**Limite do fluído
para o
grafo aleatório de Erdős-Rényi**

Fabio Marcellus
Lima Sá Makiyama Lopes

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Fábio Prates Machado

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, abril de 2010

Limite do fluído para o grafo aleatório de Erdős-Rényi

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Fabio Marcellus Lima Sá Makiyama Lopes e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Fábio Prates Machado (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Élcio Lebensztayn - IME-USP.
- Prof. Dr. Marcelo Sobottka - UFSC.

Agradecimentos

Ao grupo de probabilidade do IME-USP por proporcionar um ambiente de excelência acadêmica que contribuiu para minha formação científica e pessoal, em especial a Fábio Prates Machado pela orientação e amizade, e aos seus (ex-)orientandos Alexandre Leichsenring, Élcio Lebensztayn, Iesus Diniz, Maurício Zuluaga, Pablo Rodriguez, Renato Gava e Valdivino Vargas Júnior pela amizade e apoio.

Aos amigos que fiz nos bacharelados em estatística e economia da USP, na pós-graduação do IME-USP e no Núcleo de Apoio à Pesquisa em Modelagem Estocástica e Complexidade (NUMEC). Em especial a Alexander Valencia, Fernando Itano, Fidel Beraldi, Marinho Bertanha e Maya Stein.

Resumo

Neste trabalho, aplicamos o algoritmo *Breadth-First Search* para encontrar o tamanho de uma componente conectada no grafo aleatório de Erdős-Rényi. Uma cadeia de Markov é obtida deste procedimento. Apresentamos alguns resultados bem conhecidos sobre o comportamento dessa cadeia de Markov. Combinamos alguns destes resultados para obter uma proposição sobre a probabilidade da componente atingir um determinado tamanho e um resultado de convergência do estado da cadeia neste instante. Posteriormente, aplicamos o teorema de convergência de Darling (2002) a sequência de cadeias de Markov reescaladas e indexadas por N , o número de vértices do grafo, para mostrar que as trajetórias dessas cadeias convergem uniformemente em probabilidade para a solução de uma equação diferencial ordinária.

Deste resultado segue a bem conhecida lei fraca dos grandes números para a componente gigante do grafo aleatório de Erdős-Rényi, no caso supercrítico.

Além disso, obtemos o limite do fluido para um modelo epidêmico que é uma extensão daquele proposto em Kurtz et al. (2008).

Palavras-chave: Cadeias de Markov, Convergência, Grafos aleatórios.

Abstract

In this work, we apply the Breadth-First Search algorithm to find the size of a connected component of the Erdős-Rényi random graph. A Markov chain is obtained of this procedure. We present some well-known results about the behavior of this Markov chain, and combine some of these results to obtain a proposition about the probability that the component reaches a certain size and a convergence result about the state of the chain at that time. Next, we apply the convergence theorem of Darling (2002) to the sequence of rescaled Markov chains indexed by N , the number of vertices of the graph, to show that the trajectories of these chains converge uniformly in probability to the solution of an ordinary differential equation.

From the latter result follows the well-known weak law of large numbers of the giant component of the Erdős-Rényi random graph, in the supercritical case.

Moreover, we obtain the fluid limit for an epidemic model which is an extension of that proposed in Kurtz et al. (2008).

Keywords: Markov chains, Convergence, Random graphs.

Sumário

Lista de Abreviaturas	ix
Lista de Símbolos	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
1.1 Considerações Preliminares	1
1.2 Contribuições	4
1.3 Organização do Trabalho	4
2 O Teorema de Convergência	5
2.1 Exemplo: um modelo epidêmico	8
3 O Grafo de Erdős-Rényi e o algoritmo BFS	13
3.1 O grafo de Erdős-Rényi	13
3.2 O algoritmo <i>Breadth-First Search</i>	16
3.3 Resultados auxiliares	21
4 Limite do Fluído	29
4.1 O Processo e suas características	31
4.2 Condições para convergência	33
4.3 Demonstrações.	36
4.4 Conclusões	41
5 Apêndice	43
Referências Bibliográficas	47

Lista de Abreviaturas

BFS	Breadth-First Search.
Bin(n, p)	distribuição binomial com parâmetros n e p .

Lista de Símbolos

$ER_p(N)$	Grafo aleatório de Erdős-Rényi com N vértices e parâmetro p .
$f(n) = o(g(n))$	$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 f(n) \leq g(n) \cdot \epsilon $.
$f(n) = O(g(n))$	$\exists k > 0, n_0 \forall n > n_0 f(n) \leq g(n) \cdot k $.
$\lceil \alpha \rceil$	menor inteiro maior ou igual a $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\bar{S}$	fecho do conjunto S .
$X \sim$	a variável aleatória X tem a distribuição.
$\xrightarrow{P}$	convergência em probabilidade.
$a \wedge b$	mínimo entre $a, b \in \mathbb{R}$.
$\ x\ $	norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$
$ x _S$	norma da soma de $x \in \mathbb{R}^n$

Lista de Figuras

2.1	Gráfico da função $a[t]$ para $\mu = 1$, $\epsilon = 0.01$ e 0.10 , respectivamente.	12
2.2	Simulações do modelo epidêmico comparado a seus limites do fluido.	12
3.1	Histograma tamanho da componente explorada.	19
4.1	Simulação de $ER_{\frac{2}{1000}}(1000)$ e $\alpha = 0.05$; $ER_{\frac{4}{1000}}(1000)$ e $\alpha = 0.01$, respectivamente. .	30

Lista de Tabelas

2.1	θ e cobertura do grafo.	11
3.1	Valores de $\rho(\lambda)$	20

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Preliminares

Existe uma série de critérios de convergência para processos estocásticos Markovianos. Um dos critérios comumente explorados fornece resultados sobre o comportamento limite de uma sequência de processos de Markov em termos de suas características infinitesimais. Este critério tem sido bastante explorado por probabilistas, tendo como referência clássica o livro de Ethier e Kurtz (2005). Um caso particular para o qual existem muitas aplicações é quando o processo sob a escala da lei dos grandes números, isto é, para N grande, realiza saltos cujo tamanho é de ordem $1/N$ a taxas de ordem N , tem um limite determinístico, geralmente, associado à solução de uma equação diferencial ordinária. Em alguns contextos, como em teoria de filas, tal objeto limite é denominado limite do fluido. Trata-se de uma teoria bastante robusta e desenvolvida, porém, de difícil acesso para não especialistas pois depende de uma série de conceitos não abordados em cursos básicos e intermediários de probabilidade.

Observamos que o estudo deste tipo de resultado limite, nesta e em outras escalas, assim como o estudo da flutuação dos processos em torno destes limites constitui-se numa das principais áreas de estudo de probabilidade aplicada e processos estocásticos. Por exemplo, tais resultados têm sido aplicados em teoria de filas (Bramson, 2008), modelos epidêmicos (Kurtz et al., 2008; Martin-Löf, 1986, 1998), estudo de reações químicas (Ball et al., 2006), análise de algoritmos (Mitzenmacher, 1999) e, recentemente, em teoria de grafos e hipergrafos (Aldous, 1997; Darling e Norris, 2005; Darling et al., 2004; Goldschmidt, 2005; Molloy e Reed, 1995, 1998; Wormald, 1995, 1999).

Neste trabalho, estamos interessados em aplicações deste tipo de resultado em grafos aleatórios. Destacam-se neste contexto, o trabalho de Aldous (1997) que estabeleceu a importância de rederivar e estender os resultados de teoria de grafos aleatórios utilizando ferramentas modernas de teoria de processos estocásticos e probabilidade, e o chamado *differential equation method* que Nicholas Wormald desenvolveu e difundiu no estudo de problemas em combinatória e análise de algoritmos. Os métodos de Wormald permitem mostrar a convergência de processos estocásticos a tempo discreto a solução de equações diferenciais ordinárias, sugerimos ao leitor a *survey* (Wormald, 1999) que contém alguns de seus resultados. Porém, de maior interesse neste trabalho é a abordagem proposta por Darling e Norris (2005); Darling et al. (2004), para estudar o comportamento de uma

classe de hipergrafos aleatórios. Tais métodos são menos técnicos que aqueles propostos em Ethier e Kurtz (2005), logo, mais acessíveis a não especialistas. Recentemente, alguns destes métodos foram reunidos numa *survey* Darling e Norris (2008). Além disso, Darling (2002) contem uma versão simples dos métodos de Darling e Norris (2008), prontamente acessível a não especialistas e estudantes de pós-graduação. Será nesta versão simples que estarão concentradas as aplicações que apresentaremos neste trabalho. A simplicidade resume-se a uma apresentação menos geral de Darling e Norris (2008), isto é, na qual apenas resultados básicos de processos estocásticos são assumidos, como consequência o resultado está restrito a uma classe menor de processos estocásticos e a velocidade com as quais a sequência de processos converge a solução da equação diferencial não é ótima. Entretanto, o resultado de Darling (2002) é suficiente para a aplicação que é o principal objetivo deste trabalho, além disso, a formulação deste resultado e sua demonstração é muito mais acessível que aqueles disponíveis na literatura. Observamos que os métodos propostos por Wormald também são bastante acessíveis, e que seguem uma abordagem diferente daquela de Darling (2002); Darling e Norris (2005); Darling et al. (2004); Ethier e Kurtz (2005), na verdade, seu método parece ser uma extensão do chamado *bounded differences method* que constitui-se num dos pilares do método probabilístico em combinatória, sugerimos ao leitor a consulta de Alon e Spencer (1992); McDiarmid (1989) para maiores esclarecimentos.

Assim, nesta dissertação, aplicamos o resultado de Darling (2002) a um processo estocástico Markoviano que descreve a exploração de uma componente do grafo de Erdős-Rényi. Este processo estocástico é obtido a partir do algoritmo *Breadth-First Search*, e representa a evolução de uma partição dos vértices do grafo que nos permite descobrir o tamanho desta componente, quando uma partição com determinadas características é atingida. Estamos interessados em obter o limite do fluído para esta sequência de processos estocásticos indexados por N , o número de vértices do grafo, até o instante no qual tal partição é atingida. Em nosso caso, o limite do fluído significa um tipo de lei fraca dos grandes números para a trajetória da sequência de processos estocásticos, cujo limite é determinístico e corresponde a solução de uma equação diferencial num determinado intervalo compacto. Este limite descreve a proporção de vértices em cada uma das classes da partição ao longo do processo, assim, observar o limite do fluído no instante em que o processo atinge aquela determinada partição que nos permite inferir o seu tamanho, corresponde a uma lei fraca dos grandes números para o tamanho da componente explorada.

Um resultado bastante conhecido para o grafo aleatório de Erdős-Rényi é a lei fraca dos grandes números para a componente maximal (gigante), no caso supercrítico. Veremos que este resultado segue do limite do fluído que iremos encontrar nesta dissertação.

Abaixo, relacionamos alguns trabalhos cujos métodos e idéias servem de motivação para este trabalho.

Primeiramente, Martin-Löf (1986, 1998), apresentou para uma grande classe de modelos epidêmicos um teorema do limite central para a proporção da população que será infectada, seus resultados

estão baseados em teoremas de convergência para cadeias de Markov, como em Ethier e Kurtz (2005). O processo de exploração da componente que obtemos em nosso trabalho pode ser visto como um caso particular dos modelos epidêmicos de Martin-Löf (1986, 1998). Sob este ponto de vista, nestes trabalhos estão os resultados sobre a distribuição do tamanho da componente para as fases subcrítica, crítica e supercrítica do grafo aleatório de Erdős-Rényi. Em especial, prova-se o teorema central do limite para o tamanho da componente maximal deste grafo. Em Durrett (2006), Richard Durrett aplica as idéias de Martin-Löf (1986, 1998) explicitamente para o grafo aleatório de Erdős-Rényi.

Em segundo lugar, em Darling e Norris (2005); Darling et al. (2004) é apresentado um resultado de limite do fluido e aplica-se tal resultado a um processo estocástico semelhante ao desta dissertação para estudar as componentes e a transição de fase para o tamanho da componente maximal de uma determinada classe de hipergrafos aleatórios, isto é, os *Poisson random hypergraphs*. Um dos principais resultados é a descontinuidade da transição de fase em relação aos parâmetros que determinam os k -elos, $k \geq 3$. No caso em que este hipergrafo possui apenas 2-elos e N vértices, ele é tal que: para cada um dos pares de vértices existe um número aleatório de 2-elos entre eles com distribuição Poisson $\left(\frac{2\beta_2}{N-1}\right)$, $\beta_2 > 0$, independentemente dos outros pares. Observe que este modelo define um multigrafo, ao invés de um grafo simples. Porém, assintoticamente ele é semelhante ao grafo de Erdős-Rényi com N vértices e $p = \frac{2\beta_2}{N}$, tendo a mesma distribuição assintótica para o tamanho das componentes encontrada em Martin-Löf (1986). Lembramos que o resultado de convergência que utilizamos neste trabalho é uma versão simplificada daquele utilizado em Darling e Norris (2005); Darling et al. (2004).

O processo estocástico que estudamos é dominado por um processo de ramificação, exibindo na fase supercrítica um comportamento dicotômico, isto é, a componente de um vértice escolhido ao acaso pode ter com alta probabilidade um tamanho $O(\log N)$ ou $O(N)$, onde N é o número de vértices do grafo. O processo estudado em Darling e Norris (2005) também apresenta o mesmo comportamento. Neste caso, para aplicar os resultados do limite do fluido os autores estudaram a distribuição do tempo em que o processo atinge a partição que permite identificar o tamanho da componente. Como nosso objetivo é obter apenas o limite do fluido para o processo quando este é $O(N)$. Ao invés de seguir estratégia de Darling e Norris (2005) optamos pela sugestão encontrada na *survey* Darling e Norris (2008) que nos permite estudar apenas o caso $O(N)$. Em resumo, sugere-se aproximar o processo em seus estágios iniciais por uma ramificação aos moldes de Ball et al. (2006) até que o processo atinja uma ordem $O(N)$, e então aplicar o teorema de convergência. Por último, uma das questões que aparecem no estudo de redes reais, tais como a internet, é a estimação da distribuição do grau destas redes. Por exemplo, evidências empíricas mostram que o grau da internet segue uma lei de potência, isto é, $\mathbb{P}(k) \approx k^{-\alpha}$ para algum $2 < \alpha < 3$. Porém, existe uma grande controversia sobre a eficiência dos métodos utilizados para tal inferência. Em Clauset e Moore (2005), os autores interessados em criticar um determinado método utilizado para estimar a distribuição do grau de redes reais, aplicam tal método ao grafo aleatório de Erdős-Rényi de grau médio λ para mostrar que tal método gera uma estimativa do tipo $\mathbb{P}(k) \approx k^{-1}$, para $k \leq \lambda$.

