Efeitos da especificação incorreta da função de ligação no modelo de regressão beta

Augusto César Giovanetti de Andrade

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Estatística**

Orientadora: **Profa. Dra. Silvia Lopes de Paula Ferrari**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

São Paulo, agosto de 2007.

Efeitos da especificação incorreta da função de ligação no modelo de regressão beta

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Augusto César Giovanetti de Andrade e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, agosto de 2007.

Banca examinadora:

Profa. Dra. Silvia Lopes de Paula Ferrari (orientadora) - IME-USP

Profa. Dra. Denise Aparecida Botter - IME-USP

Profa. Dra. Linda Lee Ho - POLI-USP

*Na vida,
nada acontece
por acaso.
(Autor desconhecido)*

Agradecimentos

As forças divinas que iluminaram os meus caminhos e fizeram as oportunidades surgirem em momentos oportunos.

À professora Silvia Ferrari, pela orientação e confiança depositada em mim desde a nossa primeira conversa.

Aos professores da UNICAMP e da USP, pela sólida formação acadêmica e recepção. Em especial aos professores Ademir Petenate e Filidor Vilca-Labra, pelo aprendizado transmitido e incentivo que foram essenciais para que iniciasse o mestrado.

Aos meus familiares e amigos de infância, que de perto ou de longe sempre me deram forças para seguir o meu caminho.

A Jacqueline David, que desde o começo se mostrou além de chefe, orientadora e uma grande amiga. Essa dissertação com certeza não seria a mesma sem ela no meu caminho.

Aos amigos que foram também meus orientadores durante o mestrado, Raydonal, Patricia, Marcos, Gisela, Kelly, Lourdes, Betsabe, Edijane, Frederico e todos os demais que me acompanharam no dia-a-dia no instituto.

Aos amigos que fiz desde que cheguei a São Paulo e que cultivarei pra sempre, Mariana, Karina, Grazielle, Lauren, Fernando, Nubia, Josivon, Pedro, Cecília, Bárbara, Luis Henrique, Juliana, Ivan, Joan e todos os que estiveram comigo nos momentos difíceis de estudo e nas comemorações de cada etapa que concluímos no mestrado, juntos.

Aos companheiros do handebol, vôlei e capoeira que me receberam muito bem e me suportaram nos treinos que utilizei para acabar com o estresse. Em especial ao Telmo, que apesar de não estar mais entre nós, deixou ensinamentos para toda a vida.

Aos colegas e amigos do trabalho que me apoiaram dia-a-dia.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

Resumo

O ajuste de modelos de regressão beta requer a especificação de uma função de ligação. Algumas funções de ligação úteis são: logito, probito, complemento log-log e log-log. Usualmente, a ligação logito é utilizada pois permite interpretação simples para os parâmetros de regressão.

O principal objetivo deste trabalho é avaliar o impacto da especificação incorreta da função de ligação em regressão beta. Estudos de simulação serão usados com esse propósito. Amostras da variável resposta serão geradas assumindo uma função de ligação conhecida (verdadeira) e o modelo de regressão beta será ajustado usando a função de ligação verdadeira (correta) e algumas funções de ligação incorretas. Resultados numéricos serão comparados para avaliar o efeito da especificação incorreta da função de ligação sobre as inferências em regressão beta. Adicionalmente, será introduzido um modelo de regressão beta com função de ligação de Aranda-Ordaz, a qual depende de um parâmetro que pode ser estimado através dos dados.

Abstract

Fitting beta regression models requires the specification of the link function. Some useful link functions for beta regression are: logit, probit, complementary log-log and log-log. Usually, the logit link is used since it allows easy interpretation for the regression parameters.

The main objective of this work is to evaluate the impact of misspecification of the link function in beta regression. Simulation studies will be used for this purpose. Samples of the response variable will be generated assuming a known (true) link function, and the beta regression will be fitted using the true (correct) link and some incorrect link functions. Numerical results will be compared to evaluate the effect of misspecification of the link function on inference in beta regression. Also, we will introduce a beta regression model with Aranda-Ordaz link function, which depends on an unknown parameter that can be estimated through the data.

Índice

1	Modelo de Regressão Beta	1
1.1	Introdução	1
1.2	Distribuição Beta	1
1.3	Especificação do Modelo de Regressão Beta	2
1.3.1	Estimadores de Máxima Verossimilhança	6
1.3.2	Intervalos de Confiança	8
1.3.3	Funções de Ligação	9
2	Especificação Incorreta da Função de Ligação	14
2.1	Introdução	14
2.2	Resultados das Simulações	17
2.2.1	Casos 1 e 2: Função de Ligação Logito e Probit	17
2.2.2	Caso 3: Função de Ligação Logito e Complemento Log-log	19
2.2.3	Caso 4: Função de Ligação Correta Log-log e Incorreta Logito	22
2.2.4	Discussão dos Resultados das Simulações	25
2.3	Avaliação da Adequação da Função de Ligação	25
2.3.1	Viés Relativo dos Estimadores das Médias	30
2.4	Conclusões	32
3	Função de Ligação de Aranda-Ordaz	34
3.1	Introdução	34
3.2	Função Escore e Matriz de Informação	35
3.3	Avaliação dos Estimadores dos Parâmetros	38

<i>Índice</i>	ix
3.4 Avaliação dos Estimadores para as Médias	42
3.4.1 Função de Ligação de Aranda-Ordaz e Logito	45
3.5 Conclusões	48
4 Aplicação	49
5 Considerações finais	53
A Programa de simulação no Ox	55
B Resultados das simulações	65
B.1 Função de Ligação Correta Logito e Incorreta Probitto	65
B.2 Função de Ligação Correta Probitto e Incorreta Logito	69
B.3 Função de Ligação Correta Complemento Log-Log e Incorreta Logito . .	73
B.4 Função de Ligação Correta Log-log e Incorreta Logito	79
Referências bibliográficas	86

Modelo de Regressão Beta

1.1 Introdução

Quando o interesse é estudar a relação de uma variável resposta observada no intervalo $(0,1)$ com variáveis explicativas, um modelo que tem sido estudado é o modelo de regressão beta. Como foi tratado por Ferrari & Cribari-Neto (2004) este modelo tem algumas características semelhantes às dos modelos lineares generalizados (MLGs; detalhes em McCullagh & Nelder, 1989). Um dos componentes de extrema importância na especificação dos MLGs é a escolha da função de ligação, pois uma escolha imprópria da função de ligação pode causar resultados significativamente problemáticos segundo Myers, Montgomery & Vining (Seção 7.3, 2002).

Neste capítulo é apresentado o modelo de regressão beta definido por Ferrari & Cribari-Neto (2004). Este modelo será utilizado para estudar o comportamento de uma variável resposta contínua definida no intervalo $(0,1)$ como função de um conjunto de variáveis explicativas.

1.2 Distribuição Beta

O interesse no estudo da distribuição beta é ter a possibilidade de obter um modelo de regressão adequado à situação em que a variável dependente é contínua e assume valores apenas no intervalo $(0,1)$. Kieschnick & McCullough (2003) recomendam a utilização de um modelo de regressão paramétrico baseado na distribuição beta ou um modelo de regressão de quasi-verossimilhança desenvolvido por Papke & Wooldridge (1996) para

essa situação.

A distribuição beta é muito flexível para o estudo de taxas e proporções, dado que sua função de densidade pode tomar diferentes formas dependendo dos valores definidos pelos dois parâmetros que a compõem. A função densidade da distribuição beta é definida por

$$\pi(y; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1} (1-y)^{q-1}, \quad 0 < y < 1,$$

onde $p > 0$, $q > 0$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama. A média e a variância de y são dadas por

$$E(y) = \frac{p}{p+q}$$

e

$$\text{var}(y) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}.$$

A moda da distribuição existe quando $p > 1$ e $q > 1$ e é dada por $\text{moda}(y) = (p-1)/(p+q-2)$. A distribuição uniforme é um caso particular da distribuição beta quando $p = q = 1$. Muitas aplicações da distribuição beta são discutidas por Bury (1999) e por Johnson, Kotz & Balakrishnan (1995).

1.3 Especificação do Modelo de Regressão Beta

Para definição do modelo de regressão beta Ferrari & Cribari-Neto (2004) sugerem uma parametrização da distribuição beta em termos de sua média e um parâmetro de dispersão. Mais especificamente, sejam μ e ϕ os parâmetros definidos por $\mu = p/(p+q)$ e $\phi = p+q$, ou seja, $p = \mu\phi$ e $q = (1-\mu)\phi$. Com essa parametrização a função densidade da distribuição beta pode ser reescrita como

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1-\mu)\phi)} y^{\mu\phi-1} (1-y)^{(1-\mu)\phi-1}, \quad 0 < y < 1 \quad (1.1)$$

onde $0 < \mu < 1$ e $\phi > 0$. A esperança e a variância são, então, dadas por

$$E(y) = \mu$$

e

$$\text{var}(y) = \frac{V(\mu)}{1+\phi},$$

onde $V(\mu) = \mu(1-\mu)$ é chamada de função de variância. Portanto, μ é a média de y e ϕ pode ser interpretado como parâmetro de precisão no sentido que, para um valor

fixo de μ , quanto maior o valor de ϕ , menor a variância de y . Diferentes formas para a densidade beta podem ser obtidas de acordo com a escolha dos valores para μ e ϕ como, por exemplo, J, J invertido e U; estas podem ser vistas na Figura 1.1 extraída de Ferrari & Cribari-Neto (2004). A distribuição uniforme é obtida fazendo $\mu = 0.5$ e $\phi = 2$.

No modelo a ser estudado assume-se que a variável resposta y tem distribuição contínua definida no intervalo $(0, 1)$. Este modelo poderá ser útil também para respostas restritas a um intervalo (a, b) , onde a e b são escalares conhecidos e $a < b$. Para tanto bastará modelar $(y - a)/(b - a)$ ao invés de modelar y diretamente.

Para definição do modelo de regressão beta assume-se que $y_1, \dots, y_n$ são variáveis aleatórias independentes e que cada $y_t, t = 1, \dots, n$, segue distribuição beta com densidade (1.1) com média μ_t e parâmetro de precisão ϕ , constante para todo t , desconhecido. Como componente sistemático assume-se que uma função da média μ_t pode ser igualada ao preditor linear η_t :

$$g(\mu_t) = \sum_{i=0}^k x_{ti}\beta_i = x_t^\top \beta = \eta_t \quad (1.2)$$

e, consequentemente,

$$\mu_t = g^{-1}(\eta_t), \quad (1.3)$$

onde $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_k)^\top$ é o vetor de parâmetros de regressão desconhecidos ($\beta \in \Re^{k+1}$), sendo β_0 o intercepto e $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ os parâmetros referentes às variáveis explicativas; e $x_t^\top = (1, x_{t1}, \dots, x_{tk})$, sendo $x_{t1}, \dots, x_{tk}$ os k valores das variáveis explicativas correspondentes à t -ésima observação ($k < n$), que são fixos e conhecidos. A função $g(\cdot)$, estritamente monótona e duplamente diferenciável, transforma valores do intervalo $(0, 1)$ em $\Re$. Essa função é chamada de função de ligação e será estudada com mais detalhes na Seção 1.3.3. A sua escolha no modelo de regressão beta é objeto deste estudo, no qual será verificado o efeito da especificação inadequada desta função de ligação.

No modelo definido pela distribuição beta e com a parte sistemática estabelecida (1.3), respostas com variância não constantes são naturalmente acomodadas, pois a variância de y_t depende de μ_t e, como consequência, das variáveis explicativas $x_t^\top$.

A função de log-verossimilhança baseada numa amostra de n observações independentes é

$$\ell(\beta, \phi) = \sum_{t=1}^n \ell_t(\mu_t, \phi), \quad (1.4)$$

Figura 1.1: Densidades beta para diferentes combinações de (μ, ϕ) .

onde

$$\begin{aligned} \ell_t(\mu_t, \phi) = & \log \Gamma(\phi) - \log \Gamma(\mu_t \phi) - \log \Gamma((1 - \mu_t) \phi) + (\mu_t \phi - 1) \log y_t \\ & + \{(1 - \mu_t) \phi - 1\} \log(1 - y_t), \end{aligned}$$

com μ_t definido em (1.3). Definem-se $y_t^* = \log\{y_t/(1 - y_t)\}$ e $\mu_t^* = \psi(\mu_t \phi) - \psi((1 - \mu_t) \phi)$, onde $\psi(\cdot)$ é a função digama (pode-se mostrar que $E(y_t^*) = \mu_t^*$). A função escore, obtida pela diferenciação da função de log-verossimilhança com respeito aos parâmetros

desconhecidos (β, ϕ) , é dada por $(U_\beta(\beta, \phi), U_\phi(\beta, \phi))^\top$, onde

$$U_\beta(\beta, \phi) = \phi X^\top T(y^* - \mu^*), \quad (1.5)$$

no qual X é uma matriz $n \times k$, sendo $x_t^\top$ a t -ésima linha dessa matriz, $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$, $T = \text{diag}\{1/g'(\mu_1), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$ e $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)^\top$; e

$$U_\phi(\beta, \phi) = \sum_{t=1}^n \{\mu_t(y_t^* - \mu_t^*) + \log(1 - y_t) - \psi((1 - \mu_t)\phi) + \psi(\phi)\}. \quad (1.6)$$

Pelas segundas derivadas da função de log-verossimilhança, obtém-se a matriz de informação de Fisher. Para isso, definem-se

- $W = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\}$, com $w_t = \phi\{\psi'(\mu_t\phi) + \psi'((1 - \mu_t)\phi)\} \frac{1}{\{g'(\mu_t)\}}$;
- $c = (c_1, \dots, c_n)^\top$, com $c_t = \phi\{\psi'(\mu_t\phi)\mu_t - \psi'((1 - \mu_t)\phi)(1 - \mu_t)\}$;
- $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, com $d_t = \psi'(\mu_t\phi)\mu_t^2 + \psi'((1 - \mu_t)\phi)(1 - \mu_t)^2 - \psi'(\phi)$,

onde $\psi'(\cdot)$ é a função trigama. A matriz de informação de Fisher é dada por

$$K = K(\beta, \phi) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\phi} \\ K_{\phi\beta} & K_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

onde $K_{\beta\beta} = \phi X^\top W X$, $K_{\beta\phi} = K_{\phi\beta}^\top = X^\top T c$ e $K_{\phi\phi} = \text{tr}(D)$. Ao contrário do que se verifica na classe dos modelos lineares generalizados (McCullagh & Nelder, 1989), os parâmetros β e ϕ não são ortogonais para o modelo de regressão beta, ou seja, a matriz $K_{\beta\phi}$ não é nula para todo par (β, ϕ) .

Sob condições gerais de regularidade (descritas em Sen & Singer, 1993), quando o tamanho da amostra é grande, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros têm distribuição aproximada dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} \sim N_{k+2} \left(\begin{pmatrix} \beta \\ \phi \end{pmatrix}, K^{-1} \right), \quad (1.7)$$

no qual $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ são os estimadores de máxima verossimilhança de β e ϕ , respectivamente. Para se obter os erros padrão assintóticos dos estimadores de máxima verossimilhança é interessante escrever K^{-1} de forma explícita. Utilizando a fórmula para inversa

de matrizes subdivididas dada por Rao (1973, p. 33), obtém-se

$$K^{-1} = K^{-1}(\beta, \phi) = \begin{pmatrix} K^{\beta\beta} & K^{\beta\phi} \\ K^{\phi\beta} & K^{\phi\phi} \end{pmatrix},$$

onde

$$K^{\beta\beta} = \frac{1}{\phi}(X^\top W X)^{-1} \left\{ I_k + \frac{X^\top T c c^\top T^\top X (X^\top W X)^{-1}}{\gamma \phi} \right\},$$

sendo I_k uma matriz identidade $k \times k$ e $\gamma = \text{tr}(D) - \phi^{-1} c^\top T^\top X (X^\top W X)^{-1} X^\top T c$;

$$K^{\beta\phi} = (K^{\phi\beta})^\top = -\frac{1}{\gamma \phi} (X^\top W X)^{-1} X^\top T c$$

e

$$K^{\phi\phi} = \gamma^{-1}.$$

Nas próximas seções será mostrado como obter os estimadores de máxima verossimilhança e intervalos de confiança para os parâmetros β e ϕ do modelo de regressão beta e para média μ_t . Alguns detalhes sobre as funções de ligação que podem ser utilizadas para o ajuste do modelo de regressão beta também serão abordados.

1.3.1 Estimadores de Máxima Verossimilhança

Os estimadores de máxima verossimilhança de β e ϕ são obtidos das equações $U_\beta(\beta, \phi) = 0$ e $U_\phi(\beta, \phi) = 0$ dados em (1.5) e (1.6) respectivamente. Entretanto, não há uma forma fechada em que se possa escrever os estimadores de forma explícita a partir das equações anteriores. Portanto, um algoritmo de otimização não linear como, por exemplo, os algoritmos de Newton ou Quasi-Newton, é necessário para obter a maximização numérica da função de log-verossimilhança (1.4). Para detalhes sobre os algoritmos de Newton ou Quasi-Newton ver Nocedal & Wright (1999).

Nos algoritmos de maximização numérica é exigido um valor inicial para os parâmetros de interesse. Ferrari & Cribari-Neto (2004) sugerem utilizar para β a estimativa de mínimos quadrados ordinários obtida da regressão linear das respostas transformadas $(g(y_1), \dots, g(y_n))$ com relação a X , ou seja, $(X^\top X)^{-1} X^\top z$, onde $z = (g(y_1), \dots, g(y_n))^\top$. Para obter uma estimativa inicial para ϕ , Ferrari & Cribari-Neto (2004) observam que

$$\text{var}(y_t) = \frac{\mu_t(1 - \mu_t)}{1 + \phi}$$

e, portanto,

$$\phi = \frac{\mu_t(1 - \mu_t)}{\text{var}(y_t)} - 1.$$

Como

$$\text{var}(g(y_t)) \approx \text{var}\{g(\mu_t) + (y_t - \mu_t)g'(\mu_t)\} = \text{var}(y_t)\{g'(\mu_t)\}^2,$$

tem-se $\text{var}(y_t) \approx \text{var}\{g(y_t)\}\{g'(\mu_t)\}^{-2}$. Assim eles sugerem a seguinte expressão como estimativa inicial para ϕ :

$$\phi^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\check{\mu}_t(1 - \check{\mu}_t)}{\check{\sigma}_t^2} - 1,$$

onde $\check{\mu}_t$ é obtido aplicando $g^{-1}(\cdot)$ ao t -ésimo valor ajustado para a regressão linear, mais especificamente,

$$\check{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top (X^\top X)^{-1} X^\top z)$$

e

$$\check{\sigma}_t^2 = \frac{\check{e}^\top \check{e}}{(n - k)\{g'(\check{\mu}_t)\}^2},$$

no qual $\check{e} = z - X(X^\top X)^{-1} X^\top z$, que é o vetor de resíduos de mínimos quadrados ordinários da regressão linear com os dados transformados.

Smithson & Verkuilen (2006) trabalham com o ajuste do modelo de regressão beta através dos softwares R/SPlus, SPSS e SAS. Instruções, discussões e exemplos sobre as estimativas envolvidas nestes softwares são apresentadas e podem ser acessados na internet através da página <http://www.anu.edu.au/psychology/people/smithson/details/betareg/betareg.html>. Recentemente, um código em R (pacote “betareg”) foi desenvolvido por Simas (2006) para ajuste do modelo de regressão beta. As estimativas dos parâmetros são obtidas de diferentes formas em cada pacote e em todos eles são requeridos ao usuário valores iniciais para estimativas dos parâmetros. É interessante entender o que está envolvido na estimação dos parâmetros em cada software que se escolha utilizar e verificar como se comporta a convergência para diferentes valores iniciais dos parâmetros. De acordo com Smithson & Verkuilen (2005), nos vários ajustes realizados, os resultados geralmente convergiram para o valor ótimo assumindo bons valores iniciais dos parâmetros.

Neste trabalho optou-se pelo desenvolvimento de um programa na linguagem de programação matricial Ox (Doornik, 2001) para os ajustes dos modelos de regressão beta com a escolha de valores iniciais sugeridas por Ferrari & Cribari-Neto (2004).

1.3.2 Intervalos de Confiança

Para obter intervalos de confiança para os parâmetros de interesse pode-se considerar a distribuição assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ (ver (1.7)), substituindo K por $\hat{K}$, o estimador de máxima verossimilhança.

Um intervalo de confiança com coeficiente de confiança aproximado de $(1 - \alpha) \times 100\%$ para β_i , $i = 1, \dots, k$ e $0 < \alpha < 1$, tem limites dado por

$$\hat{\beta}_i \pm \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)\text{se}(\hat{\beta}_i),$$

onde $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória normal padrão e $\text{se}(\hat{\beta}_i)$ é o erro padrão para $\hat{\beta}_i$ obtido pela raiz quadrada do i -ésimo elemento da diagonal da matriz $\hat{K}^{-1}$. Para ϕ um intervalo de confiança com coeficiente de confiança aproximado de $(1 - \alpha) \times 100\%$ tem limites

$$\hat{\phi} \pm \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)\text{se}(\hat{\phi}),$$

onde $\text{se}(\hat{\phi}) = \hat{\gamma}^{-1/2}$ é o erro padrão para $\hat{\phi}$ obtido pelo $(k+2)$ -ésimo elemento da diagonal da matriz $\hat{K}^{-1}$. Finalmente, um intervalo de confiança com coeficiente de confiança aproximado de $(1 - \alpha) \times 100\%$ para μ_t , a média da variável resposta para um dado vetor de covariáveis $x_t^\top$, pode ser obtido por

$$[g^{-1}(\hat{\eta}_t - \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)\text{se}(\hat{\eta}_t)), g^{-1}(\hat{\eta}_t + \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)\text{se}(\hat{\eta}_t))],$$

onde $\eta_t = x_t^\top \hat{\beta}$ e o erro padrão de $\hat{\eta}_t$ é dado por $\text{se}(\hat{\eta}_t) = \left(x_t^\top \widehat{\text{cov}}(\hat{\beta}) x_t \right)^{1/2}$, sendo $\widehat{\text{cov}}(\hat{\beta})$ a matriz obtida da inversa da matriz de informação de Fisher avaliada nas estimativas de máxima verossimilhança, excluindo a linha e a coluna correspondente ao parâmetro de dispersão ϕ .

Avaliações da qualidade das aproximações utilizadas para este modelo podem ser vistas em Ospina, Cribari-Neto & Vasconcellos (2006) (ver também Oliveira, 2004). Através de estudos de simulações eles observaram bons resultados quanto ao viés, comportamento assintótico, taxa de cobertura e assimetria para os estimadores dos parâmetros de regressão e resultados não tão satisfatórios para o parâmetro de dispersão. Vale destacar que o parâmetro de dispersão exerce alguma influência nas estimativas intervalares dos parâmetros de regressão e pouca influência nas estimativas pontuais.

1.3.3 Funções de Ligação

A função $g(\cdot)$ é conhecida como função de ligação e existem muitas possibilidades para sua escolha. Como $g(\mu_t) = \eta_t$, então a média μ_t pode ser facilmente obtida pela inversa de $g(\mu_t)$ (ver (1.3)). Nos modelos de regressão beta a variável resposta tem distribuição definida no intervalo $(0, 1)$ e, portanto, a sua média também estará neste mesmo intervalo. Sendo assim, as funções de ligação aqui apresentadas levam o intervalo $(0, 1)$ a $\Re$. São elas:

- Logito: $g(\mu_t) = \log\left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t}\right)$; $\mu_t = \frac{e^{\eta_t}}{1 + e^{\eta_t}}$.
- Probit: $g(\mu_t) = \Phi^{-1}(\mu_t)$, onde $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória normal padrão; $\mu_t = \Phi(\eta_t)$.
- Complemento log-log: $g(\mu_t) = \log\{-\log(1 - \mu_t)\}$; $\mu_t = 1 - \exp\{-\exp(\eta_t)\}$.
- Log-log: $g(\mu_t) = -\log\{-\log(\mu_t)\}$; $\mu_t = \exp\{-\exp(-\eta_t)\}$.
- Aranda-Ordaz (assimétrica) (Aranda-Ordaz, 1981):

$$g(\mu_t, \lambda) = \log\left\{\frac{(1 - \mu_t)^{-\lambda} - 1}{\lambda}\right\}; \mu_t = 1 - (1 + \lambda \exp(\eta_t))^{-1/\lambda},$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro adicional que deverá ser especificado ou estimado. Aranda-Ordaz (1981) define a função $g(\mu_t, \lambda)$ para todo $\lambda \in \Re$. No entanto, $\lambda < 0$ implica em restrição no espaço paramétrico para η_t . De fato, se $\lambda < 0$, seja $\delta = -\lambda > 0$, então

$$\eta_t = \log\left\{-\frac{(1 - \mu_t)^\delta - 1}{\delta}\right\} = \log\left\{\frac{1 - (1 - \mu_t)^\delta}{\delta}\right\}.$$

Como $\mu_t \in (0, 1)$ pode-se escrever:

$$\begin{aligned} 0 < 1 - \mu_t < 1 &\Leftrightarrow 0 < (1 - \mu_t)^\delta < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - (1 - \mu_t)^\delta < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{1 - (1 - \mu_t)^\delta}{\delta} < \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \log\left\{\frac{1 - (1 - \mu_t)^\delta}{\delta}\right\} < \log\left\{\frac{1}{\delta}\right\}, \end{aligned}$$

portanto, $\eta_t \leq -\log(\delta)$. Note que quando $\lambda \rightarrow 0$, $g(\mu_t, \lambda) \rightarrow \log\{-\log(1 - \mu_t)\}$, que é a função de ligação complemento log-log. Desta forma, neste trabalho considerou-se apenas $\lambda > 0$ na definição da função de ligação Aranda-Ordaz.

Atkinson (1985) considera algumas funções (“folded-power”, Guerrero-Johnson e Aranda-Ordaz) em que um parâmetro adicional λ é incluído para transformação de porcentagens e proporções. Este trabalho incluirá o estudo da função de ligação de Aranda-Ordaz definida acima. Maiores detalhes sobre a utilização desta função de ligação serão vistos no Capítulo 3. A função de ligação logito é um caso particular da ligação de Aranda-Ordaz quando $\lambda = 1$.

A primeira derivada de $g(\mu_t)$, necessária para ajustar um modelo de regressão beta, é dada a seguir para cada função de ligação.

- Logito: $g'(\mu_t) = \frac{\{1 + \exp(\eta)\}^2}{\exp(\eta)}$.
- Probit: $g'(\mu_t) = \sqrt{2\pi} \exp\{\eta^2/2\}$.
- Complemento log-log: $g'(\mu_t) = \exp\{\exp(\eta) - \eta\}$.
- Log-log: $g'(\mu_t) = \exp\{\exp(-\eta) + \eta\}$.
- Aranda-Ordaz: $g'(\mu_t) = \frac{\lambda(1 - \mu_t)^{-(\lambda+1)}}{(1 - \mu_t)^{-\lambda} - 1}$.

Dentre as funções de ligação, a mais utilizada é a logito, pois possibilita interpretação simples para os parâmetros de regressão. Para função de ligação logito pode-se escrever

$$\frac{\mu_t}{1 - \mu_t} = \exp(\eta_t) = \exp(x_t^\top \beta).$$

Definindo $\mu_t^\dagger$ como a média de y_t com a i -ésima variável regressora acrescida de c unidades e as demais variáveis regressoras constantes tem-se

$$\frac{\mu_t^\dagger}{1 - \mu_t^\dagger} = \exp\{x_{t1}\beta_1 + \dots + (x_{ti} + c)\beta_i + \dots + x_{tk}\beta_k\},$$

e assim, é fácil verificar que

$$\exp(c\beta_i) = \frac{\mu_t^\dagger/(1 - \mu_t^\dagger)}{\mu_t/(1 - \mu_t)},$$

onde $\exp(c\beta_i)$ representa a razão de chances (“odds ratio”).

McCullagh & Nelder (1989) compararam a função de ligação logito com as funções de ligação probito, complemento log-log e log-log. Note que, se $c \in (0, 0.5)$, $g(0.5 - c) = -g(0.5 + c)$ para as funções de ligação: logito e probito. A função de ligação logito e

a probito são quase linearmente relacionadas quando μ_t pertence ao intervalo $[0.1; 0.9]$ e, por esta razão, fica mais difícil verificar com qual dessas funções se tem um melhor ajuste. Para valores pequenos de μ_t a função de ligação complemento log-log é próxima à logito. Já para valores de μ_t próximos de 1, é a função de ligação log-log que está próxima da função de ligação logito.

A Figura 1.2 apresenta o comportamento de η como função de μ para as funções de ligação logito, probito, complemento log-log, log-log e Aranda-Ordaz com $\lambda = 0.5$. É possível verificar que as funções de ligação logito e probito são próximas. A função de ligação complemento log-log tem comportamento similar à logito para valores de μ próximos de 0 e a função de ligação log-log tem comportamento similar à logito para valores de μ próximos de 1.

Figura 1.2: Gráfico de funções de ligação.

Para valores de μ próximos de 0, as funções de ligação logito e de Aranda-Ordaz ($\lambda = 0.5$) estão próximas, como se pode ver na Figura 1.2. Na Figura 1.3 são apresentados o comportamento de η como função de μ para a função de ligação de Aranda-Ordaz para diferentes valores de λ . Novamente se observa que para valores de μ próximos de 0 as funções de ligação de Aranda-Ordaz para qualquer valor de λ tem comportamento próximo ao da função de ligação logito (Aranda-Ordaz, $\lambda = 1$). Nota-se que quando $\lambda < 1$ na função de ligação de Aranda-Ordaz μ se aproxima mais rapidamente de 1 com

o aumento de η do que na função de ligação logito, já para $\lambda > 1$, μ se aproxima mais lentamente de um do que na função de ligação logito.

Figura 1.3: Gráfico de função de ligação de Aranda-Ordaz (λ).

Como mencionado anteriormente, existem muitas opções para escolha da função de ligação no ajuste do modelo de regressão beta. O foco deste trabalho é avaliar através de estudos de simulação o efeito da especificação inadequada da função de ligação nas inferências acerca das médias μ_t . Para isso serão comparados os ajustes obtidos com a função de ligação correta, a ser utilizada para geração dos dados, com uma função de ligação incorreta.

Myers, Montgomery & Vining (Seção 7.3, 2002) desenvolveram estudo semelhante para verificar o efeito da especificação inadequada da função de ligação em modelos lineares generalizados para as distribuições binomial, Poisson e gama. Foram comparados os ajustes com a função de ligação canônica e uma não canônica para cada distribuição; detalhes sobre as funções de ligação canônica para cada uma das distribuições podem ser vistas em McCullagh & Nelder (1989). Nos resultados apresentados por Myers, Montgomery & Vining (Seção 7.3, 2002) a função de ligação verdadeira foi a canônica e o ajuste com a função de ligação incorreta (uma que não fosse a canônica) causou impacto maior nas inferências dos resultados para as médias geradas a partir das distribuições binomial e Poisson, nos quais as taxas de cobertura de intervalos de confiança para as

médias diminuíram com o aumento do tamanho da amostra. Esta taxa de cobertura representa a proporção de vezes em que a média verdadeira pertence aos intervalos de confiança de 95% estimados para cada réplica de Monte Carlo, e o esperado é que com o aumento do tamanho da amostra esta medida se aproxime do valor nominal de 95%. Para a distribuição gama não foram verificados grandes problemas.

No Capítulo 2 serão verificados os efeitos da especificação inadequada no modelo de regressão beta para as funções de ligação logito, probito, complemento log-log e log-log. A utilização da função de ligação de Aranda-Ordaz no ajuste do modelo de regressão beta será discutida no Capítulo 3.

Os estudos serão realizados a partir de dados simulados utilizando o programa Ox (Doornik, 2001).

Especificação Incorreta da Função de Ligação

2.1 Introdução

Neste capítulo serão verificados os efeitos da especificação incorreta da função de ligação (logito, probito, complemento log-log e log-log) nos modelos de regressão beta. Para isso serão realizados estudos de simulação. Serão ajustados dois modelos de regressão beta utilizando duas funções de ligação diferentes para um mesmo vetor resposta $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$. Para obtenção do vetor resposta y a função de ligação será conhecida e esta será utilizada para o ajuste de um dos modelos de regressão beta.

As simulações dos ajustes dos modelos de regressão beta serão obtidas em réplicas de Monte Carlo. Em cada réplica serão geradas amostras aleatórias para o vetor da variável resposta $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, com $y_t \sim \text{Beta}(\mu_t, \phi)$, $t=1, \dots, n$. O parâmetro de dispersão ϕ será o mesmo para as n observações e a média será obtida por $\mu_t = g^{-1}(x_t^\top \beta)$, onde $g(\cdot)$ é a função de ligação, o vetor $x_t^\top$ é a t -ésima linha da matriz regressora X , e $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_k)$ é o vetor de parâmetros do modelo de regressão beta. O tamanho amostral n será escolhido de acordo com o interesse em avaliar os ajustes para amostras pequenas e grandes.

A simulação dos dados e os ajustes dos modelos de regressão beta em cada réplica de Monte Carlo serão realizados na linguagem de programação Ox e os números aleatórios envolvidos no processo serão obtidos através do gerador “GM - George Marsaglia” (ver detalhes em Doornik, 2001). O programa utilizado nas simulações é apresentado no Apêndice A.

O número de réplicas de Monte Carlo foi fixado em 10000. Em cada réplica de Monte Carlo serão obtidos intervalos de confiança com coeficiente de confiança nominal de 95% para as médias μ_t ($t=1,\dots,n$) e para o parâmetro de dispersão ϕ . A partir dos 10000 intervalos de confiança serão obtidas as taxas de cobertura e a medida de balanceamento para os parâmetros mencionados acima. A taxa de cobertura representa a proporção de vezes em que o verdadeiro parâmetro pertence ao intervalo de confiança, sendo esperada uma taxa de cobertura em torno de 95%. A medida de balanceamento é o resultado da subtração entre a proporção de vezes em que o verdadeiro valor do parâmetro é maior que o limite superior do intervalo de confiança estimado e a proporção de vezes em que o verdadeiro parâmetro é menor que o limite inferior deste intervalo. O ideal é que esta medida esteja em torno de zero. Se ela for positiva indica que os intervalos de confiança estão mais freqüentemente à esquerda do verdadeiro valor do parâmetro. Valores negativos desta medida indicam que os intervalos de confiança estão mais freqüentemente à direita do verdadeiro valor do parâmetro.

Para comparar os resultados inferenciais obtidos usando a função de ligação correta, ou verdadeira, com os obtidos sob má especificação da função de ligação foram utilizados 48 cenários que representam situações diversas. Os 48 cenários variam de acordo com a combinação das seguintes opções:

- tamanhos amostrais n “pequenos” (20 e 50) e “grandes” (250 e 500): espera-se que quanto maior seja o tamanho amostral melhores deverão ser os resultados de taxa de cobertura e medida de balanceamento para bons ajustes;
- dispersão ϕ igual a 20 e 120: com o aumento da dispersão, a variância de y passa a ser menor e por isso os intervalos de confiança para as médias terão menores amplitudes. Portanto, em ajustes ruins espera-se que uma proporção considerável dos intervalos de confiança não contenham o verdadeiro valor do parâmetro;
- com e sem réplicas nas observações da matriz X : a matriz regressora X sem réplicas será composta por uma coluna de uns (representando o intercepto) e duas colunas representando duas variáveis regressoras, obtidas como observações independentes da distribuição uniforme em $(0,1)$. Quando se utilizam réplicas na matriz X as primeiras dez observações dessa matriz serão obtidas de forma aleatória e as demais observações serão réplicas das anteriores. Mais especificamente, para as primeiras dez observações a primeira coluna é de uns, as duas outras colunas são obtidas

como observações independentes de distribuição uniforme em $(0, 1)$ e para atingir o tamanho amostral escolhido replica-se esta matriz;

- as médias próximas de 0, em torno de 0.5 ou próximas de 1: o vetor β será escolhido adequadamente para tal. Os intervalos para as médias foram escolhidos a partir dos comportamentos observados para relação entre μ_t e η_t com as diferentes funções de ligação apresentados na Figura 1.2. Foi observado, por exemplo, que para os valores das médias próximos de 0 as curvas da relação entre μ_t e η_t para as funções de ligação complemento log-log e logito estão próximas, entretanto, para valores próximos de 1 as curvas se afastam. Portanto, o interesse é verificar se essa separação na relação pode trazer diferenças inferenciais nos resultados.

Para cada cenário de simulação descrito acima ajustou-se um modelo com a função de ligação correta e outro com uma função de ligação incorreta. A Tabela 2.1 traz as combinações das funções de ligação utilizadas nos ajustes. No caso 1 está sendo utilizada a função de ligação logito como a verdadeira e optou-se por utilizar a função de ligação probito como função de ligação incorreta. Nos casos 2, 3 e 4 as funções de ligação correta utilizadas para simulação dos dados foram respectivamente probito, complemento log-log e log-log e a função de ligação incorreta para todos esses casos foi a função de ligação logito, pois na prática é a mais utilizada pela facilidade de interpretação dos seus parâmetros.

Tabela 2.1: Funções de Ligação Comparadas.

Caso	Correta	Incorreta
1	Logito	Probit
2	Probit	Logito
3	Complemento log-log	Logito
4	Log-log	Logito

Na seção seguinte serão discutidos os resultados obtidos para a taxa de cobertura e medida de balanceamento para as médias μ_t nas 10000 réplicas de Monte Carlo. Foram comparados os ajustes obtidos com as funções de ligação dadas na Tabela 2.1 nos 48 cenários propostos acima. No entanto, não seria conveniente apresentar aqui os detalhes

dos resultados obtidos para todas as simulações, portanto, os resultados serão comentados de forma global. Também serão avaliados a taxa de cobertura e balanceamento para ϕ .

2.2 Resultados das Simulações

2.2.1 Casos 1 e 2: Função de Ligação Logito e Probit

Os resultados obtidos tendo como função de ligação verdadeira a logito ou a probito e ajustando-se os modelos com essas duas funções de ligação, como descrito nos casos 1 e 2 da Tabela 2.1, foram semelhantes e por isso serão discutidos nesta mesma seção. Na Seção B.1 do Apêndice B são apresentadas tabelas com os resultados das simulações para os ajustes em que a função de ligação logito é a verdadeira (Tabelas B.1 a B.8) e na Seção B.2 os resultados quando a função de ligação verdadeira é a probito (Tabelas B.9 a B.16), todos considerando réplicas na matriz X .

Para as simulações das médias μ_t próximas de 0, em torno de 0.5 e próximas de 1 utilizaram-se os seguintes conjuntos de valores (vetores) para β , quando se assume como função de ligação verdadeira a logito: $(-0.7; -1.1; -2.3)$, $(0.7; 1.0; -1.0)$ e $(0.7; 1.1; 2.3)$. Esses vetores produziram médias μ_t nos intervalos $[0.021; 0.054]$, $[0.385; 0.614]$ e $[0.946; 0.979]$ respectivamente. Já para função de ligação probito sendo a verdadeira os vetores escolhidos para β foram $(-0.5; -0.3; -1.3)$, $(-0.2; -0.7; 0.5)$ e $(0.5; 0.3; 1.3)$ que geraram médias μ_t nos intervalos $[0.023; 0.056]$, $[0.386; 0.611]$ e $[0.944; 0.977]$ respectivamente.

Foram verificados resultados semelhantes nos ajustes com a função de ligação logito para as médias no intervalo próximas de zero e próximas de 1, pelo fato das duas funções de ligação (logito e probito) serem simétricas em torno de 0.5, e por isso na Seção B.1 são mostrados os resultados apenas para as médias μ_t próximas de 0. O mesmo se verifica quando se assume como função de ligação verdadeira a probito. Portanto, na Seção B.2 são apresentados os resultados para as médias μ_t próximas de 1.

Na Tabela B.1 ($n = 20$, $\phi = 20$ e médias μ_t próximas de 0) observa-se que as taxas de cobertura obtidas no ajuste com a função de ligação logito (correta) e no ajuste com a probito (incorreta) são próximas. Por exemplo, para $\mu_t = 0.054$ as taxas de cobertura são de 91.2% e 90.6% respectivamente. As medidas de balanceamento estão próximas para os dois ajustes e não estão afastadas de zero. Com o aumento do tamanho amostral os resultados obtidos nos dois ajustes continuam próximos e as taxas de cobertura se

aproximam de 95%, como pode ser visto na Tabela B.3. Resultados semelhantes podem ser vistos nas Tabelas B.9 e B.11, com médias próximas de um, nos quais a função de ligação correta é a probito e a incorreta é a logito.

Ainda nas Tabelas B.9 e B.11 pode-se notar que com o aumento do tamanho amostral (digamos, passando de 20 para 500) as medidas de balanceamento se aproximam mais de zero nos dois ajustes. Os valores máximos das medidas de balanceamento para $n = 20$ foram, em valor absoluto, de 4.2 e 3.7 nos ajustes com a função de ligação correta e incorreta respectivamente. Já para $n = 500$ essas medidas passam a ser 1.1 e 1.7 respectivamente.

As taxas de cobertura obtidas nos ajustes com $\phi = 20$ e 120 também são muito próximas, para todos os tamanhos amostrais avaliados, como se pode ver, por exemplo, comparando-se as Tabelas B.1 e B.2, para médias próximas de 0.

Nos resultados obtidos para a situação em que as médias são próximas zero, a medida de balanceamento na maioria das vezes é maior nos ajustes com a função de ligação incorreta que nos ajustes com a função de ligação correta. Entretanto, essas diferenças não se verificam quando as médias estão em torno de 0.5, como se pode ver, por exemplo, nas Tabelas B.13 e B.15, nas quais o máximo dessas medidas em valor absoluto é igual a 0.3 para todos os ajustes.

Observou-se a partir das simulações que as taxas de cobertura e balanceamento para os planejamentos com réplicas ou não na matriz X são semelhantes e por isso foram apresentados nas tabelas do Apêndice B apenas os resultados das simulações referentes ao planejamento com réplicas.

As estimativas para ϕ geraram taxas de coberturas sempre em torno de 95% e medidas de balanceamento próximas de zero em todos os ajustes considerados.

De forma geral, verificou-se a partir das simulações que quando a função de ligação verdadeira é a logito ou a probito, os ajustes com uma dessas duas funções trará resultados satisfatórios e semelhantes para as estimativas das médias μ_t . Com o aumento do tamanho amostral houve aproximação da taxa de cobertura ao valor nominal de 95% e o aumento de ϕ não causou nenhum impacto no desempenho das estimativas intervalares.

2.2.2 Caso 3: Função de Ligação Logito e Complemento Log-log

Nesta seção serão discutidos os resultados obtidos para os ajustes dos modelos obtidos com a função de ligação logito e complemento log-log, sendo que a função de ligação verdadeira é a complemento log-log. As Tabelas B.17 a B.28 do Apêndice B apresentam os resultados de alguns dos cenários simulados para estes ajustes, todos com réplicas na matriz X .

Para $\mu_t \in [0.022; 0.084]$, obtidos usando $\beta = (-0.5; -1.7; -1.9)$, foram verificados resultados semelhantes para os ajustes dos modelos de regressão beta com a função de ligação complemento log-log (correta) e com a função de ligação logito (incorreta). Os resultados verificados a partir das Tabelas B.17 a B.20 estão dentro do esperado, pois as taxas de coberturas se aproximam de 95% com o aumento do tamanho amostral nos dois ajustes e a medida de balanceamento se aproxima de zero. Não são observadas diferenças das conclusões acima para os resultados considerando os cenários em que $\phi = 20$ e 120 e X com e sem réplicas.

As Tabelas B.21 a B.24 trazem alguns dos resultados das simulações para a situação em que as médias μ_t estão no intervalo $[0.343; 0.657]$, obtidas usando $\beta = (-0.7; -1.0; 0.6)$ e considerando réplicas na matriz X . Pode-se observar que os ajustes dos modelos de regressão beta com a função de ligação logito incorreta produzem taxas de cobertura menores e medidas de balanceamento mais afastadas de zero quando comparados com os ajustes com a função de ligação correta. Na Tabela 2.2 pode-se observar, por exemplo, que para $\mu_t = 0.466$ a taxa de cobertura no ajuste do modelo com função de ligação correta é de 94.8% enquanto que no ajuste com a função de ligação incorreta é de 50.9%. As medidas de balanceamento são respectivamente iguais a 0.2% e -49.1%. No cenário desta última tabela foram consideradas réplicas na matriz X .

Na Tabela 2.3 comparam-se as simulações do cenário da Tabela 2.2 (planejamento com réplicas na matriz X) com o cenário em que não há réplicas na matriz X . Nestas tabelas de comparação dos resultados das simulações com e sem réplicas são mostradas as taxas de cobertura mínima (CobMin) e média (CobMed) e as medidas de balanceamento mínima (BalanMin) e máxima (BalanMax) para as n respostas médias. Na Tabela 2.3 é possível verificar que as médias das taxas de coberturas nos ajustes com a função de ligação correta estão próximas de 95% enquanto que nos ajustes com a função de ligação incorreta essas médias estão sempre abaixo, chegando ao valor de 54.7% quando a matriz

Tabela 2.2: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.343; 0.657]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.343	95.1	58.8	0.2	41.2
0.377	94.9	94.5	0.2	2.7
0.411	94.8	94.1	-0.1	-3.0
0.466	94.8	50.9	0.2	-49.1
0.536	94.3	85.6	0.0	-13.9
0.540	95.0	42.6	0.4	-57.4
0.583	94.3	92.8	-0.1	-5.1
0.644	94.6	87.6	0.4	11.9
0.652	94.5	73.3	0.3	26.6
0.657	94.7	75.8	0.4	24.1

Tabela 2.3: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxas de cobertura mínima e média, balanceamentos mínimo e máximo; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas e $\mu_t \in [0.343; 0.657]$, planejamento sem réplicas e $\mu_t \in [0.309; 0.819]$ e $n = 500$.

		Com Réplicas		Sem Réplicas	
	Medidas	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
$\phi=20$	CobMin(%)	94.4	84.9	94.3	12.3
	CobMed(%)	94.9	91.5	94.8	84.1
	BalanMax(%)	-0.1	10.6	0.4	87.7
	BalanMin(%)	-0.5	-14.6	-0.7	-29.8
$\phi=120$	CobMin(%)	94.3	42.6	94.2	0.0
	CobMed(%)	94.7	75.6	94.7	54.7
	BalanMax(%)	0.4	41.2	0.4	100.0
	BalanMin(%)	-0.1	-57.4	-0.3	-91.6

X é sem réplicas e $\phi = 120$.

De maneira geral, observou-se que, para os casos em que as médias verdadeiras estão em torno de 0.5, os ajustes com a função de ligação correta estão dentro do esperado, com taxas de coberturas próximas de 95% e medidas de balanceamento próximas de zero. Já nos ajustes com a função de ligação incorreta as taxas de cobertura são baixas e mais afastadas de 95% quando se aumentam o tamanho amostral e a dispersão ϕ e considera-se a matriz X sem réplicas. As medidas de balanceamento estão próximas de zero nos ajustes dos modelos que usam a função de ligação correta e afastadas de zero nos ajustes que utilizam a função de ligação incorreta.

Nas Tabelas B.25 a B.28 são apresentados alguns resultados das simulações para o cenário em que as médias estão intervalo $[0.913; 0.974]$, obtidas usando $\beta = (0.5; 0.3; 0.6)$. Nota-se que com o aumento do tamanho amostral há maior desbalanceamento para os intervalos de confiança e a taxa de cobertura é um pouco menor nos ajustes com a função de ligação incorreta do que nos ajustes com a função de ligação correta. Na Tabela 2.4 pode-se observar, por exemplo, que para $\mu_t = 0.946$ a taxa de cobertura obtida utilizando a função de ligação correta é de 95.0% enquanto que, quando a função de ligação é incorretamente especificada, essa taxa é de 86.6%; as medidas de balanceamento são, respectivamente, iguais a 0% e -12.7%.

Tabela 2.4: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.913; 0.974]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.913	95.1	91.1	0.1	8.2
0.917	95.1	93.6	0.1	4.8
0.920	95.1	94.8	0.0	2.0
0.933	95.1	89.9	-0.2	-9.2
0.946	95.0	86.6	0.0	-12.7
0.949	95.2	91.2	-0.4	-7.4
0.957	95.1	93.8	-0.4	-4.0
0.959	94.8	93.6	0.2	-3.4
0.966	94.8	93.9	-0.3	3.7
0.974	95.1	76.0	-0.2	23.8

Na Tabela 2.5 comparam-se os resultados obtidos com e sem réplicas em X e notam-se diferenças ainda maiores nos ajustes dos modelos com as funções de ligação correta e incorreta e sem réplicas em X . A cobertura mínima quando se consideram réplicas e $\phi = 120$ é de 76% e sem réplicas chega ao valor de 2.4% para pelo menos umas das médias enquanto que, para o ajuste com a função de ligação correta, as taxas estão sempre em torno de 95%. Observa-se também que o aumento na dispersão ϕ produz taxas de coberturas mais baixas nos ajustes com a função de ligação incorreta.

De forma geral, pode-se notar em todas as simulações realizadas que as estimativas para ϕ são sempre próximas nos dois modelos ajustados, com taxas de cobertura próximas de 95%. Quando se consideraram médias próximas de 0, os ajustes com a função de ligação correta (complemento log-log) e com a função de ligação incorreta (logito) trouxeram resultados semelhantes e próximos do esperado. Já para as médias

Tabela 2.5: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxas de cobertura mínima e média, balanceamentos mínimo e máximo; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas e $\mu_t \in [0.913; 0.974]$, planejamento sem réplicas e $\mu_t \in [0.850; 0.980]$ e $n = 500$.

		Com Réplicas		Sem Réplicas	
	Medidas	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
$\phi=20$	CobMin(%)	95.0	92.2	94.2	62.8
	CobMed(%)	95.1	94.1	94.9	91.0
	BalanMax(%)	0.2	6.6	0.0	37.1
	BalanMin(%)	-0.7	-5.5	-1.1	-13.5
$\phi=120$	CobMin(%)	94.8	76.0	94.3	2.4
	CobMed(%)	95.0	90.5	94.9	77.5
	BalanMax(%)	0.2	23.8	0.7	97.6
	BalanMin(%)	-0.4	-12.7	-0.5	-45.1

em torno de 0.5 e próximas de 1, o ajuste com a função de ligação correta continuou trazendo bons resultados, mas o ajuste com a função de ligação incorreta produziu taxas de cobertura baixas em alguns casos, que pioraram com o aumento do tamanho amostral, o aumento de ϕ e quando não há réplicas na matriz X .

2.2.3 Caso 4: Função de Ligação Correta Log-log e Incorreta Logito

Nesta seção serão abordados os resultados dos ajustes do modelo de regressão beta com as funções de ligação logito e log-log, sendo que a função de ligação verdadeira é a log-log. Alguns dos resultados dessas simulações estão mostrados no Apêndice B nas Tabelas B.29 a B.40, considerando réplicas na matriz X .

Nas Tabelas B.29 a B.32 são apresentados os resultados para a situação em que as médias μ_t estão no intervalo $[0.026; 0.087]$, obtidas com $\beta = (-0.5; -0.3; -0.6)$. Quando se ajusta o modelo com a função de ligação correta nota-se que com o aumento do tamanho amostral as taxas de cobertura para as médias estão em torno de 95% e o desbalanceamento próximo de zero. Já para o ajuste com a função de ligação incorreta se verifica uma queda na taxa de cobertura e maior desbalanceamento de alguns casos. Esse afastamento dos resultados esperados é maior para os cenários em que $\phi = 120$, como se pode ver na Tabela 2.6, nos quais réplicas da matriz X foram consideradas. No ajuste do modelo com a função de ligação correta as taxas de cobertura estão sempre

próximas de 95% enquanto que no ajuste com a função de ligação incorreta as taxas estão abaixo de 90%. Por exemplo, para $\mu_t = 0.054$ a taxa de cobertura é 94.9% no ajuste com a função de ligação correta e 86.3% no ajuste com a função de ligação incorreta e as medidas de balanceamento são, respectivamente, iguais a 0.5% e 13.2%.

Tabela 2.6: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.026; 0.087]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.026	94.7	76.2	0.3	-23.7
0.034	94.7	93.7	0.5	-3.9
0.041	94.7	93.8	0.2	3.7
0.043	95.2	93.9	0.4	3.9
0.051	95.1	91.2	0.3	7.4
0.054	94.9	86.3	0.5	13.2
0.067	94.9	90.0	0.3	9.3
0.080	95.0	94.7	0.2	-2.1
0.083	95.2	93.3	0.1	-5.2
0.087	95.2	90.5	0.1	-8.8

É possível comparar os resultados obtidos para $\phi = 20$ e 120 e X com e sem réplicas na Tabela 2.7. Nos ajustes sem réplicas na matriz X notam-se maiores diferenças entre os ajustes dos modelos com a função de ligação correta e incorreta, a média das taxas de cobertura que é de 94.7% nos ajustes com a função de ligação correta passa a ser de 77.3% nos ajustes com a função de ligação incorreta, quando $\phi = 120$. Pode-se verificar também que com o aumento da dispersão ϕ os resultados são mais afastados do esperado nos ajustes com a função de ligação incorreta.

Nas Tabelas B.33 a B.36 são apresentados os resultados para as médias no intervalo $[0.430; 0.592]$, obtidas com $\beta = (0.3; -0.4; 0.4)$ e réplicas na matriz X . Observou-se a partir dessas tabelas que há aproximação maior aos resultados esperados nos ajustes com a função de ligação correta, com taxas de cobertura em torno de 95% e medidas de balanceamento próximas de zero. Nos ajustes com a função de ligação incorreta as taxas de cobertura ficaram próximas de 95% e as medidas de balanceamento próximas de zero, porém mais afastadas de zero do que os resultados obtidos nos ajustes com a função de ligação correta. Esse desbalanceamento quando se ajusta o modelo com a função de ligação incorreta gera uma queda um pouco maior nas taxas de cobertura quando se considera X sem réplicas. Por exemplo, a taxa de cobertura mínima obtida nos ajustes

Tabela 2.7: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxas de cobertura mínima e média, balanceamentos mínimo e máximo; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas e $\mu_t \in [0.026; 0.087]$, planejamento sem réplicas e $\mu_t \in [0.020; 0.150]$ e $n = 500$.

		Com Réplicas		Sem Réplicas	
	Medidas	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
$\phi=20$	CobMin(%)	94.7	91.8	94.5	61.5
	CobMed(%)	94.9	94.0	94.9	90.9
	BalanMax(%)	0.8	5.8	1.3	13.4
	BalanMin(%)	0.1	-6.9	0.1	-38.4
$\phi=120$	CobMin(%)	94.7	76.2	94.4	2.6
	CobMed(%)	95.0	90.4	94.7	77.3
	BalanMax(%)	0.5	13.2	0.9	45.9
	BalanMin(%)	0.1	-23.6	-0.2	-97.4

com a função de ligação incorreta foi 83.5% para $n = 500$, $\phi = 120$ e sem réplicas na matriz X , enquanto que no mesmo ajuste considerando réplicas na matriz X esse valor mínimo foi de 91.3%.

Pelas Tabelas B.37 a B.40 bons resultados são observados nos ajustes com a função de ligação correta e incorreta para o cenário com réplicas na matriz X e médias no intervalo $[0.932; 0.974]$, obtidas para $\beta = (0.7; 1.1; 2.1)$. Mais especificamente, a taxa de cobertura aumenta e a medida de balanceamento se aproxima de zero com o aumento do tamanho amostral, para todo ϕ . Os resultados verificados sem réplicas na matriz X são semelhantes aos obtidos nos ajustes considerando réplicas nesta matriz.

Pode-se notar em todas simulações realizadas que as estimativas para a dispersão ϕ são sempre próximas nos dois modelos ajustados, com cobertura e balanceamento similares em todos os casos.

De forma geral, verificou-se que os ajustes com a função de ligação correta e a incorreta trouxeram bons resultados quando as médias estão em torno de 0.5 e próximas de 1, com um pequeno afastamento do esperado para as médias em torno de 0.5. Considerando as médias próximas de 0 nos ajustes com a função de ligação correta os resultados estiveram dentro do esperado, já nos ajustes com a função de ligação incorreta as taxas de cobertura são baixas para algumas médias, e os resultados tendem a se afastar do esperado com o aumento do tamanho amostral, aumento de ϕ e quando não se consideram réplicas na matriz X .

2.2.4 Discussão dos Resultados das Simulações

Nos casos 1 e 2, quando se utilizaram as funções de ligação logito e probito, os resultados para taxa de cobertura e balanceamento foram observados como esperado. As taxas de cobertura se aproximaram de 95% e as medidas de balanceamento se aproximaram de 0, independente da dispersão ϕ ser alta ou baixa e de haver réplicas ou não na matriz X .

A má especificação da função de ligação afetou os resultados da taxa de cobertura das médias e do balanceamento quando a função de ligação verdadeira era a complemento log-log ou a log-log e se ajustaram os modelos com função de ligação logito (casos 3 e 4). Quando a função de ligação verdadeira era a complemento log-log os resultados ficaram abaixo do esperado para as médias em torno de 0.5 e próximas de 1. Já quando a função de ligação verdadeira era a log-log os resultados foram comprometidos para situação em que as médias são próximas de 0. Essas quedas nas taxas de cobertura e aumento das medidas de balanceamento para alguns casos foram observados mais claramente para amostras grandes, valores altos de ϕ e para o planejamento sem réplicas na matriz X .

2.3 Avaliação da Adequação da Função de Ligação

Algumas medidas de adequação dos modelos serão analisadas nesta seção para verificar se são úteis para detectar a especificação incorreta da função de ligação nos modelos de regressão beta. A análise inicial será a dos resíduos. Os resíduos a serem tratados aqui neste trabalho serão: resíduos ordinários padronizados definidos por Ferrari & Cribari-Neto (2004) e resíduos ponderados padronizados 1 e 2 definidos por Espinheira, Ferrari & Cribari-Neto (2007). Esses resíduos podem ser descritos por:

- resíduos ordinários padronizados: $r_t = \frac{y_t - \hat{\mu}_t}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(y_t)}}$;
- resíduos ponderados padronizados 1: $r_t^p = \frac{y_t^* - \hat{\mu}_t^*}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(y_t^*)}}$;
- resíduos ponderados padronizados 2: $r_t^{pp} = \frac{y_t^* - \hat{\mu}_t^*}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(y_t^*)(1 - h_{tt})}}$;

onde $\widehat{\text{var}}(y_t) = \hat{\mu}_t(1 - \hat{\mu}_t)/(1 + \hat{\phi})$, $\widehat{\text{var}}(y_t^*) = \hat{v}_t = \psi'(\hat{\mu}_t\hat{\phi}) + \psi'((1 - \hat{\mu}_t)\hat{\phi})$, h_{tt} denota o t -ésimo elemento da diagonal de $H = \hat{W}^{1/2}X(X\top\hat{W}X)^{-1}X\top\hat{W}^{1/2}$ (W foi definido na Seção 1.3), y_t^* é o logito de y_t e $\hat{\mu}_t^*$ seu valor esperado. As quantidades são estimadas a partir de $\hat{\mu}_t = g^{-1}(x_t^\top\hat{\beta})$, sendo $\hat{\beta}$ e $\hat{\phi}$ os estimadores de máxima verossimilhança de β e ϕ respectivamente.

Os três resíduos descritos acima foram obtidos para uma amostra em cada caso em que a especificação incorreta da função de ligação afetou as taxas de cobertura e as medidas de balanceamento, conforme visto na seção anterior. Os casos considerados foram: função de ligação verdadeira complemento log-log com as médias próximas de 1 e em torno de 0.5 e função de ligação verdadeira log-log com as médias próximas de 0. A função de ligação incorreta que produziu taxas de cobertura ruins nestes casos é a logito.

Foram construídos os gráficos de cada um dos três resíduos contra os índices das observações e gráficos quantil-quantil com envelopes simulados, proposto por Atkinson (1985), para todas as amostras. Observou-se na comparação dos gráficos para os três resíduos que o comportamento dos resíduos são próximos, portanto serão apresentados neste trabalho apenas os gráficos obtidos com os resíduos ponderados padronizados 2, que são os resíduos recomendados por Espinheira, Ferrari & Cribari-Neto (2007).

Além dos gráficos anteriores foi construído o gráfico da variável dependente modificada z_{mod} contra o preditor linear η , que segundo Paula (2004) e Demetrio (2001) pode servir para verificar a adequação da função de ligação nos estudos de MLG; esse gráfico deve ser próximo a uma reta se a função de ligação utilizada for satisfatória. A variável dependente modificada pode ser obtida por $z_{\text{mod}} = \eta + W^{-1}T(y^* - \mu^*)$, sendo as quantidades definidas na Seção 1.3 (detalhes em Espinheira, Ferrari & Cribari-Neto, 2007).

Na Figura 2.1 são mostrados os resultados dos ajustes dos modelos de regressão beta com as funções de ligação logito e complemento log-log para uma amostra de dados simulada a partir da função de ligação verdadeira: complemento log-log com $n = 500$, $\phi = 120$ e $\mu_t \in [0.844; 0.982]$. Na Figura 2.2 o cenário considerado é semelhante ao descrito para a Figura 2.1 com a diferença que $\mu_t \in [0.291; 0.829]$. Na Figura 2.3 são mostrados os resultados dos ajustes dos modelos de regressão beta com as funções de ligação logito e log-log para uma amostra de dados simulada a partir da função de ligação log-log com $n = 500$, $\phi = 120$ e $\mu_t \in [0.019; 0.159]$. Os valores escolhidos para β para obtenção das médias μ_t nesses intervalos são os mesmos definidos na Seção 2.2; nesse caso

foram obtidos novos números aleatórios para matriz de planejamento sem réplicas, e por isso os intervalos para as médias não são exatamente os mesmos obtidos anteriormente.

Figura 2.1: Gráficos de resíduos e variável dependente modificada - função de ligação verdadeira complemento log-log e $\mu_t \in [0.844; 0.982]$.

Em todas as figuras apresentadas notam-se que nos gráficos dos resíduos contra os índices das observações há dispersão aparentemente aleatória destes resíduos com alguns pontos acima de 2 e abaixo de -2, sendo estes resultados semelhantes na comparação dos ajustes (com as funções de ligação correta e incorreta). Nos gráficos quantil-quantil com envelopes simulados não há nenhuma evidência no ajuste com a função de ligação incorreta que o diferencie dos resultados obtidos com a função de ligação correta. Nos gráficos da variável dependente modificada contra o preditor linear se verifica uma tendência linear para todos os ajustes utilizando a função de ligação correta. Já nos ajustes utilizando a função de ligação logito (incorreta) com dados simulados com a função de ligação complemento log-log nota-se relação ligeiramente não linear entre a variável dependente modificada contra o preditor linear. No caso em que os dados foram simulados utilizando a função de ligação log-log e ajustou-se o modelo com a função logito (incorreta) foi ve-

Figura 2.2: Gráficos de resíduos e variável dependente modificada - função de ligação verdadeira complemento log-log e $\mu_t \in [0.291; 0.829]$.

rificada tendência linear na relação da variável dependente modificada com o preditor linear.

Foram avaliadas também algumas medidas de influência, por exemplo, distância de Cook e influência local, desenvolvidas por Espinheira Ospina (2007) no modelo de regressão beta. Essas não detectaram nenhuma evidência da especificação incorreta da função de ligação e por isso não estão aqui apresentadas.

O teste score baseado no teste RESET (Lima, 2007) foi aplicado para verificar se a especificação incorreta da função de ligação pode ser detectada. O teste score é aplicado para testar a hipótese nula $\gamma = 0$ (o modelo está bem especificado) contra a hipótese alternativa $\gamma \neq 0$ (o modelo está mal especificado) na regressão aumentada $g(\mu) = X\beta + Z\gamma$, onde Z é uma matriz $n \times s$ de variáveis de teste e γ é um vetor $s \times 1$ de parâmetros. A estatística do teste utilizada é a estatística score do teste da exclusão dos termos adicionais neste modelo. A variável de teste utilizada neste estudo é $\hat{\eta}_t^2$ e os resultados dos testes são apresentados na Tabela 2.8.

Figura 2.3: Gráficos de resíduos e variável dependente modificada - função de ligação verdadeira log-log e $\mu_t \in [0.019; 0.159]$.

Tabela 2.8: P -valor obtido no teste escore para variável adicional $\hat{\eta}_t^2$.

Função de ligação		Intervalo das médias μ_t	Ajuste com função de ligação	
Correta	Incorreta		Correta	Incorreta
comp log-log	logito	[0.844;0.982]	0.6688	0.0572
comp log-log	logito	[0.291;0.829]	0.1295	< 0.0001
log-log	logito	[0.019;0.159]	0.342	0.148

Nota-se na Tabela 2.8 que o teste não rejeita a hipótese nula, ou seja, não há evidências de má especificação do modelo, em todos os ajustes em que a função de ligação correta foi utilizada. Nos testes realizados nos ajustes em que a função de ligação logito (incorreta) foi utilizada rejeita-se a hipótese nula ao nível de 10% quando a função de ligação complemento log-log é a verdadeira (p -valor < 0.10), indicando que o modelo não está bem especificado. No caso em que a função de ligação log-log é a correta, a hipótese nula não é rejeitada no teste para o ajuste com a função de ligação logito (incorreta).

A partir desses resultados verificou-se que os resíduos não se mostraram eficientes para detectar a especificação incorreta da função de ligação nos casos estudados. A utilização

da variável dependente modificada detectou a especificação incorreta da função de ligação em dois dos casos avaliados, assim como o teste que utiliza a variável adicional $\hat{\eta}^2$.

2.3.1 Viés Relativo dos Estimadores das Médias

Nesta seção será estudado o viés relativo das estimativas para as médias nos ajustes com as funções de ligação correta e incorreta para os casos em que se observaram taxas de cobertura bem abaixo do esperado quando se especificou incorretamente a função de ligação.

Para obtenção do viés relativo médio foram consideradas 1000 réplicas de Monte Carlo, amostras de tamanho 500 e $\phi = 120$. Para cada média μ_t , $t=1, \dots, 500$, calculou-se o viés relativo (VR) da seguinte forma:

$$\text{VR} = \frac{|\hat{\mu}_t - \mu_t|}{\mu_t},$$

onde $\hat{\mu}_t$ são as estimativas obtidas para as médias μ_t , $t=1, \dots, 500$, nos ajustes dos modelos de regressão beta.

As funções de ligações verdadeiras a serem utilizadas para geração dos dados simulados são as mesmas utilizadas para análise de resíduos: função de ligação complemento log-log com as médias próximas de 1 e em torno de 0.5; e função de ligação log-log com as médias próximas de 0.

Os resultados avaliados foram vieses relativos mínimo, médio e máximo para os estimadores das médias e o gráfico com o viés médio dos estimadores de todas as médias tanto para o ajuste com função de ligação verdadeira como para o ajuste com a função de ligação logito (incorreta).

Para obtenção das médias nos intervalos de interesse foram utilizados os mesmos valores para β mencionados na seção anterior com novos valores aleatórios para matriz de planejamento X . A função de ligação para geração dos dados e o intervalo obtido para as médias foram:

- (i) função de ligação complemento log-log e $\mu_t \in [0.842; 0.981]$;
- (ii) função de ligação complemento log-log e $\mu_t \in [0.295; 0.828]$;
- (iii) função de ligação log-log e $\mu_t \in [0.019; 0.153]$.

Na Figura 2.4 são apresentados os resultados referentes aos cenários (i) e (ii). Nota-se que os vieses médios obtidos no ajuste do modelo com a função de ligação correta são sempre menores que os obtidos no ajuste com a função de ligação logito. Considerando

ainda os dados gerados em (i) e (ii), nota-se a partir da Tabela 2.9 que o máximo dos vieses relativos obtidos nos ajustes com a função de ligação logito foram aproximadamente iguais a 0.013 e 0.081, respectivamente. Portanto, apesar dos vieses relativos no ajuste com a função de ligação logito serem maiores, como visto na figura anterior, as estimativas de μ_t são consideravelmente próximas às verdadeiras médias μ_t .

Figura 2.4: Vieses relativos dos estimadores das médias - função de ligação correta complemento log-log e incorreta logito.

Tabela 2.9: Vieses relativos mínimo, médio e máximo - função de ligação correta complemento log-log e incorreta logito.

(i) $\mu_t \in [0.842; 0.981]$		
Medidas	Função de Ligação Ajustada	
	correta	logito
ViesRelMin	8.11E-08	2.10E-05
ViesRelMed	4.35E-05	2.00E-03
ViesRelMax	6.14E-05	1.34E-02

(ii) $\mu_t \in [0.295; 0.828]$		
Medidas	Função de Ligação Ajustada	
	correta	logito
ViesRelMin	3.52E-07	3.32E-05
ViesRelMed	5.80E-05	1.29E-02
ViesRelMax	1.28E-04	8.11E-02

Na Figura 2.5 são apresentados os resultados para o cenário (iii). Novamente verifica-se que nos ajustes com a função de ligação logito (incorreta) os vieses relativos são sempre maiores que os obtidos nos ajustes com a função ligação correta. Nota-se a partir da Tabela 2.10, ainda no cenário (iii), que os vieses relativos médios obtidos no ajuste com a função de ligação correta foram próximos de zero (máximo de 0.0001). Já para os ajustes obtidos com a função de ligação logito, verifica-se que a média dos vieses relativos foi aproximadamente igual a 0,03 e o máximo dos vieses relativos médio é aproximadamente igual a 0,21, portanto, essas diferenças podem ser consideradas altas para algumas médias μ_t .

Nos três cenários verificou-se que o ajuste com a função de ligação logito (incorreta) apresentou vieses relativos sempre maiores que os obtidos nos ajustes com a função de

Figura 2.5: Vieses relativos dos estimadores das médias - função de ligação correta log-log, incorreta logito e $\mu_t \in [0.019; 0.153]$.

Tabela 2.10: Vieses relativos mínimo, médio e máximo - função de ligação correta log-log, incorreta logito e $\mu_t \in [0.019; 0.153]$.

Medidas	Função de Ligação Ajustada	
	correta	logito
ViesRelMin	4.72E-07	2.00E-06
ViesRelMed	1.44E-04	2.78E-02
ViesRelMax	7.96E-04	2.12E-01

ligação correta. No entanto, ainda que os vieses relativos sejam maiores quando se ajusta o modelo com a função de ligação logito, em média as estimativas para as médias estão próximas dos seus verdadeiros valores, portanto, os resultados podem ser bons ainda que a função de ligação de logito esteja especificada incorretamente.

2.4 Conclusões

Neste capítulo foi dado como foco a utilização da função de ligação logito sendo a incorreta nos ajustes de modelos de regressão beta, pois ela é mais utilizada pela facilidade de interpretação dos parâmetros de regressão. As funções de ligação probito, complemento log-log e log-log foram utilizadas como sendo as funções de ligação corretas. Para avaliação dos resultados nos ajustes foi obtida a proporção de vezes em que os verdadeiros valores para as médias estavam nos intervalos estimados com 95% de confiança (taxa de cobertura) nas simulações de Monte Carlo. Nos casos em que a função de ligação correta era a complemento log-log e a log-log, o ajuste com a função de ligação logito (incorreta) apresentou resultados com baixas taxas de cobertura em alguns cenários estudados. Nos casos em que a função de ligação verdadeira foi a probito, os ajustes com a função de ligação logito foram considerados satisfatórios em relação às taxas de coberturas para as

médias.

Nos casos em que a utilização da função de ligação logito (incorreta) não trouxe resultados bons em relação aos intervalos de confiança para as médias, foram feitas análises dos resíduos das observações da variável resposta, estudo da variável dependente modificada e teste RESET com a inclusão da variável $\hat{\eta}_t^2$. Dentre estas análises, o estudo da variável dependente modificada e o teste RESET foram os que detectaram a especificação incorreta da função de ligação em alguns cenários. Os resíduos não detectaram a especificação incorreta em nenhum cenário. Verificou-se através dos vieses relativos dos estimadores de máxima verossimilhança para as médias que, apesar das taxas de cobertura terem sido baixas para alguns ajustes utilizando a função de ligação logito (incorreta), as estimativas das médias estavam próximas aos seus verdadeiros valores, pois os vieses observados são pequenos.

Função de Ligação de Aranda-Ordaz

3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado o modelo de regressão beta com a função de ligação de Aranda-Ordaz assimétrica. Essa função foi proposta por Aranda-Ordaz (1981) como uma alternativa para transformação de probabilidades, freqüentemente utilizada na análise de dados com resposta binária. Assim, essa também é uma função adequada como escolha para função de ligação no modelo de regressão beta.

A função de ligação de Aranda-Ordaz assimétrica é definida por

$$g(\mu, \lambda) = \log \left\{ \frac{(1 - \mu)^{-\lambda} - 1}{\lambda} \right\},$$

onde $\mu \in (0, 1)$ e $\lambda > 0$. Dessa forma, escrevendo $g(\mu, \lambda) = \eta$, tem-se

$$\mu = 1 - (1 + \lambda \exp(\eta))^{-1/\lambda}. \quad (3.1)$$

As funções de ligação logito e complemento log-log são casos particulares da função de ligação de Aranda-Ordaz quando $\lambda = 1$ e $\lambda \rightarrow 0$ respectivamente.

Para utilização da função de ligação de Aranda-Ordaz é necessário fixar um valor para λ ou estimá-lo a partir dos dados. Aqui este parâmetro será estimado por máxima verossimilhança e seu estimador será avaliado a partir de simulações de Monte Carlo.

Para λ conhecido, o processo para o ajuste do modelo de regressão beta é o mesmo descrito no Capítulo 1 em que se estimam apenas os parâmetros β e ϕ . Quando λ for desconhecido será necessário estimá-lo. Para estimar este parâmetro por máxima verossimilhança é preciso levar em consideração que μ_t depende de λ , como visto em

3.1, e, portanto, deve-se obter as funções escore e a matriz de informação de Fisher para os parâmetros β , ϕ e λ , dado que a função de verossimilhança depende também do parâmetro λ desconhecido. Os cálculos para obtenção dessas funções são apresentados na seção seguinte.

3.2 Função Escore e Matriz de Informação

A função de log-verossimilhança baseada em uma amostra de n observações independentes com distribuição beta de média μ_t , $t = 1, \dots, n$, parâmetro de dispersão ϕ e considerando a função de ligação de Aranda-Ordaz, que depende do parâmetro adicional λ , é dada por

$$\ell(\beta, \phi, \lambda) = \sum_{t=1}^n \ell_t(\mu_t, \phi),$$

onde

$$\begin{aligned} \ell_t(\mu_t, \phi) &= \log \Gamma(\phi) - \log \Gamma(\mu_t \phi) - \log \Gamma((1 - \mu_t)\phi) + (\mu_t \phi - 1) \log y_t \\ &\quad + \{(1 - \mu_t)\phi - 1\} \log(1 - y_t). \end{aligned}$$

Esta função de log-verossimilhança difere da apresentada na equação (1.4) por μ_t depender do parâmetro adicional λ quando a função de ligação de Aranda-Ordaz assimétrica é utilizada.

As funções escore $(U_\beta(\beta, \phi), U_\phi(\beta, \phi))^T$ obtidas pela diferenciação da função de log-verossimilhança com respeito aos parâmetros (β, ϕ) dadas, respectivamente, em (1.5) e (1.6), não se alteram com a inclusão do novo parâmetro λ . Portanto, as funções escore com respeito a β e ϕ podem ser escritas, respectivamente, como $U_\beta(\beta, \phi, \lambda) = U_\beta(\beta, \phi)$ e $U_\phi(\beta, \phi, \lambda) = U_\phi(\beta, \phi)$. Para obtenção da função escore para λ , $U_\lambda(\beta, \phi, \lambda)$, deve-se derivar a função de log-verossimilhança $\ell(\beta, \phi, \lambda)$ em relação a este parâmetro como segue:

$$\frac{\partial \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda}.$$

Como demonstrado por Ferrari & Cribari-Neto (2004), tem-se que

$$\frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} = \phi(y_t^* - \mu_t^*),$$

onde $y_t^* = \log\{y_t/(1 - y_t)\}$, $\mu_t^* = \psi(\mu_t\phi) - \psi((1 - \mu_t)\phi)$ e $\psi(\cdot)$ é a função digama. A derivada de μ_t em relação a λ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda} &= \frac{\partial [1 - (1 + \lambda \exp(\eta_t))^{-1/\lambda}]}{\partial \lambda} \\
&= -\frac{\partial [(1 + \lambda \exp(\eta_t))^{-1/\lambda}]}{\partial \lambda} = -\frac{\partial (\exp[-\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda \exp(\eta_t))])}{\partial \lambda} \\
&= -\frac{\partial [-\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda \exp(\eta_t))]}{\partial \lambda} \exp\left[-\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda \exp(\eta_t))\right] \\
&= \frac{\partial \left[\frac{\log(1 + \lambda \exp(\eta_t))}{\lambda}\right]}{\partial \lambda} (1 + \lambda \exp(\eta_t))^{-1/\lambda} \\
&= \frac{\frac{1}{(1 + \lambda \exp(\eta_t))} \exp(\eta_t) \lambda - \log(1 + \lambda \exp(\eta_t))}{\lambda^2} (1 + \lambda \exp(\eta_t))^{-1/\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{(\exp(-\eta_t) + \lambda)} - \frac{\log(1 + \lambda \exp(\eta_t))}{\lambda} \right] (1 + \lambda \exp(\eta_t))^{-1/\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} q_t.
\end{aligned}$$

Finalmente, a função escore em relação a λ pode ser escrita como

$$U_\lambda(\beta, \phi, \lambda) = \phi \sum_{t=1}^n (y_t^* - \mu_t^*) q_t.$$

Para obtenção da matriz de informação de Fisher é necessário obter a segunda derivada das funções escore $U_\lambda(\beta, \phi, \lambda)$, $U_\beta(\beta, \phi, \lambda)$ e $U_\phi(\beta, \phi, \lambda)$ em relação a λ .

A derivada de $U_\lambda(\beta, \phi, \lambda)$ em relação a λ pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \lambda^2} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \left[\frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda} \right]^2 + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial^2 \mu_t}{\partial \lambda^2}.$$

Tem-se também que

$$\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} = -\phi^2 \{ \psi'(\mu_t\phi) + \psi'((1 - \mu_t)\phi) \} \stackrel{\text{def}}{=} -\phi^2 v_t,$$

onde $v_t = \psi'(\mu_t\phi) + \psi'((1 - \mu_t)\phi)$ (ver Ferrari & Cribari-Neto, 2004). Como $E(\partial \ell_t(\mu_t, \phi)/\partial \mu_t) = 0$, não é necessário calcular $\partial^2 \mu_t/\partial \lambda^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \lambda^2}\right) &= E\left(\sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \left[\frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda} \right]^2\right) \\
&= \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \left[\frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda} \right]^2 = -\phi^2 \sum_{t=1}^n v_t q_t^2,
\end{aligned}$$

que pode ser escrita em forma matricial como

$$E \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right) = -\phi^2 \text{tr}(VQ^2),$$

onde $V = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)$, $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ e tr denota o “traço” da matriz.

Para obter a segunda derivada da função de log-verossimilhança em relação a β_i e λ conjuntamente deve-se considerar a primeira derivada com respeito a β_i obtida por Ferrari & Cribari-Neto (2004), dada por

$$\frac{\partial \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \beta_i} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta_i}.$$

Assim, a segunda derivada da função da verossimilhança com respeito a β_i e λ pode ser obtida por

$$\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \beta_i \partial \lambda} = \sum_{t=1}^n \left[\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} + \frac{\partial \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \right) \right] x_{ti},$$

e como $E(\partial \ell_t(\mu_t, \phi)/\partial \mu_t) = 0$ e $\partial \mu_t/\partial \eta_t = [\partial g(\mu_t, \lambda)/\partial \mu_t]^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} s_t$, tem-se

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \beta_i \partial \lambda} \right) &= E \left(\sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} x_{ti} \right) \\ &= \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t^2} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} x_{ti} = -\phi^2 \sum_{t=1}^n v_t s_t q_t x_{ti}, \end{aligned}$$

$i = 0, 1, \dots, k$. Assim, em notação matricial, obtém-se

$$E \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \beta \partial \lambda} \right) = -\phi^2 X^\top V T Q \mathbf{1}_n,$$

onde X é a matriz $n \times (k+1)$ com as k variáveis regressoras, V e Q foram definidos anteriormente, $T = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ e $\mathbf{1}_n$ é um vetor coluna de uns e dimensão n .

A segunda derivada da função log-verossimilhança com respeito a λ e ϕ pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \lambda \partial \phi} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t \partial \phi} \frac{\partial \mu_t}{\partial \lambda}.$$

Ferrari & Cribari-Neto (2004) mostram que

$$\frac{\partial^2 \ell_t(\mu_t, \phi)}{\partial \mu_t \partial \phi} = \{(y_t^* - \mu_t^*) - \phi [\psi'(\mu_t \phi) \mu_t - \psi'((1 - \mu_t) \phi) (1 - \mu_t)]\}$$

e, como, $E(y_t^*) = (\mu_t^*)$, tem-se

$$E\left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \lambda \partial \phi}\right) = E(-\phi [\psi'(\mu_t \phi) \mu_t - \psi'((1 - \mu_t) \phi))(1 - \mu_t) q_t) = -\phi \sum_{t=1}^n m_t q_t,$$

onde $m_t \stackrel{def}{=} \psi'(\mu_t \phi) \mu_t - \psi'((1 - \mu_t) \phi)(1 - \mu_t)$. Em forma matricial, tem-se

$$E\left(\frac{\partial^2 \ell(\beta, \phi, \lambda)}{\partial \lambda \partial \phi}\right) = -\phi \text{tr}(MQ),$$

onde Q foi definido anteriormente e $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$.

Pode-se então reescrever a matriz de informação de Fisher para $(\beta, \phi$ e $\lambda)$ como

$$K = K(\beta, \phi, \lambda) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\phi} & K_{\beta\lambda} \\ K_{\phi\beta} & K_{\phi\phi} & K_{\phi\lambda} \\ K_{\lambda\beta} & K_{\lambda\phi} & K_{\lambda\lambda} \end{pmatrix},$$

onde $K_{\beta\beta} = \phi X^\top W X$, $K_{\beta\phi} = K_{\phi\beta}^\top = X^\top T c$, $K_{\beta\lambda} = K_{\lambda\beta}^\top = \phi^2 X^\top V T Q I_n$, $K_{\phi\phi} = \text{tr}(D)$, $K_{\phi\lambda} = K_{\lambda\phi}^\top = \phi \text{tr}(MQ)$ e $K_{\lambda\lambda} = \phi^2 \text{tr}(V Q^2)$.

Para obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros β , ϕ e λ seria suficiente encontrar os valores desses parâmetros que fossem solução das equações $U_\beta(\beta, \phi, \lambda) = 0$, $U_\phi(\beta, \phi, \lambda) = 0$ e $U_\lambda(\beta, \phi, \lambda) = 0$. Como visto na Seção 1.3.1, não há uma forma fechada para estes estimadores. Portanto, um algoritmo de otimização não linear deverá ser utilizado para maximização da função de verossimilhança. Para isso são necessárias as escolhas dos valores iniciais para os parâmetros a serem maximizados. Adotou-se que o valor inicial para λ será 1 (função de ligação logito). Os valores iniciais para β e ϕ serão os mesmos sugeridos por Ferrari & Cribari-Neto (2004), já apresentados na Seção 1.3.1.

3.3 Avaliação dos Estimadores dos Parâmetros

Nesta seção será estudado o comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo de regressão beta com a função de ligação de Aranda-Ordaz.

Para avaliação dos estimadores foram realizadas 1000 réplicas de Monte Carlo ajustando-se em cada uma das réplicas o modelo de regressão beta para um vetor resposta aleatória $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ obtido da distribuição beta, com $y_t \sim \text{Beta}(\mu_t, \phi)$, $t=1, \dots, n$,

sendo ϕ fixado e μ_t obtido a partir da função de ligação de Aranda-Ordaz para um determinado conjunto de parâmetros β e λ . Assim como foi definido no Capítulo 2, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ é o vetor dos parâmetros relacionados às colunas da matriz X , que é a matriz regressora composta por uma coluna de uns (representando o intercepto) e duas colunas representando variáveis regressoras obtidas a partir da distribuição uniforme $(0, 1)$. O parâmetro de dispersão é dado por ϕ e λ é o parâmetro adicional da função de ligação de Aranda-Ordaz. Em cada réplica de Monte Carlo são obtidas as estimativas e os intervalos de confiança com coeficiente de confiança de 95% para cada um dos parâmetros β_0 , β_1 , β_2 , ϕ e λ .

Como resultado final das simulações serão apresentadas algumas medidas resumos das 1000 estimativas dos parâmetros β_0 , β_1 , β_2 , ϕ e λ . São elas: média, desvio padrão (DP), viés, erro quadrático médio (EQM), assimetria (Assim.), curtose (Curt.), taxa de cobertura (TCob.), média dos limites inferiores (LI) e média dos limites superiores (LS) dos intervalos de confiança. A taxa de cobertura, que indica a proporção de vezes em que se encontra o verdadeiro parâmetro no intervalo de confiança estimado, é esperada ser em torno de 95%. Para assimetria e curtose esperam-se valores em torno de zero, pois assintoticamente os estimadores têm distribuição normal.

Foram utilizados diferentes tamanhos amostrais ($n = 100, 500$ e 2000) e diferentes valores para o parâmetro adicional ($\lambda = 0.1, 0.5, 5.0$ e 10.0). Um ponto a ressaltar é que se a estimativa de λ não estiver próxima do valor verdadeiro não se deve esperar estimativas de β e ϕ próximas aos seus verdadeiros valores, pois diferentes valores de λ correspondem a diferentes funções de ligação.

Na Tabela 3.1 são apresentados os resultados das estimativas dos parâmetros quando os verdadeiros parâmetros são $\beta_0 = -0.5$, $\beta_1 = -0.3$, $\beta_2 = -1.3$, $\phi = 120$ e $\lambda = 0.1$. De forma geral, pode-se verificar que as estimativas para os parâmetros melhoram com o aumento do tamanho da amostra. Por exemplo, a estimativa média para λ quando $n = 100$ é 1.194 e quando $n = 2000$ é 0.11, sendo a última muito próxima do valor verdadeiro. Com o aumento do tamanho amostral verifica-se que: diminuem o desvio padrão, o viés e o erro quadrático médio das estimativas; a taxa de cobertura se aproxima do valor nominal de 95%; e a assimetria e a curtose se aproximam de zero.

Na Tabela 3.2 são apresentados os resultados considerando os seguintes valores verdadeiros para os parâmetros $\beta_0 = 0.7$, $\beta_1 = 1.0$, $\beta_2 = -1.0$, $\phi = 120$ e $\lambda = 0.5$. Nota-se neste caso que as médias das estimativas para os parâmetros são próximas dos verdadei-

Tabela 3.1: Medidas amostrais dos estimadores dos parâmetros de regressão e dispersão, $\theta = (\beta_0; \beta_1; \beta_2; \phi; \lambda)^\top = (-0.5; -0.3; -1.3; 120.0; 0.1)^\top$, com covariáveis uniformes.

n	Est.	Médias	DP	Viés	EQM	Assim	Curt.	Tcob.	LI	LS
100	β_0	0.002	5.091	0.502	5.115	14.565	219.735	93.0	-166.78	166.783
	β_1	-0.387	0.845	-0.087	0.849	-14.302	215.997	91.7	-30.691	29.916
	β_2	-1.679	3.752	-0.379	3.771	-14.644	223.71	92.6	-121.315	117.957
	ϕ	127.985	18.782	7.985	20.409	0.685	0.897	94.8	92.607	163.364
	λ	1.194	10.514	1.094	10.571	13.755	201.687	94.1	-341.216	0.604
500	β_0	-0.485	0.229	0.015	0.229	0.562	0.752	94.1	-0.925	-0.045
	β_1	-0.305	0.054	-0.005	0.054	-0.597	0.78	95.0	-0.406	-0.203
	β_2	-1.313	0.168	-0.013	0.169	-0.572	0.735	93.9	-1.636	-0.989
	ϕ	121.653	7.636	1.653	7.813	0.281	0.404	94.5	106.615	136.691
	λ	0.127	0.842	0.027	0.843	0.374	0.368	94.1	-1.51	1.763
2000	β_0	-0.495	0.118	0.005	0.118	0.203	0.209	94.6	-0.716	-0.275
	β_1	-0.302	0.026	-0.002	0.026	-0.183	0.017	94.1	-0.351	-0.253
	β_2	-1.304	0.087	-0.004	0.087	-0.225	0.24	93.7	-1.465	-1.142
	ϕ	120.498	3.797	0.498	3.829	0.239	0.125	95.0	113.05	127.946
	λ	0.11	0.442	0.01	0.443	0.105	0.091	94.1	-0.719	0.94

ros valores quando $n = 500$. Pode-se ver, por exemplo, que para este tamanho amostral as estimativas médias para os parâmetros β_0 , β_1 , β_2 , e λ são de 0.708, 1.007, -1.008, e 0.505 respectivamente.

Tabela 3.2: Medidas amostrais dos estimadores dos parâmetros de regressão e dispersão, $\theta = (\beta_0; \beta_1; \beta_2; \phi; \lambda)^\top = (0.7; 1.0; -1.0; 120.0; 0.5)^\top$, com covariáveis uniformes.

n	Est.	Médias	DP	Viés	EQM	Assim	Curt.	Tcob.	LI	LS
100	β_0	1.02	3.285	0.32	3.3	13.761	192.086	93.4	0.191	1.849
	β_1	1.23	2.215	0.23	2.227	13.679	191.518	93.5	0.581	1.879
	β_2	-1.229	2.24	-0.229	2.252	-13.8	195.082	93.5	-1.846	-0.612
	ϕ	127.36	18.046	7.36	19.489	0.525	0.678	95.6	92.151	162.57
	λ	0.759	2.499	0.259	2.512	13.219	181.318	94.5	-0.217	1.735
500	β_0	0.708	0.168	0.008	0.168	0.655	0.925	94.5	0.384	1.032
	β_1	1.007	0.129	0.007	0.129	0.666	1.06	94.6	0.757	1.258
	β_2	-1.008	0.128	-0.008	0.128	-0.68	0.912	95.1	-1.254	-0.762
	ϕ	121.389	7.641	1.389	7.767	0.284	0.087	95.3	106.381	136.396
	λ	0.505	0.205	0.005	0.205	0.493	0.64	95.0	0.105	0.905
2000	β_0	0.703	0.08	0.003	0.08	0.221	-0.11	95.6	0.546	0.859
	β_1	1.001	0.06	0.001	0.06	0.263	0.096	95.8	0.881	1.122
	β_2	-1.002	0.061	-0.002	0.061	-0.233	-0.13	95.6	-1.122	-0.882
	ϕ	120.571	3.915	0.571	3.957	0.111	-0.194	95.0	113.118	128.025
	λ	0.502	0.098	0.002	0.098	0.174	-0.028	95.5	0.309	0.695

No cenário apresentado na Tabela 3.2 verifica-se que, com o aumento do tamanho amostral: há queda do desvio padrão, viés e erro quadrático médio; aproximação da taxa de cobertura ao valor nominal de 95%; e a assimetria e a curtose se aproximam de zero, como esperado pela teoria assintótica dos estimadores.

Nas Tabelas 3.3 e 3.4 os verdadeiros parâmetros considerados foram, respectivamente, $\beta_0 = 0.7$, $\beta_1 = 1.0$, $\beta_2 = -1.0$, $\phi = 120$ e $\lambda = 5$; e $\beta_0 = -0.5$, $\beta_1 = -0.3$, $\beta_2 = -1.3$, $\phi = 120$ e $\lambda = 10$. Nesses casos foram considerados maiores valores para λ que os

apresentados nas simulações anteriores.

Tabela 3.3: Medidas amostrais dos estimadores dos parâmetros de regressão e dispersão, $\theta = (\beta_0; \beta_1; \beta_2; \phi; \lambda)^\top = (0.7; 1.0; -1.0; 120.0; 5.0)^\top$, com covariáveis uniformes.

n	Est.	Médias	DP	Viés	EQM	Assim	Curt.	Tcob.	LI	LS
100	β_0	7.921	10.988	7.221	13.149	0.711	-1.322	49.3	-7306.54	7322.38
	β_1	3.965	4.586	2.965	5.461	0.821	-0.984	47.6	-2915.05	2922.98
	β_2	-3.939	4.54	-2.939	5.408	-0.819	-0.988	47.1	-2845.95	2838.07
	ϕ	127.498	18.368	7.498	19.839	0.5	0.258	95.4	92.29	162.71
	λ	20.784	25.798	15.784	30.243	0.653	-1.389	53.1	-16051.11	16092.68
500	β_0	6.334	9.909	5.634	11.399	1.153	-0.508	64.4	-7853.63	7866.29
	β_1	3.3	4.054	2.3	4.661	1.161	-0.445	62.9	-3087.08	3093.68
	β_2	-3.308	4.057	-2.308	4.667	-1.16	-0.446	63.8	-3082.96	3076.34
	ϕ	121.271	7.501	1.271	7.608	0.236	0.363	95.5	106.296	136.245
	λ	17.606	22.902	12.606	26.142	1.116	-0.57	67.0	-17199.9	17235.1
2000	β_0	3.561	7.391	2.861	7.925	2.25	3.296	77.7	-1651.3	1658.419
	β_1	2.172	3.017	1.172	3.236	2.24	3.292	77.3	-645.396	649.739
	β_2	-2.173	3.018	-1.173	3.238	-2.236	3.262	77.0	-657.599	653.253
	ϕ	120.642	3.669	0.642	3.725	0.192	0.139	95.4	113.194	128.09
	λ	11.477	17.011	6.477	18.202	2.208	3.159	79.7	-3596.85	3619.808

Como se pode verificar nesses casos apresentados nas Tabelas 3.3 e 3.4 os estimadores para λ , β_0 , β_1 e β_2 não são satisfatórios nem mesmo para $n = 2000$, e as estimativas têm vieses e desvios padrão altos. Verifica-se que com o aumento do tamanho da amostra: diminuem o desvio padrão, viés e erro quadrático médio das estimativas; a taxa de cobertura aumenta e se aproxima mais do valor nominal de 95%; e a assimetria e a curtose diminuem, mas ainda assim não estão próximas do esperado. E de acordo com esses resultados em relação ao aumento do tamanho amostral, suspeita-se que seriam necessárias amostras extremamente grandes para chegar aos resultados esperados.

Tabela 3.4: Medidas amostrais dos estimadores dos parâmetros de regressão e dispersão, $\theta = (\beta_0; \beta_1; \beta_2; \phi; \lambda)^\top = (-0.5; -0.3; -1.3; 120.0; 10.0)^\top$, com covariáveis uniformes.

n	Est.	Médias	DP	Viés	EQM	Assim	Curt.	Tcob.	LI	LS
100	β_0	9.036	15.825	9.536	18.476	1.003	-0.734	53.4	-2857.23	2875.3
	β_1	-1.415	2.21	-1.115	2.475	-1.73	2.24	65.8	-358.26	355.43
	β_2	-6.421	8.543	-5.121	9.961	-1.13	-0.24	50.4	-1466.55	1453.71
	ϕ	126.111	18.927	6.111	19.889	0.821	1.633	95.3	91.16	161.06
	λ	61	92	51	105	1	-1	59.0	-16032.22	16154.2
500	β_0	4.865	12.751	5.365	13.834	2.025	2.395	75.7	-2770.88	2780.61
	β_1	-0.97	1.632	-0.67	1.765	-2.28	4.06	74.2	-395.103	393.162
	β_2	-4.114	6.66	-2.814	7.23	-2.042	2.524	74.1	-1407.98	1399.76
	ϕ	121.359	7.752	1.359	7.87	0.344	0.47	94.4	106.317	136.401
	λ	39.584	72.999	29.584	78.765	1.961	2.174	78.6	-14915.1	14994.3
2000	β_0	0.863	6.446	1.363	6.589	5.092	25.361	88.0	-436.459	438.184
	β_1	-0.464	0.773	-0.164	0.791	-5.219	27.64	87.2	-54.227	53.298
	β_2	-2.021	3.346	-0.721	3.423	-5.046	24.981	87.5	-226.307	222.265
	ϕ	120.597	3.786	0.597	3.833	0.077	-0.161	94.5	113.123	128.071
	λ	17.619	37.143	7.619	37.917	4.906	23.902	89.9	-2368.65	2403.891

Verificou-se a partir dos resultados apresentados nessas simulações que para $\lambda = 0.1$ e

0.5 as estimativas para os parâmetros estavam próximas aos esperado para $n = 2000$. Já para $\lambda = 5.0$ e 10.0 as estimativas dos parâmetros não estão próximas ao esperado nem mesmo para o maior tamanho amostral avaliado, que foi $n = 2000$, mas há tendência de melhoria dessas estimativas com o aumento do tamanho amostral, como verificado na comparação dos resultados para $n = 100$ e $n = 2000$.

Nesta seção verificou-se o comportamento das estimativas dos parâmetros λ , β_0 , β_1 , β_2 e ϕ . Apesar delas não estarem próximas ao esperado para todos os cenários, na seção seguinte será verificado o comportamento das estimativas das médias μ_t nestes mesmos cenários, para os quais ajustaram-se modelos de regressão beta com função de ligação de Aranda-Ordaz, sendo esta a verdadeira função de ligação.

3.4 Avaliação dos Estimadores para as Médias

Nesta seção será avaliada a qualidade das inferências realizadas para as médias μ_t quando a função de ligação de Aranda-Ordaz é utilizada. O modelo de regressão beta com a função de ligação logito também foi utilizado nos ajustes para comparação dos resultados com essas duas funções de ligação, quando a verdadeira função de ligação é a de Aranda-Ordaz.

Nas simulações foram realizadas 1000 réplicas de Monte Carlo. Em cada uma dessas réplicas foi obtido um vetor resposta aleatória y com distribuição beta com médias μ_t , $t = 1, 2, \dots, n$ e dispersão ϕ . As médias foram obtidas por $\mu_t = g^{-1}(x_t^\top \beta)$ e a função de ligação considerada é a de Aranda-Ordaz com os seguintes valores para $\theta = (\beta_0; \beta_1; \beta_2; \phi; \lambda)^\top$: $(-0.5; -0.3; -1.3; 120.0; 0.1)^\top$, $(0.7; 1.0; -1.0; 120.0; 0.5)^\top$, $(0.7; 1.0; -1.0; 120.0; 5.0)^\top$ e $(-0.5; -0.3; -1.3; 120.0; 10.0)^\top$. A matriz regressora X é composta por uns na primeira coluna, representando o intercepto, e duas colunas obtidas a partir da distribuição uniforme (0,1), sem réplicas. Foram utilizadas 500 observações e as médias obtidas pelos verdadeiros valores dos parâmetros do vetor θ estão respectivamente nos intervalos: $[0.117; 0.427]$, $[0.476; 0.922]$, $[0.270; 0.482]$, $[0.078; 0.173]$ e $[0.412; 0.884]$. A partir de cada y obtido em réplicas de Monte Carlo foram ajustados os modelos de regressão com a função de ligação de Aranda-Ordaz e logito. No ajuste com a função de ligação de Aranda-Ordaz estimaram-se todos os parâmetros do vetor θ . Já para a função de ligação logito não é necessário estimar λ , pois λ é conhecido e igual a um.

Para avaliação dos ajustes foram consideradas as taxas de cobertura mínima e média

para as médias μ_t , os balanceamentos mínimo e máximo e os vieses relativos mínimo, médio e máximo. Nas tabelas estas medidas serão descritas por CobMin, CobMed, BalanMax, BalanMin, ViesRelMin, ViesRelMed e ViesRelMax, respectivamente. As medidas de taxa de cobertura e balanceamento foram descritas na Seção 2.1 e o viés relativo para as médias foi descrito na Seção 2.3.1.

Como pode ser visto na Tabela 3.5 os resultados para os ajustes com a função de ligação de Aranda-Ordaz, que é a verdadeira, têm taxa de cobertura mínima em torno de 70% e média em torno de 90% para todos os cenários simulados, sendo que a taxa de cobertura esperada era de 95%. O balanceamento que era esperado estar em torno de zero apresentou como máximo valor absoluto igual a 8.1; o viés relativo no pior dos casos é de 0.00291.

Os resultados mostrados na Tabela 3.5 indicam que apesar das taxas de cobertura e medidas de balanceamento não estarem todas em torno do esperado, o viés relativo médio das estimativas é pequeno, mais especificamente, as estimativas para as médias são próximas dos valores verdadeiros.

Ainda na Tabela 3.5 são mostrados os ajustes obtidos com a função de ligação logito. Para esta função de ligação verificam-se alguns casos muito ruins para taxa de cobertura mínima, que chega, por exemplo, a 0.2% no cenário em que $\lambda = 0.5$. Os resultados obtidos nos ajustes com a função de ligação de Aranda-Ordaz são sempre melhores que os ajustes obtidos com a função de ligação logito. No ajuste com a função de ligação logito as taxas de cobertura estão sempre mais afastadas de 95%, o balanceamento com valores mais afastados de zero e os vieses são mais altos que os observados nos ajustes com a função de ligação de Aranda-Ordaz.

A partir desses resultados pode-se concluir que apesar das estimativas dos parâmetros do modelo de regressão com função de ligação de Aranda-Ordaz não serem satisfatórias para todos os cenários, como foi discutido na Seção 3.3, as estimativas obtidas para as médias μ_t são boas em relação aos vieses relativos, embora também as taxas de cobertura não estarem sempre próximas de 95%. Pode-se verificar também que em todos os casos apresentados os resultados foram melhores sempre no ajuste com a função de ligação de Aranda-Ordaz do que no ajuste com a função de ligação logito.

Para comparar os resultados obtidos com o ajuste do modelo com as funções de ligação de Aranda-Ordaz e logito foram considerados também os cenários em que as função de ligação utilizadas para simulação dos dados originais são a complemento log-

Tabela 3.5: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxas de cobertura mínima e média, balanceamentos mínimo e máximo, viés relativo mínimo, médio e máximo; ligação correta de Aranda-Ordaz (λ), ligação incorreta logito, planejamento sem réplicas, $\phi = 120$ e $n = 500$.

λ	Intervalo para Média Verdadeira	Medidas	Função de Ligação Ajustada	
			Aranda-Ordaz	logito
0.1	[0.117;0.427]	CobMin(%)	75.1	57.8
		CobMed(%)	90.5	88.4
		BalanMax(%)	2.8	42.2
		BalanMin(%)	-1.6	-25.5
		ViesRelMin	1.97E-07	9.68E-06
		ViesRelMed	3.05E-04	5.89E-03
		ViesRelMax	1.01E-03	2.44E-02
0.5	[0.476;0.922]	CobMin(%)	70.2	0.2
		CobMed(%)	91.9	73.7
		BalanMax(%)	2.0	99.8
		BalanMin(%)	-1.3	-55.6
		ViesRelMin	3.98E-08	3.27E-05
		ViesRelMed	9.10E-05	3.90E-03
		ViesRelMax	9.34E-04	3.48E-02
5.0	[0.270;0.482]	CobMin(%)	76.8	33.6
		CobMed(%)	92.6	87.9
		BalanMax(%)	4.5	21.4
		BalanMin(%)	-6.3	-66.4
		ViesRelMin	3.84E-07	2.40E-05
		ViesRelMed	3.58E-04	4.53E-03
		ViesRelMax	2.32E-03	3.11E-02
10.0	[0.078;0.173]	CobMin(%)	78.6	69.7
		CobMed(%)	91.0	90.3
		BalanMax(%)	6.2	21.1
		BalanMin(%)	-8.1	-30.3
		ViesRelMin	7.04E-06	4.15E-05
		ViesRelMed	8.82E-04	7.62E-03
		ViesRelMax	2.91E-03	3.51E-02

log e a log-log, que são as que apresentaram problemas quanto à taxa de cobertura no ajuste com a função de ligação logito (ver Capítulo 2). Os resultados destas comparações serão explorados na seção seguinte.

3.4.1 Função de Ligação de Aranda-Ordaz e Logito

No Capítulo 2 foram apresentados alguns cenários em que o ajuste com a função de ligação logito resultava em taxas de coberturas baixas para as médias. Esses casos foram utilizados aqui ajustando-se o modelo de regressão beta com a função de ligação de Aranda-Ordaz para avaliar se estes ajustes produzem melhores resultados que os obtidos pelo ajuste com a função de ligação logito. As funções de ligação verdadeiras em que se obtiveram taxas de cobertura baixas nos ajustes com a função de ligação logito foram: função de ligação complemento log-log com as médias próximas 1 e em torno de 0.5; e função de ligação log-log com as médias próximas de 0.

Para essas comparações foram realizadas 1000 réplicas de Monte Carlo. A matriz regressora X é composta por uns na primeira coluna e duas colunas obtidas a partir da distribuição uniforme (0,1). As funções de ligação utilizadas para obtenção das médias $\mu_t = g^{-1}(x_t^\top \beta)$ e as médias consideradas para comparação dos ajustes são:

1. função de ligação verdadeira complemento log-log e $\mu_t \in [0.842; 0.981]$;
2. função de ligação verdadeira complemento log-log e $\mu_t \in [0.295; 0.828]$;
3. função de ligação verdadeira log-log e $\mu_t \in [0.019; 0.153]$.

Os verdadeiros valores para os parâmetros β_0 , β_1 e β_2 são os mesmos utilizados na Seção 2.2 para amostras de tamanho $n = 500$ e $\phi = 120$.

Na Tabela 3.6 são apresentadas os seguintes resultados em relação as médias μ_t estimadas nas 1000 réplicas de Monte Carlo: taxas de cobertura (mínima e média) e a medida de balanceamento (mínima e máxima) descritas na Seção 2.1; e o viés relativo médio (mínimo, médio e máximo) apresentado na Seção 2.3.1. Esses resultados serão apresentados para os ajustes do modelo de regressão beta obtidos com as funções de ligação de Aranda-Ordaz, logito e a função de ligação correta, que é a verdadeira função de ligação utilizada para obtenção das médias μ_t .

Comparando-se os resultados dos ajustes obtidos com a função de ligação correta e de Aranda-Ordaz nos três casos descritos acima, verificam-se melhores ajustes considerando a função de ligação correta. No entanto, nos casos reais nunca se sabe qual é a função de ligação verdadeira e pode-se notar ainda pelos resultados apresentados na Tabela 3.6, que os ajustes com a função de ligação de Aranda-Ordaz são melhores que os obtidos com a função de ligação logito. Nos ajustes com a função de ligação de Aranda-Ordaz as taxas

Tabela 3.6: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxas de cobertura mínima e média, balanceamentos mínimo e máximo, viés relativo mínimo, médio e máximo; planejamento sem réplicas, $\phi = 120$ e $n = 500$.

Casos	Medidas	Função de Ligação Ajustada		
		correta	logito	Aranda-Ordaz
1 (ligação correta: complemento log-log)	CobMin(%)	93.6	1.1	69.0
	CobMed(%)	94.9	79.1	91.1
	BalanMax(%)	1.0	42.0	8.2
	BalanMin(%)	-1.0	-98.9	-16.8
	ViesRelMin	4.72E-07	2.00E-06	5.30E-06
	ViesRelMed	1.44E-04	2.78E-02	3.11E-03
	ViesRelMax	7.96E-04	2.12E-01	3.61E-02
2 (ligação correta: complemento log-log)	CobMin(%)	92.0	0.1	70.6
	CobMed(%)	94.7	76.2	91.2
	BalanMax(%)	0.7	99.9	1.4
	BalanMin(%)	-1.9	-52.4	-3.4
	ViesRelMin	8.11E-08	2.10E-05	4.61E-07
	ViesRelMed	4.35E-05	2.00E-03	6.04E-05
	ViesRelMax	6.14E-05	1.34E-02	3.45E-04
3 (ligação correta: log-log)	CobMin(%)	93.9	0.0	71.1
	CobMed(%)	95.3	52.4	91.6
	BalanMax(%)	1.6	100.0	3.6
	BalanMin(%)	-1.1	-95.4	-1.9
	ViesRelMin	3.52E-07	3.32E-05	1.90E-07
	ViesRelMed	5.80E-05	1.29E-02	1.25E-04
	ViesRelMax	1.28E-04	8.11E-02	8.73E-04

de cobertura são mais próximas ao valor nominal de 95% e as medidas de balanceamento mais próximas de zero, que é o desejável. No caso 2, por exemplo, a taxa de cobertura média observada no ajuste com a função de ligação de Aranda-Ordaz é igual a 91.2%, enquanto nos ajustes com a função de ligação logito esta média é igual a 76.2%. Os vieses nos ajustes com a função de ligação de Aranda-Ordaz são menores que os verificados nos ajustes com a função de ligação logito. Também pode-se verificar no caso 3, por exemplo, que nos ajustes com a função de ligação de Aranda-Ordaz o máximo dos vieses relativo médio observados foi de 0.0009 enquanto nos ajustes com a função de ligação logito esse valor é igual a 0.01.

Na Figura 3.1 são mostrados os resultados dos vieses relativos médios obtidos para todas as médias μ_t nos quatro casos avaliados. É possível verificar que os vieses das estimativas são sempre maiores quando se ajusta o modelo com a função de ligação

logito; são menores em todos os casos para o ajuste com a função de ligação correta; e quando se ajusta o modelo com a função de ligação de Aranda-Ordaz os vieses estão mais próximos aos obtidos pelo ajuste com a função de ligação correta e menores que os obtidos pela função de ligação logito.

(a) Função de ligação correta comp. log-log

(b) Função de ligação correta comp. log-log

(c) Função de ligação correta comp. log-log

(d) Função de ligação correta comp. log-log

(e) Função de ligação correta log-log

(f) Função de ligação correta log-log

Figura 3.1: Gráfico dos vieses das estimativas para as médias.

3.5 Conclusões

De acordo com os resultados das simulações apresentados neste capítulo verificou-se que as estimativas para os parâmetros da regressão obtidos nos ajustes com a função de ligação de Aranda-Ordaz, quando a verdadeira função de ligação era a de Aranda-Ordaz, nem sempre trouxeram resultados próximos ao esperado em relação às taxas de cobertura e à medida de balanceamento. Pelos resultados obtidos quando se aumenta o tamanho amostral suspeita-se que para obter os resultados esperados pela teoria assintótica seriam necessárias amostras ainda maiores.

Apesar dos resultados não satisfatórios para a estimação dos parâmetros da regressão avaliaram-se as estimativas obtidas para as médias μ_t através das taxas de cobertura e dos vieses relativos médios e verificou-se que os resultados dos ajustes com a função de ligação de Aranda-Ordaz são sempre melhores que os obtidos com a função de ligação logito, tanto nos casos em que a verdadeira função de ligação era a de Aranda-Ordaz como nos casos em que a função de ligação verdadeira era a complemento log-log e a log-log. Portanto, em um caso real em que o interesse seja estimar as médias das observações, quando obviamente não se conhecerá a verdadeira função de ligação, a escolha pela função de ligação de Aranda-Ordaz pode trazer melhores resultados que os ajustes obtidos com a função de ligação logito. Deve-se considerar, no entanto, que se a amostra não for muito grande, o algoritmo de estimação dos parâmetros pode apresentar problemas de convergência. Adicionalmente, a função de ligação de Aranda-Ordaz não possibilita interpretação simples para os parâmetros de regressão como ocorre para a ligação logito.

Aplicação

Neste capítulo serão comparados os resultados obtidos no ajuste do modelo de regressão beta com as funções de ligação logito, log-log e de Aranda-Ordaz para dados de gasolina de Prater (1956). A variável dependente (y) é a proporção de petróleo que é transformada em gasolina após o processo de destilação e fracionamento. As possíveis variáveis independentes são: gravidade do petróleo (graus API), pressão do vapor do petróleo (Ibf/in²), petróleo a 10% do ponto ASTM (i.e, a temperatura em que 10% do petróleo é vaporizado) e temperatura (°F) em que toda a gasolina se evapora. O conjunto de dados é constituído de 32 observações para a variável resposta que foram obtidas para dez conjuntos de valores das três primeiras variáveis independentes, que correspondem aos diferentes tipos de petróleo, submetidos a experimentação sob diferentes condições de destilação. A especificação do modelo para a resposta média usa um intercepto ($x_1 = 1$), nove variáveis dummy para os primeiros nove níveis do petróleo cru ($x_2, \dots, x_{10}$) e a temperatura em que toda a gasolina é vaporizada (x_{11}). Especifica-se o modelo para as médias como

$$g(\mu_t) = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \dots + \beta_{11} x_{t11},$$

e assume-se que as observações $y_1, \dots, y_{32}$ são independentes e têm distribuição beta de média μ_t e parâmetro de precisão ϕ desconhecido.

Os parâmetros deste modelo são estimados através da maximização da função de verossimilhança utilizando o método quasi-Newton BFGS com as primeiras derivadas analíticas. Os valores iniciais para os parâmetros desconhecidos são escolhidos de acordo com a proposta de Ferrari & Cribari-Neto (2004) para as funções de ligação logito e log-log. Para função de ligação de Aranda-Ordaz é utilizada a sugestão dada no Capítulo 3.

Os resultados inferenciais obtidos usando as funções de ligação logito, log-log e de Aranda-Ordaz são apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Estimativas dos parâmetros para os dados de gasolina de Prater, utilizando as funções de ligação logito, log-log e de Aranda-Ordaz.

Par.	Logito			Log-log			Aranda-Ordaz		
	Est.	EP.	p-valor	Est.	EP.	p-valor	Est.	EP.	p-valor
β_1	-6.160	0.182	0.000	-2.794	0.058	0.000	-8.800	0.696	0.000
β_2	1.728	0.101	0.000	0.904	0.035	0.000	3.239	0.393	0.000
β_3	1.323	0.118	0.000	0.655	0.038	0.000	2.303	0.285	0.000
β_4	1.572	0.116	0.000	0.768	0.038	0.000	2.698	0.320	0.000
β_5	1.060	0.102	0.000	0.538	0.034	0.000	1.899	0.246	0.000
β_6	1.134	0.104	0.000	0.552	0.035	0.000	1.916	0.240	0.000
β_7	1.040	0.106	0.000	0.520	0.035	0.000	1.829	0.239	0.000
β_8	0.544	0.109	0.000	0.292	0.034	0.000	1.021	0.178	0.000
β_9	0.496	0.109	0.000	0.250	0.035	0.000	0.882	0.162	0.000
β_{10}	0.386	0.119	0.001	0.187	0.038	0.000	0.648	0.145	0.000
β_{11}	0.011	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000	0.019	0.002	0.000
ϕ	440.278	110.026		906.688	226.638	0.000	942.458	235.588	
λ							6.602	1.335	

O teste RESET com a variável $\hat{\eta}_t^2$, sugerido por Lima (2007), foi utilizado para testar se o modelo está corretamente especificado. Como já tinha sido mostrado no seu trabalho, o teste rejeita a hipótese nula de que o modelo esteja corretamente especificado para a função de ligação logito (estatística do teste 16.401, p -valor < 0.0001) e não rejeita a hipótese nula para a função de ligação log-log (estatística do teste 1.628, p -valor ≈ 0.202). Para a função de ligação de Aranda-Ordaz o teste não rejeitou a hipótese nula de que o modelo esteja bem especificado (estatística do teste 0.0005, p -valor ≈ 0.9825).

Na Figura 4.1, em que são mostrados os gráficos quantil-quantil com envelopes simulados do resíduo ponderado padronizado 2, pode-se verificar que em todos os ajustes os resíduos permanecem dentro das bandas de confiança.

A soma de quadrados dos resíduos ordinários das estimativas para as respostas médias obtidas nos ajustes do modelo de regressão beta com as funções de ligação logito, log-log e de Aranda-Ordaz são, respectivamente, iguais a 0.0092, 0.0508 e 0.0048. Dessa forma, nota-se que, apesar da hipótese do modelo estar bem especificado ter sido rejeitada para o ajuste com a função de ligação logito, a soma de quadrados dos erros neste modelo é menor que a obtida no modelo ajustado com a função de ligação log-log.

Figura 4.1: Gráficos quantil-quantil com envelopes simulados do resíduo ponderado padronizado 2 para os três ajustes.

Na Tabela 4.2 são mostrados os intervalos de 95% para as respostas médias nos três ajustes obtidos. Nota-se que as estimativas obtidas nos ajustes com as funções de ligação log-log e de Aranda-Ordaz são as mais próximas, mas apesar disso, as estimativas obtidas com a função de ligação logito também não se afastam dos resultados obtidos com as outras duas funções de ligação.

Como foi visto nas simulações apresentadas neste trabalho a função de ligação logito mesmo quando está especificada incorretamente traz estimativas para as respostas médias com vieses pequenos. Nos três ajustes realizados verificou-se, através dos resíduos e dos intervalos de confiança para as médias, resultados semelhantes e, além disso, a inferência dos parâmetros foi a mesma; portanto, se o interesse é ter interpretação simples para os parâmetros de regressão, a função de ligação logito poderia ser utilizada, apesar da hipótese nula do modelo estar bem especificado com essa função de ligação ter sido

Tabela 4.2: Intervalos de 95% de confiança para as respostas médias.

y	Logito			Log-log			Aranda-Ordaz		
	LI	$\hat{\mu}$	LS	LI	$\hat{\mu}$	LS	LI	$\hat{\mu}$	LS
0.122	0.088	0.101	0.116	0.099	0.110	0.123	0.101	0.114	0.127
0.223	0.177	0.195	0.215	0.206	0.220	0.235	0.214	0.229	0.244
0.347	0.319	0.343	0.369	0.337	0.353	0.370	0.340	0.355	0.370
0.457	0.477	0.508	0.539	0.456	0.474	0.492	0.441	0.457	0.472
0.080	0.068	0.080	0.093	0.062	0.072	0.082	0.061	0.070	0.079
0.131	0.120	0.137	0.156	0.128	0.141	0.154	0.127	0.141	0.155
0.266	0.234	0.263	0.294	0.249	0.267	0.286	0.253	0.270	0.287
0.074	0.082	0.094	0.108	0.078	0.088	0.099	0.076	0.086	0.097
0.182	0.148	0.167	0.188	0.158	0.172	0.187	0.159	0.173	0.188
0.304	0.268	0.298	0.329	0.276	0.294	0.313	0.278	0.295	0.312
0.069	0.064	0.074	0.086	0.058	0.067	0.076	0.057	0.065	0.074
0.152	0.126	0.141	0.157	0.136	0.148	0.160	0.137	0.150	0.163
0.260	0.228	0.250	0.274	0.245	0.260	0.275	0.249	0.264	0.278
0.336	0.325	0.354	0.383	0.330	0.347	0.364	0.329	0.345	0.360
0.144	0.143	0.160	0.179	0.149	0.163	0.178	0.148	0.163	0.178
0.268	0.245	0.269	0.294	0.252	0.269	0.286	0.253	0.269	0.285
0.349	0.305	0.333	0.362	0.305	0.323	0.340	0.303	0.320	0.336
0.100	0.087	0.101	0.115	0.087	0.098	0.111	0.085	0.097	0.110
0.248	0.213	0.237	0.261	0.228	0.244	0.261	0.231	0.248	0.264
0.317	0.300	0.329	0.360	0.306	0.325	0.343	0.307	0.324	0.341
0.028	0.039	0.046	0.054	0.026	0.031	0.037	0.027	0.031	0.037
0.064	0.060	0.069	0.080	0.054	0.061	0.070	0.052	0.059	0.067
0.161	0.138	0.156	0.175	0.154	0.167	0.181	0.155	0.169	0.183
0.278	0.231	0.259	0.288	0.253	0.270	0.287	0.255	0.272	0.289
0.050	0.063	0.073	0.086	0.055	0.063	0.073	0.053	0.062	0.071
0.176	0.141	0.160	0.180	0.152	0.166	0.181	0.153	0.168	0.183
0.321	0.280	0.311	0.344	0.290	0.309	0.328	0.292	0.309	0.327
0.140	0.109	0.127	0.148	0.112	0.127	0.143	0.111	0.126	0.142
0.232	0.215	0.245	0.279	0.228	0.248	0.269	0.231	0.250	0.270
0.085	0.090	0.104	0.119	0.089	0.100	0.111	0.088	0.098	0.109
0.147	0.103	0.119	0.136	0.106	0.118	0.130	0.106	0.117	0.129
0.180	0.165	0.188	0.213	0.178	0.193	0.209	0.181	0.196	0.211

LI: limite inferior; LS: limite superior.

rejeitada. Para o ajuste com a função de ligação de Aranda-Ordaz, a hipótese nula de que o modelo está bem especificado não é rejeitada. Portanto, se não há interesse na interpretação dos parâmetros, o ajuste com esta função de ligação pode ser o mais interessante.

Considerações finais

Esta dissertação apresenta estudos realizados através de simulações para verificação dos impactos da especificação incorreta da função de ligação nos modelos de regressão beta. As funções de ligação utilizadas nos ajustes foram logito, probito, complemento log-log e log-log. A função de ligação logito permite uma interpretação simples para os parâmetros de regressão. A principal medida utilizada para medir o impacto da especificação incorreta foi a taxa de cobertura, que representa a proporção de amostras em que as médias verdadeiras pertencem aos intervalos estimados com 95% de confiança nas réplicas de Monte Carlo. A utilização da função de ligação logito apresentou taxas de cobertura baixas nos casos em que as funções de ligação verdadeiras eram a complemento log-log e log-log. O estudo da variável dependente modificada e do teste RESET nestes casos detectaram a especificação incorreta da função de ligação em alguns dos cenários apresentados. Gráficos de resíduos também foram avaliados, mas não detectaram a especificação incorreta da função de ligação. Apesar das baixas taxas de cobertura no ajuste com a função de ligação logito nestes casos, os vieses relativos para as respostas médias mostraram que as estimativas das médias estão próximas aos seus verdadeiros valores.

Adicionalmente foi introduzido o ajuste do modelo de regressão beta com a função de ligação de Aranda-Ordaz, que envolve um parâmetro adicional. Foi verificado que amostras extremamente grandes são necessárias para chegar aos resultados esperados pela teoria assintótica para os estimadores dos parâmetros do modelo. No entanto, mesmo em amostras não muito grandes, as taxas de cobertura dos intervalos de confiança para as respostas médias não são muito distorcidas. Na comparação de alguns cenários obtidos com a função de ligação logito e de Aranda-Ordaz, melhores resultados foram

obtidos com a função de ligação Aranda-Ordaz em relação à taxa de cobertura dos intervalos de confiança e vieses relativos dos estimadores das respostas médias. Uma aplicação foi realizada comparando os resultados obtidos com algumas das funções de ligação.

Programa de simulação no Ox

```
#include <oxstd.h> #include <oxprob.h> #import <maximize>
#include <oxdraw.h> #include <oxfloat.h> #import <maxsqp>

/* Variáveis globais */
static decl s_vY, /* Amostra aleatória (vetor coluna) */
s_mX, /* Matriz X */
s_mXi; /* Matriz X para obter primeira replica */
decl yfunc, mufunc, Tfunc;

/* Definindo Constantes */
const decl g_in = 100.0, /* Tamanho da amostra */
mdif = 100.0, /* numero de medias diferentes*/
iRep = 1.0, /* Número de réplicas MC */
b = 1.0; /*identifica para qtas médias serão obtidos os IC*/

/* Escolhendo o valor do parâmetro phi */
/* Caso = 1: phi = 120 ** Caso = 2: phi = 20;*/
const decl CASO = 1;

/* Escolhendo a função de ligação para gerar dados e os parâmetros de regressão */
/* LIGorig=1: ligação logito * LIGorig=2: ligação probito * LIGorig=3; ligação compl log-log */
/* LIGorig=4; ligação log-log * LIGorig = 5; ligação de Aranda-Ordaz */
const decl LIGorig = 5, beta1 = 0.5, beta2 = 0.3, beta0 = -0.9, lambdaorig = -1.0;

/* Escolhendo a função de ligação para ajuste dos dados */
/* LIGorig=1: ligação logito * LIGorig=2: ligação probito * LIGorig=3; ligação compl log-log */
/* LIGorig=4; ligação log-log * LIGorig = 5; ligação de Aranda-Ordaz */
const decl LIGajus = 5, lambda = 1.0; /*chute inicial para lambda nas estimativas*/

const decl seed1=1, seed2=2, seed3=32, seed4=87;
const decl doenvelope = 0; /*1 se quiser envelope da ultima amostra e 0 para nao fazer envelope*/

/* Função de log-verossimilhança */
floglik(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess){
decl k = rows(vP) - 1,
eta = s_mX*vP[0:(k-1)],
phi = vP[k];
if (LIGajus == 1){mufunc = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));
Tfunc = diag( exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta)) .^2 );}
else if (LIGajus == 2){mufunc = probn(eta);
Tfunc = diag( 1.0 ./ (sqrt(2*M_PI) .* exp((eta.^2) / 2)));}
else if (LIGajus == 3){mufunc = 1.0 - exp(-exp(eta));
Tfunc = diag(1.0 ./ (exp(exp(eta) - eta)));}
else if (LIGajus == 4){mufunc = exp(-exp(-eta));
Tfunc = diag(1.0 ./ (exp(exp(-eta) + eta)));}
else if (LIGajus == 5){mufunc = 1.0 - (1.0 + lambda .* exp(eta)).^(-1.0/lambda);
```



```

        Tfunc = diag(((1.0 - mufunc).^(-lambda)-1.0) ./ (lambda .* (1.0 - mufunc).^(-(lambda+1.0))));}
decl ystar = log( yfunc ./ (1.0 - yfunc) ),
    mustar = polygamma(mufunc*phi, 0) - polygamma((1.0 - mufunc)*phi, 0);
adFunc[0] = double( sumc( loggamma(phi) - loggamma(mufunc*phi) - loggamma((1.0 - mufunc)*phi)
    + (mufunc*phi - 1.0) .* log(yfunc) + ( (1.0 - mufunc)*phi - 1.0 ) .* log(1.0 - yfunc) ));
if(avScore){(avScore[0])[0:(k-1)] = phi*s_mX'*Tfunc*(ystar-mustar);
    (avScore[0])[k] = double(sumc( mufunc .* (ystar-mustar) + log(1.0-yfunc)
        - polygamma( (1.0-mufunc)*phi, 0) + polygamma(phi, 0) )); }
if(isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) ) return 0; else return 1; /* 1 indica sucesso */ }

floglikalt(const vP, const adFunc, const avScore, const amHess){
    decl k = rows(vP) - 2,
        eta = s_mX*vP[0:(k-1)],
        phi = vP[k],
        aolambda = vP[k+1];
    if (LIGajus == 1){mufunc = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));
        Tfunc = diag( exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta)) .^2 );}
    else if (LIGajus == 2){mufunc = probn(eta);
        Tfunc = diag( 1.0 ./ (sqrt(2*M_PI) .* exp((eta.^2) / 2)));}
    else if (LIGajus == 3){mufunc = 1.0 - exp(-exp(eta));
        Tfunc = diag(1.0 ./ (exp(exp(eta) - eta)));}
    else if (LIGajus == 4){mufunc = exp(-exp(-eta));
        Tfunc = diag(1.0 ./ (exp(exp(-eta) + eta)));}
    else if (LIGajus == 5){mufunc = 1.0 - (1.0 + aolambda .* exp(eta)).^(-1.0/aolambda);
        Tfunc = diag(exp(eta).*(1+ aolambda.*exp(eta)).^(-(1+1/ aolambda)));}
    decl ystar = log( yfunc ./ (1.0 - yfunc) ),
        mustar = polygamma(mufunc*phi, 0) - polygamma((1.0 - mufunc)*phi, 0);
    adFunc[0] = double( sumc( loggamma(phi) - loggamma(mufunc*phi) - loggamma((1.0 - mufunc)*phi)
        + (mufunc*phi - 1.0) .* log(yfunc) + ( (1.0 - mufunc)*phi - 1.0 ) .* log(1.0 - yfunc) ));

    if(avScore){(avScore[0])[0:(k-1)] = phi*s_mX'*Tfunc*(ystar-mustar);
        (avScore[0])[k] = double(sumc( mufunc .* (ystar-mustar) + log(1.0-yfunc)
            - polygamma( (1.0-mufunc)*phi, 0) + polygamma(phi, 0) ));
        (avScore[0])[k+1] = phi/aolambda * double( sumc( (ystar-mustar).*( 1.0 + aolambda .* exp(eta))
            .^(-1.0/aolambda).*(1.0./(exp(-eta)+aolambda)-(1.0/aolambda).*log(1.0+aolambda .* exp(eta)))));}

    if( isnan(adFunc[0]) || isdotinf(adFunc[0]) ) return 0; else return 1; /* 1 indica sucesso */ }

/* Início do Programa */
main()
{
    /* Declaração das Variáveis Utilizadas no Programa */

    /* Parâmetros de Sistema */
    decl dExecTime, fail, falha, falhar, controle, ci, i, contador, auxiliar, teste, t;

    /* Parâmetros do Modelo */
    decl beta, phi, theta, eta, mu, thetaelambda; /*, beta1, beta2, beta3, beta4, beta0*/

    /* Parâmetros Auxiliares sem restrição */
    decl k,nobs,p,ynew,betaols,yols,muols,varols,phiols,Tols,vP0,converge,dfunc1,m,convergeteste;

    /* Parâmetros Auxiliares com restrição */
    decl nobsr, pr, betaolsr, yolsr, muolsr, varolsr, phiolsr, vP1, converger, dfunc2,escoretil;

    /* Parâmetros de Resultados */
    decl vEMV, resul1, resul2, resul3, resul4, cobertura, liminferior, limsuperior, vsig, mStat, vquantil,
        cStat, muverd, etahat, phihat, psi1, psi2, W, vc, D, tempinv, g, K1, K2, fisherinv, stderrors,
        covbetahat, muhat, T, lambdahat;

    /*para calculo do intervalo para mu*/
    decl coberturaamu, contadormu, j, seetahat, alpha, niv, etahatmu, eleminf, elemsup, liminfmu, limsupmu,
        compritot, muhataj, liminfmutot, limsupmutot, viesmu,viesmupond;

    /* Inicia o Relógio */

```

```

dExecTime = timer();

m = 2; /* Número de parâmetros que estão sendo testados */
k = 2; /* Número de variáveis independentes no modelo */

/* Escolha do gerador de números aleatórios */
ranseed("GM");

/* Escolha da Semente */
ranseed({seed1, seed2});

/* Obtendo a matriz X */
s_mXi = ranu(mdif,k)^1;
s_mX = s_mXi;
for(t = 1; t < g_in/mdif; t++){s_mX = s_mXi | s_mX;}

/* Dimensões da matriz de planejamento */
nobs = rows(s_mX);
p = columns(s_mX);

/* Valores verdadeiros dos parâmetros */
beta = beta1 | beta2 | beta0;
if (CASO == 1) {phi = 120;}
else if (CASO == 2) {phi = 20;}
theta = beta | phi;
thetaelambda = theta | lambdaorig;
eta = s_mX * beta;
if (LIGorig == 1) {mu = exp(eta) ./ (1.0 + exp(eta));}
else if (LIGorig == 2) {mu = probn(eta);}
else if (LIGorig == 3) {mu = 1 - exp(-exp(eta));}
else if (LIGorig == 4) {mu = exp(-exp(-eta));}
else if (LIGorig == 5) {mu = 1.0 - (1.0 + lambdaorig .* exp(eta)).^(-1.0/lambdaorig);}

/* Inicialização de Algumas Quantidades */
if (LIGajus == 5) {vEMV = zeros(iRep, p+2); /* Inic. do Vetor dos EMV */
cobertura = zeros(1,p+2); /* Inic. do Contador da Taxa de Cobertura */
liminferior = zeros(iRep,p+2); /* Inic. do Contador do L. Inferior */
limsuperior = zeros(iRep,p+2); /* Inic. do Contador do L. Superior */
contador = zeros(1,p+2); /* Inic. do Contador Auxiliar para a Taxa de Cobertura */}
else {vEMV = zeros(iRep, p+1); /* Inic. do Vetor dos EMV */
cobertura = zeros(1,p+1); /* Inic. do Contador da Taxa de Cobertura */
liminferior = zeros(iRep,p+1); /* Inic. do Contador do L. Inferior */
limsuperior = zeros(iRep,p+1); /* Inic. do Contador do L. Superior */
contador = zeros(1,p+1); /* Inic. do Contador Auxiliar para a Taxa de Cobertura */}
falha = 0; /* Inic. do Contador de Amostras de MC que Falharam */
falhar = 0; /* Inic. do Contador de Amostras de MC que Falharam */
fail = 0; /* Inic. do Contador de Amostras de MC que Falharam */

/* para calculo do intervalo para mu*/
decl contadormuinf, cobeturamuinf, contadormusup, cobeturamusup, cobeturaphi, contadorphi,
contadorphiinf, cobeturaphiinf, contadorphisup, cobeturaphisup, compritotphi;
viesmu = zeros(iRep, mdif./b);
viesmupond = zeros(iRep, mdif./b);
liminfmutot = zeros(iRep, mdif./b);
limsupmutot = zeros(iRep, mdif./b);
compritot = zeros(iRep, mdif./b);
cobeturamu = zeros(1, mdif./b);
contadormu = zeros(1, mdif./b);
contadormuinf = zeros(1, mdif./b);
cobeturamuinf = zeros(1, mdif./b);
contadormusup = zeros(1, mdif./b);
cobeturamusup = zeros(1, mdif./b);
cobeturaphi = zeros(1, 1);
contadorphi = zeros(1, 1);
contadorphiinf = zeros(1, 1);

```

```

coberturaphiinf = zeros(1, 1);
contadorphisup = zeros(1, 1);
coberturaphisup = zeros(1, 1);
compritolphi = zeros(iRep, 1);

/* Escolha do gerador de números aleatórios */
ranseed("GM");

/* Escolha da Semente */
ranseed({seed3, seed4});

/* Parâmetro de controle do processo */
controle = (iRep/10);

/* Loop de Monte Carlo */
for(ci = 0; ci < iRep + fail; ci++){
    s_vY = zeros(g_in, 1); /* Inicialização do Vetor s_vY */
    yfunc = zeros(g_in, 1);
    for(i = 0; i < g_in; i++){s_vY[i] = ranbeta(1, 1, mu[i]*phi, (1-mu[i])*phi); } /* Beta (p,q) */

    /* Obtendo o Valor de y* = ynew */
    if (LIGajus == 1){ynew = log( s_vY ./ (1.0-s_vY) );}
    else if (LIGajus == 2){ynew = quann(s_vY);}
    else if (LIGajus == 3){ynew = log(-log(1-s_vY));}
    else if (LIGajus == 4){ynew = - log(-log(s_vY));}
    else if (LIGajus == 5){ynew = log(((1.0 - s_vY).^(-lambda)-1.0)./ lambda);}

    /* Calculo sem restrição
    Calculando as Estimativas de Momentos sugeridas por Ferrari e Cribari-Neto (2003) */
    if(p > 1){ols2c(ynew, s_mX, &betaols);} /* Retorna em betaols a Estimativa de Mínimos
    else if(p==1){betaols = meanc(ynew);} Quadrados Ordinários, ou seja, (X'X)^-1 * X'ynew */

    /* Obtendo Algumas Quantidades para o Cálculo do Valor Inicial de phi) */
    yols = s_mX*betaols; /* X(X'X)^-1*X'ynew */
    if (LIGajus == 1){muols = exp(yols) ./ (1.0 + exp(yols)); /* g^-1(X(X'X)^-1*X'ynew) */
        Tols = muols .* (1.0 - muols);}
    else if (LIGajus == 2) {muols = probn(yols);
        Tols = 1.0 ./ (sqrt(2*M_PI) .* exp((quann(muols).^2) / 2));}
    else if (LIGajus == 3) {muols = 1.0 - exp(-exp(yols));
        Tols = - (1.0 - muols) .* log (1.0 - muols);}
    else if (LIGajus == 4) {muols = exp(-exp(-yols));
        Tols = - muols .* log(muols);}
    else if (LIGajus == 5) {muols = 1.0 - (1.0 + lambda .* exp(yols)).^(-1.0/lambda);
        Tols = exp(yols).*(1.0+ lambda.*exp(yols)).^(-(1.0+1.0/ lambda));}
    varols = sumsqrc(ynew-yols)./(nobs-p).*(Tols.^2); /* (y-yhat)^2/(n-k)*/
    phiols = double(meanc( (muols .* (1.0-muols)) ./ (varols)) - 1.0); /* phi^(0) */

    MaxControl( 1000, -1);
    MaxControlEps(10^(-4), 5*10^(-3));

    /* Estimação de máxima verossimilhança */
    yfunc = s_vY;
    if (LIGajus == 5){vP0 = betaols | phiols | lambda; /* Valores Iniciais para os Parâmetro (beta, phi) */
        converge = MaxBFGS(floglikalt, &vP0, &dfunc1, 0, 0);}
    else {vP0 = betaols | phiols; /* Valores Iniciais para os Parâmetro (beta, phi) */
        converge = MaxBFGS(floglik, &vP0, &dfunc1, 0, 0);}

    /* Verificando a convergência */
    if(converge != MAX_CONV && converge != MAX_WEAK_CONV){fail++;
        continue;} /* sai do loop MC */

    etahat = s_mX*vP0[0:(p-1)];
    phihat = vP0[p];
    if (LIGajus == 1){muhat = exp(etahat) ./ (1+exp(etahat));
        T = diag( exp(etahat) ./ (1.0+exp(etahat)) .^2 );}

```

```

else if (LIGajus == 2){muhat = probn(etahat);
    T = diag( 1.0 ./ (sqrt(2*M_PI) .* exp((etahat.^2) / 2)));}
else if (LIGajus == 3){muhat = 1.0 - exp(-exp(etahat));
    T = diag(1.0 ./ (exp(exp(etahat) - etahat)));}
else if (LIGajus == 4) {muhat = exp(-exp(-etahat));
    T = diag(1.0 ./ (exp(exp(-etahat) + etahat)));}
else if (LIGajus == 5) {lambdahat = vP0[(p+1)];
    muhat = 1.0 - (1.0 + lambdahat .* exp(etahat)).^(-1.0/lambdahat);
    T = diag(exp(etahat).*(1.0+ lambdahat.*exp(etahat)).^(-(1.0+1.0/ lambdahat)));}

psi1 = polygamma(muhat*phihat, 1);
psi2 = polygamma((1.0-muhat)*phihat, 1);
W = diag(phihat*(psi1+psi2)) * T.^2;
vc = phihat*(psi1.*muhat-psi2.*(1-muhat));
D = diag(psi1.*(muhat.^2)+psi2.*(1.0-muhat).^2-polygamma(phihat,1));
tempinv = invsym(s_mX'*W*s_mX);
g = trace(D)-(1.0/phihat)*vc'*T'*s_mX*tempinv*s_mX'*T*vc;
K1 = tempinv*(g*unit(p)+(1/phihat)*s_mX'*T*vc*vc'*T'*s_mX*tempinv);
K2 = -tempinv*s_mX'*T*vc;
fisherinv = (1/(phihat*g))*((K1~K2)|(-vc'*T'*s_mX*tempinv~phihat));
covbetahat = fisherinv[0:(p-1)][0:(p-1)];
if (LIGajus == 5){/* calculo de K com as esperanças */
    decl R = diag(psi1+psi2),
    Q = diag( (1+lambdahat.*exp(etahat)).^(-1/lambdahat) ./lambdahat .*
    (1 ./ (exp(-etahat)+lambdahat) - log(1 + lambdahat.*exp(etahat))./lambdahat)),
    I_n = ones(nobs,1),
    M = diag(psi1.*muhat - psi2.*(1 - muhat) ),
    Kbb = phihat * s_mX' * W * s_mX,
    Kbp = s_mX' * T * vc,
    Kbl = phihat^(2) * s_mX' * R * T * Q * I_n,
    Kpb = Kbp',
    Kpp = trace(D),
    Kpl = phihat * trace(M * Q),
    Klb = Kbl',
    Klp = Kpl',
    Kll = phihat^(2)*trace(R*(Q^2)),
    K = (Kbb ~ Kbp ~ Kbl) | (Kpb ~ Kpp ~ Kpl) | (Klb ~ Klp ~ Kll),
    K_1 = K ^(-1);
    stderrors = sqrt(diagonal(K_1));}
else {stderrors = sqrt(diagonal(fisherinv));}

/*obtenção dos intervalos de confiança para as médias*/
seetahat = zeros(mdif./b, 1);
muverd = zeros(mdif./b, 1);
etahatmu = zeros(mdif./b, 1);
eleminf = zeros(mdif./b, 1);
elemsup = zeros(mdif./b, 1);
liminfmu = zeros(mdif./b, 1);
limsupmu = zeros(mdif./b, 1);
muhataj = zeros(mdif./b, 1);
alpha = 0.05;
niv = quann(1-alpha./2);

/*VIES das estimativas para as médias*/
/*VIES das estimativas para as médias*/
viesmu[ci-fail][] = (muhat - mu)';
viesmupond[ci-fail][] = ((muhat - mu) ./ mu)';

for(j = 0; j < mdif/b; j++){
    seetahat[j] = sqrt(s_mX[j*b][]*covbetahat*s_mX[j*b][]');
    muverd[j] = mu[j*b];
    muhataj[j] = muhat[b*j];
    etahatmu[j] = s_mX[j*b][]*vP0[0:(p-1)];
    eleminf[j] = etahatmu[j] - niv*seetahat[j];
    elemsup[j] = etahatmu[j] + niv*seetahat[j];
    if (LIGajus == 1){liminfmu[j] = exp(eleminf[j]) ./ (1+exp(eleminf[j]));}
}

```

```

        limsupmu[j] = exp(elemsup[j]) ./ (1+exp(elemsup[j]));}
    else if (LIGajus == 2){liminfmu[j] = probn(eleminf[j]);
        limsupmu[j] = probn(elemsup[j]);}
    else if (LIGajus == 3){liminfmu[j] = 1.0 - exp(-exp(eleminf[j]));
        limsupmu[j] = 1.0 - exp(-exp(elemsup[j]));}
    else if (LIGajus == 4){liminfmu[j] = exp(-exp(-eleminf[j]));
        limsupmu[j] = exp(-exp(-elemsup[j]));}
    else if (LIGajus == 5){liminfmu[j] = 1.0 - (1.0 + lambdahat .* exp(eleminf[j])).^(-1.0/lambdahat);
        limsupmu[j] = 1.0 - (1.0 + lambdahat .* exp(elemsup[j])).^(-1.0/lambdahat);}}

liminfmutot[ci-fail][] = liminfmu';
limsupmutot[ci-fail][] = limsupmu';
compritol[ci-fail][] = limsupmu' - liminfmu';

/* Taxa de Cobertura para mu */
contadormu = (liminfmutot[ci-fail][] .<= muverd') .&& (muverd' .<= limsupmutot[ci-fail][]);
cobeturamu = cobeturamu + contadormu;

/* Contador do número de vezes em que mu cai à esquerda do intervalo*/
contadormuin = (muverd' .< liminfmutot[ci-fail][] );
cobeturamuinf = cobeturamuinf + contadormuin;

/* Contador do número de vezes em que mu cai à direita do intervalo*/
contadormusup = (limsupmutot[ci-fail][] .< muverd');
cobeturamusup = cobeturamusup + contadormusup;

/* Vetores das EMVs */
vEMV[ci-fail][] = vP0';

/* Cálculo dos Limites Inferiores e Superiores do Intervalo de Confiança */
liminferior[ci-fail][] = vP0' - 1.96*stderrors;
limsuperior[ci-fail][] = vP0' + 1.96*stderrors;

/* Taxa de Cobertura */
if (LIGajus == 5){
    contador = (liminferior[ci-fail][] .<= thetaelambda') .&& (thetaelambda' .<= limsuperior[ci-fail][]);}
else {contador = (liminferior[ci-fail][] .<= theta') .&& (theta' .<= limsuperior[ci-fail][]);}
cobertura = cobertura + contador;

/* Controle do processo */
if (iRep >= 10.0){
    if(mod(ci-fail + 1, controle) == 0)
        println("\n", ci-fail + 1, " amostras realizadas : ",
            (ci-fail + 1)*100/iRep, " % das réplicas");}

} /* Final do Loop de Monte Carlo */

/* Obtenção do viés relativos para as médias*/
decl viesmumed, viesmupondmed;
viesmumed = zeros(mdif./b, 1);
viesmupondmed = zeros(mdif./b, 1);

viesmumed = (meanc(viesmu))';
viesmupondmed = (meanc(viesmupond))';
println("mu ~ viesmumed ~ viesmumedpond", muverd ~ viesmumed ~ viesmupondmed);
println("muhat",muhat);

/* Obtenção dos limites para as médias*/
decl liminfmumed, limsupmumed, comprimed;
liminfmumed = zeros(mdif./b, 1);
limsupmumed = zeros(mdif./b, 1);
comprimed = zeros(mdif./b, 1);

/* Limite inferior para mu*/
liminfmumed = (meanc(liminfmutot))';

```

```

/* Limite Superior para mu*/
limsupmumed = (meanc(limsupmutot))';

comprimed = (meanc(compritol))';

/* matriz de limites de média*/
decl limmu, difint;
limmu = zeros (mdif./b, 3);
limmu[] [0] = liminfmumed;
limmu[] [1] = muverd;
limmu[] [2] = limsupmumed;
println("\n\n", "#### Limite para as médias", limmu);

/*residuos da ultima amostra gerada*/

if (doenvelope == 1){
    decl residualstd, mysign, residualdev, ell1, ell2, ystarn, mustarn, ystarlmustar, varystar,
        residualweione, H, residualweitwo;
    residualstd = sqrt(1.0+phihat)*(s_vY-muhat)./sqrt(muhat.*(1-muhat));
    ystarn = log( yfunc ./ (1.0 - yfunc) );
    mustarn = polygamma(muhat*phihat, 0) - polygamma((1.0 - muhat)*phihat, 0);
    ystarlmustar = ystarn - mustarn;
    varystar = sqrt(psi1 + psi2);
    residualweione = ystarlmustar ./ varystar;
    H = diagonal(sqrt(W)*s_mX*tempinv*s_mX'*sqrt(W));
    residualweitwo = ystarlmustar ./ (varystar .* sqrt(1.0 - H));
    ell1 = loggamma(phihat) - loggamma(s_vY*phihat) - loggamma((1-s_vY)*phihat)
        + (s_vY*phihat-1) .* log(s_vY) + ( (1-s_vY)*phihat-1 ) .* log(1-s_vY) ;
    ell2 = loggamma(phihat) - loggamma(muhat*phihat) - loggamma((1-muhat)*phihat)
        + (muhat*phihat-1) .* log(s_vY) + ( (1-muhat)*phihat-1 ) .* log(1-s_vY) ;
    mysign = (s_vY - muhat) .> 0 .? 1.0 .: -1.0;
    residualdev = mysign .* sqrt( 2.0*(ell1-ell2) );

    /* Envelope para ultima amostra*/
    decl Menvelope, Menvelope2, ygen, vP3, ir3, dfunc3, etahatgen, muhatgen, phihatgen, lambdahatgen,
        ell1gen, ell2gen, residualstdgen, mysigngen, residualdevgen, residualstdabs, residualdevabs,
        xqq, yqq, yqq2, Tgen, ystargen, mustargen, ystarlmustargen, psi1gen, psi2gen, varystargen,
        residualweionegen, Wgen, Hgen, residualweitwogen, Menvelope3, Menvelope4, residualweioneabs,
        yqq3, residualweitwoabs, yqq4;
    Menvelope = zeros(nobs, 19);
    Menvelope2 = zeros(nobs, 19);
    Menvelope3 = zeros(nobs, 19);
    Menvelope4 = zeros(nobs, 19);
    falha = 0;
    for(j=0; j<19; j++){
        ygen = zeros(nobs, 1);
        yfunc = zeros(nobs, 1);
        for(i=0; i<nobs; i++){ygen[i] = ranbeta(1, 1, muhat[i]*phihat, (1-muhat[i])*phihat);}
        vP3 = vP0;
        yfunc = ygen;
        if (LIGajus == 5){ir3 = MaxBFGS(floglikalt, &vP3, &dfunc3, 0, FALSE);}
        else {ir3 = MaxBFGS(floglik, &vP3, &dfunc3, 0, FALSE);}
        if(ir3 != MAX_CONV && ir3 != MAX_WEAK_CONV){
            j--;
            falha++;
            continue;}
        etahatgen = s_mX*vP3[0:(p-1)];
        if (LIGajus == 1){muhatgen = exp(etahatgen) ./ (1+exp(etahatgen));
            Tgen = diag( exp(etahatgen) ./ (1.0+exp(etahatgen)) .^2 );}
        else if (LIGajus == 2){muhatgen = probn(etahatgen);
            Tgen = diag( 1.0 ./ (sqrt(2*M_PI) .* exp((etahatgen.^2) / 2))));}
        else if (LIGajus == 3){muhatgen = 1.0 - exp(-exp(etahatgen));
            Tgen = diag(1.0 ./ (exp(exp(etahatgen) - etahatgen)))};}
        else if (LIGajus == 4){muhatgen = exp(-exp(-etahatgen));

```

```

        Tgen = diag(1.0 ./ (exp(exp(-etahatgen) + etahatgen)));}
else if (LIGajus == 5){lambdahatgen = vP3[(p+1)];
    muhatgen = 1.0 - (1.0 + lambdahatgen .* exp(etahatgen)).^(-1.0/lambdahatgen);
    Tgen = diag(((1.0 - muhatgen).^(-lambdahatgen)-1.0) ./ (lambdahatgen
        .* (1.0 - muhatgen).^(-(lambdahatgen+1.0))));}

phihatgen = vP3[p];
ell1gen = loggamma(phihatgen) - loggamma(ygen*phihatgen) - loggamma((1-ygen)*phihatgen)
    + (ygen*phihatgen-1) .* log(ygen) + ( (1-ygen)*phihatgen-1 ) .* log(1-ygen);
ell2gen = loggamma(phihatgen) - loggamma(muhatgen*phihatgen) - loggamma((1-muhatgen)*phihatgen)
    + (muhatgen*phihatgen-1) .* log(ygen) + ( (1-muhatgen)*phihatgen-1 ) .* log(1-ygen) ;
residualstdgen = sqrt(1.0+phihatgen)*(ygen-muhatgen)./sqrt(muhatgen.*(1-muhatgen));
mysigngen = (ygen - muhatgen) .> 0 .? 1.0 .: -1.0;
residualdevgen = mysigngen .* sqrt( 2.0*(ell1gen-ell2gen) );
Menvelope[] [j] = residualstdgen;
Menvelope2[] [j] = residualdevgen;
ystarngen = log( ygen ./ (1.0 - ygen) );
mustarngen = polygamma(muhatgen*phihatgen, 0) - polygamma((1.0 - muhatgen)*phihatgen, 0);
ystarlmustarngen = ystarngen - mustarngen;
psi1gen = polygamma(muhatgen*phihatgen, 1);
psi2gen = polygamma((1.0-muhatgen)*phihatgen, 1);
varystarngen = sqrt(psi1gen + psi2gen);
residualweionegen = ystarlmustarngen ./ varystarngen;
Wgen = diag(phihatgen*(psi1gen+psi2gen)) * Tgen .^2;
Hgen = diagonal(sqrt(Wgen)*s_mX*invertsym(s_mX'*Wgen*s_mX)*s_mX'*sqrt(Wgen));
residualweitwogen = ystarlmustarngen ./ (varystarngen .* sqrt(1.0 - Hgen));
Menvelope3[] [j] = residualweionegen;
Menvelope4[] [j] = residualweitwogen;
}

residualstdabs = fabs(residualstd);
Menvelope = sortc(fabs(Menvelope));
xqq = quann( (range(1,nobs)' + nobs - 1/8)/(2*nobs + 0.5) );
yqq = zeros(nobs, 4);
yqq[] [3] = sortc(residualstdabs);
yqq[] [0] = minc(Menvelope' )';
yqq[] [1] = meanr(Menvelope);
yqq[] [2] = maxc(Menvelope' )';
residualdevabs=fabs(residualdev);
Menvelope2 = sortc(fabs(Menvelope2));
yqq2 = zeros(nobs, 4);
yqq2[] [3] = sortc(residualdevabs);
yqq2[] [0] = minc(Menvelope2' )';
yqq2[] [1] = meanr(Menvelope2);
yqq2[] [2] = maxc(Menvelope2' )';
residualweioneabs = fabs(residualweione);
Menvelope3 = sortc(fabs(Menvelope3));
yqq3 = zeros(nobs, 4);
yqq3[] [3] = sortc(residualweioneabs);
yqq3[] [0] = minc(Menvelope3' )';
yqq3[] [1] = meanr(Menvelope3);
yqq3[] [2] = maxc(Menvelope3' )';
residualweitwoabs = fabs(residualweitwo);
Menvelope4 = sortc(fabs(Menvelope4));
yqq4 = zeros(nobs, 4);
yqq4[] [3] = sortc(residualweitwoabs);
yqq4[] [0] = minc(Menvelope4' )';
yqq4[] [1] = meanr(Menvelope4);
yqq4[] [2] = maxc(Menvelope4' )';
SetDraw(SET_FONT, 200);
/* Envelope dos residuos padronizados */
DrawXMatrix(0, yqq', 0, xqq', 0, 0);
DrawAdjust(ADJ_SYMBOLUSE, 1);
DrawAdjust(ADJ_SYMBOL, PL_PLUS);
DrawText(0, "half-normal plot para residuos padronizados", 0, 0, -1, 250, TRUE);
DrawXMatrix(1, yqq3', 0, xqq', 0, 0);
DrawAdjust(ADJ_SYMBOLUSE, 1);

```

```

    DrawAdjust(ADJ_SYMBOL, PL_PLUS);
    DrawText(1, "half-normal plot para residuos padron. weigthed 1", 0, 0, -1, 250, TRUE);
    DrawXMatrix(2, yqq4', 0, xqq', 0, 0);
    DrawAdjust(ADJ_SYMBOLUSE, 1);
    DrawAdjust(ADJ_SYMBOL, PL_PLUS);
    DrawText(2, "half-normal plot para residuos padron. weigthed 2", 0, 0, -1, 250, TRUE);
    SaveDrawWindow("envelope.eps");
}

/* ORGANIZAÇÃO DOS RESULTADOS - PARA AS MEDIAS*/
decl resultfinal, coberttotal;
resultfinal = zeros(rows(coberturamu')+1, 6);
coberttotal = zeros(1, 10);

/* Verdadeiras médias*/
resultfinal[] [0] = muverd;

/* Cobertura*/
resultfinal[] [1] = coberturamu' ./ iRep*100; //coberturas
resultfinal[] [2] = (coberturamusup' - coberturamuinf') ./ iRep*100; //medida de balanceamento
resultfinal[] [3] = coberturamuinf' ./ iRep*100; //obs a esq do intervalo
resultfinal[] [4] = coberturamusup' ./ iRep*100; //obs a dir do intervalo

/* comprimento médio dos intervalos*/
resultfinal[] [5] = comprimed;
resultfinal[rows(coberturamu')] [0] = theta[p];
resultfinal[rows(coberturamu')] [1] = cobeturaphi ./ iRep*100;
resultfinal[rows(coberturamu')] [2] = (cobeturaphisup - cobeturaphiinf) ./ iRep*100;
//medida de balanceamento
resultfinal[rows(coberturamu')] [3] = cobeturaphiinf ./ iRep*100; //obs a esq do intervalo
resultfinal[rows(coberturamu')] [4] = cobeturaphisup ./ iRep*100; //obs a dir do intervalo
resultfinal[rows(coberturamu')] [5] = meanc(compritotphi);

/* Cobertura total e porcentagem*/
coberttotal[] [0] = minc(muverd); //min das medias
coberttotal[] [1] = maxc(muverd); //max das medias
coberttotal[] [2] = meanc(vEMV[] [p]); //estimativa para phi
coberttotal[] [3] = meanc(comprimed); /*comprimento medio dos intervalos*/
coberttotal[] [4] = minc(coberturamu' ./ iRep*100); //min das coberturas
coberttotal[] [5] = meanc(coberturamu' ./ iRep*100); //media das coberturas
coberttotal[] [6] = maxc((coberturamusup' - coberturamuinf') ./ iRep*100);
//maior desbalanceamento verificado a direita
coberttotal[] [7] = minc((coberturamusup' - coberturamuinf') ./ iRep*100);
//maior desbalanceamento verificado a esquerda
coberttotal[] [8] = maxc(coberturamuinf' ./ iRep*100); //maior valor observado para médias fora a esq
coberttotal[] [9] = maxc(coberturamusup' ./ iRep*100); //maior valor observado para médias fora a dir

/* ORGANIZAÇÃO DOS RESULTADOS - Estimção de Máxima Verossimilhança */
if (LIGajus == 5) {resul1 = zeros(p+2, 9);} /* Inicialização da Matriz de Resultados */
else {resul1 = zeros(p+1, 9);} /* Inicialização da Matriz de Resultados */

/* Média das Estimativas */
resul1[] [0] = (meanc(vEMV))';

/* Desvio Padrão das Estimativas */
resul1[] [1] = sqrt((sumsqrc(vEMV) ./ iRep)' - sqr(resul1[] [0]));

/* Viés da Média das Estimativas */
if (LIGajus == 5) {resul1[] [2] = (resul1[] [0] - (theta | lambdaorig));}
else {resul1[] [2] = (resul1[] [0] - theta);}

/* Raiz do Erro Quadrático Médio Estimado */
resul1[] [3] = sqrt((resul1[] [1]) .^ 2 + sqr(resul1[] [2]));

/* Coeficiente de assimetria */

```



```

resul1[] [4] = ( sumc( ( standardize(vEMV) ).^3 ) ./ iRep)';

/* Coeficiente de curtose */
resul1[] [5] = ( sumc( ( standardize(vEMV) ).^4 ) ./ iRep -3)';

/* Taxa de Cobertura */
resul1[] [6] = ((cobertura ./iRep) .*100)';

/* Limite Inferior do Intervalo de Confiança */
resul1[] [7] = (meanc(liminferior))';

/* Limite Superior */
resul1[] [8] = (meanc(limsuperior))';

/* Impressão dos Resultados: */
print( "\n PROGRAMA OX: ", oxfilename(0) );
print( "\n VERSÃO OX: ", oxversion() );
print( "\n DISTRIBUIÇÃO: Beta " );
print( "\n TAMANHO DAS AMOSTRAS: ", g_in );
if (LIGorig == 1) {print( "\n AMOSTRA GERADA POR FUNÇÃO DE LIGAÇÃO: Logito");}
else if (LIGorig == 2) {print( "\n AMOSTRA GERADA POR FUNÇÃO DE LIGAÇÃO: Probit");}
else if (LIGorig == 3) {print( "\n AMOSTRA GERADA POR FUNÇÃO DE LIGAÇÃO: Compl Log-Log");}
else if (LIGorig == 4) {print( "\n AMOSTRA GERADA POR FUNÇÃO DE LIGAÇÃO: Log-Log");}
else if (LIGorig == 5) {print( "\n AMOSTRA GERADA POR FUNÇÃO DE LIGAÇÃO:
    Aranda-Ordaz com lambda = ", lambdaorig);}
if (LIGajus == 1) {print( "\n MODELO AJUSTADO COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO: Logito");}
else if (LIGajus == 2) {print( "\n MODELO AJUSTADO COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO: Probit");}
else if (LIGajus == 3) {print( "\n MODELO AJUSTADO COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO: Compl Log-Log");}
else if (LIGajus == 4) {print( "\n MODELO AJUSTADO COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO: Log-Log");}
else if (LIGajus == 5) {print( "\n MODELO AJUSTADO COM FUNÇÃO DE LIGAÇÃO:
    Aranda-Ordaz com lambda inicial = ", lambda);}
print( "\n NÚMERO DE RÉPLICAS MC: ", ci );
print( "\n NÚMERO DE COVARIADAS: ", k);
print( "\n\t NÚM. RÉPLICAS MC COM CONVERGÊNCIA: ", ci-fail);
print( "\n\t NÚM. RÉPLICAS MC SEM CONVERGÊNCIA: ", fail);
if (LIGajus == 5) {
    print( "\n\t Mínimo de lambda: ", minc(vEMV[] [p+1]));
    print( "\n\t Máximo de lambda: ", maxc(vEMV[] [p+1]));}
print( "\n\nResultados da Estimação dos Parâmetros (beta, phi, lambda)");
print( "\n\nValores Verdadeiros dos Parâmetros: ");
print( "\n", "%8.3f", "%c", {"beta_1", "beta_2", "beta_0", "phi", "lambda"}, (theta | lambdaorig)');
print( "\nResultados Obtidos: ");
print( "\n", "%8.3f", "%c", {"Média", "DP", "Viés", "REQM", "Assim", "Curt.", "TCob", "LI", "LS"},
    "%r", {"beta_1", "beta_2", "beta_0", "phi", "lambda"}, resul1);
print( "\nResultados da Cobertura dos Intervalos de Confiança para as médias");
println("\n", "%10.3f", "%c", {"MedVerd", "%Cobert", "Balanc(%)", "%Esq", "%Dir", "CompMed"}, resultfinal);
println("\n", "%10.4f", "%c", {"MedMin", "MedMax", "phi", "CompMed", "CobMin", "CobMed", "Maxdesb",
    "MinDesb", "%EsqMax", "%DirMax", "%EsqMed"}, coberttotal);
print("\n", "%8.3f", coberttotal[0]);
print("\n", "%8.3f", coberttotal[1]);
print("\n", "%8.1f", coberttotal[2]);
print("\n", "%8.3f", coberttotal[3]);
print("\n", "%8.1f", coberttotal[4]);
print("\n", "%8.1f", coberttotal[5]);
print("\n", "%8.1f", coberttotal[6]);
print("\n", "%8.1f", coberttotal[7]);
print("\n", "%8.1f", coberttotal[8]);
print("\n", "%8.1f", coberttotal[9]);
}
/*----- Fim do Programa -----*/

```

Resultados das simulações

B.1 Função de Ligação Correta Logito e Incorreta Probit

Tabela B.1: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta logito, ligação incorreta probito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.021; 0.054]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.021	91.1	90.8	1.8	3.1
0.023	90.8	90.7	1.9	3.0
0.027	91.1	90.9	2.8	3.5
0.031	90.5	90.5	3.3	3.9
0.039	90.7	90.5	4.1	4.4
0.040	91.1	91.1	0.2	1.4
0.046	90.9	90.9	0.2	1.7
0.053	90.9	90.6	1.6	2.9
0.054	91.1	90.6	1.3	2.7
0.054	91.2	90.6	1.8	3.2
$\phi = 20$	96.3	96.3	-0.7	-0.7

Tabela B.2: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta logito, ligação incorreta probito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.021; 0.054]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.021	91.0	91.1	0.8	1.9
0.023	91.0	91.1	0.5	1.1
0.027	90.9	90.9	1.2	1.3
0.031	91.0	91.1	1.3	0.9
0.039	91.0	91.2	1.6	0.7
0.040	90.8	90.7	-0.3	-0.2
0.046	90.8	90.8	-0.4	0.2
0.053	91.0	90.9	0.5	1.4
0.054	91.0	90.7	0.4	1.5
0.054	91.0	90.9	0.7	1.9
$\phi = 120$	95.8	95.8	-1.4	-1.3

Tabela B.3: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta logito, ligação incorreta probito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.021; 0.054]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.021	95.3	95.0	0.2	1.7
0.023	95.2	95.1	0.6	1.0
0.027	95.4	95.1	0.6	0.3
0.031	95.1	95.1	0.9	-0.6
0.039	94.9	94.9	0.9	-0.8
0.040	94.9	94.8	-0.2	-0.8
0.046	95.1	95.2	-0.2	-0.2
0.053	95.0	94.9	0.4	1.2
0.054	95.0	94.9	0.2	1.4
0.054	94.8	94.7	0.2	1.6
$\phi = 20$	95.2	95.1	-0.3	-0.2

Tabela B.4: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta logito, ligação incorreta probito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.021; 0.054]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.021	95.0	94.2	-0.5	3.0
0.023	94.9	94.9	-0.2	0.5
0.027	94.7	94.7	-0.3	-0.8
0.031	94.9	93.9	-0.1	-3.4
0.039	94.8	93.6	0.3	-3.8
0.040	95.0	94.7	-0.1	-1.4
0.046	95.2	95.1	-0.1	-0.4
0.053	95.1	95.0	0.1	1.2
0.054	95.1	94.8	0.2	1.9
0.054	95.2	94.6	0.1	2.3
$\phi = 120$	95.3	95.3	-0.4	-0.4

Tabela B.5: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta logito, ligação incorreta probito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.385; 0.614]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.385	90.7	90.6	0.4	0.5
0.388	91.2	91.2	0.6	0.8
0.394	90.7	90.7	0.4	0.5
0.434	91.7	91.5	0.3	0.3
0.463	90.7	90.7	0.2	0.2
0.466	91.4	91.3	-0.4	-0.3
0.516	91.3	91.1	0.0	-0.1
0.559	91.5	91.4	-0.3	-0.3
0.587	91.3	91.3	-0.3	-0.4
0.614	91.2	91.2	-0.3	-0.4
$\phi = 20$	95.8	95.8	-1.3	-1.3

Tabela B.6: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta logito, ligação incorreta probito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.385; 0.614]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.385	91.2	91.1	-0.3	-0.3
0.388	91.2	91.3	-0.3	-0.2
0.394	91.2	91.2	-0.3	-0.3
0.434	91.4	91.4	-0.2	-0.3
0.463	91.2	91.2	-0.3	-0.5
0.466	91.4	91.4	-0.2	-0.2
0.516	91.3	91.3	0.1	0.0
0.559	90.9	90.9	0.1	0.2
0.587	91.3	91.3	-0.3	-0.3
0.614	91.1	91.1	0.1	0.0
$\phi = 120$	96.0	96.0	-1.4	-1.4

Tabela B.7: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta logito, ligação incorreta probito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.385; 0.614]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.385	95.0	95.0	-0.3	-0.2
0.388	95.2	95.2	-0.1	0.0
0.394	95.0	95.0	-0.3	-0.3
0.434	94.7	94.7	0.1	0.0
0.463	95.0	94.9	-0.3	-0.5
0.466	94.9	94.9	-0.2	-0.2
0.516	94.9	94.9	-0.1	-0.1
0.559	94.8	94.7	-0.3	0.0
0.587	94.7	94.7	0.2	0.2
0.614	94.9	94.8	-0.3	-0.4
$\phi = 20$	95.5	95.5	-0.1	-0.1

Tabela B.8: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta logito, ligação incorreta probito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.385; 0.614]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.385	94.6	94.7	0.1	0.4
0.388	94.7	94.8	0.1	0.3
0.394	94.6	94.6	0.2	0.2
0.434	95.0	95.0	0.5	0.3
0.463	94.8	94.7	0.1	-0.5
0.466	94.9	94.9	0.4	0.3
0.516	94.8	94.8	0.2	0.2
0.559	94.3	94.4	-0.5	0.1
0.587	94.9	94.9	0.1	0.2
0.614	94.6	94.5	-0.2	-0.3
$\phi = 120$	95.3	95.3	-0.7	-0.7

B.2 Função de Ligação Correta Probit e Incorreta Logito

Tabela B.9: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta probito, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.944; 0.977]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.944	90.8	91.1	-2.8	-1.4
0.946	90.9	91.3	-3.1	-1.7
0.948	91.3	91.4	-3.4	-2.2
0.955	90.6	90.6	-4.2	-3.7
0.962	90.2	90.4	-4.2	-3.5
0.963	91.1	91.1	-2.6	-1.5
0.968	91.0	91.0	-2.3	-1.4
0.969	90.8	91.0	-2.5	-1.5
0.973	90.3	90.7	-3.9	-2.8
0.977	90.3	90.7	-2.9	-1.8
$\phi = 20$	96.0	96.0	-1.0	-1.0

Tabela B.10: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta probito, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.944; 0.977]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.944	90.7	90.8	-0.7	0.3
0.946	90.8	90.9	-0.9	0.0
0.948	90.8	90.8	-0.9	-0.2
0.955	90.7	90.9	-1.6	-1.7
0.962	91.2	91.0	-1.2	-1.4
0.963	91.0	91.0	0.2	0.3
0.968	91.2	91.1	0.1	0.5
0.969	91.0	90.9	-0.8	-0.6
0.973	90.9	91.1	-1.3	-0.6
0.977	90.9	91.0	-1.0	0.2
$\phi = 120$	96.2	96.2	-1.3	-1.3

Tabela B.11: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta probito, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.944; 0.977]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.944	94.5	94.4	-0.6	0.7
0.946	94.6	94.4	-0.6	0.3
0.948	94.7	94.7	-0.6	0.1
0.955	94.8	94.7	-1.1	-1.7
0.962	94.9	94.9	-0.6	-1.7
0.963	95.1	95.1	-0.2	-0.7
0.968	95.1	95.1	-0.2	-0.5
0.969	95.1	95.1	-0.1	-0.5
0.973	94.8	94.9	-0.5	-0.2
0.977	94.9	94.5	-0.4	1.3
$\phi = 20$	94.9	94.9	-0.5	-0.5

Tabela B.12: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta probito, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.944; 0.977]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.944	94.5	94.4	0.0	2.0
0.946	94.5	94.6	0.0	1.4
0.948	94.7	94.6	-0.1	0.5
0.955	94.6	94.2	0.1	-1.9
0.962	94.5	94.3	0.2	-2.3
0.963	94.8	94.7	0.3	-1.0
0.968	94.9	94.9	0.3	-0.6
0.969	94.9	95.0	0.2	-0.6
0.973	94.9	95.0	-0.4	0.4
0.977	95.1	94.2	-0.4	3.2
$\phi = 120$	95.0	94.9	-0.6	-0.5

Tabela B.13: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta probito, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.386; 0.611]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.386	91.1	91.2	0.1	-0.1
0.395	91.3	91.4	-0.2	-0.3
0.455	91.1	91.2	-0.1	-0.2
0.463	91.2	91.3	0.3	0.2
0.516	91.2	91.3	-0.2	-0.2
0.573	91.2	91.2	0.2	0.3
0.596	91.8	91.8	-0.2	-0.1
0.601	91.2	91.3	0.0	0.2
0.603	91.7	91.8	-0.2	-0.1
0.611	91.4	91.5	-0.3	-0.1
$\phi = 20$	96.4	96.4	-1.2	-1.2

Tabela B.14: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta probito, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.386; 0.611]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.386	90.7	90.7	0.4	0.3
0.395	90.8	90.8	0.3	0.2
0.455	91.0	91.1	0.2	0.3
0.463	91.1	91.1	0.2	0.3
0.516	91.2	91.3	0.2	0.2
0.573	91.1	91.1	0.3	0.3
0.596	91.0	91.0	0.4	0.4
0.601	91.2	91.2	0.1	0.1
0.603	91.0	91.0	0.3	0.3
0.611	91.2	91.3	0.4	0.5
$\phi = 120$	95.9	95.9	-1.5	-1.5

Tabela B.15: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta probito, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.386; 0.611]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.386	94.9	94.9	-0.2	-0.3
0.395	95.0	95.0	0.1	0.1
0.455	94.8	94.8	0.0	0.2
0.463	94.8	94.7	-0.1	0.2
0.516	94.8	94.8	0.2	0.1
0.573	94.7	94.7	0.3	0.2
0.596	94.9	94.9	-0.1	-0.1
0.601	94.7	94.7	0.2	0.2
0.603	94.8	94.8	-0.3	-0.2
0.611	94.7	94.7	-0.2	-0.1
$\phi = 20$	95.2	95.2	-0.8	-0.8

Tabela B.16: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta probito, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.386; 0.611]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.386	94.9	94.9	-0.1	-0.3
0.395	94.9	94.9	0.2	0.2
0.455	94.8	94.8	0.2	0.7
0.463	94.8	94.8	0.3	0.7
0.516	94.9	95.0	0.4	0.2
0.573	95.0	95.0	0.4	0.1
0.596	95.0	95.0	0.2	0.1
0.601	95.2	95.1	0.1	0.2
0.603	95.0	95.0	0.2	0.3
0.611	94.8	94.9	0.2	0.4
$\phi = 120$	95.0	95.1	-0.4	-0.4

B.3 Função de Ligação Correta Complemento Log-Log e Incorreta Logito

Tabela B.17: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.022; 0.084]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.022	90.9	90.8	2.0	2.2
0.023	91.2	91.2	2.1	2.3
0.033	91.0	91.1	3.0	3.0
0.034	90.4	90.5	3.1	3.1
0.047	90.4	90.4	3.4	3.3
0.066	90.8	90.9	-0.6	-0.5
0.076	90.6	90.7	1.3	1.6
0.079	90.6	90.7	-1.2	-0.8
0.080	90.7	90.8	0.9	1.3
0.084	90.6	90.8	1.1	1.6
$\phi = 20$	96.2	96.2	-1.0	-1.0

Tabela B.18: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.022; 0.084]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.022	90.7	90.7	0.9	1.3
0.023	91.1	91.1	0.4	0.6
0.033	91.2	91.2	0.9	0.8
0.034	90.8	90.8	1.5	1.3
0.047	90.8	90.8	1.8	1.4
0.066	91.5	91.5	-0.8	-0.9
0.076	91.1	91.1	0.8	0.9
0.079	91.4	91.4	-1.1	-0.8
0.080	91.0	91.0	0.7	1.0
0.084	91.1	91.1	0.4	0.7
$\phi = 120$	96.1	96.0	-1.4	-1.4

Tabela B.19: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.022; 0.084]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.022	94.4	94.4	0.1	0.5
0.023	94.8	94.8	0.0	0.4
0.033	94.8	94.8	0.3	0.1
0.034	94.6	94.7	0.4	-0.1
0.047	94.7	94.7	0.3	-0.4
0.066	94.8	94.7	-0.2	-0.4
0.076	94.7	94.8	-0.1	0.0
0.079	94.7	94.7	-0.3	-0.1
0.080	94.8	94.8	0.0	0.2
0.084	94.5	94.4	0.0	0.6
$\phi = 20$	94.9	94.9	-0.5	-0.5

Tabela B.20: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.022; 0.084]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.022	94.7	94.8	0.3	1.0
0.023	94.9	95.0	0.0	0.8
0.033	94.6	94.6	-0.2	-0.6
0.034	94.8	94.7	-0.1	-0.7
0.047	94.9	94.7	0.2	-1.3
0.066	94.8	94.8	0.1	-0.5
0.076	95.5	95.5	0.6	0.6
0.079	94.8	94.7	-0.3	0.0
0.080	95.4	95.5	0.4	0.7
0.084	95.4	95.4	0.3	1.0
$\phi = 120$	95.0	95.0	-0.5	-0.5

Tabela B.21: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.343; 0.657]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.343	91.7	91.4	0.1	3.1
0.377	91.4	91.6	-0.3	0.5
0.411	91.4	91.5	0.2	0.2
0.466	91.3	90.9	-0.2	-2.6
0.536	91.4	91.4	-0.2	-0.7
0.540	91.1	90.6	-0.4	-3.0
0.583	91.3	91.3	-0.1	0.1
0.644	91.6	91.6	-1.1	0.7
0.652	91.8	91.7	-1.0	1.5
0.657	91.6	91.5	-1.3	1.4
$\phi = 20$	96.4	96.3	-0.9	-0.9

Tabela B.22: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.343; 0.657]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.343	90.8	88.9	-0.3	6.5
0.377	91.5	91.7	0.1	1.4
0.411	91.0	91.0	-0.4	-0.9
0.466	91.6	89.6	0.3	-6.8
0.536	91.1	91.0	-0.4	-3.0
0.540	91.1	88.6	0.2	-7.9
0.583	91.2	91.4	-0.5	-1.7
0.644	90.4	90.5	-0.5	2.8
0.652	90.5	90.1	-0.2	4.8
0.657	90.5	90.0	-0.5	4.7
$\phi = 120$	96.0	95.9	-1.4	-1.2

Tabela B.23: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.343; 0.657]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.343	94.7	88.7	-0.2	10.6
0.377	94.9	95.0	-0.1	1.0
0.411	94.4	94.2	-0.3	-1.5
0.466	94.9	86.6	-0.2	-12.8
0.536	94.9	93.3	-0.1	-4.5
0.540	95.0	84.9	-0.5	-14.7
0.583	94.8	94.4	-0.1	-2.0
0.644	95.1	94.2	-0.6	3.4
0.652	94.9	91.7	-0.3	6.9
0.657	95.1	91.9	-0.4	6.6
$\phi = 20$	95.4	95.4	-0.2	-0.1

Tabela B.24: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.343; 0.657]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.343	95.1	58.8	0.2	41.2
0.377	94.9	94.5	0.2	2.7
0.411	94.8	94.1	-0.1	-3.0
0.466	94.8	50.9	0.2	-49.1
0.536	94.3	85.6	0.0	-13.9
0.540	95.0	42.6	0.4	-57.4
0.583	94.3	92.8	-0.1	-5.1
0.644	94.6	87.6	0.4	11.9
0.652	94.5	73.3	0.3	26.6
0.657	94.7	75.8	0.4	24.1
$\phi = 120$	95.2	95.0	-0.4	1.0

Tabela B.25: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.913; 0.974]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.913	91.1	91.2	-2.9	0.3
0.917	90.9	91.2	-3.3	-0.5
0.920	90.8	91.1	-3.4	-1.2
0.933	90.8	90.7	-4.4	-4.2
0.946	90.4	90.1	-4.7	-4.6
0.949	91.0	90.9	-2.3	-1.1
0.957	91.0	90.9	-2.1	-0.8
0.959	90.3	90.4	-3.1	-1.6
0.966	91.1	91.5	-3.7	-1.9
0.974	91.0	91.2	-3.3	0.2
$\phi = 20$	95.9	96.1	-1.0	-1.1

Tabela B.26: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.913; 0.974]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.913	91.0	90.9	-0.5	2.5
0.917	90.9	91.1	-0.5	1.6
0.920	90.7	90.8	-0.9	0.4
0.933	91.1	90.8	-1.3	-3.2
0.946	91.5	90.9	-1.5	-3.6
0.949	91.3	91.1	-1.2	-2.3
0.957	91.4	91.3	-1.3	-1.3
0.959	91.4	91.5	-0.9	-1.1
0.966	91.0	91.4	-2.1	-0.5
0.974	91.0	90.6	-1.5	3.5
$\phi = 120$	96.1	96.1	-1.1	-1.1

Tabela B.27: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.913; 0.974]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.913	95.0	93.5	0.1	4.0
0.917	95.0	94.2	0.1	2.6
0.920	95.0	94.7	-0.1	1.6
0.933	95.2	93.8	-0.7	-3.9
0.946	95.2	93.0	-0.7	-5.5
0.949	95.1	94.5	-0.1	-2.7
0.957	95.2	95.0	0.2	-1.6
0.959	95.0	94.5	-0.5	-2.5
0.966	95.3	95.4	-0.4	0.9
0.974	95.1	92.2	-0.5	6.6
$\phi = 20$	95.1	95.2	-0.2	-0.1

Tabela B.28: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta complemento log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.913; 0.974]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.913	95.1	91.1	0.1	8.2
0.917	95.1	93.6	0.1	4.8
0.920	95.1	94.8	0.0	2.0
0.933	95.1	89.9	-0.2	-9.2
0.946	95.0	86.6	0.0	-12.7
0.949	95.2	91.2	-0.4	-7.4
0.957	95.1	93.8	-0.4	-4.0
0.959	94.8	93.6	0.2	-3.4
0.966	94.8	93.9	-0.3	3.7
0.974	95.1	76.0	-0.2	23.8
$\phi = 120$	94.9	95.0	-0.5	0.2

B.4 Função de Ligação Correta Log-log e Incorreta Logito

Tabela B.29: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.026; 0.087]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.026	90.7	90.9	3.3	-0.1
0.034	90.6	91.2	4.0	2.1
0.041	90.4	90.3	3.3	2.0
0.043	91.1	90.9	2.5	1.2
0.051	91.1	90.8	2.4	1.1
0.054	90.4	90.1	4.4	4.2
0.067	90.4	90.3	4.1	3.8
0.080	90.5	90.8	3.1	0.9
0.083	90.4	90.7	3.1	0.4
0.087	90.5	90.8	2.7	-0.6
$\phi = 20$	96.1	96.1	-1.2	-1.2

Tabela B.30: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.026; 0.087]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.026	90.7	90.6	0.9	-4.1
0.034	90.7	91.2	1.7	-0.2
0.041	91.3	91.3	1.2	1.3
0.043	90.7	90.5	0.9	0.9
0.051	90.6	90.5	0.9	1.8
0.054	91.4	90.8	2.1	4.1
0.067	90.8	90.4	1.4	3.5
0.080	90.6	90.6	1.0	-0.3
0.083	90.7	90.9	0.4	-1.6
0.087	90.7	90.6	0.3	-2.6
$\phi = 120$	96.3	96.2	-1.4	-1.3

Tabela B.31: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.026; 0.087]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.026	95.1	91.9	0.4	-6.9
0.034	94.9	95.0	0.5	-0.9
0.041	94.8	94.4	0.6	2.5
0.043	94.9	94.6	0.1	1.7
0.051	94.8	94.1	0.3	2.9
0.054	94.7	92.7	0.8	5.8
0.067	94.9	93.8	0.7	3.8
0.080	94.9	94.8	0.4	-1.2
0.083	95.0	94.5	0.5	-2.5
0.087	95.0	93.8	0.5	-3.8
$\phi = 20$	95.2	95.3	0.0	0.2

Tabela B.32: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.026; 0.087]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.026	94.7	76.2	0.3	-23.7
0.034	94.7	93.7	0.5	-3.9
0.041	94.7	93.8	0.2	3.7
0.043	95.2	93.9	0.4	3.9
0.051	95.1	91.2	0.3	7.4
0.054	94.9	86.3	0.5	13.2
0.067	94.9	90.0	0.3	9.3
0.080	95.0	94.7	0.2	-2.1
0.083	95.2	93.3	0.1	-5.2
0.087	95.2	90.5	0.1	-8.8
$\phi = 120$	95.1	95.0	-0.8	0.1

Tabela B.33: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.430; 0.592]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.430	91.2	91.3	0.4	-1.0
0.469	91.2	91.3	0.5	-0.2
0.488	91.3	91.3	0.9	0.6
0.488	91.5	91.4	0.2	-0.1
0.515	91.5	91.4	1.1	1.1
0.529	91.2	91.3	0.0	-0.4
0.530	91.4	91.5	0.1	-0.5
0.548	91.0	91.2	0.4	-0.1
0.588	91.3	91.4	0.8	0.2
0.592	91.4	91.6	0.8	-0.1
$\phi = 20$	96.2	96.2	-0.8	-0.8

Tabela B.34: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.430; 0.592]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.430	90.9	90.7	0.7	-1.4
0.469	91.1	91.0	0.9	0.6
0.488	90.8	90.8	0.4	1.4
0.488	91.2	91.1	0.7	1.0
0.515	91.0	90.8	0.4	1.9
0.529	91.5	91.5	0.3	0.6
0.530	91.4	91.5	0.4	0.6
0.548	91.5	91.5	0.0	0.1
0.588	91.0	90.9	0.0	-1.0
0.592	91.0	91.0	0.0	-1.3
$\phi = 120$	95.9	95.9	-1.3	-1.3

Tabela B.35: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.430; 0.592]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.430	94.9	94.5	0.1	-2.7
0.469	94.9	95.1	0.1	-0.1
0.488	94.9	94.8	0.6	1.8
0.488	95.3	95.2	0.0	0.6
0.515	94.8	94.2	0.3	2.7
0.529	94.9	94.9	-0.2	0.6
0.530	95.0	95.0	-0.2	0.5
0.548	95.1	95.0	0.2	0.4
0.588	95.1	94.8	-0.1	-1.3
0.592	95.0	94.6	-0.1	-1.8
$\phi = 20$	95.2	95.3	-0.6	-0.5

Tabela B.36: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.430; 0.592]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.430	94.8	91.3	0.1	-7.3
0.469	95.1	95.2	0.0	-0.2
0.488	94.9	93.8	0.2	3.9
0.488	95.1	94.8	0.1	1.7
0.515	95.1	92.4	0.0	6.1
0.529	94.7	94.4	0.1	2.1
0.530	94.7	94.4	0.1	1.8
0.548	94.8	94.7	0.1	0.9
0.588	95.1	94.5	0.2	-2.2
0.592	94.8	94.0	0.3	-3.8
$\phi = 120$	94.9	95.0	-0.3	-0.1

Tabela B.37: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.932; 0.974]$, $n = 20$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.932	90.8	90.8	-1.1	-1.4
0.932	91.2	91.2	-1.5	-1.8
0.934	90.7	90.8	-1.6	-2.0
0.943	90.8	90.8	0.3	0.0
0.950	90.7	90.8	0.3	0.2
0.952	90.5	90.5	-3.6	-3.6
0.961	90.6	90.7	-3.4	-3.5
0.967	90.8	90.8	-2.6	-2.7
0.972	91.0	91.0	-1.9	-2.0
0.974	90.6	90.5	-1.9	-2.1
$\phi = 20$	95.8	95.8	-1.4	-1.4

Tabela B.38: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.932; 0.974]$, $n = 20$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.932	90.7	90.7	0.4	0.2
0.932	90.5	90.5	0.2	0.1
0.934	90.7	90.7	0.3	0.1
0.943	90.7	90.7	0.6	0.6
0.950	90.8	90.8	0.4	0.4
0.952	90.6	90.7	-1.2	-1.0
0.961	91.0	91.0	-1.3	-1.2
0.967	90.7	90.7	-1.0	-1.0
0.972	91.2	91.1	-0.9	-0.9
0.974	90.9	90.9	-0.9	-1.0
$\phi = 120$	95.6	95.6	-1.5	-1.5

Tabela B.39: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.932; 0.974]$, $n = 500$ e $\phi = 20$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.932	94.6	94.6	-0.2	-0.5
0.932	94.9	94.9	-0.4	-0.5
0.934	94.6	94.6	-0.5	-0.6
0.943	95.1	95.1	-0.5	-0.4
0.950	95.2	95.2	-0.4	-0.3
0.952	94.8	94.8	-0.6	-0.2
0.961	94.7	94.6	-0.4	-0.1
0.967	94.7	94.8	-0.4	-0.4
0.972	94.8	94.8	0.0	-0.1
0.974	94.8	94.6	-0.5	-0.8
$\phi = 20$	94.7	94.7	-0.7	-0.7

Tabela B.40: Resultados dos intervalos de confiança para as respostas médias: taxa de cobertura e balanceamento; ligação correta log-log, ligação incorreta logito, planejamento com réplicas, $\mu_t \in [0.932; 0.974]$, $n = 500$ e $\phi = 120$.

Médias	Cobertura (%)		Balanceamento (%)	
	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta
0.932	94.8	94.8	0.1	-0.2
0.932	94.9	95.0	0.0	-0.4
0.934	94.9	94.9	0.0	-0.1
0.943	94.6	94.6	0.5	0.6
0.950	94.7	94.8	0.5	0.7
0.952	95.0	94.8	-0.2	0.6
0.961	94.8	94.7	-0.1	0.6
0.967	94.9	94.9	0.5	0.5
0.972	94.6	94.6	-0.1	-0.3
0.974	94.8	94.7	0.3	-0.3
$\phi = 120$	95.1	95.2	-0.5	-0.5

Referências Bibliográficas

- [1] Aranda-Ordaz, F.J. (1981). On two families of transformations to additivity for binary response data. *Biometrika*, **68**, 357–363.
- [2] Atkinson, A.C. (1985). *Plots, Transformations and Regression: An Introduction to Graphical Methods of Diagnostic Regression Analysis*. New York: Oxford University Press.
- [3] Bury, K. (1999). *Statistical Distributions in Engineering*. New York: Cambridge University Press.
- [4] Demétrio, C.G.B. (2001). *Modelos Lineares Generalizados em Experimentação Agrônômica*. 46° Reunião Anual da RBRAS e 9° SEAGRO.
- [5] Doornik, J.A. (2001). *Ox: An Object-Oriented Matrix Programming Language*, 4° edição. London: Timberlake Consultants & Oxford: <http://www.doornik.com/index.html>.
- [6] Espinheira, P.L., Ferrari, S.L.P. & Cribari-Neto, F. (2007). On beta regression residuals. A aparecer no *Journal of Applied Statistics*.
- [7] Espinheira Ospina, P.L. (2007). *Regressão beta*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo - USP, Brasil.
- [8] Ferrari, S.L.P. & Cribari-Neto, F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, **31**, 799-815.
- [9] Johnson, N.L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, 2° edição. New York: John Wiley & Sons.

- [10] Kieschnick, R. & McCullough, B.D. (2003). Regression analysis of variates observed on (0,1): percentages, proportions and fractions. *Statistical Modelling*, **3**, 193–213.
- [11] Lima, L.B. (2007). *Um teste de especificação correta em modelos de regressão beta*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Brasil.
- [12] McCullagh, P. & Nelder, J.A. (1989). *Generalized Linear Models*, 2º edição. London: Chapman & Hall.
- [13] Myers, R.H. Montgomery, D.C. & Vining, G.G. (2002). *Generalized Linear Models With Applications in Engineering and the Sciences*. New York: Wiley.
- [14] Nocedal, J. & Wright, S.J. (1999). *Numerical Optimization*. New York: Springer-Verlag.
- [15] Oliveira, M.S. (2004). *Um modelo de regressão beta: teoria e aplicações*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo - USP, Brasil.
- [16] Ospina, R., Cribari-Neto, F. & Vasconcellos, K.L.P. (2006). Improved point and interval estimation for a beta regression model. *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**, 960–981.
- [17] Paula, G.A. (2004). *Modelos de Regressão com Apoio Computacional*. Disponível em <http://www.ime.usp.br/giapaula/livro.html>
- [18] Papke, L. & Wooldridge, J. (1996). Econometric methods for fractional response variables with an application to 401(K) plan participation rates. *Journal of Applied Econometrics*, **11**, 619–632.
- [19] Prater, N.H. (1956). Estimate gasoline yields from crude. *Petroleum Refiner*, **35**, 236–238.
- [20] Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2º edição. New York: Wiley.
- [21] Sen, P.K. & Singer, J.M. (1993). *Large Sample Methods in Statistics: An Introduction With Applications*. New York: Chapman & Hall.
- [22] Simas, A.B. (2006). Beta regression for modeling rates and proportions, version 1.2 (<http://cran.r-project.org>).

- [23] Smithson, M. & Verkuilen, J. (2005). *Beta regression: practical issues in estimation*. Disponível em <http://www.anu.edu.au/psychology/people/smithson/details/beta-reg/betareg.html>.
- [24] Smithson, M. & Verkuilen, J. (2006). A better lemon squeezer? Maximum-likelihood regression with beta-distributed dependent variables. *Psychological Methods*, **11**, 54–71.