**Tempo de chegada ao equilíbrio
da dinâmica de Metropolis
para o GREM**

Antonio Marcos Batista do Nascimento

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e
CNPq

São Paulo, maio de 2018

**Tempo de chegada ao equilíbrio
da dinâmica de Metropolis
para o GREM**

Esta é a versão original da tese elaborada pelo
candidato Antonio Marcos Batista do Nascimento, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Tempo de convergência ao equilíbrio da dinâmica de Metropolis para o GREM

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/03/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Jean-Georges Pierre Picco - Aix-Marseille
- Prof^a. Dr^a. Maria Eulália Vares - UFRJ
- Prof. Dr. Rodrigo Bissacot Proença - IME-USP
- Prof. Dr. Anatoli Lambartsev - IME-USP

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha família pelo suporte, apoio e motivação manifestados ao longo de todos esses anos de doutorado, sempre me estimulando a buscar realizar meus sonhos e objetivos. Saibam que me orgulho e amo muito todos vocês.

Gostaria também de agradecer ao meu orientador, Prof. Luiz Renato, por todos os ensinamentos, pela sua enorme paciência em ensinar, pela experiência repassada, pelas estimulantes discussões, ajuda nos momentos difíceis e, principalmente, por seus comentários e sugestões a respeito da tese, as quais, em sua maioria, com a finalidade de torná-la mais simples para o leitor. Serei para sempre grato ao senhor.

Gostaria ainda de agradecer, de um modo geral, a todos os meus amigos e colegas com quem compartilhei experiências, opiniões e ideias. Definitivamente, vocês tornaram essa jornada bem mais simples e divertida.

Por fim, gostaria de agradecer a todo o Departamento de Estatística da Universidade de São Paulo, a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro e aos professores que compuseram a banca de defesa de minha tese de doutorado.

Resumo

NASCIMENTO, A. M. B. **Tempo de chegada ao equilíbrio da dinâmica de Metropolis para o GREM.** 2018. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Neste trabalho consideramos um processo de Markov a tempo contínuo com espaço de estados finito em um meio aleatório, a saber, a dinâmica de Metropolis para o Modelo de Energia Aleatória Generalizado (GREM) com um número de níveis finito e discutimos o comportamento do seu tempo de chegada ao equilíbrio, o qual é dado pelo inverso da lacuna espectral de sua matriz de probabilidades de transição. No principal resultado desta tese provamos que o quociente entre o volume do sistema e o logaritmo do inverso da lacuna é quase sempre limitado, por cima, por uma função da temperatura, que também é a que descreve a energia livre do GREM sob o regime de temperaturas baixas. Como um estudo adicional, também é discutido um correspondente limitante inferior em um caso particular do GREM com 2 níveis.

Palavras-chave: GREM, vidros de spins, dinâmica de Metropolis, lacuna espectral, convergência ao equilíbrio, desigualdade de Poincaré.

Abstract

NASCIMENTO, A. M. B. **Reaching time to equilibrium of the Metropolis dynamics for the GREM.** 2018. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

In this work we consider a finite state continuous-time Markov process in a random environment, namely, the Metropolis dynamics for the Generalized Random Energy Model (GREM) with a finite number of levels, and we discuss the behavior of its reaching time to equilibrium which is given by inverse of the spectral gap of its transition probability matrix. On the main result of this thesis, we prove the division between the system volume and the logarithm of the inverse of the gap is almost surely upper bounded by a function of the temperature that it is also the function that describe the free energy of the GREM at low temperature. As an additional study, it is also discuss the corresponding limiting lower in a particular case of the 2-level GREM.

Keywords: GREM, spin glasses, Metropolis dynamics, spectral gap, convergence to equilibrium, Poincaré inequality.

Conteúdo

Conteúdo	vii
Nomenclatura	ix
1 Introdução	1
2 A dinâmica de Metropolis no GREM	5
2.1 O Modelo	6
2.2 A dinâmica	14
2.3 Resultado Principal	16
3 Estratégia Geral	19
3.1 A Desigualdade de Poincaré	20
3.2 O Conjunto de Caminhos	21
3.2.1 Motivações e Escolha do Conjunto de Caminhos	21
3.2.2 Primeiras Estimativas	32
4 Estimativa Principal	35
4.1 Estimativas Preparatórias	35
4.2 Estimativa Intermediária	41
4.2.1 Introdução	41
4.2.2 Estimativa para $Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta')$	42
4.2.3 Estimativa de Grandes Desvios	44
4.2.4 Estimativa Determinística	49

4.2.5	Conclusão da Estimativa para (4.1.34)	54
4.2.6	Prova da Proposição 4.2.2	57
4.3	Conclusão	63
5	Conclusão da Prova do Teorema 2.3.1	65
5.1	Estimativa para K_2	65
5.2	Conclusão da Prova do Teorema 2.3.1	70
6	Cota Inferior para o Inverso da Lacuna: um caso particular	73
6.1	Introdução e Resultados	73
6.2	Demonstração do Teorema 6.1.1	76
6.3	Demonstração do Teorema 6.1.2	78
A	Resultados de Matemática Geral	83
B	Resultados de Teoria de Probabilidade	85
	Bibliografia	87

Nomenclatura

$(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$ espaço de probabilidade consistindo de um conjunto não vazio, uma σ -álgebra e uma medida de probabilidade

$\mathbb{1}$ função indicadora/característica

β o inverso da temperatura

d distância induzida pelo produto interno usual em $\mathbb{R}^n$

d_1 distância de *Hamming* em $\Omega_{\mathcal{V}_1(1)}$

$\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ conjunto de discrepâncias entre as configurações $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\eta}'$

d_H distância de *Hamming*

$\mathbb{E}$ esperança

$\mathcal{E}$ conjunto de elos de $\Omega_{\mathcal{V}}$

$\mathcal{E}(\phi, \phi)$ forma de Dirichlet associado ao semigrupo de Markov P_t

γ caminho sobre o hipercubo $\Omega_{\mathcal{V}}$

$\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$ caminho sobre $\Omega_{\mathcal{V}}$ indo de $\boldsymbol{\eta}$ para $\boldsymbol{\eta}'$

$\mathcal{I}_k$ denota o conjunto $\{1, \dots, k\}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{L}$ gerador de Markov

μ medida de probabilidade(Gibbs)

$\Omega_{\mathcal{V}}, \Omega_{\mathcal{V}_j}$ o espaço de configurações do sistema, espaço de configurações do nível j

P matriz de probabilidades de transição tipo-Metropolis

P_t semigrupo markoviano a tempo contínuo

σ, σ_j denota um elemento de $\Omega_{\mathcal{V}}$, denota um elemento de $\Omega_{\mathcal{V}_j}$

τ inverso da lacuna espectral de $\mathcal{L}$ (ou da matriz P)

$\bar{\sigma}$ (única) configuração de $\Omega_{\mathcal{V}}$ tal que $H(\bar{\sigma}) = \min_{\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}} H(\sigma)$

$\mathcal{V}, \mathcal{V}_j$ o conjunto de partículas do sistema, o conjunto de partículas do nível j

Var_{μ} variância com respeito a medida de probabilidade μ

$\mathcal{X}$ é a família de gaussianas padrão independentes sobre $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$

$\{\beta_{\ell}\}_{\ell=1}^{\ell_n}$ sequência de temperaturas inversas críticas

$F_n(\beta)$ função energia livre

$F_{N,n}(\beta)$ energia livre à volume finito

H Hamiltoniano

N, n inteiro positivo que eventualmente diverge, o número de níveis da hierarquia

V, V_j o volume de partículas do sistema, o volume de partículas do nível j

Z função de partição à volume finito

Lista de Figuras

- 2.1 Exemplo de uma estrutura de árvore de um GREM com 3 níveis. Neste caso, estamos considerando que $V_1 = 2$ e $V_2 = V_3 = 1$ 7
- 4.1 Seja $\Omega_{\mathcal{V}}$ o hipercubo obtido fazendo $B = n = 3$ e $v_1 = v_2 = v_3$. A figura (a) ilustra os possíveis vértices $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\eta}'$ em $\Omega_{\mathcal{V}}$ tais que o caminho $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^1$ passa por meio do elo $e = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}')$. O spin de discordância entre $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}'$ está representado por $\circ$ e $\bullet$, respectivamente. Em $\boldsymbol{\eta}$, respectivamente em $\boldsymbol{\eta}'$, a linha em zigue-zague representa os spins possivelmente trocados na construção do caminho $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^1$ antes de $\boldsymbol{\sigma}$, respectivamente depois de $\boldsymbol{\sigma}'$. As figuras (b) e (c) ilustram o mesmo que (a), mas, agora, para o elo $e' = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}')$ $e'' = (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}')$, respectivamente. 37
- 5.1 A figura acima ilustra um caminho $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'} = \gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}}^1 \cup \gamma_{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}'}$ com $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}}^1 \ni e = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}')$. Em $\boldsymbol{\eta}$, respectivamente em $\boldsymbol{\omega}$, a linha em zigue-zague representa os spins possivelmente trocados na construção do caminho $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}}^1$ antes de $\boldsymbol{\sigma}$, respectivamente depois de $\boldsymbol{\sigma}'$. Chamamos atenção ao fato que o caminho $\gamma_{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}'}$ é obtido trocando-se apenas os spins das coordenadas pertencentes ao conjunto $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}')$ que estão representadas pelas bolas cheias no primeiro bloco de $\boldsymbol{\eta}'$ 67

Capítulo 1

Introdução

Nestas últimas décadas vidros de spins tem se tornado uma fascinante e complexa questão da Teoria de Probabilidade, não só pela complexidade dos problemas “estáticos”, mas também pela variedade dos fenômenos “dinâmicos” que tem surgido.

Do ponto de vista teórico vidros de spins são sistemas de spins interagindo aleatoriamente em uma rede. E como é bem conhecido, uma descrição de campo médio de tais sistemas é dado pelo modelo de Sherrington e Kirkpatrick [SK75], hoje conhecido simplesmente como modelo SK. Este modelo é definido sobre um rede unidimensional de volume N com a energia total de cada configuração $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^N$ do sistema dada pela soma

$$H(\sigma) = - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{J_{ij}}{\sqrt{N}} \sigma_i \sigma_j, \quad (1.0.1)$$

em que $\sigma_i = \pm 1$ e J_{ij} são variáveis aleatórias gaussianas padrão independentes. Apesar da aparente simplicidade, o estudo desse modelo tem provado ser matematicamente não-trivial, até mesmo de forma heurística, devido à rica e complicada estrutura de correlações entre as energias de seu sistema.

O *Modelo de Energia Aleatória* (REM) foi introduzido por Derrida [Der80] como uma simplificação do modelo SK. Este modelo, também definido em um volume N , consiste em considerar as energias das configurações do sistema como variáveis aleatórias gaussianas independentes de média zero e variância N . Portanto, sua função de partição é dada pela seguinte expressão:

$$Z_{N,1}(\beta) = \sum_{i=1}^{2^N} e^{-\beta \sqrt{N} X_i}, \quad X_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (1.0.2)$$

em que $\beta > 0$ é o parâmetro inverso da temperatura. Isto é considerado pela comunidade física uma simplificação extrema para vidros de spins, já que desconsidera qualquer estrutura de dependência entre as energias do sistema, algo presente em modelos mais realistas como, por exemplo, o SK.

Com a proposta de incorporar alguma estrutura de dependência entre as energias do sistema e assim obter um modelo mais realista para vidros de spins, Derrida [Der85] propôs então uma generalização do REM. Ele escolheu uma estrutura hierárquica em níveis para definir variáveis aleatórias gaussianas fortemente correlacionadas e o chamou de *Modelo de Energia Aleatória Generalizado* (GREM). Assim como REM, as 2^N energias do sistema não são especificadas, mas a energia de cada configuração é a soma de variáveis aleatórias gaussianas independentes. Uma descrição do GREM segue. Sejam $n, N \in \mathbb{N}$ tais que $n \leq N$ e sejam $\{a_j\}_{j=1}^n$ e $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ duas sequências finitas de números reais, tais que $a_j > 0$ e $\alpha_j > 1$ para todo $j = 1, \dots, n$, e

$$\sum_{j=1}^n a_j = 1 \quad \text{e} \quad \prod_{j=1}^n \alpha_j = 2. \quad (1.0.3)$$

Seja $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ (fixo) e todo $N \in \mathbb{N}$ existe uma família de $\alpha_1^N + (\alpha_1 \alpha_2)^N + \dots + (\alpha_1 \dots \alpha_n)^N$ variáveis aleatórias gaussianas padrão independentes, digamos

$$X_{i_1, \dots, i_j}^j \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad j = 1, \dots, n \text{ e } i_j = 1, \dots, \alpha_j^N. \quad (1.0.4)$$

O GREM ao inverso de temperatura $\beta > 0$ é então definido pela função de partição,

$$Z_{N,n}(\beta) = \sum_{i_1=1}^{\alpha_1^N} \sum_{i_2=1}^{\alpha_2^N} \dots \sum_{i_n=1}^{\alpha_n^N} e^{-\beta \sqrt{N} \sum_{j=1}^n \sqrt{a_j} X_{i_1, \dots, i_j}^j}. \quad (1.0.5)$$

Não é difícil ver que o GREM corresponde ao REM quando $n = 1$.

Objetivos da Tese. Uma das características de vidros de spins é que eles são sistemas que convergem tão lentamente para o equilíbrio sob o regime de temperaturas baixas que nunca são observados próximo do equilíbrio em simulações ou em experimentos em laboratórios (veja [BCKM98]). Dessa característica surge então o seguinte questionamento:

Quanto tempo é necessário esperar para observar o sistema próximo de seu equilíbrio?

A proposta desta tese é então considerar uma versão dinâmica do GREM, a saber, o GREM submetido a dinâmica de Metropolis (ou seja, um processo de Markov a tempo contínuo reversível com respeito à medida de equilíbrio), e discutir o comportamento do tempo de convergência ao equilíbrio (em função da temperatura) desta dinâmica. Nosso principal objetivo é obter uma estimativa para o tempo de convergência ou, equivalentemente, para a *lacuna espectral* da dinâmica, isto é, a diferença entre o primeiro e o segundo autovalor da matriz de transição do correspondente processo de Markov a tempo contínuo. Um objetivo secundário é obter alguma

informação sobre o comportamento exato da lacuna da dinâmica. Isto será feito em um caso particular do modelo.

O GREM é um dos poucos modelos de vidros de spins em que uma análise matemática rigorosa tem provado ser possível não só em questões estáticas (por exemplo, Capocaccia et al. [CCP87], Dorlas e Dukes [DD02], Bovier e Kurkova [BK04a, BK04b] e Jana e Rao [JR06]), como também em questões dinâmicas (por exemplo, Arous et al. [ABG01, ABG02, ABG03a, ABG03b], Gayrard [Gay16a, Gay16b] e Černý e Wassmer [ČW17]). Vale destacar que a maioria dos avanços rigorosos em problemas dinâmicos, se não todos, têm sido com análise no REM. Para casos mais gerais do GREM, a maioria dos problemas dinâmicos ainda continuam sem resposta.

Os trabalhos de Fontes et al. [FIKP98], de Mathieu [Mat00] e de Mathieu e Picco [MP] representam os únicos artigos com resultados sobre tempos de convergência ao equilíbrio de dinâmicas para o GREM, mas todos eles com a análise restrita ao REM. De particular interesse são os resultados de Fontes et al. que descreveram o comportamento exato da lacuna da dinâmica de Metropolis para o REM. Estenderemos nesta tese um dos resultados de [FIKP98] para o GREM.

Contribuições e Organização da Tese: Vamos agora descrever em mais detalhes o que fizemos em nosso trabalho destacando suas contribuições. Apresentamos no Capítulo 2 o processo markoviano a tempo contínuo, o GREM sob a dinâmica de Metropolis, que será o objeto de nosso estudo e o resultado principal desta tese, o Teorema 2.3.1.

Em [FIKP98], em que o REM foi estudado também sob Metropolis, o principal resultado é a descrição completa e exata do comportamento assintótico da lacuna espectral (Teorema 1). De fato, Fontes et al. provaram que, denotando-se por λ_N a lacuna espectral da dinâmica, para todo $\beta > 0$,

$$\lim_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{1}{\lambda_N} = \beta \sqrt{2 \log 2} \quad (1.0.6)$$

quase certamente. Cabe destacar que a expressão do lado direito de (1.0.6), vista como função de β , é também a função que descreve a energia livre do REM a baixas temperaturas. Infelizmente, não seremos capazes de provar uma afirmação análoga para o caso do GREM. Nesta tese, provaremos que para a dinâmica de Metropolis no GREM, para todo $\beta > 0$,

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{1}{\lambda_N} \quad (1.0.7)$$

é quase sempre limitado superiormente pela mesma expressão que descreve a energia livre do GREM sob baixas temperaturas (Teorema 2.3.1). Essa afirmação generaliza a Proposição 4.2 em [FIKP98]. Obtivemos essa proposição como corolário do nosso resultado. Além disso, se o

interesse é estimar a distância (em variação total) entre a lei do processo de Markov no tempo t , iniciando em um dado estado, e a sua medida de equilíbrio, então é somente de uma cota superior para o inverso da lacuna que se faz necessário (cf. (2.3.6)).

Para provar o Teorema 2.3.1 usaremos uma desigualdade tipo Poincaré derivada por Sinclair em [Sin91] (cf. também a desigualdade de Poincaré derivada em [DS91]), a qual é dada em termos de um conjunto de caminhos que construiremos cuidadosamente no Capítulo 3 explorando o fato que o espaço de estados da cadeia de Markov em estudo pode ser dividido em elementos “bons” e “ruins”. No Capítulo 4 apresentaremos a estimativa do termo que de fato contribui para o tamanho da lacuna da dinâmica, o que nos leva ao Capítulo 5, em que reunimos todas as estimativas em um argumento para concluir a demonstração do teorema principal.

O Capítulo 6 tem como objetivo obter alguma informação sobre o comportamento exato da lacuna da dinâmica quando fazemos o volume do sistema divergir. Para isso, discutiremos uma cota inferior para o inverso da lacuna, mas apenas em um caso particular do modelo, a saber, o GREM com dois níveis, ou seja, $n = 2$, sob o regime de temperaturas baixas em fase em cascata (Teorema 6.1.1).

Capítulo 2

A dinâmica de Metropolis no GREM

Os objetivos deste capítulo são dois: descrever e motivar precisamente o processo de Markov – o GREM sujeito à dinâmica de Metropolis – que será o objeto de nosso estudo e formular formalmente o problema que pretendemos resolver ao longo deste trabalho, a saber, estudamos a velocidade com que o processo de Markov converge para o equilíbrio. Essa propriedade é descrita pelo inverso da lacuna espectral, isto é, a diferença entre o primeiro e o segundo autovalor da matriz de probabilidades de transição do correspondente processo estocástico.

O GREM é descrito como um sistema que assume uma configuração que é uma sequência de N elementos pertencentes ao conjunto $\{-1, +1\}$, ou seja, existem 2^N configurações possíveis cujos Hamiltonianos não são especificados, mas a energia de cada configuração é a soma de n variáveis aleatórias gaussianas.

A evolução do processo dar-se-á em tempo contínuo e os tempos entre as transições podem ser descritos como variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial.

O capítulo está organizado em três seções que descrevemos como segue. Na Seção 2.1 apresentaremos o GREM ao leitor introduzindo ambas versões de sua formulação: a versão original proposta em [Der85], e outra, em [JR06]. Na verdade, como veremos nesta seção, o GREM é mais uma família de modelos que um modelo só, já que depende de duas famílias de parâmetros. Adiantamos que consideraremos uma versão do GREM baseada na definição dada em [JR06]. Encerraremos esta seção introduzindo e motivando alguns dos conceitos fundamentais a respeito do GREM e reunindo alguns dos resultados mais importantes já conhecidos sobre a sua análise. Portanto, a maioria dos conceitos e resultados apresentados nesta seção não serão novos. Eles tem apenas o propósito de uniformizar notações para o contexto do nosso trabalho e, assim, orientar melhor o leitor.

A Seção 2.2 está dedicada à definição da dinâmica de Metropolis para o GREM em um volume finito. Finalizamos o capítulo com a Seção 2.3, em que apresentaremos o resultado principal da

tese.

2.1 O Modelo

Há duas versões equivalentes para a definição do GREM. A versão original formulada em [Der85], e outra em [JR06]. A proposta de [Der85] foi generalizar o REM [Der80] de tal forma que qualquer correlação entre pares de energias pudessem ser levadas em conta, enquanto que a de [JR06] foi motivada pelo desejo de adicionar uma aleatoriedade extra ao nível das correlações.

O modelo é definido da seguinte forma. Seja N um inteiro positivo que eventualmente diverge e representa o volume de um sistema de partículas (que podem ser pessoas, átomos etc.), e que, sem perda de generalidade, enumeramos de 1 a N . Vamos considerar que os elementos desse sistema podem assumir dois estados/spins, -1 ou $+1$. Então, se denotarmos por $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, N\}$ o conjunto de partículas, as 2^N configurações possíveis do sistema são os elementos do conjunto

$$\Omega_{\mathcal{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, +1\}^{\mathcal{V}}. \quad (2.1.1)$$

Essas partículas são divididas em grupos de acordo com uma hierarquia em níveis como segue. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado, tal que $n \leq N$, o número de níveis dessa hierarquia. Seguindo [JR06], considere uma partição de N em n inteiros positivos, digamos

$$N = \sum_{j=1}^n V_j. \quad (2.1.2)$$

Então, escrevemos

$$\mathcal{V} = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{V}_j, \quad (2.1.3)$$

em que

$$\mathcal{V}_j \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{j-1} V_i, \dots, \sum_{i=1}^j V_i \right\} \quad (2.1.4)$$

é o grupo de partículas do nível j da hierarquia. Em geral, $V_j \equiv V_{j,n,N}$ depende dos parâmetros n e N , mas, por simplicidade, vamos omitir essa dependência. Naturalmente, $\Omega_{\mathcal{V}}$ pode ser escrito como

$$\Omega_{\mathcal{V}} = \Omega_{\mathcal{V}_1} \times \dots \times \Omega_{\mathcal{V}_n}, \text{ com } \Omega_{\mathcal{V}_j} \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, +1\}^{\mathcal{V}_j}. \quad (2.1.5)$$

Uma configuração $\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}$ é então da forma

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1, \dots, \sigma_n, \quad (2.1.6)$$

em que $\sigma_j \in \Omega_{\mathcal{V}_j}$ denota a configuração do j -ésimo nível de σ .

A fim de obter alguma intuição em (2.1.6), podemos imaginar uma árvore de n níveis. No primeiro nível há 2^{V_1} ramificações, cada uma representando uma configuração $\sigma_1 \in \Omega_{V_1}$. Abaixo de cada ramificação σ_1 do nível 1, há 2^{V_2} ramificações no nível 2. Cada ramificação abaixo de σ_1 representa uma configuração σ_1, σ_2 no nível 2, com $\sigma_2 \in \Omega_{V_2}$. Em geral, abaixo de cada ramificação $\sigma_1, \dots, \sigma_j$ do nível j , existem $2^{V_{j+1}}$ ramificações que representam, cada uma, as configurações $\sigma_1, \dots, \sigma_{j+1}$ no nível $j+1$, com $\sigma_{j+1} \in \Omega_{V_{j+1}}$. Uma típica configuração $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ do sistema é então representada unicamente como um caminho nesta árvore que vai da raiz até a folha por meio das ramificações $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma$. Uma ilustração da ideia segue:

Figura 2.1: Exemplo de uma estrutura de árvore de um GREM com 3 níveis. Neste caso, estamos considerando que $V_1 = 2$ e $V_2 = V_3 = 1$.

Observação 2.1.1. Na formulação original proposta em [Der85], ao invés de uma partição para

o inteiro N , é considerada uma fatoraçoão do número 2 em n números reais maiores que 1, isto é,

$$2 = \prod_{j=1}^n \alpha_j, \text{ com } \alpha_j > 1. \quad (2.1.7)$$

Para um sistema com N partículas, podemos também definir uma estrutura de árvore considerando uma árvore regular de n níveis com α_j^N ramificaçoões no j -ésimo nível. Obviamente, em geral, α_j^N não é um inteiro, então tomamos sua parte inteira, ou seja, consideramos apenas $\lfloor \alpha_j^N \rfloor$ ramificaçoões no i -ésimo nível. O fato é que essa árvore, como é de se esperar, pode não ter as 2^N ramificaçoões para corresponder exatamente ao espaço de configuraçoões $\Omega_{\mathbf{v}}$. No entanto, como observado em [JR06], fixadas as constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ satisfazendo (2.1.7), pode-se definir os inteiros $V_1, \dots, V_n$ como sendo aqueles tais que

$$2^{V_j} \leq \lfloor \alpha_j^N \rfloor \leq 2^{V_j+1}. \quad (2.1.8)$$

Naturalmente, a condiçoão (2.1.2) não necessariamente é satisfeita com os inteiros $V_1, \dots, V_n$ satisfazendo (2.1.8) qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$. Mas, observando-se que

$$\lim_{N \uparrow \infty} \frac{V_j}{N} = \frac{\log \alpha_j}{\log 2} \stackrel{\text{def}}{=} p_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1, \quad (2.1.9)$$

a razão $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n V_j$ converge à 1, assim como o lado direito de (2.1.2), quando $N \uparrow \infty$. Em suma, dada a família $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$, construir os inteiros $V_1, \dots, V_n$ que satisfazem (2.1.8) lida com problemas de arredondamento, como por exemplo (2.1.2), que se tornam irrelevantes quando fazemos o volume do sistema divergir.

Notação. Dado $k \in \mathbb{N}$, iremos usar o símbolo $\mathcal{I}_k$ para indicar o conjunto $\{1, \dots, k\}$.

Por razões que serão explicadas no decorrer deste trabalho, consideraremos a família de inteiros $\{V_j\}_{j=1}^n$ definidos como segue. Seja $\{p_j\}_{j=1}^n$ uma família de números reais positivos tais que

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1. \quad (2.1.10)$$

Seja $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(N, n) \uparrow \infty$ quando $N \uparrow \infty$ uma sequência de números não necessariamente inteiros, tal que

$$\lim_{N \uparrow \infty} \frac{\mathcal{S}}{N} = 0, \quad (2.1.11)$$

ou seja, $\mathcal{S} = o(N)$, e para cada $j \in \mathcal{I}_n$ vamos escolher

$$V_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{B} \quad (2.1.12)$$

em que

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j(N, n) \stackrel{\text{def}}{=} \lfloor p_j \mathcal{S} \rfloor \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(N, n) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{N}{\mathcal{S}} \right\rfloor. \quad (2.1.13)$$

Usando que $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obtemos então a primeira observação:

$$p_j - \frac{2}{\mathcal{S}} \leq \frac{V_j}{N} \leq p_j. \quad (2.1.14)$$

Em particular,

$$1 - \frac{2n}{\mathcal{S}} \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n V_j \leq 1. \quad (2.1.15)$$

Como $n \in \mathbb{N}$ está fixado, a condição $\mathcal{S} \uparrow \infty$ implica que

$$\lim_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n V_j = 1. \quad (2.1.16)$$

Isto quer dizer que nem sempre teremos $\sum_{j=1}^n V_j = N$ como em (2.1.2), isto é, o volume do nosso sistema não será necessariamente N , mas meramente

$$V = V(N, n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n V_j. \quad (2.1.17)$$

Note que as hipóteses (2.1.11) garantem que não existe uma diferença macroscópica significativa entre o volume V e N .

Observação 2.1.2. É importante enfatizar que a formulação do GREM que estamos considerando neste trabalho não é igual à definida em (2.1.2), uma vez que V não é necessariamente igual a N . Com respeito a formulação original, devido a (2.1.9), dada a família $\{p_j\}_{j=1}^n$, podemos definir a família $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ por simplesmente fazer

$$\alpha_j = 2^{p_j}. \quad (2.1.18)$$

Neste caso, o volume do sistema também é N , e de novo, V não é necessariamente igual a N . Entretanto, como comentado em [JR06], isso não importa, no sentido que quaisquer pequenas diferenças podem ser absorvidas em qualquer um dos n níveis.

Observação 2.1.3. Uma das razões para a escolha em (2.1.12) é que, para todo $j \in \mathcal{I}_n$, $\mathcal{V}_j$ pode ser decomposto como

$$\mathcal{V}_j = \bigcup_{i=1}^{\mathbf{B}} \mathcal{V}_j(i), \quad (2.1.19)$$

em que $|\mathcal{V}_j(i)| = \mathbf{v}_j$. De fato, podemos escrever

$$\mathcal{V}_j(i) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ 2 + (i-1)\mathbf{v}_j + \sum_{k=1}^{j-1} V_k, \dots, 1 + i\mathbf{v}_j + \sum_{k=1}^j V_k \right\}. \quad (2.1.20)$$

Isto quer dizer que em todos os n níveis da hierarquia existe o mesmo número de subconjuntos, $\mathbf{B}$, que chamamos de blocos, cujos volumes dependem apenas do nível j considerado.

A cada configuração $\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}$ associaremos sua energia (aleatória), o qual é dada da seguinte forma. Considere uma família, digamos $\mathcal{X}$, de $2^{V_1} + 2^{V_1+V_2} + \dots + 2^V$ variáveis aleatórias i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) gaussianas padrão definidas sobre o mesmo espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$. Frequentemente estas gaussianas são indexadas por $\sigma_1, \dots, \sigma_j$, de modo que

$$\mathcal{X} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ X_{\sigma_1, \dots, \sigma_j}^j : \sigma_1, \dots, \sigma_j \in \Omega_{\mathcal{V}_1} \times \dots \times \Omega_{\mathcal{V}_j}, j \in \mathcal{I}_n \right\}. \quad (2.1.21)$$

Note que não estamos denotando a dependência em N explicitamente em $\mathcal{X}$, mas assumimos que o espaço $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$ é o mesmo para todo N .

Dado $\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}$, vamos denotar por

$$X_{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} (X_{\sigma_1}^1, X_{\sigma_1, \sigma_2}^2, \dots, X_{\sigma}^n). \quad (2.1.22)$$

Seja $\{a_j\}_{j=1}^n$ uma família com n números reais positivos tais que

$$\sum_{j=1}^n a_j = 1. \quad (2.1.23)$$

A energia de σ é então dada por

$$H(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} H_N(\sigma) = -\langle \mathbf{a}, X_{\sigma} \rangle \sqrt{V} \quad (2.1.24)$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ e

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}). \quad (2.1.25)$$

Na literatura a função H é usualmente chamada de Hamiltoniano, então manteremos a tradição aqui.

Observação 2.1.4. É evidente que H é uma variável aleatória no espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$. Mais precisamente, como estamos assumindo (2.1.23), obtemos que $H(\sigma) \sim \mathcal{N}(0, V)$ para todo $\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}$, e para $\sigma, \sigma' \in \Omega_{\mathcal{V}}$,

$$\frac{1}{V} \mathbb{E} [H(\sigma) H(\sigma')] = \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{1}_{\{\sigma_1 = \sigma'_1\}} \cdots \mathbb{1}_{\{\sigma_j = \sigma'_j\}} = \sum_{j=1}^{R(\sigma, \sigma')} a_j, \quad (2.1.26)$$

em que,

$$R(\sigma, \sigma') \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ j \in \mathcal{I}_n : \sigma_1, \dots, \sigma_j = \sigma'_1, \dots, \sigma'_j \right\}. \quad (2.1.27)$$

Segue então de (2.1.26) que se σ e σ' são configurações que diferem no primeiro nível, isto é, $\mathbb{1}_{\{\sigma_1 = \sigma'_1\}} = 0$, então $H(\sigma)$ e $H(\sigma')$ são gaussianas independentes.

Definimos a medida de probabilidade (Gibbs) μ sobre Ω_V com Hamiltoniano H por

$$\mu(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{N,n}^\beta(\sigma) = \frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{Z}, \quad (2.1.28)$$

em que

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} Z_{N,n}(\beta) = \sum_{\sigma \in \Omega_V} e^{-\beta H(\sigma)} \quad (2.1.29)$$

é a função de partição a volume finito V e $\beta > 0$ é o parâmetro inverso da temperatura. Como é usual, a função

$$F_{N,n}(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \log Z \quad (2.1.30)$$

denota a energia livre do sistema a volume finito V . Note que, como H , as quantidades μ , Z e $F_{N,n}$ são sequências de variáveis aleatórias em N sobre o espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$.

Sob a definição original de Derrida [Der85], é bem conhecido de [CCP87] (Teorema 2.1) que para todo $\beta > 0$ a energia livre do GREM existe em ambos, $\mathbb{P}$ -quase certamente e $L_p(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$ para $1 \leq p < \infty$. Sobre esse resultado, cujas ideias serão úteis neste trabalho, a estratégia principal foi similar à usada para o REM em [OP84]. Nesse caso, o ingrediente crucial foi que, para N grande o suficiente, o máximo de uma sequência de 2^N variáveis aleatórias gaussianas independentes é quase certamente limitado.

No caso do GREM, como cada função energia é a soma de n variáveis aleatórias gaussianas i.i.d., então foi exibida uma região convexa compacta em $\mathbb{R}^n$ em que, com uma altíssima probabilidade, os 2^N pontos associados com a sequência $H(\sigma^1), H(\sigma^2), \dots, H(\sigma^{2^N})$ moram (cf. Proposição 3.1). Sob nosso cenário, dado $\delta > 0$, essa região convexa é escrita como

$$\mathcal{A}_n(N, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \forall j \in \mathcal{I}_n, \forall \sigma_1, \dots, \sigma_j \in \prod_{i=1}^j \Omega_{V_j}, \sum_{i=1}^j (X_{\sigma_1, \dots, \sigma_i}^i)^2 \leq \beta_\star^2 (1 + \delta) \sum_{i=1}^j V_i \right\}, \quad (2.1.31)$$

em que

$$\beta_\star \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2 \log 2}. \quad (2.1.32)$$

Note que o conjunto $\mathcal{A}_n(N, \delta)$ é a interseção de uma esfera n -dimensional com vários cilindros cujas bases são de dimensão $1, 2, \dots, n-1$.

O resultado seguinte é análogo à Proposição 3.1 em [CCP87].

Proposição 2.1.1. Para todo $\delta > 0$,

$$\mathbb{P} \left[\liminf_{N \uparrow \infty} \mathcal{A}_n(N, \delta) \right] = \mathbb{P} \left[\bigcup_{M \geq 1} \bigcap_{N \geq M} \mathcal{A}_n(N, \delta) \right] = 1. \quad (2.1.33)$$

Demonstração. Primeiro, note que

$$\mathbb{P} \left[\bigcup_{M \geq 1} \bigcap_{N \geq M} \mathcal{A}_n(N, \delta) \right] = 1 - \mathbb{P} [\mathcal{A}_n^c(N) \text{ i.v.}], \quad (2.1.34)$$

em que i.v. significa infinitas vezes. Pelo Primeiro Lema de Borel-Cantelli é suficiente então provarmos que

$$\sum_{N \geq 1} \mathbb{P} [\mathcal{A}_n^c(N, \delta)] < \infty. \quad (2.1.35)$$

Por definição, temos que

$$\mathbb{P} [\mathcal{A}_n^c(N, \delta)] = \mathbb{P} \left[\exists i \in \mathcal{I}_n : \max_{\sigma_1 \dots \sigma_i} \sum_{j=1}^i (X_{\sigma_1 \dots \sigma_j}^j)^2 > \beta_\star^2 (1 + \delta) \sum_{j=1}^i V_j \right]. \quad (2.1.36)$$

Obviamente,

$$\mathbb{P} [\mathcal{A}_n^c(N, \delta)] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P} [G_i(N)], \quad (2.1.37)$$

em que $G_i(N)$ denota o evento

$$G_i(N) = \left\{ \max_{\sigma_1 \dots \sigma_i} \sum_{j=1}^i (X_{\sigma_1 \dots \sigma_j}^j)^2 > \beta_\star^2 (1 + \delta) \sum_{j=1}^i V_j \right\}. \quad (2.1.38)$$

Da desigualdade exponencial de Markov e estimativas padrão, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [G_i(N)] &\leq 2^{\sum_{j=1}^i V_j} e^{-t(1+\delta) \frac{\beta_\star^2}{2} \sum_{j=1}^i V_j} (1-t)^{-\frac{i}{2}} \\ &= e^{(1-t(1+\delta)) \frac{\beta_\star^2}{2} \sum_{j=1}^i V_j} (1-t)^{-\frac{i}{2}}. \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

Escolhendo $t = 1 - c$, com

$$0 < c < 1 - \frac{1 + \frac{\delta}{2}}{1 + \delta}, \quad (2.1.40)$$

obtemos então que

$$\mathbb{P} [\mathcal{A}_n^c(N, \delta)] \leq \sum_{i=1}^n c^{-\frac{i}{2}} e^{-\frac{\delta \beta_\star^2}{4} \sum_{j=1}^i V_j}. \quad (2.1.41)$$

Como as constantes δ , $\beta_\star$ e c são fixas e $V_j \uparrow \infty$ quando $N \uparrow \infty$, segue que

$$\sum_{N \geq 1} \mathbb{P} [\mathcal{A}_n^c(N, \delta)] < \infty, \quad (2.1.42)$$

como queríamos. $\square$

Apesar de não ser difícil adaptar os demais resultados de [CCP87] (cf. Proposições 3.3 e 3.5) para verificar a existência da termodinâmica do GREM que estamos considerando, neste trabalho é mais conveniente usar o seguinte.

Teorema 2.1.1 (Jana e Rao [JR06]). Considere um GREM com n níveis e volume $N = \sum_{j=1}^n k_{j,N}$ e assuma que para todo $j \in \mathcal{I}_n$,

$$\lim_{N \uparrow \infty} \frac{k_{j,N}}{N} = p_j > 0. \quad (2.1.43)$$

Então, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$F_n(\beta) = \lim_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log Z = \frac{\beta_\star^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} \|\mathbf{m}^* - \mathbf{m}\|^2, \quad (2.1.44)$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma induzida pelo produto interno usual em $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{m}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}^*(\beta) = \beta \mathbf{a}, \quad (2.1.45)$$

em que $\mathbf{a}$ está dado em (2.1.25) e $\mathbf{m}$ é o ponto do convexo compacto $\Psi \subset \mathbb{R}^n$, o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido como

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^j x_i^2 \leq P_j, \forall j = 1, \dots, n \right\}, \quad (2.1.46)$$

em que

$$P_j \stackrel{\text{def}}{=} \beta_\star^2 \sum_{i=1}^j p_i, \quad (2.1.47)$$

que minimiza a distância entre $\mathbf{m}^*$ e Ψ , isto é,

$$d(\mathbf{m}^*, \Psi) = \inf_{x \in \Psi} \|\mathbf{m}^* - x\| = \|\mathbf{m}^* - \mathbf{m}\|. \quad (2.1.48)$$

Corolário 2.1.1. Considere o GREM com n níveis e volume $V = \sum_{j=1}^n V_j$, em que V_j é como definido em (2.1.12). Então, para todo $\beta > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\lim_{N \uparrow \infty} F_{N,n}(\beta) = F_n(\beta). \quad (2.1.49)$$

Demonstração. É imediato de (2.1.14) e do Teorema 2.1.1. $\square$

Note que uma fórmula explícita para a função $F_n(\beta)$ é obtida se, no Teorema 2.1.1, exibirmos as coordenadas do ponto $\mathbf{m}$. Os primeiros a fazerem isso foram Capocaccia et al. em [CCP87]. Depois vieram Dorlas e Dukes e exibiram em [DD02] uma expressão explícita para a energia livre usando a simples desigualdade de Cauchy-Schwarz. Por questões de formulação, indicaremos aqui a fórmula que foi dada em [JR06], mas que, nas palavras dos próprios autores, é essencialmente a mesma dada em [CCP87] e [DD02].

Para todo $1 \leq j \leq k \leq n$, defina os números $B_{j,k}$ por

$$B_{j,k} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_\star \sqrt{\frac{\sum_{i=j}^k p_i}{\sum_{i=j}^k a_i}}. \quad (2.1.50)$$

Seja

$$\begin{aligned}\beta_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \leq k \leq n} B_{1,k} & J_1^* &\stackrel{\text{def}}{=} \max\{1 \leq i \leq n : B_{1,i} = \beta_1\}; \\ \beta_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \min_{J_1^* < k \leq n} B_{J_1^*+1,k} & J_2^* &\stackrel{\text{def}}{=} \max\{J_1^* < i \leq n : B_{J_1^*+1,i} = \beta_2\},\end{aligned}\tag{2.1.51}$$

mais geralmente,

$$\beta_{\ell+1} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{J_\ell^* < k \leq n} B_{J_\ell^*+1,k} \quad J_{\ell+1}^* \stackrel{\text{def}}{=} \max\{J_\ell^* < i \leq n : B_{J_\ell^*+1,i} = \beta_{\ell+1}\}.\tag{2.1.52}$$

Obviamente, para algum inteiro $\ell_n \in \mathcal{I}_n$, temos que $J_{\ell_n}^* = n$.

Usando a convenção que $J_0^* = \beta_0 = 0$ e $\beta_{\ell_n+1} = \infty$, observe que as sequências $\{J_\ell^*\}_{\ell=1}^{\ell_n}$ e $\{\beta_\ell\}_{\ell=1}^{\ell_n}$ são tais que

$$0 = J_0^* < J_1^* < \dots < J_{\ell_n}^* = n\tag{2.1.53}$$

e

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{\ell_n} < \beta_{\ell_n+1} = \infty.\tag{2.1.54}$$

Então, se $\beta_\ell \leq \beta < \beta_{\ell+1}$ para algum $\ell \in \{1, \dots, \ell_n\}$, o ponto $\mathbf{m} \in \Psi$ é definido por

$$\mathbf{m}_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \beta_k \sqrt{a_i}, & \text{se } i \in \{J_{k-1}^* + 1, \dots, J_k^*\}, \text{ para algum } k = 1, \dots, \ell; \\ \beta \sqrt{a_i}, & \text{se } i \in \{J_\ell^* + 1, \dots, n\}, \end{cases}\tag{2.1.55}$$

e a função $F_n(\beta)$ fica explicitamente dada por

$$F_n(\beta) = \begin{cases} \frac{\beta_*^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} & \text{se } \beta < \beta_1; \\ \beta \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} a_k + \frac{1}{2} \sum_{k=J_\ell^*+1}^n (\beta_*^2 p_k + \beta^2 a_k), & \text{se } \beta_\ell \leq \beta < \beta_{\ell+1}, \\ & \forall 1 \leq \ell \leq \ell_n - 1; \\ \beta \sum_{i=1}^{\ell_n} \beta_i \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} a_k & \text{se } \beta \geq \beta_{\ell_n}. \end{cases}\tag{2.1.56}$$

2.2 A dinâmica

A fim de formular a dinâmica que consideramos neste trabalho, Metropolis, é conveniente olhar o espaço de configurações Ω_V como o hipercubo V -dimensional obtido pela adição de elos entre configurações vizinhas próximas, aquelas configurações que diferem em apenas um spin, equipado com a métrica usual, a distância de *Hamming*, a qual é definida por

$$d_H(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V |\boldsymbol{\sigma}(i) - \boldsymbol{\sigma}'(i)|.\tag{2.2.1}$$

Usaremos o símbolo $\mathcal{E}$ para denotar o conjunto de elos do hipercubo $\Omega_{\mathcal{V}}$, isto é,

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\sigma, \sigma') \in \Omega_{\mathcal{V}} \times \Omega_{\mathcal{V}} : d_H(\sigma, \sigma') = 1\}. \quad (2.2.2)$$

Usaremos também o termo “vértice” para nos referir aos elementos de $\Omega_{\mathcal{V}}$.

Para uma dada realização de $\mathcal{X}$, considere uma cadeia de Markov a tempo discreto com matriz de probabilidades de transição $P \stackrel{\text{def}}{=} (P(\sigma, \sigma'))_{\sigma, \sigma' \in \Omega_{\mathcal{V}}}$ tipo-Metropolis, isto é, para todo $\sigma, \sigma' \in \Omega_{\mathcal{V}}$,

$$P(\sigma, \sigma') \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{V} \exp \left\{ -\beta [H(\sigma') - H(\sigma)]^+ \right\}, & \text{se } (\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}; \\ 1 - \sum_{\sigma'' \neq \sigma} P(\sigma, \sigma''), & \text{se } \sigma = \sigma'; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

em que H é o Hamiltoniano do GREM definido em (2.1.24), $\beta > 0$ é o parâmetro inverso da temperatura e $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max \{a, 0\}$. Naturalmente, podemos associar a matriz P a matriz de taxas de transição $(c(\sigma, \sigma'))_{\sigma, \sigma' \in \Omega_{\mathcal{V}}}$ a qual é única e tal que

$$c(\sigma, \sigma') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \exp \left\{ -\beta [H(\sigma') - H(\sigma)]^+ \right\} \mathbb{1}\{(\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}\}, \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Omega_{\mathcal{V}}. \quad (2.2.4)$$

Chamamos de dinâmica de Metropolis para o GREM ao processo Markoviano a tempo contínuo $Y = (Y_N(t), t \geq 0)$ sobre o espaço de estados $\Omega_{\mathcal{V}}$ gerado pelo operador de Markov $\mathcal{L}$ aplicado sobre funções $f: \Omega_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{R}$ e definido como

$$\mathcal{L}f(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma' \in \Omega} c(\sigma, \sigma') [f(\sigma) - f(\sigma')], \quad \sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}. \quad (2.2.5)$$

Observação 2.2.1. Usando as condições do balanço detalhado, não é difícil verificar que Y é uma cadeia de Markov reversível com respeito a medida de Gibbs μ definida em (2.1.28). Isto significa que μ é também estacionária e ergódica para esta dinâmica.

O semigrupo Markoviano a tempo contínuo P_t associado com a matriz de transição P é definido por

$$P_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k P^k}{k!}. \quad (2.2.6)$$

Consequentemente, o núcleo de transição de Y é dado por

$$P_t(\sigma, \sigma') \stackrel{\text{def}}{=} e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P^k(\sigma, \sigma'), \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Omega_{\mathcal{V}}. \quad (2.2.7)$$

Observação 2.2.2. Uma característica essencial das taxas de transição (2.2.3) é que elas favorecem trajetórias que diminui o Hamiltoniano. Não apenas isso, o fato das energias $\{H(\sigma) : \sigma \in$

Ω_V serem a soma de n variáveis aleatórias gaussianas independentes que carregam a estrutura em níveis dos elementos de Ω_V faz com que as taxas favoreçam trajetórias em que os estados visitados não sejam de níveis muito diferentes, na verdade, que discordem apenas no n -ésimo nível. O outro lado dessa característica é que ela também faz o estudo da dinâmica muito difícil porque tornam os saltos da cadeia um objeto complicado de se analisar, já que dependem da aleatoriedade do Hamiltoniano.

2.3 Resultado Principal

A partir de agora consideraremos o GREM como um sistema fora do equilíbrio submetido à dinâmica de Metropolis em volume finito V . Neste trabalho queremos estender para o GREM o que foi feito por [FIKP98] para o caso do REM. Mais precisamente, estimaremos o inverso da lacuna espectral da dinâmica, isto é, o inverso da diferença entre o primeiro e o segundo autovalor do gerador infinitesimal $\mathcal{L}$ do processo Markoviano Y (ou da matriz de probabilidades de transição P , a lacuna é a mesma) quando o volume tende ao infinito.

É evidente que o primeiro (maior) autovalor de P é 1, e como P é irredutível*, as funções constantes são as únicas autofunções com autovalor 1. Recorrendo agora a usual caracterização de autovalores, conhecida como Princípio min-max de Courant-Fischer (veja, por exemplo, [HHJ90], p. 176; recomendamos também ver [DS91], onde uma descrição do princípio sob um contexto semelhante ao deste trabalho é dada), temos que o inverso da diferença entre 1 e o segundo autovalor de P , que denotamos por τ_N , é dado por

$$\tau_N = \sup\{\tau_N(\phi) : \phi \text{ não constante}\}, \quad (2.3.1)$$

em que ϕ é uma função real definida sobre Ω_V e

$$\tau_N(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Var}_\mu(\phi)}{\mathcal{E}(\phi, \phi)}, \quad (2.3.2)$$

sendo

$$\text{Var}_\mu(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} (\phi(\sigma) - \phi(\sigma'))^2 \mu(\sigma) \mu(\sigma') \quad (2.3.3)$$

a variância de ϕ com respeito a medida de equilíbrio μ , e

$$\mathcal{E}(\phi, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} (\phi(\sigma) - \phi(\sigma'))^2 \mu(\sigma) P(\sigma, \sigma'), \quad (2.3.4)$$

a forma de Dirichlet associado ao semigrupo de Markov P_t .

* Dizemos que uma matriz de probabilidades de transição $P = (P(\sigma, \sigma'))_{\sigma, \sigma' \in \Omega_V}$ é irredutível se para todo $\sigma, \sigma' \in \Omega_V$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $P^k(\sigma, \sigma') > 0$.

Ainda em [DS91] (cf. Proposição 3), para a distância em variação total[‡], vale a seguinte desigualdade:

$$4 \|P_t(\boldsymbol{\sigma}, \cdot) - \mu(\cdot)\|_{\text{var}}^2 \leq \frac{1 - \mu(\boldsymbol{\sigma})}{\mu(\boldsymbol{\sigma})} \exp \left\{ -2t\tau_N^{-1} \right\}. \quad (2.3.6)$$

Isto significa que mesmo que se esteja interessado em exibir um comportamento assintótico exato para o inverso da lacuna, se alguém deseja usar a desigualdade em (2.3.6), então é meramente uma cota superior para τ_N que é importante.

O resultado mais importante deste trabalho é o seguinte:

Teorema 2.3.1. Para todo $\beta > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \tau_N \leq \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_{\ell} \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_{\ell}^*} a_k. \quad (2.3.7)$$

Demonstração. Capítulos 3, 4 e 5. □

Observação 2.3.1. Note que a expressão do lado direito em (2.3.7), vista como função de β , é a mesma expressão que descreve a energia livre do GREM em baixas temperaturas (cf. (2.1.56)). Como consequência deste fato, a Proposição 4.2 em [FIKP98] pode ser obtida como corolário do nosso teorema. Com efeito, basta considerarmos o caso particular $n = 1$. Na verdade, a característica mais importante do Teorema (2.3.1) é que a desigualdade 2.3.7 vale *para todo* $\beta > 0$, *todo* $n \in \mathbb{N}$ fixo e *para quaisquer* escolhas de famílias de números reais positivos $\{p_j\}_{j=1}^n$ e $\{a_j\}_{j=1}^n$ satisfazendo a condição que

$$\sum_{j=1}^n p_j = \sum_{j=1}^n a_j = 1. \quad (2.3.8)$$

[‡]A distância em variação total entre duas medidas de probabilidade μ e ν sobre $\Omega_{\mathcal{V}}$ é definida como

$$\|\mu - \nu\|_{\text{var}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{A \subset \Omega_{\mathcal{V}}} |\mu(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \Omega_{\mathcal{V}}} |\mu(\boldsymbol{\sigma}) - \nu(\boldsymbol{\sigma})|. \quad (2.3.5)$$

Capítulo 3

Estratégia Geral

Este é o primeiro capítulo, de uma série de três, dedicado a provar o Teorema 2.3.1. Nosso primeiro passo, talvez o mais importante, é escolher a técnica que usaremos para provar o teorema. Existem diversas na literatura variando entre analíticas, geométricas etc. (veja por exemplo [SC97]). No entanto, algumas informações precisam ser levadas em conta para essa decisão. Por exemplo, devemos escolher uma técnica de estimação que não demande informações muito precisas sobre a geometria do Hamiltoniano H , uma vez que essa informação é usualmente nula em modelos de vidros de spins, mas que, por outro lado, explore a geometria do grafo induzido pelas probabilidades de transição $P(\cdot, \cdot)$ da cadeia. Além disso, a técnica não pode levar em conta qualquer dependência da configuração inicial do sistema, já que queremos derivar uma estimativa para o inverso da lacuna τ_N que seja válida mesmo quando o processo inicia da pior configuração inicial possível, a de energia mínima.

É bem conhecido que cotas para o inverso da lacuna de um processo de Markov reversível podem ser obtidas usando desigualdades do tipo Poincaré, isto é, desigualdades do tipo

$$\forall \phi, \quad \text{Var}_\mu(\phi) \leq K \cdot \mathcal{E}(\phi, \phi) \quad (3.0.1)$$

para algum constante positiva K , pois, da definição (2.3.1), a desigualdade acima é equivalente a

$$\tau_N \leq K. \quad (3.0.2)$$

O propósito deste capítulo é apresentar a ferramenta que escolhemos: a *desigualdade de Poincaré* introduzida por Sinclair [Sin91] (cf. Teorema 5). Trata-se de uma versão modificada da desigualdade de Poincaré derivada por Diaconis e Stroock [DS91], uma desigualdade baseada em uma técnica de caminhos criada para se obter estimativas para o segundo maior autovalor e para a lacuna espectral de uma cadeia de Markov reversível.

O capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 3.1 está dedicada simplesmente à descrição da desigualdade de Poincaré dada em [Sin91] para o contexto da dinâmica de Metropolis para o GREM. Na última seção, a Seção 3.2, motivaremos e construiremos cuidadosamente a coleção de caminhos com a qual derivamos a cota superior para o inverso da lacuna. Encerraremos o capítulo obtendo as primeiras estimativas e, em um breve argumento, mostraremos que a desigualdade em (2.3.7) é verdadeira quando assumimos um regime de temperaturas baixas para o sistema.

3.1 A Desigualdade de Poincaré

O objetivo desta seção é descrever precisamente a desigualdade de Poincaré dada por [Sin91]. Ela é, em outras palavras, a desigualdade derivada por [DS91] expressada em termos dos chamados caminhos canônicos de Jerrum e Sinclair [SJ89] (cf. Proposição 1' em [DS91]). Entendemos aqui por *caminho canônico* entre dois vértices distintos de Ω_V um caminho que usa apenas transições válidas de P .

A descrição da desigualdade segue. O primeiro ingrediente é um grafo com vértices em Ω_V . Escolhemos o próprio Ω_V visto como o hipercubo V -dimensional. Para cada par de vértices distintos $\eta, \eta' \in \Omega_V$, escolhemos um caminho $\gamma_{\eta, \eta'}$ indo de η para η' no grafo Ω_V . Um caminho γ em Ω_V é uma sequência de vértices

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_0, \dots, \sigma_k), \text{ com } (\sigma_{i-1}, \sigma_i) \in \mathcal{E}, \quad i = 1, \dots, k \quad (3.1.1)$$

em que $\mathcal{E}$ está definido em (2.2.2). Equivalentemente, γ pode ser visto como uma sequência de elos

$$\gamma = (e_1, \dots, e_k), \text{ com } e_i \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_{i-1}, \sigma_i), \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.1.2)$$

O caminho pode ter vértices repetidos, mas um dado elo aparece no máximo uma vez em $\gamma_{\eta, \eta'}$ (os caminhos são auto-evitantes). Denotemos por

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma_{\eta, \eta'} : \eta, \eta' \in \Omega_V\} \quad (3.1.3)$$

o conjunto dos caminhos – exatamente um para cada par de vértices distintos $\eta, \eta' \in \Omega_V$.

Com tal família de caminhos, denotando por

$$K \stackrel{\text{def}}{=} K_N(\Gamma) = \max_{e \in \mathcal{E}} \frac{1}{Q(e)} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} |\gamma_{\eta, \eta'}| \mu(\eta) \mu(\eta'), \quad (3.1.4)$$

em que o máximo está sobre todos os elos $e = (\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}$, $Q(e) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\sigma)P(\sigma, \sigma')$, o somatório está sobre todos os caminhos $\gamma_{\eta, \eta'}$ em Γ indexados por seus extremos η e η' que passam pelo

elo e e $|\gamma_{\eta, \eta'}|$ denota o comprimento (número de elos) do caminho $\gamma_{\eta, \eta'}$, segue do Teorema 5 em [Sin91] (ou Proposição 1' em [DS91]) que

$$\tau_N \leq K. \quad (3.1.5)$$

Para a dinâmica de Metropolis em (2.2.3), dado um elo $e = (\sigma, \sigma')$, obtemos que

$$\frac{1}{Q(e)} = V Z e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]}, \quad (3.1.6)$$

em que $a \vee b = \max\{a, b\}$. Então, de (2.1.28) e (3.1.6), a quantidade K pode ser escrita mais explicitamente como

$$K = \frac{V}{Z} \max_{e=(\sigma, \sigma')} e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} |\gamma_{\eta, \eta'}| e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \quad (3.1.7)$$

Note que a qualidade da estimativa em (3.1.7) depende do quão sábia é a escolha do conjunto de caminhos. Desta forma, nosso próximo passo será então construir uma família de caminhos sobre Ω_V que seja completa, isto é, todo par de vértices distintos de Ω_V é extremo de algum caminho da família, e que todos os caminhos sejam auto-evitantes.

3.2 O Conjunto de Caminhos

Como em [FIKP98], queremos construir um conjunto de caminhos tal que a principal contribuição para o termo (3.1.7) venha do somatório. No que segue, apresentaremos algumas motivações para a construção e como construímos o conjunto completo de caminhos Γ .

3.2.1 Motivações e Escolha do Conjunto de Caminhos

Em um breve resumo, queremos construir um conjunto de caminhos auto-evitantes que seja completo, que o caminho mais longo tenha comprimento no máximo V e que todos os caminhos desse conjunto não passem por sítios com alta energia (definiremos o que significa isso mais adiante). Esta última propriedade requerida é para garantir que o fator $e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]}$ dentro do sinal de max em (3.1.7) contribua apenas como um termo de erro para K . Na sequência, apresentaremos algumas razões que nos motivam a construir um conjunto satisfazendo essas propriedades.

Vamos supor inicialmente que o termo $H(\sigma') \vee H(\sigma)$ dentro do sinal de max em (3.1.7) é tal que, para todo $\rho > 0$ e todo elo $e = (\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}$,

$$H(\sigma') \vee H(\sigma) \leq \rho N. \quad (3.2.1)$$

Esta última condição indica que $e^{\beta[H(\sigma') \vee H(\sigma)]}$ contribui apenas como um termo de erro para (3.1.7). Neste caso, temos que

$$K \leq \frac{V e^{\beta \rho N}}{Z} \max_{e=(\sigma, \sigma')} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} |\gamma_{\eta, \eta'}| e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \quad (3.2.2)$$

Agora, se escolhermos um conjunto de caminhos Γ satisfazendo, em primeiro lugar, a condição,

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad |\gamma| \leq V, \quad (3.2.3)$$

então poderíamos ignorar a contribuição dada por $|\gamma_{\eta, \eta'}|$ em (3.2.2), já que poderíamos sempre cotá-la por V e, como $\log V = o(N)$, isto implicaria lidar apenas com

$$\max_{e \in \mathcal{E}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \quad (3.2.4)$$

e segundo, para qualquer elo $e = (\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}$, a soma

$$\sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \quad (3.2.5)$$

fatore em um produto de duas somas as quais possam ser vistas como funções de *sub*partição, em que o prefixo *sub* significa que são funções de partição de GREM's com as mesmas famílias de parâmetros que o GREM inicial, isto é, $\{p_j\}_{j=1}^n$ e $\{a_j\}_{j=1}^n$, mas com volumes que são frações de V . Um argumento para estimar essas duas somas seguiria de uma combinação das estratégias usadas em [FIKP98] e [CCP87], com as devidas adaptações.

Observação 3.2.1. Observe que, qualquer que seja o conjunto completo de caminhos Γ que consideremos em (3.2.2), se ele satisfaz a condição (3.2.3), podemos facilmente obter uma cota superior para τ_N se impormos, adicionalmente, um regime de temperaturas baixas para o sistema, isto é, se $\beta \geq \beta_{\ell_n}$. De fato, não é difícil ver que, qualquer que seja o elo $e = (\sigma, \sigma') \in \mathcal{E}$,

$$\sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} |\gamma_{\eta, \eta'}| e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \leq V \left(\sum_{\eta \in \Omega_V} e^{-\beta H(\eta)} \right) \left(\sum_{\eta' \in \Omega_V} e^{-\beta H(\eta')} \right) = V Z^2, \quad (3.2.6)$$

e portanto, de (3.2.2),

$$K \leq V^2 e^{\rho \beta N} Z. \quad (3.2.7)$$

Como consequência, para todo $\beta > 0$, de (3.1.5) e do Corolário 2.1.1, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \tau_N \leq \limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log K \leq F_n(\beta) + \rho \beta. \quad (3.2.8)$$

Usando agora o fato que a desigualdade acima vale para todo $\rho > 0$, se $\beta \geq \beta_{\ell_n}$, então, combinando a desigualdade acima com (2.1.56), temos que

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \tau_N \leq \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_{\ell} \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_{\ell}^*} a_k \quad (3.2.9)$$

e o Teorema 2.3.1 fica provado para o regime de temperaturas baixas. Voltando em (3.2.8), observe ainda que a cota obtida é válida para todo $\beta > 0$. A questão neste caso é que, quando mudamos de regime de temperatura, de baixas ($\beta \geq \beta_{\ell_n}$) para intermediárias ($\beta_{\ell} \leq \beta < \beta_{\ell+1}$) $_{\ell=1}^{\ell_n-1}$ ou altas temperaturas ($\beta < \beta_1$), $F_n(\beta)$ muda de uma função linear para uma função quadrática de β (veja (2.1.56)) que, em geral, é maior que a linear. De fato, se $\beta_{\ell} \leq \beta < \beta_{\ell+1}$, para algum $\ell \in \{0, \dots, \ell_n - 1\}$, então,

$$\begin{aligned}
& F_n(\beta) - \beta \sum_{i=1}^{\ell_n} \beta_i \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} a_k \\
& \stackrel{(2.1.56)}{=} \beta \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} a_k + \frac{1}{2} \sum_{k=J_{\ell}^*+1}^n (\beta_{\star}^2 p_k + \beta^2 a_k) - \beta \sum_{i=1}^{\ell_n} \beta_i \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} a_k \\
& \stackrel{(2.1.52)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=\ell+1}^{\ell_n} \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} (\beta_i^2 - 2\beta\beta_i + \beta^2) a_k \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=\ell+1}^{\ell_n} \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} (\beta_i - \beta)^2 a_k > 0.
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

O problema aqui é que não podemos realmente excluir a possibilidade de que $H(\sigma) \vee H(\sigma')$ seja positivo e grande, pois não há como evitar, sempre, que os caminhos visitem sítios com alta energia. Isto segue porque Γ é um conjunto completo de caminhos. Entretanto, esta situação pode ser contornada. Uma abordagem geral para isso consiste em construir, para cada par de sítios distintos η e η' de $\Omega_{\mathcal{V}}$, uma família de caminhos suficientemente grande de tal forma que asseguremos, com alta probabilidade, a existência de, ao menos, um caminho indo de η para η' que evita passar por sítios de alta energia. Neste caso, sítios com alta energia aparecem somente nos extremos dos caminhos, implicando que suas contribuições para o termo do lado direito de (3.1.7) sejam canceladas com algum dos fatores de $e^{-\beta H(\eta)}$ ou $e^{-\beta H(\eta')}$ que aparece dentro do somatório. Escolhendo estes caminhos para o conjunto Γ , exatamente um para cada par η para η' , obtemos um conjunto completo de caminhos tais que, com alta probabilidade, o fator $e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]}$ contribui apenas como termo de erro. Começaremos a construção do conjunto Γ a seguir.

Iniciaremos a construção da família de caminhos Γ relembrando, veja (2.1.3) e (2.1.19), que o conjunto de partículas $\mathcal{V}$ de volume V pode ser decomposto como a união de n subconjuntos $\mathcal{V}_j$ de volume V_j cada um podendo ser escrito como a união de B blocos $\mathcal{V}_j(i)$ de cardinalidade v_j , ou seja,

$$\mathcal{V} = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{V}_j = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^B \mathcal{V}_j(i). \tag{3.2.11}$$

Dada uma configuração $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Omega_{\mathcal{V}}$, a decomposição acima induz às configurações $\sigma_j \in \Omega_{\mathcal{V}_j}$ a seguinte decomposição,

$$\sigma_j \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{j,1}, \sigma_{j,2}, \dots, \sigma_{j,B}. \quad (3.2.12)$$

em que para cada $j = 1, \dots, n$ e cada $i = 1, \dots, B$, $\sigma_{j,i} = (\sigma_{j,i}(\ell))_{\ell \in \mathcal{V}_j(i)}$ em que $\sigma_{j,i} : \mathcal{V}_j(i) \rightarrow \{-1, +1\}$. O ponto chave desta decomposição é que há o mesmo número de blocos, B , em todos os conjuntos $\mathcal{V}_j$, mudando apenas a cardinalidade dos blocos que depende do nível considerado. Essa “igualdade” entre os níveis será fundamental para conseguirmos escrever (3.2.5) como produto de duas funções de subpartição e também simplificar nossas estimativas.

Dados $\eta \neq \eta'$, vamos denotar o conjunto de discrepâncias entre η e η' por $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\eta, \eta')$, isto é, o subconjunto de $\mathcal{V}$ em que as duas configurações discordam. Ele pode ser decomposto de acordo com (3.2.11) como

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\eta, \eta') = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{D}_{\mathcal{V}_j}(\eta, \eta') = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^B \mathcal{D}_{\mathcal{V}_j(i)}(\eta, \eta'), \quad (3.2.13)$$

em que $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_j(i)}(\eta, \eta') \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ se não houver discrepâncias em $\mathcal{V}_j(i)$.

Seja $\Gamma^1, \dots, \Gamma^{v_1}$ uma família de conjuntos de caminhos, tal que

$$\Gamma^\ell \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \gamma_{\eta, \eta'}^\ell : \eta, \eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}, \eta \neq \eta' \right\}, \quad \ell = 1, \dots, v_1, \quad (3.2.14)$$

em que os caminhos $\gamma_{\eta, \eta'}^\ell$ são construídos usando o seguinte algoritmo:

Definição 3.2.1 (Algoritmo de construção do caminho $\gamma_{\eta, \eta'}^\ell$). Para $\ell \in \mathcal{V}_1(1)$, seja $\gamma_{\eta, \eta'}^\ell$ o caminho construído de η para η' trocando-se os spins dos pontos em $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\eta, \eta')$ começando pela coordenada ℓ de acordo com as regras seguintes.

Passo 1. Considere o bloco $\mathcal{V}_1(1)$ e cheque se $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\eta, \eta') \cap \{\ell, \ell + 1, \dots, v_1\} = \emptyset$.

Se sim, então vá para o Passo 2.

Se não, então troque sucessivamente os spins das coordenadas em $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\eta, \eta') \cap \{\ell, \ell + 1, \dots, v_1\}$. Vá para o Passo 2.

Passo 2. Cheque se $\bigcup_{j=2}^n \mathcal{D}_{\mathcal{V}_j(1)}(\eta, \eta') = \emptyset$.

Se sim, então vá para o Passo 3.

Se não, considere o bloco $\mathcal{V}_{n_1}(1)$, em que

$$n_1 \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ 2 \leq j \leq n : \mathcal{D}_{\mathcal{V}_j(1)}(\eta, \eta') \neq \emptyset \right\} \quad (3.2.15)$$

é o primeiro nível ≥ 2 em que as configurações $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\eta}'$ discordam no bloco 1, e troque sucessivamente os spins das coordenadas em $\mathcal{V}_{n_1}(1)$. Em seguida, vá para o bloco $\mathcal{V}_{n_1+1}(1)$ e faça o mesmo que foi feito em $\mathcal{V}_{n_1}(1)$ se isso for possível, então vá para o bloco $\mathcal{V}_{n_1+2}(1)$ e troque sucessivamente os spins necessários, e continue assim até o último nível, inclusive. Quando $n_1 + k = n$, então todas as discrepâncias em $\cup_{j=2}^n \mathcal{D}_{\mathcal{V}_j(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ estão zeradas. Vá para o Passo 3.

Passo 3. Seja

$$i^* \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ 2 \leq i \leq B : \cup_{j=1}^n \mathcal{D}_{\mathcal{V}_j(i)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') \neq \emptyset \right\} \quad (3.2.16)$$

e

$$j_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ 1 \leq j \leq n : \mathcal{D}_{\mathcal{V}_j(i)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') \neq \emptyset \right\}, \quad i = 2, \dots, B \quad (3.2.17)$$

o primeiro nível em que as configurações $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\eta}'$ discordam exatamente no bloco $i \geq 2$.

Considere então o bloco $\mathcal{V}_{j_i^*}(i^*)$ e troque sucessivamente todos os spins das coordenadas em $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_{j_i^*}(i^*)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$. Em seguida, vá para o bloco $\mathcal{V}_{j_i^*+1}(i^*)$ e faça o mesmo que foi feito em $\mathcal{V}_{j_i^*}(i^*)$, caso seja possível. Então, vá para o bloco $\mathcal{V}_{j_i^*+2}(i^*)$ e troque sucessivamente os spins necessários, e continue assim até o último nível. Quando $j_i^* + k = n$, todas as discrepâncias em $\cup_{j=1}^n \mathcal{D}_{\mathcal{V}_j(i^*)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ estão zeradas.

Agora, considere o bloco $\mathcal{V}_{j_i^*+1}(i^* + 1)$ e faça o mesmo que foi feito em $\mathcal{V}_{j_i^*}(i^*)$ se isso for possível. Depois, faça o mesmo com $\mathcal{V}_{j_i^*+2}(i^* + 2)$ e continue assim até o último bloco. Quando $i^* + k = B$, todas as discrepâncias em $\cup_{j=1}^n \cup_{i=2}^B \mathcal{D}_{\mathcal{V}_j(i)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ estão zeradas. Vá para o Passo 4.

Passo 4. Volte para o bloco $\mathcal{V}_1(1)$ e cheque se $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') \cap \{1, \dots, \ell - 1\} = \emptyset$.

Se sim, então as discrepâncias em $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ foram zeradas e o caminho está construído.

Se não, então troque sucessivamente os spins das coordenadas em $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') \cap \{1, \dots, \ell - 1\}$ e o caminho está construído.

Observação 3.2.2. Note que, por construção, todos os caminhos em $\cup_{\ell=1}^{\nu_1} \Gamma^\ell$ são auto-evitantes e tem comprimento no máximo V .

Nossa estratégia aqui será construir Γ usando os caminhos do conjunto $\cup_{\ell=1}^{\nu_1} \Gamma^\ell$. Vale relembrar então que devemos escolher para Γ exatamente um caminho em $\cup_{\ell=1}^{\nu_1} \Gamma^\ell$ para cada par de sítios distintos de $\Omega_{\mathcal{V}}$. Além disso, como foi motivado no início desta seção, precisamos levar em conta para essas escolhas o fato que os caminhos devem evitar configurações de alta energia. Para tanto, devemos primeiro introduzir o que venha ser uma configuração de alta energia.

Definição 3.2.2 (Interior de um Caminho). Dados $\eta, \eta' \in \Omega_V$ e um caminho $\gamma_{\eta, \eta'}$ indo de η à η' sobre Ω_V , definimos por

$$\gamma_{\eta, \eta'}^{\text{int}} = \gamma_{\eta, \eta'} \setminus \{\eta, \eta'\}, \quad (3.2.18)$$

o conjunto dos pontos interiores do caminho $\gamma_{\eta, \eta'}$.

Definição 3.2.3 (Sítio, Caminho e Conjunto Bom). Dado $\rho > 0$ arbitrário, dizemos que um sítio σ é *bom* (de baixa energia) se $H(\sigma) \leq \rho N$. Se σ não é bom, dizemos que ele é *ruim* (de alta energia). Dizemos que um caminho γ é bom se todos os seus pontos interiores são bons e, que um conjunto de caminhos é bom se todos os seus elementos são bons.

Observação 3.2.3. Pela definição acima, note que os caminhos que estamos interessados para Γ são os ditos bons. Obviamente, por causa dessa definição, a “bondade” de um caminho é uma propriedade aleatória. Isso significa que o conjunto Γ será um conjunto aleatório de caminhos.

Definição 3.2.4. Para cada par de vértices $\sigma, \sigma' \in \Omega_V$, definimos a distância de *Hamming* restrito ao bloco $\mathcal{V}_1(1)$ entre σ e σ' por

$$d_1(\sigma, \sigma') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\ell \in \mathcal{V}_1(1)} |\sigma_{1,1}(\ell) - \sigma'_{1,1}(\ell)| = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{v_1} |\sigma_{1,1}(\ell) - \sigma'_{1,1}(\ell)|. \quad (3.2.19)$$

A coleção de caminhos Γ é então construída da seguinte forma.

Definição 3.2.5. Seja $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$ arbitrário.

(i) Para pares de sítios distintos (η, η') tais que $d_1(\eta, \eta') \geq \kappa v_1$, se existir um caminho bom em $\{\gamma_{\eta, \eta'}^\ell\}_{\ell=1}^{v_1}$, então escolha o primeiro e coloque-o em Γ ; caso contrário, escolha $\gamma_{\eta, \eta'}^1$.

(ii) Para pares de sítios distintos (η, η') tais que $d_1(\eta, \eta') < \kappa v_1$, se existir um sítio bom, digamos $\omega \in \Omega_V$, tal que $d_1(\eta, \omega) \geq \kappa v_1$, $\kappa v_1 \leq d_1(\omega, \eta') = d_H(\omega, \eta') \leq 2\kappa v_1$ e existam caminhos bons, um em $\{\gamma_{\eta, \omega}^\ell\}_{\ell=1}^{v_1}$ e outro em $\{\gamma_{\omega, \eta'}^\ell\}_{\ell=1}^{v_1}$ tais que a união destes dois caminhos bons seja um caminho auto-evitante e tenha comprimento no máximo V , então tome-o como o caminho conectando η e η' em Γ ; caso contrário, escolha $\gamma_{\eta, \eta'}^1$.

É evidente que o conjunto Γ definido acima é um conjunto completo de caminhos auto-evitantes. Além disso, todos os seus elementos têm comprimento no máximo $V \leq N$. Logo, para o conjunto Γ dado acima, por (3.1.7), é imediato que

$$K \leq \frac{N^2}{Z} \max_{e=(\sigma, \sigma')} e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \quad (3.2.20)$$

O ponto realmente importante da Definição 3.2.5 é que para qualquer $\rho > 0$ e qualquer $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, para todo N grande suficiente, com uma altíssima probabilidade, o conjunto de caminhos Γ é bom. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1. Para todo $\rho > 0$ e todo $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, o conjunto Γ acima é bom para todo N grande o suficiente.

Demonstração. A ideia para provar esta afirmação é bem simples. Argumentaremos que, para qualquer par arbitrário de sítios distintos (η, η') de Ω_V , a probabilidade de não encontrarmos nenhum caminho bom conectando eles tal como descrito na Definição 3.2.5 é menor do que um termo somável $e^{-c(\rho, \kappa)N}$ para alguma constante positiva $c(\rho, \kappa)$ que depende de ρ e κ , os quais podemos escolher tão pequenos quanto quisermos. O resultado seguirá então do Primeiro Lema de Borel-Cantelli.

Começaremos relembrando que, se X é uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$, então

$$\mathbb{P}[X > x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2} \leq e^{-x^2/2}, \quad \forall x \geq 1. \quad (3.2.21)$$

Assim, dado $\rho > 0$, não difícil ver que, para todo $\sigma \in \Omega_V$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\sigma \text{ é ruim}] &= \mathbb{P}[H(\sigma) > \rho N] = \mathbb{P}\left[\frac{H(\sigma)}{\sqrt{V}} > \rho\sqrt{N}\sqrt{\frac{N}{V}}\right] \\ &\leq \mathbb{P}[X > \rho\sqrt{N}] \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}\rho^2 N}, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

para todo N grande o suficiente. Isso implica então que para todo $\gamma \in \Gamma$, se N é grande o suficiente,

$$\mathbb{P}[\gamma \text{ ser ruim}] = \mathbb{P}[\exists \sigma \in \gamma^{\text{int}} \text{ ruim}] \leq \underbrace{|\gamma^{\text{int}}|}_{\leq N} e^{-\frac{1}{2}\rho^2 N} \leq e^{-\frac{1}{4}\rho^2 N}. \quad (3.2.23)$$

A partir desse ponto, assumiremos que N é grande o suficiente de tal forma que as desigualdades em (3.2.22) e (3.2.23) são verdade.

i. Considere primeiro os pares de sítios distintos (η, η') tais que $d_1(\eta, \eta') \geq \kappa v_1$. Para obtermos uma cota para a probabilidade de não encontrarmos nenhum caminho bom conectando esses sítios exponencialmente pequena, vamos precisar introduzir aqui um novo conceito, a noção de caminhos independentes.

Definição 3.2.6 (Caminhos Independentes). Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ uma família de caminhos sobre $\Omega_{\mathcal{V}}$. Dizemos que esses caminhos são independentes se, quaisquer que sejam $\sigma^1 \in \gamma_1^{\text{int}}, \dots, \sigma^k \in \gamma_k^{\text{int}}$, as variáveis aleatórias $H(\sigma^1), \dots, H(\sigma^k)$ são independentes.

Observação 3.2.4. Da Observação 2.1.4, note que se uma família de caminhos $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sobre $\Omega_{\mathcal{V}}$ é tal que para todo $\sigma^1 \in \gamma_1^{\text{int}}, \dots, \sigma^k \in \gamma_k^{\text{int}}$,

$$\sigma_1^1 \neq \sigma_1^2 \neq \dots \neq \sigma_1^k, \quad (3.2.24)$$

isto é, o nível 1 de $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^k$ são todos diferentes um do outro, então essa é uma família de caminhos independentes.

Essa última observação motiva as próximas definições.

Definição 3.2.7 (Caminhos 1-interior-disjunto). Seja $\eta, \eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}$ sítios distintos e seja $\gamma_{\eta, \eta'}$ um caminho indo de η à η' . Definimos por

$$\gamma_{\eta, \eta'}^{1\text{-int}} = \left\{ \sigma_1 = \sigma|_{\mathcal{V}_1} : \sigma \in \gamma_{\eta, \eta'}^{\text{int}} \right\}, \quad (3.2.25)$$

o conjunto das configurações do nível 1 dos pontos interiores do caminho $\gamma_{\eta, \eta'}$. Diremos que uma família de caminhos de η para η' sobre $\Omega_{\mathcal{V}}$, digamos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, é 1-interior-disjunto se $\gamma_\ell^{1\text{-int}} \cap \gamma_m^{1\text{-int}} = \emptyset$ para todo $1 \leq \ell \neq m \leq k$.

No resultado seguinte, Lema 3.2.1, nós exibimos uma condição suficiente para a existência de caminhos independentes entre pares de sítios de $\Omega_{\mathcal{V}}$.

Lema 3.2.1. Sejam $\eta, \eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}$. Se $d_1(\eta, \eta') = k \geq 1$, então existem k caminhos independentes em $\{\gamma_{\eta, \eta'}^\ell\}_{\ell=1}^{v_1}$.

Demonstração. Vamos denotar por $1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k \leq v_1$ todas as coordenadas em que $\eta_{1,1}$ e $\eta'_{1,1}$ discordam. A ideia é mostrar que os caminhos $\gamma_{\eta, \eta'}^{\ell_1}, \dots, \gamma_{\eta, \eta'}^{\ell_k}$ formam uma família 1-interior-disjunta. Se isso for verdade, a conclusão de independência segue imediatamente da Observação 3.2.4.

De fato, sejam $1 \leq i \neq j \leq k$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $i < j$. Considere o caminho $\gamma_{\eta, \eta'}^{\ell_j}$ e note, da Definição 3.2.1, que os primeiros spins trocados sucessivamente em η são $\eta_{1,1}(\ell_j), \dots, \eta_{1,1}(\ell_k)$ e os últimos são $\eta_{1,1}(\ell_1), \dots, \eta_{1,1}(\ell_{j-1})$. Então, se $\sigma' \in \gamma_{\eta, \eta'}^{\ell_j, 1\text{-int}}$, ele é tal que os spins $\sigma'_{1,1}(\ell_1), \dots, \sigma'_{1,1}(\ell_k)$ são iguais a

$$\eta_{1,1}(\ell_1), \dots, \eta_{1,1}(\ell_i), \dots, \eta_{1,1}(\ell_{j-1}), \eta'_{1,1}(\ell_j), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_{j+m}), \eta_{1,1}(\ell_{j+m+1}), \dots, \eta_{1,1}(\ell_k) \quad (3.2.26)$$

$$m = 0, \dots, k - j - 2;$$

ou

$$\eta_{1,1}(\ell_1), \dots, \eta_{1,1}(\ell_i), \dots, \eta_{1,1}(\ell_{j-1}), \eta'_{1,1}(\ell_j), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_k) \quad (3.2.27)$$

ou

$$\eta'_{1,1}(\ell_1), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_{1+m}), \eta_{1,1}(\ell_{2+m}), \dots, \eta_{1,1}(\ell_i), \dots, \eta_{1,1}(\ell_{j-1}), \eta'_{1,1}(\ell_j), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_k) \quad (3.2.28)$$

$$m = 0, \dots, i - 2$$

ou

$$\eta'_{1,1}(\ell_1), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_{i-1}), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_{i+m}), \eta_{1,1}(\ell_{i+m+1}), \dots, \eta_{1,1}(\ell_{j-1}), \eta'_{1,1}(\ell_j), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_k) \quad (3.2.29)$$

$$m = 0, \dots, j - i - 2.$$

Observação 3.2.5. Nós queremos enfatizar aqui que, por consequência do Passo 4 da Definição 3.2.1, os últimos passos do caminho $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^{\ell_j}$ são dados pela troca dos spins das coordenadas em $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') \cap \{1, \dots, l_j - 1\}$. Esse detalhe é fundamental para essa demonstração.

Por outro lado, agora considerando o caminho $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^{\ell_i}$, se $\boldsymbol{\sigma} \in \gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^{\ell_i, 1-\text{int}}$, então ele é tal que os spins $\sigma_{1,1}(\ell_1), \dots, \sigma_{1,1}(\ell_k)$ são iguais a

$$\eta_{1,1}(\ell_1), \dots, \eta_{1,1}(\ell_{i-1}), \eta'_{1,1}(\ell_i), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_{i+r}), \eta_{1,1}(\ell_{i+r+1}), \dots, \eta_{1,1}(\ell_k) \quad (3.2.30)$$

$$r = 0, \dots, k - i - 2;$$

ou

$$\eta_{1,1}(\ell_1), \dots, \eta_{1,1}(\ell_{i-1}), \eta'_{1,1}(\ell_i), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_j), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_k) \quad (3.2.31)$$

ou

$$\eta'_{1,1}(\ell_1), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_{1+r}), \eta_{1,1}(\ell_{2+r}), \dots, \eta_{1,1}(\ell_{i-1}), \eta'_{1,1}(\ell_i), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_j), \dots, \eta'_{1,1}(\ell_k) \quad (3.2.32)$$

$$r = 0, \dots, i - 3.$$

Por simples checagem, observe que nas sequências em (3.2.26), (3.2.27) e (3.2.28), o spin $\sigma'_{1,1}(\ell_i) = \eta_{1,1}(\ell_i)$ por exemplo, enquanto que nas sequências em (3.2.30), (3.2.31) e (3.2.32), $\sigma_{1,1}(\ell_i) = \eta'_{1,1}(\ell_i)$, e nas sequências em (3.2.29), $\sigma'_{1,1}(\ell_{i-1}) = \eta'_{1,1}(\ell_{i-1})$ por exemplo, mas em (3.2.30), (3.2.31) e (3.2.32), $\sigma_{1,1}(\ell_{i-1}) = \eta_{1,1}(\ell_{i-1})$. Ou seja, $\sigma_1 \neq \sigma'_1$. Agora, como $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}'$ são quaisquer, segue que $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^{\ell_i, 1-\text{int}} \cap \gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^{\ell_j, 1-\text{int}} = \emptyset$, o que implica $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^{\ell_1}, \dots, \gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^{\ell_k}$ ser uma família 1-interior-disjunta, concluindo a prova. $\square$

Segue portanto do Lema 3.2.1 que, qualquer que seja $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ tal que $d_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') \geq \kappa_{\mathcal{V}_1}$, existe $W_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'} \subset \{\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^{\ell}\}_{\ell=1}^{\mathcal{V}_1}$ subconjunto de caminhos de $\boldsymbol{\eta}$ para $\boldsymbol{\eta}'$ com no mínimo $\kappa_{\mathcal{V}_1}$ caminhos 1-interior-disjuntos (e portanto, independentes) e de comprimento no máximo N . Logo, de (3.2.23)

obtemos que

$$\mathbb{P} [W_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'} \text{ ser ruim}] \leq (\mathbb{P} [\gamma \text{ ser ruim}])^{\kappa v_1} \leq e^{-\frac{1}{4}\kappa\rho^2 v_1 N}. \quad (3.2.33)$$

Como o número de tais pares de configurações $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ não é maior que 4^N , então, quaisquer que sejam $\rho > 0$ e $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, existe $N_1 = N_1(\rho, \kappa) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{N \geq N_1} \sum_{(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')} \mathbb{P} \left[\bigcap_{\ell=1}^{v_1} \{ \gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^\ell \text{ é ruim} \} \right] \leq \sum_{N \geq N_1} 4^N e^{-\frac{1}{4}\kappa\rho^2 v_1 N} < \infty, \quad (3.2.34)$$

pois $v_1 \uparrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$. Isto mostra que para todo $\rho > 0$ e todo $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$,

$$\sum_{N \geq 1} \sum_{(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')} \mathbb{P} \left[\bigcap_{\ell=1}^{v_1} \{ \gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^\ell \text{ é ruim} \} \right] < \infty, \quad (3.2.35)$$

e a conclusão segue do Primeiro Lema de Borel-Cantelli.

ii. Considere agora os pares de sítios distintos $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ tais que $d_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') < \kappa v_1$. Seja $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}$ o conjunto de discrepâncias entre $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\eta}'$ em $\mathcal{V}_1(1)$ (cf. (3.2.13)) e considere o conjunto $\Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$ definido como

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \boldsymbol{\sigma} \in \Omega_{\mathcal{V}} : \boldsymbol{\sigma}|_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')} = \boldsymbol{\eta}|_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')} , d_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = \lceil \kappa v_1 \rceil \\ \text{e } \boldsymbol{\sigma}|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \boldsymbol{\eta}'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \}, \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

em que a condição “ $\boldsymbol{\sigma}|_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')} = \boldsymbol{\eta}|_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')}$ ” não está presente se $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)} = \emptyset$. Aqui, $\boldsymbol{\sigma}|_S = (\boldsymbol{\sigma}(\ell))_{\ell \in S}$ é a restrição da configuração $\boldsymbol{\sigma}$ às coordenadas no conjunto S .

Dado $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$, seja $\gamma_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}'}}$ o caminho começando na configuração $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, construído trocando-se sucessivamente os spins das coordenadas em $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$. Aqui, estamos assumindo que $\gamma_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}'}} = \emptyset$ quando $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') = \emptyset$.

Agora, não é difícil ver que

$$\forall \tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}, \quad \kappa v_1 \leq d_1(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\eta}') = d_H(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\eta}') \leq 2\kappa v_1. \quad (3.2.37)$$

Isso significa que os elementos de $\Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$ são bons candidatos a satisfazer a condição (ii) da Definição 3.2.5.

Então, nosso primeiro passo aqui será provar que existe, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, ao menos um $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ em $\Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$ tal que todos os pontos de $\gamma_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}'}}$ são bons.

Lema 3.2.2. Dado $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, para todo par $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ fixado tal que $d_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') < \kappa v_1$, vale que

$$|\Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}| \geq (2\kappa)^{-\kappa v_1}. \quad (3.2.38)$$

Demonstração. Fixado $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$, o número de elementos de $\Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$ é igual ao número de subconjuntos com $\lceil \kappa v_1 \rceil$ elementos do conjunto $\mathcal{V}_1(1) \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$. Logo,

$$|\Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}| = \binom{v_1 - d_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')}{\lceil \kappa v_1 \rceil} \geq \binom{v_1 - \lfloor \kappa v_1 \rfloor}{\lceil \kappa v_1 \rceil}, \quad (3.2.39)$$

e usando que $\binom{m}{k} \geq \left(\frac{m}{k}\right)^k$ para $m \geq k \geq 1$ e as desigualdades básicas para $\lfloor \cdot \rfloor$ e $\lceil \cdot \rceil$, obtemos

$$\binom{v_1 - \lfloor \kappa v_1 \rfloor}{\lceil \kappa v_1 \rceil} \geq \left(\frac{(1 - \kappa)v_1}{\kappa v_1 + 1}\right)^{\kappa v_1} = \left(\frac{1 - \kappa}{\kappa + \frac{1}{v_1}}\right)^{\kappa v_1}. \quad (3.2.40)$$

Agora, como $v_1 \uparrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$, dado $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, temos que $\frac{1}{v_1} \leq \kappa - 2\kappa^2$ para todo N grande o suficiente, então,

$$|\Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}| \geq \left(\frac{1 - \kappa}{\kappa + \frac{1}{v_1}}\right)^{\kappa v_1} \geq \left(\frac{1 - \kappa}{\kappa + \kappa - 2\kappa^2}\right)^{\kappa v_1} = \left(\frac{1}{2\kappa}\right)^{\kappa v_1} \quad (3.2.41)$$

□

Logo, pelo lema acima, podemos construir ao menos $(2\kappa)^{-\kappa v_1}$ daqueles caminhos $\gamma_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$, apenas variando o ponto $\tilde{\omega}$. Não difícil ver que eles formam um conjunto 1-interior-disjunto. Então, assumindo que N é grande o suficiente para que a probabilidade do caminho $\gamma_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'}$ ($\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}'$ inclusive) não ser bom ser no máximo $e^{-\frac{1}{4}\rho^2 N}$, como o número de pares de configurações $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ não é maior que 4^N , dados $\rho > 0$ e $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, existe $N_2 = N_2(\rho, \kappa) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{N \geq N_2} \sum_{(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')} \mathbb{P} \left[\bigcap_{\{\gamma_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'} : \tilde{\omega} \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}\}} \{\gamma_{\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'} \text{ é ruim}\} \right] \leq \sum_{N \geq N_2} 4^N e^{-\frac{1}{4}\rho^2 N (2\kappa)^{-\kappa v_1}} < \infty, \quad (3.2.42)$$

pois $(2\kappa)^{-\kappa v_1} \uparrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$, o que implica a convergência da série completa. Logo, do Primeiro Lema de Borel-Cantelli, quaisquer que sejam $\rho > 0$ e $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, existe ao menos um sítio $\tilde{\omega} \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$, digamos ω , e o correspondente caminho, digamos $\gamma_{\omega, \omega'}$, com *todos* os seus pontos bons. Por construção, ω' coincide com $\boldsymbol{\eta}'$ em $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ e é tal que $d_1(\omega', \boldsymbol{\eta}') \geq \kappa v_1$. Agora, note que os pares $(\boldsymbol{\eta}, \omega)$ e $(\omega', \boldsymbol{\eta}')$ satisfazem as hipóteses do item anterior. Logo, dados $\rho > 0$ e $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, existem os caminhos $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \omega}$ e $\gamma_{\omega', \boldsymbol{\eta}'}$ bons. Unindo então os três caminhos, $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \omega}$, $\gamma_{\omega, \omega'}$ e $\gamma_{\omega', \boldsymbol{\eta}'}$, obtemos um caminho $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$ que é bom, auto-evitante (a condição “ $\sigma|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \boldsymbol{\eta}'|_{\mathcal{V}_1^c(1)}$ ” em (3.2.36) garante tal propriedade) e tem comprimento no máximo V .

