

Ordenação das páginas do Google - “Page Rank”

Mariana Pereira de Melo

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Profa. Dra. Cláudia Peixoto

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, maio de 2009

Ordenação das páginas do Google - “Page Rank”

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Mariana Pereira de Melo e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Cláudia Monteiro Peixoto - IME-USP.
- Prof. Dr. Marcelo Finger - IME-USP.
- Prof. Dr. Ronaldo Garcia - UNICAMP.

Agradecimentos

Primeiramente, devo agradecer a minha orientadora, **Prof. Dra. Cláudia Peixoto**, que sempre demonstrou acreditar em meu potencial, pela orientação e grande dedicação e, principalmente, pelo ótimo convívio desde o início da minha graduação. Com suas argumentações científicas e suas sugestões, tive a oportunidade de enriquecer meu conhecimento.

Um agradecimento especial deve ser feito ao meu querido marido, **André**, por sua extrema paciência, pelo seu amor, por sempre estar disposto a me ajudar em qualquer situação, inclusive neste trabalho e, principalmente, pelo seu apoio que me conforta e me deixa mais forte para superar meus desafios.

Agradeço aos meus familiares que sempre acreditaram e torceram por em mim. Em especial, aos meus pais, **Ada** e **Gerson**, que me deram não somente a vida, mas principalmente educação e condições de estudo e que, junto com minha irmã, **Mayara**, de diferentes maneiras me ajudaram muito a concluir esta etapa da minha vida. Obrigada por compreenderem todos os momentos de ausência e por todo o apoio que me deram, sempre acreditando e me fazendo acreditar que sou capaz.

Devo agradecer ao **Prof. Dr. Adilson Simonis**, que sugeriu o tema desta dissertação, pela amizade e apoio, acreditando também no meu potencial.

Ao meus verdadeiros amigos, de década, e alguns mais recentes que, apesar de minha ausência, estão sempre em meu pensamento.

Não posso esquecer de uma pessoa muito especial, a quem sempre recorro nos momentos mais difíceis, me confortando e me dando forças para continuar lutando, meu anjo da guarda e padrinho, **José Pereira**, sempre presente.

Meus agradecimentos à entidade financiadora deste projeto, CNPQ, que possibilitou a realização de meu trabalho.

Este trabalho é dedicado a todas estas pessoas, especiais e essenciais em minha vida.

Resumo

Grande parte do sucesso do Google provém do algoritmo *Page Rank*, que avalia quantitativamente a importância de cada página na *web*. Esta ordenação é obtida através do vetor estacionário de uma matriz estocástica específica, utilizando o Método das Potências. A velocidade de convergência deste método será avaliada em detalhe, já que se trata de uma resposta imediata da pesquisa do usuário.

A fim de entender as diferentes situações que o modelo pode enfrentar, diversas simulações são apresentadas neste trabalho. Em particular, estamos interessados nos fatores que influenciam a velocidade de convergência. Para tanto, o número de páginas total e de cada conjunto fechado, bem como o número de conjuntos fechados e de nós pendentes foram estudados.

Palavras-chave: Cadeias de Markov, *Page-Rank*, Velocidade de Convergência, Distribuição Estacionária.

Abstract

Great part of Google's success comes from the Page Rank algorithm, which quantitatively evaluates the importance of each page on the web. This sort is achieved through a specific stochastic matrix stationary vector, using the Power Method. The convergency speed of this method will be evaluated in details, since this is an immediate response for the user search.

In order to understand the different situations the model can confront, several simulations are shown in this work. In particular, we are interested in the factors which influences the convergency speed.

For that, the total and inside each closed set number of pages and also the closed sets and dangling nodes numbers were studied.

Keywords: Markov Chains, *Page-Rank*, Convergence Speed, Stationary Distribution.

Sumário

Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
1.1 Considerações Preliminares	1
1.2 Objetivos	1
1.3 Organização do Trabalho	2
2 Cadeias de Markov	3
2.1 Cadeias de Markov	3
2.2 Definições e Propriedades	4
2.3 Distribuição Estacionária	6
2.4 Método das Potências	15
3 Matriz Google	17
3.1 <i>Page Rank</i> - Determinação da Importância da Página	17
3.2 Utilização do Método das Potências	19
3.2.1 Importâncias não Únicas	19
3.2.2 Nós Pendentes	19
3.3 Modificação Sugerida	21
4 Simulação	29
4.1 Quantidade de <i>Links</i> por Página	29
4.2 Associação dos <i>Links</i> às Páginas	29
4.3 Resultados	30
4.3.1 Arquivo original “California.dat”	30
4.3.2 Arquivo original “Epa.dat”	33
4.3.3 Influência dos Fatores na Velocidade de Convergência	35
A Número Médio de Iterações	39
B Comparação entre $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$	53
Referências Bibliográficas	67

Listas de Tabelas

4.1	Número de iterações para cada valor de α , número de páginas que possuem mesma posição com α_1 e α_2 e distância média quando houve alteração.	31
4.2	Ordenação das trinta primeiras páginas quando $\alpha = 0,85$ e suas respectivas posições quando utiliza-se $\alpha = 0,99$	32
4.3	Ordenação das trinta primeiras páginas quando $\alpha = 0,85$ e suas respectivas posições quando utiliza-se $\alpha = 0,99$	33
4.4	Número de iterações para cada valor de α , número de páginas que possuem mesma posição com α_1 e α_2 e distância média quando houve alteração.	33
4.5	Ordenação das trinta primeiras páginas quando $\alpha = 0,85$ e suas respectivas posições quando utiliza-se $\alpha = 0,99$	34
4.6	Ordenação das trinta primeiras páginas quando $\alpha = 0,85$ e suas respectivas posições quando utiliza-se $\alpha = 0,99$	35
A.1	Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 1.000 páginas nos conjuntos fechados.	40
A.2	Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 10.000 páginas nos conjuntos fechados.	41
A.3	Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 100.000 páginas nos conjuntos fechados.	42
A.4	Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para grupos fechados com até 750 páginas.	43

A.5 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, , para grupos fechados com até 7.500 páginas.	44
A.6 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, , para grupos fechados com até 75.000 páginas.	45
A.7 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 1.000 e 10.000 páginas.	46
A.8 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 500 a 2.000 páginas.	47
A.9 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 5.000 a 20.000 páginas.	48
A.10 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para um total de 500, 5.000 e 50.000 páginas nos conjuntos fechados.	49
A.11 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de 50 e 500 páginas e 450 e 500 páginas.	50
A.12 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de 500 e 5.000 páginas e 4.500 e 5.000 páginas.	51
A.13 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de diversos tamanhos.	52
B.1 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 1.000 páginas nos conjuntos fechados.	54

B.2 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 10.000 páginas nos conjuntos fechados.	55
B.3 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 100.000 páginas nos conjuntos fechados.	56
B.4 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para grupos fechados com até 750 páginas.	57
B.5 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, , para grupos fechados com até 7.500 páginas.	58
B.6 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, , para grupos fechados com até 75.000 páginas.	59
B.7 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 1.000 e 10.000 páginas.	60
B.8 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 500 a 2.000 páginas.	61
B.9 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 5.000 a 20.000 páginas.	62

B.10 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para um total de 500, 5.000 e 50.000 páginas nos conjuntos fechados.	63
B.11 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de 50 e 500 páginas e 450 e 500 páginas.	64
B.12 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de 500 e 5.000 páginas e 4.500 e 5.000 páginas.	65
B.13 Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de diversos tamanhos.	66

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Preliminares

Quando o Google entrou no ar, por volta dos anos 90, uma característica que o diferenciou dos demais mecanismos de busca foi que suas listas de resultados sempre apresentavam as páginas de forma ordenada, ou seja, as mais relevantes no topo da lista. Já com outros mecanismos de busca, este ranqueamento não era feito de forma eficiente.

Grande parte do sucesso do Google provém do algoritmo *Page Rank*, que avalia quantitativamente a importância de cada página na *web*, promovendo um ranqueamento das páginas, obtido a partir da ordenação do vetor estacionário da matriz Google. Desse modo, quando são feitas buscas através do Google, as páginas que encontram-se no topo apresentam conteúdo supostamente mais útil e satisfatório ao usuário.

Devido a proeminência do Google como mecanismo de busca, seu sistema de ordenação teve uma profunda influência no desenvolvimento e estruturação da *internet*, e em quais tipos de informação e serviços são mais acessados frequentemente.

Esta dissertação trata a etapa em que é avaliada a importância de cada página, de forma que, quando o usuário faz uma busca e o subconjunto de dados com a informação desejada é encontrado, as páginas mais importantes sejam apresentadas nas primeiras posições da lista de resultados.

1.2 Objetivos

O primeiro objetivo é apresentar o algoritmo *Page-Rank* de forma detalhada retomando a teoria de Cadeias de Markov.

Em seguida, devido a importância do tempo de convergência do algoritmo, um estudo detalhado de vários fatores que possam influenciar na velocidade de convergência será feito. Em particular, características da Cadeia de Markov envolvida será estudada, tais como sua dimensão, número de conjuntos fechado, etc. Para este último, diversas simulações foram realizadas e os resultados encontram-se no Apêndice.

1.3 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 são apresentados uma revisão de Cadeias de Markov contemplando algumas definições e propriedades úteis para a compreensão do algoritmo, bem como o Método das Potências para a obtenção dos autovalores e autovetores de uma matriz, com o objetivo de prover embasamento teórico para o entendimento do *Page-Rank*.

O algoritmo de ordenação *Page-Rank* encontra-se no Capítulo 3.

O Capítulo 4 contém um estudo sobre a velocidade de convergência do algoritmo, além das conclusões deste trabalho.

Nos Apêndices A e B encontram-se os resultados das simulações.

Capítulo 2

Cadeias de Markov

Neste capítulo será apresentada uma revisão sobre Cadeias de Markov, abrangendo alguns tópicos fundamentais ao entendimento deste trabalho. As definições e os teoremas aqui citados encontram-se em [4], [5], [6], [7], [8] e [9].

2.1 Cadeias de Markov

Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade. Considere a sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 0}$ assumindo valores num espaço de estados finito ϑ . $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é uma Cadeia de Markov discreta se para qualquer sequência de estados $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \vartheta$

$$P[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] = P[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n].$$

De acordo com a definição acima, uma Cadeia de Markov é uma sequência de variáveis aleatórias tais que, para qualquer instante n , X_{n+1} é condicionalmente independente de X_0, \dots, X_{n-1} dado X_n , ou seja, o próximo estado do processo é independente do passado, uma vez que o estado presente é conhecido.

Este estudo ficará restrito aos casos em que a cadeia é **estacionária (homogênea)**, ou seja, onde a probabilidade condicional

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_{n+k+1} = j | X_{n+k} = i] = p(i, j), \quad i, j \in \vartheta.$$

é independente do momento em que ocorre.

A probabilidade $p(i, j)$ é chamada de probabilidade de transição da Cadeia de Markov.

Considere $\{X_n\}_{n \geq 0}$ uma Cadeia de Markov estacionária, discreta e com espaço de estados finito $\vartheta = \{1, 2, \dots, n\}$. Chama-se \mathbf{P} a *matriz de transição* utilizada para expressar as probabilidades de transição, associando-se a i-ésima linha e coluna de \mathbf{P} com o i-ésimo estado de ϑ .

A matriz \mathbf{P} é expressa do seguinte modo:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p(1, 1) & p(1, 2) & \dots & p(1, n) \\ p(2, 1) & p(2, 2) & \dots & p(2, n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(n, 1) & p(n, 2) & \dots & p(n, n) \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem as seguintes propriedades:

- (i) $p(i, j) \geq 0$, para $\forall i, j \in \vartheta$;
- (ii) $\sum_j p(i, j) = 1$, $\forall i \in \vartheta$.

Definição: Qualquer matriz quadrada que satisfaça as condições (i) e (ii) acima será uma **matriz estocástica**.

2.2 Definições e Propriedades

Estado recorrente

Seja $\{X_n\}_{n \geq 0}$ uma Cadeia de Markov discreta com espaço de estados ϑ e matriz de transição P . Dado que o estado inicial da cadeia é i , considere T_i o tempo do primeiro retorno e N_i o número total de retornos.

O estado i é chamado **recorrente** se

$$P\{T_i < \infty | X_0 = i\} = 1;$$

caso contrário, se $P\{T_i = \infty | X_0 = i\} > 0$, então i é chamado **estado transiente**.

Utilizaremos a notação $P_i\{T_i < \infty\} = P\{T_i < \infty | X_0 = i\}$ a partir daqui.

Além disso, um estado recorrente j é chamado **nulo** se

$$E_j\{T_j\} = \infty;$$

caso contrário, é chamado **recorrente positivo**.

Denota-se por

$$f_{i,k}^{(n)} = P(X_n = k, X_{n-1} \neq k, \dots, X_2 \neq k, X_1 \neq k | X_0 = i),$$

a probabilidade de que a primeira visita ao estado k , partindo de i , ocorra no n -ésimo passo.

Assim,

$$f_{i,k} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,k}^{(n)}$$

é a probabilidade que a cadeia visite k , iniciando de i .

Temos que:

- (a) k é **recorrente** se $f_{k,k} = 1$, e se isto ocorre então $E_i(N_k) = \infty$;
- (b) k é **transiente** se $f_{k,k} < 1$, e se isto ocorre então $E_i(N_k) < \infty$, pois,

$$P_i(N_k = n) = f_{i,k}(f_{k,k})^{n-1}(1 - f_{k,k}).$$

Deste modo,

$$E_i(N_k) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times f_{i,k}(f_{k,k})^{n-1} (1 - f_{k,k}) = \frac{f_{i,k}}{1 - f_{k,k}}.$$

Assim, se $f_{k,k} = 1$ então $E_i(N_k) = \infty$ e se $f_{k,k} < 1$, $E_i(N_k) < \infty$.

Conjunto fechado

Considere um subconjunto C do espaço de estados ϑ . Este conjunto é dito **fechado** se $p(i, k) = 0$ para todo $i \in C$ e $k \notin C$.

Se um conjunto fechado consiste de um único estado, este será chamado **estado absorvente**, ou seja, o estado k é **absorvente** se e somente se $p(k, k) = 1$.

Uma Cadeia de Markov é chamada **irreduzível** se não existirem conjuntos fechados não vazios exceto o próprio ϑ . Se ϑ tem um subconjunto fechado próprio, a cadeia é chamada **redutível**.

Estados Intercomunicantes

Dois estados, i e j , são ditos **intercomunicantes** se, para algum $n \geq 0$, $p^{(n)}(i, j) > 0$ e para algum $m \geq 0$, $p^{(m)}(j, i) > 0$, ou seja, nesta cadeia é possível ir de i para j em n passos e de j para i em m passos. Os inteiros m e n não precisam ser iguais.

Teorema 2.1: Uma Cadeia de Markov será **irreduzível** se e somente se todos os pares de estados são intercomunicantes.

Prova:

(\Rightarrow) Assuma que a cadeia seja irreduzível e defina $C_j = \{i : p^{(n)}(i, j) = 0 \text{ para todo } n \geq 0\}$, isto é, C_j é o conjunto de todos os estados a partir dos quais o estado j não pode ser alcançado.

O conjunto C_j é um subconjunto fechado de ϑ e para provar isto é necessário mostrar que se $i \in C_j$ e $k \notin C_j$, então $p(i, k) = 0$. Contudo, se $k \notin C_j$ então para algum $m \geq 0$ segue que $p^{(m)}(k, j) > 0$. Se $p(i, k)$ for positivo, então $p^{(m+1)}(i, j) = \sum_{l \in \vartheta} p(i, l) \times p^{(m)}(l, j) \geq p(i, k) \times p^{(m)}(k, j) > 0$, o que implica $i \notin C_j$. Esta contradição leva-nos a concluir que $p(i, k) = 0$ para todo $i \in C_j$, $k \notin C_j$. Logo, C_j é fechado.

O único subconjunto fechado não-vazio de uma cadeia irreduzível é o próprio ϑ . Deste modo, $C_j = \vartheta$ ou $C_j = \emptyset$. Entretanto, como $j \notin C_j$ pois $p^{(0)}(j, j) = 1$, temos que $C_j = \emptyset$, o que significa que j pode ser alcançado a partir de todos os estados. Como j foi escolhido de forma arbitrária, conclui-se que todos os estados são intercomunicantes.

(\Leftarrow) Assuma que todos os estados sejam intercomunicantes e que χ seja um conjunto fechado não-vazio de ϑ . Se $j \in \chi$, então para um estado arbitrário $i \in \vartheta$ existe um n_i tal que $p^{(n_i)}(j, i) > 0$. Como o estado i pode ser alcançado a partir do estado $j \in \chi$, segue que $i \in \chi$. Mas i foi escolhido de forma arbitrária em ϑ , assim $\chi = \vartheta$. Logo, a cadeia é irreduzível.

□

Período de um estado ou de uma cadeia

Um estado recorrente j é chamado **periódico de período δ** se $\delta \geq 2$ é o maior inteiro para o qual

$$P_j\{T_j = n\delta \text{ para algum } n \geq 1\} = 1;$$

caso contrário, j é chamado **aperiódico**.

2.3 Distribuição Estacionária

Devido à própria flutuação especificada por sua matriz de transição, não é possível que a sequência $\{X_n\}_{n \geq 0}$ converja para determinado estado em particular. Porém, sujeita a certas condições, é possível que ela se estabilize.

Nota-se que a existência de uma distribuição limite para X_n , quando $n \rightarrow \infty$, está estritamente ligada à existência da **distribuição estacionária**.

O vetor π é denominado **distribuição estacionária** de uma cadeia se possuir entradas $(\pi(k) : k \in \vartheta)$ tal que

- (a) $\pi(i) \geq 0$ para todo $i \in \vartheta$, e $\sum_{i \in \vartheta} \pi(i) = 1$;
- (b) $\pi' = \pi' \mathbf{P}$, onde dizemos que $\pi(j) = \sum_i \pi(i)p(i, j)$ para todo $j \in \vartheta$.

Temos que $\pi' \mathbf{P}^n = \pi'$, para todo $n \geq 0$, pois,

$$\pi' = \pi' \mathbf{P} = \pi' \mathbf{P}^1 = (\pi' \mathbf{P}) \mathbf{P}^1 = \dots = \pi' \mathbf{P}^{n-2} = (\pi' \mathbf{P}) \mathbf{P}^{n-2} = \pi' \mathbf{P}^{n-1} = (\pi' \mathbf{P}) \mathbf{P}^{n-1} = \pi' \mathbf{P}^n.$$

A distribuição estacionária é um estado de equilíbrio da cadeia. Se, o estado inicial for escolhido segundo π , então todos os instantes seguintes também terão distribuição π , mostrando que a cadeia é estacionária com o passar do tempo; neste caso, π é também a distribuição limite de X_n quando $n \rightarrow \infty$, pois

$$P_\pi(X_1 = i) = \sum_{u \in \vartheta} P_\pi(X_1 = i, X_0 = u) = \sum_{u \in \vartheta} P(X_1 = i | X_0 = u)\pi(u) = \sum_{u \in \vartheta} p(u, i)\pi(u) = \pi(i)$$

Teorema 2.2: Suponha que P seja irredutível, aperiódica e que tenha distribuição estacionária π . Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i, j) = \pi(j)$.

Os lemas a seguir serão utilizados na demonstração do Teorema 2.2.

Lema 2.1: Considere T_j^k o tempo necessário para fazer k visitas ao estado j . Para $k \geq 1$,

$$P_i(T_j^k < \infty) = f_{i,j}(f_{j,j})^{k-1}.$$

Prova: A fim de fazer k visitas a j , primeiro temos que ir do estado inicial i a j e então retornar $k-1$ vezes de j para j . A propriedade de Markov implica que a probabilidade de todos os eventos ocorrerem é o produto de suas probabilidades. Logo,

$$P_i(T_j^k < \infty) = f_{i,j}(f_{j,j})^{k-1}.$$

□

Lema 2.2: Sendo i o estado inicial da cadeia, então:

$$E_i(N_j) = \frac{f_{i,j}}{1 - f_{j,j}}, \quad \forall i, j, \in \vartheta.$$

Prova: O valor esperado de qualquer variável aleatória N com valores inteiros não negativos, pode ser calculado por:

$$E_i(N_j) = \sum_{k=1}^{\infty} P_i(N_j \geq k)$$

Como $P_i(N_j \geq k) = P_i(T_j^k < \infty)$, temos pelo Lema 2.1 que:

$$E_i(N_j) = f_{i,j} \sum_{k=1}^{\infty} (f_{j,j})^{k-1} = \frac{f_{i,j}}{1 - f_{j,j}}.$$

□

Lema 2.3: Considere $\pi(\cdot)$ a distribuição estacionária de uma cadeia irredutível e $j \in \vartheta$ tal que $\pi(j) > 0$. Então j é recorrente.

Prova: Considere i o estado inicial da cadeia e N_j o número de visitas a j . Temos que:

$$N_j = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}}. \quad (2.1)$$

Tomando a esperança dos dois lados,

$$E_i(N_j) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(i, j) \Rightarrow \sum_{i \in \vartheta} \pi(i) E_i(N_j) = \sum_{i \in \vartheta} \pi(i) \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(i, j) \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in \vartheta} \pi(i) E_i(N_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in \vartheta} \pi(i) p^{(n)}(i, j) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(j) = \infty,$$

pois $\pi(j) > 0$.

De acordo com o Lema 2.2, $E_i(N_j) = f_{i,j}/(1 - f_{j,j})$, portanto

$$\infty = \sum_i \pi(i) \frac{f_{i,j}}{1 - f_{j,j}} \leq \frac{1}{1 - f_{j,j}}$$

A segunda inequação segue do fato de que $f_{i,j} \leq 1$ e de que π é uma medida de probabilidade. Concluímos que $f_{j,j} = 1$, ou seja, j é recorrente.