Quando na verdade a distribuição do grau é Poisson de parâmetro λ . O artigo pretende fornecer uma evidência analítica para tal fato, parte de sua argumentação esta baseada na afirmação não rigorosa de que a evolução da exploração da componente maximal pelo algoritmo *Breadth-First-Search* é bem modelado por um determinado conjunto de equações diferenciais, e que tal argumento pode ser tornado rigoroso aplicando os resultados de Wormald (1999). Observamos que não foram encontradas referências nas quais tal argumento fosse tornado rigoroso.

Assim, motivados por estas observações expomos as principais contribuições deste trabalho.

1.2 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho estão discriminadas abaixo:

- i) O processo de exploração de uma componente do grafo de Erdős-Rényi utilizando o algoritmo BFS gera uma cadeia de Markov. Encontramos o limite do fluído para a sequência destes processos indexados por N , isto é, provamos que tal sequência converge uniformemente em probabilidade para a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias em um determinado intervalo compacto. Segue deste resultado a lei fraca dos grandes números para o tamanho da componente maximal do grafo de Erdős-Rényi.
- ii) Obtemos um limite do fluído para um modelo epidêmico no grafo completo que é uma variante do modelo proposto em Kurtz et al. (2008). Nesta variante cada partícula gera um número aleatório de partículas quando visita um vértice ainda não visitado.

1.3 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, enunciaremos o teorema de Darling (2002) que ilustra a natureza da convergência da sequência de processos para a solução de uma determinada equação diferencial. Posteriormente, apresentaremos uma aplicação deste resultado a um modelo epidêmico que é uma variante do modelo introduzido em Kurtz et al. (2008).

No Capítulo 3, apresentamos o modelo de grafos aleatório de Erdős-Rényi e o algoritmo *Breadth-First Search*. Utilizaremos este algoritmo para obter um processo estocástico Markoviano. Enunciaremos alguns resultados de van der Hofstad (2009) que ajudam a entender o comportamento deste processo estocástico. Além disso, a combinação destes resultados nos permitirão obter uma proposição que nos permitirá seguir a abordagem de Ball et al. (2006), sugerida por Darling e Norris (2008) para tratar do caso dicotômico. Finalmente, no Capítulo 4 obteremos o limite do fluído para a sequência de processos indexados em N , e demonstraremos este resultado aplicando as argumentações da demonstração do teorema de convergência.

Capítulo 2

O Teorema de Convergência

Neste capítulo apresentaremos o teorema de convergência proposto por Darling (2002). O resultado fornece o que é conhecido na literatura por limite do fluído, isto é, um tipo de lei dos grandes números para a trajetória do processo, geralmente, identificada como a solução de uma equação diferencial ordinária. Posteriormente, apresentaremos um exemplo da aplicação deste teorema.

A apresentação do teorema segue o original Darling (2002).

Suponha que $(X_n)_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo discreto tendo como espaço de estados um conjunto E . Chamamos de incrementos da cadeia as diferenças

$$X_1 - X_0, \dots, X_{n+1} - X_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Assumimos que X_0 e os incrementos tenham médias e covariâncias finitas, e denotaremos os últimos por:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid X_n = x) = \mu[x]; \quad (2.1)$$

$$\mathbb{V}(X_{n+1} - X_n \mid X_n = x) = \sum [x], x \in E. \quad (2.2)$$

O principal resultado deste capítulo será a obtenção de sistemas de equações diferenciais que representem no limite o comportamento de determinados processos estocásticos, e cuja solução representa as trajetórias de tais processos. Para cumprir nossos objetivos, devemos passar do tempo discreto para o contínuo. Com esse objetivo introduziremos um processo a tempo contínuo $(Y_t)_{t \geq 0}$ associado ao processo $(X_n)_{n \geq 0}$.

Seja $(v[t])_{t \geq 0}$ um processo de Poisson, com os tempos de ocorrência de eventos $\tau_1 < \tau_2 < \dots$. Suponha que existe uma função de taxa limitada $c : E \rightarrow [0, \infty)$, tal que o tempo entre dois eventos consecutivos $\tau_{n+1} - \tau_n$ tem distribuição exponencial com média $\frac{1}{c[x]}$ sob o evento $\{X_n = x\}$, $x \in E$. Isto é, a distribuição do tempo de ocorrência entre os eventos pode depender do estado em que a cadeia de Markov se encontra.

Definiremos o seguinte processo Markoviano de salto $(Y_t)_{t \geq 0}$, como uma transformação da cadeia

a tempo discreto para o tempo contínuo, de forma que os processos realizem as mesmas transições. Isto é, $Y_t := X_{v[t]}$, assim, no instante τ_n da ocorrência do n -ésimo evento do processo de Poisson $v[t]$ temos que $Y_{\tau_n} = X_n$. Pela definição $X_0 = Y_0$, portanto, temos que os processos tem os mesmos incrementos.

Chamaremos de função de *drift* do processo $(Y_t)_{t \geq 0}$ a seguinte função $b : E \rightarrow (0, \infty)$, definida por:

$$b[x] := c[x]\mu[x].$$

O papel desta função ficará será detalhado no capítulo 4, entretanto ressaltamos aqui que ela será importante na definição de um processo martingal associado ao processo $(Y_t)_{t \geq 0}$. Porém, intuitivamente podemos pensar que ela representa uma direção média e a intensidade com que o processo salta de um estado $Y_t = x$.

Agora, definiremos do mesmo modo que $(X_n)_{n \geq 0}$, uma sequência de processos indexados $(X_n^N)_{n \geq 0}$ por um parâmetro $N \geq 1$, e seu processo a tempo contínuo associado $(Y_t^N)_{t \geq 0}$. O parâmetro N , geralmente, está associado ao tamanho do processo, isto é, em contexto aplicados pode significar o tamanho da população, a quantidade de moléculas envolvidas numa reação química, o volume de recipiente, ou no caso de nossa aplicação principal o número de vértices de um grafo. Este parâmetro fornece uma escala para a dimensão de cada um dos processos da sequência.

Assim, cada um desses processos $(X_n^N)_{n \geq 0}$ terá um espaço de estados E^N , e também terá vetores de média e matrizes de covariância, $\mu^N[x]$ e $\Sigma^N[x]$, respectivamente, quando sob o evento $\{X_n^N = x\}$, $x \in E^N$. E processos de Poisson associados com taxa c^N nos permitirão definir as transformações a tempo contínuo $(Y_t^N)_{t \geq 0}$ com função de *drift* associada $b^N[x] := c^N[x]\mu^N[x]$.

O teorema mostrará que se as sequências de processos $(X_n^N)_{n \geq 0}$ e $(Y_t^N)_{t \geq 0}$, satisfizerem determinadas condições, e se existir um campo vetorial b cuja distância da sequência $(b^N)_{N \geq 1}$ convergir a zero, então a trajetória dos processos $(Y_t^N)_{t \geq 0}$ convergem para a solução de uma equação diferencial ordinária, em determinadas condições que ficarão claras no enunciado do teorema.

Antes de introduzir estas condições e o teorema, introduziremos o espaço no qual ocorre a convergência dos processos. Seja D um conjunto fechado tal que $D \supseteq \cup_{N \geq 1} E^N$. Fixaremos um conjunto aberto $S \subseteq D$, que será a região do espaço no qual o processo irá convergir. Definimos também $S^N := S \cap E^N$.

Assinalamos que as convergências dos parâmetros associados aos processos $(X_n^N)_{n \geq 0}$ e $(Y_t^N)_{t \geq 0}$ são uniformes em N , e que $k_1[\delta]$, k_2 e k_3 são constantes positivas. Agora, apresentaremos as condições.

Condição 1. *Sobre as condições iniciais do processo $(Y_t^N)_{t \geq 0}$: Assumimos que existe um*

$a \in \bar{S}$, isto é, no fecho de S , tal que, para cada $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(\|Y_0^N - a\| > \delta) \leq \frac{k_1[\delta]}{N}.$$

Condição 2. Sobre as funções de drift: Assumimos que existe um campo vetorial $b : D \rightarrow E$, que seja Lipschitz, tal que

$$\sup_{x \in S^N} \|b^N[x] - b[x]\| \rightarrow 0.$$

Condição 3. Sobre as sequências de médias $\mu^N[\cdot]$, covariâncias $\sum^N[\cdot]$ e taxas de salto $c^N[\cdot]$:

$$\sup_{x \in S^N} c^N[x] \leq k_2 N;$$

$$\sup_{x \in S^N} \{ \text{Traço}[\sum^N[x]] + \|\mu^N[x]\|^2 \} \leq \frac{k_3}{N^2}.$$

Seja $(y[t])_{0 \leq t \leq \zeta[a]}$ em $\bar{S}$, onde $\zeta[a] = \inf\{t \geq 0 : y[t] \notin S\}$, a solução da equação diferencial ordinária:

$$\dot{y}[t] = b[y[t]], \quad y[0] = a.$$

Observe que esta solução é única pois b é Lipschitz. Dizemos que esta solução é o limite hidrodinâmico do processo $(Y_t^{(N)})_{t \geq 0}$, no sentido do seguinte teorema:

Teorema 1. Assumindo as Condições 1, 2 e 3. Seja $\sigma^{(N)} = \inf\{t \geq 0 : Y_t^N \notin S\}$. Fixe $\delta > 0$.

1. Para qualquer tempo finito $u \leq \zeta[a]$,

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq u} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t \wedge \sigma^N]\| > \delta) = O(N^{-1}). \quad (2.3)$$

2. Suponha que $a \in S$. Então para qualquer tempo finito $0 < u < \zeta[a]$,

$$\mathbb{P}(\sigma^N < u) = O(N^{-1});$$

e portanto para cada $u > 0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq t \leq u} \|Y_t^N - y[t]\| > \delta) = O(N^{-1}). \quad (2.4)$$

Além disso, se $\zeta[a] < \infty$, então

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta[a]} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t]\| > \delta \right) = O(N^{-1}); \quad (2.5)$$

Em particular,

$$\mathbb{P} (|\sigma^N - \zeta[a]| > \delta) = O(N^{-1}).$$

2.1 Exemplo: um modelo epidêmico

Um modelo epidêmico.

Considere o seguinte sistema de passeios aleatórios em K_{N+1} , isto é, no grafo completo com $N + 1$ vértices, $N \geq 1$. No tempo zero existe um número de partículas ativas em K_{N+1} , por exemplo, cada uma representando um vírus. Os vértices do grafo representam os indivíduos da população. Cada partícula ativa realiza independentemente uma passeio aleatório a tempo contínuo neste grafo. A cada instante de salto uma partícula ativa move-se. Quando um vértice ainda não visitado por uma partícula ativa é visitado, um número aleatório X de partículas ativas é criado, e, estas passarão a realizar passeios aleatórios independentes também. Entretanto, cada partícula ativa desaparece no instante em que visita um vértice já visitado.

O processo termina quando não existirem mais partículas ativas.

Em Kurtz et al. (2008), uma generalização deste modelo foi estudado a tempo contínuo, na qual apenas uma partícula ativa salta a cada vez e cada partícula pode dar um número inteiro $L > 0$ de saltos em vértices já visitados antes de desaparecer. Os autores fornecem uma lei dos grandes números e um teorema central do limite para a proporção de vértices visitados (cobrimento do grafo) ao longo e ao final do processo.

O modelo a tempo discreto também foi estudado. Porém, a dinâmica do processo neste caso é mais complicada uma vez que todas as partículas ativas saltam ao mesmo tempo. Neste caso, apenas aproximações de campo médio são conhecidas para o cobrimento do grafo ao final do processo. Estes resultados foram obtidos em Alves et al. (2006), e posteriormente, tais aproximações foram refinadas e generalizadas em Gava (2007). Observamos que em ambos os casos, isto é, a tempo discreto e contínuo, o modelo foi estudado quando X é uma constante igual a 1.

Neste exemplo, vamos obter uma lei fraca dos grandes números para o cobrimento do grafo ao longo e ao final do processo utilizando o Teorema 1, quando o processo inicia com uma proporção positiva de partículas ativas e X é uma variável aleatória não negativa independente do processo e, com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$.

Para $N \geq 1$, considere $(Z_n^N)_{n \geq 0} = (V_n^N, A_n^N, I_n^N)_{n \geq 0}$ a cadeia de Markov a tempo discreto com espaço de estados $E^N = \{z = (v, a, i) \in \mathbb{Z}^3 : 0 \leq v, i \leq N + 1, a \geq 0, v + i = N + 1\}$, representando o processo descrito acima no grafo K_{N+1} . Temos que V_n^N do processo representa o número de

vértices já visitados pelo processo, A_n^N representa o número de partículas ativas e I_n^N o número de vértices ainda não visitados, todos os valores após a n -ésima transição. Como, $V_n^N + I_n^N = N+1$ para todo $n \geq 0$, só precisaríamos considerar $(Z_n^N)_{n \geq 0} = (V_n^N, A_n^N)_{n \geq 0}$, mas manteremos $(I_n^N)_{n \geq 0}$ por conveniência. Estamos interessados em obter o limite do fluido para o comportamento do processo até que não existam mais partículas ativas. Fixe $0 < \epsilon < 1$, supomos que exista uma sequência $\{\epsilon^N\}_{N \geq 1}$ de números inteiros tal que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\epsilon^N}{N} = \epsilon$. Considere os estados iniciais da sequência de processos $(Z_n^N)_{n \geq 0}$ sendo iguais a $\tilde{Z}_0^N = (1, \epsilon^N, N)$, $N \geq 1$.

A fim de aplicar o Teorema 1, iremos trabalhar com o processo reescalado por N que denotaremos por $(\tilde{Z}_n^N)_{n \geq 0}$ e seu espaço de estados por $\tilde{E}^N$.

Observamos que cada um dos processos da sequência $(\tilde{Z}_n^N)_{n \geq 0}$, $N \geq 1$, tem uma condição inicial não aleatória $\tilde{Z}_0^N = \left(\frac{1}{N}, \frac{\epsilon^N}{N}, \frac{N}{N}\right)$, logo $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{Z}_0^N = (0, \epsilon, 1)$, e portanto, a Condição 1 é trivialmente satisfeita.

Seja X uma variável aleatória independente dos processos $(\tilde{Z}_n^N)_{n \geq 0}$, com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Suponha que a cadeia esteja no estado $z = (v, a, i) \in \tilde{E}^N$, $a \neq 0$, então

$$\mathbb{E}(\tilde{V}_{n+1}^N - \tilde{V}_n^N \mid \tilde{Z}_n^N = (v, a, i)) = \frac{1}{N} (1 - v); \quad (2.6)$$

$$\mathbb{E}(\tilde{A}_{n+1}^N - \tilde{A}_n^N \mid \tilde{Z}_n^N = (v, a, i)) = -\frac{v}{N} + \frac{\mu}{N} (1 - v); \quad (2.7)$$

$$\mathbb{E}(\tilde{I}_{n+1}^N - \tilde{I}_n^N \mid \tilde{Z}_n^N = (v, a, i)) = -\frac{1}{N} (1 - v); \quad (2.8)$$

e temos as seguintes variâncias

$$\mathbb{V}(\tilde{V}_{n+1}^N - \tilde{V}_n^N \mid \tilde{Z}_n^N = (v, a, i)) = \frac{1}{N^2} (1 - v); \quad (2.9)$$

$$\mathbb{V}(\tilde{A}_{n+1}^N - \tilde{A}_n^N \mid \tilde{Z}_n^N = (v, a, i)) \leq \frac{1 + 2\mu + \sigma^2 + \mu^2}{N^2}; \quad (2.10)$$

$$\mathbb{V}(\tilde{I}_{n+1}^N - \tilde{I}_n^N \mid \tilde{Z}_n^N = (v, a, i)) = \frac{1}{N^2} (1 - v). \quad (2.11)$$

Novamente, considere os processos de Poisson $v(t)^N$ dependente da cadeia $(\tilde{Z}_n^N)_{n \geq 0}$, cujos tempos entre o n -ésimo e o $(n+1)$ -ésimo evento é distribuído conforme uma variável aleatória Exponencial com média $\frac{1}{N}$, quando $\tilde{Z}_n = z$, para todo $z \in \tilde{E}^N$. Assim, construiremos a sequência de processos de Markov a tempo contínuo $(Y_t^N)_{t \geq 0}$, definidos como no Teorema 1, isto é, $Y_t^N = \tilde{Z}_{v(t)}^N$, $N \geq 1$.

Associaremos a este processo a seguinte função de *drift*

$$b^N[z] = c^N[z] \mu^N[z] = N \mu^N[z], \forall z = (v, a, i) \in \tilde{E}^N. \quad (2.12)$$

E portanto, teremos as seguintes funções de *drift* $b^N : \tilde{E}^N \rightarrow \mathbb{R}^3$ para as sequências de processos

$$b^N[z] = (1 - v, -v + \mu(1 - v), -(1 - v)). \quad (2.13)$$

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto fechado tal que $D \supseteq \cup_{N \geq 1} \tilde{E}^N$. Definimos o conjunto aberto $S = \{z = (v, a, i) \in D : 0 \leq v, i \leq 2 \text{ e } a > 0\}$, que esta contido em D . Definimos também $S^N := S \cap E^N$.

Considere o campo vetorial $b[x] = (1 - v, -v + \mu(1 - v), -(1 - v))$, para todo $x = (v, a, i) \in \tilde{E}$, é fácil verificar que ele é Lipschitz, isto é,

$$\|b[x] - b[y]\| \leq (3 + \mu) \|x - y\|, \quad \forall x, y \in S.$$

Além disso, como no exemplo anterior, temos que $b[x]^N$ e $b[x]^N$ são iguais se considerarmos $x \in S^N$, logo a Condição 2 esta claramente satisfeita.

A primeira parte da Condição 3 é imediata, pois para cada $N \geq 3$, os respectivos processos $(Y_t^N)_{t \geq 0}$ tem cada um função de taxa $c^N = N$. Em relação a segunda parte desta condição temos que

$$\{\text{Traço}[\sum_{i=1}^N [x]] + \|\mu^N[x]\|^2\} \leq \frac{6 + \sigma^2 + \mu^2 + 2\mu}{N^2}, \quad \forall x \in J^N. \quad (2.14)$$

E portanto,

$$\sup_{x \in J^N} \{\text{Traço}[\sum_{i=1}^N [x]] + \|\mu^N[x]\|^2\} \leq \frac{6 + \sigma^2 + \mu^2 + 2\mu}{N^2} \quad (2.15)$$

Temos então que as Condições 1, 2 e 3 são todas satisfeitas pela sequência de processos estocásticos quando estes são convenientemente reescalados.

Seja $(y[t])_{0 \leq t \leq \zeta}$ a solução da equação diferencial ordinária definida abaixo, onde $\zeta := \inf\{t : y[t] \notin S\}$, definimos também $\sigma^N := \inf\{t : Y_t^N \notin S\}$.

$$\dot{y}[t] = b[y[t]], \quad y[0] = (0, \epsilon, 1). \quad (2.16)$$

Observamos que tal solução será unica pois o campo vetorial $b[.]$ é Lipschitz em $\tilde{S}$.

Lembramos que $\dot{y}[t] = (\dot{v}[t], \dot{a}[t], \dot{i}[t])$, logo,

$$\dot{v}[t] = b[x[t]] = 1 - v[t], \quad v[0] = 0; \quad (2.17)$$

$$\dot{a}[t] = b[k[t]] = -v[t] + \mu(1 - v[t]), \quad a[0] = \epsilon; \quad (2.18)$$

$$\dot{i}[t] = b[k[t]] = -(1 - v[t]), \quad i[t] = 1. \quad (2.19)$$

Obtemos a solução $(y[t])_{0 \leq t \leq \zeta}$ em $\bar{J}$ que é o limite do fluído do processo no sentido do Teorema 1,

$$v[t] = 1 - e^{-t}; \quad (2.20)$$

$$a[t] = (1 + \mu + \epsilon) - e^{-t}(1 + \mu) - t; \quad (2.21)$$

$$i[t] = e^{-t}. \quad (2.22)$$

Lembramos que ζ é o primeiro instante positivo para o qual a solução da equação diferencial deixa o conjunto $S = \{z = (v, a, i) \in D : 0 \leq v, i \leq 2 \text{ e } a > 0\}$. Neste caso, este instante será aquele no qual o processo atinge um estado do tipo $z = (v, 0, i) \in D$. Logo, para encontrarmos o valor de ζ precisamos encontrar a menor raiz real extritamente positiva de,

$$a[t] = 0.$$

Suponha que tal número exista, ele será denotado por θ . Então, o limite do fluído de nosso processo é a equação $(y[t])_{0 \leq t \leq \theta}$, em particular, o número de vértices infectados ao final do processo converge uniformemente em probabilidade para $v[\theta]$.

Na tabela abaixo podemos ver os valores aproximados para θ e a proporção final de vértices visitados ao final do processo para alguns valores de μ e ϵ .

μ	ϵ	θ	$v[\theta]$
1.0	0.01	1.61037	0.800187
1.0	0.10	1.75375	0.826877
2.0	0.05	2.88192	0.943973
2.0	0.20	3.05923	0.953076

Tabela 2.1: θ e cobertura do grafo.

Observe a Figura 2.2, na qual comparamos simulações do processo $(\tilde{Y}_t)_{0 \leq t \leq \theta}$ com seu limite do fluído. A primeira simulação compara o modelo com 5000 vértices no qual a variável X tem distribuição binomial com parâmetros 10 e 0.2, isto é, média 2 e $\epsilon = 0.05$. Na segunda simulação temos o modelo com 2000 vértices no qual a variável X também tem distribuição binomial, porém, os parametros são 10 e 0.1., isto é, média 1 e $\epsilon = 0.01$.

Observação 1. *Uma das limitações do Teorema 1 é que a fim de obter (2.5) precisamos que $a \in S$,*

Figura 2.1: Gráfico da função $a[t]$ para $\mu = 1$, $\epsilon = 0.01$ e 0.10 , respectivamente.

Figura 2.2: Simulações do modelo epidêmico comparado a seus limites do fluido.

isto é, que a condição inicial da equação diferencial ordinária esteja dentro do aberto S . Tal fato é utilizado na demonstração de (2.5), e será esclarecido na demonstração do Resultado 1. Por isso, para o exemplo escolhemos uma condição inicial igual a $y[0] = (0, \epsilon, 1)$.

Observação 2. Nesta dissertação não utilizamos a possibilidade da taxa dos processos de Poisson $v[t]^N$ serem variáveis e dependentes do estado em que o processo se encontra, isto é, em nossas aplicações $c^N[x] = N, \forall x \in \tilde{E}^N$. Entretanto, o fato de ter uma taxa variável pode ser extremamente importante em outros contextos. Geralmente, um taxa variável conveniente pode simplificar as equações diferenciais obtidas e pode ser interpretada como uma variação da velocidade do processo ao longo de sua trajetória. Para um exemplo no qual tal idéia é utilizada veja Darling (2002).

Capítulo 3

O Grafo de Erdős-Rényi e o algoritmo BFS

Neste capítulo, apresentaremos o grafo aleatório de Erdős-Rényi e um algoritmo que permite a exploração de uma componente deste grafo associado a um determinado vértice. Veremos que um processo estocástico é obtido a partir deste algoritmo, e que este processo exibe uma característica dicotômica, isto é, a exploração da componente de um vértice escolhido ao acaso, resulta com alta probabilidade em componentes de ordem $O(\log N)$ ou $O(N)$. Enunciaremos alguns resultados de van der Hofstad (2009) que ajudam a entender o comportamento deste processo. O principal resultado deste capítulo é a Proposição 3 que permitirá a aplicação do Teorema 1, nos moldes de Ball et al. (2006), como sugerido em Darling e Norris (2008) quando o processo exibe um comportamento dicotômico. Esta proposição é obtida a partir da combinação de alguns dos resultados de van der Hofstad (2009). Não apresentaremos a demonstração dos resultados de van der Hofstad (2009), referindo o leitor ao original.

3.1 O grafo de Erdős-Rényi

Um grafo é um par $G = G(V, E)$ de conjuntos V e $E \subseteq V \times V$. Por exemplo, sejam $V = [1, 2, \dots, N]$ o conjunto dos vértices e E o conjunto das arestas (ou elos) do grafo. Um grafo $G' = G'(V', E')$ é um subgrafo de $G = G(V, E)$ se V' é um subconjunto de V e E' é um subconjunto de E . Para dois vértices $v, w \in V$, denotamos $v \longleftrightarrow w$ quando existe um caminho de elos ligando os dois vértices. Por convenção, para qualquer vértice $v \in V$, temos $v \longleftrightarrow v$. Para um grafo $G = G(V, E)$, denotamos a componente conectada de G contendo o vértice v por

$$C(v) = \{x \in V : v \longleftrightarrow x\}.$$

Denotamos o tamanho de $C(v)$ por $|C(v)|$, que corresponde ao número de vértices nesta componente de G . A maior componente conectada G é qualquer componente para qual $|C(v)|$ é maximal, note que a definição não o torna único, tal conjunto de componentes será denotado por $|C_{max}|$, e denotaremos o valor maximal que ele atinge por

$$|C_{max}| = \max\{|C(v)| : v \in V\}.$$

Seja K_N um grafo completo, isto é, o grafo com N vértices no qual existem arestas ligando todos os pares de vértices. Estamos interessados na seguinte estrutura aleatória que pode ser obtida a partir do seguinte procedimento: Tome inicialmente um grafo completo K_N , e elimine cada uma de suas arestas com probabilidade $1 - p$, onde $p \in [0, 1]$. Denominaremos a estrutura aleatória resultante de $ER_p(N)$.

O estudo da estrutura aleatória $ER_p(N)$ foi proposto em Gilbert (1959) e concentrou-se no estudo da existência de caminhos entre dois vértices e no estudo da conexidade de $ER_p(N)$, em função de p . Porém, no mesmo ano os matemáticos húngaros, Paul Erdős e Alfred Rényi, iniciaram um série de artigos contendo inúmeros resultados e conjecturas em relação a estes modelos que atraíram a atenção para o estudo deste tipo de estrutura aleatória, fundando a área de grafos aleatórios. Em particular, no artigo *On the evolution of random graphs* (Erdős e Rényi, 1960), estão alguns dos resultados iniciais mais celebrados como a demonstração da existência de transições de fase para este tipo de estrutura, isto é, dependendo de algum parâmetro determinadas características destas estruturas apresentam um comportamento completamente diferente.

O estudo de Erdős e Rényi concentrou-se, inicialmente, em uma outra estrutura aleatória denotada por $G(N, M)$, isto é, considere o espaço $\Omega_{N, M}$ contendo todos os possíveis grafos G com N vértices e M arestas. Atribua uma medida uniforme sobre este conjunto. A partir daí, eles estudaram diferentes características do modelo quando o número de arestas M varia de 0 a $\frac{N(N-1)}{2}$. Por exemplo, eles demonstraram que existe uma grande diferença no tamanho das componentes de $G(N, M)$, ao redor de $M = \frac{N}{2}$, isto é, para grafos com um grande número de vértices quando estamos abaixo deste número de arestas com probabilidade quase 1 todas as componentes do grafo são pequenas, tendo ordem $O(\log N)$. Já, quando $M > \frac{N}{2}$, existe uma única componente grande, de ordem $O(N)$, e todas as outras componentes de ordem no máximo $O(\log N)$.

Os modelos $ER_p(N)$ e $G(N, M)$ são os modelos clássicos de grafos aleatórios, sendo que o primeiro é conhecido por grafo aleatório binomial e o segundo por grafo aleatório uniforme. Porém, muitas vezes ambos modelos são introduzidos como, grafo aleatório de Erdős-Rényi, o que pode trazer alguma confusão. Entretanto, a confusão é minimizada pela existência de uma equivalência assintótica de algumas propriedades dos modelos quando M está próximo de Np . Não entraremos em maiores detalhes sobre esta equivalência entre os dois modelos, pois aqui ela têm apenas o papel de motivar o estudo do modelo $ER_p(N)$. No entanto, sugerimos ao leitor interessado consultar o capítulo 1 de Jason et al. (2000), no qual não somente esta equivalência é detalhada, como também a própria existência de transição de fase é esclarecida para determinada classe de propriedades. Cabe notar que a noção de grafo aleatório é anterior a estes trabalhos. Em 1947, Paul Erdős utilizou a estrutura $ER_{\frac{1}{2}}(N)$ para abordar um problema em teoria de grafos, para maiores detalhes veja Alon e Spencer (1992).

É fácil ver que o tamanho das componentes da estrutura $ER_p(N)$ crescem com p , isto é, quanto

maior o p maior é o número de vértices nas componentes. Pense na seguinte argumentação por acoplamento. Para cada uma das $\frac{N(N-1)}{2}$ arestas de um grafo completo G_N de N vértices associamos uma variável aleatória uniformemente distribuídas no intervalo zero e um, e independentes entre si. Para uma dada realização ω dessas variáveis uniformes, e a partir de G_N construímos $ER_p(N)(\omega)$ e $ER_{p'}(N)(\omega)$, onde $p < p'$, da seguinte maneira:

Seja a aresta ij de G_N , isto é, a aresta que liga o vértice i ao j , ela estará presente em $ER_p(N)(\omega)$, se a variável uniforme U_{ij} associada a aresta ij é tal que $U_{ij}(\omega) < p$, do mesmo modo, estará em $ER_{p'}(N)(\omega)$ se $U_{ij}(\omega) < p'$. Como $p < p'$, fica claro que todas as arestas de $ER_p(N)$ estão em $ER_{p'}(N)$, e portanto o número de vértices de uma componente em $ER_{p'}(N)$ só podem ser maior ou igual que a mesma componente em $ER_p(N)$.

O seguinte teorema nos dá um resultado de transição de fase em $p \in [0, 1]$ para o grafo $ER_p(N)$. A versão que apresentamos para este resultado é o Teorema 5.4 de Jason et al. (2000). Observamos que para o caso supercrítico, isto é, $\lambda > 1$, é apresentada uma Lei Fraca dos Grandes Números para o tamanho do maior componente deste grafo. Será neste resultado que focaremos o restante do trabalho desta dissertação. Alteramos a notação original deste teorema apenas para deixá-lo na linguagem habitual de probabilidade, ao invés de introduzir a notação assintótica de Jason et al. (2000).

Teorema 2. (Teorema 5.4 de Jason et al. (2000)) *Considere o grafo $ER_p(N)$, no qual $Np = \lambda$, $\lambda > 0$.*

1. *Se $\lambda < 1$, então a maior componente de $ER_p(N)$ tem no máximo $\frac{3}{(1-\lambda)^2} \log N$ vértices com probabilidade tendendo a 1 quando $N \rightarrow \infty$.*
2. *Seja $\lambda > 1$ e $\rho = \rho(\lambda) \in [0, 1]$ a menor solução da equação*

$$e^{\lambda(\rho-1)} = \rho.$$

Então no grafo $ER_p(N)$ o tamanho da maior componente converge em probabilidade para $(1 - \rho)N$ vértices. Além disso, o tamanho da segunda maior componente de $ER_p(N)$ é no máximo de $\frac{16\lambda}{(1-\lambda)^2} \log N$ vértices com probabilidade tendendo a 1 quando $N \rightarrow \infty$.

A existência de transição de fase não é o principal interesse deste trabalho, por isso, sugerimos ao leitor interessado que consulte Jason et al. (2000) ou para uma abordagem mais probabilística em van der Hofstad (2009). Como mencionamos anteriormente, nosso principal interesse será obter para o caso supercrítico um tipo de lei fraca dos grandes números para a trajetória do processo de exploração da componente maximal do grafo de Erdős-Rényi.

Para o leitor interessado em obter um breve resumo sobre os últimos 50 anos de pesquisa destas estruturas aleatórias e sua conexão com outros tópicos em probabilidade, sugerimos o artigo Spencer (2009).

3.2 O algoritmo *Breadth-First Search*

Nesta seção apresentaremos o algoritmo *Breadth-First Search* (BFS), mostraremos como ele pode ser utilizado para verificar o tamanho da componente de um vértice. Posteriormente, exploraremos o algoritmo BFS aplicado ao grafo aleatório Erdős-Rényi. E por último, construiremos um processo estocástico Markoviano a partir desse algoritmo. Nossa apresentação está baseada em van der Hofstad (2009).

Observamos que esta abordagem para o estudo da componente de um grafo aleatório difere da abordagem original de Erdős e Rényi, e iniciou-se com Karp (1990) que utilizou um algoritmo tipo BFS para estudar as características de uma versão dirigida do grafo aleatório de Erdős-Rényi. Segundo Karp, Boris Pittel lhe informou que tal abordagem poderia ser utilizada para obter uma demonstração mais fácil da lei dos grandes números para o tamanho da componenete maximal de $ER_p(N)$. Posteriormente, tal demonstração utilizando o algoritmo BFS apareceu na primeira edição de Alon e Spencer (1992). Em van der Hofstad (2009) e Durrett (2006), aparecem versões diferentes deste resultado utilizando essa abordagem.

O algoritmo *Breadth-First Search*

Seja um grafo $G = G(V, E)$, tal que $V = \{1, \dots, n\}$ e $E \subseteq V \times V$, podemos encontrar uma árvore geradora de uma componente conectada contendo um vértice v deste grafo aplicando o seguinte procedimento: o vértice v está no nível 0, todos os vértices que são adjacentes a v estão no nível 1. Particionaremos os vértices do grafo em conjuntos de vértices em diferentes níveis. Sejam $v_{i1}, \dots, v_{ik}$ os k vértices do nível i . Considere todos os vértices adjacentes ao vértice v_{i1} do nível i que não estão nos níveis $0, 1, \dots, i$. Coloque esses vértices num novo nível $(i + 1)$. Então considere todos os vértices que são adjacentes ao vértice v_{i2} mas que não são adjacentes a vértices nos níveis $0, 1, 2, \dots, i, (i + 1)$. Inclua esses vértices no nível $(i + 1)$. Continue o procedimento até que não existam mais vértices adjacentes ao último nível adicionado que já não sejam adjacentes a vértices deste e dos níveis anteriores. Ao final do processo teremos uma partição dos vértices em diferentes níveis e um conjunto de vértices não utilizados, e caso, tenhamos preservado quais vértices do nível i foram responsáveis pela inclusão de cada um dos vértices no nível $(i + 1)$ temos a árvore geradora da componente. Observe que a soma do número de vértices em todos os níveis equivale ao número de vértices da componente. Este procedimento é o chamado algoritmo *Breadth-First Search*, que denotaremos também por algoritmo BFS, e, ele tem várias aplicações em teoria de grafos.

Nosso objetivo com este algoritmo é explorar as componentes do grafo e descobrir o seu número de vértices. Assim, não precisaremos particionar os vértices em tantas classes como no algoritmo original. Assim, apresentamos esta versão simplificada do algoritmo que particiona os vértices em três classes.

Suponha que queiramos investigar o tamanho da componente do vértice 1, isto é, $|C(1)|$. Para isso, particionaremos os vértices em três classes. Sejam R_k os vértices inativos, A_k ativos e I_k neutros após o k -ésimo passo do algoritmo.

Inicialmente, temos $R_0 = \emptyset$, $A_0 = \{1\}$ e $I_0 = \{2, \dots, N\}$. A cada passo, nós escolhemos um vértice ativo v de maneira arbitrária, por exemplo aquele de menor *label*, e exploramos todos os elos vw , nos quais w pertence ao conjunto dos vértices neutros. Se existe um elo em G conectando o vértice ativo v e algum vértice neutro w , então nós ativamos o vértice w , caso contrário ele permanecerá neutro. Após verificarmos todo o conjunto dos vértices neutros, nós mudamos o status de v para inativo e atualizamos o número de vértices ativos. Quando não existirem mais vértices ativos, isto é, no primeiro instante T em que $A_T = \emptyset$, o processo termina e $|C(1)| = T$. Seja w_k o k -ésimo vértice ativo a ser explorado, e seja X_k o número de vértices neutros w tais que os elos $w_k w \in G$. Seja A_n o número de vértices ativos no passo n . Fazemos um abuso de notação, e continuamos a denotar A_n, I_n e R_n para $|A_n|, |I_n|$ e $|R_n|$, respectivamente. Podemos escrever a seguinte recursão

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_k &= A_{k-1} + X_k - 1 = 1 + X_1 + \dots + X_k - k \end{aligned} \tag{3.1}$$

Note que X_k é o número de vértices que se tornaram ativos devido a exploração do k -ésimo vértice, e após sua exploração, o k -ésimo vértice torna-se inativo. Isto é,

$$\begin{aligned} I_k &= I_{k-1} - X_k = n - 1 - X_1 - \dots - X_k \\ R_k &= R_{k-1} + 1 = k. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assim, se A_{k-1} denota o número de vértices ativos após a exploração do $(k-1)$ -ésimo vértice ativo, por isso, $A_k = A_{k-1} + X_k - 1$ denota o número de vértices ativos após a exploração do k -ésimo vértice ativo. Observe que este algoritmo é válido para explorar qualquer grafo G .

O algoritmo aplicado ao Grafo Aleatório Erdős-Rényi

Considere o grafo aleatório $ER_p(N)$, sabemos que cada um dos $\frac{N(N-1)}{2}$ elos do grafo pode existir, de maneira independente dos demais, com probabilidade p . Assim, o valor do grau de um vértice tem uma distribuição de probabilidades binomial com parâmetros $N-1$ e p .

Porém, quando aplicamos o algoritmo não estamos interessados no grau de um vértice ativo, mas somente saber seu grau dentro do conjunto dos vértices neutros. Assim, ao explorarmos um vértice ativo v , verificamos para cada vértice w do conjunto dos vértices neutros, se o elo vw existe ou não, e lembramos que pela independência ele existirá com probabilidade p . Assim, o valor do grau de um vértice ativo que está sendo explorado depende do número de vértices neutros que existem até o instante da sua exploração. Isto é, quando o k -ésimo vértice ativo é explorado, o número de vizinhos que ele possui no conjunto dos vértices neutros, X_k depende de $I_{k-1} = N - (k-1) - A_{k-1}$. Portanto, condicionando sob A_{k-1} temos,

$$X_k \sim \text{BIN}(N - (k - 1) - A_{k-1}, p). \quad (3.3)$$

O algoritmo prossegue enquanto $A_{t-1} \geq 1$, até o primeiro passo no qual $A_k = 0$, isto é,

$$T = \inf\{k : A_k = 0\} = \inf\{k : X_1 + \dots + X_k = k - 1\}. \quad (3.4)$$

Assim, definimos o processo estocástico Markoviano $(Z_k^N)_{k \geq 0} = (R_n^N, A_n^N, I_n^N)_{n \geq 0}$, com espaço de estados $E^N = \{z = (r, a, i) \in \mathbb{Z}^3 : r, i \geq 0 \text{ e } r + a + i = N\}$ e as seguintes probabilidades de transição:

Sejam $z = (r, a, i) \in E^N$ e $l_{x|z} = (1, x - 1, -x)$, $x = 0, 1, \dots, i$.

Para todo $z \in E^N$ temos as seguintes probabilidades de transição,

$$\mathbb{P}(Z_{k+1}^N = z + l_{x|z} \mid Z_k^N = z) = \binom{i}{x} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{i-x};$$

e para todo $l \neq l_{x|z}$,

$$\mathbb{P}(Z_{k+1}^N = z + l \mid Z_k^N = z) = 0, k \geq 0.$$

Estamos interessados no comportamento da sequência de processos $(Z_n^N)_{n \geq 0}$ com estado inicial $Z_0^N = (0, 1, N - 1)$, $N \geq 1$. Para cada N denominaremos o processo por processo de exploração do grafo $ER_p(N)$, ou somente, por processo de exploração.

Também definimos para cada um dos processos da sequência o seguinte tempo de parada

$$T^N = \inf\{k : A_k^N = 0\},$$

lembrando que tal tempo de parada corresponde ao tamanho da componente explorada.

Realizamos 10.000 simulações deste processo para o grafo $ER_{\frac{2}{10000}}(10000)$ até o instante T^N , obtendo o tamanho da componente explorada para cada umas das realizações do processo. A figura 3.1 apresenta um histograma com os tamanhos das componentes encontradas. Observamos que o tamanho da componente aparece reescalado pelo número de vértices do grafo. Observe, que temos um comportamento dicotômico, isto é, parecem existir somente duas classes de componentes.

Esta dicotomia já era esperado tendo em vista o Teorema 2, além disso, observamos que em nossas simulações o maior dos componentes pequenos encontrado tinha apenas 14 vértices.

Tal comportamento está relacionado ao fato de que o processo de exploração de uma componente do grafo $ER_p(N)$ é dominado estocasticamente por um processo de ramificação. Abaixo

Figura 3.1: Histograma tamanho da componente explorada.

esclarecemos algumas fatos sobre esta relação.

O processo de ramificação utilizando o algoritmo BFS

O processo de ramificação é um processo estocástico que representa um modelo simples para o crescimento de uma população. Nesta seção estamos seguindo van der Hofstad (2009). Usualmente, tal processo é apresentado e estudado por meio de análise das gerações de indivíduos desse processo ao longo do tempo, e, pode ser resumida da seguinte maneira no caso mais simples. Suponha que cada indivíduo independentemente dá origem a um número aleatório de filhos (outros indivíduos) com a mesma distribuição de probabilidades. Denotamos tal distribuição por $\{p_l\}_{l=0}^{\infty}$, onde

$$p_l := \mathbb{P}(\text{Indivíduo tem } l \text{ filhos}).$$

Denotamos Z_n o número de indivíduos na n -ésima geração e consideramos $Z_0 = 1$. Então Z_n satisfaz a seguinte relação

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{i,n-1},$$

onde $\{X_{i,j}\}_{i,j \geq 1}$ é um arranjo duplamente infinito de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d). Geralmente, nós denotamos apenas X para a variável aleatória representando a distribuição do tamanho da prole; nesse caso $X \sim X_{i,j}$ para todo $i, j \geq 0$.

O seguinte teorema é um dos resultados mais conhecidos e utilizados sobre este processo. Por tratar-se de um resultado bastante conhecido, omitimos a demonstração de tal resultado. Entretanto, referimos o leitor ao capítulo 4 de van der Hofstad (2009), ou a qualquer bom livro de

introdução aos processos estocásticos.

Definimos a probabilidade de extinção do processo da seguinte maneira

$$\rho := \mathbb{P}(\exists n : Z_n = 0).$$

Teorema 3. *Para o processo de ramificação com prole X i.i.d, temos $\rho = 1$ quando $\mathbb{E}(X) < 1$, enquanto $\rho < 1$ quando $\mathbb{E}(X) > 1$. Quando $\mathbb{E}(X) = 1$ e $\mathbb{P}(X = 1) < 1$, então $\rho = 1$. Além disso, seja G_X a função geradora de probabilidade da variável aleatória X , isto é,*

$$G_X(s) := \mathbb{E}(s^X),$$

então a probabilidade de extinção ρ do processo é a menor solução em $[0, 1]$ de

$$\rho = G_X(\rho).$$

Em especial, denotaremos $\rho(\lambda)$ a probabilidade de extinção de um processo de ramificação com prole com distribuição Poisson(λ). Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson de taxa $\lambda > 0$. Então a função geradora de probabilidade de X é

$$\mathbb{E}(s^X) = e^{\lambda(s-1)}; \quad s \geq 0.$$

Portanto, a probabilidade de extinção $\rho(\lambda)$ de um processo de ramificação com prole i.i.d conforme uma variável aleatória Poisson de taxa $\lambda > 0$ é a menor solução em $[0, 1]$ de

$$s = e^{\lambda(s-1)}. \tag{3.5}$$

Na Tabela 3.1, seguem alguns valores aproximados de $\rho(\lambda)$.

λ	$\rho(\lambda)$
1.5	0.417188
2.0	0.203188
2.5	0.107355
3.0	0.059520
4.0	0.019827

Tabela 3.1: Valores de $\rho(\lambda)$.

Este resultado também é útil quando se está estudando o comportamento do grafo de Erdős-Rényi, porém, uma outra formulação do processo de ramificação nos permite fazer essa comparação entre os dois processos mais facilmente. Nesta outra formulação ao invés de estudarmos o processo focando nas gerações de indivíduos, exploramos a prole de cada indivíduo. Essa abordagem para o

processo de ramificação foi proposta em Harris (1952). Os probabilistas conhecem tal abordagem por formulação de passeio aleatório para a ramificação. Porém, tendo em mente que um processo de ramificação gera uma árvore aleatória, isto é, um grafo aleatório conexo e sem ciclos, temos que a idéia de Harris equivale a aplicar o algoritmo BFS a esta estrutura aleatória, assim, como fizemos ao grafo de Erdős-Rényi.

Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias i.i.d com distribuição de X da abordagem tradicional. Definimos $A_0, A_1, \dots$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_i &= A_{i-1} + X_i - 1 = X_i + \dots + X_1 - (i - 1). \end{aligned}$$

Seja $T = \inf\{k : A_k = 0\} = \inf\{k : X_1 + \dots + X_k = k - 1\}$.

Caso não exista tal valor de k , temos que $T = \infty$. Temos a seguinte interpretação para o modelo. Suponha que o indivíduo (vértice) v está na raiz desta árvore, isto é, é o indivíduo da geração zero, então se $|C(v)| = T < \infty$, temos que o tamanho da família originada por v é T , isto significa que tal processo de ramificação foi extinto. E caso $T = \infty$, temos que a família originada por v sobreviveu.

3.3 Resultados auxiliares

Comparando T e $|C(v)|$.

Abaixo apresentamos dois resultados de van der Hofstad (2009) que comparam T e $|C(v)|$. A comparação é muito simples, uma vez que ambos apresentam uma mesma estrutura, e a única diferença está no fato que as variáveis aleatórias X_i do processo de ramificação são independentes e possuem distribuição Binomial de parâmetros N e p , enquanto no processo de exploração de $ER_p(N)$ tais variáveis são dependentes e possuem uma distribuição Binomial de parâmetros I_{i-1} e p quando condicionadas no passo anterior do processo. Referimos o leitor a van der Hofstad (2009) para as demonstrações que não são complicadas.

Intuitivamente, dada a descrição de ambos processos de exploração é fácil acreditar que o processo de exploração de $|C(v)|$ é dominado pelo processo de ramificação, uma vez que os incrementos X_k do último são variáveis independentes e identicamente distribuídas conforme uma binomial de parâmetros $N - 1$ e p para todo $k \geq 0$. Enquanto, no processo de exploração de $ER_p(N)$ o k -ésimo incremento X_k tem distribuição binomial com parâmetros i e p , quando o processo esta condicionado em $\{Z_{k-1}^N = (v, a, i)\}$, isto é, $I_{k-1} = i$. Além disso, a sequência $\{I_k\}_{k \geq 0}$ é decrescente, e, $I_0 = N - 1$. Desta forma fica evidente que o tamanho da família de uma ramificação binomial de parâmetros $N - 1$ e p domina estocásticamente o tamanho da componente de $ER_p(N)$.

Esta afirmação é o conteúdo do seguinte teorema de van der Hofstad (2009).

Teorema 4. (*Teorema 4.2 van der Hofstad (2009)*)

Para cada $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}_{Np}(|C(v)| \geq k) \leq \mathbb{P}_{N,p}(T_{N,p} \geq k),$$

onde $T_{N,p}$ é o tamanho total da família de um processo de ramificação com prole binomial de parâmetros N e p .

Observamos que este resultado significa que o tamanho total da família de tal processo de ramificação domina estocasticamente o tamanho de componente do grafo $ER_p(N)$.

O próximo resultado fornece uma cota inferior para a probabilidade da componente ser maior que um determinado valor k , porém, tal resultado não fornece uma dominância estocástica pois depende do valor de k . Este resultado também estabelece uma comparação com um processo de ramificação.

Teorema 5. (*Teorema 4.3 van der Hofstad (2009)*)

Para todo $k \in [1, \dots, N]$,

$$\mathbb{P}_{Np}(|C(v)| \geq k) \geq \mathbb{P}_{N-k,p}(T_{N-k,p} \geq k),$$

onde $T_{N-k,p}$ é o tamanho total da família de um processo de ramificação com prole binomial de parâmetros $N - k$ e p .

As demonstrações dos Teoremas 4 e 5 estão baseados no acoplamento dos processos de exploração da componente de $ER_p(N)$ e de processos de ramificação convenientes.

O tamanho da componente

Agora, enunciaremos duas proposições de van der Hofstad (2009) que ilustram o comportamento dicotômico do processo de exploração do grafo aleatório $ER_p(N)$, quando $p = \frac{\lambda}{N}$ e $\lambda > 1$. A Proposição 1 mostra que a probabilidade da componente explorada ter um tamanho menor que um determinado valor k_N tende $\rho(\lambda)$, a probabilidade de extinção de um processo de ramificação com prole Poisson de parâmetro λ .

Posteriormente, enunciamos a Proposição 2 que fornece uma cota superior que decai exponencialmente em k_N para a probabilidade de que o tamanho da componente explorada esteja no intervalo $[k_N, \alpha N]$, onde $0 < \alpha < 1 - \rho(\lambda)$. Tal resultado tem como corolário que com probabilidade tendendo a 1 a componente não pertence a tal intervalo. Logo, se condicionarmos que $\{|C(v)| \geq k_N\}$, um evento com probabilidade positiva, temos que o tamanho da componente atinge pelo menos αN .

com probabilidade tendendo a 1. Abaixo seguem estes resultados.

Proposição 1. (*Proposição 4.9 de van der Hofstad (2009).*)

Fixe $\lambda > 1$ e deixe $N \rightarrow \infty$. Então para $k_N \geq \beta \log N$, onde $\beta > I_\lambda^{-1}$, onde $I_\lambda = \lambda - 1 - \log \lambda$,

$$\mathbb{P}_\lambda(|C(v)| \geq k_N) = 1 - \rho(\lambda) + O\left(\frac{k_N}{N}\right). \quad (3.6)$$

Ou seja, quando $N \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}_\lambda(|C(v)| \geq k_N) = 1 - \rho(\lambda).$$

Proposição 2. (*Proposição 4.10 de van der Hofstad (2009).*)

Fixe $\lambda > 1$ e deixe $k_N \rightarrow \infty$. Então, para qualquer $\alpha < (1 - \rho(\lambda))$, existe um $J = J(\alpha, \lambda) > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_\lambda(k_N \leq |C(v)| \leq \alpha N) \leq C e^{-k_N J}$$

A Proposição 2 tem o seguinte corolário.

Corolário 1. (*Corolário 4.11 de van der Hofstad (2009).*)

Fixe $k_N = K \log N$ e $\alpha < 1 - \rho(\lambda)$. Então para K suficientemente grande, e com probabilidade pelo menos de $1 - N^{-\delta}$, não existem componentes com tamanho entre k_N e αN . Onde $\delta = \sqrt{2\lambda J}$.

Particularmente, prova-se que $\mathbb{P}(\exists w : k_N \leq |C(w)| \leq \alpha N) = O(N^{-\delta})$.

Estas proposições fazem parte da demonstração de van der Hofstad (2009) da lei dos grandes números para o tamanho da componente maximal do grafo de Erdős-Rényi (Teorema 4.8 de van der Hofstad (2009)). Cabe notar que a Proposição 1 é comum a outras demonstrações alternativas deste resultado, por exemplo, Jason et al. (2000) e Durrett (2006). Porém, a Proposição 2 parece ser particular a demonstração de van der Hofstad (2009). Este resultado é essencial a demonstração que pretendemos obter utilizando o Teorema 1, seguindo o modelo sugerido em Darling e Norris (2008), isto é, deixar a componente explorada atingir um determinado tamanho $O(N)$ e aplicar o teorema da convergência a partir deste instante. Para isso, introduziremos a Proposição 3 que provaremos combinando os resultados de van der Hofstad (2009). Seu papel é fornecer a probabilidade com a qual a componente explorada atinge um determinado tamanho $O(N)$, e qual o estado em que o processo se encontra no instante em que atinge este tamanho.

A seguir, introduzimos esta proposição.

Dado $\lambda > 1$, fixamos $0 < \alpha < 1 - \rho(\lambda)$. Definimos o seguinte tempo de parada para cada uma das cadeias de Markov $(Z_n^N)_{n \geq 0}$, $N \geq 0$,

$$g_{\alpha N}^N = \inf\{n \geq 0 : R_n^N \geq \alpha N \text{ e } T^N \geq n\}.$$

Observação 3. *Observe que dada a dinâmica do processo existem apenas dois valores possíveis para $g_{\alpha N}^N$, $\lceil \alpha N \rceil$ ou $+\infty$.*

Proposição 3. *Fixado $\lambda > 1$. Para cada $0 < \alpha < 1 - \rho(\lambda)$ temos*

(i) $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(g_{\alpha N}^N < \infty) = 1 - \rho(\lambda),$

(ii) *Condicionando em $\{g_{\alpha N}^N < \infty\}$,*

$$\frac{Z_{g_{\alpha N}^N}^N}{N} \xrightarrow{P} \left(\alpha, 1 - \alpha - e^{-\lambda\alpha}, e^{-\lambda\alpha} \right),$$

para $N \rightarrow \infty$.

Demonstração

(i)

Primeiramente, observamos que $\{g_{\alpha N}^N < \infty\} = \{|C(v)| \geq \alpha N\}$. Seja k_N como na Proposição 1. Utilizando o Corolário 1, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|C(v)| \geq \alpha N \mid |C(v)| \geq k_N) &= 1 - \mathbb{P}(|C(v)| < \alpha N \mid |C(v)| \geq k_N) \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(k_N \leq |C(v)| < \alpha N)}{\mathbb{P}(|C(v)| \geq k_N)} \\ &\geq 1 - \frac{\mathbb{P}(\exists w : k_N \leq |C(w)| \leq \alpha N)}{\mathbb{P}(|C(v)| \geq k_N)} \\ &= 1 - O\left(N^{-\delta}\right). \end{aligned}$$

Assim, podemos obter que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(g_{\alpha N}^N < \infty) &= \mathbb{P}(|C(v)| \geq \alpha N) \\
&= \mathbb{P}(|C(v)| \geq \alpha N \cap |C(v)| \geq k_N) \\
&= \mathbb{P}(|C(v)| \geq \alpha N \mid |C(v)| \geq k_N) \cdot \mathbb{P}(|C(v)| \geq k_N).
\end{aligned}$$

Obtemos (i) aplicando a Proposição 1 para N suficientemente grande.

(ii)

Primeiramente, condicionamos a cadeia de Markov $(Z_n^N)_{n \geq 0}$ no evento $\{g_{\alpha N}^N < \infty\}$. Lembrando que $T^N = \inf\{k : A_k^N = 0\}$ e que para $n \leq T^N$, $R_n^N = n$. Temos que, $R_{g_{\alpha N}^N}^N = g_{\alpha N}^N = \lceil \alpha N \rceil$ com probabilidade 1.

Assim, segue que com probabilidade 1,

$$\frac{R_{g_{\alpha N}^N}^N}{N} \rightarrow \alpha,$$

para $N \rightarrow \infty$.

Agora, assumamos que I_n^N tem distribuição $\text{Bin}\left(N-1, \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^n\right)$ para $n \leq T^N$ (tal fato será demonstrado posteriormente). Então podemos mostrar que

$$\frac{I_{g_{\alpha N}^N}^N}{N} \xrightarrow{P} e^{-\lambda\alpha},$$

para $N \rightarrow \infty$.

De fato, pela desigualdade de Chebyshev temos que $\forall \delta > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{I_{g_{\alpha N}^N}^N}{N} - \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{g_{\alpha N}^N}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\mathbb{V}(I_{g_{\alpha N}^N}^N)}{\delta^2 \cdot N^2} \rightarrow 0,$$

para $N \rightarrow \infty$.

Observamos que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{g_{\alpha N}^N} = e^{-\lambda\alpha}$. Lembramos que o espaço de estados E^N é tal que $R_n^N + A_n^N + I_n^N = N$, para $n \geq 0$.

Logo, pelo Lema 3 (Apêndice) temos que

$$\frac{A_{g_{\alpha N}}^N}{N} \xrightarrow{P} 1 - \alpha - e^{-\lambda\alpha},$$

para $N \rightarrow \infty$.

Para concluir a prova lembramos que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, temos que $\|x\| \leq |x|_S$. Então temos que $\forall \delta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left\| \frac{Z_{g_{\alpha N}}^N}{N} - (\alpha, 1 - \alpha - e^{-\lambda\alpha}, e^{-\lambda\alpha}) \right\| > \delta \right) &\leq \mathbb{P} \left(\left| \frac{Z_{g_{\alpha N}}^N}{N} - (\alpha, 1 - \alpha - e^{-\lambda\alpha}, e^{-\lambda\alpha}) \right|_S > \delta \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\left| \frac{R_{g_{\alpha N}}^N}{N} - \alpha \right| > \frac{\delta}{3} \right) + \mathbb{P} \left(\left| \frac{A_{g_{\alpha N}}^N}{N} - (1 - \alpha - e^{-\lambda\alpha}) \right| > \frac{\delta}{3} \right) + \mathbb{P} \left(\left| \frac{I_{g_{\alpha N}}^N}{N} - e^{-\lambda\alpha} \right| > \frac{\delta}{3} \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $N \rightarrow \infty$ pelos resultados provados anteriormente. Observamos que a velocidade de convergência é pelo menos do tipo $O(N^{-1})$. Assim, provamos (ii).

Agora, mostraremos que $I_n^N \sim \text{Bin} \left(N - 1, \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^n \right)$ para $n \leq T^N$. Esta demonstração aparece em várias referências, por exemplo em van der Hofstad (2009). A demonstração será por indução em n , isto é, o número de passos da cadeia de Markov. Para isto precisaremos do Lema 6 (Apêndice), isto é, se $N \sim \text{Bin}(k, p)$ e $M \sim \text{Bin}(N, q)$, então $M \sim \text{Bin}(k, qp)$.

Além disso, lembramos que $I_n^N = N - 1 - X_1 - \dots - X_n$, onde $X_i \sim \text{Bin} \left(I_{i-1}^N, \frac{\lambda}{N} \right)$ e $I_0^N = N - 1$.

Para $n = 1$, temos $I_1^N = N - 1 - X_1$, como $X_1 \sim \text{Bin} \left(N - 1, \frac{\lambda}{N} \right)$, logo, temos que $I_1^N \sim \text{Bin} \left(N - 1, 1 - \frac{\lambda}{N} \right)$.

Suponha que para $n = k$, $I_k^N \sim \text{Bin} \left(N - 1, \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^k \right)$. Temos que

$I_{k+1}^N = N - 1 - X_1 - \dots - X_{k+1} = I_k^N - X_{k+1}$, como $X_{k+1} \sim \text{Bin} \left(I_k^N, \frac{\lambda}{N} \right)$ temos que condicionando em I_k^N , $I_{k+1}^N \sim \text{Bin} \left(I_k^N, \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right) \right)$. Logo, aplicado o Lema 6, temos que

$$I_{k+1}^N \sim \text{Bin} \left(N - 1, \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{k+1} \right).$$

Portanto, o resultado segue por indução. $\square$

Observação 4. No Apêndice incluímos um esboço da demonstração de van der Hofstad van der Hofstad (2009) da lei fraca dos grandes números para a componente maximal do grafo de Erdős-

Rényi, caso supercrítico. Esta demonstração utiliza alguns dos resultados de van der Hofstad (2009) enunciados neste capítulo, além disso, enunciamos os outros resultados utilizados para completar a demonstração. O resultado é o Teorema 7 do Apêndice.

Capítulo 4

Limite do Fluido

No capítulo anterior apresentamos o grafo $ER_{\frac{\lambda}{N}}(N)$. Posteriormente, utilizamos o algoritmo BFS para obter um processo estocástico para a exploração da componente de um vértice v de $ER_{\frac{\lambda}{N}}(N)$, escolhido ao acaso. Vimos que para $\lambda > 1$ e $N \geq 1$ fixados, o processo de exploração obtido era uma cadeia de Markov com estado inicial $Z_0^N = (0, 1, N - 1)$. Observamos que para N suficientemente grande a sequência de processos de exploração indexados em N exibiu um comportamento dicotômico, isto é, o processo de exploração pode gerar componentes de ordem $O(\log N)$ ou $O(N)$. O teorema de convergência apresentado neste trabalho permite apenas a obtenção de um limite quando o processo é de ordem $O(N)$. Neste caso, como observado em Darling e Norris (2008), deve-se proceder aproximando o processo até que este atinja um tamanho de ordem $O(N)$, e, então utilizar o teorema da convergência a partir deste ponto. Para fazer a aproximação, Darling e Norris (2008) sugere a abordagem de Ball et al. (2006). Em síntese, essa abordagem consiste em aproximar o processo ainda em seus estágios iniciais por um processo de ramificação e mostrar que a probabilidade da componente atingir pelo menos um tamanho k_N tende à probabilidade de sobrevivência de um processo de ramificação conveniente. Disso trata-se a Proposição 1 que tem um papel análogo ao Lema 3.1 de Ball et al. (2006). Posteriormente, deve-se mostrar que sob o evento da Proposição 1, o processo pode atingir com alta probabilidade um tamanho de pelo menos $O(N)$, sendo este o conteúdo da Proposição 3 que tem uma papel análogo ao Teorema 3.3 de Ball et al. (2006) em nosso contexto. A demonstração da Proposição 3 segue da combinação das Proposições 1, 2 e do Corolário 1, cabe notar que o último resultado é essencial para utilizarmos uma abordagem semelhante a Ball et al. (2006).

Neste capítulo, fixado um $\lambda > 1$, escolheremos um $0 < \alpha < 1 - \rho(\lambda)$ e, condicionado no evento em que $\{g_{\alpha N}^N < \infty\}$, prosseguiremos a abordagem sugerida por Darling e Norris (2008) aplicando o teorema da convergência a partir do instante em que a cada uma das cadeias de Markov $(Z_n^N)_{n \geq 0}$ indexadas em $N \geq 1$, atinge $g_{\alpha N}^N$ passos. Assim, obteremos o limite do fluido para o processo de exploração nos moldes do Teorema 1.

A fim de motivar o leitor, exemplificamos o resultado deste trabalho por meio da figura 4.1 que apresenta duas simulações do processo de exploração comparadas com seus respectivos limites do

Figura 4.1: Simulação de $ER_{\frac{2}{1000}}(1000)$ e $\alpha = 0.05$; $ER_{\frac{4}{1000}}(1000)$ e $\alpha = 0.01$, respectivamente.

fluido e apresentamos as equações do limite do fluido que são obtidas em função de λ e α .

Fixado $\lambda > 1$ e $0 < \alpha < 1 - \rho(\lambda)$. Veremos que o limite do fluido $(y[t])_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}}$ do processo de exploração é dado pelas seguintes equações.

$$y[t] = (r[t], a[t], i[t]) = (\alpha + t, 1 - (t + \alpha) - e^{-\lambda(\alpha+t)}, e^{-\lambda(\alpha+t)});$$

$$y[0] = (\alpha, 1 - \alpha - e^{-\lambda\alpha}, e^{-\lambda\alpha}) \text{ e } 0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha},$$

onde $\zeta_{\lambda, \alpha}$ é a menor raiz positiva t_0 de $a[t] = 0$. É fácil ver que, $\zeta_{\lambda, \alpha} = 1 - \rho(\lambda) - \alpha$.

Mostraremos que condicionando em $\{g_{\alpha N}^N < \infty\}$, temos que $\forall \delta > 0$,

Resultado 1.

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t]\| > \delta \right) = O(N^{-1}), \quad (4.1)$$

onde $(Y_t^N)_{t \geq 0}$ e σ^N serão detalhados abaixo.

A seguir um breve roteiro sobre a continuação deste capítulo. Primeiramente, apresentaremos a sequência de processos e suas características da mesma forma como procedemos no Exemplo 1. Em segundo lugar, apresentaremos mais alguns detalhes sobre o martingal $(M_t^N)_{t \geq 0}$ e seu papel na obtenção do resultado. Posteriormente, verificaremos as Condições 1, 2 e 3 do Teorema 1 e obtaremos o limite do fluido para processo de exploração aplicando a argumentação da demonstração do Teorema 1 ao nosso problema. Optamos por esta estratégia ao invés de simplesmente apresentar uma cópia da demonstração do Teorema 1. Na verdade, nossa demonstração é um pouco mais

curta pois utilizamos um corolário do Teorema da parada opcional para submartingais contínuas a direita de Seppäläinen (2003). Veja a Observação 5.

4.1 O Processo e suas características

Para $N \geq 1$, definimos uma sequência de processos estocásticos $(Z_n^N)_{n \geq 0} \in \mathbb{Z}^3$ que descrevem o processo de exploração de uma componente do grafo $ER_p(N)$ por meio do algoritmo BFS.

$$Z_n^N = (R_n^N, A_n^N, I_n^N). \quad (4.2)$$

O processo $(Z_n^N)_{n \geq 0}$ é um processo Markoviano a tempo discreto com espaço de estados o conjunto $E^N = \{z = (r, a, i) \in \mathbb{Z}^3 : 0 \leq r, a, i \leq N, r + a + i = N\}$. Trabalharemos com o processo reescalado por N , o número de vértices do grafo, isto é,

$$\tilde{Z}_n^N = \left(\frac{R_n^N}{N}, \frac{A_n^N}{N}, \frac{I_n^N}{N} \right) = (\tilde{R}_n^N, \tilde{A}_n^N, \tilde{I}_n^N). \quad (4.3)$$

Ou seja, estaremos trabalhando com proporções de vértices em cada uma das três classes, portanto o espaço de estados do processo $\tilde{Z}_n^N$ é $\tilde{E}^N = \{z = (r, a, i) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r, a, i \leq 1, r + a + i = 1\}$.

Para cada um dos processos $\tilde{Z}_n^N$ estaremos interessados na média e variância de seus incrementos quando o processo está condicionado em $\tilde{Z}_{n-1}^N$:

Se $\tilde{A}_{n-1}^N \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{R}_n^N - \tilde{R}_{n-1}^N \mid \tilde{Z}_{n-1}^N = (r, a, i)) &= \frac{1}{N}; \\ \mathbb{E}(\tilde{A}_n^N - \tilde{A}_{n-1}^N \mid \tilde{Z}_{n-1}^N = (r, a, i)) &= \frac{\lambda i}{N} - \frac{1}{N}; \\ \mathbb{E}(\tilde{I}_n^N - \tilde{I}_{n-1}^N \mid \tilde{Z}_{n-1}^N = (r, a, i)) &= -\frac{\lambda i}{N}. \end{aligned}$$

Temos as seguintes variâncias

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\tilde{R}_n^N - \tilde{R}_{n-1}^N \mid \tilde{Z}_{n-1}^N = (r, a, i)) &= 0; \\ \mathbb{V}(\tilde{A}_n^N - \tilde{A}_{n-1}^N \mid \tilde{Z}_{n-1}^N = (r, a, i)) &= \frac{\lambda i}{N^2} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right); \\ \mathbb{V}(\tilde{I}_n^N - \tilde{I}_{n-1}^N \mid \tilde{Z}_{n-1}^N = (r, a, i)) &= \frac{\lambda i}{N^2} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right). \end{aligned}$$

Denotamos por $\mu^N[z]$ o vetor de médias dos incrementos e $\Sigma^N[z]$ a matriz de covariância dos incrementos do processo $\tilde{Z}_n^N$ quando condicionado em $\tilde{Z}_{n-1}^N = z$, onde $z \in \tilde{E}^N$. Seja $\Sigma_D^N[z] = \text{diag}(\Sigma^N[z])$ o vetor de variâncias do processo, isto é, contendo a diagonal da matriz de covariância do processo.

O processo a tempo contínuo e o martingal $(M_t^N)_{t \geq 0}$

A seguir apresentaremos a construção de uma sequência de cadeias de Markov a tempo contínuo a partir da sequência de processos $(Z_n^N)_{n \geq 0}$ condicionados em $\{g_{\alpha N}^N < \infty\}$, $N \geq 1$. Para maiores detalhes sobre esta construção sugerimos o apêndice de Darling e Norris (2008) ou o capítulo 12 de Kallenberg (2002).

Seja $(Q^N[t])_{t \geq 0}$ um processo de Poisson com taxa $c^N = N$ e seja τ_n^N o instante no qual ocorre o n -ésimo evento do processo $(Q^N[t])_{t \geq 0}$. Sabemos que o tempo entre o $(n+1)$ -ésimo e o n -ésimo evento tem uma distribuição exponencial de média $\frac{1}{N}$.

Agora, definimos o seguinte processo Markoviano a tempo contínuo $(Y_t^N)_{t \geq 0} = \left(\tilde{Z}_{g_{\alpha N}^N + Q^N[t]}^N \right)_{t \geq 0}$. Note que os processos realizam os mesmos incrementos, $Y_{\tau_n^N}^N = \tilde{Z}_{g_{\alpha N}^N + n}^N$. Assim, temos que

$$Y_0^N = \tilde{Z}_{g_{\alpha N}^N}^N,$$

que pela Proposição 3 converge em probabilidade para $(\alpha, 1 - \alpha - e^{-\lambda\alpha}, e^{-\lambda\alpha})$ quando $N \rightarrow \infty$.

Definimos também para cada estado $z \in \tilde{E}^N$ de nosso processo, a seguinte função de *drift*

$$b^N[z] = c^N[z] \mu^N[z]. \quad (4.4)$$

A partir da função de *drift* definimos o processo estocástico $(C_t^N)_{t \geq 0}$,

$$C_t^N := Y_0^N + \int_0^t b^N[Y_{s-}^N] ds.$$

O processo $(C_t^N)_{t \geq 0}$ é o compensador do processo $(Y_t^N)_{t \geq 0}$, ele é importante pois a diferença entre o processo e seu compensador, isto é,

$$M_t^N = Y_t^N - C_t^N, \quad (4.5)$$

que aparecerá na demonstração da convergência do processo. Cabe notar que por construção os processos $(M_t^N)_{t \geq 0}$ são contínuos a direita com limite a esquerda, e $M_0^N = 0$. O valor do processo nos instantes de salto de $(Q^N[t])_{t \geq 0}$ são

$$M_{\tau_n^N}^N = X_n^N - X_0^N - \sum_{i=1}^n (\tau_i^N - \tau_{i-1}^N) b^N[X_{i-1}^N]. \quad (4.6)$$

A diferença (4.5) define um processo que é um martingal sob certas condições bem gerais. Para este resultado geral sugerimos ao leitor o Lema 19.21 do capítulo 19 de Kallenberg (2002). Em Darling (2002), tal resultado não é assumido, e esta é a origem da Condição 2 do Teorema 1. Sob estas condições o autor demonstra que tal processo é um martingal quadrado integrável e

que a desigualdade (4.9) vale. Este é o conteúdo da Proposição 4, ela nos permitirá mostrar que $\mathbb{P}(\sup_{t \leq u} \|M_t^N\|) \rightarrow 0$, quando $N \rightarrow \infty$, o que é essencial na obtenção do resultado do limite do fluído. Lembramos que em Darling (2002) um dos objetivos é apresentar um resultado de limite do fluído mais acessível. Assim, o autor utilizando apenas a desigualdade de Chebyshev e a Proposição 4, mostra que a velocidade de convergência é pelo menos de $O(N^{-1})$. Em versões mais sofisticadas deste resultado, por exemplo Darling e Norris (2008), o resultado é obtido de para uma classe menos restrita de processos e com convergência com velocidade exponencial.

Proposição 4. (*Proposição 2.4 de Darling (2002)*)

Assuma que existem constantes C_1 e C_2 , tais que

$$\sup_{x \in E^N} \{ \text{Traço}[\sum[x]] + \|\mu^N[x]\|^2 \} \leq C_1; \quad (4.7)$$

$$\sup_{x \in E^N} c^N[x] \leq C_2. \quad (4.8)$$

Então $(M_t^N)_{t \geq 0}$ é um vetor martingal quadrado-integrável, e para cada $u > 0$, e cada $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq u} \|M_t^N\|^2 \geq \delta) \leq \min_{n > 1} \left\{ \mathbb{P}(\xi_n < u) + \frac{nC_1}{\delta} \right\}. \quad (4.9)$$

Onde ξ_n é uma variável aleatória com distribuição Gama de parâmetros n e C_2 .

Apesar da importância de tal resultado na demonstração do Teorema 1, preferimos não apresentar a demonstração de tal resultado aqui, referindo o leitor a Darling (2002). A demonstração deste resultado é um pouco longa, ocupando três páginas do original, duas das quais são dedicadas a mostrar que $(M_t^N)_{t \geq 0}$ é um martingal quadrado-integrável. Posteriormente, utiliza-se uma desigualdade maximal para submartingais (Seppäläinen, 2003) para se obter (4.9). Este tipo de desigualdade pode ser utilizado neste caso, pois o processo é quadrado integrável. Observamos, novamente, que (4.7) e (4.8) são suficientes para obtermos o fato que o processo é quadrado-integrável, mas não são necessárias para se obter a propriedade de martingal como observado anteriormente.

4.2 Condições para convergência

Para $N \geq 1$, temos a sequência de processos de Markov $(\tilde{Z}_n^N)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\tilde{E}^N$, nos quais os incrementos tem média e covariância dadas por $\mu^N[z]$ e $\sum^N[z]$, respectivamente, e seu processo associado a tempo contínuo, $(Y_t^N)_{t \geq 0}$, com taxa de salto c^N .

Seja $D = \{z = (r, a, i) \in \mathbb{R}^3 : r, i \geq 0\}$, observe que $D \supseteq \cup_{N \geq 0} \tilde{E}^N$. Definiremos o conjunto aberto $S \subseteq D$, no qual a sequência dos processos irá convergir. Assim, como estamos interessados

na convergência da trajetória do algoritmo BFS durante a exploração da componente gigante, o conjunto de interesse para a trajetória é $S = \{z = (r, a, i) \in D : a > 0\}$.

Seja

$$\sigma^N = \inf \{t \geq 0 : Y_t^N \notin S\}.$$

Isto é, estamos interessados em acompanhar as trajetórias até o primeiro instante no qual elas abandonam S , pois este coincide com o primeiro instante de ordem N no qual $A_n = 0$ quando terminamos de explorar a componente gigante do grafo $ER_{\frac{\lambda}{N}}(N)$. Definimos também $S^N = S \cap \tilde{E}^N$.

Primeiramente, mostraremos que a sequência de processos de exploração satisfazem as Condições 1, 2 e 3 do Teorema 1. Ao final ao invés de demonstrar o teorema optamos por mostrar como estas condições implicam o resultado do Teorema 1 no caso do processo de exploração. A demonstração do Teorema 1, segue da mesma argumentação.

Estamos considerando que a condição inicial de cada uma das cadeias de Markov da sequência como a variável aleatória $\tilde{Z}_{g_{\alpha N}}^N$ condicionada em $\{g_{\alpha N}^N < \infty\}$. Assim, temos pela Proposição 3 que a condição 1 está satisfeita.

Para cada $N \geq 1$, temos a seguinte função de *drift*

$$b^N[z] = (1, \lambda i - 1, -\lambda i), z = (r, a, i) \in S^N. \quad (4.10)$$

A condição exigida pelo teorema é que exista um campo vetorial $b : D \rightarrow R^3$, que seja Lipschitz em D , na verdade somente os valores em $\bar{S}$ são relevantes, e tal que

$$\sup_{z \in S^N} \|b^N[z] - b[z]\| \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Esta condição também é satisfeita porque $b^N[z]$ é Lipschitz em D .

$$\|b^N[z] - b^N[x]\| \leq 2\lambda \|z - x\|, \quad \forall z, x \in D, \quad \forall N \geq 1. \quad (4.12)$$

Assim, podemos tomar $b[z] = (1, \lambda i - 1, -\lambda i)$, $z = (r, a, i) \in S^N$, e a condição é trivialmente satisfeita.

O teorema permite que as taxas de salto do processo varie de acordo com alguma função do

processo, isto é, para cada $N \geq 1$ a taxa $c^N[z]$ pode depender de $z \in S^N$. Porém, em nosso processo $c^N[z] = N$ para $N \geq 1$.

Afim de controlar o comportamento da parte martingal $(M_t^N)_{t \geq 0}$ do processo $(Y_t^N)_{t \geq 0}$, o teorema exige que

$$\begin{aligned} \sup_{z \in S^N} c^N[z] &\leq k_2 N; \\ \sup_{z \in S^N} \{ \text{Traço}[\sum^N [z]] + \|\mu^N[z]\|^2 \} &\leq \frac{k_3}{N^2}. \end{aligned}$$

A primeira condição está claramente satisfeita pelo nosso processo porque $c^N = N$, $\forall N \geq 1$, neste caso $k_2 = 1$ é suficiente para garantir a primeira condição. A segunda condição também está satisfeita, pois

$$\{ \text{Traço}[\sum^N [z]] + \|\mu^N[z]\|^2 \} \leq \frac{2(\lambda^2 + 1)}{N^2}.$$

O limite do fluído do processo de exploração

Fixado $\lambda > 1$ e $0 < \alpha < 1 - \rho(\lambda)$.

Pela Condição 2, temos que existe um campo vetorial $b : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é Lipschitz em $\bar{S} \subseteq D$. Então temos que existe uma única solução $(y[t])_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}}$ em $\bar{S}$, onde

$$\zeta_{\lambda, \alpha} = \inf\{t \geq 0 : a[t] = 0\},$$

da seguinte equação diferencial ordinária,

$$\dot{y}[t] = b[y[t]], \quad y[0] = (\alpha, 1 - \alpha - e^{-\lambda\alpha}, e^{-\lambda\alpha}).$$

Observamos que $\zeta_{\lambda, \alpha}$ é o primeiro instante em que a solução deixa o conjunto S .

Assim, para a sequência de processos de exploração condicionados em $\{g_{\alpha N}^N < \infty\}$ temos que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t]\| > \delta \right) = O(N^{-1}). \quad (4.13)$$

Mostraremos na próxima seção que sob as Condições 1, 2 e 3 o resultado (4.13) é válido, portanto, temos o Resultado 1. Observamos que a partir deste resultado é fácil mostrar que $\sigma^N \xrightarrow{P} 1 - \rho(\lambda) - \alpha$ e $\tilde{R}_{\sigma^N}^N \xrightarrow{P} 1 - \rho(\lambda)$. O que fornece a lei fraca dos grandes números para o tamanho da componente maximal do grafo aleatório de Erdős-Rényi.

4.3 Demonstrações.

A demonstração do Resultado 1 aplica a argumentação da demonstração do Teorema 1. A principal diferença está na utilização de um resultado sobre martingais de Seppäläinen (2003) (Apêndice: teorema 6, Lema 4 e a Observação 6) que nos permite pular um dos passos da demonstração de (2.5). Veja a Observação 5.

Inicialmente, fixamos $\lambda > 1$ e $\alpha \in (0, 1 - \rho(\lambda))$.

Passo 1.

Vimos que o processo de exploração satisfaz as Condição 3. Lembramos que $\zeta_{\lambda,\alpha}$ é o primeiro instante de saída da equação do espaço S . Queremos mostrar que para cada $\delta > 0$, a parte martingal de $(Y_t^N)_{t \geq 0}$ satisfaz

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda,\alpha}} \|M_{t \wedge \sigma^N}^N\| \geq \delta \right) \rightarrow 0, \text{ para } N \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Demonstração

Primeiramente, lembramos que pela Proposição 4 $(M_t)_{t \geq 0}$ é um martingal quadrado integrável. Observamos que pelo comentário 6 do Teorema 6 (Apêndice) $(M_{t \wedge \sigma^N}^N)_{t \geq 0}$, também é um martingal quadrado integrável.

Aplicamos a Proposição 4, tomando as constantes encontradas quando verificamos a Condição 3 para o processo de exploração, isto é, tomando

$$C_1 = \frac{2(\lambda^2 + 1)}{N^2}; \quad C_2 = N; \quad n = \zeta_{\lambda,\alpha} \kappa N$$

para algum $\kappa > 1$. Obtemos da equação (4.9) da Proposição 4 que

$$\frac{nC_1}{\delta^2} = \frac{2(\lambda^2 + 1)\zeta_{\lambda,\alpha}\kappa N}{(\delta N)^2} = O(N^{-1}).$$

Além disso, temos que ξ_n é uma variável Gama com parâmetros n e C_2 , e portanto tem média igual $\zeta_{\lambda,\alpha}\kappa$, que é estritamente maior do que $\zeta_{\lambda,\alpha}$, e possui uma variância $\frac{\zeta_{\lambda,\alpha}\kappa}{N}$ que é $O(N^{-1})$. Portanto, pela desigualdade de Chebyshev temos

$$\mathbb{P}(\xi_n < \zeta_{\lambda,\alpha}) = O(N^{-1}).$$

O que implica (4.14).

Passo 2.

Vamos agora demonstrar que para todo $\delta > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t \wedge \sigma^N]\| \geq \delta \right) \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

quando $N \rightarrow \infty$.

Demonstração.

Condiccionando em $\{g_{\alpha N}^N < \infty\}$, sejam $Y_0^N = \tilde{Z}_{g_{\alpha N}^N}^N$ e $y_0 = (\alpha, 1 - \alpha - e^{-\lambda\alpha}, e^{-\lambda\alpha})$.

Considere a diferença entre as seguintes equações

$$\begin{aligned} y[t \wedge \sigma^N] &= y_0 + \int_0^{t \wedge \sigma^N} b[y[s]] ds; \\ Y_{t \wedge \sigma^N}^N &= Y_0^N + \int_0^{t \wedge \sigma^N} b^N[Y_s^N] ds + M_{t \wedge \sigma^N}^N. \end{aligned}$$

Lembrando que $M_t^N = Y_t^N - A_t^N$, onde $A_t^N = Y_0^N + \int_0^t b^N[Y_s] ds$.

Assim, obtemos que

$$\|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t \wedge \sigma^N]\| \leq \|Y_0^N - y_0\| + \|M_{t \wedge \sigma^N}^N\| + \int_0^{t \wedge \sigma^N} \|b[Y_s^N] - b[y[s]]\| ds. \quad (4.16)$$

Observamos que o termo

$$\int_0^{t \wedge \sigma^N} b^N[Y_s^N] - b[Y_s^N] ds,$$

não aparece na equação acima, pois $b^N[x] = b[x]$, $\forall x \in S^N$.

Temos então que dado $\kappa_1 > 0$, existe um inteiro N_{κ_1} , tal que para cada $N \geq N_{\kappa_1}$, existe um conjunto mensurável $\Omega_{\kappa_1}^N$ no espaço de probabilidade no qual $(Y_t^N)_{t \geq 0}$ está definido, tal que para cada trajetória de $\Omega_{\kappa_1}^N$ a soma dos dois primeiros termos do lado direito de (4.16) não excede κ_1 , no intervalo $[0, \zeta_{\lambda, \alpha}]$. Além disso, $\mathbb{P}(\Omega_{\kappa_1}^N) = 1 - O(N^{-1})$.

Vimos também que o campo vetorial b é Lipschitz. Portanto, seja K a constante Lipschitz de b , e considere

$$H_{\zeta_{\lambda},\alpha}^N := \sup_{0 \leq s \leq \zeta_{\lambda},\alpha} \|Y_{s \wedge \sigma^N}^N - y[s \wedge \sigma^N]\|.$$

Sob o conjunto $\Omega_{\kappa_1}^N$, temos

$$H_{\zeta_{\lambda},\alpha}^N \leq \kappa_1 + K \int_0^{\zeta_{\lambda},\alpha} H_s^N ds.$$

Aplicando o Lema de Gronwall (Lema 2) obtemos que

$$H_{\zeta_{\lambda},\alpha}^N \leq \kappa_1 e^{K\zeta_{\lambda},\alpha}.$$

Assim, escolhendo $\kappa_1 = e^{-K\zeta_{\lambda},\alpha} \delta$, obtemos (4.15).

Passo 3.

Vamos agora demonstrar que para todo $\delta > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda},\alpha} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t]\| \geq \delta \right) \rightarrow 0, \quad (4.17)$$

quando $N \rightarrow \infty$.

Demonstração.

Pela desigualdade triangular temos que

$$\|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t]\| \leq \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t \wedge \sigma^N]\| + \|y[t \wedge \sigma^N] - y[t]\|.$$

Assim, temos que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda},\alpha} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t]\| \geq 2\delta \right) \quad (4.18)$$

$$\leq \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda},\alpha} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t \wedge \sigma^N]\| \geq \delta \right) + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda},\alpha} \|y[t \wedge \sigma^N] - y[t]\| \geq \delta \right) \quad (4.19)$$

Temos pelo passo 2 que o primeiro termo do lado direito tende a zero quando $N \rightarrow \infty$. Portanto, temos que verificar que o mesmo ocorre com o segundo termo para provarmos (4.17).

Seja

$$\Delta := \sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}} \|b[y[t]]\| < \infty.$$

Lembrando que

$$y[t] = y_0 + \int_0^t b[y[s]] ds,$$

considere $0 \leq t < r \leq \zeta_{\lambda, \alpha}$ e $\|y[r] - y[t]\| \geq \delta$. Isto implica que $\Delta(r - t) \geq \delta$.

Portanto,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}} \|y[t \wedge \sigma^N] - y[t]\| \geq \delta \right) \leq \mathbb{P} \left(\sigma^N \leq \zeta_{\lambda, \alpha} - \frac{\delta}{\Delta} \right).$$

Observe o que ocorre sob o evento $\{\sigma^N \leq \zeta_{\lambda, \alpha} - \frac{\delta}{\Delta}\}$. Temos que a equação $(y[t])_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}}$, ainda não deixou o conjunto S até o instante σ^N . Logo, existe um $\epsilon_2 > 0$ tal que um ϵ_2 -tubo ao longo de $(y[t])_{0 \leq t \leq \sigma^N}$ ainda está dentro de S . Como $(Y_t^N)_{t \geq 0}$ deixou S no instante σ^N temos que para este instante a distância entre ambos é de pelo menos $\epsilon_2 > 0$. A existência de tal ϵ_2 é garantido pelo Lema 7 (Apêndice), pois $y[t]_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha} - \frac{\delta}{\Delta}}$ é um compacto contido no aberto S .

Logo,

$$\{\sigma^N \leq \zeta_{\lambda, \alpha} - \frac{\delta}{\Delta}\} \Rightarrow \{\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t \wedge \sigma^N]\| \geq \epsilon_2\}.$$

Pelo passo 2 temos que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \zeta_{\lambda, \alpha}} \|Y_{t \wedge \sigma^N}^N - y[t \wedge \sigma^N]\| \geq \epsilon_2 \right) \rightarrow 0,$$

para $N \rightarrow \infty$. Logo, provamos (4.17) (Resultado 1) . $\square$

Observação 5. *Dissemos que nossa demonstração do Resultado 1 é mais curta que a demonstração original de (2.5) em Darling (2002). Agora, esclareceremos este comentário.*

O Teorema 6 e a Observação 6 do Apêndice implicam que o processo parado $(M_{t \wedge \sigma^N}^N)_{t \geq 0}$ também é um vetor martingal quadrado integrável. Segue da mesma demonstração da Proposição 4, em Darling (2002), que o resultado (4.9) também é válido para o processo parado. Utilizamos este fato no passo 1 para provar (4.14). Este último resultado é utilizado, no passo 2, para obter (2.3) diretamente, enquanto no original prova-se (2.4) primeiro e utiliza-se um acoplamento para provar (2.3). Assim, nossa abordagem evita os acoplamentos da demonstração original.

Referimos o leitor a Darling (2002) para maiores detalhes sobre a demonstração original do Teorema 1 e da Proposição 4. Observamos que em Darling (2002), o resultado (4.9) decorre do fato que $(M_t)_{t \geq 0}$ é um vetor martingal quadrado integrável e da aplicação de uma desigualdade maximal

para submartingais, logo, a mesma argumentação é válida para o processo parado que também é um vetor martingal quadrado integrável. Ou seja, a demonstração é mais curta pois temos o resultado que o processo parado continua sendo um martingal quadrado integrável.

4.4 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos um limite do fluído para o processo de exploração pelo algoritmo BFS da componente maximal do grafo de Erdős-Rényi, no caso supercrítico. Deste último resultado segue a lei fraca dos grandes números para a componente maximal desse grafo. Observamos que nenhuma das demonstrações anteriores desse resultado envolvem resultados de convergência semelhantes ao apresentado neste trabalho, assim, trata-se de uma demonstração original desse resultado, embora não seja totalmente independente de demonstrações anteriores.

Isto é, vimos que o resultado de limite do fluído obtido dependeu da combinação das Proposições 1 e 2 utilizadas na demonstração do mesmo resultado de van der Hofstad (2009) com o teorema de convergência de processos de Darling (2002).

Ressaltamos que o teorema de convergência exposto em Darling (2002) é de fácil verificação, e muito mais simples que seus similares Darling e Norris (2008); Ethier e Kurtz (2005); Wormald (1999), embora seja restrito a uma classe menor de processos. Logo, assumindo este teorema, é imediato a obtenção de nosso resultado a partir da Proposição 3.

Uma das vantagens que este método comparte com seus similares é a heurística que fornece para a obtenção das equações diferenciais a partir do cálculo da função de *drift*. Muitas vezes, isto torna fácil a obtenção das equações que descrevem o comportamento limite dos processos estocásticos estudados. O que motiva a busca pelos elementos que permitem provar a convergência do processo a tal limite.

Uma proposta de trabalho interessante seria utilizar métodos semelhantes para obter o limite do fluído para processos de exploração utilizando o algoritmo BFS e similares para outras classes de grafos aleatórios.

Capítulo 5

Apêndice

Resultados Auxiliares.

Lema 1. (*Desigualdade de Chebyshev, Grimmett e Stirzaker (2001)*)

Seja X uma variável aleatória com segundo momento finito, então

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}, \quad a > 0$$

Lema 2. (*Lema de Gronwall, Ethier e Kurtz (2005)*).

Seja f uma função real satisfazendo $0 \leq f(t) \leq a + b \int_0^t f(s)ds$, para quaisquer constantes positivas a e b , e $t \geq 0$. Então $f(t) \leq ae^{bt}$, $t \geq 0$.

Lema 3. (*Grimmett e Stirzaker, 2001*)

Se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y$, então $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

Apresentamos este resultado do capítulo sobre Martingais de Seppäläinen (2003), para as demonstrações referimos o leitor ao original.

Teorema 6. (*Teorema 3.6 de Seppäläinen (2003), Teorema da parada opcional*).

Seja M um submartingal com trajetórias contínuas a direita, e sejam σ e τ dois tempos de parada. Então para $T < \infty$,

$$\mathbb{E}(M_{\tau \wedge T} \mid \mathbb{F}_\sigma) \geq M_{\sigma \wedge \tau \wedge T}.$$

Lema 4. (*Corolário 3.7 de Seppäläinen (2003)*).

Suponha que M é um submartingal contínua a direita e τ é um tempo de parada. Então o processo parado $M^\tau = \{M_{\tau \wedge t} : t \in \mathbb{R}_+\}$ é um submartingal com respeito a filtração natural $\{\mathbb{F}_t\}$.

Se M é também um martingal, então M^τ é martingal. E finalmente, se M é um L^2 -martingal, então M^τ também é.

Observação 6. Segue também do teorema 6 (teorema da parada ótima) e do lema 5 que se M é um martingal quadrado integrável, então M^τ também é.

Este resultado aparece na página 127 de Seppäläinen (2003), embora não esteja explicitamente provado, sua prova é idêntica ao caso da L^2 -martingal.

Demonstração:

Primeiramente, como M_t é um martingal quadrado integrável com trajetórias contínuas a direita temos que M_t^2 é um submartingal com trajetórias contínuas a direita. Como $t \wedge \tau$ também é um tempo de parada e, obviamente, $\mathbb{P}(t \wedge \tau \leq t) = 1, \forall t \geq 0$. Temos pelo lema 5 que

$$\mathbb{E}(M_{t \wedge \tau}^2) \leq 2 \cdot \mathbb{E}(M_t^2) + \mathbb{E}(M_0^2),$$

logo, decorre que $\mathbb{E}(M_{t \wedge \tau}^2) < \infty, \forall t \geq 0$.

O fato que M^τ continua tendo a propriedade de martingal decorre da aplicação do teorema 6 para $-M$ e M , considerando $T = t$ e $\sigma = s < t$. $\square$

Observamos que a demonstração do Lema 4 depende da seguinte cota para o momento. Seja $M_t^+ = \max[M_t, 0]$.

Lema 5. (Corolário 3.5 de Seppäläinen (2003)).

Sejam M um submartingal com trajetórias contínuas a direita e $T < \infty$. Então para qualquer tempo de parada ρ que satisfaça $\mathbb{P}(\rho \leq T) = 1$, temos que

$$\mathbb{E}|M_\rho| \leq 2 \cdot \mathbb{E}(M_T^+) + \mathbb{E}(M_0).$$

Lema 6. (Um número binomial de tentativas binomiais, van der Hofstad (2009))

Seja N uma variável aleatória com distribuição $\text{Bin}(n, p)$, e condicionado em N , M é uma variável aleatória com distribuição $\text{Bin}(N, q)$, então M tem distribuição $\text{Bin}(n, qp)$.

Demonstração:

Primeiramente, lembramos que a distribuição de uma variável aleatória X pode ser unicamente determinada por sua função geradora de probabilidade ψ_X . Observamos que uma variável aleatória $\text{Bin}(n, p)$ tem função geradora de probabilidade $(zp + 1 - p)^n, z > 0$.

Para algum $z > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(z^M) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(z^M | N)) = \mathbb{E}((zq + 1 - q)^N) \\ &= ((zq + 1 - q)p + 1 - p)^n = (zqp + 1 - qp)^n. \square \end{aligned}$$

Lema 7. (Corolário 2 de Lima (2009))

Sejam $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, onde K é compacto e U é aberto. Existe $\epsilon > 0$ tal que toda bola $B(x; \epsilon)$, de raio ϵ e centro num ponto $x \in K$, está contida em U .

Teorema 7. (Teorema 4.8 de van der Hofstad (2009). Lei dos grandes números para a componente maximal do grafo de Erdős-Rényi, caso supercrítico.)

Fixe $\lambda > 1$. Então, para todo $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$, existe um $\delta = \delta(\nu, \lambda) > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(|C(v)_{Max}| - N\zeta_\lambda| \geq N^\nu) = O(N^{-\delta}).$$

Abaixo, enunciaremos os resultados que faltam para completar a demonstração do teorema 7. Para as demonstrações referimos o leitor a van der Hofstad (2009).

Sejam,

$$Z_{\geq k} = \sum_{v \in V} \mathbb{I}_{\{|C(v)| \geq k\}},$$

isto é, o número de vértices em componentes com mais de k vértices;

$$\chi_{<k} = \mathbb{E}(|C(v)| \mathbb{I}_{\{|C(v)| < k\}}).$$

para completar a demonstração precisaremos da seguinte estimativa precisa para variância de $Z_{\geq k}$.

Proposição 5. Fixado $\lambda > 1$. Para todo N e $k \in \{1, 2, \dots, N\}$

,

$$\mathbb{V}(Z_{\geq k}) \leq (\lambda k + 1) N \chi_{<k}. \quad (5.1)$$

Fixe $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$, $\alpha \in (\frac{\zeta_\lambda}{2}, \zeta_\lambda)$ e tome $k_n = K \log N$ para K suficientemente grande. Seja B_n o evento tal que

$$(i) \quad |Z_{\geq k_n} - N\zeta_\lambda| \leq N^\nu;$$

$$(ii) \quad \neg \exists v \in V \text{ tal que } k_n \leq |C(v)| \leq \alpha N.$$

Pode-se obter que

Proposição 6. O evento B_n ocorre com alta probabilidade, isto é, $\mathbb{P}(B_n) = O(N^{-\delta})$, e sob o evento B_n temos que

$$|C(v)_{Max}| = Z_{\geq k_n}$$

.

Na demonstração desta última proposição faz-se o uso das Proposições 1,2 e 5.

Demonstração

Pelo lema 6, e que sob o evento B_n , $|C(v)_{Max}| = Z_{\geq k_n}$ e $||C(v)_{Max}| - N\zeta_\lambda| \leq N^\nu$, temos que

$$\mathbb{P}(|C(v)_{Max}| - N\zeta_\lambda| \geq N^\nu) \geq \mathbb{P}(\{|C(v)_{Max}| - N\zeta_\lambda| \geq N^\nu\} \cap B_n) = \mathbb{P}(B_n) \geq 1 - O(N^{-\delta}).$$

O que demonstra o Teorema 7. $\square$

Referências Bibliográficas

- D. J. Aldous. Brownian excursions, critical random graphs and multiplicative coalescence. *The Annals of Probability*, 25(2):812–854, 1997. 1
- N. Alon and J. H. Spencer. *The probabilistic method*. Wiley-Interscience, New York, first edition, 1992. 2, 14, 16
- O. S. M. Alves, E. Lebensztayn, F. P. Machado, and M. Z. Martinez. Random walks systems on complete graphs. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 37:571–580, 2006. 8
- K. Ball, T. G. Kurtz, L. Popovic, and G. Rempala. Asymptotic analysis of multiscale approximations to reaction networks. *Annals of Applied Probability*, 16(4):1925–1961, 2006. 1, 3, 4, 13, 29
- M. Bramson. Stability of queueing networks. *Probability Surveys*, 5:169–345, 2008. 1
- A. Clauset and C. Moore. Accuracy and scaling phenomena in internet mapping. *Physical Review Letters*, 94(1):018701, 2005. 3
- R. W. R. Darling. Fluid limits of pure jump markov processes: a practical guide. Disponível em <http://arxiv.org/ftp/math/papers/0210/0210109.pdf>, 2002. iii, v, 2, 4, 5, 12, 32, 33, 39, 41
- R. W. R. Darling and J. R. Norris. Structure of large random hypergraphs. *Annals of Applied Probability*, 15:125–152, 2005. 1, 2, 3
- R. W. R. Darling and J. R. Norris. Differential equations approximations for markov chains. *Probability Surveys*, 5:37–79, 2008. 2, 3, 4, 13, 23, 29, 32, 33, 41
- R. W. R. Darling, D. A. Levin, and J. R. Norris. Continuous and discontinuous phase transition in hypergraph processes. *Random Structures & Algorithms*, 24(4):397–419, 2004. 1, 2, 3
- R. Durrett. *Random graphs dynamics*. Cambridge University Press, New York, first edition, 2006. 3, 16, 23
- P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 5:17–61, 1960. 14
- S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. Wiley-Interscience, New York, second edition, 2005. 1, 2, 3, 41, 43
- R. J. Gava. Análise de campo médio para um modelo epidêmico via passeios aleatórios. Dissertação de mestrado, IME-USP, 2007. 8
- E. N. Gilbert. Random graphs. *Annals of Mathematical Statistics*, 30(4):1141–44, 1959. 14

- C. Goldschmidt. Critical random hypergraphs: the emergence of a giant set of identifiable vertices. *The Annals of Probability*, 33(4):1573–1600, 2005. 1
- G. Grimmett and D. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, Oxford, third edition, 2001. 43
- T. E. Harris. First passage and recurrence distributions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 73(3):471–486, 1952. 21
- S. Janson, T. Luczak, and A. Rucinski. *Random Graphs*. Wiley-Interscience, first edition, 2000. 14, 15, 23
- O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Springer, second edition, 2002. 32
- R. M. Karp. The transitive closure of a random digraph. *Random Structures & Algorithms*, 1(1):73–93, 1990. 16
- T. G. Kurtz, E. Lebensztayn, A. R. Leichsenring, and F. P. Machado. Limit theorems for an epidemic model on the complete graph. *Alea*, 4:45–55, 2008. iii, v, 1, 4, 8
- E. L. Lima. *Análise Real volume 2 - Funções de n variáveis - Coleção de Matemática Universitária*. Impa, Rio de Janeiro, quarta edition, 2009. 44
- A. Martin-Löf. Symmetric sampling procedures, general epidemic processes and their threshold limit theorems. *Journal of Applied Probability*, 23:265–282, 1986. 1, 2, 3
- A. Martin-Löf. The final size of a nearly critical epidemic, and the first passage time of a wiener process to a parabolic barrier. *Journal of Applied Probability*, 35:671–682, 1998. 1, 2, 3
- C. McDiarmid. On the method of bounded differences. *Surveys in Combinatorics 1989 (invited papers of 12th British Combinatorial Conference)*, J. Siemons ed.:148–188, 1989. 2
- M. Mitzenmacher. Studying balanced allocations with differential equations. *Combinatorics, Probability and Computing*, 8(5):473–482, 1999. 1
- M. Molloy and B. Reed. A critical point for random graphs with a given degree sequence. *Random Structures & Algorithms*, 6(4):161–179, 1995. 1
- M. Molloy and B. Reed. The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence. *Combinatorics, Probability and Computing*, 7(4):295–305, 1998. 1
- T. Seppäläinen. Basic of stochastic analysis. Disponível em <http://www.math.wisc.edu/seppalai/sa-book/notes.pdf>, 2003. 31, 33, 36, 43, 44
- J. H. Spencer. The giant component – the golden anniversary. Aparecerá em *Notices of the AMS*, disponível em <http://cs.nyu.edu/spencer/papers/notices09.pdf>, 2009. 16
- R. van der Hofstad. Random graphs and complex networks. Disponível em <http://www.win.tue.nl/rhofstad/NotesRGCN.pdf>, 2009. 4, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 26, 27, 41, 44, 45
- N. C. Wormald. Differential equations for random processes and random graphs. *Annals of Applied Probability*, 5(4):1217–1235, 1995. 1

- N. C. Wormald. The differential equation method for random graph processes and greedy algorithms. *Karoński, Michał (ed.) et al., Lectures on approximation and randomized algorithms. Proceedings of the Berlin-Poznań summer school, Antonin, Poland, September 1997. Warsaw: Polish Scientific Publishers. Advanced Topics in Mathematics*, pages 73–155, 1999. disponível em <http://www.math.uwaterloo.ca/nwormald/papers/de.pdf>. 1, 4, 41