Definição 3.2.8. Toda configuração $\omega \in \Omega_{\mathcal{V}}$ como descrito na demonstração acima será chamada de ponto intermediário do caminho $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$.

Como os casos (i) e (ii) da Definição 3.2.5 foram analisados, a proposição está provada. □

3.2.2 Primeiras Estimativas

Seja $\mathcal{G}$ o subconjunto de $\mathcal{E}$ definido por

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \{e = (\sigma, \sigma') \in \mathcal{E} : e \text{ é bom}\}, \quad (3.2.43)$$

e vamos denotar

$$K_{\mathcal{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G}} e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \quad (3.2.44)$$

e

$$K_{\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{G}} e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \quad (3.2.45)$$

Então, reescrevemos o lado direito de (3.2.20) como

$$K \leq \frac{N^2}{Z} (K_{\mathcal{G}} \vee K_{\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}}). \quad (3.2.46)$$

Estimativa para $L_{\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}}$. Pela Proposição 3.2.1, dados $\rho > 0$ e $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, para quase todas as realizações de $\mathcal{X}$, existe $N_0(\rho, \kappa) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq N_0$ o conjunto de caminhos Γ indicado na Definição 3.2.5 é bom. Isto significa que se existir um vértice ruim em um dado caminho γ de Γ , tal vértice é necessariamente um ponto extremo do caminho, ou seja, dado um caminho $\gamma_{\eta, \eta'}$ indo de η à η' , se o elo $e = (\sigma, \sigma') \in \gamma_{\eta, \eta'}$ é ruim, então e é o primeiro ou o último elo de $\gamma_{\eta, \eta'}$. Neste caso, $\sigma = \eta$ ou $\sigma' = \eta'$ (note que o caso $\sigma = \eta$ e $\sigma' = \eta'$ acontece somente se $\gamma_{\eta, \eta'} = (\sigma, \sigma')$). Por simetria é suficiente considerar o primeiro caso. Logo, temos que $e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]} = e^{\beta H(\sigma)}$ e $\{(\eta, \eta') \in \Omega_{\mathcal{V}}^2 : \gamma_{\eta, \eta'} \ni e\} = \{\sigma\} \times (\Omega_{\mathcal{V}} \setminus \{\sigma\})$, e daí,

$$e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} = e^{\beta H(\sigma)} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}} \setminus \{\sigma\}} e^{-\beta[H(\sigma) + H(\eta)]} \leq Z. \quad (3.2.47)$$

Consequentemente,

$$K_{\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}} \leq Z. \quad \mathbb{P}\text{-q.c.} \quad (3.2.48)$$

Estimativa para $K_{\mathcal{G}}$. Usando que um sítio bom tem energia no máximo ρN , é imediato que

$$K_{\mathcal{G}} \leq e^{\rho \beta N} \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \quad (3.2.49)$$

Para estimar este último máximo, a estratégia será usar a definição do conjunto de caminhos Γ para dividir a soma $\sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e}$ em duas: uma restrita aos caminhos $\gamma_{\eta, \eta'}$ tais que $d_1(\eta, \eta') \geq \kappa v_1$ e a outra restrita aos caminhos $\gamma_{\eta, \eta'}$ tais que $d_1(\eta, \eta') < \kappa v_1$.

Seguindo essa estratégia, de (3.2.49), escrevemos

$$K_{\mathcal{G}} \leq 2e^{\rho\beta N} (K_1 \vee K_2), \quad (3.2.50)$$

em que

$$K_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}' \ni e}} e^{-\beta[H(\boldsymbol{\eta}) + H(\boldsymbol{\eta}')] } \mathbb{1}\{d_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') \geq \kappa v_1\} \quad (3.2.51)$$

e

$$K_2 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}' \ni e}} e^{-\beta[H(\boldsymbol{\eta}) + H(\boldsymbol{\eta}')] } \mathbb{1}\{d_1(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') < \kappa v_1\}. \quad (3.2.52)$$

A estimativa para $K_{\mathcal{G}}$ agora segue derivando-se cotas para K_1 e K_2 separadamente. O argumento para estimar o termo K_1 é um pouco longo e o faremos em um capítulo separado, Capítulo 4. A estimativa do termo K_2 será derivada no Capítulo 5 onde também concluiremos a prova do Teorema 2.3.1.

Capítulo 4

Estimativa Principal

Neste capítulo derivaremos uma cota para o termo

$$K_1 = \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{d_1(\eta, \eta') \geq \kappa v_1\}. \quad (4.0.1)$$

O capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 4.1 obteremos algumas estimativas iniciais usando o fato que o conjunto Γ está construído utilizando caminhos em $\bigcup_{\ell=1}^{v_1} \Gamma^\ell$. Ainda como consequência desse fato, obteremos também a fatoração da soma em (4.0.1) como um produto de duas funções de subpartição, o que nos leva a Seção 4.2, onde estimaremos essas duas funções de subpartição usando ideias de [OP84, CCP87, FIKP98, DD02]. Na Seção 4.3 reuniremos as estimativas obtidas nas Seções 4.1 e 4.2 e concluiremos uma cota para K_1 .

4.1 Estimativas Preparatórias

Pela Definição 3.2.5, os caminhos em Γ que conectam sítios (η, η') tais que $d_1(\eta, \eta') \geq \kappa v_1$ são escolhidos em $\bigcup_{\ell=1}^{v_1} \Gamma^\ell$ (exatamente um para cada par). Usando então esse fato, não é difícil ver que

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{d_1(\eta, \eta') \geq \kappa v_1\} \mathbb{1}\{\gamma_{\eta, \eta'} \in \bigcup_{\ell=1}^{v_1} \Gamma^\ell\} \\ &\leq \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\ell=1}^{v_1} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e}^{(\ell)} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \underbrace{\mathbb{1}\{d_1(\eta, \eta') \geq \kappa v_1\}}_{\leq 1} \\ &\leq v_1 \max_{\ell \in \mathcal{I}_{v_1}} \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e}^{(\ell)} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]}, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

em que a soma $\sum^{(\ell)}$ está sobre todos os caminhos de Γ^ℓ . Observe que substituímos um conjunto aleatório de caminhos por um determinístico.

Para cada $\ell \in \mathcal{I}_{v_1}$, seja Λ_ℓ a variável aleatória definida por

$$\Lambda_\ell \stackrel{\text{def}}{=} \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e}^{(\ell)} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \quad (4.1.2)$$

Note que $\{\Lambda_\ell\}_{\ell=1}^{v_1}$ forma uma sequência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas sobre $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$.

Com a notação acima, escrevemos

$$K_1 \leq v_1 \max_{\ell \in \mathcal{I}_{v_1}} \Lambda_\ell. \quad (4.1.3)$$

O passo seguinte é estimar a variável aleatória $\max_{\ell \in \mathcal{I}_{v_1}} \Lambda_\ell$. Para isso, é natural considerar apenas a variável Λ_1 porque, como $\{\Lambda_\ell\}_{\ell=1}^{v_1}$ é uma sequência de variáveis identicamente distribuídas,

$$\mathbb{P} \left[\max_{\ell \in \mathcal{I}_{v_1}} \Lambda_\ell \in A \right] \leq v_1 \mathbb{P} [\Lambda_1 \in A], \quad \forall A \in \Sigma. \quad (4.1.4)$$

Se o plano é usar o Primeiro Lema de Borel-Cantelli, então é suficiente achar $A \in \Sigma$, tal que

$$\mathbb{P} [\Lambda_1 \in A] \leq e^{-\varepsilon N}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.1.5)$$

Considerar a variável Λ_1 quer dizer que o somatório em (4.1.2) está sobre caminhos $\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'} \in \Gamma^1$, em que $\Gamma^1 = \{\gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^1 : \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}' \in \Omega_V\}$. Neste caso, dado $e = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}') \in \mathcal{G}$, existe um único $\ell \in \mathcal{I}_V$, tal que $\boldsymbol{\sigma}(\ell) \neq \boldsymbol{\sigma}'(\ell)$, ou seja, $\boldsymbol{\sigma}'$ é a configuração obtida de $\boldsymbol{\sigma}$ trocando-se o spin da coordenada ℓ . Por causa de (3.2.11), podemos encontrar únicos $j \in \mathcal{I}_n$ e $i \in \mathcal{I}_B$ tal que $\ell \in \mathcal{V}_j(i)$, e dessa forma, o spin em que $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}'$ discordam fica unicamente determinado por $\sigma_{j,i}(\ell) \neq \sigma'_{j,i}(\ell)$. Por construção, o elo $e \in \gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}$ se o par $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}')$ é tal que

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_{k,1}, \dots, \eta_{k,i-1}, \eta_{k,i}, \sigma_{k,i+1}, \dots, \sigma_{k,B}, & \text{se } k = 1, \dots, j; \\ \eta_{k,1}, \dots, \eta_{k,i-1}, \sigma_{k,i}, \sigma_{k,i+1}, \dots, \sigma_{k,B}, & \text{se } k = j+1, \dots, n \end{cases} \quad (4.1.6)$$

e

$$\eta'_k = \begin{cases} \sigma'_{k,1}, \dots, \sigma'_{k,i-1}, \sigma'_{k,i}, \eta'_{k,i+1}, \dots, \eta'_{k,B}, & \text{se } k = 1, \dots, j; \\ \sigma'_{k,1}, \dots, \sigma'_{k,i-1}, \eta'_{k,i}, \eta'_{k,i+1}, \dots, \eta'_{k,B}, & \text{se } k = j+1, \dots, n; \end{cases} \quad (4.1.7)$$

em que

$$\begin{aligned} \eta_{j,i} &= \eta_{j,i}(\cdot), \dots, \eta_{j,i}(\ell-1), \sigma_{j,i}(\ell), \sigma_{j,i}(\ell+1), \dots, \sigma_{j,i}(\cdot) \\ \eta'_{j,i} &= \sigma'_{j,i}(\cdot), \dots, \sigma'_{j,i}(\ell-1), \sigma'_{j,i}(\ell), \eta_{j,i}(\ell+1), \dots, \eta_{j,i}(\cdot). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Veja a Figura 4.1 para exemplos da descrição acima. Note que os elementos do conjunto $\{(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}') \in \Omega_V^2 : \gamma_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}'}^1 \ni e\}$ estão perfeitamente descritos em (4.1.6) e (4.1.7) por meio dos únicos $j \in \mathcal{I}_n$, $i \in \mathcal{I}_B$ e $\ell \in \mathcal{V}_j(i)$. A questão é que caracterizar os elementos do conjunto em questão em função de j, i e ℓ lida com complicações extras que podem ser evitadas se, por exemplo, substituirmos esse

conjunto por outro possivelmente maior, mas dependente apenas do bloco onde a discrepância do elo e mora. Isso é possível e ocorre porque todos os níveis da hierarquia podem ser decompostos em uma mesma quantidade de blocos, B , que diverge com N (cf. Observação 2.1.3).

Figura 4.1: Seja $\Omega_{\mathcal{V}}$ o hipercubo obtido fazendo $B = n = 3$ e $v_1 = v_2 = v_3$. A figura (a) ilustra os possíveis vértices η e η' em $\Omega_{\mathcal{V}}$ tais que o caminho $\gamma_{\eta, \eta'}^1$ passa por meio do elo $e = (\sigma, \sigma')$. O spin de discordância entre σ e σ' está representado por $\circ$ e $\bullet$, respectivamente. Em η , respectivamente em η' , a linha em zigue-zague representa os spins possivelmente trocados na construção do caminho $\gamma_{\eta, \eta'}^1$ antes de σ , respectivamente depois de σ' . As figuras (b) e (c) ilustram o mesmo que (a), mas, agora, para o elo $e' = (\hat{\sigma}, \hat{\sigma}')$ $e'' = (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')$, respectivamente.

Começaremos com algumas notações e definições adicionais. Dados um bloco $i \in \mathcal{I}_B$ e um

vértice $\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}$, definimos as coleções de sítios $\Omega_i^-(\sigma)$ e $\Omega_i^+(\sigma)$ por

$$\Omega_i^-(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}} : \eta_{j,k} = \sigma_{j,k}, \forall k = i+1, \dots, B \text{ e } j \in \mathcal{I}_n\}, & \text{se } i = 1, \dots, B-1; \\ \Omega_{\mathcal{V}}, & \text{se } i = B, \end{cases} \quad (4.1.9)$$

e

$$\Omega_i^+(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Omega_{\mathcal{V}}, & \text{se } i = 1; \\ \{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}} : \eta_{j,k} = \sigma_{j,k}, \forall k = 1, \dots, i-1 \text{ e } j \in \mathcal{I}_n\}, & \text{se } i = 2, \dots, B. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Com a notação acima, para um dado elo $e = (\sigma, \sigma')$, definindo

$$\hat{i} = \hat{i}(e) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ i \in \mathcal{I}_B : \sigma_{j,i} \neq \sigma'_{j,i} \text{ para algum } j \in \mathcal{I}_n \right\}, \quad (4.1.11)$$

isto é, o bloco em que σ e σ' diferem, temos que

$$\left\{ (\eta, \eta') \in \Omega_{\mathcal{V}}^2 : \gamma_{\eta, \eta'}^1 \ni e \right\} \subseteq \Omega_i^-(\sigma) \times \Omega_i^+(\sigma') \quad (4.1.12)$$

e portanto,

$$\sum_{\gamma_{\eta, \eta'}^1 \ni e}^{(1)} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \leq \sum_{\eta \in \Omega_i^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_i^+(\sigma')} e^{-\beta H(\eta')}. \quad (4.1.13)$$

Então,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'}^1 \ni e}^{(1)} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \\ &\leq \max_{l \in \mathcal{I}_B} \max_{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G} \atop \hat{i}(e)=l} \sum_{\eta \in \Omega_l^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_l^+(\sigma')} e^{-\beta H(\eta')}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

O crucial da desigualdade acima é que as somas do lado direito podem ser vistas como funções de subpartição e, portanto, suas estimativas podem ser feitas com adaptações das técnicas usadas em [CCP87].

Neste ponto, também queremos chamar a atenção do leitor a observar que, para um dado elo $e = (\sigma, \sigma')$, os elementos de $\Omega_l^-(\sigma)$ e $\Omega_l^+(\sigma')$ são combinações de spins conhecidos e desconhecidos. Nosso interesse também é substituir esses conjuntos por outros que caracterizem somente a parte desconhecida das configurações sobre as quais as somas estão em (4.1.14). Para fazer isso, introduzimos a notação seguinte.

Para $1 \leq m \leq k \leq B$, vamos definir

$$\mathcal{V}^{m,k} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^n \mathcal{V}_j^{m,k}, \text{ com } \mathcal{V}_j^{m,k} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=m}^k \mathcal{V}_j(i). \quad (4.1.15)$$

Naturalmente, também definimos

$$\Omega_{\mathcal{V}^{m,k}} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{\mathcal{V}_1^{m,k}} \times \cdots \times \Omega_{\mathcal{V}_n^{m,k}}, \text{ com } \Omega_{\mathcal{V}_j^{m,k}} = \{-1, +1\}^{\mathcal{V}_j^{m,k}}. \quad (4.1.16)$$

Observe que $\mathcal{V}^{1,B} \equiv \mathcal{V}$ e, conseqüentemente, $\Omega_{\mathcal{V}^{1,B}} \equiv \Omega_{\mathcal{V}}$.

A notação anterior nos permite então escrever os conjuntos $\Omega_l^-(\sigma)$ e $\Omega_l^+(\sigma')$ da seguinte forma:

$$\Omega_l^-(\sigma) = \begin{cases} \left(\Omega_{\mathcal{V}_1^{1,l}} \times \{\sigma|_{\mathcal{V}_1^{l+1,B}}\} \right) \times \cdots \times \left(\Omega_{\mathcal{V}_n^{1,l}} \times \{\sigma|_{\mathcal{V}_n^{l+1,B}}\} \right), & \text{se } l = 1, \dots, B-1; \\ \Omega_{\mathcal{V}}, & \text{se } l = B; \end{cases} \quad (4.1.17)$$

e

$$\Omega_l^+(\sigma') = \begin{cases} \Omega_{\mathcal{V}}, & \text{se } l = 1; \\ \left(\{\sigma'|_{\mathcal{V}_1^{1,l-1}}\} \times \Omega_{\mathcal{V}_1^{l,B}} \right) \times \cdots \times \left(\{\sigma'|_{\mathcal{V}_n^{1,l-1}}\} \times \Omega_{\mathcal{V}_n^{l,B}} \right), & \text{se } l = 2, \dots, B. \end{cases} \quad (4.1.18)$$

Nosso próximo passo é proceder a estimativa de (4.1.14) de duas formas diferentes: uma considerando $l \in \{1, B\}$ e a outra considerando $l \in \{2, \dots, B-1\}$.

Começaremos considerando a forma mais simples, quando $l \in \{1, B\}$. Neste caso, note que, ou

$$\Omega_1^-(\sigma) = \left(\Omega_{\mathcal{V}_1^{1,1}} \times \{\sigma|_{\mathcal{V}_1^{2,B}}\} \right) \times \cdots \times \left(\Omega_{\mathcal{V}_n^{1,1}} \times \{\sigma|_{\mathcal{V}_n^{2,B}}\} \right) \quad \text{e} \quad \Omega_1^+(\sigma') = \Omega_{\mathcal{V}} \quad (4.1.19)$$

ou

$$\Omega_B^-(\sigma) = \Omega_{\mathcal{V}} \quad \text{e} \quad \Omega_B^+(\sigma') = \left(\{\sigma'|_{\mathcal{V}_1^{1,B-1}}\} \times \Omega_{\mathcal{V}_1^{B,B}} \right) \times \cdots \times \left(\{\sigma'|_{\mathcal{V}_n^{1,B-1}}\} \times \Omega_{\mathcal{V}_n^{B,B}} \right). \quad (4.1.20)$$

Como $|\mathcal{V}_j(i)| = v_j$ para todo $j \in \mathcal{I}_n$ e $i \in \mathcal{I}_B$, temos que

$$|\Omega_{\mathcal{V}_j^{k,k}}| \stackrel{(4.1.15)}{=} 2^{v_j} \stackrel{(2.1.13)}{\leq} 2^{p_j \mathcal{S}}, \quad (4.1.21)$$

para todo $k \in \mathcal{I}_B$.

Consequentemente, de (4.1.19), (4.1.20) e (4.1.21), qualquer que seja $l \in \{1, B\}$, obtemos que

$$\sum_{\eta \in \Omega_l^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_l^+(\sigma')} e^{-\beta H(\eta')} \leq 2^{\mathcal{S} \sum_{j=1}^n p_j} e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z = 2^{\mathcal{S}} e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z, \quad (4.1.22)$$

em que usamos também que $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ e estamos denotando por $\bar{\sigma}$ a (única) configuração de $\Omega_{\mathcal{V}}$ tal que

$$H(\bar{\sigma}) = \min_{\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}} H(\sigma). \quad (4.1.23)$$

Logo, é imediato que

$$\max_{l \in \{1, B\}} \max_{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G}} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_l^-(\sigma) \\ i(e)=l}} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_l^+(\sigma')} e^{-\beta H(\eta')} \leq 2^{\mathcal{S}} e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z. \quad (4.1.24)$$

Usando agora o Teorema 1.5(iii)[BK04a] e o Corolário 2.1.1, para todo $\beta > 0$ e todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\frac{1}{N} \log \left(2^{\mathcal{S}} e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z \right) \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{i=1}^{\ell_n} \beta_i \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} a_k + \varepsilon, \quad (4.1.25)$$

para todo N grande o suficiente, em que usamos também que $\mathcal{S} = o(N)$.

Vamos considerar agora o caso em que $l \in \{2, \dots, B-1\}$. Neste caso, o argumento é um pouco mais longo e se estenderá pelo resto desta seção e pela seção seguinte. Começaremos observando que podemos escrever, para um dado elo $e = (\sigma, \sigma')$,

$$\Omega_l^-(\sigma) = \left(\Omega_{\mathcal{V}_1^{1,l-1}} \times \Omega_{\mathcal{V}_1^{l,l}} \times \{\sigma|_{\mathcal{V}_1^{l+1,B}}\} \right) \times \cdots \times \left(\Omega_{\mathcal{V}_n^{1,l-1}} \times \Omega_{\mathcal{V}_n^{l,l}} \times \{\sigma|_{\mathcal{V}_n^{l+1,B}}\} \right) \quad (4.1.26)$$

e

$$\Omega_l^+(\sigma') = \left(\{\sigma'|_{\mathcal{V}_1^{1,l-1}}\} \times \Omega_{\mathcal{V}_1^{l,l}} \times \Omega_{\mathcal{V}_1^{l+1,B}} \right) \times \cdots \times \left(\{\sigma'|_{\mathcal{V}_n^{1,l-1}}\} \times \Omega_{\mathcal{V}_n^{l,l}} \times \Omega_{\mathcal{V}_n^{l+1,B}} \right). \quad (4.1.27)$$

Além disso, definindo a aplicação $\varphi_l = (\varphi_{l,1}, \dots, \varphi_{l,n})$ por

$$\sigma, \xi, \eta \mapsto \varphi_l(\sigma, \xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_{l,1}(\sigma_1, \xi_1, \eta_1), \dots, \varphi_{l,n}(\sigma_n, \xi_n, \eta_n)), \quad (4.1.28)$$

em que para cada $j \in \mathcal{I}_n$,

$$\varphi_{l,j}(\sigma_j, \xi_j, \eta_j) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,l-1}, \xi_{j,l}, \eta_{j,l+1}, \dots, \eta_{j,B}, \quad (4.1.29)$$

podemos escrever as somas no lado direito de (4.1.14) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta \in \Omega_l^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_l^+(\sigma')} e^{-\beta H(\eta')} \\ &= \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}_1^{1,l-1}}} \sum_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}_1^{l,l}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\eta, \xi, \sigma))} \sum_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}_1^{l,l}}} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}_1^{l+1,B}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\sigma', \xi', \eta'))}. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Como $|\mathcal{V}^{k,k}| \leq \mathcal{S} = o(N)$ para todo $k \in \mathcal{I}_B$, podemos estimar o lado direito de (4.1.30) tomando-se o máximo sobre todas as configurações $\xi, \xi' \in \mathcal{V}^{l,l}$. Prosseguindo dessa forma, obtemos que

$$(4.1.30) \leq 2^{2\mathcal{S}} \max_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}_1^{l,l}}} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}_1^{1,l-1}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\eta, \xi, \sigma))} \max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}_1^{l,l}}} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}_1^{l+1,B}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\sigma', \xi', \eta'))}. \quad (4.1.31)$$

Reunindo então (4.1.30) e (4.1.31), e definindo as variáveis aleatórias

$$Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\eta, \xi, \zeta'))} \quad (4.1.32)$$

e

$$Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l+1,B}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\zeta, \xi', \eta'))}, \quad (4.1.33)$$

concluimos que

$$\begin{aligned} & \max_{l \in \{2, \dots, B-1\}} \max_{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G}} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_l^-(\sigma) \\ \hat{i}(e)=l}} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_l^+(\sigma')} e^{-\beta H(\eta')} \\ & \leq 4^S \max_{l \in \{2, \dots, B-1\}} \max_{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G}} \max_{\substack{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}} \\ \hat{i}(e)=l}} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\eta, \xi, \sigma))} \max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l+1,B}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\sigma', \xi', \eta'))} \\ & = 4^S \max_{l \in \{2, \dots, B-1\}} \max_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta') \max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi'). \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

Observação 4.1.1. A consequência fundamental de toda a construção até aqui é que as variáveis $Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta')$ e $Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi')$ são funções de partição de GREMs com os mesmos parâmetros do GREM inicial, mas com um volume menor. Isto se tornará mais aparente na próxima seção.

4.2 Estimativa Intermediária

4.2.1 Introdução

Nesta seção, continuamos com a estimativa da variável aleatória Λ_1 . Nosso foco aqui, no entanto, é estimar o termo

$$\max_{l \in \{2, \dots, B-1\}} \max_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta') \max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi'). \quad (4.2.1)$$

Como já foi antecipado anteriormente, as variáveis $Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta')$ e $Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi')$ podem ser vistas como funções de partição de GREMs, logo, a ideia inicial seria adaptar o que foi feito em [CCP87] na Proposição 3.2 e usar a desigualdade de Markov simples para estimá-las. Entretanto, essa desigualdade não nos dá uma probabilidade forte o suficiente para controlar o número exponencial de eventos que aparecem quando tomamos os sinais de max em (4.2.1).

A estratégia então é a seguinte. Inspirados no que foi feito na Seção III em [OP84], dividiremos o suporte da família de gaussianas $\mathcal{X}$, a saber, o espaço euclidiano n -dimensional em subconjuntos disjuntos $\Delta_{j_1, \dots, j_n}$, e analisaremos separadamente as contribuições para a função de subpartição vindas de cada $\Delta_{j_1, \dots, j_n}$ usando um caso particular da desigualdade de Chernoff,

ao invés da desigualdade de Markov simples ou exponencial de Markov; esta última foi usada em [FIKP98]. Com esta proposta, é suficiente estudar a variável $Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta')$. Um argumento análogo valerá para $Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi')$.

4.2.2 Estimativa para $Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta')$

Sejam $l \in \{2, \dots, B-1\}$ e $\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}$ e $\zeta' \in \Omega_{\mathcal{V}}$ fixados. Com a notação (2.1.24), escrevemos

$$Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta') = \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} e^{-\langle \mathbf{m}^*, X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')} \rangle \sqrt{V}}, \quad (4.2.2)$$

em que $\mathbf{m}^*$ está dado em (2.1.45).

Seja $M \in \mathbb{N}$ e vamos escrever

$$\delta_0 = \frac{1}{M}. \quad (4.2.3)$$

Agora, seja

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j_1=0}^{M+1} \cdots \bigcup_{j_n=0}^{M+1} \Delta_{j_1, \dots, j_n}, \quad \text{com } \Delta_{j_1, \dots, j_n} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{j_1}^1 \times \cdots \times \Delta_{j_n}^n, \quad (4.2.4)$$

em que

$$\Delta_{j_k}^k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (-\infty, \delta_0 \sqrt{P_k}] , & \text{se } j_k = 0; \\ (j_k \delta_0 \sqrt{P_k}, (j_k + 1) \delta_0 \sqrt{P_k}] , & \text{se } j_k = 1, \dots, M; \\ ((1 + \delta_0) \sqrt{P_k}, \infty) , & \text{se } j_k = M + 1, \end{cases} \quad k \in \mathcal{I}_n. \quad (4.2.5)$$

Notação. A fim de tornar a notação mais leve, para $j_1, \dots, j_n$ fixado, denotaremos por $\bar{x}$, $\underline{x}$ e $\tilde{x}$ os pontos de $\mathbb{R}^n$ dados por

$$\bar{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} (j_k + 1) \delta_0 \sqrt{P_k}, \quad \underline{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} j_k \delta_0 \sqrt{P_k} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \delta_0 \sqrt{P_k}. \quad (4.2.6)$$

Denotaremos também por $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}^*$ os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{j_1, \dots, j_n : 0 \leq j_k \leq M, \forall k \in \mathcal{I}_n\}, \\ \mathcal{X}^* &\stackrel{\text{def}}{=} \{j_1, \dots, j_n : \exists k \in \mathcal{I}_n; j_k = M + 1\}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Por fim, denotaremos por αS , o conjunto

$$\alpha S \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha x : x \in S\}. \quad (4.2.8)$$

Com a notação anterior, escrevemos

$$\begin{aligned}
Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta') &= \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} \left(\sum_{j_1, \dots, j_n} \mathbb{1}\{-X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')} \in \sqrt{N}\Delta_{j_1, \dots, j_n}\} \right) e^{-\langle \mathbf{m}^*, X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')} \rangle \sqrt{V}} \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_n} \left(\sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} \mathbb{1}\{-X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')} \in \sqrt{N}\Delta_{j_1, \dots, j_n}\} e^{-\langle \mathbf{m}^*, X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')} \rangle \sqrt{V}} \right) \\
&\leq S_0 + S_1 + S^*,
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

em que

$$S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} \mathbb{1}\{-X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')} \in \sqrt{N}\Delta_{0, \dots, 0}\} e^{\langle \mathbf{m}^*, \tilde{x} \rangle N}, \tag{4.2.10}$$

$$S^* \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\beta H(\bar{\sigma})} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}^*} \left(\sum_{\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}} \mathbb{1}\{-X_{\sigma} \in \sqrt{N}\Delta_{j_1, \dots, j_n}\} \right) \tag{4.2.11}$$

e

$$S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^n \sum_{[k_1, \dots, k_m]} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}_1 \\ j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \neq 0}} \left(\sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} \mathbb{1}\{-X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')} \in \sqrt{N}\Delta_{j_1, \dots, j_n}\} \right) e^{\langle \mathbf{m}^*, \bar{x} \rangle N}, \tag{4.2.12}$$

em que a soma $\sum_{[k_1, \dots, k_m]}$ está sobre todas as seqüências de naturais satisfazendo que $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$. Note que na desigualdade também usamos que $V \leq N$.

Estimativa para S_1 . Começaremos observando que, como $\bar{x} = \underline{x} + \tilde{x}$, então por (2.1.23), (4.2.6) e (2.1.47),

$$\langle \mathbf{m}^*, \bar{x} \rangle = \langle \mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle + \langle \mathbf{m}^*, \tilde{x} \rangle \leq \langle \mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle + n\beta\beta_{\star}\delta_0. \tag{4.2.13}$$

Daí,

$$S_1 \leq e^{n\beta\beta_{\star}\delta_0 N} \sum_{m=1}^n \sum_{[k_1, \dots, k_m]} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}_1 \\ j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \neq 0}} \left(\sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} \mathbb{1}\{-X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')} \in \sqrt{N}\Delta_{j_1, \dots, j_n}\} \right) e^{\langle \mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle N}. \tag{4.2.14}$$

Observação 4.2.1. Note que, em (4.2.14), o ponto $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ é tal que $\underline{x}_i = 0$ para todo $i \neq k_1, \dots, k_m$.

Seja

$$\mathcal{Z}_{[k_1, \dots, k_m]}^{(1)}(l, \xi, \zeta') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}_1 \\ j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \neq 0}} N_{j_1, \dots, j_n} e^{\langle \mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle N}, \tag{4.2.15}$$

em que

$$N_{j_1, \dots, j_n} = N_{j_1, \dots, j_n}(1, l, \xi, \zeta') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1, l-1}}} \mathbb{1}\{-X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')} \in \sqrt{N} \Delta_{j_1, \dots, j_n}\}. \quad (4.2.16)$$

Com a notação acima, escrevemos (4.2.14) como

$$S_1 \leq e^{n\beta\beta_\star\delta_0 N} \sum_{m=1}^n \sum_{[k_1, \dots, k_m]} \mathcal{Z}_{[k_1, \dots, k_m]}^{(1)}(l, \xi, \zeta'). \quad (4.2.17)$$

Na subseção seguinte obteremos uma cota para a variável simples $N_{j_1, \dots, j_n}$. Por consequência, também obteremos uma cota para $\mathcal{Z}_{[k_1, \dots, k_m]}^{(1)}(l, \xi, \zeta')$ e S_1 .

4.2.3 Estimativa de Grandes Desvios

Nesta subseção obteremos uma cota superior para a variável aleatória $N_{j_1, \dots, j_n}$. A ferramenta chave que usaremos para derivar tal cota é um caso particular da desigualdade de Chernoff (cf. Apêndice B, Lema B.0.1).

Sejam $m \in \mathcal{I}_n$, $[k_1, \dots, k_m] \in \mathcal{J}_1$ e $j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}_1$ com $j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \neq 0$ fixados. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $l-1 = \alpha B$, para algum $0 < \alpha < 1$ (esta suposição será assumida pelo resto deste capítulo). Então,

$$|\mathcal{V}^{1, l-1}| \stackrel{(4.1.15)}{=} (l-1) \sum_{j=1}^n v_j = \alpha B \sum_{j=1}^n v_j \stackrel{(2.1.12)}{=} \alpha V. \quad (4.2.18)$$

Agora, vamos considerar uma subfamília de $2^{\alpha V_1} + 2^{\alpha(V_1+V_2)} + \dots + 2^{\alpha V}$ variáveis aleatórias gaussianas padrão independentes em $\mathcal{X}$, digamos

$$X_{i_1, \dots, i_r}^r \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \forall i_r = 1, \dots, 2^{\alpha V_r}; \quad r = 1, \dots, n. \quad (4.2.19)$$

Aqui, as variáveis aleatórias $X_{i_1, \dots, i_r}^r$ farão, sem perda de generalidade, o papel de $X_{\varphi_l(\eta, \xi, \zeta')}$. Então, escrevemos

$$\begin{aligned} N_{j_1, \dots, j_n} &= \sum_{i_1=1}^{2^{\alpha V_1}} \cdots \sum_{i_n=1}^{2^{\alpha V_n}} \prod_{r=1}^n \mathbb{1}\{-X_{i_1, \dots, i_r}^r \in \sqrt{N} \Delta_{j_r}^r\} \\ &\leq 2^{\alpha \sum_{j=k_m+1}^n V_j} \sum_{i_1=1}^{2^{\alpha V_1}} \cdots \sum_{i_{k_m}=1}^{2^{\alpha V_{k_m}}} \prod_{r=1}^{k_m} \mathbb{1}\{-X_{i_1, \dots, i_{k_r}}^{k_r} \in \sqrt{N} \Delta_{j_{k_r}}^{k_r}\}, \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

em que usamos que $\mathbb{1}_{\Delta_0^r} \leq 1, \forall r \neq k_1, \dots, k_m$.

Vamos definir

$$V_r^\star \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=k_{r-1}+1}^{k_r} V_j \quad \text{e} \quad p_r^\star = \sum_{j=k_{r-1}+1}^{k_r} p_j, \quad (4.2.21)$$

para $r = 1, \dots, m$, em que por convenção $k_0 \equiv 0$.

Considere agora uma outra subfamília de $2^{\alpha V_1^*} + 2^{\alpha(V_1^*+V_2^*)} + \dots + 2^{\alpha(V_1^*+\dots+V_m^*)}$ variáveis aleatórias gaussianas padrão independentes pertencente a subfamília em (4.2.19), digamos

$$X_{i_1, \dots, i_r}^r \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \forall i_r = 1, \dots, 2^{\alpha V_r^*}; \quad r = 1, \dots, m. \quad (4.2.22)$$

Então, denotando por

$$N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* \stackrel{\text{def}}{=} N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^*(1, l, \xi, \zeta') = \sum_{i_1=1}^{2^{\alpha V_1^*}} \cdots \sum_{i_m=1}^{2^{\alpha V_m^*}} \prod_{r=1}^m \mathbb{1}\{-X_{i_1, \dots, i_r}^r \in \sqrt{N} \Delta_{j_{k_r}}^{k_r}\}, \quad (4.2.23)$$

e usando que $V_j \leq p_j N$, obtemos que

$$N_{j_1, \dots, j_n} \leq 2^{\alpha N \sum_{j=k_m+1}^n p_j} N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* \stackrel{(2.1.32)}{=} e^{\frac{1}{2} \alpha N \bar{P}_{k_m}} N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^*, \quad (4.2.24)$$

em que

$$\bar{P}_j \stackrel{\text{def}}{=} \beta_\star^2 - P_j. \quad (4.2.25)$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}_{[k_1, \dots, k_m]}^{(1)}(l, \xi, \zeta') \leq e^{\frac{1}{2} \alpha N \bar{P}_{k_m}} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}_1 \\ j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \neq 0}} N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* e^{\langle \mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle N}. \quad (4.2.26)$$

Naturalmente, o passo agora é estimar a variável $N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^*$. Começaremos com algumas notações adicionais.

Dada uma variável aleatória $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, vamos denotar por

$$q_{j_{k_r}}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P} \left[-X \in \sqrt{N} \Delta_{j_{k_r}}^{k_r} \right], \quad r \in \mathcal{I}_m. \quad (4.2.27)$$

Para todo N grande o suficiente, seguem duas observações: por um lado,

$$q_{j_{k_r}}^* = \int_{\underline{x}_{k_r} \sqrt{N}}^{\bar{x}_{k_r} \sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \leq \int_{\underline{x}_{k_r} \sqrt{N}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \leq e^{-\frac{1}{2} \underline{x}_{k_r}^2 N}, \quad (4.2.28)$$

e por outro lado,

$$q_{j_{k_r}}^* = \int_{\underline{x}_{k_r} \sqrt{N}}^{\bar{x}_{k_r} \sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \geq \frac{\tilde{x}_{k_r} \sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \bar{x}_{k_r}^2 N} \geq e^{-\frac{1}{2} \bar{x}_{k_r}^2 N}. \quad (4.2.29)$$

Como é comum em problemas como esse, gostaríamos de estimar a variável $N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^*$ por alguma quantidade da ordem de sua média

$$\mathbb{E} \left[N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* \right] = \prod_{r=1}^m q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*}. \quad (4.2.30)$$

Entretanto, fixados $1 \leq r \leq s \leq m$, não é difícil ver que para certos índices $j_{k_1}, \dots, j_{k_m}$,

$$\prod_{i=r}^s q_{j_{k_i}}^* 2^{\alpha V_i^*} \stackrel{(4.2.28)}{\leq} e^{\frac{1}{2} \sum_{i=r}^s (\alpha \beta_{\star}^2 V_i^* - x_{k_i}^2)} \downarrow 0, \quad (4.2.31)$$

quando N cresce, e isto não deveria ser verdade já que as variáveis $X_{i_1}^1, \dots, X_{i_1, \dots, i_m}^m$ estão suportadas em $\mathcal{A}_n(N, \delta)$. Então, procedendo como gostaríamos, estaríamos negligenciando contribuições para $Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta')$. A fim de corrigir esse problema, estimamos $N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^*$ como segue.

Definição 4.2.1. Seja $c_u > 0$ uma constante a ser escolhida depois. Vamos definir a seguinte família de inteiros. Seja $J_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ e recursivamente, defina

$$J_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \inf \left\{ 0 < r \leq m : \prod_{i=1}^r q_{j_{k_i}}^* 2^{\alpha V_i^*} < c_u N \right\}, & \text{se tal inteiro existe;} \\ m+1, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.2.32)$$

Se $J_1 = m$, defina $J_2 = m+1$. Caso contrário, defina

$$J_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \inf \left\{ J_1 < r \leq m : \prod_{i=J_1+1}^r q_{j_{k_i}}^* 2^{\alpha V_i^*} < c_u N \right\}, & \text{se tal inteiro existe;} \\ m+1, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.2.33)$$

Mais geralmente, se $J_{q-1} = m$, defina $J_q = m+1$. Caso contrário, defina

$$J_q \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \inf \left\{ J_{q-1} < r \leq m : \prod_{i=J_{q-1}+1}^r q_{j_{k_i}}^* 2^{\alpha V_i^*} < c_u N \right\}, & \text{se tal inteiro existe;} \\ m+1, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.2.34)$$

Vamos denotar por $q(m)$ o inteiro pertencente ao conjunto $\{1, \dots, m+1\}$ tal que $J_{q(m)} = m+1$.

Agora, para cada $r \in \mathcal{I}_m$, defina

$$\rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 4, & \text{se } r \neq J_1, \dots, J_{q(m)-1}; \\ 4c_u N \left(\prod_{i=J_{s-1}+1}^{J_s} q_{j_{k_i}}^* 2^{\alpha V_i^*} \right)^{-1}, & \text{se } r = J_s \text{ para algum } s = 1, \dots, q(m)-1. \end{cases} \quad (4.2.35)$$

Observação 4.2.2. Note que, dado $m \in \mathcal{I}_n$,

$$0 = J_0 < J_1 < J_2 < \dots < J_{q(m)-1} < J_{q(m)} = m+1 \quad (4.2.36)$$

e para todo $s = 1, \dots, q(m)$,

$$\prod_{i=J_{s-1}+1}^r q_{j_{k_i}}^* 2^{\alpha V_i^*} \geq c_u N, \quad \forall r \in \{J_{s-1}+1, \dots, J_s-1\}. \quad (4.2.37)$$

Proposição 4.2.1. Com a notação anterior, para qualquer constante $c_u > 0$ e todo $0 \neq j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \leq M$,

$$\mathbb{P} \left[N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* > \prod_{r=1}^m \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*} \right] \leq m e^{-c_u N}. \quad (4.2.38)$$

Demonstração. Provaremos esta proposição argumentando por indução sobre $m \in \mathcal{I}_n$. Começaremos definindo o evento

$$A_m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* > b_m \right\}, \quad (4.2.39)$$

em que

$$b_m \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{r=1}^m \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*}. \quad (4.2.40)$$

Lema 4.2.1. Para todo $m \in \mathcal{I}_n$,

$$\vartheta_m \stackrel{\text{def}}{=} \left(\rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* - 1 \right) b_{m-1} q_{j_{k_m}}^* 2^{\alpha V_m^*} \geq 3c_u N, \quad (4.2.41)$$

em que $b_0 \equiv 1$.

Demonstração. De fato, primeiro observe que $\rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* \geq 4$ para todo $r \in \mathcal{I}_m$. Isto segue como consequência da definição de $J_1, \dots, J_{q(m)}$. Assim, escrevemos ϑ_m como

$$\begin{aligned} \vartheta_m &= \left(1 - \frac{1}{\rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^*} \right) \prod_{r=1}^m \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*} \\ &\geq \frac{3}{4} \cdot \prod_{r=1}^m \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*}. \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

Agora, de (4.2.35), se $J_{q(m)-1} < m$, temos que

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^m \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*} &= 4^{m-q(m)+1} (4c_u N)^{q(m)-1} \underbrace{\prod_{r=J_{q(m)-1}+1}^m q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*}}_{\geq c_u N} \\ &\geq 4^m (c_u N)^{q(m)} \\ &\geq c_u N. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Se $J_{q(m)-1} = m$ temos que

$$\prod_{r=1}^m \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*} = 4^{m-q(m)+1} (4c_u N)^{q(m)-1} = (4c_u N)^m \geq c_u N. \quad (4.2.44)$$

Juntando (4.2.42), (4.2.43) e (4.2.44), obtemos (4.2.41). $\square$

Voltando à prova da proposição, vamos supor inicialmente que $m = 1$. Neste caso, como $N_{j_{k_1}}^*$ é a soma de $2^{\alpha V_1^*}$ v.a.'s independentes e identicamente distribuídas segundo uma v.a. Bernoulli de parâmetro $q_{j_{k_1}}^*$, invocando o Lema B.0.1 com $\theta = \rho_{j_{k_1}}^* \geq 4$, segue que

$$\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}\left[N_{j_{k_1}}^* > \rho_{j_{k_1}}^* q_{j_{k_1}}^* 2^{\alpha V_1^*}\right] \leq e^{-\frac{1}{3}(\rho_{j_{k_1}}^* - 1)q_{j_{k_1}}^* 2^{\alpha V_1^*}} \stackrel{(4.2.41)}{\leq} e^{-c_u N}. \quad (4.2.45)$$

Agora, suponhamos que (4.2.38) valha para $m - 1$, ou seja,

$$\mathbb{P}[A_{m-1}] \leq (m - 1)e^{-c_u N}. \quad (\text{H.I.})$$

Vamos mostrar que (4.2.38) também vale para m . Com efeito, seja

$$I_{m-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (i_1, \dots, i_{m-1}) : -X_{i_1, \dots, i_r}^r \in \sqrt{N} \Delta_{j_{k_r}}^{k_r}, \forall r = 1, \dots, m-1 \right\}. \quad (4.2.46)$$

Então, usando a independência entre as variáveis aleatórias $X_{i_1}^1, \dots, X_{i_1, \dots, i_m}^m$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_m] &= \underbrace{\mathbb{P}[A_m | A_{m-1}]}_{\leq 1} \mathbb{P}[A_{m-1}] + \mathbb{P}[A_m | A_{m-1}^c] \underbrace{\mathbb{P}[A_{m-1}^c]}_{\leq 1} \\ &\leq \mathbb{P}[A_{m-1}] + \mathbb{P}\left[\sum_{(i_1, \dots, i_{m-1}) \in I_{m-1}} \sum_{i_m=1}^{2^{\alpha V_m^*}} \mathbb{1}\{-X_{i_1, \dots, i_m}^m \in \sqrt{N} \Delta_{j_{k_m}}^{k_m}\} > b_m \mid A_{m-1}^c\right] \\ &\stackrel{(\text{H.I.})}{\leq} (m-1)e^{-c_u N} + \underbrace{\mathbb{P}\left[\sum_{i_0=1}^{b_{m-1} 2^{\alpha V_m^*}} \mathbb{1}\{-X_{i_0} \in \sqrt{N} \Delta_{j_{k_m}}^{k_m}\} > b_m\right]}_{\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}[A_m^*]}, \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

em que o conjunto $\{X_{i_0}\}$ é apenas um reordenamento das variáveis em $\{X_{i_1, \dots, i_m}^m\}$. Observe agora que é suficiente mostrarmos que $\mathbb{P}[A_m^*] \leq e^{-c_u N}$ para a conclusão da prova da proposição. Neste caso, observe primeiro que $b_m = \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* b_{m-1} q_{j_{k_m}}^* 2^{\alpha V_m^*}$. Agora, no evento A_m^* temos uma soma de $b_{m-1} 2^{\alpha V_m^*}$ v.a.'s independentes e identicamente distribuídas segundo uma v.a. Bernoulli de parâmetro $q_{j_{k_m}}^*$. Invocando novamente o Lema B.0.1, mas, desta vez, com $\theta = \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* \geq 4$, obtemos que

$$\mathbb{P}[A_m^*] \leq e^{-\frac{1}{3}(\rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* - 1)b_{m-1} q_{j_{k_m}}^* 2^{\alpha V_m^*}} \stackrel{(4.2.41)}{\leq} e^{-c_u N}, \quad (4.2.48)$$

encerrando a demonstração. $\square$

Como consequência imediata da Proposição 4.2.1, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.1. Dado $\varepsilon > 0$, se $c_u > \log 2 + 2\varepsilon$, então

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{l \in \mathcal{I}_B} \bigcup_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^l, l}} \bigcup_{\zeta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} \bigcup_{m \in \mathcal{I}_n} \bigcup_{[k_1, \dots, k_m]} \bigcup_{\substack{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}_1 \\ j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \neq 0}} N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* (1, l, \xi, \zeta') > b_m\right] \leq e^{-\varepsilon N}, \quad (4.2.49)$$

para todo N grande o suficiente, em que b_m está definido em (4.2.40).

Demonstração. De fato, relembremos inicialmente que a estimativa em (4.2.38) foi feita para $N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^* = N_{j_{k_1}, \dots, j_{k_m}}^*(1, l, \xi, \zeta')$ com todas as variáveis, $l \in \mathcal{I}_B$, $\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}$, $\zeta' \in \Omega_{\mathcal{V}}$, $m \in \mathcal{I}_n$, $[k_1, \dots, k_m]$ e $0 \neq j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \leq M$ fixadas. Como não há mais que $B(M+1)^n 2^S 2^V$ delas, pela Proposição 4.2.1, o lado esquerdo de (4.2.49) é cotado por

$$nB(M+1)^n 2^S 2^V e^{-c_u N} \leq nB(M+1)^n 2^S e^{-2\varepsilon N} \leq e^{-\varepsilon N}, \quad (4.2.50)$$

para todo $N \geq N_0$, em que $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ é escolhido tal que $nB(M+1)^n 2^S e^{-\varepsilon N_0} \leq 1$. Isso encerra a demonstração. $\square$

4.2.4 Estimativa Determinística

Por causa de (4.2.26) e do Corolário 4.2.1, a cota que estamos procurando para S_1 mora no termo

$$e^{\frac{1}{2}\alpha N \bar{P}_{k_m}} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}_1 \\ j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \neq 0}} \left(\prod_{r=1}^m \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*} \right) e^{\langle \mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle N} \quad (4.2.51)$$

que evidentemente é não aleatório. Nosso objetivo nesta subseção é derivar uma cota para (4.2.51) uniforme com respeito às variáveis $m \in \mathcal{I}_n$ e $[k_1, \dots, k_m]$.

De acordo com a Definição 4.2.1, para cada $m \in \mathcal{I}_n$ e cada $[k_1, \dots, k_m]$ fixados, o conjunto de índices sobre o qual a soma em (4.2.51) está pode ser naturalmente decomposto em uma união de $m+1$ subconjuntos disjuntos, digamos $\{\mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s)\}_{s=0}^m$, definidos como

$$\mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s) = \mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s)[k_1, \dots, k_m] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}_1 : j_{k_1}, \dots, j_{k_m} \neq 0 \text{ e } J_{q(m)-1} = s \right\}. \quad (4.2.52)$$

Por consequência, para todo $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s)$, é imediato que

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^m \rho_{j_{k_1}, \dots, j_{k_r}}^* q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*} &\stackrel{(4.2.35)}{=} 4^m (c_u N)^s \left(1 + \mathbb{I}_{\{0 \leq s < m\}} \prod_{r=s+1}^m q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*} \right) \\ &\stackrel{(4.2.28)}{\leq} (4c_u N)^m \left(1 + \mathbb{I}_{\{0 \leq s < m\}} \prod_{r=s+1}^m e^{-\frac{1}{2}\underline{x}_{k_r}^2 N} 2^{\alpha V_r^*} \right) \\ &\stackrel{(2.1.32)}{=} (4c_u N)^m e^{\frac{N}{2} \left(\sum_{r=s+1}^m (\alpha \beta_{\star}^2 p_r^* - \underline{x}_{k_r}^2) \right) \mathbb{I}_{\{s \neq m\}}}, \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

para todo N grande o suficiente.

Portanto,

$$(4.2.51) \leq (4c_u N)^m \sum_{s=0}^m \sum_{\mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s)} e^{\frac{N}{2} [\alpha \bar{P}_{k_m} + (\sum_{r=s+1}^m (\alpha \beta_{\star}^2 p_r^* - \underline{x}_{k_r}^2)) \mathbb{I}_{\{s \neq m\}} + \langle 2\mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle]}. \quad (4.2.54)$$

Notação. Vamos denotar por

$$S_{m,\alpha}^*(s) = S_{m,\alpha}^*(s)[k_1, \dots, k_m] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s)} e^{\frac{N}{2} [\alpha \bar{P}_{k_m} + (\sum_{r=s+1}^m (\alpha \beta_\star^2 p_r^* - \underline{x}_{k_r}^2)) \mathbb{I}_{\{s \neq m\} + \langle 2\mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle}]}, \quad (4.2.55)$$

para $s = 0, \dots, m$.

A fim de obter alguma intuição para os próximos passos, é importante que o leitor observe a semelhança entre os expoentes das exponenciais em (4.2.55) e (3.1) de [CCP87] (cf. Proposição 3.2). As estimativas seguintes estão inspiradas na prova da Proposição 3.3 em [CCP87] e feita com mais detalhes em [Pic92] (cf. páginas 192-193).

O próximo passo será estimar o termo $S_{m,\alpha}^*(s)$. Primeiro, lidaremos com os casos $s = 0, \dots, m-1$. O caso $s = m$ será estudado em separado.

Estimativa para $S_{m,\alpha}^*(s)$ com $s \in \{0, \dots, m-1\}$. Começaremos fixando $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s)$ e introduzindo algumas novas notações.

Notação. Dados $0 \leq i \leq j \leq n$, vamos definir a projeção $\Pi_i^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{j-i}$ como a função que apaga todas as coordenadas fora do conjunto $\{i+1, \dots, j\}$, isto é,

$$x \mapsto \Pi_i^j x \stackrel{\text{def}}{=} (x_{i+1}, \dots, x_j), \quad (4.2.56)$$

com a convenção $\Pi_j^j \equiv 0$.

Relembrando que $\underline{x}$ é tal que $\underline{x}_i = 0, \forall i \neq k_1, \dots, k_m$ (cf. Observação 4.2.1), escrevemos

$$\begin{aligned} \alpha \bar{P}_{k_m} + \sum_{r=s+1}^m (\alpha \beta_\star^2 p_r^* - \underline{x}_{k_r}^2) &\stackrel{(4.2.21)}{=} \alpha \bar{P}_{k_m} + \alpha \beta_\star^2 \sum_{r=s+1}^m \sum_{j=k_{r-1}+1}^{k_r} p_j - \sum_{r=s+1}^m \underline{x}_{k_r}^2 \\ &\stackrel{(4.2.25)}{=} \alpha \bar{P}_{k_s} - \sum_{r=s+1}^m \underline{x}_{k_r}^2 \\ &= \alpha \bar{P}_{k_s} - \langle \Pi_{k_s}^n \underline{x}, \Pi_{k_s}^n \underline{x} \rangle, \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

e daí,

$$S_{m,\alpha}^*(s) = \sum_{\mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s)} e^{\frac{N}{2} [\alpha \bar{P}_{k_s} + \langle 2\mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle - \langle \Pi_{k_s}^n \underline{x}, \Pi_{k_s}^n \underline{x} \rangle]}. \quad (4.2.58)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \langle 2\mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle - \langle \Pi_{k_s}^n \underline{x}, \Pi_{k_s}^n \underline{x} \rangle &= \langle 2\Pi_0^{k_s} \mathbf{m}^*, \Pi_0^{k_s} \underline{x} \rangle + \langle 2\Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^* - \Pi_{k_s}^n \underline{x}, \Pi_{k_s}^n \underline{x} \rangle \\ &= \langle 2\Pi_0^{k_s} \mathbf{m}^*, \Pi_0^{k_s} \underline{x} \rangle + \langle \Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^*, \Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^* \rangle \\ &\quad - \langle \Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^* - \Pi_{k_s}^n \underline{x}, \Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^* - \Pi_{k_s}^n \underline{x} \rangle \\ &= \langle 2\Pi_0^{k_s} \mathbf{m}^*, \Pi_0^{k_s} \underline{x} \rangle + \|\Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^* - \Pi_{k_s}^n \underline{x}\|^2. \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

Portanto, para $m = 0, \dots, m-1$,

$$S_{m,\alpha}^*(s) = \sum_{\mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s)} e^{\frac{N}{2} [\alpha \bar{P}_{k_s} + \langle 2\Pi_0^{k_s} \mathbf{m}^*, \Pi_0^{k_s} \underline{x} \rangle + \|\Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^* - \Pi_{k_s}^n \underline{x}\|^2]}. \quad (4.2.60)$$

Para a sequência seguinte vamos precisar das seguintes notações adicionais.

Notação: Para $j \in \{0, \dots, n\}$, seja Ψ_j o subconjunto de $\mathbb{R}^j$ obtido de Ψ pela aplicação da projeção Π_0^j , isto é,

$$\Psi_j \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_0^j \Psi = \{\Pi_0^j y : y \in \Psi\} \quad (4.2.61)$$

e defina o funcional $\phi_j : \Psi_j \rightarrow [0, \infty)$ como

$$x \mapsto \phi_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, \Pi_0^j \mathbf{m}^* \rangle. \quad (4.2.62)$$

Por último, com um pouco de abuso de notação, seja o conjunto $\Psi_j^n(\alpha)$ dado por

$$\Psi_j^n(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-j} : \forall k = j+1, \dots, n, \sum_{i=j+1}^k x_i^2 \leq \alpha \beta_\star^2 \sum_{i=j+1}^k p_i \right\}, \quad (4.2.63)$$

em que convencionamos $\Psi_n^n(\alpha) \equiv \{0\}$. Por simplicidade de notação, o caso especial $\Psi_0^n(\alpha)$ será indicado simplesmente por $\Psi(\alpha)$. Note que $\Psi_n \equiv \Psi$.

Com as definições acima, seguem duas observações: (i) A primeira vem do fato que para todo $j \in \{0, \dots, n\}$ o conjunto Ψ_j é compacto. Desse fato, combinando as Proposições A.0.1 e A.0.2, obtemos que ϕ_j é limitada e atinge seu valor máximo absoluto em algum ponto de $\text{ext} \Psi_j \neq \emptyset$, o conjunto dos pontos extremos de Ψ_j , digamos $\mathbf{u}_j$, ou seja

$$\max_{x \in \Psi_j} \phi_j(x) = \max_{x \in \text{ext} \Psi_j} \phi_j(x) = \phi_j(\mathbf{u}_j). \quad (4.2.64)$$

Como por construção $\underline{x} \in \Psi$ para todo $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{I}_{m,\alpha}^*(s)$, então a projeção $\Pi_0^{k_s} \underline{x} \in \Psi_{k_s}$, e daí, configurando $j = k_s$ em (4.2.62), de (4.2.64) é imediato que

$$\phi_{k_s}(\Pi_0^{k_s} \underline{x}) \leq \phi_{k_s}(\mathbf{u}_{k_s}); \quad (4.2.65)$$

(ii) A segunda observação segue por causa do fato que para todo $j \in \{0, \dots, n\}$ o conjunto $\Psi_j^n(\alpha)$ é convexo e fechado. Neste caso, fixado $\Pi_j^n \mathbf{m}^*$, pelo Teorema A.0.1, existe um único ponto em $\Psi_j^n(\alpha)$, digamos $\mathbf{m}_{\alpha,j}$, tal que

$$d(\Pi_j^n \mathbf{m}^*, \Psi_j^n(\alpha)) = \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha,j}\|. \quad (4.2.66)$$

Como a hipótese $s = J_{q(m)-1}$ implica (cf. (4.2.37)) que

$$\forall i = s+1, \dots, m, \quad c_u N \leq \prod_{r=s+1}^i q_{j_{k_r}}^* 2^{\alpha V_r^*} \stackrel{(4.2.28)}{\leq} e^{\frac{N}{2} \sum_{r=s+1}^i (\alpha \beta_\star^2 p_r^* - \underline{x}_{k_r}^2)}, \quad (4.2.67)$$

então, se N é grande o suficiente,

$$\forall i = s+1, \dots, m, \quad \sum_{r=s+1}^i (\alpha \beta_{\star}^2 p_r^* - \underline{x}_{k_r}^2) \geq 0. \quad (4.2.68)$$

Daí, como $\underline{x}$ é tal que $\underline{x}_i = 0, \forall i \neq k_1, \dots, k_m$, usando também (4.2.21), obtemos que

$$\forall i = k_s+1, \dots, n, \quad \sum_{j=k_s+1}^i (\alpha \beta_{\star}^2 p_j - \underline{x}_j^2) \geq 0 \quad (4.2.69)$$

ou seja, $\Pi_{k_s}^n \underline{x} \in \Psi_{k_s}^n(\alpha)$. Então, pondo $j = k_s$ em (4.2.63), de (4.2.66) obtemos que

$$\|\Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha, k_s}\|^2 \leq \|\Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^* - \Pi_{k_s}^n \underline{x}\|^2, \quad (4.2.70)$$

para todo N grande o suficiente.

Portanto, juntando (4.2.65) e (4.2.70), para todo $s = 0, \dots, m-1$, obtemos que

$$S_{m, \alpha}^*(s) \leq M^m e^{\frac{N}{2} [2\phi_{k_s}(\mathbf{u}_{k_s}) + \alpha \bar{P}_{k_s} + \|\Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_{k_s}^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha, k_s}\|^2]}, \quad (4.2.71)$$

para todo N grande o suficiente.

Notação. Dados $j \in \{0, \dots, n\}$, $\beta > 0$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, vamos definir

$$2F_{n, j}(\beta, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \bar{P}_j + \|\Pi_j^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha, j}\|^2, \quad (4.2.72)$$

com a convenção $F_{n, n} \equiv 0$. Quando $\alpha = 1$, $F_{n, j}(\beta, 1)$ será indicado simplesmente por $F_{n, j}(\beta)$. Neste caso, note que $F_{n, 0}(\beta) \equiv F_n(\beta)$.

Observação 4.2.3. Alternativamente, usando as propriedades de produto interno, podemos escrever (4.2.72) como

$$2F_{n, j}(\beta, \alpha) = \alpha \bar{P}_j + 2\langle \Pi_j^n \mathbf{m}^*, \mathbf{m}_{\alpha, j} \rangle - \langle \mathbf{m}_{\alpha, j}, \mathbf{m}_{\alpha, j} \rangle. \quad (4.2.73)$$

Em alguns contextos, será mais conveniente escrever $F_{n, j}$ como acima ao invés de (4.2.72).

Com a notação acima, reescrevemos (4.2.71) como

$$S_{m, \alpha}^*(s) \leq M^m \exp \{N [\phi_{k_s}(\mathbf{u}_{k_s}) + F_{n, k_s}(\beta, \alpha)]\}, \quad s = 0, \dots, m-1. \quad (4.2.74)$$

Estimativa para $S_{m, \alpha}^*(m)$. Agora vamos considerar o caso $s = m$, ou seja, o termo

$$S_{m, \alpha}^*(m) = \sum_{\mathbf{I}_{m, \alpha}^*(m)} e^{\frac{N}{2} [\alpha \bar{P}_{k_m} + \langle 2\mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle]}. \quad (4.2.75)$$

Neste caso, como $\underline{x} \in \Psi$ é tal que $\underline{x}_i = 0, \forall i \neq k_1, \dots, k_m$, temos que

$$\langle \mathbf{m}^*, \underline{x} \rangle = \langle \Pi_0^{k_m} \mathbf{m}^*, \Pi_0^{k_m} \underline{x} \rangle = \phi_{k_m}(\Pi_0^{k_m} \underline{x}) \stackrel{(4.2.64)}{\leq} \phi_{k_m}(\mathbf{u}_{k_m}), \quad (4.2.76)$$

e portanto,

$$S_{m,\alpha}^*(m) \leq M^m \exp \left\{ \frac{N}{2} \left[2\phi_{k_m}(\mathbf{u}_{k_m}) + \alpha \bar{P}_{k_m} \right] \right\}. \quad (4.2.77)$$

O lema seguinte lida com o termo $\alpha \bar{P}_{k_m}$.

Lema 4.2.2. Para todo $0 \leq \alpha \leq 1$ e todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$, vale

$$\alpha \bar{P}_j \leq 2F_{n,j}(\beta, \alpha). \quad (4.2.78)$$

Demonstração. Com efeito, para $\alpha = 0$ é imediato. Vamos então supor que $0 < \alpha \leq 1$. Com a notação em (4.2.73), temos que

$$\begin{aligned} 2F_{n,j}(\beta, \alpha) - \alpha \bar{P}_j &= 2\langle \mathbf{m}_{\alpha,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* \rangle - \langle \mathbf{m}_{\alpha,j}, \mathbf{m}_{\alpha,j} \rangle \\ &= \underbrace{\langle \mathbf{m}_{\alpha,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* \rangle}_{\geq 0} + \langle \mathbf{m}_{\alpha,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* \rangle - \langle \mathbf{m}_{\alpha,j}, \mathbf{m}_{\alpha,j} \rangle \\ &\geq \langle \mathbf{m}_{\alpha,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha,j} \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.79)$$

Agora considere a forma linear

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j: \Psi_j^n(\alpha) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathcal{L}_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x - \mathbf{m}_{\alpha,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha,j} \rangle \end{aligned} \quad (4.2.80)$$

e note que

$$\langle \mathbf{m}_{\alpha,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha,j} \rangle = -\mathcal{L}_j(0). \quad (4.2.81)$$

Logo, se $\mathcal{L}_j(0) \leq 0$, segue que $\langle \mathbf{m}_{\alpha,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha,j} \rangle \geq 0$ e, por fim, (4.2.78) vale. Agora, como $\Psi_j^n(\alpha)$ é convexo e compacto, portanto, fechado, pelo Teorema A.0.1, uma condição necessária e suficiente para existência do ponto $\mathbf{m}_{\alpha,j}$ é que

$$\mathcal{L}_j(x) \leq 0 \quad (4.2.82)$$

para todo $x \in \Psi_j^n(\alpha)$. Como $0 \in \Psi_j^n(\alpha)$, a demonstração está encerrada. $\square$

Usando o lema que acabamos de provar, obtemos que

$$S_{m,\alpha}^*(m) \leq M^m \exp \{ N [\phi_{k_m}(\mathbf{u}_{k_m}) + F_{n,k_m}(\beta, \alpha)] \}. \quad (4.2.83)$$

Conclusão da Estimativa para $S_{m,\alpha}^*(s)$. Portanto, de (4.2.74) e (4.2.83), segue que

$$S_{m,\alpha}^*(s) \leq M^m \exp \{N [\phi_{k_s}(\mathbf{u}_{k_s}) + F_{n,k_s}(\beta, \alpha)]\}, \quad \forall s = 0, \dots, m. \quad (4.2.84)$$

Voltando para (4.2.51), concluímos finalmente que

$$\begin{aligned} (4.2.51) & \stackrel{(4.2.54)}{\leq} \sum_{s=0}^m (4c_u N)^m S_{m,\alpha}^*(s) \\ & \stackrel{(4.2.84)}{\leq} (4c_u M N)^m \sum_{s=0}^m \exp \{N [\phi_{k_s}(\mathbf{u}_{k_s}) + F_{n,k_s}(\beta, \alpha)]\} \\ & \leq (m+1)(4c_u M N)^m \exp \{N \bigvee_{s=0}^m [\phi_{k_s}(\mathbf{u}_{k_s}) + F_{n,k_s}(\beta, \alpha)]\} \\ & \leq (m+1)(4c_u M N)^m \exp \left\{ N \bigvee_{j=0}^n [\phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta, \alpha)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.85)$$

para todo N grande o suficiente, em que convencionamos $\phi_0 \equiv F_{n,n} \equiv 0$.

4.2.5 Conclusão da Estimativa para (4.1.34)

Nesta subseção concluiremos a estimativa do termo S_1 e estimaremos os termos S_0 e S^* . Por consequência, obteremos a estimativa de $Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \xi')$. Usando um argumento por complementação obteremos também a estimativa para $Z_{l,B}^{(1)}(\xi, \xi')$. Encerraremos a subseção com o argumento para a cota superior de (4.2.1).

Começaremos reunindo os resultados das Subseções 4.2.3 e 4.2.4 na seguinte afirmação: do Corolário 4.2.1 e (4.2.85), para todo $\varepsilon > 0$ e todo N grande o suficiente, com $\mathbb{P}$ -probabilidade $\geq 1 - e^{-\varepsilon N}$, obtemos que

$$\begin{aligned} S_1 & \leq e^{n\beta\beta_\star\delta_0 N} \sum_{m=1}^n \sum_{[k_1, \dots, k_m]} (m+1)(4c_u M N)^m \exp \left\{ N \bigvee_{j=0}^n [\phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta, \alpha)] \right\} \\ & \leq (n+1)(4c_u M N)^n e^{n\beta\beta_\star\delta_0 N} \exp \left\{ N \bigvee_{j=0}^n [\phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta, \alpha)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.86)$$

Isto conclui a estimativa do termo S_1 .

Estimativa para S_0 . Considere agora o termo

$$S_0 = \sum_{\boldsymbol{\eta} \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} \mathbb{1}\{-X_{\boldsymbol{\varphi}_l(\boldsymbol{\eta}, \xi, \xi')} \in \sqrt{N}\Delta_{0,\dots,0}\} e^{\langle \mathbf{m}^*, \tilde{x} \rangle N}. \quad (4.2.87)$$

Voltando em (4.2.6), não é difícil concluir que $\langle \mathbf{m}^*, \tilde{x} \rangle \leq n\beta\beta_\star\delta_0$. Então, como $V \leq N$, é imediato que

$$S_0 \leq e^{n\beta\beta_\star\delta_0 N} 2^{|\mathcal{V}^{1,l-1}|} \stackrel{(4.2.18)}{\leq} e^{n\beta\beta_\star\delta_0 N} e^{\frac{1}{2}\alpha\beta_\star^2 N} \leq e^{n\beta\beta_\star\delta_0 N} \exp \{N F_{n,0}(\beta, \alpha)\}, \quad (4.2.88)$$

em que a última desigualdade segue do Lema 4.2.2 configurado com $j = 0$.

Estimativa para S^* . Finalmente, vamos considerar

$$S^* = e^{-\beta H(\bar{\sigma})} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}^*} \left(\sum_{\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}} \mathbb{1}\{-X_{\sigma} \in \sqrt{N} \Delta_{j_1, \dots, j_n}\} \right). \quad (4.2.89)$$

A estratégia é provar que, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, $S^* = 0$ para todo N grande o suficiente.

Com efeito, seja $j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}^*$. Isto significa que em $\Delta_{j_1, \dots, j_n} = \Delta_{j_1}^1 \times \dots \times \Delta_{j_n}^n$ existe ao menos um $\Delta_{j_k}^k = ((1 + \delta_0)\sqrt{P_k}, \infty)$. Neste caso, se considerarmos o conjunto $\mathcal{A}_n(N, \delta)$ definido em (2.1.31) configurado com $\delta = \delta_0$, como $V_j \leq p_j N$, não é difícil concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}^*} \mathbb{1}\{-X_{\sigma} \in \sqrt{N} \Delta_{j_1, \dots, j_n}\} &= \mathbb{1}\left\{-X_{\sigma} \in \bigcup_{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}^*} \sqrt{N} \Delta_{j_1, \dots, j_n}\right\} \\ &\leq \mathbb{1}\{-X_{\sigma} \in \mathcal{A}_n^c(N, \delta_0)\}. \end{aligned} \quad (4.2.90)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}^*} \sum_{\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}} \mathbb{1}\{-X_{\sigma} \in \sqrt{N} \Delta_{j_1, \dots, j_n}\} \geq \frac{1}{2}\right] \\ \leq \mathbb{P}\left[\sum_{\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}} \mathbb{1}\{-X_{\sigma} \in \mathcal{A}_n^c(N, \delta_0)\} \geq \frac{1}{2}\right] \\ = \mathbb{P}[\mathcal{A}_n^c(N, \delta_0)]. \end{aligned} \quad (4.2.91)$$

Invocando a Proposição 2.1.1, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$0 \leq \sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{X}^*} \sum_{\sigma \in \Omega_{\mathcal{V}}} \mathbb{1}\{-X_{\sigma} \in \sqrt{N} \Delta_{j_1, \dots, j_n}\} < \frac{1}{2}, \quad (4.2.92)$$

para todo N grande o suficiente.

Como a soma em (4.2.92) só pode assumir valores inteiros, então ela é necessariamente igual a zero para todo N grande o suficiente. Este fato é suficiente para concluirmos que

$$S^* = 0, \quad (4.2.93)$$

$\mathbb{P}$ -quase certamente.

Reunindo (4.2.86), (4.2.88) e (4.2.93), concluimos então que, para todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade $\geq 1 - e^{-\varepsilon N}$,

$$\begin{aligned} &\max_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta') \\ &\leq e^{n\beta\beta_*\delta_0 N} \left(\exp\{NF_{n,0}(\beta, \alpha)\} + (n+1)(4c_u MN)^n \exp\left\{NV_{j=0}^n [\phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta, \alpha)]\right\} \right) \\ &\leq C(\beta, n, M, N) \exp\left\{NV_{j=0}^n G_j(\beta, \alpha)\right\}, \end{aligned} \quad (4.2.94)$$

para todo N grande o suficiente, em que estamos denotando

$$G_j(\beta, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta, \alpha), \quad (4.2.95)$$

e

$$C(\beta, n, M, N) \stackrel{\text{def}}{=} 2(n+1)(4c_u M N e^{\beta\beta_*\delta_0 N})^n. \quad (4.2.96)$$

Estimativa para $Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi')$. Foi assumido em (4.2.18) que $l-1 = \alpha B$, para algum $0 < \alpha < 1$. Então, por (4.1.15), obtemos que

$$|\mathcal{V}^{l+1,B}| = (B-l) \sum_{j=1}^n v_j = (B - \alpha B - 1) \sum_{j=1}^n v_j \stackrel{(2.1.12)}{\leq} \bar{\alpha} V, \quad (4.2.97)$$

em que

$$\bar{\alpha} = 1 - \alpha. \quad (4.2.98)$$

Logo, o Corolário 4.2.1 vale com α substituído por $\bar{\alpha}$, e portanto, usando uma sequência de argumentos análogos aos das Subseções 4.2.3, 4.2.4 e 4.2.5, obtemos a seguinte afirmação: para todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade $\geq 1 - e^{-\varepsilon N}$,

$$\max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi') \leq C(\beta, n, M, N) \exp \left\{ N \bigvee_{j=0}^n G_j(\beta, \bar{\alpha}) \right\}, \quad (4.2.99)$$

para todo N grande o suficiente.

Conclusão da Estimativa para (4.2.1). Juntando (4.2.94) e (4.2.99), segue que para todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade $\geq 1 - e^{-\varepsilon N}$,

$$\begin{aligned} (4.2.1) &\leq C^2(\beta, n, M, N) \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \exp \left\{ N \left(\bigvee_{j=0}^n G_j(\beta, \alpha) + \bigvee_{k=0}^n G_k(\beta, \bar{\alpha}) \right) \right\} \\ &= C^2(\beta, n, M, N) \exp \left\{ N \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \bigvee_{j=0}^n G_j(\beta, \alpha) + \bigvee_{k=0}^n G_k(\beta, \bar{\alpha}) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.100)$$

para todo N grande o suficiente.

Observação 4.2.4. É importante notar que a desigualdade em (4.2.100) não é trivial no sentido que o termo do máximo no lado direito é finito. Isso é verdade porque, para todo $\beta > 0$ fixado, a função dentro do sinal de $\max_{0 \leq \alpha \leq 1}$ é uma composição de funções claramente contínuas com respeito a α , e como o intervalo $[0, 1]$ é compacto, o Teorema A.0.2 garante que ela é limitada.

Note que temos resumido todo a questão de estimar o termo (4.2.1) no seguinte problema de otimização:

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \bigvee_{j=0}^n G_j(\beta, \alpha) + \bigvee_{k=0}^n G_k(\beta, \bar{\alpha}) \right\} \quad (4.2.101)$$

para todos os valores de $\beta > 0$. Apesar do que parece, note que estamos diante de um problema completamente determinístico, o que, em certo sentido, facilita sua análise. Em [FIKP98] um problema análogo foi resolvido. Nesse caso (lembre que $n = 1$ lá), Fontes et al. provaram que

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \bigvee_{j=0}^1 G_j(\beta, \alpha) + \bigvee_{k=0}^1 G_k(\beta, \bar{\alpha}) \right\} \leq F_1(\beta) + \beta\beta_1, \quad (4.2.102)$$

qualquer que seja o valor de $\beta > 0$. É importante enfatizar que a parcela $\beta\beta_1$, linear em β , é também a energia livre do REM sob o regime de baixas temperaturas. Portanto, é razoável esperar que no caso geral tenhamos

$$(4.2.101) \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k, \quad \forall \beta > 0. \quad (4.2.103)$$

De fato, é isso que acontece, como provamos na seguinte proposição.

Proposição 4.2.2. Para todo $\beta > 0$,

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \bigvee_{j=0}^n G_j(\beta, \alpha) + \bigvee_{k=0}^n G_k(\beta, \bar{\alpha}) \right\} \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k. \quad (4.2.104)$$

Demonstração. Subseção 4.2.6. □

Agora note que para todo $\beta > 0$, todo $\varepsilon > 0$ e para todo N grande o suficiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \log C^2(\beta, n, M, N) &= \frac{2}{N} \log \left(2(n+1)(4c_u M N e^{\beta\beta_\star \delta_0 N})^n \right) \\ &= \frac{2}{N} \log 2(n+1) + \frac{2n}{N} \log(4c_u M N) + 2n\beta\beta_\star \delta_0 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2n\beta\beta_\star \delta_0. \end{aligned} \quad (4.2.105)$$

Este fato junto com a Proposição 4.2.2 implicam que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \log \left(C^2(\beta, n, M, N) \exp \left\{ N \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \bigvee_{j=0}^n G_j(\beta, \alpha) + \bigvee_{k=0}^n G_k(\beta, \bar{\alpha}) \right\} \right\} \right) \\ &\leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k + \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned} \quad (4.2.106)$$

para todo $\beta > 0$, todo $\varepsilon > 0$ e todo N grande o suficiente se escolhermos $M > \frac{4n\beta\beta_\star}{\varepsilon}$ em (4.2.3).

Portanto, voltando para (4.2.1), de (4.2.100) e (4.2.106), para todo $\beta > 0$ e todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade $\geq 1 - e^{-\varepsilon N}$,

$$\frac{1}{N} \log \left(4^{\mathcal{S}}(4.2.1) \right) \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k + \varepsilon, \quad (4.2.107)$$

para todo N grande o suficiente, em que usamos também que $\mathcal{S} = o(N)$.

4.2.6 Prova da Proposição 4.2.2

As ferramentas fundamentais usadas nesta subseção são o Teorema da Projeção sobre um Convexo Fechado A.0.1 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Usaremos também sistematicamente o fato que, para todo $\beta > 0$ fixado, as funções de α são limitadas. Isso segue como consequência do Teorema A.0.2.

Para começar, fixados $\beta > 0$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, não é difícil ver que

$$\bigvee_{j=0}^n G_j(\beta, \alpha) + \bigvee_{k=0}^n G_k(\beta, \bar{\alpha}) \leq \bigvee_{j=0}^n \bigvee_{k=0}^n [G_j(\beta, \alpha) + G_k(\beta, \bar{\alpha})]. \quad (4.2.108)$$

Consequentemente, e também usando simetria, temos que

$$\begin{aligned} (4.2.101) &\leq \bigvee_{j=0}^n \bigvee_{k=1}^n \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{G_j(\beta, \alpha) + G_k(\beta, \bar{\alpha})\} \\ &= \bigvee_{j=0}^n \bigvee_{k=j}^n \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{G_j(\beta, \alpha) + G_k(\beta, \bar{\alpha})\} \\ &\stackrel{(4.2.95)}{=} \bigvee_{j=0}^n \bigvee_{k=j}^n \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\phi_j(\mathbf{u}_j) + \phi_k(\mathbf{u}_k) + F_{n,j}(\beta, \alpha) + F_{n,k}(\beta, \bar{\alpha})\} \\ &\leq \bigvee_{j=0}^n \bigvee_{k=j}^n [\phi_j(\mathbf{u}_j) + \phi_k(\mathbf{u}_k) + \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{F_{n,j}(\beta, \alpha) + F_{n,k}(\beta, \bar{\alpha})\}] \\ &= M_1 \vee M_2 \vee [2\phi_n(\mathbf{u}_n)], \end{aligned} \quad (4.2.109)$$

em que a última desigualdade segue do Lema A.0.2 e estamos denotando

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{j=0}^{n-1} \bigvee_{k=j}^{n-1} [\phi_j(\mathbf{u}_j) + \phi_k(\mathbf{u}_k) + \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{F_{n,j}(\beta, \alpha) + F_{n,k}(\beta, \bar{\alpha})\}], \quad (4.2.110)$$

e

$$M_2 \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{j=0}^{n-1} [\phi_n(\mathbf{u}_n) + \phi_j(\mathbf{u}_j) + \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{F_{n,j}(\beta, \alpha)\}]. \quad (4.2.111)$$

O próximo passo será uma consequência direta do seguinte lema.

Lema 4.2.3. Para todo $0 \leq j \leq k \leq n-1$ e todo $\beta > 0$ vale,

- (i) $\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{F_{n,j}(\beta, \alpha) + F_{n,k}(\beta, \bar{\alpha})\} \leq F_{n,j}(\beta) + \frac{1}{2} \|\Pi_k^n \mathbf{m}^*\|^2 - \frac{1}{2} \|\Pi_k^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,k}\|^2$.
- (ii) $\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{F_{n,j}(\beta, \alpha)\} \leq F_{n,j}(\beta)$, em que $F_{n,j}(\beta) = F_{n,j}(\beta, 1)$.
- (iii) $\phi_j(\mathbf{u}_j) + \frac{1}{2} \|\Pi_j^n \mathbf{m}^*\|^2 - \frac{1}{2} \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,j}\|^2 \leq \phi_n(\mathbf{u}_n)$.
- (iv) $\phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta) \leq F_n(\beta)$.

Demonstração. (i) Com a notação (4.2.72), escrevemos

$$\begin{aligned} &2(F_{n,j}(\beta, \alpha) + F_{n,k}(\beta, \bar{\alpha})) \\ &= \alpha \bar{P}_j + \bar{\alpha} \bar{P}_k + \|\Pi_j^n \mathbf{m}^*\|^2 + \|\Pi_k^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha,j}\|^2 - \|\Pi_k^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\bar{\alpha},k}\|^2, \end{aligned} \quad (4.2.112)$$

e aplicando o máximo sobre $0 \leq \alpha \leq 1$, segue do Lema A.0.2 que

$$\begin{aligned} &2 \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{F_{n,j}(\beta, \alpha) + F_{n,k}(\beta, \bar{\alpha})\} \\ &\leq \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha \bar{P}_j + \bar{\alpha} \bar{P}_k\} + \|\Pi_j^n \mathbf{m}^*\|^2 + \|\Pi_k^n \mathbf{m}^*\|^2 - \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\alpha,j}\|^2\} \\ &\quad - \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\|\Pi_k^n \mathbf{m}^* - \mathbf{m}_{\bar{\alpha},k}\|^2\}. \end{aligned} \quad (4.2.113)$$

Agora, observe que: (1)

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha \bar{P}_j + \bar{\alpha} \bar{P}_k\} \stackrel{(4.2.25)}{=} \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \alpha \beta^2 (p_{j+1} + \cdots + p_k) \mathbb{1}_{\{j < k\}} + \bar{P}_k \right\} \leq \bar{P}_j; \quad (4.2.114)$$

e (2), pelo Teorema A.0.1, denotando $\Psi_i^n \equiv \Psi_i^n(1)$ para $i \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{\alpha,j}\|^2 &= \left(\min_{0 \leq \alpha \leq 1} d(\Pi_j^n \mathbf{m}^*, \Psi_j^n(\alpha)) \right)^2 = \left(d(\Pi_j^n \mathbf{m}^*, \Psi_j^n) \right)^2 \\ &= \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,j}\|^2 \end{aligned} \quad (4.2.115)$$

e

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \|\Pi_k^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{\bar{\alpha},k}\|^2 &= \left(\min_{0 \leq \alpha \leq 1} d(\Pi_k^n \mathbf{m}^*, \Psi_k^n(\bar{\alpha})) \right)^2 = \left(d(\Pi_k^n \mathbf{m}^*, \Psi_k^n) \right)^2 \\ &= \|\Pi_k^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,k}\|^2. \end{aligned} \quad (4.2.116)$$

Portanto, de (4.2.114), (4.2.115) e (4.2.116) obtemos que

$$\begin{aligned} 2 \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{F_{n,j}(\beta, \alpha) + F_{n,k}(\beta, \bar{\alpha})\} \\ \leq \bar{P}_j + \|\Pi_j^n \mathbf{m}^*\|^2 + \|\Pi_k^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,j}\|^2 - \|\Pi_k^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,k}\|^2 \\ = 2F_{n,j}(\beta) + \|\Pi_k^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_k^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,k}\|^2. \end{aligned} \quad (4.2.117)$$

(ii) Com argumentos usados no item anterior, obtemos que

$$\begin{aligned} 2 \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{F_{n,j}(\beta, \alpha)\} &\leq \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha \bar{P}_j\} + \|\Pi_j^n \mathbf{m}^*\|^2 - \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{\alpha,j}\|^2\} \\ &\leq 2F_{n,j}(\beta) \end{aligned} \quad (4.2.118)$$

Para provar as duas últimas desigualdades vamos dividir em dois casos: $j = 0$ e $j = 1, \dots, n-1$.

(iii) Por definição $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Neste caso, usando as propriedades de produto interno, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Pi_j^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,j}\|^2 &= \langle \Pi_j^n \mathbf{m}^*, \Pi_j^n \mathbf{m}^* \rangle - \langle \Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,j} \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{w}_{1,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* \rangle - \underbrace{\langle \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{w}_{1,j} \rangle}_{\geq 0} \\ &\leq 2\langle \mathbf{w}_{1,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.119)$$

Daí, se $j = 1, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} 2\phi_j(\mathbf{u}_j) + \|\Pi_j^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,j}\|^2 &\leq 2\langle \mathbf{u}_j, \Pi_j^n \mathbf{m}^* \rangle + 2\langle \mathbf{w}_{1,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{m}^* \rangle, \end{aligned} \quad (4.2.120)$$

em que “ $*$ ” denota a concatenação de seqüências finitas[†]. Como $\mathbf{u}_j \in \Psi_j$ e $\mathbf{w}_{1,j} \in \Psi_j^n$, temos que $\mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j} \in \Psi$, e portanto,

$$\langle \mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{m}^* \rangle = \phi_n(\mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j}) \leq \phi_n(\mathbf{u}_n), \quad (4.2.121)$$

assim concluindo que:

$$2\phi_j(\mathbf{u}_j) + \|\Pi_j^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_j^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,j}\|^2 \leq 2\phi_n(\mathbf{u}_n). \quad (4.2.122)$$

Se $j = 0$, então $\phi_0 \equiv 0$ e como $\mathbf{w}_{1,0} \in \Psi_0^n = \Psi$, segue que

$$\|\Pi_0^n \mathbf{m}^*\|^2 - \|\Pi_0^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,0}\|^2 \leq 2\langle \mathbf{w}_{1,0}, \mathbf{m}^* \rangle = 2\phi_n(\mathbf{w}_{1,0}) \leq 2\phi_n(\mathbf{u}_n). \quad (4.2.123)$$

(iv) O caso mais simples, $j = 0$, segue da convenção $\phi_0 \equiv 0$ e do fato que $F_{n,0}(\beta) = F_n(\beta)$ como pode ser conferido em (4.2.72).

Para o outro caso, $j = 1, \dots, n-1$, com a notação em (4.2.73), escrevemos primeiro que

$$\begin{aligned} 2(\phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta)) &= 2\langle \mathbf{u}_j, \Pi_0^j \mathbf{m}^* \rangle + \bar{P}_j + 2\langle \mathbf{w}_{1,j}, \Pi_j^n \mathbf{m}^* \rangle - \langle \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{w}_{1,j} \rangle \\ &= \bar{P}_j + 2\langle \mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{m}^* \rangle - \langle \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{w}_{1,j} \rangle \\ &= \beta_\star^2 + 2\langle \mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{m}^* \rangle - P_j - \langle \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{w}_{1,j} \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.124)$$

Agora, usando o fato que $\mathbf{u}_j \in \text{ext}\Psi_j \subseteq \partial\Psi_j^{\dagger\dagger}$, obtemos que

$$\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle = P_j. \quad (4.2.125)$$

Substituindo esta última igualdade em (4.2.124), temos que

$$\begin{aligned} 2(\phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta)) &= \beta_\star^2 + 2\langle \mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{m}^* \rangle - \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle - \langle \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{w}_{1,j} \rangle \\ &= \beta_\star^2 + 2\langle \mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{m}^* \rangle - \langle \mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j}, \mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j} \rangle \\ &= \beta_\star^2 + \|\mathbf{m}^*\|^2 - \|\mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j} - \mathbf{m}^*\|^2, \end{aligned} \quad (4.2.126)$$

em que a última igualdade segue das propriedades do produto interno.

Como $\mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j} \in \Psi$, é imediato que

$$\|\mathbf{m}^* - \mathbf{u}_j * \mathbf{w}_{1,j}\|^2 \geq \|\mathbf{m}^* - \mathbf{m}\|^2 = (\text{d}(\mathbf{m}^*, \Psi))^2, \quad (4.2.127)$$

[†]Dadas duas seqüências finitas $x = (x_i)_{i=1}^n$ e $y = (y_i)_{i=1}^m$, a concatenação de x e y , denotado por $x * y$, é definida por

$$x * y \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

^{††}Este fato segue da convexidade do conjunto Ψ_j .

e portanto,

$$2(\phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta)) \leq \beta_\star^2 + \|\mathbf{m}^*\|^2 - \|\mathbf{m}^* - \mathbf{m}\|^2 = 2F_n(\beta), \quad (4.2.128)$$

encerrando a demonstração. □

Como consequência do Lema 4.2.3, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} M_1 &\stackrel{(i)}{\leq} \bigvee_{j=0}^{n-1} \bigvee_{k=j}^{n-1} [\phi_j(\mathbf{u}_j) + \phi_k(\mathbf{u}_k) + F_{n,j}(\beta) + \frac{1}{2}\|\Pi_k^n \mathbf{m}^*\|^2 - \frac{1}{2}\|\Pi_k^n \mathbf{m}^* - \mathbf{w}_{1,k}\|^2] \\ &\stackrel{(iii) \text{ e } (iv)}{\leq} \bigvee_{j=0}^{n-1} \bigvee_{k=j}^{n-1} [F_n(\beta) + \phi_n(\mathbf{u}_n)] \\ &= F_n(\beta) + \phi_n(\mathbf{u}_n), \end{aligned} \quad (4.2.129)$$

$$\begin{aligned} M_2 &\stackrel{(ii)}{\leq} \bigvee_{j=0}^{n-1} [\phi_n(\mathbf{u}_n) + \phi_j(\mathbf{u}_j) + F_{n,j}(\beta)] \\ &\stackrel{(iv)}{\leq} \bigvee_{j=0}^{n-1} [F_n(\beta) + \phi_n(\mathbf{u}_n)] \\ &= F_n(\beta) + \phi_n(\mathbf{u}_n) \end{aligned} \quad (4.2.130)$$

e

$$2\phi_n(\mathbf{u}_n) \stackrel{(2.1.56)}{\leq} F_n(\beta) + \phi_n(\mathbf{u}_n). \quad (4.2.131)$$

Juntando agora (4.2.109), (4.2.129), (4.2.130) e (4.2.131), obtemos finalmente que

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \bigvee_{j=0}^n G_j(\beta, \alpha) + \bigvee_{k=0}^n G_k(\beta, \bar{\alpha}) \right\} \leq F_n(\beta) + \phi_n(\mathbf{u}_n), \quad \forall \beta > 0. \quad (4.2.132)$$

O próximo lema conclui a prova da Proposição 4.2.2.

Lema 4.2.4. Seja $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathbf{u}_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_\ell \sqrt{a_k}, \text{ se } k \in \{J_{\ell-1}^* + 1, \dots, J_{\ell+1}^*\} \text{ para algum } \ell = 1, \dots, \ell_n, \quad (4.2.133)$$

Então, $\mathbf{u}_n \in \Psi$ e

$$\max_{x \in \Psi} \phi_n(x) = \phi_n(\mathbf{u}_n) = \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k. \quad (4.2.134)$$

Demonstração. A prova deste lema tem sua inspiração na demonstração do Lema 3.1 em [DD02].

A ferramenta fundamental aqui, assim como foi em [DD02], é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

O fato que $\mathbf{u}_n \in \Psi$ é consequência imediata da construção das sequências $\{\beta_\ell\}_{\ell=1}^{\ell_n}$ e $\{J_\ell^*\}_{\ell=1}^{\ell_n}$ dadas em (2.1.51) e (2.1.52).

Seja $x \in \Psi$. Dado $\ell \in \{1, \dots, \ell_n\}$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\langle \Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n, \Pi_0^{J_\ell^*} x \rangle \leq \|\Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n\| \cdot \|\Pi_0^{J_\ell^*} x\| \leq \|\Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n\| \cdot \sqrt{P_{J_\ell^*}}, \quad (4.2.135)$$

em que a última desigualdade segue de x pertencer ao conjunto Ψ .

Agora, note que

$$\|\Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n\|^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i^2 \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} a_k = P_{J_\ell^*}. \quad (4.2.136)$$

Então,

$$\langle \Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n, \Pi_0^{J_\ell^*} x \rangle \leq \|\Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n\|^2 = \langle \Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n, \Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n \rangle, \quad (4.2.137)$$

e daí,

$$\langle \Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n, \Pi_0^{J_\ell^*} \mathbf{u}_n - \Pi_0^{J_\ell^*} x \rangle = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} \beta_i \sqrt{a_k} (\beta_i \sqrt{a_k} - x_k) \geq 0, \quad (4.2.138)$$

para todo $\ell \in \{1, \dots, \ell_n\}$.

Introduzindo os números $(\beta\beta_\ell^{-1})_{\ell=1}^{\ell_n}$ na soma, note que $\beta\beta_1^{-1} \geq \dots \geq \beta\beta_{\ell_n}^{-1} \geq 0$, segue do Lema A.0.1 que

$$\sum_{i=1}^{\ell_n} \beta\beta_i^{-1} \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} \beta_i \sqrt{a_k} (\beta_i \sqrt{a_k} - x_k) \geq 0. \quad (4.2.139)$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell_n} \beta\beta_i^{-1} \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} \beta_i \sqrt{a_k} (\beta_i \sqrt{a_k} - x_k) &= \sum_{i=1}^{\ell_n} \sum_{k=J_{i-1}^*+1}^{J_i^*} (\beta_i \sqrt{a_k}) (\beta \sqrt{a_k}) - \sum_{k=1}^n x_k \beta \sqrt{a_k} \\ &= \langle \mathbf{u}_n, \mathbf{m}^* \rangle - \langle x, \mathbf{m}^* \rangle \\ &= \phi_n(\mathbf{u}_n) - \phi_n(x), \end{aligned} \quad (4.2.140)$$

segue de (4.2.139) que

$$\phi_n(x) \leq \phi_n(\mathbf{u}_n), \quad \forall x \in \Psi. \quad (4.2.141)$$

□

4.3 Conclusão

Nesta seção reuniremos todos os resultados das Seções 4.1 e 4.2 em um argumento para a estimativa do termo K_1 .

Começamos argumentando que, de (4.1.14), (4.1.24), (4.1.25), (4.1.34) e (4.2.107), para todo $\beta > 0$ e todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade $\geq 1 - e^{-\varepsilon N}$,

$$\frac{1}{N} \log \Lambda_1 \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k + \varepsilon, \quad (4.3.1)$$

para todo N grande o suficiente.

De (4.1.1), ainda temos que

$$\frac{1}{N} \log K_1 \leq \frac{1}{N} \log \max_{\ell \in \mathcal{I}_{v_1}} \Lambda_\ell + \frac{\log v_1}{N}. \quad (4.3.2)$$

Seja $\{\mathcal{B}_{\varepsilon, N}(\ell)\}_{\ell=1}^{v_1}$ a sequência de eventos definidos como

$$\mathcal{B}_{\varepsilon, N}(\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{N} \log \Lambda_\ell > F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k + \varepsilon \right\}. \quad (4.3.3)$$

Como as variáveis aleatórias $\{\Lambda_\ell\}_{\ell=1}^{v_1}$ são identicamente distribuídas, de (4.2.107), para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}[\bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_{v_1}} \mathcal{B}_{\varepsilon, N}^c(\ell)] \leq v_1 \mathbb{P}[\mathcal{B}_{\varepsilon, N}^c(1)] \leq v_1 e^{-\varepsilon N} \leq e^{-\frac{\varepsilon}{2} N}, \quad (4.3.4)$$

para todo N grande o suficiente. Como o último termo da desigualdade acima é somável, então, pelo Primeiro Lema de Borel-Cantelli, obtemos que

$$\frac{1}{N} \log \max_{\ell \in \mathcal{I}_{v_1}} \Lambda_\ell \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k + \varepsilon, \quad \mathbb{P} - \text{q.c.} \quad (4.3.5)$$

Juntando (4.3.2) e (4.3.5), para todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\frac{1}{N} \log K_1 \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k + \varepsilon + \frac{\log v_1}{N}, \quad (4.3.6)$$

para todo N grande o suficiente.

Agora, tomando primeiro o $\limsup$ com $N \uparrow \infty$, é imediato que

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log K_1 \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k + \varepsilon. \quad (4.3.7)$$

Como a desigualdade acima vale para todo $\varepsilon > 0$, concluímos finalmente que, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log K_1 \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k. \quad (4.3.8)$$

Capítulo 5

Conclusão da Prova do Teorema 2.3.1

Este capítulo está dividido em duas seções. Na Seção 5.1 derivaremos uma cota superior para o termo K_2 , de mesma ordem logarítmica que o termo K_1 , adaptando o argumento desenvolvido no Capítulo 4. Na Seção 5.2 reuniremos as estimativas do Capítulo 3, 4 e da Seção 5.1 e deduziremos um argumento para concluir a prova do Teorema 2.3.1.

5.1 Estimativa para K_2

O objeto de estudo desta seção é o termo K_2 , o qual está definido como

$$K_2 = \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{d_1(\eta, \eta') < \kappa v_1\}. \quad (5.1.1)$$

Nosso objetivo é derivar uma cota para a expressão anterior de mesma ordem logarítmica que o termo K_1 , cuja estimativa está dada em (4.3.8).

A ideia básica é a seguinte. Voltando à Proposição 3.2.1, para cada par de sítios (η, η') , tais que $d_1(\eta, \eta') < \kappa v_1$, o caminho em Γ que conecta eles é, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, da forma

$$\gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega} \cup \gamma_{\omega, \eta'}, \quad (5.1.2)$$

em que $\omega \in \Omega_V^{\eta, \eta'}$ é o sítio intermediário (cf. Definição 3.2.8) e $\Omega_V^{\eta, \eta'}$ está definido em (3.2.36). Agora, como em (5.1.1) a soma está sobre caminhos $\gamma_{\eta, \eta'} \in \Gamma$ que passam por meio do elo e , então, por causa de (5.1.2) e do fato que os caminhos em Γ são auto-evitantes, ou $e \in \gamma_{\eta, \omega}$ ou $e \in \gamma_{\omega, \eta'}$. A ideia é proceder a estimativa considerando esses dois casos possíveis, ou seja, quando e aparece antes do sítio intermediário ω ($e \in \gamma_{\eta, \omega}$) e quando e aparece depois do sítio intermediário ω ($e \in \gamma_{\omega, \eta'}$).

Começaremos escrevendo

$$K_2 \leq 2 \left(K_2^a \vee K_2^d \right), \quad \mathbb{P} - \text{q.c.} \quad (5.1.3)$$

em que

$$K_2^a \stackrel{\text{def}}{=} \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{\exists \omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'}; \gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega} \cup \gamma_{\omega, \eta'} \text{ e } \gamma_{\eta, \omega} \ni e\} \quad (5.1.4)$$

e

$$K_2^d = \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{\exists \omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'}; \gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega} \cup \gamma_{\omega, \eta'} \text{ e } \gamma_{\omega, \eta'} \ni e\} \quad (5.1.5)$$

Seja $e = (\sigma, \sigma') \in \mathcal{G}$. A primeira estimativa vem do fato que se $e \in \gamma_{\eta, \eta'}$, assim a soma em K_2^d está sobre um conjunto de caminhos conectando pares de sítios (η, η') , tais que η está em um hipercubo de dimensão no máximo V em torno de σ e η' está em um hipercubo de dimensão no máximo $2\kappa v_1$, $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, em torno de σ' . Daí, é imediato que

$$K_2^d \leq 2^{2\kappa v_1} e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z \stackrel{(2.1.13)}{\leq} 2^{\mathcal{S}} e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z. \quad (5.1.6)$$

Usando o Teorema 1.5(iii)[BK04a] e o Corolário 2.1.1, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log K_2^d \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_{\ell} \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_{\ell}^*} a_k. \quad (5.1.7)$$

Agora, vamos considerar o termo K_2^a . Por construção, os caminhos de $\gamma_{\eta, \omega}$ são escolhidos no conjunto $\bigcup_{\ell=1}^{v_1} \Gamma^{\ell}$, então,

$$\begin{aligned} K_2^a &= \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{\exists \omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'}; \gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega} \cup \gamma_{\omega, \eta'} \text{ e } \gamma_{\eta, \omega} \ni e\} \\ &\leq v_1 \max_{\ell \in \mathcal{I}_{v_1}} \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{\exists \omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'}; \gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega}^{\ell} \cup \gamma_{\omega, \eta'} \text{ e } \gamma_{\eta, \omega}^{\ell} \ni e\}, \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Vamos denotar por

$$\Lambda_{\ell}^{\text{def}} = \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{\exists \omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'}; \gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega}^{\ell} \cup \gamma_{\omega, \eta'} \text{ e } \gamma_{\eta, \omega}^{\ell} \ni e\} \quad (5.1.9)$$

para $\ell \in \mathcal{I}_{v_1}$.

Com argumentos análogos ao usados em (4.1.4) para a variável Λ_{ℓ} (cf. (4.1.2)), podemos concluir que é suficiente considerar apenas a variável Λ_1' aqui. Nesse caso, escrevemos

$$\begin{aligned} \Lambda_1' &= \max_{e \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{\exists \omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'}; \gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega}^1 \cup \gamma_{\omega, \eta'} \text{ e } \gamma_{\eta, \omega}^1 \ni e\} \\ &= \max_{l \in \mathcal{I}_B} \max_{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G}} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{\exists \omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'}; \gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega}^1 \cup \gamma_{\omega, \eta'} \text{ e } \gamma_{\eta, \omega}^1 \ni e\}. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Vamos fixar $e = (\sigma, \sigma') \in \mathcal{G}$. Seguindo a notação estabelecida na Seção 4.1, a partir da expressão (4.1.9), pela construção dos caminhos em Γ^1 , temos que

$$\left\{ (\eta, \omega) \in \Omega_{\mathcal{V}} \times \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'} : \gamma_{\eta, \omega}^1 \ni e \right\} \subseteq \Omega_l^-(\sigma) \times \Omega_l^+(\sigma'), \quad (5.1.11)$$

em que $l = \hat{i}(e)$ (cf. Figura 5.1 como auxílio). Estes dois últimos conjuntos podendo ser escritos como em (4.1.17) e (4.1.18).

Figura 5.1: A figura acima ilustra um caminho $\gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega}^1 \cup \gamma_{\omega, \eta'}$ com $\gamma_{\eta, \omega}^1 \ni e = (\sigma, \sigma')$. Em η , respectivamente em ω , a linha em zigue-zague representa os spins possivelmente trocados na construção do caminho $\gamma_{\eta, \omega}^1$ antes de σ , respectivamente depois de σ' . Chamamos atenção ao fato que o caminho $\gamma_{\omega, \eta'}$ é obtido trocando-se apenas os spins das coordenadas pertencentes ao conjunto $\mathcal{D}_{\mathcal{V}_1(1)}(\omega, \eta')$ que estão representadas pelas bolas cheias no primeiro bloco de η' .

Agora, por causa de $\omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'}$ (cf. (3.2.36)), obtemos que

$$\omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \quad \text{e} \quad d_1(\omega, \eta') = d_H(\omega, \eta') \stackrel{(3.2.37)}{\leq} 2\kappa v_1; \quad (5.1.12)$$

e como $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, o número total de spins discordantes entre ω e η' não pode exceder o volume de $\mathcal{V}_1(1)$, isto é, v_1 . Estas observações junto com (5.1.11) implicam nas seguintes inclusões:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\eta, \eta') \in \Omega_{\mathcal{V}}^2 : \exists \omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'} ; \gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega}^1 \cup \gamma_{\omega, \eta'} \text{ e } \gamma_{\eta, \omega}^1 \ni e \right\} \\ & \subset \Omega_l^-(\sigma) \times \left\{ \eta' \in \Omega_{\mathcal{V}} : \exists \omega \in \Omega_l^+(\sigma') \text{ com } d_1(\omega, \eta') \leq 2\kappa v_1 \text{ e } \eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \right\} \\ & \subset \Omega_l^-(\sigma) \times \left\{ \eta' \in \Omega_{\mathcal{V}} : \eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \text{ para algum } \omega \in \Omega_l^+(\sigma') \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \mathbb{1}\{\exists \omega \in \Omega_{\mathcal{V}}^{\eta, \eta'}; \gamma_{\eta, \eta'} = \gamma_{\eta, \omega}^1 \cup \gamma_{\omega, \eta'} \text{ e } \gamma_{\eta, \omega}^1 \ni e\} \\ & \leq \sum_{\eta \in \Omega_l^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} e^{-\beta H(\eta')} \mathbb{1}\{\eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \text{ para algum } \omega \in \Omega_l^+(\sigma')\}. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Neste ponto, assim como foi no Capítulo 4, consideraremos os casos $l \in \{1, B\}$ e $l \in \{2, \dots, B-1\}$ separadamente. Sendo assim:

(i) se $l = 1$ ou B , em (5.1.11), temos que

$$|\Omega_1^-(\sigma)| \leq 2^S \quad \text{e} \quad \Omega_1^+(\sigma') = \Omega_{\mathcal{V}} \quad \text{ou} \quad \Omega_B^-(\sigma) = \Omega_{\mathcal{V}} \quad \text{e} \quad |\Omega_B^+(\sigma')| \leq 2^S. \quad (5.1.15)$$

Daí, para $l = 1$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta \in \Omega_1^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} e^{-\beta H(\eta')} \mathbb{1}\{\eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \text{ para algum } \omega \in \Omega_1^+(\sigma')\} \\ & \leq 2^S e^{-\beta H(\bar{\sigma})} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} e^{-\beta H(\eta')} \underbrace{\mathbb{1}\{\eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \text{ para algum } \omega \in \Omega_1^+(\sigma')\}}_{\leq 1} \\ & \leq 2^S e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z; \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

e para $l = B$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta \in \Omega_B^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} e^{-\beta H(\eta')} \mathbb{1}\{\eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \text{ para algum } \omega \in \Omega_B^+(\sigma')\} \\ & \leq e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z \underbrace{\sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} \mathbb{1}\{\eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \text{ para algum } \omega \in \Omega_B^+(\sigma')\}}_{\leq 2^{v_1} 2^S} \\ & \leq 2^{v_1} 2^S e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z. \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Ou seja, para ambos, $l = 1$ ou B , obtemos que

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G} \\ i(e)=l}} \sum_{\eta \in \Omega_l^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} e^{-\beta H(\eta')} \mathbb{1}\{\eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \text{ para algum } \omega \in \Omega_l^+(\sigma')\} \\ & \leq 2^{v_1} 2^S e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z; \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

(ii) se $l \in \{2, \dots, B-1\}$, os conjuntos em (5.1.11) podem ser escritos (cf. (4.1.26) e (4.1.27)) como

$$\Omega_l^-(\sigma) = \left(\Omega_{\mathcal{V}_1^{1, l-1}} \times \Omega_{\mathcal{V}_1^{l, l}} \times \{\sigma|_{\mathcal{V}_{1+l, B}}\} \right) \times \cdots \times \left(\Omega_{\mathcal{V}_n^{1, l-1}} \times \Omega_{\mathcal{V}_n^{l, l}} \times \{\sigma|_{\mathcal{V}_{n+l, B}}\} \right) \quad (5.1.19)$$

e

$$\Omega_l^+(\sigma') = \left(\{\sigma'|_{\mathcal{V}_1^{1,l-1}}\} \times \Omega_{\mathcal{V}_1^{l,l}} \times \Omega_{\mathcal{V}_1^{l+1,B}} \right) \times \cdots \times \left(\{\sigma'|_{\mathcal{V}_n^{1,l-1}}\} \times \Omega_{\mathcal{V}_n^{l,l}} \times \Omega_{\mathcal{V}_n^{l+1,B}} \right). \quad (5.1.20)$$

Então, usando a aplicação φ_l indicada em (4.1.28), escrevemos

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta \in \Omega_l^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} e^{-\beta H(\eta')} \mathbb{1}\{\eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \text{ para algum } \omega \in \Omega_l^+(\sigma')\} \\ & \leq \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} \sum_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\eta, \xi, \sigma))} \sum_{\xi'' \in \Omega_{\mathcal{V}_1(1)}} \sum_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l+1,B}}} e^{-\beta H(\xi'' \varphi_l(\sigma', \xi', \eta')|_{\mathcal{V}_1^c(1)})} \\ & \leq 2^{2S} \max_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\eta, \xi, \sigma))} \max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \sum_{\xi'' \in \Omega_{\mathcal{V}_1(1)}} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l+1,B}}} e^{-\beta H(\xi'' \varphi_l(\sigma', \xi', \eta')|_{\mathcal{V}_1^c(1)})}, \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

em que usamos também que $|\mathcal{V}^{k,k}| \leq S$ para todo $k \in \mathcal{I}_B$.

Juntando a desigualdade anterior e (5.1.21), para todo $l \in \{2, \dots, B-1\}$,

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G} \\ \hat{i}(e)=l}} \sum_{\eta \in \Omega_l^-(\sigma)} e^{-\beta H(\eta)} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} e^{-\beta H(\eta')} \mathbb{1}\{\omega|_{\mathcal{V}_1^c(1)} = \eta'|_{\mathcal{V}_1^c(1)} \text{ para algum } \omega \in \Omega_l^+(\sigma')\} \\ & \leq 4^S \max_{\substack{e=(\sigma, \sigma') \in \mathcal{G} \\ \hat{i}(e)=l}} \max_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\eta, \xi, \sigma))} \max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \sum_{\xi'' \in \Omega_{\mathcal{V}_1(1)}} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l+1,B}}} e^{-\beta H(\xi'' \varphi_l(\sigma', \xi', \eta')|_{\mathcal{V}_1^c(1)})} \\ & \leq 2^{v_1} 4^S \max_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{V}^{1,l-1}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\eta, \xi, \zeta))} \max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta \in \Omega_{\mathcal{V}}} \sum_{\eta' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l+1,B}}} e^{-\beta H(\varphi_l(\zeta, \xi', \eta'))} \\ & = 2^{v_1} 4^S \max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta') \max_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi'), \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

em que usamos a notação indicada em (4.1.32) e (4.1.33) para a igualdade.

Reunindo então (5.1.10), (5.1.14), (5.1.18) e (5.1.22), obtemos que

$$\Lambda'_1 \leq 2^{v_1} \left(2^S e^{-\beta H(\bar{\sigma})} Z \vee 4^S \max_{l \in \{2, \dots, B-1\}} \max_{\xi' \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta' \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{1,l}^{(1)}(\xi, \zeta') \max_{\xi \in \Omega_{\mathcal{V}^{l,l}}} \max_{\zeta \in \Omega_{\mathcal{V}}} Z_{l,B}^{(1)}(\zeta, \xi') \right). \quad (5.1.23)$$

Invocando agora (4.1.25) e (4.2.107), para todo $\beta > 0$ e todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade $\geq 1 - e^{-\varepsilon N}$,

$$\frac{1}{N} \log \Lambda'_1 \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_{\ell} \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_{\ell}^*} a_k + \varepsilon, \quad (5.1.24)$$

para todo N grande o suficiente, em que também usamos que v_1 é $o(N)$. Por fim, usando argumentos similares aos da Seção 4.3, concluímos que, para todo $\beta > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log K_2^a \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_{\ell} \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_{\ell}^*} a_k. \quad (5.1.25)$$

Conclusão da Estimativa de K_2 . Voltando à (5.1.3), segue de (5.1.7) e (5.1.25) que, para todo $\beta > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log K_2 \leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k. \quad (5.1.26)$$

5.2 Conclusão da Prova do Teorema 2.3.1

Voltando à (3.1.5) e (3.2.46), obtemos que

$$\tau_N \leq \frac{N^2}{Z} (K_{\mathcal{G}} \vee K_{\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}}), \quad (5.2.1)$$

em que $K_{\mathcal{G}}$ e $K_{\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}}$ estão indicados em (3.2.44) e (3.2.45).

Usando agora (3.2.48), (3.2.49) e (3.2.50), com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\tau_N \leq \frac{2N^2 e^{\rho\beta V}}{Z} (K_1 \vee K_2), \quad (5.2.2)$$

para todo N grande o suficiente, em que K_1 e K_2 estão indicados em (3.2.51) e (3.2.52).

Por fim, juntando (4.3.8), (5.1.26) e o Corolário 2.1.1, obtemos que, para todo $\beta > 0$ e todo $\rho > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\begin{aligned} \limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \tau_N &\leq F_n(\beta) + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k - F_n(\beta) + \rho\beta \\ &= \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k + \rho\beta. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Como a desigualdade acima vale para todo $\rho > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \tau_N \leq \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k, \quad (5.2.4)$$

isso encerra a demonstração do Teorema 2.3.1.

Como consequência imediata do Teorema 2.3.1, temos o seguinte corolário:

Corolário 5.2.1. Para todo $\beta > 0$ e todo $\varepsilon > 0$, se

$$\frac{1}{N} \log(t_N(\varepsilon, \beta)) = 2\varepsilon + \beta \sum_{\ell=1}^{\ell_n} \beta_\ell \sum_{k=J_{\ell-1}^*+1}^{J_\ell^*} a_k, \quad (5.2.5)$$

então, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, para todo $t \geq t_N(\varepsilon, \beta)$,

$$\sup_{\sigma} \|P_t(\sigma, \cdot) - \mu(\cdot)\|_{\text{var}} \leq \varepsilon, \quad (5.2.6)$$

para todo N grande o suficiente.

Demonstração. Segue diretamente da combinação do Corolário 2.1.1, Teorema 1.5(iii)[BK04a] e do Teorema 2.3.1. $\square$

Capítulo 6

Cota Inferior para o Inverso da Lacuna: um caso particular

6.1 Introdução e Resultados

Mesmo que o interesse principal desta tese seja exibir uma cota superior para o inverso da lacuna da dinâmica de Metropolis para o GREM, a pergunta natural que se segue é: o que se sabe sobre uma cota inferior? Esse interesse parece ainda mais verossímil quando levamos em conta o fato que em [FIKP98], onde o caso REM é considerado, tal questão é estudada (cf. Proposição 3.1). Não apenas isso, é mostrado que ambos, cota inferior e superior para $\frac{1}{N} \log \tau_N$, convergem $\mathbb{P}$ -quase certamente para o mesmo limite quando $N \uparrow \infty$ (cf. Teorema 1).

Neste capítulo continuaremos considerando o GREM definido na Seção 2.1 como um sistema fora do equilíbrio sujeito à dinâmica de Metropolis em volume finito. Nosso interesse aqui é derivar uma cota inferior para $\frac{1}{N} \log \tau_N$ e compará-la com a cota superior dada pelo Teorema 2.3.1, a fim de obter alguma informação sobre o seu comportamento assintótico exato. Nossa análise focará apenas um caso particular do modelo, a saber, o GREM com dois níveis sob o regime de baixas temperaturas na *fase em cascata* (explicaremos abaixo o que esta fase significa).

Formalmente, consideraremos o GREM com $n = 2$ níveis configurado com a seguinte escolha de parâmetros. Dados $0 < a, p < 1$, vamos escolher

$$\begin{aligned} p_1 &= p \quad \text{e} \quad p_2 = 1 - p \stackrel{\text{def}}{=} \bar{p}; \\ a_1 &= a \quad \text{e} \quad a_2 = 1 - a \stackrel{\text{def}}{=} \bar{a}. \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Também usaremos a seguinte notação: para todo $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \in \Omega_V$, denotaremos

$$H_1(\sigma_1) \stackrel{\text{def}}{=} H_1(\sigma) = -\sqrt{aV} X_{\sigma_1}^1 \quad \text{e} \quad H_2(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} -\sqrt{\bar{a}V} X_{\sigma}^2. \tag{6.1.2}$$

Naturalmente, o Hamiltoniano H é pode ser escrito como

$$H(\sigma) = H_1(\sigma_1) + H_2(\sigma). \quad (6.1.3)$$

Uma descrição do que é a fase em cascata no GREM segue. Primeiro, ordenamos as configurações de Ω_V em cascata de acordo com a magnitude das energias H_1 e H_2 da seguinte maneira: $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{2^V}$ são ordenados considerando que

$$H_1(\sigma_1^1) < H_1(\sigma_1^2) < \dots < H_1(\sigma_1^{2^{V_1}}) \quad (6.1.4)$$

e, para cada $j = 1, \dots, 2^{V_1}$,

$$H_2(\sigma_1^j \sigma_2^{j,1}) < H_2(\sigma_1^j \sigma_2^{j,2}) < \dots < H_2(\sigma_1^j \sigma_2^{j,2^{V_2}}). \quad (6.1.5)$$

A fase em cascata no GREM significa que, para algum k finito, $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^k$ compõem o conjunto de configurações de energia mínima do sistema, mais precisamente, em temperaturas baixas, a medida de Gibbs concentra-se em $\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^k$ (cf. Teorema 1.9 em [BK04a]).

De modo geral, a fase em cascata em um GREM com 2 níveis é caracterizado pela desigualdade

$$p_1 a_2 < a_1 p_2. \quad (6.1.6)$$

Com a escolha (6.1.1), a condição (6.1.6) reduz-se apenas a:

$$p < a. \quad (6.1.7)$$

É importante também mencionar que, sob a fase em cascata, $\ell_2 = 2$, isto é, existem duas temperaturas inversas críticas, β_1 e β_2 (com $\beta_1 < \beta_2$), dadas por

$$\beta_1^2 = \beta_\star^2 \frac{p}{a} \quad \text{e} \quad \beta_2^2 = \beta_\star^2 \frac{\bar{p}}{a}, \quad \beta_\star = \sqrt{2 \log 2}. \quad (6.1.8)$$

Portanto, em todo este capítulo, estaremos assumindo que

$$p < a \quad \text{e} \quad \beta \geq \beta_2. \quad (6.1.9)$$

O primeiro resultado deste capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 6.1.1. Para todo $\beta > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{\beta N} \log \tau_N \geq \beta_2 \bar{a}. \quad (6.1.10)$$

Demonstração. Seção 6.2. □

Observação 6.1.1. Uma motivação, heurística, para o resultado do Teorema 6.1.1 segue. Partimos do fato que τ_N deveria ser maior que o tempo que o sistema leva para sair de sua configuração inicial. Em particular, da configuração de mínima energia $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2$. Sob a dinâmica de Metropolis, isso deveria ser da ordem de $\exp\{-\beta(H(\bar{\sigma}'') - H(\bar{\sigma}))\}$, em que $\bar{\sigma}'' = \bar{\sigma}_1'' \bar{\sigma}_2''$ denota a configuração de mínima energia entre os V vizinhos de $\bar{\sigma}$. Como veremos abaixo, com alta probabilidade, $\bar{\sigma}''$ é tal que $\bar{\sigma}_1'' = \bar{\sigma}_1$. Daí $H(\bar{\sigma}'') - H(\bar{\sigma}) = H_2(\bar{\sigma}'') - H_2(\bar{\sigma})$, implicando o lado direito de (6.1.10).

Observe agora que o Teorema 2.3.1, sob o contexto que estamos considerando para o GREM, nos dá o seguinte corolário:

Corolário 6.1.1. Para todo $\beta > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{\beta N} \log \tau_N \leq \beta_1 a + \beta_2 \bar{a}. \quad (6.1.11)$$

Combinando então as cotas obtidas no Teorema 6.1.1 e Corolário 6.1.1, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 6.1.2. Para todo $\beta > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\beta_2 \bar{a} \leq \liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{\beta N} \log \tau_N \leq \limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{\beta N} \log \tau_N \leq \beta_1 a + \beta_2 \bar{a}. \quad (6.1.12)$$

Observe que o resultado anterior não implica que o limite $\lim_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \tau_N$ não exista $\mathbb{P}$ -quase certamente, mas é um indicativo de que podemos ter subestimado a cota inferior ou superestimado o termo $K = K_N(\Gamma)$ dado em (3.1.7).

Na verdade, há motivo para crer que a cota correta não seja aquela dada em (6.1.11). A motivação para essa crença segue de [FG18], em que se estuda este mesmo GREM (2 níveis, fase em cascata e temperaturas baixas) sob uma dinâmica de Glauber, que é uma versão simplificada da dinâmica de Metropolis. Entende-se em [FG18] o limite de escala da dinâmica em uma escala de tempo tal que o limite é uma dinâmica ergódica, e logo, deveria estar na mesma escala que o inverso da lacuna espectral. Para todo $\beta \geq \beta_2$, temos uma escala de tempo mais curta em [FG18] do que aquela correspondente ao lado direito de (6.1.11). Em certas situações, ocorre que esta escala de tempo se comporta como a do lado direito de (6.1.10); em outras situações, ela é maior, mas sempre menor do que a do lado direito de (6.1.11). Dessa forma, não vemos motivo para esperar um comportamento diferente na escala da lacuna espectral entre as duas dinâmicas.

Por outro lado, também há motivo para crer que a cota superior fornecida pelo Corolário 6.1.1 não pode ser melhorada. Isso segue do Teorema 6.1.2 a seguir, onde provamos que, sob a

condição de que os caminhos não tenham comprimento maior do que cN , para alguma constante positiva c , se $\beta \geq \beta_2$, então a cota no lado direito de (6.1.11) não pode ser menor.

Teorema 6.1.2. Seja Υ_{cN} a classe de todos os conjuntos completos de caminhos cujos elementos tem comprimento no máximo cN , para alguma constante positiva. Então, para todo $\Gamma \in \Upsilon_{cN}$ e todo $\beta \geq \beta_2$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{\beta N} \log K_N(\Gamma) \geq \beta_1 a + \beta_2 \bar{a}. \quad (6.1.13)$$

Demonstração. Seção 6.3. □

6.2 Demonstração do Teorema 6.1.1

Começaremos relembando que a caracterização minimax de autovalores, brevemente descrito na Seção 3.1, nos dá que o inverso da lacuna τ_N é dado por

$$\tau_N = \sup\{\tau_N(\phi) : \phi \text{ não constante}\}, \quad (6.2.1)$$

em que

$$\tau_N(\phi) = \frac{\text{Var}_\mu(\phi)}{\mathcal{E}(\phi, \phi)}, \quad (6.2.2)$$

sendo

$$\text{Var}_\mu(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} (\phi(\sigma) - \phi(\sigma'))^2 \mu(\sigma) \mu(\sigma') \quad (6.2.3)$$

e

$$\mathcal{E}(\phi, \phi) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} (\phi(\sigma) - \phi(\sigma'))^2 \mu(\sigma) P(\sigma, \sigma'). \quad (6.2.4)$$

A estratégia que usaremos para provar o Teorema 6.1.1 é essencialmente a mesma que foi utilizada em [FIKP98] (cf. Seção 3) em análise similar para o REM e consiste em escolher uma função real não constante ϕ sobre Ω_V e com ela obter um limitante inferior para o lado direito de (6.2.2).

Como em [FIKP98], escolhemos para ϕ o indicador da (única) configuração de mínima energia do sistema, isto é, consideraremos a função

$$\phi_{\bar{\sigma}}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}\{\sigma = \bar{\sigma}\}. \quad (6.2.5)$$

Com a função $\phi_{\bar{\sigma}}$, sob a dinâmica de Metropolis, (2.3.2) fica explicitamente escrito como

$$\tau_N(\phi_{\bar{\sigma}}) = \frac{V e^{-\beta H(\bar{\sigma})} (1 - \mu(\bar{\sigma}))}{\sum_{\sigma \sim \bar{\sigma}} e^{-\beta H(\sigma)}}, \quad (6.2.6)$$

em que a soma está sobre os V vizinhos próximos de $\bar{\sigma}$ que denotamos por σ . Aqui, $\sigma \sim \sigma'$ significa que $d_H(\sigma, \sigma') = 1$. Logo, de (2.3.1), não é difícil concluir que

$$\tau_N \geq \tau_N(\phi_{\bar{\sigma}}) \geq \frac{e^{-\beta H_2(\bar{\sigma})}(1 - \mu(\bar{\sigma}))}{e^{\beta H_1(\bar{\sigma}_1)} \sum_{\sigma \sim \bar{\sigma}} e^{-\beta[H_1(\sigma_1) + H_2(\sigma)]}}, \quad (6.2.7)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \tau_N &\geq \liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log e^{-\beta H_2(\bar{\sigma})} + \liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log(1 - \mu(\bar{\sigma})) \\ &\quad + \liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \left(e^{\beta H_1(\bar{\sigma}_1)} \sum_{\sigma \sim \bar{\sigma}} e^{-\beta[H_1(\sigma_1) + H_2(\sigma)]} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Para lidar com as duas primeiras parcelas do lado direito da desigualdade anterior usaremos o Lema 6.2.1, a seguir, cuja prova segue de uma adaptação de argumentos usados na demonstração da Proposição 3.1 de [FIKP98].

Lema 6.2.1. Para todo $\beta > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log e^{-\beta H_2(\bar{\sigma})} \geq \beta \beta_2 \bar{a}. \quad (6.2.9)$$

e

$$\liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log(1 - \mu(\bar{\sigma})) = 0 \quad (6.2.10)$$

Agora considere o denominador do lado direito de (6.2.7). Vamos escrever

$$\begin{aligned} e^{\beta H_1(\bar{\sigma}_1)} \sum_{\sigma \sim \bar{\sigma}} e^{-\beta[H_1(\sigma_1) + H_2(\sigma)]} \\ = e^{\beta H_1(\bar{\sigma}_1)} \left(\sum_{\substack{\sigma \sim \bar{\sigma} \\ \sigma_1 \neq \bar{\sigma}_1}} e^{-\beta[H_1(\sigma_1) + H_2(\sigma)]} + \sum_{\substack{\sigma \sim \bar{\sigma} \\ \sigma_2 \neq \bar{\sigma}_2}} e^{-\beta[H_1(\sigma_1) + H_2(\sigma)]} \right). \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Como $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2$, se $\sigma \sim \bar{\sigma}$ e $\sigma_2 \neq \bar{\sigma}_2$, então $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1$ e

$$e^{\beta H_1(\bar{\sigma}_1)} \sum_{\substack{\sigma \sim \bar{\sigma} \\ \sigma_2 \neq \bar{\sigma}_2}} e^{-\beta[H_1(\sigma_1) + H_2(\sigma)]} = \sum_{\sigma_2 \sim \bar{\sigma}_2} e^{-\beta H_2(\bar{\sigma}_1 \sigma_2)}. \quad (6.2.12)$$

Por outro lado, se $\sigma \sim \bar{\sigma}$ e $\sigma_1 \neq \bar{\sigma}_1$, como $\bar{\sigma}_1$ é a configuração em Ω_{V_1} que minimiza $H_1(\cdot)$, temos que

$$\begin{aligned} e^{\beta H_1(\bar{\sigma}_1)} \sum_{\substack{\sigma \sim \bar{\sigma} \\ \sigma_1 \neq \bar{\sigma}_1}} e^{-\beta[H_1(\sigma_1) + H_2(\sigma)]} &= \sum_{\substack{\sigma \sim \bar{\sigma} \\ \sigma_1 \neq \bar{\sigma}_1}} \underbrace{e^{\beta[H_1(\bar{\sigma}_1) - H_1(\sigma_1)]}}_{\leq 1} e^{-\beta H_2(\sigma_1 \bar{\sigma}_2)} \\ &\leq \sum_{\sigma_1 \sim \bar{\sigma}_1} e^{-\beta H_2(\sigma_1 \bar{\sigma}_2)}. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Então, de (6.2.12) e (6.2.13),

$$e^{\beta H_1(\bar{\sigma}_1)} \sum_{\sigma \sim \bar{\sigma}} e^{-\beta[H_1(\sigma_1)+H_2(\sigma)]} \leq \sum_{\sigma_1 \sim \bar{\sigma}_1} e^{-\beta H_2(\sigma_1 \bar{\sigma}_2)} + \sum_{\sigma_2 \sim \bar{\sigma}_2} e^{-\beta H_2(\bar{\sigma}_1 \sigma_2)}. \quad (6.2.14)$$

Neste ponto, usamos a mesma ideia que [FIKP98] e estimamos por cima a primeira soma (respectivamente a segunda) em (6.2.14) por V_1 (respectivamente por V_2) vezes o máximo dos somandos. Como $\bar{\sigma}_1$ (respectivamente $\bar{\sigma}_2$) é a configuração que minimiza $H_1(\cdot)$ (respectivamente $H_2(\bar{\sigma}_1 \cdot)$), esses somandos não são independentes. Mas o máximo é estocasticamente dominado pelo máximo de V_1 (respectivamente de V_2) somandos independentes. Este fato segue do Lema B.0.3. Portanto,

$$\sum_{\sigma_1 \sim \bar{\sigma}_1} e^{-\beta H_2(\sigma_1 \bar{\sigma}_2)} + \sum_{\sigma_2 \sim \bar{\sigma}_2} e^{-\beta H_2(\bar{\sigma}_1 \sigma_2)} \leq V_1 e^{-\beta m_1} + V_2 e^{-\beta m_2}, \quad (6.2.15)$$

para todo N grande o suficiente, em que m_j denota o mínimo de V_j variáveis aleatórias i.i.d. gaussianas padrão. Aqui, usamos também que $aV, \bar{a}V \geq 1$ para N grande.

Pelo Lema B.0.4, para todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$m_j \geq -\sqrt{2(1+\varepsilon) \log V_j}, \quad (6.2.16)$$

para todo N grande o suficiente. Logo, é imediato que, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$V_1 e^{-\beta m_1} + V_2 e^{-\beta m_2} \leq V e^{-\beta m_1 \wedge m_2} \leq N e^{\beta \sqrt{2(1+\varepsilon) \log N}}, \quad (6.2.17)$$

para todo N grande o suficiente.

Usando agora o fato clássico que se duas famílias $\{X_k\}_{k \in N}$ e $\{Y_k\}_{k \in N}$ de variáveis aleatórias reais são tais que para todo $k \in N$, X_k é estocasticamente dominada por Y_k , então podemos construir um espaço de probabilidade, tal que, $\mathbb{P}$ -quase certamente, $X_k \leq Y_k$ para todo $k \in N$, de (6.2.14), (6.2.15), (6.2.16) e (6.2.17), com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \left(e^{\beta H_1(\bar{\sigma}_1)} \sum_{\sigma \sim \bar{\sigma}} e^{-\beta[H_1(\sigma_1)+H_2(\sigma)]} \right)^{-1} \geq 0. \quad (6.2.18)$$

Portanto, do Lema 6.2.1 e (6.2.18), para todo $\beta > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log \tau_N \geq \beta \beta_2 \bar{a}. \quad (6.2.19)$$

6.3 Demonstração do Teorema 6.1.2

Antes de começarmos a demonstração, relembremos que, para a dinâmica de Metropolis, $K_N(\Gamma)$ é dado por

$$K_N(\Gamma) = \frac{V}{Z} \max_{e=(\sigma, \sigma')} e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} |\gamma_{\eta, \eta'}| e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]}, \quad (6.3.1)$$

em que o somatório está sobre todos os caminhos $\gamma_{\eta, \eta'}$ em Γ , exatamente um para cada par de vértices distintos $\eta, \eta' \in \Omega_V$.

O termo $K_N(\Gamma)$ depende da escolha do conjunto completo de caminhos Γ . Vamos restringir a escolha de Γ à Υ_{cN} à classe de todos os conjuntos completos de caminhos cujos elementos tem comprimento no máximo cN , para alguma constante positiva c .

Uma breve descrição da estratégia da demonstração do teorema segue. Partiremos do fato que, por causa do regime de parâmetros que estamos assumindo para o GREM, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, $H(\bar{\sigma})$ e $H(\bar{\sigma}')$, em que $\bar{\sigma}' = \bar{\sigma}'_1 \bar{\sigma}'_2$ é configuração de spins, tal que $\bar{\sigma}'_1$ é o segundo mínimo de $H_1(\cdot)$ e $\bar{\sigma}'_2$ é o mínimo de $H_2(\bar{\sigma}'_1 \cdot)$, são da mesma ordem logarítmica que a energia livre do sistema. Como Γ é um conjunto completo de caminhos, não há como evitar que o caminho $\gamma_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}'}$ pertença a Γ . Isso implica que

$$\sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} |\gamma_{\eta, \eta'}| e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \geq e^{-\beta[H(\bar{\sigma}) + H(\bar{\sigma}')] } \quad (6.3.2)$$

para qualquer escolha de Γ . Por fim, garantiremos que o termo $e^{\beta[H(\bar{\sigma}) \vee H(\bar{\sigma}')]}$ não é pequeno, em outras palavras, provaremos que no interior do caminho $\gamma_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}'}$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, existe um sítio com energia no mínimo $-\delta N$, qualquer que seja $\delta > 0$ dado. (6.1.13) então segue.

Começaremos definindo, para $x \in \mathbb{R}$, a função

$$u_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_\star \sqrt{V_j} + \frac{x}{\beta_\star \sqrt{V_j}} - \frac{1}{2} \frac{\log(V_j \log 2) + \log 4\pi}{\beta_\star \sqrt{V_j}}, \quad j = 1, 2, \quad (6.3.3)$$

e os conjuntos

$$\mathcal{T}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_1(x) = \left\{ \sigma_1 \in \Omega_1 : X_{\sigma_1}^1 \geq u_1(x) \right\}, \quad (6.3.4)$$

e

$$\mathcal{T}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_2(x) = \left\{ \sigma_2 \in \Omega_2 : X_{\eta_1 \sigma_2}^2 \geq u_2(x), \eta_1 \in \mathcal{T}_1 \right\}. \quad (6.3.5)$$

Por fim, seja $\mathcal{T}$ o conjunto definido como

$$\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2. \quad (6.3.6)$$

Observação 6.3.1. É bem conhecido que com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, como segue do regime de parâmetros que estamos assumindo para o GREM, $\mathcal{T} \neq \emptyset$. De fato, veja Teorema 1.5 em [BK04a] por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \liminf_{N \uparrow \infty} \mathbb{P} [\{\sigma, \sigma'\} \subset \mathcal{T}] = 1. \quad (6.3.7)$$

O primeiro passo da nossa demonstração é o seguinte lema.

Lema 6.3.1. Com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, para todo $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e para todo $\eta_1, \eta'_1 \in \mathcal{T}_1$ distintos,

$$d_H(\eta_1, \eta'_1) > \varepsilon V_1, \quad (6.3.8)$$

para todo N suficientemente grande.

Demonstração. Segue da combinação dos Lema 2.11 e 2.12 em [Gay92]. $\square$

Para a sequência da demonstração, precisaremos de algumas definições adicionais. Dizemos que um sítio $\sigma \in \Omega_V$ é *inútil* se, para todo $\delta > 0$, existe $j = 1, 2$ tal que $|H_j(\sigma_1 \sigma_j)| > \delta N$. Caso contrário, diremos que ele é *útil*. Diremos que um caminho γ é inútil se todos os seus pontos interiores γ^{int} forem inúteis.

O resultado a seguir mostra que no interior de qualquer caminho $\gamma_{\eta, \eta'} \in \Gamma$ entre duas configurações $\eta, \eta' \in \mathcal{T}$, tais que $\eta_1 \neq \eta'_1$, existe, com uma altíssima probabilidade, ao menos um sítio útil, para todo N grande o suficiente.

Lema 6.3.2. Sejam $\eta, \eta' \in \mathcal{T}$, tais que $\eta_1 \neq \eta'_1$ fixados. Então, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, para todo caminho $\gamma_{\eta, \eta'}$ de comprimento no máximo cN , para alguma constante $c > 0$, para todo N grande o suficiente, existe ao menos um sítio em $\gamma_{\eta, \eta'}^{\text{int}}$ que é útil.

Demonstração. Como $\eta_1 \neq \eta'_1$, pelo Lema 6.3.1, para todo $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$d_1(\eta_1, \eta'_1) > \varepsilon V_1, \quad (6.3.9)$$

para todo N grande o suficiente. Logo, para todo N grande, existem ao menos εV_1 sítios no interior de $\gamma_{\eta, \eta'}$ cujos Hamiltonianos são variáveis aleatórias independentes.

Portanto, fixados η, η' e o caminho $\gamma_{\eta, \eta'}$ de η a η' de comprimento maior ou igual do que εV_1 , usando a desigualdade em (3.2.21), obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\gamma_{\eta, \eta'} \text{ ser inútil}] &= \mathbb{P}\left[\bigcap_{\sigma \in \gamma_{\eta, \eta'}^{\text{int}}} \{\sigma \text{ ser inútil}\}\right] \\ &\leq (\mathbb{P}[\exists j = 1, 2 : |H_j(\sigma_1 \sigma_j)| > \delta N])^{\varepsilon V_1} \\ &\leq e^{-c' V_1^2}, \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

para todo N grande o suficiente e alguma constante $c' > 0$ que depende de δ e ε .

Como para o par de vértices η e η' fixados existe exatamente um caminho em cada $\Gamma \in \Upsilon_{cN}$ conectando-os, de (6.3.10), obtemos que

$$\mathbb{P}[\gamma_{\eta, \eta'} \text{ ser inútil em todo } \Gamma \in \Upsilon_{cN}] \leq \sum_{\substack{\gamma_{\eta, \eta'}: \\ |\gamma_{\eta, \eta'}| \leq cN}} \mathbb{P}[\gamma_{\eta, \eta'} \text{ ser inútil}] \leq N^{cN} e^{-c' V_1^2}. \quad (6.3.11)$$

Como o último termo da desigualdade acima é somável, a conclusão então segue do Primeiro Lema de Borel-Cantelli. $\square$

Como mencionamos anteriormente, qualquer que seja o conjunto de caminhos Γ escolhido, o caminho $\gamma_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}'} \in \Gamma$. Isto segue por causa da propriedade de completude de Γ . Pelo Lema 6.3.2, para todo N grande o suficiente, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1, existe ao menos um elo em $\gamma_{\bar{\sigma}, \bar{\sigma}'}^{\text{int}}$, digamos $e_0 = (\sigma_0, \sigma'_0)$, tal que algum dos sítios σ_0 ou σ'_0 é útil. Logo,

$$\begin{aligned} K_N(\Gamma) &= \frac{V}{Z} \max_{e=(\sigma, \sigma')} e^{\beta[H(\sigma) \vee H(\sigma')]} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e} |\gamma_{\eta, \eta'}| e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \\ &\geq \frac{1}{Z} e^{\beta[H(\sigma_0) \vee H(\sigma'_0)]} \sum_{\gamma_{\eta, \eta'} \ni e_0} e^{-\beta[H(\eta) + H(\eta')]} \\ &\geq \frac{1}{Z} e^{-\delta\beta N} e^{-\beta[H(\bar{\sigma}) + H(\bar{\sigma}')]} \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Aplicando agora o $\liminf$ com $N \uparrow \infty$ na desigualdade acima e invocando o Corolário 2.1.1 e o fato que $\bar{\sigma}, \bar{\sigma}' \in \mathcal{T}$, então, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1,

$$\begin{aligned} \liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log K_N(\Gamma) &\geq -\beta \limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} (H(\bar{\sigma}) + H(\bar{\sigma}')) - \limsup_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \log Z - \delta\beta \\ &\geq 2\beta\beta_* \left(\sqrt{ap} - \sqrt{a\bar{p}} \right) - F_2(\beta) - \delta\beta \\ &\stackrel{(6.1.8)}{=} 2\beta(\beta_1 a + \beta_2 \bar{a}) - F_2(\beta) - \delta\beta, \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

em que usamos também que $\frac{V_j}{N} \rightarrow p_j$ quando $N \uparrow \infty$ (cf. (2.1.14)).

Como a desigualdade acima vale para todo $\delta > 0$ e estamos supondo $\beta \geq \beta_2$, de (2.1.56), obtemos que

$$\liminf_{N \uparrow \infty} \frac{1}{\beta N} \log K_N(\Gamma) \geq \beta_1 a + \beta_2 \bar{a}, \quad \mathbb{P} - \text{q.c.} \quad (6.3.14)$$

e o Teorema 6.1.2 está demonstrado.

Apêndice A

Resultados de Matemática Geral

Teorema A.0.1 (Teorema da Projeção sobre um Convexo Fechado - [Bre83]). Seja H um espaço de Hilbert e seja $K \subset H$ um convexo fechado não vazio. Então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe um único $y \in K$ tal que

$$d(x, y) = \inf_{z \in S} d(x, z) = d(x, S). \quad (\text{A.0.1})$$

Além disso, y é caracterizado pela propriedade:

$$y \in K \quad \text{e} \quad \langle z - y, x - y \rangle \leq 0, \quad \forall z \in K. \quad (\text{A.0.2})$$

Lema A.0.1 ([DD02]). Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ e $\lambda_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k y_i \geq 0$ para todo $k = 1, \dots, n$. Então,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq 0. \quad (\text{A.0.3})$$

Demonstração. Defina $\lambda_0 \equiv 0$. Como $y_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$, para todo $i = 1, \dots, n$, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i &= \sum_{i=1}^n x_i (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = x_1 \lambda_1 + x_2 (\lambda_2 - \lambda_1) + \dots + x_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \\ &= x_n \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) \lambda_i \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

□

Proposição A.0.1 ([HUL96] - Seção 2.3 - pág. 111). Se C é um conjunto compacto, então $\text{ext}C \neq \emptyset$, onde $\text{ext}C$ é o conjunto de pontos extremos de C .

Proposição A.0.2 ([HUL96] - Seção 2.4 - pág. 115). Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um convexo e compacto. Para todo $s \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\max_{x \in C} \langle s, x \rangle = \max_{x \in \text{ext}C} \langle s, x \rangle, \quad (\text{A.0.5})$$

onde $\text{ext}C$ é o conjunto de pontos extremos de C .

Teorema A.0.2 ([R⁺64] - pág. 89). Se f é uma função contínua de um espaço métrico compacto X em $\mathbb{R}^k$, então $f(X)$ é fechado e limitado. Portanto, f é limitada.

Lema A.0.2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções limitadas e $c > 0$, então

$$\max_{x \in [a, b]} \{-f(x)\} = - \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad \max_{x \in [a, b]} \{cf(x) + g(x)\} \leq c \cdot \max_{x \in [a, b]} f(x) + \max_{x \in [a, b]} g(x) \quad (\text{A.0.6})$$

e

$$\min_{x \in [a, b]} \{cf(x) + g(x)\} \geq c \cdot \min_{x \in [a, b]} f(x) + \min_{x \in [a, b]} g(x). \quad (\text{A.0.7})$$

Apêndice B

Resultados de Teoria de Probabilidade

Lema B.0.1 (Desigualdade de Chernoff). Sejam $X_1, X_2, \dots, X_k$ variáveis aleatórias independentes, tais que $X_i = 1$ com probabilidade p_i e $X_i = 0$ com probabilidade $1 - p_i$. Seja $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$ e denotemos por $\mu = \mathbb{E}(Y_k) = \sum_{i=1}^k p_i$. Então,

$$\mathbb{P}[Y_k > (1 + \delta)\mu] \leq e^{-\frac{\delta^2 \mu}{2 + \delta}}, \quad \forall \delta > 0. \quad (\text{B.0.1})$$

Em particular, se $p_i = p$, para todo $i = 1, \dots, k$, e fazendo $\theta = 1 + \delta$, temos que

$$\mathbb{P}[Y_k > \theta kp] \leq e^{-\frac{1}{3}(\theta-1)kp}, \quad \forall \theta \geq 2. \quad (\text{B.0.2})$$

Lema B.0.2. Sejam $X_1, \dots, X_k$ uma sequência de variáveis aleatórias contínuas i.i.d. sobre $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$ e $Y_1, \dots, Y_k$ suas estatísticas de ordem crescentes. Então,

$$\mathbb{P}[Y_k > y | Y_{k-1} = x] = \frac{\mathbb{P}[X_1 > y]}{\mathbb{P}[X_1 > x]}, \quad \forall y > x \quad (\text{B.0.3})$$

em que F_{X_1} é a função de distribuição acumulada de X_1 .

Lema B.0.3 (Lema de Dominação - [FIKP98]). Sejam $X_1, \dots, X_{k+1}$ uma sequência de variáveis aleatórias contínuas i.i.d. sobre $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$ com função de distribuição acumulada F , $Y_k = \max\{X_1, \dots, X_{k+1}\}$ e $M \in \{1, \dots, k+1\}$ tal que $Y_k = X_M$. Para $k = 1, \dots, m$, defina

$$Y_m = \begin{cases} X_m, & \text{se } m < M; \\ X_{m+1}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (\text{B.0.4})$$

Então,

$$\mathbb{P}[Y_1 < t_1, \dots, Y_k < t_k] \geq \prod_{m=1}^k \mathbb{P}[X_1 < t_m]. \quad (\text{B.0.5})$$

Lema B.0.4 ([FIKP98] - pág. 925). Sejam $X_1, \dots, X_k$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. gaussianas padrão sobre $(\mathcal{S}, \Sigma, \mathbb{P})$ e seja $m_k = \min\{X_1, \dots, X_k\}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, com $\mathbb{P}$ -probabilidade 1 para todo mas um número finito de índices k ,

$$m_k \geq -\sqrt{2(1 + \varepsilon) \log k}. \quad (\text{B.0.6})$$

Bibliografia

- [ABG01] G. B. Arous, A. Bovier, and V. Gayrard. Glauber dynamics of the random energy model i. metastable motion on the extreme states. 2001. 3
- [ABG02] G. B. Arous, A. Bovier, and V. Gayrard. Aging in the random energy model. *Physical review letters*, 88(8):087201, 2002. 3
- [ABG03a] G. B. Arous, A. Bovier, and V. Gayrard. Glauber dynamics of the random energy model. *Communications in mathematical physics*, 236(1):1–54, 2003. 3
- [ABG03b] G. B. Arous, A. Bovier, and V. Gayrard. Glauber dynamics of the random energy model: Ii. aging below the critical temperature. *Communications in mathematical physics*, 236(1), 2003. 3
- [BCKM98] J-P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, and M. Mezard. Out of equilibrium dynamics in spin-glasses and other glassy systems. *Spin glasses and random fields*, pages 161–223, 1998. 2
- [BK04a] A. Bovier and I. Kurkova. Derrida’s generalised random energy models 1: models with finitely many hierarchies. 40(4):439–480, 2004. 3, 40, 66, 71, 74, 79
- [BK04b] A. Bovier and I. Kurkova. Derrida’s generalized random energy models 2: models with continuous hierarchies. 40(4):481–495, 2004. 3
- [Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. 1983. 83
- [CCP87] D. Capocaccia, M. Cassandro, and P. Picco. On the existence of thermodynamics for the generalized random energy model. *Journal of statistical physics*, 46(3-4):493–505, 1987. 3, 11, 12, 13, 22, 35, 38, 41, 50
- [ČW17] J. Černý and T. Wassmer. Aging of the metropolis dynamics on the random energy model. *Probability Theory and Related Fields*, 167(1-2):253–303, 2017. 3

- [DD02] T. C. Dorlas and W. M. B. Dukes. Large deviation approach to the generalized random energy model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(20):4385, 2002. 3, 13, 35, 61, 83
- [Der80] B. Derrida. Random-energy model: Limit of a family of disordered models. *Physical Review Letters*, 45(2):79, 1980. 1, 6
- [Der85] B. Derrida. A generalization of the random energy model which includes correlations between energies. *Journal de Physique Lettres*, 46(9):401–407, 1985. 2, 5, 6, 7, 11
- [DS91] P. Diaconis and D. Stroock. Geometric bounds for eigenvalues of markov chains. *The Annals of Applied Probability*, pages 36–61, 1991. 4, 16, 17, 19, 20, 21
- [FG18] L. R. Fontes and V. Gayrard. Asymptotic behavior and aging of a low temperature cascading 2-grem dynamics at extreme time scales. *arXiv preprint arXiv:1801.08832*, 2018. 75
- [FIKP98] L. R. G. Fontes, M. Isopi, Y. Kohayakawa, and P. Picco. The spectral gap of the rem under metropolis dynamics. *Annals of Applied Probability*, pages 917–943, 1998. 3, 16, 17, 21, 22, 35, 42, 56, 73, 76, 77, 78, 85
- [Gay92] V. Gayrard. Thermodynamic limit of the q-state potts-hopfield model with infinitely many patterns. *Journal of Statistical Physics*, 68(5):977–1011, Sep 1992. 80
- [Gay16a] V. Gayrard. Aging in metropolis dynamics of the rem: a proof. *arXiv preprint arXiv:1602.06081*, 2016. 3
- [Gay16b] V. Gayrard. Convergence of clock processes and aging in metropolis dynamics of a truncated rem. In *Annales Henri Poincaré*, volume 17, 2016. 3
- [HHJ90] R. A Horn, R. A Horn, and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 1990. 16
- [HUL96] J-B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I: Fundamentals*, volume 305. Springer Science & Business Media, 1996. 83
- [JR06] N. K. Jana and B. V. Rao. Generalized random energy model. *Journal of statistical physics*, 123(5):1033–1058, 2006. 3, 5, 6, 8, 9, 13
- [Mat00] P. Mathieu. Convergence to equilibrium for spin glasses. *Communications in Mathematical Physics*, 215(1):57–68, 2000. 3

- [MP] P. Mathieu and P. Picco. Convergence to equilibrium for finite markov processes with application to the random energy model.(2000) <http://front.math.ucdavis.edu/math.PR/0307148>. 3
- [OP84] E. Olivieri and P. Picco. On the existence of thermodynamics for the random energy model. *Communications in Mathematical Physics*, 96(1):125–144, 1984. 11, 35, 41
- [Pic92] P. Picco. *On the REM and the GREM*. Springer, 1992. 50
- [R⁺64] W. Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1964. 84
- [SC97] L. Saloff-Coste. *Lectures on finite Markov chains*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1997. 19
- [Sin91] A. Sinclair. Improved bounds for mixing rates of markov chains on combinatorial structures. Technical report, Technical report, Department of Computer Science, University of Edinburgh, 1991. 4, 19, 20, 21
- [SJ89] A. Sinclair and M. Jerrum. Approximate counting, uniform generation and rapidly mixing markov chains. *Information and Computation*, 82(1):93–133, 1989. 20
- [SK75] D. Sherrington and S. Kirkpatrick. Solvable model of a spin-glass. *Physical review letters*, 35(26):1792, 1975. 1