□

Retornando a demonstração do Teorema 2.2:

Prova: Considere $\vartheta^2 = \vartheta \times \vartheta$ e defina a matriz de transição \mathbf{P}^* em ϑ^2 por

$$p^*((i,j), (k,l)) = p(i,k) \times p(j,l),$$

ou seja, cada coordenada move-se independentemente. O primeiro passo é verificar se \mathbf{P}^* é irreduzível e, para isso, é necessário que a cadeia seja aperiódica. Como \mathbf{P} é irreduzível, existem M, N tais que $p^{(M)}(i, k) > 0$ e $p^{(N)}(j, l) > 0$. Como k e l tem período 1, existe Z tal que, $p^{(M+Z)}(k, k) > 0$ e $p^{(N+Z)}(l, l) > 0$, assim:

$$p^{*(M+N+Z)}((i,j), (k,l)) > 0$$

O segundo passo é observar que como as duas coordenadas são independentes, então $\pi^*(i,j) = \pi(i)\pi(j)$ define uma distribuição estacionária para \mathbf{P}^* e, de acordo com o Lema 2.3, todos os estados de \mathbf{P}^* são recorrentes. Denote (X_n, Y_n) a cadeia em $\vartheta \times \vartheta$ e considere T o primeiro instante em que as duas coordenadas são iguais, isto é, $T = \min\{n \geq 0 : X_n = Y_n\}$. A partir de T os dois processos seguem o mesmo caminho. Seja $V_{(i,i)} = \min\{n \geq 0 : X_n = Y_n = i\}$ o tempo da primeira visita a (i,i) . Como \mathbf{P}^* é irreduzível e recorrente, $V_{(i,i)} < \infty$ com probabilidade 1 e, como $T \leq V_{(i,i)}$, devemos ter $T < \infty$.

Utilizando a técnica de acoplamento e considerando que $X_0 = i$ e Y_0 com distribuição estacionária π , temos:

$$\begin{aligned} P_i(X_n = j) &= P_i(X_n = j, T \leq n) + P_i(X_n = j, T > n) \\ &= P_\pi(Y_n = j, T \leq n) + P_i(X_n = j, T > n) \\ &\leq P_\pi(Y_n = j) + P_i(X_n = j, T > n) \Rightarrow \\ P_i(X_n = j) - P_\pi(Y_n = j) &\leq P_i(X_n = j, T > n) \end{aligned}$$

e similarmente, $P_\pi(Y_n = j) - P_i(X_n = j) \leq P_\pi(Y_n = j, T > n)$.

Assim,

$$|P_i(X_n = j) - P_\pi(Y_n = j)| \leq P_i(X_n = j, T > n) + P_\pi(Y_n = j, T > n)$$

e, somando para todo j , temos

$$\sum_{j \in \vartheta} |P_i(X_n = j) - P_\pi(Y_n = j)| \leq 2 \times P(T > n)$$

$$\sum_{j \in \vartheta} |p^{(n)}(i, j) - \pi(j)| \leq 2P(T > n) \rightarrow 0$$

□

Teorema 2.3: Seja $\{X_n\}_{n \geq 0}$ uma Cadeia de Markov irredutível, aperiódica e com distribuição estacionária π . Então:

$$E_i(T_i) = 1/\pi(i), \quad \forall i \in \vartheta.$$

O Teorema a seguir será utilizado para a demonstração do Teorema 2.3.

Teorema 2.4: Seja $\{X_n\}_{n \geq 0}$ uma Cadeia de Markov, $N_i^{(n)} = \sum_{m=1}^n 1_{\{X_k^{(m)} = i\}}$ o número total de visitas ao estado i no instante n e $G^{(n)}(k, i) = \sum_{m=1}^n p^{(m)}(k, i)$, $i, k \in \vartheta$.

Assim, $E_k(N_i^{(n)}) = G^n(k, i)$. Temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^{(n)}(k, i)}{n} = \frac{1}{E_i(T_i)}.$$

Prova: Considere o caso no qual i é um estado transitente. Pela definição, temos que $E_i(N_i^{(n)}) < \infty$, assim $\lim_{n \rightarrow \infty} N_i^{(n)} < \infty$ e, consequentemente, $N_i^{(n)}/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, transiência implica $P_i(T_i = \infty) > 0$, então $E_i(T_i) = \infty$ e $1/E_i(T_i) = 0$.

Para o caso recorrente, suponha que iniciemos no estado i . Seja $R_i^k = \min\{n \geq 1 : N_i^{(n)} = k\}$ o instante do k -ésimo retorno a i . Considere também $W_i^1 = R_i^1 = T_i$ e, para $k \geq 2$, seja $W_i^k = R_i^k - R_i^{k-1}$ o tempo de espera entre a $(k-1)$ -ésima e a k -ésima visita a i .

As variáveis aleatórias W_i^1, W_i^2, \dots são independentes e identicamente distribuídas e, consequentemente, possuem mesma média $E_i(W_i^1) = E_i(T_i)$.

De acordo com a Lei Forte dos Grandes Números, temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W_i^1 + W_i^2 + \dots + W_i^k}{k} = E_i(T_i),$$

com probabilidade 1, ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_i^k}{k} = E_i(T_i),$$

com probabilidade 1.

Seja $r = N_i^{(n)}$, isto é, no tempo n a cadeia fez exatamente r visitas a i . Então a r -ésima visita a i ocorre durante ou antes do tempo n e a $(r+1)$ -ésima visita ocorre depois do tempo n . Deste modo, $R_i^{N_i^{(n)}} \leq n < R_i^{N_i^{(n)}+1}$ e,

$$\frac{R_i^{N_i^{(n)}}}{N_i^{(n)}} \leq \frac{n}{N_i^{(n)}} < \frac{R_i^{N_i^{(n)}+1}}{N_i^{(n)}+1} \times \frac{N_i^{(n)}+1}{N_i^{(n)}}.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, temos $\frac{N_i^{(n)}+1}{N_i^{(n)}}$ convergindo para 1 e $n/N_i^{(n)}$ limitado entre dois valores que convergem para $E_i(T_i)$, logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{N_i^{(n)}} = E_i(T_i) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^{(n)}(k, i)}{n} = \frac{1}{E_i(T_i)}.$$

□

Retornando a demonstração do Teorema 2.3:

Prova: Do Teorema 2.4, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^{(n)}(k, i)}{n} = \frac{1}{E_i(T_i)}$$

Suponha $\pi(\cdot)$ a distribuição estacionária. De acordo com a equação 2.2, temos que $G^{(n)}(k, i) = E_k(N_i^{(n)}) = \sum_{m=1}^n p^{(m)}(k, i)$.

Pela definição, sabemos que $\sum_{k \in \vartheta} \pi(k)p^{(m)}(k, i) = \pi(i)$. Somando para todo $m = 1, 2, \dots, n$ e dividindo por n , encontramos $\sum_{k \in \vartheta} \frac{\pi(k) \sum_{m=1}^n p^{(m)}(k, i)}{n} = \pi(i)$.

Resultado: Teorema da Convergência Dominada

Seja $a(x)$ números não negativos com soma finita e $b_n(x)$, tal que $|b_n(x)| \leq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = b(x)$, $x \in \vartheta$ e $n \geq 1$. Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in \vartheta} a(x)b_n(x) = \sum_{x \in \vartheta} a(x)b(x).$$

Deste modo,

$$\pi(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \vartheta} \frac{\pi(k) \sum_{m=1}^n p^{(m)}(k, i)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \vartheta} \frac{\pi(k) G^{(n)}(k, i)}{n} = \sum_{k \in \vartheta} \frac{\pi(k)}{E_i(T_i)} = \frac{1}{E_i(T_i)} \sum_{k \in \vartheta} \pi(k) = \frac{1}{E_i(T_i)}.$$

□

Teorema 2.5 (Teorema da Razão de Doeblin):

Sejam i, j, k e l quaisquer estados de uma cadeia irredutível e recorrente.

Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,j)}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(k,l)} \text{ existe.}$$

Prova: Primeiro serão considerados dois casos especiais e, a partir destes, o caso geral será deduzido.

Sendo $f_{i,j}^{(n)}$ a probabilidade de que a primeira visita ao estado j iniciando do estado i ocorra no instante n , considere $g_{i,j}^{(n)}$ a probabilidade de visitar o estado j no instante n sem retornar ao estado i , isto é,

$$g_{i,j}^{(n)} = P[X_n = j, X_{n-1} \neq i, X_{n-2} \neq i, \dots, X_1 \neq i \mid X_0 = i].$$

$$\text{Seja } f_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)} \text{ e } g_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} g_{i,j}^{(n)}.$$

Caso 1: Considere $k = l = j \neq i$. Temos que

$$\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,j) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n f_{i,j}^{(n-m)} p^{(m)}(j,j).$$

Usando o Teorema de Fubini para justificar a troca da ordem do somatório, temos:

$$\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,j) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=m}^N f_{i,j}^{(n-m)} p^{(m)}(j,j) = \sum_{m=0}^N p^{(m)}(j,j) \sum_{p=0}^{N-m} f_{i,j}^{(p)}.$$

Dividindo ambos os lados por $\sum_{n=0}^N p^{(n)}(j,j)$ obtemos

$$\frac{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,j)}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(j,j)} = \frac{\sum_{m=0}^N p^{(m)}(j,j) \sum_{p=0}^{N-m} f_{i,j}^{(p)}}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(j,j)}.$$

Como todos os estados são recorrentes, por (2.1) temos que $E_j(N_j) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(j,j) = \infty$ e assim

$$\frac{p^{(n)}(j,j)}{\sum_{m=0}^N p^{(m)}(j,j)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Resultado: Seja $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números não-negativos nos quais $\frac{a_n}{\sum_{k=0}^n a_k} \rightarrow 0$ quando

$n \rightarrow \infty$ e seja $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números convergindo para b . Então,

$$\frac{b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \dots + b_n a_0}{\sum_{k=0}^n a_k} \rightarrow b, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Com base no resultado acima, podemos concluir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,j)}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(j,j)} = \sum_{p=0}^{\infty} f_{i,j}^{(p)} = f_{i,j} = 1.$$

desde que a cadeia seja irredutível e recorrente.

Caso 2: Considere $k = l = i$.

Usando o Teorema de Fubini novamente, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,j) &= \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n p^{(m)}(i,i) g_{i,j}^{(n-m)} = \\ &= \sum_{m=0}^N p^{(m)}(i,i) \sum_{n=m}^N g_{i,j}^{(n-m)} = \sum_{m=0}^N p^{(m)}(i,i) \sum_{p=0}^{N-m} g_{i,j}^{(p)}. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por $\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,i)$ obtemos

$$\frac{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,j)}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,i)} = \frac{\sum_{m=0}^N p^{(m)}(i,i) \sum_{p=0}^{N-m} g_{i,j}^{(p)}}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,i)}$$

Tomando $N \rightarrow \infty$ e aplicando o resultado acima, vemos que o limite é $g_{i,j}$.

O caso geral é obtido tomando-se produtos de razões como nos Casos 1 e 2 e utilizando-se do fato de que, quando os limites existem, o limite de um produto é o produto dos limites. Em particular,

$$\frac{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,j)}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(k,l)} = \frac{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(i,j)}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(j,j)} \times \frac{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(j,j)}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(j,l)} \times \frac{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(j,l)}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(l,l)} \times \frac{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(l,l)}{\sum_{n=0}^N p^{(n)}(k,l)}$$

□

O seguinte teorema mostra que qualquer Cadeia de Markov irredutível e recorrente tem uma distribuição invariante, embora essa distribuição não seja necessariamente finita.

Teorema 2.6: No caso de uma Cadeia de Markov irredutível e recorrente, o sistema de equações

$$\pi(j) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi(k)p(k, j) \quad (2.3)$$

possui solução $\pi(j) = g_{i,j}$, onde i é arbitrário, sendo $g_{i,j}$ definido na demonstração do Teorema 2.5. Quaisquer duas soluções não-negativas para esta equação diferem somente por uma constante multiplicativa.

Prova: Considere

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j} p(j, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{i,j}^{(n)} p(j, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j}^{(n)} p(j, k).$$

onde $\sum_{j \neq i} g_{i,j}^{(n)} p(j, k)$ representa a probabilidade de visitar o estado k no tempo $n+1$ sem retornar ao estado i . Note que quando $j = i$, a quantidade $g_{i,i}^{(n)}$ é igual $f_{i,i}^{(n)}$ pois ambos representam a probabilidade de retornar à i pela primeira vez no tempo n . Assim, para qualquer cadeia recorrente, temos $\sum_{n=1}^{\infty} g_{i,i}^{(n)} = 1$. Além disso, note que $p(i, j) = g_{i,j}^{(1)}$.

Podemos simplificar $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j}^{(n)} p(j, k)$ do seguinte modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g_{i,j}^{(n)} p(j, k) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{i,k}^{(n+1)} + p(i, k) \sum_{n=1}^{\infty} g_{i,i}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} g_{i,k}^{(n+1)} + p(i, k) = g_{i,k}.$$

Consequentemente, $\{g_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ satisfaz o sistema de equações (2.3).

Para mostrar que quaisquer duas soluções não nulas e não-negativas para (2.3) diferem apenas por uma constante, considere $\{\pi^*(j)\}$ uma solução. Como a solução é não-nula, existe um estado k tal que $\pi^*(k) > 0$. Note que como $\pi^*(j) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi^*(i)p(i, j)$, então $\pi^*(j) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi^*(i)p^{(n)}(i, j)$ para todo $n \geq 1$. Além disso, pela irredutibilidade sabemos que existe algum n_0 tal que $p^{(n_0)}(k, j)$ é estritamente positivo, desse modo $\pi^*(j) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi^*(i)p^{(n_0)}(i, j) \geq \pi^*(k)p^{(n_0)}(k, j) > 0$. Assim, uma solução não-nula e não-negativa para (2.3) deve ser, de fato, uma solução estritamente positiva.

Sabemos que $\pi(j) = g_{i,j}$ é uma solução positiva para (2.3). Considere $\{\pi^*(j)\}$ qualquer outra solução positiva. Defina $r_{i,j} = \frac{\pi^*(j)}{\pi^*(i)} p(j, i)$. Temos que $\{r_{i,j}\}$ é uma matriz de probabilidade de transição para uma cadeia irredutível e recorrente.

Dos Casos 1 e 2 do teorema da Razão de Doeblin, temos que

$$1 \leftarrow \frac{\sum_{n=1}^N r_{j,i}^{(n)}}{\sum_{n=1}^N r_{i,i}^{(n)}} = \frac{\pi^*(i)}{\pi^*(j)} \frac{\sum_{n=1}^N p_{i,j}^{(n)}}{\sum_{n=1}^N p_{i,i}^{(n)}} \rightarrow \frac{\pi^*(i)}{\pi^*(j)} g_{i,j}.$$

Portanto, $\pi^*(j) = \pi^*(i)g_{i,j} = \pi^*(i)\pi(j)$, para $j = 1, 2, \dots$. Assim $\pi^*(j)$ é uma constante múltipla de $\pi(j)$.

Logo, podemos concluir que qualquer Cadeia de Markov irredutível e recorrente tem uma única distribuição invariante.

□

Corolário 2.1: Seja \mathbf{P} uma matriz de transição para uma Cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$, então a multiplicidade do autovalor 1 é igual ao número de subconjuntos fechados irredutíveis da cadeia.

Prova: A matriz \mathbf{P} pode ser reescrita em forma de blocos, com cada bloco \mathbf{P}_i , $i = 1, 2, \dots, m$, correspondendo a um subconjunto fechado irredutível de ϑ e o último bloco, \mathbf{Q} , correspondendo aos estados transitentes. Isto é,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{P}_m & 0 \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_m & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

Cada um desses blocos \mathbf{P}_i corresponde ao espaço de estados ϑ_i para uma cadeia irredutível e recorrente. Além disso, existe um autovetor $\pi_i = (0 \dots 0, \pi_1^{(i)}, \pi_2^{(i)}, \dots, \pi_{n_i}^{(i)}, 0, \dots, 0)$ com entradas positivas nas coordenadas correspondendo a ϑ_i e zero nas demais com $\pi_i \mathbf{P} = \pi_i$ para $i = 1, 2, \dots, m$. Sendo os ϑ_i 's disjuntos por construção, os π_i 's tem entradas positivas nas coordenadas não sobrepostas, assim elas são linearmente independentes. Consequentemente a multiplicidade do autovalor 1 é pelo menos igual ao número de subconjuntos fechados irredutíveis de ϑ .

A fim de mostrar que a multiplicidade é no máximo o número de subconjuntos fechados irredutíveis de ϑ , tomamos π^* como sendo um autovetor arbitrário de \mathbf{P} correspondendo ao autovalor 1 sendo que π^* pode ser escrito como uma combinação linear dos π_i 's, $i = 1, 2, \dots, m$. Se $\pi^* \mathbf{P} = \pi^*$, então $\pi^* \mathbf{P}^{(k)} = \pi^*$ para todo $k = 1, 2, \dots$ e assim $\sum_{i=1}^n \pi_i^* p^{(k)}(i, j) = \pi_j^*$, para todo k .

Se j é um estado transitente, então $\lim_{k \rightarrow \infty} p^{(k)}(i, j) = 0$ e assim todas as coordenadas de π^* correspondendo aos estados transitentes são zero. A equação $\sum_{i=1}^n \pi_i^* p(i, j) = \pi_j^*$ pode agora ser reescrita somando somente os estados recorrentes, da seguinte forma

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i \in \vartheta_k} \pi_i^* p(i, j) = \pi_j^* \text{ para } j \in \cup_{k=1}^m \vartheta_k.$$

Se i e j pertencem a subconjuntos fechados distintos, então $p(i, j) = 0$ e $\sum_{i \in C_k} \pi_i^* p(i, j) = \pi_j^*$ para $j \in C_k$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Pelo Teorema 2.4, para uma cadeia irredutível e recorrente, a equação $\sum_{i \in C_k} \pi_i^* p(i, j) = \pi_j^*$ tem

uma única solução. Daqui obtemos $\pi^* = \sum_{k=1}^m a_k \pi_k^*$.

Deste modo, a multiplicidade do autovalor 1 é igual ao número de subconjuntos fechados irreduzíveis de ϑ .

□

A seguir será apresentado o Método das Potências para se obter a distribuição estacionária, já que é o autovetor associado ao maior autovalor de \mathbf{P} .

2.4 Método das Potências

O **Método das Potências** é um método iterativo utilizado para obtenção do autovalor dominante e seu correspondente autovetor.

Atribui-se uma aproximação inicial arbitrária para o autovetor correspondente ao autovalor dominante que é sucessivamente melhorada até que a precisão requerida seja encontrada. A convergência para o autovalor dominante é simultaneamente obtida.

Os métodos iterativos são mais proveitosos no tratamento de matrizes de grandes dimensões e esparsas, obtendo-se boas estimativas para os seus autovetores.

Método das Potências

Considere A uma matriz de dimensão $n \times n$ com n autovalores λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ que satisfazem $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, e n correspondentes autovetores ν_j , para $j = 1, \dots, n$, linearmente independentes e normalizados.

Um vetor x_0 pode ser expresso pela combinação linear:

$$x_0 = \alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \dots + \alpha_n \nu_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu_i$$

onde α_i , para $i = 1, \dots, n$, são escalares nem todos iguais a 0.

O método iterativo é dado por:

$$x_k = Ax_{k-1}, \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Deste modo,

$$x_k = Ax_{k-1} = A^2 x_{k-2} = \dots = A^k x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \nu_i. \quad (2.5)$$

Como $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ são diferentes de zero, o termo do lado direito da equação 2.5 é governado pelos termos $\sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^k \nu_i$. Em particular, se $r = 1$, assumimos que $\alpha_1 \neq 0$ e temos

$$x_k = \lambda_1^k \{\alpha_1 \nu_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k \nu_i\} = \lambda_1^k \{\alpha_1 \nu_1 + \epsilon_k\}.$$

Para k suficientemente grande, ϵ_k é um vetor com elementos muito pequenos. O vetor x_k é uma aproximação para o autovetor não normalizado ν_1 , e é exato se $\|\epsilon_k\|$ for suficientemente pequeno.

Esta observação é a base para a simplicidade do cálculo do autovalor dominante no método das potências.

Como

$$x_{k+1} = \lambda_1^{k+1} \{ \alpha_1 \nu_1 + \epsilon_{k+1} \},$$

Segue, para qualquer i , que:

$$\frac{(x_{k+1})_i}{(x_k)_i} = \lambda_1 \frac{\alpha_1 (x_1)_i + (\epsilon_{k+1})_i}{\alpha_1 (x_1)_i + (\epsilon_k)_i} \rightarrow \lambda_1 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

onde $(x_k)_i$ denota a i -ésima componente de x_k .

□

Velocidade de Convergência

A velocidade de convergência irá depender das constantes α_i , mas mais essencialmente das razões $| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} |, | \frac{\lambda_3}{\lambda_1} |, \dots, | \frac{\lambda_n}{\lambda_1} |$, e quanto menor essas razões mais rápida será a convergência. Em particular, se $| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} |$ é próximo de 1, a convergência torna-se muito lenta.

Capítulo 3

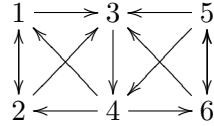
Matriz Google

3.1 *Page Rank* - Determinação da Importância da Página

A importância de uma página na *web* será denominada “importância” e seu cálculo é feito considerando-se a quantidade de referências (*links*) que esta página recebe em toda a rede, pois parte-se do princípio de que as páginas incluem *links* apenas para outras com conteúdo confiável e informações valiosas. A “importância” da página k será dada por $\pi(k)$, $\pi(k) > 0$ e $\pi(j) > \pi(k)$ indica que a página j é mais importante que a página k .

Nossa primeira abordagem será tomar $\pi(k)$ como o número de *links* para a página k . Considere o exemplo a seguir:

Exemplo 1:



Assim, temos $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 2$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 1$ e $\pi(6) = 2$. Portanto, a página 3 é a mais importante, seguida pelas páginas 1, 2, 4 e 6. A página 5 é a menos importante, pois recebeu a menor quantidade de *links*.

Nesta abordagem, um *link* vindo de uma página importante tem o mesmo peso de um *link* vindo de uma página menos importante. Para um algoritmo de ranqueamento, é interessante que um *link* para a página k vindo de uma página importante impulsione sua importância mais do que um *link* vindo de uma página menos importante.

No exemplo, as páginas 1, 2, 4 e 6 recebem dois *links*. A página 4 recebe *links* das páginas 5 e 3, sendo esta última aparentemente mais importante, pois recebe 4 *links*. Deste modo, a importância da página 4 deveria ser maior que a importância das páginas 1, 2 e 6.

Outro ponto é que uma página com diversos *links* para outras páginas representará uma grande influência. Logo, para que uma única página não tenha influência demais simplesmente fazendo *links* para inúmeras outras páginas, dividiremos sua importância pelo número total de *links*. Com este ajuste, se a página j possuir n_j *links*, um dos quais para a página k , então adicionaremos $\pi(j)/n_j$ à importância da página k .

Considere $L_k \subset \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de páginas que possuem um *link* para a página k . A

importância da página k será:

$$\pi(k) = \sum_{j \in L_k} \frac{\pi(j)}{n_j} \quad (3.1)$$

onde n_j é o número de links da página j . Vale salientar que dois *links* com mesma página de origem e destino serão considerados como um só.

Remodelando o problema de forma matemática, considere a matriz *hyperlink* $H = [H_{ij}]$ na qual a entrada da i -ésima linha e j -ésima coluna é dada por:

$$H_{ij} = \begin{cases} 1/n_j & \text{se } j \in L_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que todas as entradas de H são não-negativas e a soma de cada coluna é 1, a menos que a página correspondente não tenha *links*.

Podemos escrever a matriz *hyperlink* do exemplo como segue:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Considere agora o vetor $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$, cujas entradas são as importâncias de todas as páginas (*Page Rank*). Por 3.1, temos que:

$$\pi = H\pi.$$

Deste modo, π é o autovetor da matriz H correspondente ao autovalor 1.

No exemplo, calculando π obtemos o seguinte resultado: $\pi(1) = 0,1646$, $\pi(2) = 0,1646$, $\pi(3) = 0,2351$, $\pi(4) = 0,2458$, $\pi(5) = 0,0742$ e $\pi(6) = 0,1157$.

Comparando este resultado com o obtido inicialmente pela simples contagem de *links* recebidos, note que a página 3 não é a mais importante. Isto ocorre porque ela está ligada apenas à página 4, lançando assim toda a sua importância para esta página. Como a página 4 também é *linkada* pela página 5, esta torna-se a mais importante.

Observe que podemos considerar a matriz *hyperlink* H como uma matriz de probabilidade de transição transposta de uma Cadeia de Markov, portanto o vetor de importâncias também pode ser visto como a distribuição estacionária desta cadeia.

Como já mencionado, uma particularidade da matriz H é sua dimensão, com cerca de 25 bilhões de linhas e colunas. Porém, a maioria das entradas de H são nulas. Em média, cada página tem 10 *links*, assim, apenas 10 das 25 bilhões de entradas em cada linha não são nulas.

Cada entrada do vetor π pode ser interpretada como a importância relativa de cada página, permitindo assim, comparar a importância de quaisquer duas páginas. O vetor π deve ser sempre normalizado, para que a soma de todas as popularidades seja 1.

Para encontrar o vetor π de uma matriz H utiliza-se o **Método das Potências**, que foi apresentado a Seção 2.4.

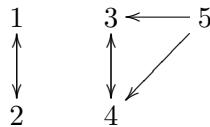
3.2 Utilização do Método das Potências

O uso de (3.1) para ordenar as páginas pode encontrar algumas dificuldades. Nesta seção discutiremos duas questões: **importâncias não únicas** e **nós pendentes** ([1] e [2]).

3.2.1 Importâncias não Únicas

De acordo com o Corolário 2.1, temos que a multiplicidade do autovalor 1 é igual ao número de subconjuntos fechados irredutíveis da cadeia. Desta forma, uma Cadeia de Markov irredutível possuirá apenas um autovalor igual a 1 e, consequentemente, um único autovetor correspondente que, neste contexto, equivale à unicidade do vetor de importâncias. Considere o exemplo a seguir:

Exemplo 2 ([2]):

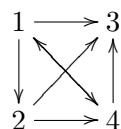


Um possível par de vetores é: $\pi = [1/2, 1/2, 0, 0, 0]^T$ e $\pi^* = [0, 0, 1/2, 1/2, 0]^T$. Além disso, qualquer combinação linear destes dois vetores resulta em outro vetor estacionário, não sendo possível assim identificar qual destes deve ser usado como o vetor de importâncias.

Na Seção 3.3 será apresentada uma modificação na matriz H para resolver este problema.

3.2.2 Nós Pendentes

Exemplo 3:



A matriz de transição é dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com vetor estacionário $\pi = [0, 0, 0, 0]^T$.

Neste caso, as importâncias de todas as páginas são zero, o que não nos diz nada sobre a importância relativa dessas quatro páginas. O problema é que a página 3 não tem *links*. Consequentemente, ela toma um pouco da importância das demais páginas a cada processo iterativo, mas não passa isso adiante para nenhuma outra página. Páginas sem *links* são chamadas de nós pendentes.

Se navergarmos aleatoriamente, em algum ponto certamente vamos ficar presos em um nó pendente. Uma solução, para continuar caminhando, é escolher a próxima página uniformemente em relação ao total de páginas. Isto tem o efeito de modificar a matriz H pela substituição da coluna de zeros, correspondente ao nó pendente, por uma coluna na qual cada registro é $1/n$, sendo n o total de páginas. Denotaremos esta nova matriz por S .

No Exemplo 3, a matriz S é dada por:

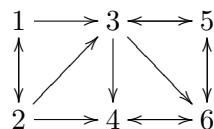
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

com vetor estacionário $\pi = [0.2, 0.2, 0.4, 0.2]^T$.

Note que a matriz S é obtida a partir de H de um modo simples. Se A é a matriz cujos registros são todos zeros, exceto para as colunas correspondente aos nós pendentes, nos quais cada entrada é $1/n$, então $S = H + A$.

Mesmo que todas as páginas possuam *links* vindos de outras páginas, é possível termos importâncias nulas atribuídas a algumas destas páginas. Isto ocorre pois a cadeia analisada não é irredutível, ou seja, existe um conjunto de *links* que torna possível a entrada em determinado grupo de páginas, porém não há *links* que permitam a saída deste grupo, como é o caso do próximo exemplo:

Exemplo 4:



A matriz de transição é dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

com vetor estacionário $\pi = [0, 0, 0.12, 0.24, 0.24, 0.40]^T$.

Na Seção seguinte uma modificação será sugerida para resolver este problema.

3.3 Modificação Sugerida

Para encontrar uma nova matriz que seja primitiva e irredutível, iremos modificar a forma que nosso navegador aleatório se move através da *web*. Neste caso, o movimento do navegador aleatório é determinado por S : ou ele segue um dos *links* da página atual ou, se a página não tiver *links*, ele escolhe aleatoriamente qualquer outra página para se mover ([1]).

Deve-se primeiro escolher um parâmetro α entre 0 e 1. Com probabilidade α , ele é guiado por S e com probabilidade $1 - \alpha$, ele escolhe a próxima página uniformemente.

Denotando por E a matriz $n \times n$ cujas entradas são todas 1, obtemos a matriz Google:

$$G = \alpha S + (1 - \alpha) \frac{1}{n} E.$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$. Para $\alpha \in [0, 1]$ a matriz G é coluna-estocástica e para $\alpha \in (0, 1]$, a solução da equação $\pi P = \pi$ é única. Assim, G tem um único vetor estacionário π que pode ser encontrado usando o **Método das Potências**.

O papel do parâmetro α é importante. Note que se $\alpha = 1$, então $G = S$ e trabalharemos com a estrutura original de *hyperlinks*. Se $\alpha = 0$, então $G = 1/n$ e, neste caso, considera-se que há um *link* entre quaisquer duas páginas, perdendo a estrutura original da *web*.

Claramente, gostaríamos de manter α próximo a 1 de forma que a estrutura original seja ponderada fortemente no cálculo. Entretanto, há outra consideração: lembre-se que a taxa de convergência do Método das Potências é governada pela magnitude do segundo maior autovalor $|\lambda_2|$. De acordo com a demonstração a seguir, para a matriz Google temos $|\lambda_2| = \alpha$. Isso significa que, quando próximo a 1, a convergência do Método das Potências será muito lenta.

Com o objetivo de satisfazer esses dois interesses concorrentes, os criadores do *Page Rank* escolheram $\alpha = 0,85$, e afirmaram que 50 a 100 interações são suficientes para a obtenção de uma boa aproximação para π ([1]).

Teorema 3.1 ([3]): $|\lambda_i| \leq 1$, para $\forall i = 1, \dots, n$.

Considere A uma matriz coluna-estocástica dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

onde a soma de cada coluna é 1. Seja e o vetor com todos os elementos iguais a 1 da forma $e^T = (e_1 \ e_2 \ e_3) = (1 \ 1 \ 1)$, então:

$$e^T A = e^T \text{ ou } A^T e = e$$

A equação acima indica que a soma dos elementos de cada linha de A^T é igual a 1, logo $\|A^T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \|a_{ij}\| = 1$.

Considerando $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i(A)|$, isto é, $\rho(A)$ é a magnitude máxima dos autovalores de A , temos as seguintes propriedades matriciais:

$$1) \rho(A) \leq \|A\|_\infty$$

Denote os autovalores de A por λ_i e os correspondentes autovetores não-nulos por x_i , temos:

$$Ax_i = \lambda_i x_i \implies |\lambda_i| \|x_i\| = \|\lambda_i x_i\| = \|Ax_i\| \leq \|A\| \|x_i\| \implies$$

$$|\lambda_i| \leq \|A\| \implies |\lambda_i| \leq \sum_{j=1}^N \|a_{ij}\| \implies$$

$$\max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i| \leq \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \|a_{ij}\| \implies \rho(A) \leq \|A\|_\infty.$$

$$2) \rho(A) = \rho(A^T)$$

Os autovalores de A^T são, por definição, os valores de λ para os quais o conjunto de equações

$$A^T y = \lambda y$$

tem uma solução não-trivial. Deste modo, resolvendo a equação $\det(A^T - \lambda I) = 0$, obtemos todos os autovalores de A^T e, sabendo-se que $\det(A) = \det(A^T)$, temos:

$$\det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)^T = \det(A - \lambda I)$$

Assim, os autovalores de A^T e de A são os mesmos, pois as duas matrizes possuem a mesma equação característica. Os autovetores são, em geral, diferentes.

Consequentemente, $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i(A)| = \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i(A^T)| = \rho(A^T)$.

Voltando à demonstração e utilizando as duas propriedades acima, temos:

$$\rho(A^T) = \rho(A) \leq \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \|a_{ij}\| = 1.$$

Deste modo, podemos concluir que o autovalor de A de maior valor absoluto é igual a 1, isto é, $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i(A)| \leq 1$.

□

Corolário 3.1: $|\lambda_2| = \alpha$.

A demonstração deste Corolário será dividida em duas etapas expostas nos Teoremas abaixo:

Teorema 3.2: Seja S uma matriz coluna estocástica de ordem n , α um número real no qual $0 \leq \alpha \leq 1$ e E uma matriz de ordem n com todas as entradas iguais a 1.

Considere a matriz Google

$$G = [\alpha S + (1 - \alpha) \frac{1}{n} E]^T. \quad (3.2)$$

Seu segundo autovalor será $|\lambda_2| \leq \alpha$.

Prova:

Caso 1: $\alpha = 0$

Se $\alpha = 0$, a equação (3.2) se reduz a $G = \frac{1}{n} E^T$. Como E é uma matriz com posto 1, então $\lambda_2 = 0$.

Caso 2: $\alpha = 1$

Se $\alpha = 1$, a equação (3.2) se reduz a $G = S^T$. Como S é uma matriz coluna estocástica, de acordo com o Teorema 3.1, conclui-se que $|\lambda_2| \leq 1$.

Caso 3: $0 < \alpha < 1$

Esta prova será feita através de uma série de lemas, dados a seguir:

Lema 3.2.1: O módulo do segundo autovalor de G é menor que 1 $\Rightarrow |\lambda_2| < 1$.

Prova: Considere $\{X_n\}_{n \geq 0}$ uma Cadeia de Markov correspondendo a G , com espaço de estados ϑ . De acordo com o Corolário 2.1, o número de subconjuntos fechados irredutíveis de $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é igual a multiplicidade do autovalor 1. Deste modo, se $\{X_n\}_{n \geq 0}$ possuir apenas um subconjunto fechado irredutível, então possuirá apenas um autovalor igual a 1 e, consequentemente, $|\lambda_2| < 1$.

A seguir será mostrado que existe um único subconjunto fechado irredutível da Cadeia de Markov correspondendo a G .

Prova: Considere χ um conjunto fechado não vazio do espaço de estados ϑ . Pela definição, devemos ter $p(i, j) = 0$, para todo $x_i \in \chi$ e $x_j \notin \chi$. Na matriz Google, todas as probabilidades de transição são positivas, pois a todas adiciona-se o valor $(1 - \alpha)\frac{1}{n}$.

Deste modo, como $p(i, j) > 0$ para $\forall i, j \in 1, \dots, n$, conclui-se que χ é composto por todos os estados da cadeia, isto é, $\chi = \vartheta$. Logo, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ possui apenas um subconjunto fechado irredutível.

□

Lema 3.2.2: O segundo autovetor x_2 de G é ortogonal a $e \Rightarrow e^T x_2 = 0$.

Prova: G é uma matriz linha estocástica de ordem n que pode ser vista como a matriz de transição para uma Cadeia de Markov com n estados. Além disso, temos que $G^T e = e$, ou seja, o primeiro autovetor de G^T é e .

Considere o seguinte teorema: *Seja x_i é o autovetor de A correspondendo ao autovalor λ_i e y_j o autovetor de A^T correspondendo a λ_j , então $x_i^T y_j = 0$ se $\lambda_i \neq \lambda_j$, ([5]).*

Deste modo, o segundo autovetor x_2 de G é ortogonal ao primeiro autovetor e de G^T , ou seja, $e^T x_2 = 0$.

□

Lema 3.2.3: $\eta^T x_2 = 0$, sendo $\eta = \frac{1}{n}e$.

Prova: Como $\eta = \frac{1}{n}e$, então $\eta^T = \frac{1}{n}e^T$. Deste modo, $\eta^T x_2 = \frac{1}{n}e^T x_2$. De acordo com o Lema 3.2.2, $e^T x_2 = 0$. Consequentemente, $\eta^T x_2 = 0$.

□

Lema 3.2.4: O segundo autovetor x_2 de G deve ser um autovetor y_i de S^T , e o correspondente autovalor é $\gamma_i = \lambda_2/\alpha$.

Prova: Denotando o i -ésimo autovalor de G como λ_i e o correspondente autovetor como x_i temos:

$$Gx_i = \lambda_i x_i \quad (3.3)$$

Da equação (3.2) temos:

$$\alpha S^T x_2 + (1 - \alpha)\eta^T x_2 = \lambda_2 x_2 \quad (3.4)$$

Do Lema 3.2.3, segue que:

$$\alpha S^T x_2 = \lambda_2 x_2 \quad (3.5)$$

Dividindo ambos os lados por α :

$$S^T x_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha} x_2 \quad (3.6)$$

Se $y_i = x_2$ e $\gamma_i = \frac{\lambda_2}{\alpha}$, reescrevemos a equação (3.6) da seguinte forma:

$$S^T y_i = \gamma_i y_i \quad (3.7)$$

Consequentemente, x_2 é também um autovetor de S^T , e a relação entre os autovalores de G e S^T que correspondem ao autovalor x_2 é dada por:

$$\lambda_2 = \alpha \gamma_i \quad (3.8)$$

□

Para finalizar a demonstração do Teorema 3.2, temos pelo Lema 3.2.4 que $\lambda_2 = \alpha \gamma_i$. Pelo Teorema 3.1, como S é uma matriz coluna-estocástica então $|\gamma_i| \leq 1$. Consequentemente, $|\lambda_2| \leq \alpha$.

□

Teorema 3.3: Se S tiver ao menos dois subconjuntos fechados irredutíveis (como é o caso da matriz *hyperlink*), então o segundo autovalor de G é dado por $\lambda_2 = \alpha$.

Prova:

Caso 1: $\alpha = 0$

Se $\alpha = 0$, a partir de (3.2) temos que $G = \frac{1}{n}E^T$. Como E é uma matriz com posto 1, então $\lambda_2 = 0$.

Caso 2: $\alpha = 1$

Se $\alpha = 1$, a equação (3.2) reduz-se a $G = S^T$. Como S é uma matriz coluna estocástica e com o Teorema 3.1, conclui-se que $|\lambda_2| \leq 1$.

Caso 3: $0 < \alpha < 1$

Esta prova será feita através de dois lemas, dados a seguir:

Lema 3.3.1: Um autovetor y_i de S^T que é ortogonal a e é um autovetor x_i de G . A relação entre esses autovalores é $\lambda_i = \alpha\gamma_i$.

Prova: Temos que $e^T y_i = 0$. Consequentemente,

$$\eta^T y_i = \frac{1}{n} e^T y_i = 0 \quad (3.9)$$

Denotando o i -ésimo autovalor de S^T como γ_i e o correspondente autovetor como y_i , temos:

$$S^T y_i = \gamma_i y_i \quad (3.10)$$

Das equações (3.2), (3.9) e (3.10),

$$Gy_i = \alpha S^T y_i + (1 - \alpha)\eta^T y_i = \alpha S^T y_i = \alpha\gamma_i y_i \quad (3.11)$$

Logo, $Gy_i = \alpha\gamma_i y_i$.

□

Lema 3.3.2: Existe $\lambda_i = \alpha$, para algum i .

Prova: Seja x_i um autovetor de S ortogonal a e .

Do Corolário 2.1, a multiplicidade do autovalor 1 é igual ao número de subconjuntos fechados irredutíveis de S . Assumindo que S tenha ao menos dois subconjuntos fechados irredutíveis, podemos encontrar dois autovetores linearmente independentes y_1 e y_2 de S^T correspondendo ao autovalor dominante 1.

Seja,

$$k_1 = y_1^T e \quad (3.12)$$

$$k_2 = y_2^T e \quad (3.13)$$

Se $k_1 = 0$ temos $x_i = y_1$, se $k_2 = 0$ temos $x_i = y_2$ e se $k_1, k_2 > 0$, então $x_i = \frac{y_1}{k_1} - \frac{y_2}{k_2}$. Note que x_i é um autovetor de S^T com autovalor 1 e ortogonal a e . De acordo com o Lema 3.3.1, temos que um vetor x_i de S^T que é ortogonal a e é um autovetor z_i de G . Sendo que o autovalor de S^T correspondente a x_i é γ_i e o autovalor de G correspondente a z_i é $\alpha\gamma_i$, como $\gamma_i = 1$, então o autovalor correspondente a G é α .

□

Retornando à demonstração do Corolário 3.1, do Teorema 3.2 temos $\lambda_2 \leq \alpha$ e do Teorema 3.3, conclui-se que existe $\lambda_i = \alpha$, para algum i .

Deste modo, $\lambda_2 = \alpha$.

□

Capítulo 4

Simulação

A velocidade de convergência do Método das Potências deve ser avaliada em detalhes, já que se trata de uma resposta imediata da pesquisa do usuário.

A fim de entender as diferentes situações que o modelo pode enfrentar, diversas simulações são apresentadas neste capítulo. Em particular, estamos interessados nos fatores que influenciam a velocidade de convergência.

As páginas podem pertencer a três grupos distintos: fechados, de ligação e de nós pendentes.

O conjunto fechado é composto por páginas intercomunicantes. As páginas que pertencem ao conjunto de ligação possuem *links* para o conjunto fechado e para o conjunto de nós pendentes, porém estas páginas não recebem *links*. Já o conjunto de nós pendentes é composto pelas páginas que não possuem *links* de saída.

4.1 Quantidade de *Links* por Página

O primeiro passo das simulações é atribuir a cada página dos conjuntos fechados e de ligação a quantidade de *links* que ela possuirá. Isto foi feito considerando que a quantidade de *links* apresenta o comportamento de uma Distribuição Uniforme {2,5}. Aqui, a cada página foi atribuída uma quantidade de *links* aleatória entre 2 e 5.

A escolha dos parâmetros desta distribuição foi baseada na análise de dois bancos de dados (“Califórnia.dat” e “Epa.dat”) construídos a partir da seleção de 200 páginas resultantes de uma pesquisa com a palavra *Califórnia* e da seleção de 200 páginas com *link* para *www.epa.gov*, ambos disponíveis em <http://www.cs.cornell.edu/Courses/cs685/2002fa/>, onde temos 90,56% e 91,73%, respectivamente, das páginas com até (inclusive) 5 *links*.

4.2 Associação dos *Links* às Páginas

O segundo passo é atribuir a cada *link* uma página. As páginas foram numeradas de 1 a T (total de páginas). Denota-se T_{min} o menor número e T_{max} o maior número entre as páginas de cada conjunto.

Esta atribuição segue uma Distribuição Normal, que foi escolhida acreditando-se que há uma concentração de *links* em determinadas páginas. Adotou-se em todos os casos que 60% dos destinos

concentram-se em 10% das páginas do conjunto.

Para gerar a distribuição Normal utilizou-se a transformação de Box-Muller: Sejam U_1 e U_2 valores independentes gerados pela distribuição Uniforme contínua no intervalo (0,1). Então:

$$Z_1 = \sqrt{-2 \times \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

e

$$Z_2 = \sqrt{-2 \times \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)$$

são normais padronizadas independentes. Descartou-se o valor Z_2 , sendo apenas Z_1 utilizado para a geração da página de destino, obtida através do seguinte cálculo:

$$\text{Página de destino} = \mu + Z_1 \times \sigma$$

sendo μ a média ($T_{min} + \frac{T_{max}-T_{min}}{2}$) e σ o desvio padrão da distribuição normal.

Quando a página de destino gerada estiver fora do conjunto de páginas analisado, ou seja, quando seu valor for inferior a menor ou superior a maior página do conjunto fechado, então ela é descartada e uma nova geração é feita. Outro descarte ocorre quando a página de destino gerada já tenha sido atribuída à página de origem em questão, neste modo uma página nunca terá dois *links* para um mesmo destino.

Após a atribuição de todas as páginas de destino, calcula-se o vetor estacionário através do Método das Potências. A metodologia deste cálculo está exposta no Capítulo 2.

4.3 Resultados

A fim de compararmos o peso da matriz H na ordenação das páginas utilizaremos o vetor de importâncias obtido com $\alpha = 0,99$ como referência.

A seguir são apresentados os resultados dos tempos de convergência dos arquivos “California.dat” e “Epa.dat”, quando variamos o valor de α em $\{0,85 ; 0,90 ; 0,95 ; 0,99\}$. A precisão utilizada para os cálculos foi de 10^{-8} .

4.3.1 Arquivo original “California.dat”

A seguir será apresentado o número de iterações para cada valor de α , o número de páginas que possuem mesma posição com $\alpha_1 = \{0,85; 0,90; 0,95\}$ e $\alpha_2 = 0,99$ e a média das distâncias entre estas posições ($\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\phi^{(\alpha_2)}(i) - \phi^{(\alpha_1)}(i)|$), onde $\phi^{(\alpha)}(i)$ é a posição da i -ésima página após a ordenação decrescente do vetor de importâncias, para determinado valor de α .

Tabela 4.1: Número de iterações para cada valor de α , número de páginas que possuem mesma posição com α_1 e α_2 e distância média quando houve alteração.

Califórnia.dat	$\alpha_1 = 0,85$ $\alpha_2 = 0,99$	$\alpha_1 = 0,90$ $\alpha_2 = 0,99$	$\alpha_1 = 0,95$ $\alpha_2 = 0,99$
Número de iterações com α_1	95	146	297
Número de iterações com α_2	1.511	1.511	1.511
Número de páginas que não estão na mesma posição *	1.961	1.901	1.806
Média das distâncias das posições *	6,624	4,227	1,860

* Referência: $\alpha = 0,99$.

O arquivo “California.dat” possui 9.664 páginas. Como a ordenação das páginas “mais próximas da realidade” é obtida com $\alpha = 0,99$, nota-se que, ao utilizarmos $\alpha = 0,85$, em torno de 20% das páginas não estão na mesma posição. A distância em relação ao valor de referência é, em média, de 6,624 posições. Já utilizando $\alpha = 0,95$, há uma pequena redução na quantidade de páginas que não estão na posição de referência, porém o mais significante é que as distâncias caem, em média, para 1,860 posições.

A seguir estão identificadas as trinta primeiras páginas obtidas a partir da ordenação do vetor de importâncias com $\alpha = 0,85$, apresentando a quantidade de *links*, a importância e a posição de cada página, quando $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$. Além disso, calculou-se o módulo da diferença entre estas posições.

Tabela 4.2: Ordenação das trinta primeiras páginas quando $\alpha = 0,85$ e suas respectivas posições quando utiliza-se $\alpha = 0,99$.

Identificação da Página	Qtde. <i>Links</i>	Importância com $\alpha = 0,85$	Posição com $\alpha = 0,85$	Importância com $\alpha = 0,99$	Posição com $\alpha = 0,99$	$ Diferença $ das Posições
1488	1	0,006231	1	0,064208	1	0
4391	1	0,006085	2	0,064142	2	0
66	13	0,004773	3	0,004314	18	15
6427	0	0,004622	4	0,003031	21	17
4823	17	0,004531	5	0,003781	19	14
2078	0	0,004342	6	0,002707	24	18
0	17	0,004197	7	0,003427	20	13
1489	1	0,003965	8	0,039611	3	5
1617	3	0,003645	9	0,002717	23	14
2408	1	0,003635	10	0,039373	4	6
17	1	0,003572	11	0,030439	5	6
1806	0	0,003166	12	0,001971	28	16
997	1	0,003141	13	0,030193	6	7
41	3	0,002998	14	0,002946	22	8
211	1	0,002987	15	0,029848	7	8
1862	1	0,002931	16	0,002660	25	9
1863	0	0,002931	17	0,002660	26	9
1083	0	0,002757	18	0,002090	27	9
1079	3	0,002752	19	0,001835	30	11
126	0	0,002718	20	0,001889	29	9
8051	1	0,002595	21	0,029579	8	13
7755	5	0,002459	22	0,001725	31	9
32	13	0,002238	23	0,001724	32	9
1660	0	0,002169	24	0,001566	33	9
2475	0	0,002153	25	0,001526	35	10
9	0	0,002123	26	0,001341	37	11
102	0	0,001947	27	0,001344	36	9
6	1	0,001890	28	0,017878	9	19
2217	1	0,001855	29	0,001266	38	9
1661	6	0,001796	30	0,001563	34	4

Um resumo da análise das cem primeiras páginas obtidas a partir da ordenação do vetor de importâncias com $\alpha = 0,85$, comparando-se suas respectivas posições quando $\alpha = 0,99$ é apresentado abaixo. Na primeira coluna tem-se a quantidade de páginas analisadas. Deste modo, foram analisadas inicialmente as dez primeiras páginas, a seguir, as vinte primeiras páginas, e assim por diante, até a análise das cem primeiras páginas. Na segunda coluna tem-se o número de páginas que apresentaram a mesma posição nas duas ordenações e, na terceira coluna, o número de páginas onde a diferença entre as duas ordenações ($\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$) foi de até cinco posições. A quarta coluna refere-se à diferença média entre as posições das páginas analisadas e a quinta coluna, à diferença máxima. Na sexta coluna estão identificadas as posições obtidas quando $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ no caso onde obteve-se esta diferença máxima.

Tabela 4.3: Ordenação das trinta primeiras páginas quando $\alpha = 0,85$ e suas respectivas posições quando utiliza-se $\alpha = 0,99$.

Total de Páginas	N.Páginas na mesma posição	N.Páginas com até 5 posições de deslocamento	Deslocamento Médio	Deslocamento Máximo	Posição $\alpha = 0,85$ /Posição $\alpha = 0,99$ no desloc.máximo
10	2	3	10,20	18	06/24
20	2	3	9,70	18	06/24
30	2	4	9,87	19	28/09
40	2	4	11,08	21	37/58
50	2	5	12,34	37	48/11
60	2	6	13,83	40	54/14
70	2	6	14,46	53	66/13
80	2	7	14,91	60	75/15
90	3	9	15,08	60	75/15
100	3	10	16,15	60	75/15

De acordo com as Tabelas (4.2) e (4.3), apenas as duas primeiras páginas permanecem na mesma posição quando varia-se o parâmetro α , sendo que estas apresentam importâncias bem maiores que as demais. Além disso, identifica-se um deslocamento médio e máximo bastante elevado.

4.3.2 Arquivo original “Epa.dat”

As mesmas análises da seção anterior foram feitas para o arquivo “Epa.dat”.

A seguir será apresentado o número de iterações para cada valor de α , o número de páginas que possuem mesma posição com $\alpha_1 = \{0,85; 0,90; 0,95\}$ e $\alpha_2 = 0,99$ e a média das distâncias entre estas posições quando houve variação.

Tabela 4.4: Número de iterações para cada valor de α , número de páginas que possuem mesma posição com α_1 e α_2 e distância média quando houve alteração.

Epa.dat	$\alpha_1 = 0,85$ $\alpha_2 = 0,99$	$\alpha_1 = 0,90$ $\alpha_2 = 0,99$	$\alpha_1 = 0,95$ $\alpha_2 = 0,99$
Número de iterações com α_1	81	123	246
Número de iterações com α_2	1.238	1.238	1.238
Número de páginas que não estão na mesma posição*	1.930	1.799	1.469
Média das distâncias das posições*	8,856	5,432	1,965

* Referência: $\alpha = 0,99$.

O arquivo “Epa.dat” possui 4.772 páginas. Nota-se que, ao utilizarmos $\alpha = 0,85$, em torno de 40% das páginas não estão na mesma posição. A distância em relação ao valor de referência é, em média, de 8,856 posições. Já utilizando $\alpha = 0,95$, há uma pequena redução na quantidade de páginas que não estão na posição de referência, porém o mais significante é que a distância cai, em média, para 1,965 posições.

A seguir estão identificadas as trinta primeiras páginas obtidas a partir da ordenação do vetor de importâncias com $\alpha = 0,85$, apresentando a quantidade de *links*, a importância e a posição de cada página, quando $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$. Além disso, calculou-se o módulo da diferença entre

estas posições.

Tabela 4.5: Ordenação das trinta primeiras páginas quando $\alpha = 0,85$ e suas respectivas posições quando utiliza-se $\alpha = 0,99$.

Identificação da Página	Qtde. Links	Importância com $\alpha = 0,85$	Posição com $\alpha = 0,85$	Importância com $\alpha = 0,99$	Posição com $\alpha = 0,99$	Diferença das Posições
1247	1	0,019116	1	0,194546	1	0
2838	1	0,018932	2	0,194391	2	0
967	0	0,006302	3	0,004125	8	5
708	0	0,005561	4	0,004251	7	3
287	0	0,005123	5	0,004314	6	1
221	0	0,004115	6	0,002610	12	6
2175	1	0,003960	7	0,002853	9	2
1576	0	0,003747	8	0,002737	11	3
275	11	0,003654	9	0,002810	10	1
2799	0	0,003634	10	0,002575	13	3
710	0	0,003409	11	0,002128	17	6
4249	1	0,003354	12	0,002182	16	4
1321	7	0,003339	13	0,002363	14	1
4477	1	0,003163	14	0,028444	3	11
1194	1	0,003150	15	0,002283	15	0
4313	2	0,002864	16	0,028254	4	12
1231	1	0,002769	17	0,001708	20	3
839	0	0,002528	18	0,001655	21	3
942	1	0,002516	19	0,001899	19	0
2040	5	0,001974	20	0,001478	22	2
46	8	0,001946	21	0,001447	23	2
4673	0	0,001946	22	0,001277	26	4
790	0	0,001941	23	0,001282	25	2
2827	1	0,001871	24	0,014396	5	19
1508	1	0,001868	25	0,001178	30	5
45	0	0,001808	26	0,001082	33	7
87	8	0,001795	27	0,001120	32	5
1028	8	0,001736	28	0,001191	28	0
251	0	0,001715	29	0,001048	35	6
3840	0	0,001681	30	0,001155	31	1

Um resumo da análise das cem primeiras páginas obtidas a partir da ordenação do vetor de importâncias com $\alpha = 0,85$, comparando-se suas respectivas posições quando $\alpha = 0,99$ é apresentado abaixo. Esta tabela segue o mesmo formato descrito na seção anterior.

Tabela 4.6: Ordenação das trinta primeiras páginas quando $\alpha = 0,85$ e suas respectivas posições quando utiliza-se $\alpha = 0,99$.

Total de Páginas	N.Páginas na mesma posição	N.Páginas com até 5 posições de deslocamento	Deslocamento Médio	Deslocamento Máximo	Posição $\alpha = 0,85$ /Posição $\alpha = 0,99$ no desloc.máximo
10	2	8	2,40	6	06/12
20	4	14	3,30	12	16/04
30	5	18	3,90	19	24/05
40	5	21	4,53	19	24/05
50	6	24	4,88	19	24/05
60	6	25	5,88	21	55/34
70	6	26	6,77	27	65/38
80	6	27	7,26	27	65/38
90	6	29	7,61	27	65/38
100	6	31	7,99	27	65/38

De acordo com as Tabelas (4.5) e (4.6), das primeiras dez páginas, apenas as duas primeiras estão na mesma posição nas duas ordenações, ou seja, a maioria das páginas apresentam diferentes posições quando altera-se o parâmetro α . Nota-se que a diferença média é menor no conjunto de dados Epa.dat, comparado com o resultado obtido em Califórnia.dat.

4.3.3 Influência dos Fatores na Velocidade de Convergência

Conforme já dito, há interesse em verificar a influência do parâmetro α , do número de páginas total e dentro de cada conjunto fechado, do número de conjuntos fechados e dos nós pendentes no número de iterações necessárias para a convergência.

Considere $\pi^{(n)}(i)$ a importância da i -ésima página na n -ésima iteração. O número de iterações foi obtido utilizando o Método das Potências até que $\max_i \{\pi^{(n)}(i) - \pi^{(n-1)}(i)\} < 10^{-8}$. Os números mínimo e máximo de *links* iguais a 2 e 5, respectivamente. Para o parâmetro α , adotamos valores 0,85 e 0,99; simulações foram feitas em conjuntos de 500 até 710.000 páginas; em relação ao número de subconjuntos fechados, temos uma variação de 1 a 100 e a quantidade de nós pendentes foi proporcional ao número total de páginas: {0 ; 5% ; 50% ; 100% ; 200%}. Quando há páginas pertencentes ao grupo de ligação, fixou-se o tamanho deste em 10% do total de páginas dos grupos fechados e 10% de seus *links* destinam-se aos nós pendentes.

Para cada combinação de valores acima foram feitas 500 simulações e os dados apresentados são as médias dos resultados obtidos nestas 500 simulações.

As tabelas de resultados apresentam as seguintes informações: total de páginas (TP), quantidade de grupos fechados (QGF), total de páginas em cada conjunto fechado (TPGF), total de páginas do grupo de ligação (TPGL) e total de nós pendentes (TNP). Como resultado temos: número de iterações necessárias para a convergência ao utilizarmos $\alpha = 0,85$ (NI com $\alpha = 0,85$), número de iterações necessárias para a convergência ao utilizarmos $\alpha = 0,99$ (NI com $\alpha = 0,99$), número de páginas que apresentaram posições distintas ao utilizarmos $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ (NPD), média do deslocamento destas páginas diferentes (MedD) e máximo deslocamento que as páginas apresentaram (MaxD) sendo o deslocamento definido como $|\phi^{(0,99)}(i) - \phi^{(0,85)}(i)|$, onde $\phi^{(\alpha)}(i)$ é a

posição da i -ésima página após a ordenação decrescente do vetor estacionário π , para determinado valor de α .

De acordo com as Tabelas A.1 a A.6 parece que:

- (i) A existência do grupo de ligação e a quantidade de nós pendentes não altera o número de iterações.
- (ii) Quando o total de páginas compõem um único conjunto fechado, tanto para $\alpha = 0,85$ como para $\alpha = 0,99$, o número de iterações é baixo e seu comportamento é bastante diferente do mencionado na literatura ([1]) (para $\alpha = 0,85$, 50 a 100 iterações são necessárias para a convergência e para $\alpha = 0,99$, este valor é muito mais elevado). Porém, tal comportamento é obtido quando se tem mais de um conjunto fechado.
- (iii) Quando se fixa o número de grupos, variando-se o total de páginas do conjunto fechado, a medida que este número aumenta, o número de iterações decai. Por exemplo, um total de 1.000 páginas divididas em 5 grupos, sendo cada grupo com 200 páginas, apresenta um número de iterações em torno de 84 iterações, para um total de 10.000 páginas com mesma divisão, sendo cada grupo com 2.000 páginas, este número é em torno de 72 iterações e para um total de 100.000 páginas, sendo 20.000 páginas em cada grupo, são necessárias em torno de 59 iterações para a convergência.
- (iv) Quando se fixa o total de páginas dos conjuntos fechados, variando-se o número e o tamanho dos grupos, a medida que o número de grupos aumenta e, consequentemente, a quantidade de páginas em cada grupo diminui, o número de iterações aumenta significantemente. Como não houve diferenças significativas com a existência do grupo de ligação e com a variação do número de nós pendentes, a partir daqui, as simulações foram feitas considerando a existência de um grupo de ligação, além do número de nós pendentes igual ao total de páginas dos conjuntos fechados.

Na Tabela A.7 foram feitas simulações com o tamanho de cada grupo fechado fixado em 1.000 e 10.000 páginas, variando-se o número de grupos. Além da obtenção das conclusões (ii) e (iii), parece que:

- (v) A medida que o número de grupos fechados aumenta, com seus tamanhos mantidos fixos, o número de iterações necessárias para a convergência apresenta leve aumento.

Nas Tabelas A.8 e A.9, reforça-se as conclusões já obtidas em (ii), (iii) e (v).

Na Tabela A.10 são apresentados os resultados da simulações onde fixou-se o número total de páginas dos conjuntos fechados, variando-se o número de grupos e o tamanho destes, reforçando as conclusões já obtidas em (ii), (iv) e (v).

Nas Tabelas A.11 e A.12, além da obtenção das conclusões (ii) e (iii), parece que:

(vi) O número de iterações aumenta a medida que o tamanho dos grupos se diferencia, ou seja, o número de iterações é maior quando temos juntos conjuntos de 50 e 500 páginas do que quando temos conjuntos de 450 e 500 páginas. Além disso, é possível verificar que o número de conjuntos de mesmo tamanho não influencia no número de iterações. Por exemplo, o número de iterações para 9 conjuntos fechados, sendo 8 destes de 50 páginas e 1 de 500 páginas é próximo do obtido no caso de 8 conjuntos de 500 páginas e 1 conjunto de 50 páginas.

De acordo com a Tabela A.13, além da conclusão (ii), parece que:

(vii) O número de iterações é governado pelo tamanho do menor conjunto fechado. Neste caso, como as páginas são divididas em grupos, quanto menor o tamanho do menor grupo, maior o número de iterações necessárias para a convergência.

Apêndice A

Número Médio de Iterações

Tabela A.1: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 1.000 páginas nos conjuntos fechados.

TP	QGF	$TPGF$	$TPGL$	TNP	$NI\ com$ $\alpha=0,85$	$Limite$ $Inferior$	$Limite$ $Superior$	$NI\ com$ $\alpha=0,99$	$Limite$ $Inferior$	$Limite$ $Superior$
1.000	1	1.000	0	0	24,86	24,78	24,94	31,17	31,05	31,30
1.100	1	1.000	100	0	24,84	24,76	24,92	31,15	31,03	31,28
1.050	1	1.000	0	50	24,76	24,69	24,84	31,03	30,91	31,14
1.150	1	1.000	100	50	24,77	24,70	24,85	31,08	30,95	31,21
1.600	1	1.000	100	500	24,81	24,73	24,89	31,11	30,98	31,24
2.100	1	1.000	100	1.000	24,84	24,77	24,92	31,09	30,97	31,21
3.100	1	1.000	100	2.000	25,07	25,00	25,14	31,06	30,94	31,18
1.000	2	500	0	0	77,44	77,35	77,52	959,90	958,64	961,16
1.100	2	500	100	0	77,36	77,28	77,45	959,02	957,72	960,31
1.050	2	500	0	50	77,36	77,28	77,44	958,93	957,68	960,19
1.150	2	500	100	50	77,37	77,29	77,45	959,10	957,87	960,33
1.600	2	500	100	500	77,39	77,32	77,47	959,12	957,94	960,30
2.100	2	500	100	1.000	77,39	77,31	77,47	959,04	957,81	960,28
3.100	2	500	100	2.000	77,43	77,35	77,51	960,19	958,99	961,40
1.000	5	200	0	0	84,29	84,20	84,39	1.071,15	1.069,69	1.072,61
1.100	5	200	100	0	84,41	84,32	84,51	1.072,19	1.070,77	1.073,62
1.050	5	200	0	50	84,33	84,23	84,43	1.071,63	1.070,06	1.073,21
1.150	5	200	100	50	84,39	84,30	84,49	1.072,25	1.070,70	1.073,80
1.600	5	200	100	500	84,36	84,26	84,45	1.071,81	1.070,32	1.073,30
2.100	5	200	100	1.000	84,38	84,28	84,47	1.071,91	1.070,36	1.073,46
3.100	5	200	100	2.000	84,32	84,22	84,41	1.071,40	1.069,91	1.072,89
1.000	10	100	0	0	88,13	88,04	88,22	1.132,88	1.131,46	1.134,30
1.100	10	100	100	0	88,17	88,09	88,26	1.133,77	1.132,42	1.135,11
1.050	10	100	0	50	88,17	88,07	88,26	1.133,51	1.132,03	1.135,00
1.150	10	100	100	50	88,23	88,13	88,33	1.134,70	1.133,12	1.136,28
1.600	10	100	100	500	88,13	88,03	88,22	1.133,24	1.131,81	1.134,67
2.100	10	100	100	1.000	88,17	88,07	88,27	1.133,55	1.132,03	1.135,08
3.100	10	100	100	2.000	88,15	88,06	88,25	1.133,22	1.131,70	1.134,75
1.000	50	20	0	0	93,82	93,75	93,89	1.224,62	1.223,57	1.225,67
1.100	50	20	100	0	93,80	93,73	93,87	1.224,90	1.223,88	1.225,92
1.050	50	20	0	50	93,82	93,75	93,89	1.224,74	1.223,74	1.225,74
1.150	50	20	100	50	93,82	93,75	93,88	1.224,91	1.223,91	1.225,91
1.600	50	20	100	500	93,83	93,76	93,90	1.224,91	1.223,90	1.225,93
2.100	50	20	100	1.000	93,77	93,70	93,84	1.224,22	1.223,24	1.225,20
3.100	50	20	100	2.000	93,84	93,77	93,90	1.225,35	1.224,33	1.226,37

Tabela A.2: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 10.000 páginas nos conjuntos fechados.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>
10.000	1	10.000	0	0	23,81	23,76	23,85	29,73	29,67	29,78
11.000	1	10.000	1.000	0	23,79	23,74	23,83	29,71	29,65	29,77
10.500	1	10.000	0	500	23,80	23,75	23,84	29,68	29,63	29,73
11.500	1	10.000	1.000	500	23,80	23,75	23,84	29,66	29,60	29,71
16.000	1	10.000	1.000	5.000	23,81	23,77	23,85	29,70	29,64	29,76
21.000	1	10.000	1.000	10.000	23,74	23,69	23,79	29,68	29,62	29,73
31.000	1	10.000	1.000	20.000	23,82	23,77	23,86	29,72	29,67	29,78
10.000	2	5.000	0	0	64,91	64,84	64,97	757,23	756,27	758,18
11.000	2	5.000	1.000	0	64,98	64,92	65,05	757,95	757,01	758,90
10.500	2	5.000	0	500	64,96	64,89	65,02	758,38	757,43	759,33
11.500	2	5.000	1.000	500	64,96	64,90	65,02	758,34	757,39	759,29
16.000	2	5.000	1.000	5.000	64,90	64,84	64,96	757,28	756,39	758,16
21.000	2	5.000	1.000	10.000	64,96	64,89	65,02	758,05	757,12	758,99
31.000	2	5.000	1.000	20.000	64,96	64,90	65,03	758,24	757,30	759,18
10.000	5	2.000	0	0	72,43	72,36	72,50	879,45	878,31	880,59
11.000	5	2.000	1.000	0	72,45	72,37	72,52	879,40	878,30	880,50
10.500	5	2.000	0	500	72,50	72,42	72,58	880,14	878,91	881,38
11.500	5	2.000	1.000	500	72,47	72,39	72,54	879,74	878,65	880,84
16.000	5	2.000	1.000	5.000	72,48	72,40	72,56	879,65	878,46	880,84
21.000	5	2.000	1.000	10.000	72,45	72,37	72,52	879,36	878,21	880,51
31.000	5	2.000	1.000	20.000	72,47	72,39	72,54	879,64	878,52	880,75
10.000	10	1.000	0	0	76,90	76,81	76,98	951,36	950,05	952,66
11.000	10	1.000	1.000	0	76,85	76,77	76,94	950,68	949,40	951,95
10.500	10	1.000	0	500	76,84	76,77	76,92	950,09	948,93	951,24
11.500	10	1.000	1.000	500	76,87	76,79	76,95	950,80	949,61	951,99
16.000	10	1.000	1.000	5.000	76,82	76,74	76,90	950,06	948,81	951,31
21.000	10	1.000	1.000	10.000	76,94	76,86	77,02	951,73	950,48	952,97
31.000	10	1.000	1.000	20.000	76,95	76,87	77,03	951,99	950,78	953,21
10.000	50	200	0	0	85,55	85,46	85,65	1.091,35	1.089,89	1.092,82
11.000	50	200	1.000	0	85,60	85,51	85,69	1.092,06	1.090,64	1.093,48
10.500	50	200	0	500	85,56	85,47	85,66	1.091,23	1.089,78	1.092,68
11.500	50	200	1.000	500	85,52	85,42	85,61	1.090,54	1.089,13	1.091,94
16.000	50	200	1.000	5.000	85,54	85,44	85,63	1.091,00	1.089,50	1.092,49
21.000	50	200	1.000	10.000	85,60	85,51	85,70	1.092,02	1.090,54	1.093,50
31.000	50	200	1.000	20.000	85,53	85,44	85,63	1.090,87	1.089,40	1.092,34

Tabela A.3: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 100.000 páginas nos conjuntos fechados.

TP	QGF	$TPGF$	$TPGL$	TNP	NI com $\alpha=0,85$	Limite Inferior	Limite Superior	NI com $\alpha=0,99$	Limite Inferior	Limite Superior
100.000	1	100.000	0	0	22,54	22,50	22,59	28,16	28,12	28,20
110.000	1	100.000	10.000	0	22,52	22,48	22,57	28,14	28,10	28,18
105.000	1	100.000	0	5.000	22,49	22,45	22,53	28,14	28,09	28,18
115.000	1	100.000	10.000	5.000	22,54	22,50	22,58	28,18	28,14	28,23
160.000	1	100.000	10.000	50.000	22,52	22,48	22,56	28,16	28,12	28,21
210.000	1	100.000	10.000	100.000	22,55	22,50	22,59	28,16	28,12	28,20
310.000	1	100.000	10.000	200.000	22,50	22,46	22,55	28,15	28,11	28,19
100.000	2	50.000	0	0	51,89	51,84	51,94	546,62	545,94	547,30
110.000	2	50.000	10.000	0	51,92	51,87	51,97	547,17	546,45	547,89
105.000	2	50.000	0	5.000	51,89	51,84	51,95	546,82	546,05	547,59
115.000	2	50.000	10.000	5.000	51,92	51,87	51,98	547,25	546,52	547,98
160.000	2	50.000	10.000	50.000	51,94	51,89	51,99	547,03	546,29	547,77
210.000	2	50.000	10.000	100.000	51,92	51,87	51,97	547,06	546,35	547,78
310.000	2	50.000	10.000	200.000	51,90	51,85	51,95	547,01	546,31	547,71
100.000	5	20.000	0	0	59,73	59,67	59,79	673,75	672,85	674,66
110.000	5	20.000	10.000	0	59,68	59,62	59,74	673,28	672,41	674,14
105.000	5	20.000	0	5.000	59,68	59,62	59,74	672,80	671,94	673,67
115.000	5	20.000	10.000	5.000	59,67	59,62	59,73	672,60	671,81	673,39
160.000	5	20.000	10.000	50.000	59,63	59,57	59,69	672,11	671,28	672,93
210.000	5	20.000	10.000	100.000	59,67	59,61	59,73	672,56	671,68	673,44
310.000	5	20.000	10.000	200.000	59,67	59,61	59,73	672,53	671,71	673,36
100.000	10	10.000	0	0	64,30	64,24	64,36	747,59	746,67	748,52
110.000	10	10.000	10.000	0	64,32	64,25	64,38	747,53	746,62	748,43
105.000	10	10.000	0	5.000	64,25	64,19	64,31	747,02	746,13	747,92
115.000	10	10.000	10.000	5.000	64,36	64,30	64,42	748,04	747,09	748,99
160.000	10	10.000	10.000	50.000	64,38	64,32	64,44	748,77	747,89	749,66
210.000	10	10.000	10.000	100.000	64,32	64,26	64,38	748,10	747,22	748,97
310.000	10	10.000	10.000	200.000	64,23	64,16	64,29	746,76	745,82	747,70
100.000	50	2.000	0	0	73,69	73,61	73,76	899,10	897,95	900,24
110.000	50	2.000	10.000	0	73,74	73,67	73,82	900,05	898,94	901,16
105.000	50	2.000	0	5.000	73,71	73,64	73,79	899,91	898,75	901,06
115.000	50	2.000	10.000	5.000	73,68	73,61	73,75	899,30	898,23	900,37
160.000	50	2.000	10.000	50.000	73,71	73,63	73,78	899,47	898,39	900,55
210.000	50	2.000	10.000	100.000	73,74	73,67	73,82	900,11	898,99	901,22
310.000	50	2.000	10.000	200.000	73,70	73,63	73,77	899,29	898,17	900,42

Tabela A.4: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para grupos fechados com até 750 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>
500	5	100	0	0	87,51	87,42	87,60	1.123,09	1.121,65	1.124,53
550	5	100	50	0	87,48	87,39	87,57	1.122,08	1.120,59	1.123,57
525	5	100	0	25	87,50	87,41	87,60	1.122,63	1.121,09	1.124,17
575	5	100	50	25	87,61	87,52	87,71	1.124,46	1.122,93	1.126,00
800	5	100	50	250	87,43	87,33	87,53	1.121,43	1.119,89	1.122,98
1.050	5	100	50	500	87,51	87,42	87,61	1.123,20	1.121,71	1.124,69
1.550	5	100	50	1.000	87,51	87,41	87,61	1.122,89	1.121,34	1.124,44
500	2	250	0	0	80,87	80,79	80,96	1.015,60	1.014,34	1.016,86
550	2	250	50	0	80,91	80,82	80,99	1.016,40	1.015,16	1.017,63
525	2	250	0	25	80,90	80,82	80,99	1.016,05	1.014,70	1.017,40
575	2	250	50	25	80,97	80,89	81,06	1.017,15	1.015,85	1.018,44
800	2	250	50	250	81,00	80,91	81,08	1.017,34	1.016,01	1.018,66
1.050	2	250	50	500	80,91	80,83	81,00	1.016,40	1.015,05	1.017,75
1.550	2	250	50	1.000	81,01	80,92	81,10	1.017,49	1.016,14	1.018,85
1.750	5	350	0	0	81,66	81,56	81,75	1.027,72	1.026,29	1.029,16
1.925	5	350	175	0	81,53	81,44	81,62	1.026,38	1.024,99	1.027,77
1.838	5	350	0	88	81,57	81,48	81,65	1.026,53	1.025,16	1.027,91
2.013	5	350	175	88	81,55	81,45	81,64	1.026,65	1.025,23	1.028,06
2.800	5	350	175	875	81,59	81,50	81,68	1.027,16	1.025,74	1.028,57
3.675	5	350	175	1.750	81,54	81,45	81,63	1.026,30	1.024,85	1.027,74
5.425	5	350	175	3.500	81,53	81,44	81,62	1.026,11	1.024,73	1.027,48
1.500	2	750	0	0	75,30	75,22	75,38	925,48	924,24	926,71
1.650	2	750	150	0	75,28	75,21	75,36	925,12	923,95	926,29
1.575	2	750	0	75	75,32	75,25	75,40	925,68	924,49	926,86
1.725	2	750	150	75	75,26	75,18	75,34	925,00	923,79	926,22
2.400	2	750	150	750	75,29	75,21	75,37	925,50	924,25	926,75
3.150	2	750	150	1.500	75,28	75,21	75,36	925,06	923,88	926,23
4.650	2	750	150	3.000	75,31	75,24	75,39	925,48	924,33	926,62
2.000	2	250;750	0	0	82,86	82,77	82,95	1.047,44	1.045,98	1.048,90
2.100	2	250;750	100	0	82,93	82,84	83,03	1.048,75	1.047,22	1.050,28
2.050	2	250;750	0	50	82,78	82,69	82,88	1.046,91	1.045,47	1.048,36
2.150	2	250;750	100	50	82,90	82,81	83,00	1.048,53	1.047,08	1.049,97
2.600	2	250;750	100	500	82,85	82,75	82,94	1.047,53	1.046,15	1.048,91
3.100	2	250;750	100	1.000	82,79	82,70	82,88	1.046,66	1.045,29	1.048,03
4.100	2	250;750	100	2.000	82,89	82,79	82,99	1.047,91	1.046,40	1.049,42
5.000	5	3×100;2×350	0	0	88,14	88,04	88,24	1.133,36	1.131,81	1.134,92
5.100	5	3×100;2×350	100	0	88,19	88,09	88,29	1.133,87	1.132,37	1.135,36
5.050	5	3×100;2×350	0	50	88,20	88,10	88,29	1.133,84	1.132,31	1.135,37
5.150	5	3×100;2×350	100	50	88,23	88,13	88,33	1.134,47	1.132,89	1.136,05
5.600	5	3×100;2×350	100	500	88,21	88,11	88,31	1.134,04	1.132,56	1.135,51
6.100	5	3×100;2×350	100	1.000	88,24	88,15	88,33	1.134,50	1.133,06	1.135,93
7.100	5	3×100;2×350	100	2.000	88,21	88,11	88,31	1.134,35	1.132,80	1.135,90

Tabela A.5: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, , para grupos fechados com até 7.500 páginas.

TP	QGF	TPGF	TPGL	TNP	NI com	Limite	Limite	NI com	Limite	Limite
					$\alpha=0,85$	Inferior	Superior	$\alpha=0,99$	Inferior	Superior
5.000	5	1.000	0	0	76,18	76,09	76,26	939,62	938,33	940,91
5.500	5	1.000	500	0	76,17	76,09	76,24	939,65	938,45	940,85
5.250	5	1.000	0	250	76,11	76,03	76,19	938,71	937,49	939,94
5.750	5	1.000	500	250	76,25	76,16	76,33	940,36	939,06	941,67
8.000	5	1.000	500	2.500	76,11	76,03	76,19	938,49	937,31	939,67
10.500	5	1.000	500	5.000	76,24	76,16	76,32	940,58	939,34	941,83
15.500	5	1.000	500	10.000	76,21	76,12	76,30	940,01	938,69	941,34
5.000	2	2.500	0	0	68,79	68,72	68,85	819,89	818,90	820,88
5.500	2	2.500	500	0	68,78	68,71	68,85	819,77	818,68	820,86
5.250	2	2.500	0	250	68,82	68,76	68,89	820,51	819,53	821,48
5.750	2	2.500	500	250	68,78	68,72	68,85	819,83	818,85	820,81
8.000	2	2.500	500	2.500	68,81	68,75	68,88	820,47	819,45	821,48
10.500	2	2.500	500	5.000	68,83	68,76	68,90	820,98	819,91	822,04
15.500	2	2.500	500	10.000	68,81	68,75	68,88	820,39	819,34	821,44
17.500	5	3.500	0	0	69,41	69,34	69,47	830,18	829,17	831,19
19.250	5	3.500	1.750	0	69,42	69,34	69,49	830,21	829,12	831,29
18.375	5	3.500	0	875	69,45	69,38	69,52	830,68	829,59	831,77
20.125	5	3.500	1.750	875	69,35	69,29	69,42	829,15	828,17	830,14
28.000	5	3.500	1.750	8.750	69,36	69,29	69,43	829,30	828,27	830,34
36.750	5	3.500	1.750	17.500	69,37	69,30	69,44	829,41	828,34	830,48
54.250	5	3.500	1.750	35.000	69,14	69,02	69,25	825,84	824,04	827,64
15.000	2	7.500	0	0	62,64	62,59	62,70	720,91	720,08	721,75
16.500	2	7.500	1.500	0	62,64	62,58	62,71	720,94	720,03	721,85
15.750	2	7.500	0	750	62,67	62,61	62,73	721,30	720,41	722,19
17.250	2	7.500	1.500	750	62,69	62,63	62,75	721,28	720,40	722,16
24.000	2	7.500	1.500	7.500	62,65	62,59	62,71	720,93	720,10	721,76
31.500	2	7.500	1.500	15.000	62,64	62,57	62,70	720,93	720,01	721,85
46.500	2	7.500	1.500	30.000	62,67	62,61	62,73	721,30	720,44	722,16
20.000	2	2500;7500	0	0	70,88	70,81	70,96	854,20	853,05	855,35
21.000	2	2500;7500	1.000	0	70,80	70,73	70,88	852,79	851,70	853,87
20.500	2	2500;7500	0	500	70,85	70,78	70,92	853,31	852,25	854,37
21.500	2	2500;7500	1.000	500	70,84	70,77	70,91	853,42	852,32	854,51
26.000	2	2500;7500	1.000	5.000	70,86	70,79	70,94	853,88	852,78	854,98
31.000	2	2500;7500	1.000	10.000	70,83	70,76	70,90	853,25	852,17	854,33
41.000	2	2500;7500	1.000	20.000	70,85	70,78	70,93	853,32	852,19	854,45
50.000	5	3×1000;2×3500	0	0	76,88	76,79	76,96	950,84	949,55	952,14
51.000	5	3×1000;2×3500	1.000	0	76,81	76,74	76,89	950,15	948,98	951,33
50.500	5	3×1000;2×3500	0	500	76,88	76,80	76,96	951,57	950,33	952,81
51.500	5	3×1000;2×3500	1.000	500	76,97	76,89	77,05	951,73	950,49	952,97
56.000	5	3×1000;2×3500	1.000	5.000	76,90	76,82	76,98	951,22	949,98	952,46
61.000	5	3×1000;2×3500	1.000	10.000	76,85	76,76	76,93	950,44	949,16	951,71
71.000	5	3×1000;2×3500	1.000	20.000	76,90	76,82	76,98	951,31	950,08	952,54

Tabela A.6: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, , para grupos fechados com até 75.000 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>
50.000	5	10.000	0	0	63,62	63,55	63,69	736,35	735,32	737,38
55.000	5	10.000	5000	0	63,60	63,54	63,66	736,08	735,15	737,01
52.500	5	10.000	0	2500	63,59	63,52	63,65	736,00	735,06	736,95
57.500	5	10.000	5000	2500	63,55	63,49	63,61	735,57	734,72	736,42
80.000	5	10.000	5000	25000	63,56	63,50	63,62	735,53	734,60	736,47
105.000	5	10.000	5000	50000	63,50	63,44	63,56	734,91	734,01	735,81
155.000	5	10.000	5000	100000	63,53	63,46	63,59	735,40	734,49	736,30
50.000	2	25.000	0	0	55,83	55,78	55,89	610,81	610,06	611,57
55.000	2	25.000	5000	0	55,87	55,81	55,93	611,22	610,40	612,03
52.500	2	25.000	0	2500	55,83	55,78	55,88	610,99	610,25	611,73
57.500	2	25.000	5000	2500	55,89	55,84	55,95	612,06	611,27	612,85
80.000	2	25.000	5000	25000	55,86	55,81	55,91	610,61	609,85	611,38
105.000	2	25.000	5000	50000	55,85	55,79	55,91	610,70	609,92	611,48
155.000	2	25.000	5000	100000	55,88	55,83	55,94	611,46	610,66	612,27
175.000	5	35.000	0	0	56,52	56,47	56,57	621,67	620,92	622,42
192.500	5	35.000	17500	0	56,49	56,44	56,54	621,13	620,34	621,91
183.750	5	35.000	0	8750	56,46	56,41	56,52	620,95	620,17	621,73
201.250	5	35.000	17500	8750	56,46	56,40	56,52	621,04	620,23	621,86
280.000	5	35.000	17500	87500	56,54	56,48	56,59	621,75	620,94	622,56
367.500	5	35.000	17500	175000	56,49	56,44	56,55	621,97	621,17	622,77
542.500	5	35.000	17500	350000	56,50	56,44	56,55	621,70	620,92	622,48
150.000	2	75.000	0	0	49,53	49,48	49,58	509,11	508,42	509,79
165.000	2	75.000	15000	0	49,53	49,48	49,58	509,28	508,59	509,97
157.500	2	75.000	0	7500	49,53	49,48	49,58	508,94	508,30	509,58
172.500	2	75.000	15000	7500	49,55	49,50	49,60	509,26	508,55	509,96
240.000	2	75.000	15000	75000	49,57	49,52	49,62	509,48	508,77	510,19
315.000	2	75.000	15000	150000	49,51	49,46	49,57	509,08	508,38	509,79
465.000	2	75.000	15000	300000	49,60	49,55	49,65	509,93	509,24	510,63
200.000	2	25000;75000	0	0	58,03	57,97	58,09	646,09	645,21	646,96
210.000	2	25000;75000	10000	0	58,05	57,99	58,10	646,04	645,22	646,87
205.000	2	25000;75000	0	5000	58,02	57,96	58,07	645,92	645,13	646,71
215.000	2	25000;75000	10000	5000	58,01	57,95	58,07	645,72	644,92	646,52
260.000	2	25000;75000	10000	50000	58,06	58,00	58,12	646,66	645,81	647,52
310.000	2	25000;75000	10000	100000	58,03	57,97	58,08	646,19	645,41	646,98
410.000	2	25000;75000	10000	200000	58,04	57,98	58,09	646,11	645,29	646,94
500.000	5	$3 \times 10000; 2 \times 35000$	0	0	64,28	64,22	64,34	747,30	746,43	748,16
510.000	5	$3 \times 10000; 2 \times 35000$	10000	0	64,35	64,28	64,41	747,86	746,92	748,81
505.000	5	$3 \times 10000; 2 \times 35000$	0	5000	64,33	64,27	64,39	748,06	747,14	748,98
515.000	5	$3 \times 10000; 2 \times 35000$	10000	5000	64,33	64,26	64,39	747,87	746,90	748,83
560.000	5	$3 \times 10000; 2 \times 35000$	10000	50000	64,34	64,28	64,40	747,95	747,02	748,88
610.000	5	$3 \times 10000; 2 \times 35000$	10000	100000	64,34	64,28	64,40	747,81	746,88	748,73
710.000	5	$3 \times 10000; 2 \times 35000$	10000	200000	64,35	64,28	64,41	748,28	747,34	749,22

Tabela A.7: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 1.000 e 10.000 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>
2.100	1	1.000	100	1.000	24,84	24,77	24,92	31,09	30,97	31,21
4.200	2	1.000	200	2.000	73,74	73,66	73,82	900,48	899,28	901,69
6.300	3	1.000	300	3.000	75,07	74,98	75,15	921,95	920,61	923,29
8.400	4	1.000	400	4.000	75,72	75,64	75,80	932,42	931,21	933,63
10.500	5	1.000	500	5.000	76,24	76,16	76,32	940,58	939,34	941,83
21.000	10	1.000	1.000	10.000	76,94	76,86	77,02	951,73	950,48	952,97
31.500	15	1.000	1.500	15.000	77,17	77,09	77,24	955,52	954,39	956,66
42.000	20	1.000	2.000	20.000	77,20	77,12	77,28	956,01	954,79	957,23
21.000	1	10.000	1.000	10.000	23,74	23,69	23,79	29,68	29,62	29,73
42.000	2	10.000	2.000	20.000	61,07	61,02	61,13	695,25	694,41	696,09
63.000	3	10.000	3.000	30.000	62,41	62,35	62,47	717,43	716,50	718,36
84.000	4	10.000	4.000	40.000	63,21	63,15	63,27	729,80	728,83	730,77
105.000	5	10.000	5.000	50.000	63,50	63,44	63,56	734,91	734,01	735,81
210.000	10	10.000	10.000	100.000	64,32	64,26	64,38	748,10	747,22	748,97
315.000	15	10.000	15.000	150.000	64,51	64,45	64,58	750,96	749,99	751,94
420.000	20	10.000	20.000	200.000	64,61	64,55	64,68	752,83	751,92	753,74

Tabela A.8: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 500 a 2.000 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>
1.050	1	500	50	500	25,07	24,97	25,17	31,52	31,34	31,69
2.100	1	1.000	100	1.000	24,84	24,77	24,92	31,09	30,97	31,21
3.150	1	1.500	150	1.500	24,65	24,58	24,72	30,88	30,78	30,98
4.200	1	2.000	200	2.000	24,53	24,48	24,59	30,70	30,62	30,78
2.100	2	500	100	1.000	77,39	77,31	77,47	959,04	957,81	960,28
4.200	2	1.000	200	2.000	73,74	73,66	73,82	900,48	899,28	901,69
6.300	2	1.500	300	3.000	71,60	71,52	71,67	865,52	864,42	866,62
8.400	2	2.000	400	4.000	70,00	69,93	70,07	839,44	838,37	840,51
3.150	3	500	150	1.500	78,58	78,49	78,66	978,66	977,38	979,94
6.300	3	1.000	300	3.000	75,07	74,98	75,15	921,95	920,61	923,29
9.450	3	1.500	450	4.500	72,89	72,81	72,97	886,52	885,30	887,73
12.600	3	2.000	600	6.000	71,34	71,27	71,42	861,60	860,44	862,76
4.200	4	500	200	2.000	79,38	79,29	79,46	991,11	989,77	992,45
8.400	4	1.000	400	4.000	75,72	75,64	75,80	932,42	931,21	933,63
12.600	4	1.500	600	6.000	73,59	73,52	73,67	897,90	896,74	899,06
16.800	4	2.000	800	8.000	72,07	72,00	72,14	872,84	871,67	874,02
5.250	5	500	250	2.500	79,79	79,69	79,88	998,24	996,82	999,65
10.500	5	1.000	500	5.000	76,24	76,16	76,32	940,58	939,34	941,83
15.750	5	1.500	750	7.500	74,06	73,98	74,13	905,22	904,06	906,38
21.000	5	2.000	1.000	10.000	72,45	72,37	72,52	879,36	878,21	880,51
6.300	6	500	300	3.000	79,95	79,86	80,03	1.000,88	999,58	1.002,18
12.600	6	1.000	600	6.000	76,41	76,34	76,49	943,23	942,08	944,39
18.900	6	1.500	900	9.000	74,19	74,11	74,27	907,69	906,49	908,88
25.200	6	2.000	1.200	12.000	72,73	72,65	72,80	884,10	882,94	885,27
10.500	10	500	500	5.000	80,50	80,41	80,59	1.009,39	1.008,00	1.010,78
21.000	10	1.000	1.000	10.000	76,94	76,86	77,02	951,73	950,48	952,97
31.500	10	1.500	1.500	15.000	74,74	74,66	74,82	916,26	915,07	917,46
42.000	10	2.000	2.000	20.000	73,18	73,11	73,25	891,13	890,04	892,22

Tabela A.9: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 5.000 a 20.000 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>
10.500	1	5.000	500	5.000	24,14	24,10	24,19	30,16	30,09	30,23
21.000	1	10.000	1.000	10.000	23,74	23,69	23,79	29,68	29,62	29,73
31.500	1	15.000	1.500	15.000	23,54	23,49	23,58	29,42	29,37	29,47
42.000	1	20.000	2.000	20.000	23,44	23,39	23,48	29,27	29,23	29,32
21.000	2	5.000	1.000	10.000	64,96	64,89	65,02	758,05	757,12	758,99
42.000	2	10.000	2.000	20.000	61,07	61,02	61,13	695,25	694,41	696,09
63.000	2	15.000	3.000	30.000	58,77	58,71	58,83	658,15	657,31	658,99
84.000	2	20.000	4.000	40.000	57,14	57,08	57,19	631,46	630,65	632,28
31.500	3	5.000	1.500	15.000	66,37	66,30	66,44	781,04	780,00	782,08
63.000	3	10.000	3.000	30.000	62,41	62,35	62,47	717,43	716,50	718,36
94.500	3	15.000	4.500	45.000	60,14	60,08	60,20	680,06	679,19	680,93
126.000	3	20.000	6.000	60.000	58,50	58,44	58,56	653,70	652,86	654,54
42.000	4	5.000	2.000	20.000	67,07	67,00	67,13	792,30	791,36	793,25
84.000	4	10.000	4.000	40.000	63,21	63,15	63,27	729,80	728,83	730,77
126.000	4	15.000	6.000	60.000	60,92	60,86	60,98	692,56	691,69	693,43
168.000	4	20.000	8.000	80.000	59,30	59,24	59,36	666,66	665,80	667,52
52.500	5	5.000	2.500	25.000	67,43	67,36	67,50	798,06	797,01	799,10
105.000	5	10.000	5.000	50.000	63,50	63,44	63,56	734,91	734,01	735,81
157.500	5	15.000	7.500	75.000	61,32	61,27	61,38	699,32	698,50	700,14
210.000	5	20.000	10.000	100.000	59,67	59,61	59,73	672,56	671,68	673,44
63.000	6	5.000	3.000	30.000	67,71	67,64	67,78	802,60	801,59	803,61
126.000	6	10.000	6.000	60.000	63,82	63,76	63,89	739,71	738,80	740,62
189.000	6	15.000	9.000	90.000	61,60	61,54	61,66	703,84	702,95	704,72
252.000	6	20.000	12.000	120.000	59,93	59,87	59,99	676,79	675,88	677,70
105.000	10	5.000	5.000	50.000	68,20	68,13	68,27	810,50	809,44	811,57
210.000	10	10.000	10.000	100.000	64,32	64,26	64,38	748,10	747,22	748,97
315.000	10	15.000	15.000	150.000	62,02	61,96	62,08	710,96	710,07	711,85
420.000	10	20.000	20.000	200.000	60,39	60,33	60,45	684,65	683,78	685,52

Tabela A.10: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para um total de 500, 5.000 e 50.000 páginas nos conjuntos fechados.

TP	QGF	$TPGF$	$TPGL$	TNP	NI com $\alpha=0,85$	Limite Inferior	Limite Superior	NI com $\alpha=0,99$	Limite Inferior	Limite Superior
1.050	1	500	50	500	25,07	24,97	25,17	31,52	31,34	31,69
1.050	2	250	50	500	80,91	80,83	81,00	1.016,40	1.015,05	1.017,75
1.050	5	100	50	500	87,51	87,42	87,61	1.123,20	1.121,71	1.124,69
1.054	8	63	50	504	89,85	89,76	89,95	1.161,05	1.159,52	1.162,58
1.050	10	50	50	500	90,94	90,86	91,03	1.178,54	1.177,18	1.179,90
1.050	20	25	50	500	93,27	93,20	93,34	1.215,89	1.214,87	1.216,91
1.050	50	10	50	500	94,25	94,18	94,32	1.231,72	1.230,74	1.232,70
10.500	1	5.000	500	5.000	24,16	24,12	24,20	30,13	30,07	30,19
10.500	2	2.500	500	5.000	68,79	68,72	68,87	820,08	819,01	821,15
10.500	5	1.000	500	5.000	76,24	76,16	76,32	940,58	939,34	941,83
10.500	8	625	500	5.000	79,22	79,13	79,31	988,81	987,44	990,19
10.500	10	500	500	5.000	80,49	80,40	80,57	1.009,35	1.008,04	1.010,66
10.500	20	250	500	5.000	84,38	84,29	84,47	1.072,09	1.070,71	1.073,46
10.500	50	100	500	5.000	88,64	88,55	88,73	1.141,16	1.139,72	1.142,61
10.580	80	63	500	5.040	90,67	90,57	90,76	1.174,02	1.172,51	1.175,53
10.500	100	50	500	5.000	91,58	91,49	91,67	1.188,65	1.187,27	1.190,04
105.000	1	50.000	5.000	50.000	22,96	22,93	23,00	28,60	28,55	28,65
105.000	2	25.000	5.000	50.000	55,85	55,79	55,90	610,93	610,16	611,69
105.000	5	10.000	5.000	50.000	63,50	63,44	63,56	734,91	734,01	735,81
105.000	8	6.250	5.000	50.000	66,72	66,65	66,78	787,15	786,17	788,12
105.000	10	5.000	5.000	50.000	68,20	68,13	68,27	810,50	809,44	811,57
105.000	20	2.500	5.000	50.000	72,29	72,21	72,36	876,43	875,35	877,52
105.000	50	1.000	5.000	50.000	77,43	77,34	77,51	959,70	958,47	960,94
105.000	80	625	5.000	50.000	79,91	79,83	80,00	999,87	998,60	1.001,15
105.000	100	500	5.000	50.000	81,00	80,92	81,08	1.017,86	1.016,53	1.019,20

Tabela A.11: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de 50 e 500 páginas e 450 e 500 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>Limite Inferior</i>	<i>Limite Superior</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>Limite Inferior</i>	<i>Limite Superior</i>
1.155	2	1×50;1×500	55	550	91,04	90,95	91,13	1.179,89	1.178,49	1.181,29
1.995	2	1×450;1×500	95	950	78,14	78,06	78,22	971,22	969,95	972,49
2.205	3	1×50;2×500	105	1.050	91,36	91,27	91,45	1.185,29	1.183,87	1.186,70
3.045	3	1×450;2×500	145	1.450	79,42	79,33	79,51	992,47	991,09	993,86
1.260	3	2×50;1×500	60	600	91,07	90,98	91,15	1.180,12	1.178,77	1.181,47
2.940	3	2×450;1×500	140	1.400	79,30	79,21	79,39	990,40	988,99	991,81
2.310	4	2×50;2×500	110	1.100	91,44	91,35	91,53	1.186,27	1.184,95	1.187,58
3.990	4	2×450;2×500	190	1.900	80,02	79,92	80,11	1.001,45	1.000,01	1.002,89
4.305	5	1×50;4×500	205	2.050	91,48	91,39	91,57	1.187,23	1.185,88	1.188,59
5.145	5	1×450;4×500	245	2.450	80,39	80,30	80,48	1.008,16	1.006,81	1.009,50
1.470	5	4×50;1×500	70	700	91,24	91,15	91,32	1.183,12	1.181,76	1.184,48
4.830	5	4×450;1×500	230	2.300	80,39	80,30	80,48	1.008,02	1.006,57	1.009,47
4.620	8	4×50;4×500	220	2.200	91,40	91,30	91,49	1.185,91	1.184,46	1.187,35
7.980	8	4×450;4×500	380	3.800	80,89	80,81	80,98	1.015,60	1.014,27	1.016,92
8.505	9	1×50;8×500	405	4.050	91,56	91,47	91,65	1.188,42	1.187,02	1.189,83
9.345	9	1×450;8×500	445	4.450	81,05	80,97	81,14	1.018,37	1.017,05	1.019,69
6.615	9	3×50;6×500	315	3.150	91,54	91,46	91,63	1.188,21	1.186,85	1.189,57
9.135	9	3×450;6×500	435	4.350	81,04	80,95	81,13	1.018,36	1.016,99	1.019,73
1.890	9	8×50;1×500	90	900	91,24	91,15	91,33	1.182,90	1.181,52	1.184,28
8.610	9	8×450;1×500	410	4.100	81,06	80,96	81,15	1.018,57	1.017,17	1.019,98
3.780	9	6×50;3×500	180	1.800	91,34	91,25	91,43	1.185,11	1.183,78	1.186,44
8.820	9	6×450;3×500	420	4.200	81,01	80,92	81,09	1.017,31	1.015,95	1.018,68
8.085	14	7×50;7×500	385	3.850	91,64	91,55	91,74	1.189,69	1.188,26	1.191,11
13.965	14	7×450;7×500	665	6.650	81,24	81,16	81,33	1.021,46	1.020,09	1.022,82
11.550	20	10×50;10×500	550	5.500	91,63	91,54	91,72	1.189,29	1.187,92	1.190,67
19.950	20	10×450;10×500	950	9.500	81,36	81,27	81,45	1.023,54	1.022,18	1.024,89

Tabela A.12: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de 500 e 5.000 páginas e 4.500 e 5.000 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>
11.550	2	1×500;1×5000	550	5.500	80,59	80,50	80,67	1.010,74	1.009,38	1.012,10
19.950	2	1×4500;1×5000	950	9.500	65,60	65,54	65,66	768,60	767,68	769,53
22.050	3	1×500;2×5000	1.050	10.500	80,83	80,75	80,92	1.014,67	1.013,37	1.015,97
30.450	3	1×4500;2×5000	1.450	14.500	67,14	67,07	67,21	793,15	792,14	794,17
12.600	3	2×500;1×5000	600	6.000	80,68	80,59	80,77	1.012,28	1.010,83	1.013,72
29.400	3	2×4500;1×5000	1.400	14.000	67,02	66,96	67,09	791,58	790,58	792,58
23.100	4	2×500;2×5000	1.100	11.000	80,86	80,77	80,95	1.015,23	1.013,84	1.016,62
39.900	4	2×4500;2×5000	1.900	19.000	67,65	67,59	67,72	801,64	800,65	802,63
43.050	5	1×500;4×5000	2.050	20.500	81,04	80,95	81,13	1.018,02	1.016,70	1.019,33
51.450	5	1×4500;4×5000	2.450	24.500	68,15	68,08	68,21	809,69	808,72	810,65
14.700	5	4×500;1×5000	700	7.000	80,67	80,59	80,76	1.012,52	1.011,23	1.013,82
48.300	5	4×4500;1×5000	2.300	23.000	68,09	68,02	68,16	808,91	807,84	809,97
46.200	8	4×500;4×5000	2.200	22.000	81,04	80,96	81,12	1.018,12	1.016,80	1.019,44
79.800	8	4×4500;4×5000	3.800	38.000	68,60	68,53	68,67	817,16	816,18	818,14
85.050	9	1×500;8×5000	4.050	40.500	81,14	81,05	81,23	1.019,49	1.018,08	1.020,90
93.450	9	1×4500;8×5000	4.450	44.500	68,74	68,67	68,81	819,10	818,05	820,16
66.150	9	3×500;6×5000	3.150	31.500	80,99	80,91	81,08	1.017,65	1.016,35	1.018,95
91.350	9	3×4500;6×5000	4.350	43.500	68,66	68,59	68,73	817,89	816,89	818,89
18.900	9	8×500;1×5000	900	9.000	80,81	80,72	80,90	1.014,50	1.013,16	1.015,84
86.100	9	8×4500;1×5000	4.100	41.000	68,70	68,63	68,76	818,56	817,54	819,58
37.800	9	6×500;3×5000	1.800	18.000	81,00	80,91	81,09	1.017,45	1.016,07	1.018,83
88.200	9	6×4500;3×5000	4.200	42.000	68,69	68,62	68,76	818,65	817,64	819,65
80.850	14	7×500;7×5000	3.850	38.500	81,08	80,99	81,16	1.018,49	1.017,15	1.019,82
139.650	14	7×4500;7×5000	6.650	66.500	68,97	68,90	69,04	823,32	822,27	824,36
115.500	20	10×500;10×5000	5.500	55.000	81,16	81,07	81,25	1.020,18	1.018,75	1.021,61
199.500	20	100×4500;100×5000	9.500	95.000	69,07	69,00	69,14	824,75	823,71	825,78

Tabela A.13: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$ e seus respectivos intervalos de confiança, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de diversos tamanhos.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>Limite</i> <i>Inferior</i>	<i>Limite</i> <i>Superior</i>
1050	1	500	50	500	25,02	24,91	25,13	31,43	31,25	31,61
1050	2	20;480	50	500	93,66	93,59	93,72	1.222,73	1.221,76	1.223,60
1050	2	200;300	50	500	82,56	82,48	82,65	1.042,62	1.041,23	1.044,00
1050	2	250	50	500	80,93	80,85	81,01	1.016,73	1.015,46	1.017,99
1050	3	10;190;300	50	500	94,30	94,23	94,37	1.232,36	1.231,36	1.233,36
1050	3	2×10 ;480	50	500	94,25	94,18	94,32	1.231,61	1.230,65	1.232,50
1050	4	20;2×120;240	50	500	93,71	93,65	93,78	1.223,10	1.222,10	1.224,10
1050	4	3×100 ;200	50	500	87,50	87,41	87,60	1.122,61	1.121,14	1.124,00
1050	4	20;100;180;200	50	500	93,61	93,54	93,68	1.221,79	1.220,75	1.222,80
1050	5	20;4×120	50	500	93,73	93,66	93,79	1.223,30	1.222,28	1.224,30
1050	7	5×10;150;300	50	500	94,28	94,21	94,35	1.232,26	1.231,22	1.233,26
10500	1	5000	500	5000	24,16	24,11	24,21	30,19	30,12	30,25
10500	2	200;4800	500	5000	85,37	85,27	85,47	1.088,63	1.087,11	1.090,11
10500	2	2000;3000	500	5000	70,65	70,58	70,73	850,35	849,16	851,50
10500	2	2.500	500	5000	68,76	68,69	68,83	819,74	818,71	820,75
10500	3	100;1900;3000	500	5000	88,74	88,65	88,83	1.142,52	1.141,09	1.143,99
10500	3	2×100 ;4800	500	5000	88,72	88,62	88,82	1.142,67	1.141,14	1.144,14
10500	4	200;2×1200;2400	500	5000	85,47	85,37	85,56	1.089,68	1.088,24	1.091,11
10500	4	3×1000 ;2000	500	5000	76,16	76,08	76,24	939,40	938,16	940,60
10500	4	200;1000;1800;2000	500	5000	85,52	85,42	85,61	1.090,36	1.088,81	1.091,99
10500	5	4×50;4800	500	5000	91,55	91,47	91,64	1.188,23	1.186,90	1.189,50
10500	5	200;4×1200	500	5000	85,45	85,35	85,55	1.089,51	1.088,01	1.091,01
10500	7	5×100;1500;3000	500	5000	88,77	88,67	88,87	1.142,90	1.141,39	1.144,40
105000	1	50000	5000	50000	23,00	22,97	23,04	28,63	28,58	28,67
105000	2	2000;48000	5000	50000	73,53	73,46	73,60	896,57	895,49	897,60
105000	2	20000;30000	5000	50000	57,96	57,90	58,02	645,03	644,10	645,90
105000	2	25.000	5000	50000	55,85	55,79	55,90	610,93	610,16	611,60
105000	3	1000;19000;30000	5000	50000	77,50	77,41	77,58	960,63	959,29	961,90
105000	3	2×1000 ;48000	5000	50000	77,46	77,38	77,54	960,53	959,29	961,75
105000	4	2000;2×12000;24000	5000	50000	73,60	73,52	73,67	898,01	896,85	899,11
105000	4	3×10000 ;20000	5000	50000	63,59	63,53	63,65	735,81	734,88	736,75
105000	4	2000;10000;18000;20000	5000	50000	73,65	73,58	73,73	898,67	897,53	899,80
105000	5	4×500;48000	5000	50000	81,16	81,07	81,25	1.020,13	1.018,74	1.021,50
105000	5	2000;4×12000	5000	50000	73,57	73,50	73,64	897,00	895,90	898,10
105000	7	5×1000;15000;30000	5000	50000	77,38	77,29	77,46	959,12	957,81	960,40

Apêndice B

Comparação entre $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$

Tabela B.1: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 1.000 páginas nos conjuntos fechados.

TP	QGF	TPGF	TPGL	TNP	NI com	NI com	NPD	MedD	MaxD
					$\alpha=0,85$	$\alpha=0,99$			
1.000	1	1.000	0	0	24,86	31,17	958,25	16,35	480,04
1.100	1	1.000	100	0	24,84	31,15	955,77	14,27	474,87
1.050	1	1.000	0	50	24,76	31,03	956,56	15,50	479,78
1.150	1	1.000	100	50	24,77	31,08	972,62	14,12	480,99
1.600	1	1.000	100	500	24,81	31,11	988,10	10,40	485,42
2.100	1	1.000	100	1.000	24,84	31,09	987,66	8,00	488,17
3.100	1	1.000	100	2.000	25,07	31,06	988,27	5,38	481,17
1.000	2	500	0	0	77,44	959,90	957,62	16,26	481,05
1.100	2	500	100	0	77,36	959,02	957,33	14,35	476,07
1.050	2	500	0	50	77,36	958,93	957,30	15,47	475,82
1.150	2	500	100	50	77,37	959,10	972,06	14,10	478,73
1.600	2	500	100	500	77,39	959,12	987,44	10,45	479,26
2.100	2	500	100	1.000	77,39	959,04	987,35	7,90	483,56
3.100	2	500	100	2.000	77,43	960,19	989,07	5,42	483,67
1.000	5	200	0	0	84,29	1.071,15	959,58	17,26	488,50
1.100	5	200	100	0	84,41	1.072,19	958,80	15,31	481,20
1.050	5	200	0	50	84,33	1.071,63	959,76	16,49	482,04
1.150	5	200	100	50	84,39	1.072,25	974,69	14,99	483,66
1.600	5	200	100	500	84,36	1.071,81	990,01	11,13	495,20
2.100	5	200	100	1.000	84,38	1.071,91	990,22	8,42	496,79
3.100	5	200	100	2.000	84,32	1.071,40	990,57	5,73	493,01
1.000	10	100	0	0	88,13	1.132,88	965,01	20,83	504,67
1.100	10	100	100	0	88,17	1.133,77	964,80	18,55	499,21
1.050	10	100	0	50	88,17	1.133,51	965,77	20,12	502,71
1.150	10	100	100	50	88,23	1.134,70	978,66	18,34	506,76
1.600	10	100	100	500	88,13	1.133,24	993,28	13,32	510,46
2.100	10	100	100	1.000	88,17	1.133,55	994,49	10,29	511,62
3.100	10	100	100	2.000	88,15	1.133,22	994,88	6,88	509,45
1.000	50	20	0	0	93,82	1.224,62	975,36	51,64	385,01
1.100	50	20	100	0	93,80	1.224,90	975,98	46,76	382,46
1.050	50	20	0	50	93,82	1.224,74	975,12	49,11	385,68
1.150	50	20	100	50	93,82	1.224,91	986,26	46,17	389,68
1.600	50	20	100	500	93,83	1.224,91	995,27	33,34	393,66
2.100	50	20	100	1.000	93,77	1.224,22	995,95	25,42	393,59
3.100	50	20	100	2.000	93,84	1.225,35	996,48	17,24	394,11

Tabela B.2: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 10.000 páginas nos conjuntos fechados.

TP	QGF	TPGF	TPGL	TNP	NI com	NI com	NPD	MedD	MaxD
					$\alpha=0,85$	$\alpha=0,99$			
10.000	1	10.000	0	0	23,81	29,73	9.944,96	161,28	5.693,60
11.000	1	10.000	1.000	0	23,79	29,71	9.942,89	140,88	5.661,49
10.500	1	10.000	0	500	23,80	29,68	9.945,22	152,64	5.682,97
11.500	1	10.000	1.000	500	23,80	29,66	10.053,41	138,60	5.730,55
16.000	1	10.000	1.000	5.000	23,81	29,70	10.146,94	102,15	5.769,71
21.000	1	10.000	1.000	10.000	23,74	29,68	10.154,91	78,34	5.782,42
31.000	1	10.000	1.000	20.000	23,82	29,72	10.158,12	53,04	5.791,22
10.000	2	5.000	0	0	64,91	757,23	9.945,86	160,85	5.694,35
11.000	2	5.000	1.000	0	64,98	757,95	9.944,27	141,03	5.667,54
10.500	2	5.000	0	500	64,96	758,38	9.946,36	153,55	5.694,32
11.500	2	5.000	1.000	500	64,96	758,34	10.053,06	138,73	5.719,91
16.000	2	5.000	1.000	5.000	64,90	757,28	10.149,08	101,78	5.787,62
21.000	2	5.000	1.000	10.000	64,96	758,05	10.155,92	78,40	5.792,53
31.000	2	5.000	1.000	20.000	64,96	758,24	10.158,72	52,94	5.785,00
10.000	5	2.000	0	0	72,43	879,45	9.944,71	161,32	5.695,80
11.000	5	2.000	1.000	0	72,45	879,40	9.944,71	140,76	5.656,89
10.500	5	2.000	0	500	72,50	880,14	9.945,30	152,88	5.683,67
11.500	5	2.000	1.000	500	72,47	879,74	10.054,01	138,80	5.731,50
16.000	5	2.000	1.000	5.000	72,48	879,65	10.147,95	102,58	5.776,58
21.000	5	2.000	1.000	10.000	72,45	879,36	10.154,73	77,98	5.781,55
31.000	5	2.000	1.000	20.000	72,47	879,64	10.158,46	53,00	5.779,22
10.000	10	1.000	0	0	76,90	951,36	9.944,53	160,72	5.686,90
11.000	10	1.000	1.000	0	76,85	950,68	9.943,78	140,63	5.659,48
10.500	10	1.000	0	500	76,84	950,09	9.945,90	153,77	5.688,29
11.500	10	1.000	1.000	500	76,87	950,80	10.053,70	139,44	5.734,11
16.000	10	1.000	1.000	5.000	76,82	950,06	10.148,74	102,74	5.769,61
21.000	10	1.000	1.000	10.000	76,94	951,73	10.154,12	78,46	5.772,22
31.000	10	1.000	1.000	20.000	76,95	951,99	10.158,05	52,93	5.774,74
10.000	50	200	0	0	85,55	1.091,35	9.950,46	172,25	5.661,89
11.000	50	200	1.000	0	85,60	1.092,06	9.949,76	152,21	5.652,80
10.500	50	200	0	500	85,56	1.091,23	9.950,15	164,31	5.673,37
11.500	50	200	1.000	500	85,52	1.090,54	10.054,78	149,56	5.708,53
16.000	50	200	1.000	5.000	85,54	1.091,00	10.150,18	110,10	5.773,30
21.000	50	200	1.000	10.000	85,60	1.092,02	10.157,26	83,52	5.763,02
31.000	50	200	1.000	20.000	85,53	1.090,87	10.160,37	56,95	5.762,59

Tabela B.3: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para um total de 100.000 páginas nos conjuntos fechados.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>NPD</i>	<i>MedD</i>	<i>MaxD</i>
100.000	1	100.000	0	0	22,54	28,16	99.934,26	1.607,94	58.992,56
110.000	1	100.000	10.000	0	22,52	28,14	99.932,24	1.406,57	58.820,88
105.000	1	100.000	0	5.000	22,49	28,14	99.932,37	1.532,50	59.027,85
115.000	1	100.000	10.000	5.000	22,54	28,18	100.919,39	1.386,93	59.329,56
160.000	1	100.000	10.000	50.000	22,52	28,16	101.802,46	1.020,49	59.967,60
210.000	1	100.000	10.000	100.000	22,55	28,16	101.872,44	780,76	59.913,79
310.000	1	100.000	10.000	200.000	22,50	28,15	101.906,25	530,21	60.018,32
100.000	2	50.000	0	0	51,89	546,62	99.933,62	1.610,38	58.979,33
110.000	2	50.000	10.000	0	51,92	547,17	99.932,29	1.405,89	58.850,23
105.000	2	50.000	0	5.000	51,89	546,82	99.932,31	1.533,16	58.985,55
115.000	2	50.000	10.000	5.000	51,92	547,25	100.920,10	1.387,36	59.310,04
160.000	2	50.000	10.000	50.000	51,94	547,03	101.802,02	1.020,98	59.990,11
210.000	2	50.000	10.000	100.000	51,92	547,06	101.868,20	779,70	59.964,12
310.000	2	50.000	10.000	200.000	51,90	547,01	101.907,27	529,80	59.922,32
100.000	5	20.000	0	0	59,73	673,75	99.931,84	1.606,24	59.003,72
110.000	5	20.000	10.000	0	59,68	673,28	99.931,25	1.406,60	58.859,38
105.000	5	20.000	0	5.000	59,68	672,80	99.933,10	1.532,58	58.998,52
115.000	5	20.000	10.000	5.000	59,67	672,60	100.918,62	1.387,60	59.398,06
160.000	5	20.000	10.000	50.000	59,63	672,11	101.801,58	1.020,93	60.000,98
210.000	5	20.000	10.000	100.000	59,67	672,56	101.870,84	780,51	59.896,49
310.000	5	20.000	10.000	200.000	59,67	672,53	101.904,39	529,89	59.995,64
100.000	10	10.000	0	0	64,30	747,59	99.932,89	1.610,23	59.035,10
110.000	10	10.000	10.000	0	64,32	747,53	99.931,99	1.407,53	58.788,41
105.000	10	10.000	0	5.000	64,25	747,02	99.933,44	1.531,10	59.012,24
115.000	10	10.000	10.000	5.000	64,36	748,04	100.920,47	1.385,22	59.360,08
160.000	10	10.000	10.000	50.000	64,38	748,77	101.797,47	1.020,92	59.985,20
210.000	10	10.000	10.000	100.000	64,32	748,10	101.871,98	780,22	59.944,88
310.000	10	10.000	10.000	200.000	64,23	746,76	101.904,63	529,78	59.971,46
100.000	50	2.000	0	0	73,69	899,10	99.932,02	1.612,07	58.971,20
110.000	50	2.000	10.000	0	73,74	900,05	99.930,28	1.407,28	58.780,48
105.000	50	2.000	0	5.000	73,71	899,91	99.932,94	1.531,88	58.977,45
115.000	50	2.000	10.000	5.000	73,68	899,30	100.920,85	1.388,28	59.380,82
160.000	50	2.000	10.000	50.000	73,71	899,47	101.803,62	1.020,48	60.014,74
210.000	50	2.000	10.000	100.000	73,74	900,11	101.870,33	780,14	59.961,21
310.000	50	2.000	10.000	200.000	73,70	899,29	101.900,82	529,09	59.934,74

Tabela B.4: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, para grupos fechados com até 750 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>NPD</i>	<i>MedD</i>	<i>MaxD</i>
500	5	100	0	0	87,51	1.123,09	466,55	10,44	234,65
550	5	100	50	0	87,48	1.122,08	466,47	9,50	232,26
525	5	100	0	25	87,50	1.122,63	466,83	9,90	232,54
575	5	100	50	25	87,61	1.124,46	474,18	9,25	236,20
800	5	100	50	250	87,43	1.121,43	482,67	6,80	236,83
1.050	5	100	50	500	87,51	1.123,20	482,63	5,11	233,04
1.550	5	100	50	1000	87,51	1.122,89	482,90	3,45	232,68
500	2	250	0	0	80,87	1.015,60	462,34	8,51	217,86
550	2	250	50	0	80,91	1.016,40	460,87	7,44	213,39
525	2	250	0	25	80,90	1.016,05	461,42	7,99	218,42
575	2	250	50	25	80,97	1.017,15	469,69	7,47	220,31
800	2	250	50	250	81,00	1.017,34	477,38	5,38	218,84
1.050	2	250	50	500	80,91	1.016,40	477,09	4,07	213,80
1.550	2	250	50	1000	81,01	1.017,49	477,85	2,78	216,64
1.750	5	350	0	0	81,66	1.027,72	1.705,06	28,90	900,01
1.925	5	350	175	0	81,53	1.026,38	1.704,27	25,32	890,58
1.838	5	350	0	88	81,57	1.026,53	1.705,00	27,63	899,52
2.013	5	350	175	88	81,55	1.026,65	1.730,21	24,94	898,41
2.800	5	350	175	875	81,59	1.027,16	1.752,89	18,35	919,10
3.675	5	350	175	1750	81,54	1.026,30	1.753,66	13,93	907,55
5.425	5	350	175	3500	81,53	1.026,11	1.755,17	9,60	919,72
1.500	2	750	0	0	75,30	925,48	1.455,78	24,27	761,66
1.650	2	750	150	0	75,28	925,12	1.454,40	21,37	746,55
1.575	2	750	0	75	75,32	925,68	1.454,42	22,84	748,74
1.725	2	750	150	75	75,26	925,00	1.477,78	20,68	752,73
2.400	2	750	150	750	75,29	925,50	1.498,58	15,46	767,07
3.150	2	750	150	1500	75,28	925,06	1.499,12	11,82	764,33
4.650	2	750	150	3000	75,31	925,48	1.499,45	8,04	775,44
2.000	2	250;750	0	0	82,86	1.047,44	958,28	16,37	480,32
2.100	2	250;750	100	0	82,93	1.048,75	956,39	14,30	473,98
2.050	2	250;750	0	50	82,78	1.046,91	956,63	15,64	478,86
2.150	2	250;750	100	50	82,90	1.048,53	973,28	14,17	478,55
2.600	2	250;750	100	500	82,85	1.047,53	987,84	10,52	484,24
3.100	2	250;750	100	1000	82,79	1.046,66	988,24	7,94	484,03
4.100	2	250;750	100	2000	82,89	1.047,91	989,03	5,41	487,98
5.000	5	3×100;2×350	0	0	88,14	1.133,36	961,31	17,76	492,76
5.100	5	3×100;2×350	100	0	88,19	1.133,87	959,45	15,75	492,06
5.050	5	3×100;2×350	0	50	88,20	1.133,84	961,36	16,93	489,17
5.150	5	3×100;2×350	100	50	88,23	1.134,47	976,18	15,56	488,35
5.600	5	3×100;2×350	100	500	88,21	1.134,04	990,65	11,41	497,81
6.100	5	3×100;2×350	100	1000	88,24	1.134,50	991,81	8,77	500,90
7.100	5	3×100;2×350	100	2000	88,21	1.134,35	991,58	5,92	499,59

Tabela B.5: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, , para grupos fechados com até 7.500 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>NPD</i>	<i>MedD</i>	<i>MaxD</i>
5.000	5	1.000	0	0	76,18	939,62	4.948,40	80,69	2.781,66
5.500	5	1.000	500	0	76,17	939,65	4.947,63	70,39	2.755,26
5.250	5	1.000	0	250	76,11	938,71	4.948,84	76,73	2.776,33
5.750	5	1.000	500	250	76,25	940,36	5.009,78	69,72	2.784,28
8.000	5	1.000	500	2.500	76,11	938,49	5.060,46	51,15	2.814,57
10.500	5	1.000	500	5.000	76,24	940,58	5.063,88	39,21	2.822,97
15.500	5	1.000	500	10.000	76,21	940,01	5.066,07	26,61	2.821,51
5.000	2	2.500	0	0	68,79	819,89	4.947,78	80,55	2.778,33
5.500	2	2.500	500	0	68,78	819,77	4.946,77	70,61	2.760,13
5.250	2	2.500	0	250	68,82	820,51	4.948,26	76,49	2.766,46
5.750	2	2.500	500	250	68,78	819,83	5.009,73	69,51	2.792,30
8.000	2	2.500	500	2.500	68,81	820,47	5.060,29	50,81	2.831,55
10.500	2	2.500	500	5.000	68,83	820,98	5.064,61	39,02	2.818,56
15.500	2	2.500	500	10.000	68,81	820,39	5.065,36	26,53	2.827,12
17.500	5	3.500	0	0	69,41	830,18	17.442,09	281,24	10.067,94
19.250	5	3.500	1.750	0	69,42	830,21	17.439,70	246,02	10.035,65
18.375	5	3.500	0	875	69,45	830,68	17.441,49	267,88	10.056,75
20.125	5	3.500	1.750	875	69,35	829,15	17.622,41	242,19	10.131,10
28.000	5	3.500	1.750	8.750	69,36	829,30	17.783,76	178,71	10.232,23
36.750	5	3.500	1.750	17.500	69,37	829,41	17.795,01	136,37	10.231,65
54.250	5	3.500	1.750	35.000	69,14	825,84	18.860,92	98,53	10.861,53
15.000	2	7.500	0	0	62,64	720,91	14.942,77	241,72	8.603,33
16.500	2	7.500	1.500	0	62,64	720,94	14.939,48	210,38	8.575,21
15.750	2	7.500	0	750	62,67	721,30	14.943,19	230,05	8.606,78
17.250	2	7.500	1.500	750	62,69	721,28	15.098,76	208,11	8.657,14
24.000	2	7.500	1.500	7.500	62,65	720,93	15.236,79	153,26	8.752,39
31.500	2	7.500	1.500	15.000	62,64	720,93	15.247,55	116,85	8.760,36
46.500	2	7.500	1.500	30.000	62,67	721,30	15.253,57	79,56	8.752,44
20.000	2	2.500;7.500	0	0	70,88	854,20	9.944,62	160,80	5.691,33
21.000	2	2.500;7.500	1.000	0	70,80	852,79	9.943,49	141,18	5.663,36
20.500	2	2.500;7.500	0	500	70,85	853,31	9.944,84	152,95	5.687,03
21.500	2	2.500;7.500	1.000	500	70,84	853,42	10.054,25	138,95	5.725,06
26.000	2	2.500;7.500	1.000	5.000	70,86	853,88	10.148,85	102,50	5.770,10
31.000	2	2.500;7.500	1.000	10.000	70,83	853,25	10.156,33	78,10	5.779,92
41.000	2	2.500;7.500	1.000	20.000	70,85	853,32	10.158,64	52,88	5.786,28
50.000	5	$3 \times 1.000; 2 \times 3.500$	0	0	76,88	950,84	9.945,23	161,44	5.685,86
51.000	5	$3 \times 1.000; 2 \times 3.500$	1.000	0	76,81	950,15	9.942,69	141,05	5.670,84
50.500	5	$3 \times 1.000; 2 \times 3.500$	0	500	76,88	951,57	9.944,18	152,79	5.689,59
51.500	5	$3 \times 1.000; 2 \times 3.500$	1.000	500	76,97	951,73	10.053,44	138,80	5.739,68
56.000	5	$3 \times 1.000; 2 \times 3.500$	1.000	5.000	76,90	951,22	10.148,80	102,28	5.775,03
61.000	5	$3 \times 1.000; 2 \times 3.500$	1.000	10.000	76,85	950,44	10.153,74	78,39	5.783,92
71.000	5	$3 \times 1.000; 2 \times 3.500$	1.000	20.000	76,90	951,31	10.157,98	52,98	5.769,98

Tabela B.6: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, a existência do Grupo de Ligação e o número de Nós Pendentes, , para grupos fechados com até 75.000 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>NPD</i>	<i>MedD</i>	<i>MaxD</i>
50.000	5	10.000	0	0	63,62	736,35	49.935,43	804,67	29.239,04
55.000	5	10.000	5000	0	63,60	736,08	49.934,26	704,39	29.125,52
52.500	5	10.000	0	2500	63,59	736,00	49.937,55	767,05	29.220,75
57.500	5	10.000	5000	2500	63,55	735,57	50.431,99	693,55	29.400,99
80.000	5	10.000	5000	25000	63,56	735,53	50.876,22	509,92	29.708,88
105.000	5	10.000	5000	50000	63,50	734,91	50.911,21	389,69	29.683,60
155.000	5	10.000	5000	100000	63,53	735,40	50.927,55	264,50	29.680,78
50.000	2	25.000	0	0	55,83	610,81	49.935,75	805,00	29.227,10
55.000	2	25.000	5000	0	55,87	611,22	49.935,05	703,04	29.103,22
52.500	2	25.000	0	2500	55,83	610,99	49.936,53	766,01	29.215,36
57.500	2	25.000	5000	2500	55,89	612,06	50.431,29	694,06	29.384,95
80.000	2	25.000	5000	25000	55,86	610,61	50.876,99	510,57	29.725,46
105.000	2	25.000	5000	50000	55,85	610,70	50.910,07	390,28	29.709,57
155.000	2	25.000	5000	100000	55,88	611,46	50.928,19	264,41	29.694,26
175.000	5	35.000	0	0	56,52	621,67	174.930,11	2.817,37	103.835,98
192.500	5	35.000	17500	0	56,49	621,13	174.928,58	2.462,08	103.595,33
183.750	5	35.000	0	8750	56,46	620,95	174.927,66	2.682,83	103.862,89
201.250	5	35.000	17500	8750	56,46	621,04	176.657,47	2.426,61	104.541,75
280.000	5	35.000	17500	87500	56,54	621,75	178.189,85	1.787,37	105.582,57
367.500	5	35.000	17500	175000	56,49	621,97	178.319,56	1.366,88	105.599,01
542.500	5	35.000	17500	350000	56,50	621,70	178.379,01	926,76	105.569,21
150.000	2	75.000	0	0	49,53	509,11	149.930,62	2.413,49	88.885,03
165.000	2	75.000	15000	0	49,53	509,28	149.928,83	2.111,27	88.627,35
157.500	2	75.000	0	7500	49,53	508,94	149.930,83	2.300,69	88.922,02
172.500	2	75.000	15000	7500	49,55	509,26	151.413,44	2.081,79	89.456,62
240.000	2	75.000	15000	75000	49,57	509,48	152.729,66	1.531,12	90.488,05
315.000	2	75.000	15000	150000	49,51	509,08	152.830,63	1.170,47	90.365,92
465.000	2	75.000	15000	300000	49,60	509,93	152.885,75	794,78	90.340,24
200.000	2	25.000;75.000	0	0	58,03	646,09	99.932,91	1.607,70	59.058,58
210.000	2	25.000;75.000	10000	0	58,05	646,04	99.931,01	1.406,23	58.830,41
205.000	2	25.000;75.000	0	5000	58,02	645,92	99.932,05	1.533,99	58.997,24
215.000	2	25.000;75.000	10000	5000	58,01	645,72	100.920,93	1.384,74	59.309,36
260.000	2	25.000;75.000	10000	50000	58,06	646,66	101.799,47	1.021,02	59.993,84
310.000	2	25.000;75.000	10000	100000	58,03	646,19	101.868,66	780,96	59.990,04
410.000	2	25.000;75.000	10000	200000	58,04	646,11	101.907,09	530,04	59.995,46
500.000	5	3×10000;2×35000	0	0	64,28	747,30	99.933,72	1.608,37	58.944,76
510.000	5	3×10000;2×35000	10000	0	64,35	747,86	99.930,71	1.405,76	58.840,57
505.000	5	3×10000;2×35000	0	5000	64,33	748,06	99.933,96	1.534,27	59.009,25
515.000	5	3×10000;2×35000	10000	5000	64,33	747,87	100.921,82	1.387,16	59.333,12
560.000	5	3×10000;2×35000	10000	50000	64,34	747,95	101.803,40	1.020,17	59.987,98
610.000	5	3×10000;2×35000	10000	100000	64,34	747,81	101.873,99	781,02	59.935,90
710.000	5	3×10000;2×35000	10000	200000	64,35	748,28	101.906,14	529,52	59.949,97

Tabela B.7: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 1.000 e 10.000 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i>	<i>NI com</i>	<i>NPD</i>	<i>MedD</i>	<i>MaxD</i>
					$\alpha=0,85$	$\alpha=0,99$			
2.100	1	1.000	100	1.000	24,84	31,09	987,66	8,00	488,17
4.200	2	1.000	200	2.000	73,74	900,48	2.008,91	15,78	1.046,28
6.300	3	1.000	300	3.000	75,07	921,95	3.028,03	23,60	1.635,75
8.400	4	1.000	400	4.000	75,72	932,42	4.046,09	31,20	2.224,58
10.500	5	1.000	500	5.000	76,24	940,58	5.063,88	39,21	2.822,97
21.000	10	1.000	1.000	10.000	76,94	951,73	10.154,12	78,46	5.772,22
31.500	15	1.000	1.500	15.000	77,17	955,52	15.247,54	117,12	8.741,97
42.000	20	1.000	2.000	20.000	77,20	956,01	20.341,31	156,23	11.724,91
21.000	1	10.000	1.000	10.000	23,74	29,68	10.154,91	78,34	5.782,42
42.000	2	10.000	2.000	20.000	61,07	695,25	20.341,58	156,02	11.722,34
63.000	3	10.000	3.000	30.000	62,41	717,43	30.529,13	233,66	17.704,65
84.000	4	10.000	4.000	40.000	63,21	729,80	40.720,49	312,68	23.712,32
105.000	5	10.000	5.000	50.000	63,50	734,91	50.911,21	389,69	29.683,60
210.000	10	10.000	10.000	100.000	64,32	748,10	101.871,98	780,22	59.944,88
315.000	15	10.000	15.000	150.000	64,51	750,96	152.831,59	1.171,05	90.357,33
420.000	20	10.000	20.000	200.000	64,61	752,83	203.792,78	1.560,39	120.784,27

Tabela B.8: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 500 a 2.000 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>NPD</i>	<i>MedD</i>	<i>MaxD</i>
1.050	1	500	50	500	25,07	31,52	476,13	4,01	215,63
2.100	1	1.000	100	1.000	24,84	31,09	987,66	8,00	488,17
3.150	1	1.500	150	1.500	24,65	30,88	1.499,33	11,94	764,90
4.200	1	2.000	200	2.000	24,53	30,70	2.008,82	15,66	1.051,56
2.100	2	500	100	1.000	77,39	959,04	987,35	7,90	483,56
4.200	2	1.000	200	2.000	73,74	900,48	2.008,91	15,78	1.046,28
6.300	2	1.500	300	3.000	71,60	865,52	3.027,42	23,30	1.620,97
8.400	2	2.000	400	4.000	70,00	839,44	4.045,82	31,15	2.219,05
3.150	3	500	150	1.500	78,58	978,66	1.498,94	11,85	762,18
6.300	3	1.000	300	3.000	75,07	921,95	3.028,03	23,60	1.635,75
9.450	3	1.500	450	4.500	72,89	886,52	4.555,06	35,16	2.522,63
12.600	3	2.000	600	6.000	71,34	861,60	6.081,23	46,98	3.408,39
4.200	4	500	200	2.000	79,38	991,11	2.009,53	15,88	1.056,96
8.400	4	1.000	400	4.000	75,72	932,42	4.046,09	31,20	2.224,58
12.600	4	1.500	600	6.000	73,59	897,90	6.081,57	46,86	3.415,63
16.800	4	2.000	800	8.000	72,07	872,84	8.119,07	62,40	4.595,32
5.250	5	500	250	2.500	79,79	998,24	2.519,49	19,65	1.347,61
10.500	5	1.000	500	5.000	76,24	940,58	5.063,88	39,21	2.822,97
15.750	5	1.500	750	7.500	74,06	905,22	7.610,34	58,54	4.316,64
21.000	5	2.000	1.000	10.000	72,45	879,36	10.154,73	77,98	5.781,55
6.300	6	500	300	3.000	79,95	1.000,88	3.027,82	23,61	1.637,03
12.600	6	1.000	600	6.000	76,41	943,23	6.081,91	46,94	3.419,15
18.900	6	1.500	900	9.000	74,19	907,69	9.136,86	70,01	5.192,08
25.200	6	2.000	1.200	12.000	72,73	884,10	12.192,68	93,80	6.974,97
10.500	10	500	500	5.000	80,50	1.009,39	5.063,83	39,61	2.820,89
21.000	10	1.000	1.000	10.000	76,94	951,73	10.154,12	78,46	5.772,22
31.500	10	1.500	1.500	15.000	74,74	916,26	15.247,33	117,14	8.738,01
42.000	10	2.000	2.000	20.000	73,18	891,13	20.340,87	156,06	11.714,97

Tabela B.9: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para grupos fechados de 5.000 a 20.000 páginas.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>NPD</i>	<i>MedD</i>	<i>MaxD</i>
10.500	1	5.000	500	5.000	24,14	30,16	5.063,79	38,92	2.813,75
21.000	1	10.000	1.000	10.000	23,74	29,68	10.154,91	78,34	5.782,42
31.500	1	15.000	1.500	15.000	23,54	29,42	15.247,13	117,25	8.749,13
42.000	1	20.000	2.000	20.000	23,44	29,27	20.340,91	155,75	11.722,12
21.000	2	5.000	1.000	10.000	64,96	758,05	10.155,92	78,40	5.792,53
42.000	2	10.000	2.000	20.000	61,07	695,25	20.341,58	156,02	11.722,34
63.000	2	15.000	3.000	30.000	58,77	658,15	30.531,00	234,38	17.713,99
84.000	2	20.000	4.000	40.000	57,14	631,46	40.721,33	312,00	23.683,56
31.500	3	5.000	1.500	15.000	66,37	781,04	15.246,88	116,87	8.757,11
63.000	3	10.000	3.000	30.000	62,41	717,43	30.529,13	233,66	17.704,65
94.500	3	15.000	4.500	45.000	60,14	680,06	45.815,00	351,61	26.685,18
126.000	3	20.000	6.000	60.000	58,50	653,70	61.105,88	468,40	35.819,19
42.000	4	5.000	2.000	20.000	67,07	792,30	20.341,27	156,23	11.741,09
84.000	4	10.000	4.000	40.000	63,21	729,80	40.720,49	312,68	23.712,32
126.000	4	15.000	6.000	60.000	60,92	692,56	61.103,32	467,90	35.716,34
168.000	4	20.000	8.000	80.000	59,30	666,66	81.488,28	624,08	47.904,15
52.500	5	5.000	2.500	25.000	67,43	798,06	25.434,69	194,71	14.684,69
105.000	5	10.000	5.000	50.000	63,50	734,91	50.911,21	389,69	29.683,60
157.500	5	15.000	7.500	75.000	61,32	699,32	76.392,48	585,69	44.805,54
210.000	5	20.000	10.000	100.000	59,67	672,56	101.870,84	780,51	59.896,49
63.000	6	5.000	3.000	30.000	67,71	802,60	30.528,88	234,28	17.672,37
126.000	6	10.000	6.000	60.000	63,82	739,71	61.102,11	468,99	35.736,25
189.000	6	15.000	9.000	90.000	61,60	703,84	91.676,83	702,87	53.899,11
252.000	6	20.000	12.000	120.000	59,93	676,79	122.260,37	935,98	72.198,88
105.000	10	5.000	5.000	50.000	68,20	810,50	50.911,35	389,44	29.724,16
210.000	10	10.000	10.000	100.000	64,32	748,10	101.871,98	780,22	59.944,88
315.000	10	15.000	15.000	150.000	62,02	710,96	152.834,48	1.169,93	90.389,93
420.000	10	20.000	20.000	200.000	60,39	684,65	203.797,67	1.558,98	120.846,33

Tabela B.10: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para um total de 500, 5.000 e 50.000 páginas nos conjuntos fechados.

<i>TP</i>	<i>QGF</i>	<i>TPGF</i>	<i>TPGL</i>	<i>TNP</i>	<i>NI com</i> $\alpha=0,85$	<i>NI com</i> $\alpha=0,99$	<i>NPD</i>	<i>MedD</i>	<i>MaxD</i>
1.050	1	500	50	500	25,07	31,52	476,13	4,01	215,63
1.050	2	250	50	500	80,91	1.016,40	477,09	4,07	213,80
1.050	5	100	50	500	87,51	1.123,20	482,63	5,11	233,04
1.054	8	63	50	504	89,85	1.161,05	489,35	6,82	252,30
1.050	10	50	50	500	90,94	1.178,54	485,31	7,85	246,75
1.050	20	25	50	500	93,27	1.215,89	487,24	12,20	220,80
1.050	50	10	50	500	94,25	1.231,72	485,18	5,49	103,94
10.500	1	5.000	500	5.000	24,16	30,13	5.064,90	39,32	2.815,07
10.500	2	2.500	500	5.000	68,79	820,08	5.064,75	39,03	2.821,75
10.500	5	1.000	500	5.000	76,24	940,58	5.063,88	39,21	2.822,97
10.500	8	625	500	5.000	79,22	988,81	5.063,59	39,32	2.819,20
10.500	10	500	500	5.000	80,49	1.009,35	5.064,25	39,29	2.822,99
10.500	20	250	500	5.000	84,38	1.072,09	5.065,83	41,09	2.837,07
10.500	50	100	500	5.000	88,64	1.141,16	5.068,32	50,92	2.819,26
10.580	80	63	500	5.040	90,67	1.174,02	5.108,55	67,08	2.795,09
10.500	100	50	500	5.000	91,58	1.188,65	5.067,52	78,02	2.710,70
105.000	1	50.000	5.000	50.000	22,96	28,60	50.909,03	389,94	29.741,41
105.000	2	25.000	5.000	50.000	55,85	610,93	50.910,59	390,08	29.710,58
105.000	5	10.000	5.000	50.000	63,50	734,91	50.911,21	389,69	29.683,60
105.000	8	6.250	5.000	50.000	66,72	787,15	50.910,63	390,40	29.734,07
105.000	10	5.000	5.000	50.000	68,20	810,50	50.911,35	389,44	29.724,16
105.000	20	2.500	5.000	50.000	72,29	876,43	50.911,26	390,18	29.729,42
105.000	50	1.000	5.000	50.000	77,43	959,70	50.910,19	391,30	29.693,48
105.000	80	625	5.000	50.000	79,91	999,87	50.912,57	392,67	29.670,31
105.000	100	500	5.000	50.000	81,00	1.017,86	50.913,14	393,88	29.611,96

Tabela B.11: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de 50 e 500 páginas e 450 e 500 páginas.

TP	QGF	TPGF	TPGL	TNP	NI com	NI com	NPD	MedD	MaxD
					$\alpha=0,85$	$\alpha=0,99$			
1.155	2	1×50;1×500	55	550	91,04	1.179,89	531,41	4,91	250,71
1.995	2	1×450;1×500	95	950	78,14	971,22	937,45	7,58	460,10
2.205	3	1×50;2×500	105	1.050	91,36	1.185,29	1.040,97	8,78	519,33
3.045	3	1×450;2×500	145	1.450	79,42	992,47	1.448,13	11,60	741,30
1.260	3	2×50;1×500	60	600	91,07	1.180,12	584,34	5,73	281,07
2.940	3	2×450;1×500	140	1.400	79,30	990,40	1.396,13	11,10	703,43
2.310	4	2×50;2×500	110	1.100	91,44	1.186,27	1.094,48	9,58	556,31
3.990	4	2×450;2×500	190	1.900	80,02	1.001,45	1.907,18	15,07	991,96
4.305	5	1×50;4×500	205	2.050	91,48	1.187,23	2.060,58	16,65	1.088,27
5.145	5	1×450;4×500	245	2.450	80,39	1.008,16	2.468,30	19,48	1.319,88
1.470	5	4×50;1×500	70	700	91,24	1.183,12	688,27	7,24	349,99
4.830	5	4×450;1×500	230	2.300	80,39	1.008,02	2.314,36	18,13	1.222,66
4.620	8	4×50;4×500	220	2.200	91,40	1.185,91	2.215,41	19,12	1.194,62
7.980	8	4×450;4×500	380	3.800	80,89	1.015,60	3.841,43	29,91	2.104,04
8.505	9	1×50;8×500	405	4.050	91,56	1.188,42	4.097,29	32,51	2.255,10
9.345	9	1×450;8×500	445	4.450	81,05	1.018,37	4.504,36	34,98	2.498,70
6.615	9	3×50;6×500	315	3.150	91,54	1.188,21	3.181,54	26,02	1.735,57
9.135	9	3×450;6×500	435	4.350	81,04	1.018,36	4.402,05	34,31	2.440,41
1.890	9	8×50;1×500	90	900	91,24	1.182,90	893,88	10,54	468,33
8.610	9	8×450;1×500	410	4.100	81,06	1.018,57	4.148,12	32,37	2.276,47
3.780	9	6×50;3×500	180	1.800	91,34	1.185,11	1.809,84	17,01	971,12
8.820	9	6×450;3×500	420	4.200	81,01	1.017,31	4.249,82	33,29	2.346,38
8.085	14	7×50;7×500	385	3.850	91,64	1.189,69	3.895,84	33,46	2.166,59
13.965	14	7×450;7×500	665	6.650	81,24	1.021,46	6.743,40	52,42	3.789,72
11.550	20	10×50;10×500	550	5.500	91,63	1.189,29	5.576,07	47,76	3.140,09
19.950	20	10×450;10×500	950	9.500	81,36	1.023,54	9.646,71	74,98	5.474,81

Tabela B.12: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de 500 e 5.000 páginas e 4.500 e 5.000 páginas.

TP	QGF	TPGF	TPGL	TNP	NI com	NI com	NPD	MedD	MaxD
					$\alpha=0,85$	$\alpha=0,99$			
11.550	2	1×500;1×5000	550	5.500	80,59	1.010,74	5.573,38	43,07	3.114,72
19.950	2	1×4500;1×5000	950	9.500	65,60	768,60	9.646,23	73,98	5.487,08
22.050	3	1×500;2×5000	1.050	10.500	80,83	1.014,67	10.664,84	81,71	6.065,24
30.450	3	1×4500;2×5000	1.450	14.500	67,14	793,15	14.736,47	113,11	8.448,03
12.600	3	2×500;1×5000	600	6.000	80,68	1.012,28	6.081,47	47,03	3.417,35
29.400	3	2×4500;1×5000	1.400	14.000	67,02	791,58	14.229,82	109,21	8.150,65
23.100	4	2×500;2×5000	1.100	11.000	80,86	1.015,23	11.174,14	86,02	6.374,87
39.900	4	2×4500;2×5000	1.900	19.000	67,65	801,64	19.322,15	147,99	11.122,88
43.050	5	1×500;4×5000	2.050	20.500	81,04	1.018,02	20.851,71	160,01	12.023,49
51.450	5	1×4500;4×5000	2.450	24.500	68,15	809,69	24.927,38	191,05	14.422,38
14.700	5	4×500;1×5000	700	7.000	80,67	1.012,52	7.100,75	54,32	4.002,27
48.300	5	4×4500;1×5000	2.300	23.000	68,09	808,91	23.398,83	179,46	13.518,07
46.200	8	4×500;4×5000	2.200	22.000	81,04	1.018,12	22.380,02	171,63	12.914,66
79.800	8	4×4500;4×5000	3.800	38.000	68,60	817,16	38.682,59	296,38	22.468,89
85.050	9	1×500;8×5000	4.050	40.500	81,14	1.019,49	41.227,37	316,05	23.997,85
93.450	9	1×4500;8×5000	4.450	44.500	68,74	819,10	45.305,85	346,98	26.385,51
66.150	9	3×500;6×5000	3.150	31.500	80,99	1.017,65	32.057,70	245,79	18.573,76
91.350	9	3×4500;6×5000	4.350	43.500	68,66	817,89	44.288,67	338,74	25.763,32
18.900	9	8×500;1×5000	900	9.000	80,81	1.014,50	9.137,19	70,71	5.188,34
86.100	9	8×4500;1×5000	4.100	41.000	68,70	818,56	41.738,48	319,41	24.302,71
37.800	9	6×500;3×5000	1.800	18.000	81,00	1.017,45	18.303,97	140,44	10.531,42
88.200	9	6×4500;3×5000	4.200	42.000	68,69	818,65	42.759,81	327,76	24.920,97
80.850	14	7×500;7×5000	3.850	38.500	81,08	1.018,49	39.192,59	300,84	22.809,49
139.650	14	7×4500;7×5000	6.650	66.500	68,97	823,32	67.727,80	518,64	39.671,48
115.500	20	10×500;10×5000	5.500	55.000	81,16	1.020,18	56.006,28	430,27	32.711,32
199.500	20	10×4500;10×5000	9.500	95.000	69,07	824,75	96.773,80	741,63	56.934,36

Tabela B.13: Número médio de iterações para $\alpha = 0,85$ e $\alpha = 0,99$, número médio de páginas com diferentes posições, média do Desvio Médio e média do Desvio Máximo, variando o tamanho do grupo fechado, para combinações de grupos fechados de diversos tamanhos.

TP	QGF	$TPGF$	$TPGL$	TNP	$NI \text{ com } \alpha=0,85$	$NI \text{ com } \alpha=0,99$	NPD	$MedD$	$MaxD$
1.050	1	500	50	500	25,02	31,43	476,83	4,02	214,60
1.050	2	20;480	50	500	93,66	1.222,73	480,90	4,62	232,66
1.050	2	200;300	50	500	82,56	1.042,62	478,14	4,13	216,76
1.050	2	250	50	500	80,93	1.016,73	477,77	4,11	217,16
1.050	3	10;190;300	50	500	94,30	1.232,36	479,50	4,60	230,84
1.050	3	2×10;480	50	500	94,25	1.231,61	478,87	4,85	234,78
1.050	4	20;2×120;240	50	500	93,71	1.223,10	482,05	5,00	235,04
1.050	4	3×100;200	50	500	87,50	1.122,61	481,41	4,78	231,04
1.050	4	20;100;180;200	50	500	93,61	1.221,79	482,04	5,06	235,32
1.050	5	20;4×120	50	500	93,73	1.223,30	482,59	5,32	239,55
1.050	7	5×10;150;300	50	500	94,28	1.232,26	481,84	6,13	238,35
10.500	1	5.000	500	5000	24,16	30,19	5.065,42	39,09	2.830,08
10.500	2	200;4800	500	5000	85,37	1.088,63	5.064,18	39,33	2.818,60
10.500	2	2000;3000	500	5000	70,65	850,35	5.064,65	39,16	2.828,62
10.500	2	2500	500	5000	68,76	819,74	5.064,27	39,17	2.827,18
10.500	3	100;1900;3000	500	5000	88,74	1.142,52	5.064,42	39,29	2.813,06
10.500	3	2×100;4800	500	5000	88,72	1.142,67	5.063,99	39,59	2.811,23
10.500	4	200;2×1200;2400	500	5000	85,47	1.089,68	5.063,72	38,98	2.827,21
10.500	4	3×1000;2000	500	5000	76,16	939,40	5.063,30	39,04	2.821,04
10.500	4	200;1000;1800;2000	500	5000	85,52	1.090,36	5.064,48	39,13	2.819,96
10.500	5	4×50;4800	500	5000	91,55	1.188,23	5.065,01	40,70	2.826,75
10.500	5	200;4×1200	500	5000	85,45	1.089,51	5.063,28	39,06	2.814,89
10.500	7	5×100;1500;3000	500	5000	88,77	1.142,90	5.063,65	40,29	2.831,70
105.000	1	50000	5000	50000	23,00	28,63	50.909,94	390,32	29.731,64
105.000	2	2000;48000	5000	50000	73,53	896,57	50.913,45	390,50	29.730,34
105.000	2	20000;30000	5000	50000	57,96	645,03	50.911,98	390,69	29.734,25
105.000	2	25000	5000	50000	55,85	610,93	50.910,59	390,08	29.710,58
105.000	3	1000;19000;30000	5000	50000	77,50	960,63	50.910,01	389,89	29.666,49
105.000	3	2×1000;48000	5000	50000	77,46	960,53	50.911,78	390,16	29.707,88
105.000	4	2000;2×12000;24000	5000	50000	73,60	898,01	50.912,21	390,25	29.698,29
105.000	4	3×10000;20000	5000	50000	63,59	735,81	50.910,69	390,02	29.735,57
105.000	4	2000;10000;18000;20000	5000	50000	73,65	898,67	50.912,60	390,21	29.710,04
105.000	5	4×500;48000	5000	50000	81,16	1.020,13	50.908,85	389,81	29.683,82
105.000	5	2000;4×12000	5000	50000	73,57	897,00	50.912,83	390,20	29.749,42
105.000	7	5×1000;15000;30000	5000	50000	77,38	959,12	50.911,72	390,29	29.680,72

Referências Bibliográficas

- [1] D. Austin, *How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack*, American Mathematical Society Feature Column (Dec. 2006).
- [2] K. Bryan, T. Leise, *The \$ 25,000,000,000 Eigenvector the Linear Algebra Behind Google*, SIAM Review (2006), vol. 48, no.3, 569-581.
- [3] T.H. Haveliwala, S.D. Kamvar, *The Second Eigenvalue of the Google Matrix*, Stanford Publication - Technical Report (2003).
- [4] R. Durrett, *Essentials of Stochastic Processes*, first ed., Springer-Verlag, New York, 1999.
- [5] D.L. Isaacson, R.W. Madsen, *Markov Chains Theory and Applications*, second ed., John Wiley and Sons, Florida, 1985.
- [6] G.R. Grimmett, D.R. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, second ed., Oxford University Press, New York, 1992.
- [7] A.R. Gourlay, G.A. Watson, *Computational Methods for Matrix Eigenproblems*, first ed., John Wiley and Sons, Florida, 1973.
- [8] J.H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, first ed., Oxford University Press, New York, 1965.
- [9] E.A. Souza e Silva, R.R. Muntz, *Métodos Computacionais de Solução de Cadeias de Markov: Aplicações a Sistemas de Computação e Comunicação*, first ed., Inst.Informática da UFRGS, Porto Alegre, 1992.