**Assinaturas dinâmicas de um sistema
coerente com aplicações**

José Alberto Ramos Flor

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei da Costa Bueno

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, dezembro de 2011

Assinaturas dinâmicas de um sistema coerente com aplicações

Este corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por José Alberto Ramos Flor
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Vanderlei da Costa Bueno - IME-USP.
- Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa - Escola Politécnica-USP.
- Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka - IME-USP.

Agradecimentos

Gostaria de aproveitar esta oportunidade para agradecer às pessoas e instituições que, ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

Primeiramente gostaria de agradecer ao IME, como instituição e grupo humano , que contribuíram para minha formação acadêmica.

Gostaria de agradecer em especial a meu orientador , Prof. Dr Vanderlei da Costa Bueno, por todo seu apoio e compreensão, pela disposição que teve para ouvir minhas perguntas e idéias, e em especial pela confiança depositada em mim.

Quero agradecer ao meu pai Jose Melquiades, a minha mãe Maria, por todo o amor, carinho e apoio que me dão. À minha tia Sara, que é como uma segunda mãe , aos meus irmãos Juan Carlos e Miguel, pela força que me dão, às minhas primas, aos meus primos, aos meus avós e toda minha família.

E finalmente à Deus por iluminar-me e guiar-me sempre até nos momentos de escuridão.

Resumo

Nesta dissertação estudamos os sistemas coerentes. Um sistema de engenharia é completamente caracterizado por uma função de estrutura que relaciona o tempo de vida do sistema com os tempos de vida de seus componentes. Nos últimos sete anos, analisou-se uma nova estrutura para tal relação: as assinaturas de um sistema coerente, proposta por Samaniego, sob a hipótese de que os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^n P(T = T_{(i)})P(T_{(i)} > t)$$

onde os $T_{(i)}$ são as estatísticas de ordem associada aos tempos de vida dos componentes T_i . Embora restritiva, esta estrutura é substancialmente mais útil por exemplo na comparação do desempenho de sistemas. Um tratamento detalhado da teoria pode ser encontrado em Samaniego [20], Kochar [14], Navarro [15].

O objetivo da dissertação é analisar esta estrutura em um contexto mais amplo que considera a dinâmica no tempo e a dependência estocástica, utilizando a teoria dos martingais para processos pontuais:

- Estendemos a noção de assinaturas para o caso em que os tempos de vidas dos componentes são dependentes sobre diferentes níveis de informação, e recuperamos a definição clássica sob a hipótese de independência;

- Analisamos a importância da confiabilidade de um componente quando a falha do sistema ocorre com a i -ésima falha ordenada dos componentes;

- Apresentamos uma nova aplicação das assinaturas no cálculo do tempo de vida residual do sistema coerente, baseada na teoria de valores extremos.

Palavras-chave: assinatura do sistema, assinatura dinâmica, sistema coerente, martingal, processo pontual, valores extremos.

Abstract

A physical system is completely characterized by a structure function that relates the system lifetime with its components lifetimes. Over the past seven years, a new structure for such relationship was analyzed, the signature, proposed by Samaniego, which considers independent and identically distributed components lifetimes:

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^n P(T = T_{(i)})P(T_{(i)} > t)$$

where $T_{(i)}$ are the order statistics of the components lifetimes T_i and T is the system lifetime. Although restrictive, this structure is substantially more useful. A detailed treatment of the theory can be found in Samaniego [20], Kochar [14], Navarro [15].

The main goal in this work is to analyze the signature structure in a broader context, considering time dynamics and stochastic dependence, using the point processes martingale theory:

- We extend the notion of signatures for the case where the component lifetimes are dependent under different levels of information, and we recover the classical definition of signature under independence assumption;

- We analyze the reliability importance of a component when the failure of the system coincides with the i -th ordered failure of components;

- We present a new application of signatures. The calculation of the coherent system residual lifetime, based on extreme value theory.

Keywords: signatures of the system, dynamic signatures, coherent systems, martingales, point processes, extreme values.

Sumário

1	Assinatura Clássica e Independência	1
1.1	Assinatura de um Sistema Coerente	1
1.2	Assinatura Dinâmica	5
2	Assinatura Dinâmica e Dependência	9
2.1	Representação dos Tempos de Vida através de Compensadores	9
2.2	Assinatura Dinâmica ao nível de Informação $\mathfrak{F}_t$	14
2.3	Assinatura Dinâmica ao nível de Informação Completa $\mathfrak{F}^*$	19
3	Aplicações	29
3.1	Importância de Barlow-Prochan e Assinatura	29
3.2	Importância de Componentes e Transformação no Compensador	34
3.2.1	Importância de Natvig	37
3.3	Teoria de Valores Extremos e Assinaturas	44
4	Conclusões	53
4.1	Considerações Finais	53
4.2	Sugestões para Pesquisas Futuras	53
A	Apêndice	55
A.1	Processos Estocásticos	55
A.1.1	Tempo de Parada	56
A.1.2	Martingal	57
A.2	Processos Pontuais	59
A.2.1	Fórmula Exponencial e Teorema de Girsanov	62
A.3	Filtragens associadas aos Processos Pontuais	70
	Referências Bibliográficas	71

Capítulo 1

Assinatura Clássica e Independência

1.1 Assinatura de um Sistema Coerente

Como em Barlow and Proschan [4] um sistema de engenharia é completamente caracterizado pela sua função de estrutura Φ que relaciona o tempo de vida T do sistema com os tempos de vida T_j , $j = 1, \dots, n$, de seus componentes definidos em um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$,

$$T = \Phi(T_1, T_2, \dots, T_n).$$

O sistema físico é mal modelado, se a melhora do desempenho de um de seus componentes causa a piora no seu funcionamento. Assim nossa atenção é restrita a funções de estruturas monótona crescente em cada uma de suas coordenadas. Além disso, para evitar trivialidades, eliminaremos aqueles sistemas cujo estado não depende do estado de funcionamento de cada um de seus componentes. Um sistema é chamado de coerente se a sua função de estrutura Φ é crescente e cada componente é relevante, isto é, se existe um tempo t e uma configuração de T no tempo t , tal que o sistema funciona se, e somente se, o componente funciona naquele instante.

O desempenho do sistema coerente pode ser medido pela relação entre a função de estrutura e as funções de distribuições dos tempos de vida dos componentes. A função de estrutura é uma maneira de indexar classes de sistemas coerentes mas tal representação torna-se inconveniente quando nosso objetivo é calcular a distribuição do tempo de vida do sistema. Uma representação alternativa para a função de distribuição do sistema coerente é através da assinatura do sistema, como em Samaniego [20], que, embora em contexto mais restrito do que a função de estrutura, é substancialmente mais útil. De Samaniego [21] temos o teorema:

Teorema 1.1.1 *Seja $(T_1, \dots, T_n)$ o vetor dos tempos de vida dos componentes de um sistema coerente Φ , de ordem n , independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição contínua F , e seja T o tempo de vida do sistema coerente Φ . Então :*

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(T_{(i)} > t)$$

onde $\alpha_i = P(T = T_{(i)})$ e $\{T_{(i)}, 1 \leq i \leq n\}$ são as estatísticas de ordem de $\{T_i, 1 \leq i \leq n\}$.

Demonstração

Seja π uma permutação dos inteiros positivos em $\{1, \dots, n\}$ e A_i o conjunto das permutações tal que a i -ésima componente coincide com o tempo de vida do sistema T , isto é:

$$A_i = \{\pi \in \mathfrak{P}(n) : T = T_{\pi(i)}, T_{\pi(1)} < T_{\pi(2)} < \dots < T_{\pi(n)}\}$$

onde $\mathfrak{P}(n)$ é o conjunto de todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$. Note que $T_{\pi(i)} = T_{(i)}$. Então

$$\begin{aligned} P(T > t) &= \sum_{i=1}^n P(T > t, \pi \in A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\pi \in A_i} P(T > t, T = T_{\pi(i)}, T_{\pi(1)} < T_{\pi(2)} < \dots < T_{\pi(n)}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\pi \in A_i} P(T_{\pi(i)} > t, T = T_{(i)}, T_{\pi(1)} < T_{\pi(2)} < \dots < T_{\pi(n)}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\pi \in A_i} P(T_{(i)} > t, T = T_{(i)}, T_{\pi(1)} < T_{\pi(2)} < \dots < T_{\pi(n)}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Contudo os eventos $\{T = T_{(i)} > t\}$ e $\{T_{\pi(1)} < T_{\pi(2)} < \dots < T_{\pi(n)}\}$ são independentes porque o primeiro evento depende somente da estatística de ordem $T_{(i)}$ e o segundo evento depende das ordenações das observações originais $T_1, \dots, T_n$.

Assim temos

$$\begin{aligned} P(T > t) &= \sum_{i=1}^n P(T_{(i)} > t) \sum_{\pi \in A_i} P(T = T_{(i)}, T_{\pi(1)} < T_{\pi(2)} < \dots < T_{\pi(n)}) \\ &= \sum_{i=1}^n P(\pi \in A_i) P(T_{(i)} > t) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i P(T_{(i)} > t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde a terceira linha segue do fato que $P(\pi \in A_i) = \sum_{\pi \in A_i} P(T = T_{(i)}, T_{\pi(1)} < T_{\pi(2)} < \dots < T_{\pi(n)})$. $\square$

No contexto acima Samaniego [20] define:

Definição 1.1.1 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente de ordem n com os tempos de vida dos componentes $T_1, \dots, T_n$, independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição contínua F . O vetor de assinatura α é definido como:*

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

onde $\alpha_i = P(T = T_{(i)})$ e $\{T_{(i)}, 1 \leq i \leq n\}$ são as estatísticas de ordem de $\{T_i, 1 \leq i \leq n\}$.

Cada componente α_i do vetor de assinatura pode ser calculado como

$$\alpha_i = \frac{\text{número de ordenações para as quais a } i\text{-ésima falha causa a falha do sistema}}{n!}$$

onde $n!$ é o numero total de ordenações de n elementos.

Exemplo 1.1.1

a) Sistema em série.

Em um sistema em série, a primeira falha entre os componentes causa a falha do sistema, e assim, $\alpha_1 = P(T = T_{(1)}) = 1$ e os outros componentes do vetor de assinatura são zeros.

b) Sistema em paralelo.

Em um sistema em paralelo, o sistema falha se todos os componentes falham, e portanto, temos que $\alpha_n = P(T = T_{(n)}) = 1$ enquanto os outros componentes do vetor de assinatura tomam o valor zero.

c) Sistema k-de-n.

Neste caso, o sistema falha se pelo menos k componentes falham, assim $\alpha_k = P(T = T_{(k)}) = 1$ e os resto dos componentes do vetor de assinatura são zeros.

As assinaturas são de grande utilidade na análise de confiabilidade pois no contexto de componentes com tempos de vida independentes e identicamente distribuidos com função de distribuição contínua, elas são independentes da distribuição dos tempos de vida dos componentes, e dependem unicamente das características da modelagem estrutural do sistema.

Um tratamento detalhado da teoria e aplicações das assinaturas pode ser encontrado em Samaniego [20]. Esta referência justifica detalhadamente por que da necessidade da hipótese de que os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuidos. A propósito existem aplicações em que tal suposição é apropriada, como em baterias de iluminação, plaquetas ou chips de um computador digital, o subsistema de velas de ignição em um motor de automóvel. Em tais casos, o uso de assinaturas do sistema para as comparações entre os sistemas é apropriado e correto.

A utilidade das assinaturas em comparar o desempenho dos sistemas com componentes independentes e identicamente distribuidos deriva em grande parte dos resultados de representação e de preservação. Antes de comentar tais resultados, recordamos uma forma padrão de comparação estocástica.

Definição 1.1.2 *Sejam T_1 e T_2 duas variáveis aleatórias positivas.*

A variável T_1 é estocasticamente menor que T_2 , denotado por $T_1 \leq_{st} T_2$, se para todo $t \geq 0$

$$P(T_1 > t) \leq P(T_2 > t).$$

O resultado seguinte mostra que essa relação entre as assinaturas assegura uma relação semelhante entre os tempos de vida dos sistemas correspondentes.

Teorema 1.1.2 *Sejam α_1 e α_2 as assinaturas de dois sistemas coerentes, ambos com n componentes e tal que os tempos de vida dos componentes dos dois sistemas sejam independentes e identicamente distribuídos com a mesma distribuição F . Se S_1 e S_2 representam os tempos de vida dos sistemas coerentes com assinaturas α_1 e α_2 , respectivamente, então:*

$$\alpha_1 \leq_{st} \alpha_2 \rightarrow S_1 \leq_{st} S_2.$$

Demonstração

Escreveremos de novo a expressão $P(S > t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(S_{(i)} > t)$, onde S é um tempo de vida do sistema e $S_{(i)}$ são as estatísticas de ordem associadas aos componentes. Usando o fato que os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos com distribuição F , a probabilidade $P(S_{(i)} > t)$ pode ser escrita como

$$P(S_{(i)} > t) = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n}{k} (F(t))^k (1 - F(t))^{n-k}. \quad (1.3)$$

Portanto

$$\begin{aligned} P(S > t) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i P(S_{(i)} > t) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{k=0}^{i-1} \binom{n}{k} (F(t))^k (1 - F(t))^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i \right) \binom{n}{k} (F(t))^k (1 - F(t))^{n-k}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Usando a hipótese $\alpha_1 \leq_{st} \alpha_2$ temos que $\sum_{i=k+1}^n \alpha_{1i} \leq \sum_{i=k+1}^n \alpha_{2i}$ para todo $k \geq 0$ e assim, para cada $t \geq 0$

$$P(S_1 > t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_{1i} \right) \binom{n}{k} (F(t))^k (1 - F(t))^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_{2i} \right) \binom{n}{k} (F(t))^k (1 - F(t))^{n-k} \\
&= P(S_2 > t),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

o que é equivalente a $S_1 \leq_{st} S_2$. $\square$

Outra questão importante é o fato de que podemos estar interessados em comparar sistemas de tamanhos diferentes. Embora tal comparação possa surgir em geral, a comparação é relevante quando envolve sistemas com componentes novos e usados. O teorema anterior não se aplica a tal problema.

A relação exata entre a assinatura de um sistema de ordem n com a assinatura de um sistema de ordem maior, com mesma função de distribuição, de tempo de vida, foi caracterizada pelo seguinte teorema devido a Samaniego:

Teorema 1.1.3 *Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ o vetor de assinatura de um sistema coerente cujos tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos com distribuição contínua F . Então o tempo de vida de um sistema de $(n+1)$ -componentes cujos componentes têm tempos de vida independentes e identicamente distribuídos com distribuição F e com assinatura α^* , onde*

$$\alpha_k^* = \frac{(n-k+1)\alpha_k + (k-1)\alpha_{k-1}}{n+1}$$

para todo k , $1 \leq k \leq n+1$ tem a mesma função de distribuição do tempo de vida do sistema com n -componentes e assinatura α .

Demonstração. Ver Samaniego [22].

Koskar [14] e Shaked [23] estenderam o conceito de assinatura para o caso em que os tempos de vida dos componentes de um sistema são permutáveis (i.e a distribuição conjunta $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$, de $(T_1, T_2, \dots, T_n)$, é a mesma para qualquer permutação dos $t_1, t_2, \dots, t_n$), um caso de interesse e de aplicações práticas na teoria de confiabilidade.

1.2 Assinatura Dinâmica

Navarro [15] e Samaniego [19] consideram assinaturas dinâmicas (condicionadas) na comparação da confiabilidade de sistemas novos e usados. Em suas abordagens consideram o tempo de vida do sistema condicionado a eventos dependentes do tempo. Por exemplo Navarro [15] considerou os eventos $\{T > t\}$ e $\{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t\}$ com assinaturas $P(T = T_{(i)} | \{T > t\})$ e $P(T = T_{(i)} | \{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t\})$, respectivamente. Infelizmente, em ambas situações, a assinatura do sistema depende da distribuição F e do tempo t .

Samaniego [19] considerou o evento $\{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ e propôs a assinatura do sistema como $P(T = T_{(k)} | \{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})$ que não depende da distribuição F ou do tempo t e

possui as propriedades usuais das assinaturas. Nesta seção detalharemos as principais propriedades da assinatura dinâmica proposta por Samaniego [19].

Definição 1.2.1 *A assinatura dinâmica do sistema no tempo t é o vetor de dimensão $n - i$, cujos componentes são*

$$\beta_k = P(T = T_{(k)} | \{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})$$

com $k = i + 1, i + 2, \dots, n$.

Quando o evento $\{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ tem probabilidade zero a assinatura dinâmica não está definida. O principal teorema prova que se o evento $\{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ tem probabilidade positiva, cada componente da assinatura dinâmica é independente da distribuição F e do tempo t , e dado pela fórmula

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{j=i+1}^n \alpha_j}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a assinatura do sistema.

Para demonstrar tal teorema usaremos o seguinte lema:

Lema 1.2.1 *Seja α a assinatura de um sistema coerente de ordem n . Seja T o tempo de vida do sistema e $T_{(i)}$ a i -ésima estatística de ordem dos tempos de vida dos componentes, independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição contínua F . Então para $i < n$*

$$P(T > t | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) = \sum_{j=i+1}^n \alpha_j$$

Demonstração

Por hipótese os tempos de falha dos componentes não ocorrem simultaneamente:

$$\begin{aligned} P(T > t | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) &= \sum_{j=1}^n P(T > t, T = T_{(j)} | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) \\ &= \sum_{j=i+1}^n P(T > t, T = T_{(j)} | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Analisaremos cada parcela da última expressão.

$$P(T > t, T = T_{(j)} | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) =$$

$$= P(T > t | \{T = T_{(j)}\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) P(T = T_{(j)} | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})$$

$$\begin{aligned}
&= P(T_{(j)} > t | \{T = T_{(j)}\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) P(T = T_{(j)} | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) \\
&= P(T_{(j)} > t | \{T = T_{(j)}\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) P(T = T_{(j)} | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) \\
&= P(T_{(j)} > t | \{T = T_{(j)}\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) P(T = T_{(j)}) \\
&= P(T_{(j)} > t | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) \alpha_j
\end{aligned} \tag{1.7}$$

nesse estágio usamos o fato que os $\{T_k, k = 1, \dots, n\}$ são independentes e identicamente distribuídos, o que implica que os eventos $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ e $\{T = T_{(j)}\}$ são independentes¹. Para finalizar notemos que $P(T_{(j)} > t | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) = 1$ para $j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$. Assim concluímos que

$$P(T > t | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) = \sum_{j=i+1}^n \alpha_j$$

terminando a demonstração. $\square$

Teorema 1.2.1 *Seja α a assinatura de um sistema coerente de ordem n . Seja T o tempo de vida do sistema e $T_{(i)}$ a i -ésima estatística de ordem dos tempos de vidas dos componentes, independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição contínua F . Suponhamos que cada $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ tem probabilidade positiva. Então a assinatura dinâmica do sistema, β , dado o evento $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$, é um vetor $(n-i)$ -dimensional com componentes dado pela formula*

$$\beta_k = P(T = T_{(k)} | \{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) = \frac{\alpha_k}{\sum_{j=i+1}^n \alpha_j}$$

para $k = i+1, i+2, \dots, n$.

Demonstração

Calcularemos a probabilidade condicional $P(T = T_{(k)} | \{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})$:

$$\begin{aligned}
P(T = T_{(k)} | \{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) &= \frac{P(T = T_{(k)} \cap \{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})}{P(\{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})} \\
&= \frac{P(T = T_{(k)} \cap \{T > t\} | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})}{P(T > t | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})} \\
&= \frac{\alpha_k P(T_{(k)} > t | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})}{P(T > t | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\})} \\
&= \frac{\alpha_k}{\sum_{j=i+1}^n \alpha_j}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

onde a terceira igualdade se justifica pela independência de $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ e $\{T = T_{(k)}\}$, e a última igualdade decorre do lema anterior e do fato que $P(T_{(k)} > t | \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}) = 1$ para

¹O motivo da independência é que o primeiro evento depende somente da distribuição da estatística de ordem e não da modelagem do sistema enquanto o segundo depende da modelagem do sistema e não da função de distribuição F dos componentes

$k = i + 1, i + 2, \dots, n$. $\square$

No que segue, $\beta_n(n - i)$ representa a assinatura com n coordenadas equivalente à assinatura do sistema com n componentes e i falhas. Ver teorema 1.1.3 e Samaniego [19].

Teorema 1.2.2 *Considere dois sistemas coerentes baseados em n componentes com tempos de vida independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição contínua F . Suponha que ambos sistemas estejam funcionando e que exatamente i e j componentes falharam, respectivamente, em cada sistema no tempo t . Sejam $\beta_n(n - i)$ e $\beta_n(n - j)$ suas assinaturas dinâmicas de ordem n e S_1 e S_2 os tempos de vida correspondente. Se $\beta_n(n - i) \leq_{st} \beta_n(n - j)$ então*

$$(S_1 - t | S_1 > t, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) \leq_{st} (S_2 - t | S_2 > t, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})$$

Demonstração Ver Samaniego [19].

Nesta dissertação, no capítulo 1, introduzimos o conceito de assinaturas e descrevemos um resumo dos resultados atuais da teoria desenvolvida por diversos autores. No capítulo 2 abordamos os aspectos dinâmicos e estocásticos das assinaturas, generalizando os conceitos clássicos. Finalmente, no capítulo 3, analisamos algumas aplicações da teoria da confiabilidade no contexto das assinaturas. Estudamos a importância da confiabilidade dos componentes, os reparos mínimos através de compensadores e o cálculo do tempo residual do sistema utilizando a teoria de valores extremos. No apêndice delineamos os resultados da teoria de martingais para processos pontuais que utilizamos na dissertação.

Capítulo 2

Assinatura Dinâmica e Dependência

Pretendemos dar uma nova abordagem para assinaturas de sistemas coerentes. Consideramos a evolução do sistema no tempo sob diferentes níveis de informação e para cada nível de informação apresentamos a assinatura dinâmica. Desta forma, se os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos com distribuição contínua, a assinatura do sistema dinâmico tem a propriedade especial de que é independente de ambos, a distribuição F e o tempo de inspeção t . Este fato vai além da mera simplicidade e aplicabilidade do vetor de assinaturas. Reflete as características da modelagem do sistema correspondente e pode ser utilizado na comparação do desempenho de sistemas.

Na seção 2.1 faremos uma breve apresentação dos principais tópicos de estudo na análise da evolução de um sistema coerente no tempo. Na seção 2.2, analisamos detalhadamente o tempo de vida do sistema dado o nível de informação $\mathfrak{F}_t$, gerado pelas ordenações dos tempos de vida dos componentes. Definimos uma assinatura dinâmica neste nível de informação e recuperamos a noção da assinatura clássica sob a hipótese em que os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos. Na seção 2.3, um nível maior de informação é considerado, chamado informação completa, $\mathfrak{F}_t^*$, que em adição à informação $\mathfrak{F}_t$, contém a informação sobre o tempo de vida do sistema. Neste nível de informação um novo tipo de assinatura dinâmica é definido e, por sua vez, sob a hipótese de que os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos recuperamos a noção de assinatura dinâmica definida por Samaniego [19].

Por simplicidade de notação vamos assumir que as relações entre conjuntos mensuráveis e variables aleatórias, como $\subset, \subseteq, \leq, <, =$ serão sempre com probabilidade um. Assim expressões ou termos como P-q.c geralmente serão omitidos. Para terminar, com respeito as esperanças condicionais não faremos distinção entre uma versão e sua classe de equivalência P-q.c .

2.1 Representação dos Tempos de Vida através de Compensadores

Consideremos um vetor de n variáveis aleatórias $(T_1, \dots, T_n)$ finitas, positivas, definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com a propriedade $P(T_i \neq T_j) = 1, 1 \leq i \neq j \leq n$. Cada variável T_i representa o tempo de vida do componente i de um sistema coerente Φ com componentes em $\mathcal{C} = \{1, \dots, n\}$. A condição $P(T_i \neq T_j) = 1, 1 \leq i \neq j \leq n$ implica que não há falhas simultâneas nos componentes do sistema coerente.

A evolução dos componentes no tempo define um processo pontual através dos tempos das falhas ordenados dos componentes e as marcas correspondentes.

Denotemos por $T_{(1)} < T_{(2)} < \dots < T_{(n)}$ a ordenação dos valores das realizações dos n tempos de vida dos componentes. As variáveis $X_i = \{k : T_{(i)} = T_k\}$ representam as marcas correspondentes a tal ordenação.

Por convenção adotamos que:

- a) $T_{(n+1)} = T_{(n+2)} = \dots = \infty$;
- b) $X_{n+1} = X_{n+2} = \dots = p$ onde p é uma marca fictícia diferente de $1, \dots, n$.

A sequência $(T_{(n)}, X_n, n \geq 1)$ define um processo pontual marcado.

O tempo de vida T do sistema é monitorado ao nível de seus componentes, isto é, a cada instante de tempo t observamos se o evento $\{T_{(i)} \leq t\}$ ocorre ou não, e se esse evento ocorre observamos qual componente falhou e o instante exato de falha. A formulação matemática de nossas observações é dada por uma família de sub- σ -álgebra $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\{1(T_{(i)} > s), X_i = j, 1 \leq i \leq n, j \in \mathcal{C}, 0 < s \leq t\}$$

que satisfaz as condições de Dellacherie de continuidade à direita e completitude.

Em adição, consideramos o processo pontual $N(i)j$ onde

$$N_{(i)j}(t) = 1\{T_{(i)} \leq t, X_i = j\}$$

o qual é um $\mathfrak{F}_t$ -submartingal. Assim pela decomposição de Doob-Meyer para $N(i)j$ (Ver teorema A.1.7), existe um único processo $\mathfrak{F}_t$ -previsível, $(A_{(i)j}(t), t \geq 0)$, chamado $\mathfrak{F}_t$ -compensador de $N_{(i)j}(t)$, com $A_{(i)j}(0) = 0$, e tal que $N_{(i)j}(t) - A_{(i)j}(t)$ é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal. Sob a hipótese que T_i seja um tempo de parada totalmente inacessível o $\mathfrak{F}_t$ -compensador $A_{(i)j}(t)$ é contínuo.

A idéia intuitiva do compensador é a de que ele generaliza a noção clássica de risco. Representa a propensão de falha no instante t , condicionada à informação passada, excluindo o presente. Ver Arjas [1].

A contagem das falhas do componente j , $N_j(t)$, é dada por $N_j(t) = \sum_{i \geq 1} N_{(i)j}(t)$ e seu $\mathfrak{F}_t$ -compensador $A_j(t)$ é dado por $A_j(t) = \sum_{i \geq 1} A_{(i)j}(t)$ desde que a decomposição de Doob-Meyer é única e a soma finita de martingais é um martingal. Analogamente, a contagem da i -falha, $N_{(i)}(t)$, é dada por $N_{(i)}(t) = \sum_{j \in \mathcal{C}} N_{(i)j}(t)$ e, pelas mesmas razões, o $\mathfrak{F}_t$ -compensador $A_{(i)}(t)$ é dado por $A_{(i)}(t) = \sum_{j \in \mathcal{C}} A_{(i)j}(t)$.

Dado o sistema coerente $(\Phi, \mathcal{C})$ com tempo de vida T , queremos calcular o $\mathfrak{F}_t$ -compensador $(A_\Phi(t), t \geq 0)$, associado ao processo pontual $N_\Phi(t) = 1(T \leq t)$, como função dos compensadores correspondentes aos tempos de vida dos componentes. Para tanto, a definição do nível crítico para cada falha ordenada é essencial.

Definição 2.1.1 *O nível crítico do componente j para que a falha do sistema coincida com a i -ésima falha dos componentes, $Y_{(i)j}$, é o primeiro instante, a partir do qual a falha do componente j , no instante $T_{(i)}$, causa a falha do sistema.*

Com tal definição exibimos uma decomposição para o $\mathfrak{F}_t$ -compensador $A_\Phi(t)$ do sistema, que usaremos nas seções posteriores.

Teorema 2.1.1 *No evento $\{T > t\}$, o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de $N_\Phi(t) = 1(T \leq t)$ é*

$$A_\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [A_{(i)j}(t) - A_{(i)j}(Y_{(i)j})]^+$$

onde $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Demonstração

Como $A_{(i)j}(t)$ é o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de $N_{(i)j}(t)$ temos que

$$E\left[\int_0^\infty C_{(i)j}(s) dN_{(i)j}(s)\right] = E\left[\int_0^\infty C_{(i)j}(s) dA_{(i)j}(s)\right]$$

para todo processo não negativo $\mathfrak{F}_t$ -previsível $(C_{(i)j}(t), t \geq 0)$. Seja $(C(t), t \geq 0)$ qualquer processo não negativo $\mathfrak{F}_t$ -previsível. A partir dele, definimos um novo processo $\mathfrak{F}_t$ -previsível $C_{(i)j}(s) = C(s)1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T)$ com t fixo. Pela definição de compensador temos :

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^\infty C(s)1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T) dN_{(i)j}(s)\right] \\ &= E\left[\int_0^\infty C(s)1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T) dA_{(i)j}(s)\right]. \end{aligned}$$

Notemos que, por hipótese, o tempo de vida do sistema T deve coincidir com algum $T_{(i)}$, para algum i , e sua falha deve coincidir com a falha de algum componente $j \in \mathcal{C}$. Assim, em um intervalo infinitesimal ds ,

$$\{T \in ds\} = \bigcup_{T_{(i)} > Y_{(i)j}} \{T_{(i)} \in ds, X_i = j\}.$$

Escrevemos

$$dN_\Phi(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T) dN_{(i)j}(s)$$

pois ao integrar $dN_\Phi(s)$ temos

$$\begin{aligned}
N_\Phi(t) &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T) dN_{(i)j}(s) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1(Y_{(i)j} < T_i \leq t \wedge T) 1(X_i = j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1(T_{(i)} \leq t, T = T_{(i)}, X_i = j) \\
&= 1(T \leq t).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Dessa forma, para todo processo não negativo $C(s)$, $\mathfrak{F}_t$ -previsível

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^\infty C(s) dN_\Phi(s)\right] &= E\left[\int_0^\infty C(s) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T) dN_{(i)j}(s)\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E\left[\int_0^\infty C(s) 1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T) dN_{(i)j}(s)\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E\left[\int_0^\infty C(s) 1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T) dA_{(i)j}(s)\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty C(s) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T) dA_{(i)j}(s)\right].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Portanto, da definição de $\mathfrak{F}_t$ -compensador do sistema Φ , temos que, no evento $\{T > t\}$:

$$\begin{aligned}
A_\Phi(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^\infty 1(Y_{(i)j} < s \leq t \wedge T) dA_{(i)j}(s) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^\infty 1(Y_{(i)j} < s \leq t) dA_{(i)j}(s) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [A_{(i)j}(t) - A_{(i)j}(Y_{(i)j})]^+
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. $\square$

O lema seguinte, que relaciona as esperanças condicionais envolvendo informações do tipo $\mathfrak{F}_t \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ e $\mathfrak{F}_{T_{(i)}} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$, é importante para desenvolvimentos posteriores.

Lema 2.1.1 *Sejam $T_1, \dots, T_n$ $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada representando os tempos de vida dos componentes de um sistema coerente Φ com tempo de vida T . Denotemos $T_{(0)} = 0$ e $T_{(n+1)} = \infty$. