$\sup_{r\leq 10} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_t>0\}} e^{-\lambda S_t(Z_{t-1})} | Z_{t-1} = r\right] \leq c_1 \quad \text{e}$$

$$\sup_{r\geq 10} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_t>0\}} e^{-\lambda S_t(Z_{t-1})} | Z_{t-1} = r\right] \leq c_3.$$

Assim,

$$\sup_{r>0} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_t>0\}} e^{-\lambda S_t(Z_{t-1})} | Z_{t-1} = r\right] \leq c_4 < 1.$$

Note que $c_4 \in (0, 1)$ unicamente depende de ϵ_0, por tanto é claro que:

$$\max_{1\leq i\leq t} \sup_{r>0} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{Z_i>0\}} e^{-\lambda S_i(Z_{i-1})} | Z_{i-1} = r\right] < c_4 \tag{5.23}$$

Então de (5.7) e (5.8) segue que

$$\mathbb{P}[\tau > t] \leq \frac{c_0(\varsigma)}{\sqrt{t}} + \left[e^{\lambda\varsigma} c_4\right]^t$$

Seja $\varsigma_0 > 0$ tal que $e^{\lambda\varsigma_0} c_4 = c_5 < 1$. Note que c_5 depende de ϵ_0, ς_0 unicamente, logo

$$\mathbb{P}[\tau > t] \leq \frac{c_0(\varsigma_0)}{\sqrt{t}} + (c_5(\epsilon_0, \varsigma_0))^t.$$

Como $c_5 \in (0,1)$, existe $c_6 = c_6(\epsilon_0, \varsigma_0)$ tal que $(c_5)^t \leq \frac{c_6}{\sqrt{t}}$, então tomando $c_7 = c_7(\epsilon_0, \varsigma_0) = c_0 \vee c_6$, obtemos que

$$\mathbb{P}[\tau > t] \leq \frac{c_7}{\sqrt{t}}. \tag{5.24}$$

□

Lema 5.1.1 *$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall u, v \in \mathbb{R} \times \{k\}$, tal que $v_1 - u_1 = 1$. Se $Z_t := Z_t(u,v) = X^v_{k+t} - X^u_{t+k}$ e $\tau_k := \min\{t > k : Z_t = 0\}$, temos que existe uma constante positiva C, tal que*

$$\mathbb{P}[\tau_k > t] \leq \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Prova: Na proposição anterior mostramos que $\mathbb{P}[\tau_0 > t] \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$ onde C era uma constante positiva que não dependia do nível 0 e tampouco do nível t. O lema segue do teorema anterior e do fato que as taxas dos processos envolvidos ficam em $[\alpha, 1]$.

□

Lema 5.1.2 *Seja $u = (x,0)$ e $v = (y,0)$ com $x < y$. Então,*

$$\mathbb{P}[Z_t(u,v) > 0] \leq \frac{C(y-x)}{\sqrt{t}} \tag{5.25}$$

Prova: Se $y - x \leq 1$ o resultado segue do lema anterior. Seja $y - x > 1$, note que

$$\{Z_t(u,v) > 0\} \subset \left\{ \cup_{i=0}^{\lceil y \rceil - \lfloor x \rfloor - 1} \{Z_t((\lfloor x \rfloor + i, 0), (\lfloor x \rfloor + i + 1)) > 0\} \right\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_t(u,v) > 0] &\leq \sum_{i=0}^{\lceil y \rceil - \lfloor x \rfloor - 1} \mathbb{P}[Z_t((\lfloor x \rfloor + i, 0), (\lfloor x \rfloor + i + 1)) > 0] \\ &= (\lceil y \rceil - \lfloor x \rfloor - 1)\mathbb{P}[Z_t((0,0),(1,0)) > 0] \\ &\leq 2(y-x)\mathbb{P}[Z_t((0,0),(1,0)) > 0]. \end{aligned}$$

Onde usamos o fato da invariância por translação dos processos de Poisson para obter a igualdade acima. Do lema anterior segue o resultado. □

Da observação 4.5.1, nosso objetivo final é mostrar a convergência em distribuição à Teia Browniana de $\hat{Y}^{n,T}$. Lembremos que as trajetórias de $\hat{Y}^{n,T}$ tem tempos de salto não homogêneos e os incrementos das trajetórias por nível são independentes mais não i.d, isto explica de alguma forma porque todas as nossas limitantes tem sido uniformes, isto é, não dependem do nível pois no futuro será fortemente usado.

5.2 Condição (I)

As ideias para mostrar que a familia de trajetórias $\hat{Y}^{n,T}$ satisfaz a condição (I) do Teorema 2.2.2 são basicamente as mesmas ideias em [2], existen diferencias de tipo tecnico devido a que os tempos de salto não são homogêneos, as trajetórias estão restringidas num retângulo e além disso, as distribuições dos incrementos por nível são independentes mas não identicamente distribuidas.

Teorema 5.2.1 *Sejam $(y_0, s_0), (y_1, s_1), ..., (y_k, s_k)$ $k+1$ pontos diferentes em $\mathbb{R} \times [0, 1/\alpha - 1)$ tais que $s_0 \leq s_1 \leq ... \leq s_k$ e se $s_{i-1} = s_i$ para algum i, $i = 1, ..., k$, então $y_{i-1} < y_i$. Então,*

$$\{\hat{Y}^{n,T}_{(y_0,s_0)}, i = 0, ..., k\} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \{W^{(i)}, i = 0, 1, ..., k\} \tag{5.26}$$

onde $W^{(i)}$ são movimentos Brownianos caolescentes com constante de difusão positiva $\sqrt{2\mathbb{E}[(\arg\min_{x\in P_0}|x|)^2]}$, e começando em $\{(y_0, s_0), (y_1, s_1), ..., (y_k, s_k)\}$ restritos ao conjunto $\mathbb{R} \times [0, 1/\alpha - 1]$.

Observação 5.2.1 *Como um abuso de notação escrevemos $\hat{Y}^{n,T}_{(y_0,s_0)}$, pois o ponto (y_0, s_0) não pertence (em geral) a algum nível do processo, mais dado que $\hat{Y}^{n,T} \overset{\mathcal{D}}{=} Y^n$ e o Lema 4.5.1, isto não representa problema.*

A demonstração é dividida em três passos.

Passo I.

Para $k = 0$ o resultado segue do Lema 4.5.1.

Paso II

Vamos considerar o caso $k \geq 1$ e $s_0 = s_1 = ... = s_k$ e $y_{i-1} < y_i$ para todo $i = 1, 2, ..., k$.

Provaremos o caso $s_0 = 0$, pois a prova é análoga para qualquer ponto de $[0, 1/\alpha - 1)$.
Para $k = 1$, pela invariância por translação dos processos de Poisson é suficiente considerar o caso de dois trajetórias começando de $(0, 0)$ e $(y_1, 0)$.

Vamos supor sem perda de generalidade que estamos trabalhando num espaço de probabilidade tal que

$$\hat{Y}^{(n,T)}_{(y_1,0)} \xrightarrow[n\to\infty]{q.c} W^{(1)} \tag{5.27}$$

A seguinte proposição implica o resultado no caso $k = 1$ e é a ferramenta principal para os outros casos.

Proposição 5.2.1 *A distribuição condicional de* $\hat{Y}^{n,T}_{(0,0)}$ dado $\hat{Y}^{n,T}_{(y_1,0)}$ converge quase certamente à distribuição de $W^{(0)}$ dado $W^{(1)}$.

Sejam

$$K_n^{(i)} = \left\{ (\sqrt{n}x_1, nx_2) : (x_1, x_2) \in \hat{Y}^{n,T}_{(y_i,0)} \right\}, \quad i = 0, 1 \tag{5.28}$$

Portanto,

$$K_n^{(i)}(l_j) = \sqrt{n}y_i + \sum_{h=1}^{j} S_h^{(i,n)},\ 1 \le j \le k_n \tag{5.29}$$

para $i = 0, 1$. Onde $S_h^{i,n}$, $0 \le h \le k_n + 1$ sao independentes e $S_h^{(i,n)} \overset{\mathcal{D}}{=} \arg\min_{x\in Q_h} |x|$. $((Q_h)_{h=0}^{k_n}$ sao processos de Poisson em $\mathbb{R}$ independentes de taxa $\frac{n-h}{n}$).

A idéia da prova em [2] é aproximar ${K_n}^{(0)}$ e ${K_n}^{(1)}$ antes que eles estejam perto (uma distancia da ordem de n^γ, $\gamma < 1/2$) por caminhos independentes e mostrar que depois daquele evento eles coalescem rapidamente. A nossa idéia varia um pouco devido a estarmos trabalhando em $[0, n(1/\alpha - 1)]$, a idéia é a seguinte:

Aproximar ${K_n}^{(0)}$ e ${K_n}^{(1)}$ antes que eles estejam perto (uma distancia da ordem de n^γ, $\gamma < 1/2$) por caminhos independentes. Se o tempo em que eles estejam perto satisfaz que e menor que $n(1/\alpha - 1) - n^\beta$, com $\beta(\gamma) < 1$ então eles coalescem rapidamente, se o tempo é maior então a escala difusiva resolve o problema.

Consideremos agora copias independentes de $S_h^{(i,n)}$ para $i = 0, 1$. Sejam $\left\{ \tilde{S}_h^{(i,n)}, 0 \le h \le k_n, i = 0, 1 \right\}$ variáveis aleatórias independentes tais que $\tilde{S}_h^{(i,n)} \overset{\mathcal{D}}{=} \arg\min_{x\in Q_h} |x|$.

Seja $\gamma \in (0, 1/2)$ fixo, lembrando que $l_k = \frac{nk}{n-k}$ para $k = 0, 1, ..., k_n + 1$ definimos as seguintes

variáveis aleatórias:

$$\hat{S}_h^{(i,n)} = \begin{cases} S_h^{(i,n)}, & \text{se } |S_h^{(i,n)}| \leq n^\gamma \\ \tilde{S}^{(i,n)}, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

Definamos agora, $\hat{K}_n^{(i)}$, $i = 0, 1$ como o processo que interpola os seguintes pontos usando a a transformação T,

$$\hat{K}_n^{(i)}(l_k) = \sqrt{n} y_i + \sum_{h=1}^{k} \hat{S}_h^{(i,n)}. \tag{5.30}$$

$k = 1, 2, ..., k_n + 1$, restritos ao conjunto $[0, n(1/\alpha - 1)]$.

Consideremos

$$\hat{\tau}_n = \min\{l_k : \hat{K}_n^{(1)}(l_k) - \hat{K}_n^{(1)}(l_k) \leq 3n^\gamma\} \wedge k_n \tag{5.31}$$

e

$$\tau_n = \min\{l_k : K_n^{(1)}(l_k) - K_n^{(1)}(l_k) \leq 3n^\gamma\} \wedge k_n \tag{5.32}$$

e seja $\tilde{K}_n^{(i)}$, $i = 0, 1$ o processo que interpola os seguintes pontos usando a transformação T,

$$\tilde{K}_n^{(i)}(l_k) = \begin{cases} \hat{K}_n^{(i)}(l_k), & \text{se } (l_k \leq \hat{\tau}_n) \\ \hat{K}_n^{(i)}(\hat{\tau}_n) + \sum_{h=g(\hat{\tau}_n)+1}^{k} \breve{S}_h^{(i,n)}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$k = 1, 2, ..., k_n + 1$, restritos ao conjunto $[0, n(1/\alpha - 1)]$ onde $g(\hat{\tau}_n) = \frac{n\hat{\tau}_n}{n+\hat{\tau}_n}$ e

$$\breve{S}_h^{(i,n)} = \begin{cases} \tilde{S}_h^{(0,n)}, & \text{se } i = 0 \\ S_h^{(0,n)}, & \text{se } i = 1. \end{cases}$$

Lema 5.2.1 *Seja* $A_n := \left\{ S_h^{(i,n)} = \hat{S}_h^{(i,n)}, h = 1, 2, ..., k_n, i = 0, 1 \right\}$ *então*

$$\mathbb{P}[A_n^c \quad i.v] = 0. \tag{5.33}$$

Prova do Lema 5.2.1

$$\mathbb{P}[A_n^c] \leq \sum_{i=0}^{1} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{P}[S_k^{(i,n)} \neq \hat{S}_k^{(i,n)}]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{P}[|S_k^{(1,n)}| > n^\gamma] = 2\sum_{k=1}^{k_n} e^{-\frac{n-k}{n}n^\gamma} \leq 2ne^{-\alpha n^\gamma}.$$

O Lema segue de Borel-Cantelli. □

Corolário 5.2.1 *Considere o evento* $B_n := \left\{K_n^{(i)}(l_k) = \hat{K}_n^{(i)}(l_k); k = 1, 2, ..., k_n; i = 0, 1\right\}$ *então* $\mathbb{P}[B_n^c \quad i.v] = 0$.

Prova do Corolário 5.2.1. Imediata do lema anterior e (5.30). □

Observação 5.2.2 *Da construção dos processos temos que* $\tilde{K}_n^{(0)}$ *e* $\tilde{K}_n^{(1)}$ *são processos independentes e* $\tilde{K}_n^{(i)} \overset{\mathcal{D}}{=} K_n^{(i)}$, $i = 0, 1$.

Sejam $\beta \in (2\gamma, 1)$ e $l_n^\beta := \min\{l_k : l_k \geq l_{k_n} - n^\beta\}$. Isto é, l_n^β é o primeiro nível dos processos cuja distancia até o nível final é menor que n^β.

Lema 5.2.2 $\mathbb{P}[K_n^{(1)}(s) > K_n^{(0)}(s), \tau_n \leq s \leq \tau_n + n^\beta, \{\tau_n \leq l_n^\beta\}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Prova do Lema 5.2.2. Seja $k_n^\beta \in \mathbb{N}$ tal que $l_n^\beta = \frac{nk_n^\beta}{n-k_n^\beta}$ isto é $k_n^\beta = \frac{nl_n^\beta}{n+l_n^\beta}$. Portanto,

$$\mathbb{P}\left[K_n^{(1)}(s) > K_n^{(0)}(s), \tau_n \leq s \leq \tau_n + n^\beta, \{\tau_n \leq l_n^\beta\}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n^\beta} \mathbb{P}\left[K_n^{(1)}(s) > K_n^{(0)}(s), \tau_n \leq s \leq \tau_n + n^\beta; \tau_n = l_j\right]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_n^\beta} \mathbb{P}\left[K_n^{(1)}(s) > K_n^{(0)}(s), \tau_n \leq s \leq \tau_n + n^\beta | \tau_n = l_j\right] \mathbb{P}[\tau_n = l_j]$$

É fácil ver que existe $C(\alpha) > 1$ tal que $\forall k, k = 0, 1, ..., k_n$ temos que

$$1 \leq l_{k+1} - l_k \leq C(\alpha). \tag{5.34}$$

Além disso, $\mathbb{P}\left[K_n^{(1)}(s) > K_n^{(0)}(s), \tau_n \leq s \leq \tau_n + n^\beta \middle| \tau_n = l_j\right]$ esta limitada superiormente pela probabilidade de ter dois pontos fixos a uma distancia $\lceil 3n^\gamma \rceil$ no nível l_j e não coalescer depois de um tempo n^β. De (5.34) temos que o processo deve percorrer pelo menos $\lfloor C(\alpha)^{-1} n^\beta \rfloor$ níveis sem ter coalescência. Portanto de maneira análoga ao Lema 5.1.2 obtemos que:

$$\mathbb{P}\left[K_n^{(1)}(s) > K_n^{(0)}(s), \tau_n \leq s \leq \tau_n + n^\beta \middle| \tau_n = l_j\right] \leq C\frac{\lceil 3n^\gamma \rceil}{\sqrt{\lfloor C(\alpha)^{-1}n^\beta \rfloor}}.$$

Agora, esta limitante é válida para todo $j = 1, 2, ..., k_n^\beta$. Portanto,

$$\mathbb{P}\left[K_n^{(1)}(s) > K_n^{(0)}(s), \tau_n \leq s \leq \tau_n + n^\beta, \{\tau_n \leq l_n^\beta\}\right] \leq C\frac{\lceil 3n^\gamma \rceil}{\sqrt{\lfloor C(\alpha)^{-1}n^\beta \rfloor}}.$$

Como $\beta \in (2\gamma, 1)$ segue o lema. □

Corolário 5.2.2 *Sejam* $\tilde{Z}_n^{(i)} := \left\{\left(\frac{x_1}{\sqrt{n}}, \frac{x_2}{n}\right) : (x_1, x_2) \in \tilde{K}_n^{(i)}\right\}$ *então*

1. $\tilde{Z}_n^{(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{q.c} W^{(1)}$;
2. $(\tilde{Z}_n^{(0)}, \tilde{Z}_n^{(1)}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (\tilde{W}^{(0)}, W^{(1)})$ *onde* $\tilde{W}^{(0)} \overset{\mathcal{D}}{=} W^{(0)}$, *e* $\tilde{W}^{(0)}$ *e* $W^{(1)}$ *são independentes.*
3. *A distribuição condicional de* $\left\{\tilde{Z}_n^{(0)}(t), t \leq \frac{\hat{\tau}_n}{n}\right\}$ *dado* $\tilde{Z}_n^{(1)}$ *converge quase certamente à* $\left\{\tilde{W}^{(0)}(t), t \leq \tau\right\}$ *dado* $W^{(1)}$, *onde* $\tau = \inf\{t \geq 0 : \tilde{W}^{(0)}(t) = W^{(1)}(t)\} \wedge \{1/\alpha - 1\}$.

Prova do Corolário 5.2.2.

1. segue imediatamente de (5.27), (5.28) e o Corolário 5.2.1.

2. segue do ponto 1, da Observação 5.2.2 e do Lema 4.5.1.

3. Seja $\bar{Z}_n^{(0)}$, tal que $\bar{Z}_n^{(0)} \overset{\mathcal{D}}{=} \tilde{Z}_n^{(1)}$ e

$$(\bar{Z}_n^{(0)}, \tilde{Z}_n^{(1)}) \xrightarrow[n\to\infty]{q.c} (\bar{W}^{(0)}, W^{(1)}) \tag{5.35}$$

onde $(\bar{W}^{(0)}, W^{(1)}) \overset{\mathcal{D}}{=} (\tilde{W}^{(0)}, W^{(1)})$. Definimos,

$$\bar{\tau}_n := \min\{l_k/n : \tilde{Z}_n^{(1)}(l_k/n) - \tilde{Z}_n^{(0)}(l_k/n) \leq 3n^{\gamma-1/2}\} \wedge \{1/\alpha - 1\}$$

e

$$\bar{\tau} := \inf\{t \geq 0 : \bar{W}^{(0)}(t) = W^{(1)}(t)\} \wedge \{1/\alpha - 1\}$$

É suficiente mostrar que $\bar{\tau}_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c} \tau$. Isto segue de:

- $\mathbb{P}\left[\inf\{t \geq 0 : \bar{W}^{(0)} = W^{(1)}(t)\} = 1/\alpha - 1\right] = 0$ (imediato),

- $\mathbb{P}\left[\forall\epsilon > 0, \bar{W}^{(0)}(t) > W^{(1)}(t) \text{ para algum } t \leq \bar{\tau} + \epsilon \middle| \bar{\tau} < 1/\alpha - 1\right] = 1$ (pela propriedade forte de Markov, a indepêndencia dos processos junto com a Proposição B.0.3).

e o seguinte resultado determinístico

Resultado. Sejam f_n, g_n, f, g funções de $[0, 1/\alpha - 1)$ em $\mathbb{R}$ continuas tais que $f(0) < g(0)$ e $T = \inf\{t \geq 0 : f(t) = g(t)\} \in (0, 1/\alpha - 1)$ e vale que $\forall\delta > 0$, existe $t \in [T, T + \delta] \cap [0, 1/\alpha - 1]$ com $f(t) > g(t)$. Também temos que

$$\sup_{0\leq t\leq (T+1)\wedge\{1/\alpha-1\}} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{e} \quad \sup_{0\leq t\leq (T+1)\wedge\{1/\alpha-1\}} |g_n(t) - g(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sejam $T_n = \inf\{t \geq 0 : g_n(t) - f_n(t) \leq a_n\}$ donde $a_n \geq 0$ e $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Então, $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. □

Definimos $Z_n^{(i)} := \left\{\left(\frac{x_1}{\sqrt{n}}, \frac{x_2}{n}\right) : (x_1, x_2) \in K_n^{(i)}\right\} = \tilde{Y}^{n,T}_{(y_i,0)}$, $i = 0, 1$.

Corolário 5.2.3 *A distribuição condicional de* $\left\{Z_n^{(0)}(t), t \leq \frac{\tau_n}{n}\right\}$ *dado* $Z_n^{(1)}$ *converge quase certamente à de* $\{\tilde{W}^{(0)}, t \leq \tau\}$ *dado* $W^{(1)}$.

Prova do Corolário 5.2.3. segue do Corolário 5.2.1 e 3 do Corolário 5.2.2. □

Corolário 5.2.4 $\left\{Z_n^{(0)}, t \geq \frac{\tau_n}{n}\right\}$ *converge em probabilidade a* $\{W^{(1)}(t), t \geq \tau\}$.

Prova: O Corolário 5.2.2 nos diz que uma vez os caminhos se encontram a uma distancia menor que $3n^\gamma$ e o tempo em que acontece isto esta separado uma distância n^β com $\beta \in (2\gamma, 1)$ do ultimo nível, eles coalescem rapidamente. Agora para tempos a escala difusiva resolve o problema. Então é suficiente mostrar que $\forall\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\max_{0\leq l\leq n^\beta}(K_n^{(1)}(l + \tau_n) - K_n^{(0)}(l + \tau_n)) > \epsilon\sqrt{n}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{5.36}$$

onde $\max_{0\leq l\leq n^\beta}(K_n^{(1)}(l + \tau_n) - K_n^{(0)}(l + \tau_n)) = 0$ se $l + \tau_n > k_n$.

Agora, dado $\tau_n = l_j$, o evento $\left\{\max_{0\leq l\leq n^\beta}(K_n^{(1)}(l + \tau_n) - K_n^{(0)}(l + \tau_n)) > \epsilon\sqrt{n}\right\}$ é dominado estocasticamente pelos incrementos de um processo começa do nível l_j cujos pontos iniciais tem uma distancia igual a $3n^\alpha$ pela desigualdade de Doob para Martingais não negativas temos que:

$$\mathbb{P}\left[\max_{0\leq l\leq n^\beta}(K_n^{(1)}(l + \tau_n) - K_n^{(0)}(l + \tau_n)) > \epsilon\sqrt{n}\middle| \tau_n = l_j\right] \leq \frac{3n^\gamma}{\sqrt{\epsilon n}}.$$

□

Prova da Proposição 5.2.1. segue dos Corolários 5.2.3 e 5.2.4. □

Consideremos agora o caso $k > 1$. É suficiente mostrar que

$$\mathbb{E}[f_0(Z_n^{(0)})...f_k(Z_n^{(k)})] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f_0(W^{(0)})...f_k(W^{(k)})] \tag{5.37}$$

para todo $f_0, ..., f_k \in \mathcal{C}_b(\Pi_0^{1/\alpha-1}, \mathbb{R})$ o espaço de todas as funções continuas limitadas de $\Pi_0^{1/\alpha-1}$ em $\mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f_0(Z_n^{(0)})...f_k(Z_n^{(k)})] &= \mathbb{E}\left\{f_1(Z_n^{(1)})\mathbb{E}[f_0(Z_n^{(0)})f_2(Z_n^{(2)})...f_k(Z_n^{(k)})|Z_n^{(1)}]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{f_1(Z_n^{(1)})\mathbb{E}[f_0(Z_n^{(0)})|Z_n^{(1)}]\mathbb{E}[f_2(Z_n^{(2)})...f_k(Z_n^{(k)})|Z_n^{(1)}]\right\}
\end{aligned}$$

pois dado $Z_n^{(1)}$, $Z_n^{(0)}$ e $(Z_n^{(2)}, ..., Z_n^{(k)})$ são independentes. Como $Z_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\overset{q.c}{\longrightarrow}} W^{(1)}$ então por indução temos que

$$\mathbb{E}[f_0(Z_n^{(0)})|Z_n^{(1)}] \underset{n\to\infty}{\overset{q.c}{\longrightarrow}} \mathbb{E}[f_0(W^{(0)})|W^{(1)}]$$

e

$$\mathbb{E}[f_2(Z_n^{(2)})...f_k(Z_n^{(k)})|Z_n^{(1)}] \underset{n\to\infty}{\overset{q.c}{\longrightarrow}} \mathbb{E}[f_2(W^{(2)})...f_k(W^{(k)})|W^{(1)}]$$

Lembrando que as funções $f_i, i = 0, 1, ..., k$ são limitadas, pelo Teorema da convergência dominada temos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{f_1(Z_n^{(1)})\mathbb{E}[f_0(Z_n^{(0)})|Z_n^{(1)}]\mathbb{E}[f_2(Z_n^{(2)})...f_k(Z_n^{(k)})|Z_n^{(1)}]\right\} \\
\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ &\mathbb{E}\left\{f_1(W^{(1)})\mathbb{E}[f_0(W^{(0)})|W^{(1)}]\mathbb{E}[f_2(W^{(2)})...f_k(W^{(k)})|W^{(1)}]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{f_1(W^{(1)})\mathbb{E}[f_0(W^{(0)})f_2(W^{(2)})...f_k(W^{(k)})|W^{(1)}]\right\} \\
&= \mathbb{E}[f_1(W^{(1)})f_0(W^{(0)})f_2(W^{(2)})...f_k(W^{(k)})].
\end{aligned}$$

Assim segue (5.37).

Paso III. Caso geral.

A prova é análoga a prova em [2] pag 14. □

5.3 Condição B_1.

Mostrar a condição B_1 do Teorema 2.2.2 para nosso modelo é equivalente a $\forall t \in (0, 1/\alpha - 1)$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{(a,t_0)\in\mathbb{R}\times[0,1/\alpha-1]} \mathbb{P}[\eta_{\hat{Y}^{n,T}}(t_0, t; a, a+\epsilon) \geq 2] \underset{\epsilon\to 0_+}{\longrightarrow} 0. \tag{5.38}$$

Seja $t \in (0, 1/\alpha - 1)$ e $\epsilon > 0$ fixos, seja $r_n(t) := \max\left\{k : \frac{k}{n-k} < 1/\alpha - 1 - t\right\}$ e $m_k = \frac{k}{n-k}$. Logo, pela invariância por translação no espaço (5.38) é equivalente a

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{0\leq k\leq r_n(t)} \mathbb{P}[\eta_{\hat{Y}^{n,T}}(m_k, t; 0, \epsilon) \geq 2] \underset{\epsilon\to 0_+}{\longrightarrow} 0. \tag{5.39}$$

Seja $K^n := \left\{(\sqrt{n}x_1, nx_2) : (x_1, x_2) \in \hat{Y}^{n,T}\right\}$. segue que, para $k = 0, ..., r_n(t)$

$$\mathbb{P}[\eta_{\hat{Y}^{n,T}}(m_k, t; 0, \epsilon) \geq 2] = \mathbb{P}[\eta_{K^n}(l_k, nt; 0, \sqrt{n}\epsilon) \geq 2].$$

Note que como não há cruzamento de trajetórias o evento $\{\eta_{K^n}(l_k, nt; 0, \sqrt{n}\epsilon) \geq 2\}$ é dominado pelo evento de duas trajetórias começando desde os pontos $(0, l_k)$ e $(\sqrt{n}\epsilon, l_k)$ visitar pelo menos $\lfloor C(\alpha)^{-1}nt \rfloor$ níveis e não coalescer, analogamente ao Lema 5.1.2, segue que para $k = 0, ..., r_n(t)$

$$\mathbb{P}[\eta_{K^n}(l_k, nt; 0, \sqrt{n}\epsilon) \geq 2] \leq C\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sqrt{C(\alpha)^{-1}nt}} = C_1(\alpha)\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}.$$

Isto implica (5.39). □

5.4 Condição B_2.

Lema 5.4.1 *Sejam $\epsilon > 0$ fixo e Seja $A_k := \left\{|Q_k \cap [0, \epsilon\sqrt{n}]| \in \left[\frac{\alpha}{2}\epsilon\sqrt{n}, \frac{2e}{\alpha}\epsilon\sqrt{n}\right]\right\}$ para $k = 1, 2, ..., k_n$. Então,* $\limsup_{n\to\infty} \sup_{1\leq k\leq k_n} \mathbb{P}[A_k^c] = 0$.

Prova: Note que A_k^c implica que $|Q_k \cap [0, \epsilon\sqrt{n}]| < \frac{\alpha}{2}\epsilon\sqrt{n}$ ou $|Q_k \cap [0, \epsilon\sqrt{n}]| > \frac{2e}{\alpha}\epsilon\sqrt{n}$. Agora, $|Q_k \cap [0, \epsilon\sqrt{n}]| < \frac{\alpha}{2}\epsilon\sqrt{n}$ implica que o número de pontos do processo Q_k em $[0, \epsilon\sqrt{n}]$ é menor do que $\frac{\alpha}{2}\epsilon\sqrt{n}$, isto é o ponto número $\lceil \frac{\alpha}{2}\epsilon\sqrt{n} \rceil$ é maior que $\epsilon\sqrt{n}$. Então,

$$\mathbb{P}\left[|Q_k \cap [0, \epsilon\sqrt{n}]| < \frac{\alpha}{2}\epsilon\sqrt{n}\right] \leq \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{\lceil \frac{\alpha}{2}\epsilon\sqrt{n} \rceil} T_i > \epsilon\sqrt{n}\right]$$

onde $(T_i)_{i=1}^{\lceil \frac{\alpha}{2}\epsilon\sqrt{n} \rceil}$ são variáveis aleatórias i.i.d com T_1 exponencial de taxa $\frac{n-k}{n} \in [\alpha, 1]$. Portanto,

pela lei dos grandes desvios $\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{\lceil \frac{\alpha}{2}\epsilon\sqrt{n}\rceil} T_i > \epsilon\sqrt{n}\right]$ tem decaimento exponencialmente rápido para zero.

O evento $|Q_k \cap [0, \epsilon\sqrt{n}]| > \frac{2e}{\alpha}\epsilon\sqrt{n}$ implica que a quantidade de pontos do processo em $[0, \epsilon\sqrt{n}]$ é maior do que $\frac{2e}{\alpha}\epsilon\sqrt{n}$, portanto

$$\mathbb{P}[|Q_k \cap [0, \epsilon\sqrt{n}]| > \frac{2e}{\alpha}\epsilon\sqrt{n}] \leq \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{\lceil \frac{2e}{\alpha}\epsilon\sqrt{n}\rceil} T_i < \epsilon\sqrt{n}\right]$$

Seja $M_n = \sum_{i=1}^{\lceil \frac{2e}{\alpha}\epsilon\sqrt{n}\rceil} T_i$, segue que M_n é uma variável aleatória Gamma com parâmetros $\lceil \frac{2e}{\alpha}\epsilon\sqrt{n}\rceil$, $\frac{n}{n-k}$. Logo usando a formula de Stirling e a mesma idéia que na prova da propriedade 3 de ξ^n, obtemos que $\mathbb{P}[M_n < \epsilon\sqrt{n}]$ tem decaimento exponencialmente rápido para zero.

Do anterior concluímos que $\mathbb{P}[A_k^c]$ tem decaimento exponencialmente rápido para zero. Isto vale para todo $k = 0, 1, ..., k_n$ assim segue o lema. □

Para mostrar a condição B_2 de Teorema 2.2.2 temos que provar que $\forall t \in (0, 1/\alpha - 1)$,

$$\epsilon^{-1} \limsup_{n\to\infty} \sup_{(a,t_0)\in\mathbb{R}\times[0,1/\alpha-1]} \mathbb{P}[\eta_{\hat{Y}^{n,T}}(t_0, t; a, a+\epsilon) \geq 3] \underset{\epsilon\to 0_+}{\longrightarrow} 0. \tag{5.40}$$

Isto é equivalente a

$$\epsilon^{-1} \limsup_{n\to\infty} \sup_{0\leq k\leq r_n(t)} \mathbb{P}[\eta_{\hat{Y}^{n,T}}(m_k, t; 0, \epsilon) \geq 3] \underset{\epsilon\to 0_+}{\longrightarrow} 0. \tag{5.41}$$

segue que, para $k = 0, ..., r_n(t)$

$$\mathbb{P}[\eta_{\hat{Y}^{n,T}}(m_k, t; 0, \epsilon) \geq 3] = \mathbb{P}[\eta_{K^n}(l_k, nt; 0, \sqrt{n}\epsilon) \geq 3].$$

Dado $A_0 = \{|Q_0 \cap [0, \epsilon\sqrt{n}]| = m \in [\alpha/2\epsilon\sqrt{n}, \frac{2e}{\alpha}\epsilon\sqrt{n}]\}$, sejam $x_1, x_2, ..., x_m$ os pontos do processo e seja

$$\eta_0' := \eta_0'(x_1, x_2, ..., x_m) = |\{K_j^n(tn) : 1 \leq j \leq m\}|$$

Logo,

$$\mathbb{P}[\eta_{K^n}(0, nt; 0, \sqrt{n}\epsilon) \geq 3 | A_0] = \mathbb{P}[\eta_0' \geq 3] \tag{5.42}$$

Agora o seguinte unicamente pode acrescentar a probabilidade, como $\frac{\epsilon\sqrt{n}}{m} \in \left[\frac{\alpha}{2e}, \frac{2}{\alpha}\right]$, tomamos os pontos $y_i = i\frac{\epsilon\sqrt{n}}{m}$, para $i = 0, 1, 2, ..., m$. Assim a distancia entre tais pontos não pode ser maior que $\frac{2}{\alpha}$, seja

$$\{z_0 = 0, z_1, z_2, ..., z_{2m}, z_{2m+1} = \epsilon\sqrt{n}\}$$

o conjunto de pontos ordenado de menor a maior devido à união dos x_i´s e y_i´s. Seja K_j a trajetória começãndo desde o ponto z_j.

Se $\eta_0' \geq 3$, então existe um $1 \leq j \leq 2m$ tal que $K_{j-1}(tn) < K_j(tn) < K_{2m+1}(tn)$. Portanto do Lema B.0.4

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\eta_0' \geq 3] &\leq \sum_{j=1}^{2m} \mathbb{P}[K_{j-1}(tn) < K_j(tn) < K_{2m+1}(tn)] \\
&= \lim_{r\to 0_+} \sum_{j=1}^{2m} \mathbb{P}[\tilde{X}_{j-1}^r(tn) < \tilde{X}_j^r(tn) < \tilde{X}_{2m+1}^r(tn)] \\
&= \lim_{r\to 0_+} \sum_{j=1}^{2m} \int_{\tilde{\Pi}_j^r} \mathbb{P}[\tilde{X}_{j-1}^r(tn) < \tilde{X}_j^r(tn) < \tilde{X}_{2m+1}^r(tn) | \tilde{X}_j^r = \pi] \mu_{\tilde{X}_j^r}(d\pi) \\
&= \lim_{r\to 0_+} \sum_{j=1}^{2m} \int_{\tilde{\Pi}_j^r} \mathbb{P}[\tilde{X}_{j-1}^r(tn) < \tilde{X}_j^r(tn) | \tilde{X}_j^r = \pi] \mathbb{P}[\tilde{X}_j^r(tn) < \tilde{X}_{2m+1}^r(tn) | \tilde{X}_j^r = \pi] \mu_{\tilde{X}_j^r}(d\pi)
\end{aligned}$$

A ultima igualdade usamos o fato que dado $\tilde{X}_j^r = \pi$, $\tilde{X}_{j-1}^r(tn) < \tilde{X}_j^r(tn)$ e $\tilde{X}_j^r(tn) < \tilde{X}_{2m+1}^r(tn)$ são independentes.

Agora na Proposição B.0.2 vimos que $\mathbb{P}[\tilde{X}_{j-1}^r(tn) < \tilde{X}_j^r(tn) | \tilde{X}_j^r = \pi]$ é crescente em π e $\mathbb{P}[\tilde{X}_j^r(tn) < \tilde{X}_{2m+1}^r(tn) | \tilde{X}_j^r = \pi]$ é decrescente em π, logo usando a desigualdade FKG para $\mu_{\tilde{X}_j^r}(d\pi)$, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[\eta_0' \geq 3] &\leq \lim_{r\to 0_+} \sum_{j=1}^{2m} \int_{\tilde{\Pi}_j^r} \mathbb{P}[\tilde{X}_{j-1}^r(tn) < \tilde{X}_j^r(tn) | \tilde{X}_j^r = \pi] \mu_{\tilde{X}_j^r}(d\pi) \\
&\quad \times \int_{\tilde{\Pi}_j^r} \mathbb{P}[\tilde{X}_j^r(tn) < \tilde{X}_{2m+1}^r(tn) | \tilde{X}_j^r = \pi] \mu_{\tilde{X}_j^r}(d\pi) \\
&= \lim_{r\to 0_+} \sum_{j=1}^{2m} \mathbb{P}[\tilde{X}_{j-1}^r(tn) < \tilde{X}_j^r(tn)] \mathbb{P}[\tilde{X}_j^r(tn) < \tilde{X}_{2m+1}^r(tn)] \\
&= \sum_{j=1}^{2m} \mathbb{P}[K_{j-1}(tn) < K_j(tn)] \mathbb{P}[K_j(tn) < K_{2m+1}(tn)] \\
&\leq \sum_{j=1}^{2m} \mathbb{P}[K_{j-1}(tn) < K_j(tn)] \mathbb{P}[K_0(tn) < K_{2m+1}(tn)] \\
&\leq 2m \mathbb{P}[K_{(0,0)}(tn) < K_{(2/\alpha,0)}] \mathbb{P}[K_0(tn) < K_{2m+1}(tn)] \\
&\leq 4\frac{e\epsilon}{\alpha}\sqrt{n} \mathbb{P}[K_{(0,0)}(tn) < K_{(2/\alpha,0)}(tn)] \mathbb{P}[K_0(tn) < K_{2m+1}(tn)].
\end{aligned}
$$

$K_{(0,0)}(tn) < K_{(2/\alpha,0)}(tn)$ implica que começãndo a uma distancia $2/\alpha$ no nível $k = 0$, depois de $C(\alpha)^{-1}tn$ níveis visitados não temos coalescencia, logo sabemos que

$$
\mathbb{P}[K_{(0,0)}(tn) < K_{(2/\alpha,0)}(tn)] \leq \frac{\lceil 2/\alpha \rceil}{\sqrt{C(\alpha)^{-1}nt}}
$$

e analogamente

$$
\mathbb{P}[K_0(tn) < K_{2m+1}(tn)] \leq \frac{\lceil \epsilon\sqrt{n} \rceil}{\sqrt{C(\alpha)^{-1}nt}}
$$

Assim, $\mathbb{P}[\eta_0' \geq 3] \leq \tilde{C}(\alpha,t)\epsilon^2$, onde $\tilde{C}(\alpha,t) > 0$. De (5.42), temos que

$$
\mathbb{P}[\eta_{K^n}(0, nt; 0, \sqrt{n}\epsilon) \geq 3] \leq \tilde{C}(\alpha,t)\epsilon^2 + \mathbb{P}[A_0^c].
$$

Analogamente, mostramos que para $k = 1, 2, ..., r_n(t)$

$$
\mathbb{P}[\eta_{K^n}(l_k, nt; 0, \sqrt{n}\epsilon) \geq 3] \leq \tilde{C}(\alpha,t)\epsilon^2 + \mathbb{P}[A_k^c].
$$

Portanto,

$$
\sup_{0\leq k\leq r_n(t)} \mathbb{P}[\eta_{K^n}(l_k, nt; 0, \sqrt{n}\epsilon) \geq 3] \leq \tilde{C}(\alpha,t)\epsilon^2 + \sup_{0\leq k\leq r_n(t)} \mathbb{P}[A_k^c].
$$

Do Lema 5.4.1, segue que

$$
\limsup_{n\to\infty} \sup_{0\leq k\leq r_n(t)} \mathbb{P}[\eta_{K^n}(l_k, nt; 0, \sqrt{n}\epsilon) \geq 3] \leq \tilde{C}(\alpha,t)\epsilon^2. \tag{5.43}
$$

De (5.43) segue a condição B_2. $\square$

5.5 Prova do Teorema principal

Agora temos todas as ferramentas para provar o Teorema 3.3.1, ouseja

$$\mathfrak{E}^n[\xi^n] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} T^{-1}[\bar{\mathcal{W}}_{0,1/\alpha-1}]. \tag{5.44}$$

Lembremos que $\tilde{\xi}^n = \mathfrak{E}^n[\xi^n]$. Dos Lemas 4.1.3, 4.2.1 e 4.3.1 obtemos que

$$d_{\mathcal{H}_{-1,-\alpha}}\left(\tilde{\xi}^n, \tilde{\xi}^{3,n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0. \tag{5.45}$$

Temos que $T[\tilde{\xi}^{3,n}] = Y^n \overset{\mathcal{D}}{=} \hat{Y}^{n,T}$ e que $\hat{Y}^{n,T}$ satisfaz as condições (I), (B_1) e (B_2) no Teorema 2.2.2, assim $\hat{Y}^{n,T} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \bar{\mathcal{W}}_{0,1/\alpha-1}$, logo (5.44) segue de (5.45) e o Teorema do mapeamento continuo.

Apêndice A

Convergência em distribuição

Sejam $k > 0$ fixo e $D = D_{[0,k]}$ o espaço das funções $x : [0,k] \mapsto \mathbb{R}$ continuas a direita e com limite a esquerda:

- Para $0 \leq t < k$, $x(t) = \lim_{s \to t^+} x(s)$ e
- Para $0 < t \leq k$, $\lim_{s \to t^-} x(s) = x(t-)$ existe.

Seja Λ' a familia de funções continuas, estritamente crescentes $\lambda : [0,k] \mapsto [0,k]$ tais que $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(k) = k$. Seja Λ o conjunto de funções Lipschitz $\lambda \in \Lambda'$ tais que

$$\gamma(\lambda) \equiv ess \sup |\log \lambda'(t)| = \sup_{s > t \geq 0} \left| \log \left(\frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right) \right| < \infty.$$

Para $x, y \in D_{[0,k]}$, define-se

$$d(x,y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left[\gamma(\lambda) \vee \sup_{0 \leq t \leq k} |x(t) - y(\lambda(t))| \right].$$

Para medidas de probabilidade $\mathbb{P}$ sobre $(D, \mathfrak{D})$, ($\mathfrak{D}$ é a σ-álgebra de Borel induzida por d) denotamos por $T_{\mathbb{P}}$ o conjunto de pontos t em $[0,k]$ para os quais a projeção π_t é continua salvo em um conjunto de pontos de $\mathbb{P}$-medida 0.
Note que os pontos 0 e k pertencem a $T_{\mathbb{P}}$.

Teorema A.0.1 *Seja $(X^n)_{n=1}^{\infty}, X \in D_{[0,k]}$. Suponha que para todo subconjunto finito de pontos, $\{t_1, t_2, ..., t_j\} \subset T_{\mu_X}$, temos que*

$$(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_j}) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} (X_{t_1}, ..., X_{t_j}), \tag{A.1}$$

que

$$X_k - X_{k-\delta} \xrightarrow[\delta\to 0]{\mathcal{D}} 0 \tag{A.2}$$

e que, para $r \leq s \leq t, n \geq 1, \beta \geq 0, \alpha > 1/2$ *e* F *continua e não decrescente sobre* $[0,k]$

$$\mathbb{E}[|X_t^n - X_s^n|^{2\beta}|X_s^n - X_r^n|^{2\beta}] \leq [F(t) - F(r)]^{2\alpha}. \tag{A.3}$$

Então $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$ *em* $D_{[0,k]}$.

Prova: Ver [4] pág 142. □

Proposição A.0.1 *Para* $n = 1, 2, ...,$ *seja* $\{Y_n(k), k = 0, 1, 2, ...\}$ *um processo discreto que assume valores em* $\mathbb{R}$*, seja* $\alpha_n > 0$*, e definimos*

$$X_t^n = Y_n(\lfloor \alpha_n t \rfloor) \tag{A.4}$$

e

$$Z_t^n = Y_n(\lfloor \alpha_n t \rfloor) + (\alpha_n t - \lfloor \alpha_n t \rfloor)(Y_n(\lfloor \alpha_n t \rfloor + 1) - Y_n(\lfloor \alpha_n t \rfloor)) \tag{A.5}$$

para todo $t \in [0,k]$*. Note que* X^n *tem trajetórias em* $D_{[0,k]}$ *e* Z^n *tem trajetórias em* $\mathcal{C}_{[0,k]}$*. Se* $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ *e* X *é um processo com trajetórias em* $\mathcal{C}_{[0,k]}$*, então*

$$X^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X \quad em \quad D_{[0,k]} \Leftrightarrow Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X \quad em \quad \mathcal{C}[0,k] \tag{A.6}$$

Prova: Ver [5] pág 149. □

Sejam $\alpha \in (0,1)$ fixo e seja $f(t) = (1-t)$, para $t \in [0, 1-\alpha]$. Seja B um movimento Browniano Standard começando em 0. Considere o processo

$$(B[t'], t'), \quad t' \in \left[0, \frac{1}{\alpha} - 1\right] \tag{A.7}$$

Então

$$(B[t'], t') = \left(B\left[\frac{1}{f(t)} - 1\right], \frac{1}{f(t)} - 1\right), \quad 0 \leq t \leq 1-\alpha \tag{A.8}$$

e considere o mapeamento continuo $T_1 : \mathcal{C}_{[0,1/\alpha-1]} \longrightarrow \mathcal{C}_{[0,1-\alpha]}$ tal que

$$\left(B\left[\frac{1}{f(t)}-1\right],\frac{1}{f(t)}-1\right)\xmapsto{T_1}\left(cf(t)B\left[\frac{1}{f(t)}-1\right],t\right),\quad 0\leq t\leq 1-\alpha. \tag{A.9}$$

Com $c>0$. Seja $g(t)=\frac{1}{f(t)}-1$ e X o processo definido por

$$X_t=cf(t)B[g(t)],\quad t\in[0,1-\alpha] \tag{A.10}$$

Observação A.0.1 *O processo X é obtido usando um mapeamento continuo de um movimento Browniano standard em $\mathcal{C}_{[0,1/\alpha-1]}$.*

Sejam $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de processos de Poisson em $\mathbb{R}$ independentes de taxa 1.
Seja $\varepsilon_j=\arg\min_{x\in P_j}|x|$ e $k_n(\alpha)=k_n=\lfloor n(1-\alpha)\rfloor$.
Sejam $Y_n(0)=0$ e $Y_n(k)=f_n(k)\sum_{j=1}^{k}\frac{\sqrt{n}\varepsilon_j}{n-j}$, para $k=1,2,...,k_n$, onde $f_n(k)=\frac{n-k}{n}$.

Seja

$$X_t^n=Y_n(\lfloor nt\rfloor),0\leq t\leq 1-\alpha \tag{A.11}$$

Lema A.0.1 *Sejam (X^n) como em (A.11), X como em (A.10) com $c=\sqrt{2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]}$. Suponha que para todo subconjunto finito, $\{t_1,t_2,...,t_j\}\subset[0,1-\alpha]$, temos que*

$$(X_{t_1}^n,...,X_{t_j}^n)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}}(X_{t_1},...,X_{t_j}). \tag{A.12}$$

Então, $X^n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}}X$ em $D_{[0,1-\alpha]}$.

Prova: Do Teorema A.0.1 temos que mostrar que

$$X_{1-\alpha}-X_{1-\alpha-\delta}\xrightarrow[\delta\to 0]{\mathcal{D}}0. \tag{A.13}$$

e que para $r\leq s\leq t$, $n\geq 1$, $\beta\geq 0$, $\gamma>1/2$ e F continua e não decrescente sobre $[0,1-\alpha]$,

$$\mathbb{E}[|X_s^n-X_r^n|^{2\beta}|X_t^n-X_s^n|^{2\beta}]\leq[F(t)-F(r)]^{2\gamma}. \tag{A.14}$$

(A.13) segue da observação A.0.1 e do fato que o movimento Browniano B é continuo em $1/\alpha-1$.

Seja $\tilde{X}_t^n=\sum_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor}\frac{\sqrt{n}\varepsilon_j}{n-j}$ para $t\in[0,1-\alpha]$, onde $\tilde{X}_0^n=0$. Assim, $X_t^n=f_n(\lfloor nt\rfloor)\tilde{X}_t^n$. Então

$$\begin{aligned}
|X_s^n - X_r^n|^2 &= |f_n(\lfloor ns\rfloor)\tilde{X}_s^n - f_n(\lfloor nr\rfloor)\tilde{X}_r^n|^2 \\
&= |f_n(\lfloor ns\rfloor)\tilde{X}_s^n - f_n(\lfloor ns\rfloor)\tilde{X}_r^n + f_n(\lfloor ns\rfloor)\tilde{X}_r^n - f_n(\lfloor nr\rfloor)\tilde{X}_r^n|^2 \\
&= |f_n(\lfloor ns\rfloor)(\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n) + \tilde{X}_r^n(f_n(\lfloor ns\rfloor) - f_n(\lfloor nr\rfloor))|^2 \\
&\leq 2|f_n(\lfloor ns\rfloor)|^2|\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n|^2 + 2|\tilde{X}_r^n|^2|f_n(\lfloor ns\rfloor) - f_n(\lfloor nr\rfloor)|^2 \\
&\leq 2|\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n|^2 + 2\left(\frac{\lfloor ns\rfloor - \lfloor nr\rfloor}{n}\right)^2|\tilde{X}_r^n|^2 \\
&\leq 2|\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n|^2 + 2\left(\frac{\lfloor nt\rfloor - \lfloor nr\rfloor}{n}\right)^2|\tilde{X}_r^n|^2
\end{aligned} \tag{A.15}$$

análogamente

$$|X_t^n - X_s^n|^2 \leq 2|\tilde{X}_t^n - \tilde{X}_s^n|^2 + 2\left(\frac{\lfloor nt\rfloor - \lfloor nr\rfloor}{n}\right)^2|\tilde{X}_s^n|^2 \tag{A.16}$$

Note que se $t - r \leq 1/n$ então $\lfloor ns\rfloor = \lfloor nt\rfloor$ ou $\lfloor ns\rfloor = \lfloor nr\rfloor$ e portanto

$$\mathbb{E}[|X_s^n - X_r^n|^2|X_t^n - X_s^n|^2] = 0. \tag{A.17}$$

Suponhamos então que $t - r > 1/n$. De (A.15) e (A.16) temos que

$$|X_s^n - X_r^n|^2||X_t^n - X_s^n|^2 \leq (I) + (II) + (III) + (IV), \tag{A.18}$$

onde

$$(I) = 4|\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n|^2|\tilde{X}_t^n - \tilde{X}_s^n|^2,$$

$$(II) = 4\left(\frac{\lfloor nt\rfloor - \lfloor nr\rfloor}{n}\right)^2|\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n|^2|\tilde{X}_s^n|^2,$$

$$(III) = 4\left(\frac{\lfloor nt\rfloor - \lfloor nr\rfloor}{n}\right)^2|\tilde{X}_t^n - \tilde{X}_s^n|^2|\tilde{X}_r^n|^2$$

e

$$(IV) = 4\left(\frac{\lfloor nt\rfloor - \lfloor nr\rfloor}{n}\right)^4|\tilde{X}_r^n|^2|\tilde{X}_s^n|^2$$

Agora, por independência

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(I)] &= 4\mathbb{E}[|\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n|^2]\mathbb{E}[|\tilde{X}_t^n - \tilde{X}_s^n|^2] \\
&\leq 4\left\{\sum_{j=\lfloor nr\rfloor+1}^{\lfloor ns\rfloor} \frac{n\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]}{[n-j]^2}\right\} \times \left\{\sum_{j=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} \frac{n\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]}{[n-j]^2}\right\} \\
&\leq 4(\mathbb{E}[\varepsilon_1^2])^2 \times \sum_{j=\lfloor nr\rfloor+1}^{\lfloor ns\rfloor} \frac{n}{(n\alpha)^2} \times \sum_{j=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} \frac{n}{(n\alpha)^2} \\
&\leq 4(\mathbb{E}[\varepsilon_1^2])^2\alpha^{-4}\left(\frac{\lfloor ns\rfloor - \lfloor nr\rfloor}{n}\right)\left(\frac{\lfloor nt\rfloor - \lfloor ns\rfloor}{n}\right) \\
&\leq 4(\mathbb{E}[\varepsilon_1^2])^2\alpha^{-4}\left(\frac{\lfloor nt\rfloor - \lfloor nr\rfloor}{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

como $t - r > 1/n$, então

$$
\mathbb{E}[(I)] \leq 4(\mathbb{E}[\varepsilon_1^2])^2\alpha^{-4} \times 4(t-r)^2 = C_1(t-r)^2. \tag{A.19}
$$

Como $t - r > 1/n$ e da desigualdade de Hölder obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(II)] &= 4\left(\frac{\lfloor nt\rfloor - \rfloor nr\rfloor}{n}\right)^2 \mathbb{E}[|\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n|^2|\tilde{X}_s^n|^2] \\
&\leq 16(t-r)^2\left\{\mathbb{E}[|\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n|^4]\right\}^{1/2}\left\{\mathbb{E}[|\tilde{X}_s^n|^4]\right\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{A.20}
$$

agora,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\tilde{X}_s^n|^4] &\leq \sum_{j=1}^{\lfloor ns\rfloor} \frac{n^2\mathbb{E}[\varepsilon_1^4]}{[n-j]^4} + \sum_{\substack{i\neq j \\ 1\leq i,j\leq\lfloor ns\rfloor}} \frac{n^2(\mathbb{E}[\varepsilon_1^2])^2}{[n-j]^4} \\
&\leq \frac{n^3\mathbb{E}[\varepsilon_1^4]}{(n\alpha)^4} + \frac{n^4(\mathbb{E}[\varepsilon_1^2])^2}{(n\alpha)^4} \leq C_2
\end{aligned} \tag{A.21}
$$

onde $C_2 > 0$ constante que depende de α e de $\mathbb{E}[\varepsilon_1^2], \mathbb{E}[\varepsilon_1^4]$. Analogamente,

$$
\mathbb{E}[|\tilde{X}_s^n - \tilde{X}_r^n|^4] \leq C_2. \tag{A.22}
$$

De (A.20), (A.21) e (A.22) temos que

$$\mathbb{E}[(II)] \leq C_3(t-r)^2. \tag{A.23}$$

Como $t - r > 1/n$, analogamente

$$\mathbb{E}[(III)] \leq C_3(t-r)^2. \tag{A.24}$$

De novo, usando que $t - r < 1/n$, a desigualdade de Hölder e os mesmos argumentos anteriores obtemos

$$\mathbb{E}[(IV)] \leq C_4(t-r)^4$$

dado $|t - r| \leq 1$, então

$$\mathbb{E}[(IV)] \leq C_4(t-r)^2. \tag{A.25}$$

De (A.17), (A.18), (A.19) e (A.23), (A.24), (A.25) obtemos que

$$\mathbb{E}[|X_s^n - X_r^n|^2 |X_t^n - X_s^n|^2] \leq C_5(t-r)^2,$$

com $\beta = 1$, $\gamma = 1$ e $F(t) = \sqrt{C_5}t$ segue o Lema. □

Lema A.0.2 *As distribuições finito dimensionais do processo X^n em (A.11), convergem fracamente às distribuições finito dimensionais do processo X em (A.10), com $c = \sqrt{2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]}$.*

Prova: Seja $t \in (0, 1-\alpha]$ fixo. Temos que $X_t^n = f_n(\lfloor nt \rfloor)\tilde{X}_t^n$, onde

$$f_n(\lfloor nt \rfloor) = \frac{n - \lfloor nt \rfloor}{n} \quad \text{e} \quad \tilde{X}_t^n = \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{\sqrt{n}\varepsilon_j}{n-j}.$$

Sejam $Y_{nk} = \frac{\sqrt{n}\varepsilon_k}{n-k}$ para $k = 1, 2, ..., k_n$, $r_n = \lfloor nt \rfloor$. Logo note que,

$$\tilde{X}_t^n = \sum_{j=1}^{r_n} Y_{nj}.$$

Então

$$\mathbb{E}[Y_{nk}] = 0, \quad \sigma_{nk}^2 = Var[Y_{nk}] = \frac{n\mathbb{E}[(\varepsilon_1)^2]}{[n-k]^2} \quad \text{e} \quad s_n^2 = \sum_{j=1}^{r_n} \sigma_{nj}^2.$$

assim, $s_n^2 = \sum_{j=1}^{r_n} \frac{n\mathbb{E}[(\varepsilon_1)^2]}{[n-j]^2} \geq t\mathbb{E}[(\varepsilon_1)^2] = C_0 > 0$. Então, seja $\epsilon > 0$ fixo,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r_n}\frac{1}{s_n^2}\mathbb{E}\left[Y_{nk}^2\mathbb{I}_{\{|Y_{nk}|\geq s_n\epsilon\}}\right] &\leq C_1\sum_{j=1}^{r_n}\mathbb{E}\left[\frac{n(\varepsilon_j)^2}{[n-j]^2}\mathbb{I}_{\left\{|\varepsilon_j|\geq\frac{n-j}{\sqrt{n}}s_n\epsilon\right\}}\right] \quad (C_1=1/C_0)\\
&\leq C_1\frac{n}{[n-r_n]^2}\sum_{j=1}^{r_n}\mathbb{E}\left[(\varepsilon_j)^2\mathbb{I}_{\left\{|\varepsilon_j|\geq\frac{n-j}{\sqrt{n}}s_n\epsilon\right\}}\right]\\
&\leq C_1\frac{n}{[n-r_n]^2}\sum_{j=1}^{r_n}\mathbb{E}\left[(\varepsilon_j)^2\mathbb{I}_{\left\{|\varepsilon_j|\geq\frac{n-r_n}{\sqrt{n}}\sqrt{C_0}\epsilon\right\}}\right]\\
&= C_1\frac{n}{[n-r_n]^2}r_n\mathbb{E}\left[(\varepsilon_1)^2\mathbb{I}_{\left\{|\varepsilon_1|\geq\frac{n-r_n}{\sqrt{n}}\sqrt{C_0}\epsilon\right\}}\right]
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Temos que

$$C_1\frac{n}{[n-r_n]^2}r_n=\frac{n\lfloor nt\rfloor}{t\mathbb{E}[(\varepsilon_1)^2][n-\lfloor nt\rfloor]^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\mathbb{E}[(\varepsilon_1)^2](1-t)}, \tag{A.27}$$

$$\frac{n-r_n}{\sqrt{n}}\sqrt{C_0}\epsilon\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty\Rightarrow\mathbb{I}_{\left\{|\varepsilon_1|\geq\frac{n-r_n}{\sqrt{n}}\sqrt{C_0}\epsilon\right\}}\underset{n\to\infty}{\overset{q.c}{\longrightarrow}}0. \tag{A.28}$$

de (A.26), (A.27), (A.28) e o Teorema da convergência dominada, obtemos que

$$\sum_{j=1}^{r_n}\frac{1}{s_n^2}\mathbb{E}\left[Y_{nk}^2\mathbb{I}_{\{|Y_{nk}|\geq s_n\epsilon\}}\right]\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

da condição de Lindenberg, obtemos:

$$\frac{\sum_{j=1}^{r_n}Y_{nj}}{s_n}\underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}}N(0,1). \tag{A.29}$$

Como $s_n^2=\sum_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor}\frac{n\mathbb{E}[(\varepsilon_1)^2]}{[n-j]^2}=2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]\sum_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor}\frac{1}{\left[1-\frac{j}{n}\right]^2}\frac{1}{n}$ portanto

$$s_n^2\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]\int_0^t\frac{1}{[(1-x)]^2}dx=2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]g(t) \tag{A.30}$$

Logo de (A.29), (A.30) e o Teorema de Slutski,

$$\sum_{j=1}^{r_n}Y_{nj}=s_n\frac{\sum_{j=1}^{r_n}Y_{nj}}{s_n}\underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}}\sqrt{2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]}N(0,g(t)).$$

Isto é,

$$\tilde{X}_t^n\underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}}\sqrt{2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]}N(0,g(t)) \tag{A.31}$$

como $f_n(\lfloor nt\rfloor)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}(1-t)=f(t)$, de (A.31), usando de novo o Teorema de Slutski, obtemos:

$$X_t^n = f_n(\lfloor nt \rfloor)\tilde{X}_t^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} cf(t)N(0, g(t)). \tag{A.32}$$

com $c = \sqrt{2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]}$.

Sejam $0 < s < t \leq 1$ fixos, vejamos que

$$(X_s^n, X_t^n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (cf(s)N(0, g(s)), cf(t)N(0, g(t))) \tag{A.33}$$

Consideremos o vetor aleatório

$$\begin{aligned}
(X_s^n, X_t^n - X_s^n) &= \left(f_n(\lfloor ns \rfloor)\tilde{X}_s^n, f_n(\lfloor nt \rfloor)\tilde{X}_t^n - f_n(\lfloor ns \rfloor)\tilde{X}_s^n\right) \\
&= \left(f_n(\lfloor ns \rfloor)\tilde{X}_s^n, f_n(\lfloor nt \rfloor)(\tilde{X}_t^n - \tilde{X}_s^n)\right) + (0, \tilde{X}_s^n(f_n(\lfloor nt \rfloor) - f_n(\lfloor ns \rfloor))).
\end{aligned}$$

Logo analogamente ao caso anterior e devido à independência das componentes do vetor, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(f_n(\lfloor ns \rfloor)\tilde{X}_s^n, f_n(\lfloor nt \rfloor)(\tilde{X}_t^n - \tilde{X}_s^n)\right) &\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \left(cf(s)N_1(0, g(s), cf(t)N_2\left(0, \int_s^t \frac{1}{(1-x)^2}dx\right)\right) \\
&= (cf(s)N_1(0, g(s)), cf(t)N_2(0, g(t) - g(s)))
\end{aligned} \tag{A.34}$$

com N_1, N_2 independentes.

Também,

$$(0, \tilde{X}_s^n(f_n(\lfloor nt \rfloor) - f_n(\lfloor ns \rfloor))) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (0, (f(t) - f(s))cN_1(0, g(s)))\,. \tag{A.35}$$

Portanto, de (A.34),(A.35) temos que:

$$(X_s^n, X_t^n - X_s^n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (cf(s)N_1(0, g(s)), cf(t)N_2(0, g(t) - g(s))) + (0, c[f(t) - f(s)]N_1(0, g(s))). \tag{A.36}$$

Assim de (A.36), e a indepêndencia de N_1, N_2 obtemos

$$
\begin{aligned}
(X_s^n, X_t^n) &= (X_s^n, X_t^n - X_s^n) + (0, X_s^n) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (cf(s)N_1(0,g(s)), cf(t)N_2(0,g(t)-g(s))) + (0, c[f(t)-f(s)]N_1(0,g(s))) \\
&\quad +(0, cf(s)N_1(0,g(s))) \\
&= (cf(s)N_1(0,g(s)), cf(t)N_2(0,g(t)-g(s))) + (0, cf(t)N_1(0,g(s))) \\
&= (cf(s)N_1(0,g(s)), cf(t)N_3(0,g(t)))
\end{aligned} \tag{A.37}
$$

Analogamente se mostra que dados $m \in \mathbb{N}$ e $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m \leq 1$ fixos, temos que

$$
(X_{t_1}^n, ..., X_{t_m}^n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (cf(t_1)N_1(0,g(t_1)), ..., cf(t_m)N_m(0,g(t_m))) \tag{A.38}
$$

de (A.38) segui o resultado. □

Lema A.0.3 *Sejam X^n como em (A.11), X como em (A.10) com $c = \sqrt{2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]}$, então $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$ em $D_{[0,1-\alpha]}$.*

Prova: Segue do Teoremas A.0.1 e os Lemas A.0.1 e A.0.2. □

Teorema A.0.2 *Seja X^n o processo em (A.11), X o processo em (A.10) com $c = \sqrt{2\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]}$. Considere o processo em $C_{[0,1-\alpha]}$ definido por*

$$
Z_t^n = Y_n(\lfloor nt \rfloor) + (nt - \lfloor nt \rfloor)(Y_n(\lfloor nt \rfloor + 1) - Y_n(\lfloor nt \rfloor)), \quad t \in [0, 1-\alpha] \tag{A.39}
$$

Então

$$
Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X \quad \text{em } C_{[0,1-\alpha]}. \tag{A.40}
$$

Prova: Segue da Proposição A.0.1 e o Teorema anterior. □

Apêndice B

Alguns resultados

Seja $(Q_k)_{k=0}^{k_n}$ processos de Poisson independentes. Suponha que Q_k tem taxa $\frac{n-k}{n}$ com $Q_k = \sqrt{n}R_k$. Seja $r > 0$ fixo, consideremos o conjunto $\mathbb{Z}_r := \{rk : k \in \mathbb{Z}\}$. Para $k = 0, 1, 2, ..., k_n$, definimos $E_k = E_k(r) = \mathbb{Z}_r \times \{l_k\}$, $l_k = \frac{nk}{n-k}$ e $E = \cup_{k=0}^{k_n} E_k$. Dizemos que um ponto $z_k = (rj, l_k) \in E_k$, para algum $j \in \mathbb{Z}$ esta aberto se $Q_k \cap [rj, r(j+1)) \neq \emptyset$ e esta fechado caso contrario. Portanto, se p_k^r é a probabilidade de z_k estar aberto temos que:

$$p_k^r = \mathbb{P}[Q_k \cap [rj, r(j+1)) \neq \emptyset] = 1 - \mathbb{P}[Q_k \cap [rj, r(j+1)) = \emptyset] = 1 - e^{-\frac{n-k}{n}r}. \tag{B.1}$$

Seja $\Omega^{n,r} = (\omega(z), z \in E)$ uma familia de variáveis aleatórias Bernoullis independentes tais que no nível l_k, tem parâmetro p_k^r, para $k = 0, 1, 2, ..., k_n$. Consideremos uma segunda familia, $\Gamma = (v(z_k), z_k \in E_k)_{0 \leq k \leq k_n - 1}$ de variáveis aleatórias independentes Bernoulli´s de parâmetro $1/2$.

Para $z_k = (a_k, l_k) \in E_k$, $(k < k_n)$ seja $h_k(z_k) = \arg\min_{z' \in E_{k+1}} \|z - z'\|$ e $w(h_k(z)) = 1$. Se existem dois vértices mais próximos a z_k no nível seguinte, então a ligação será a seguinte, se $v(z_k) = 1$ fazemos $h_k(z_k)$ igual ao ponto da direita e se $v(z_k) = 0$ fazemos $h_k(z_k)$ igual ao ponto da esquerda.

Seja $h_k^0(z_k) = z_k$ e indutivamente, para $k \leq j \leq k_n - k$ seja

$$h_k^j(z_k) = \arg\min_{z' \in E_{k+j}} \|h_k^{(j-1)}(z_k) - z'\| \quad \wedge \quad w(h_k^j(z_k)) = 1. \tag{B.2}$$

Considere $\mathcal{G}_r = (V, \mathcal{E})$ o grafo orientado com vértices $V = E$ e elos $\mathcal{E} = \left\{(u, h_k^1(u)) : u \in E_k\right\}_{k=0}^{k_n}$.

Dado $a \in \mathbb{R}$, sejam $m_r(a) = r \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor$ e $\tilde{X}_a^r$ o caminho de $\mathcal{G}_r$ começando do ponto $(m_r(a), 0)$.

Dado $a \in [-n^{\delta/2+1/2}, n^{\delta/2+1/2}]$, $K_a^n := \left\{(\sqrt{n}x_1, nx_2) : (x_1, x_2) \in \hat{Y}_{(a/\sqrt{n},0)}^{n,T}\right\}$. Escrevemos $\hat{Y}_{(a/\sqrt{n},0)}^{n,T}$ como um abuso de notação, pois quase certamente o ponto $(a/\sqrt{n}, 0) \notin R_0$.

Observe agora que os incrementos de K_a^n são devidos aos processos de Poisson $Q_k = \sqrt{n}R_k$ com taxas $\frac{n-k}{n}$, $k = 0, 1, 2, ..., k_n$.
Seja $t \in (0, 1/\alpha - 1)$ fixo. Seja $\tilde{\Pi}_a^r$ o espaço de estados de $\tilde{X}_a^r$. Considere a seguinte ordem parcial $\prec$ sobre $\tilde{\Pi}_a^r$. Dados $\pi_1^r, \pi_2^r \in \tilde{\Pi}_a^r$, dizemos que

$$\pi_1^r \prec \pi_2^r \Leftrightarrow \pi_1^r(l_k) - \pi_1^r(l_s) \leq \pi_2^r(l_k) - \pi_2^r(l_s), \tag{B.3}$$

para todo $\lfloor nt \rfloor \geq k \geq s \geq 0$.

Proposição B.0.2 *Sejam $\pi_1^r, \pi_2^r \in \tilde{\Pi}_a^r$ tais que $\pi_1^r \prec \pi_2^r$. Então, para $x < a < y$*

$$\mathbb{P}[\tilde{X}_x^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) < \tilde{X}_a^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) | \tilde{X}_a^r = \pi_1^r] \leq \mathbb{P}[\tilde{X}_x^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) < \tilde{X}_a^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) | \tilde{X}_a^r = \pi_2^r] \tag{B.4}$$

e

$$\mathbb{P}[\tilde{X}_y^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) > \tilde{X}_a^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) | \tilde{X}_a^r = \pi_1^r] \geq \mathbb{P}[\tilde{X}_y^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) > \tilde{X}_a^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) | \tilde{X}_a^r = \pi_2^r] \tag{B.5}$$

Prova: Se $m_r(x) = m_r(a)$ então $\tilde{X}_x^r = \tilde{X}_a^r$ e portanto para toda realização π^r de $\tilde{\Pi}_a^r$ segui que

$$\mathbb{P}[\tilde{X}_x^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) < \tilde{X}_a^r(l_{\lfloor nt \rfloor}) | \tilde{X}_a^r = \pi^r] = 0$$

o qual mostra (B.4). Se $m_r(x) < m_r(a)$ então veja [2] pagina 8. Analogamente se prova (B.5).

Observação B.0.2 *A prova em [2] apresenta um único argumento diferente, isto é, para fazer os acoplamentos e os argumentos de dominação estocastica em nosso caso nos movimentamos r unidades a direita ou r unidades a esquerda enquanto que em [2] se movimentam 1 unidade a direita ou 1 unidade a esquerda.*

Lema B.0.4 *Seja $a \in [-n^{\delta/2+1/2}, n^{\delta/2+1/2}]$ fixo. Então*

$$\tilde{X}_a^r(l_k) \xrightarrow[r \to 0_+]{q.c} K_a^n(l_k) \tag{B.6}$$

para $k = 0, 1, ..., k_n$.

Prova: *Como $m_r(a) = r \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor$ então $m_r(a) = r \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \xrightarrow[r \to 0_+]{} a$, assim $\tilde{X}_a^r(0) \xrightarrow[r \to 0_+]{q.c} K_a^n(0)$.*

Definimos, $M_k = |K_h^n(l_k) - \tilde{X}_h^r(l_k)|$ para $0 \leq k \leq k_n$ e seja B_k o evento $M_k > r$ mais $M_j \leq r$ para $2 \leq j < k$. Então,

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\leq k\leq k_n} M_k > r\right] = \mathbb{P}[M_1 > r] + \sum_{k=2}^{k_n} \mathbb{P}[B_k]. \tag{B.7}$$

Seja $q_{r,k}$ a probabilidade de ter dois pontos diferentes em $u, v \in \mathbb{Z}_r \times \{l_k\}$, equidistantes de $(0, l_k)$, com $u = (u_1, l_k)$, $v = (v_1, l_k)$ e $u_1 < v_1$ tais que $\omega(u) = \omega(v) = 1$ e $\omega(z) = 0$ para todo $z = (z_1, l_k) \in \mathbb{Z}_r \times \{l_k\}$ com $u_1 < z_1 < v_1$. Pela invariância por translação temos que

$$\mathbb{P}[M_1 > r] \leq q_{r,1} \quad e \quad \mathbb{P}[B_k] \leq q_{k,r}. \tag{B.8}$$

segue de (B.7) e (B.8) que

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\leq k\leq k_n} M_k > r\right] \leq \sum_{k=1}^{k_n} q_{k,r}.$$

Agora, $q_{k,r}$ converge quando $r \to 0_+$ à probabilidade de ter dois pontos consecutivos do processo de Poisson Q_k equidistantes à origem, portanto $q_{k,r} \underset{r\to 0_+}{\longrightarrow} 0$. Logo,

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\leq k\leq k_n} M_k > r\right] \underset{r\to 0_+}{\longrightarrow} 0,$$

ou equivalentemente

$$\tilde{X}_a^r(l_k) \underset{r\to 0_+}{\overset{q.c}{\longrightarrow}} K_a^r(l_k), \quad k = 0, 1, ..., k_n.$$

□

Teorema B.0.3 *Sejam U, V variáveis aleatórias que assumem seus valores em $(S_1, \mathfrak{S}_1)$ e $(S_2, \mathfrak{S}_2)$ respectivamente. Seja φ uma função mensurável sobre $(S_1 \times S_2, \mathfrak{S}_1 \otimes \mathfrak{S}_2)$ que assume valores reais. Se U é $\mathfrak{G}$ mensurável, $\sigma(V)$ e $\mathfrak{G}$ são independentes, e $\mathbb{E}[\varphi(U, V)] < \infty$, então temos que:*

$$\mathbb{E}[\varphi(U, V)|\mathfrak{G}] = h(U) \quad onde \quad h(u) := \mathbb{E}[\varphi(u, V)].$$

Prova: *Ver [7] pag. 27*

Proposição B.0.3 *Seja $W(t)$ um movimento Browniano começando em zero. Se $\tau = \inf\{t \geq 0 : W(t) > 0\}$, então $\mathbb{P}[\tau = 0] = 1$.*

Prova: *Ver [6] pág 384.* □

Observação B.0.3 *A Proposição B.0.3 implica que o movimento Browniano começando desde a origem atinge* $(0, \infty)$ *imediatamente e analogamente atinge* $(-\infty, 0)$ *imediatamente.*

Referências Bibliográficas

[1] *Fontes, Isopi, Newman and Ravishankar, The Brownian web: characterization and convergence, Ann. Probab* ***32*** *(2004), 2857–2883.* 2, 8

[2] *Coletti, Fontes and Dias, Scaling limits for a drainage network model, J. Appl. Probab* ***46*** *no 4 (2009), 1184–1197.* 38, 45, 46, 51, 68

[3] *Ferrari, Fontes and Wu, Two-dimensional Poisson trees converge to the Brownian web, Ann. Inst. H. Poincar Probab. Statist,* ***41*** *(2005), 851–858.*

[4] *P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley Series In Probability And Statistics, 1999.* 58

[5] *Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz, Markov Processes: Characterization and convergence, Wiley Series In Probability And Statistics, 2005.* 58

[6] *R. Durret, Probability: Theory and examples, Duxbury Press. Second Edition, 1996.* 40, 43, 69

[7] *Rabi Bhattacharya and Edward C. Waymire, A Basic Course In Probability Theory, Springer, 2007.* 69

[8] *Baccelli and Bordenave, The radial spanning tree of a Poisson point process, Ann. Probab* ***17*** *(2007), 305–359.* 1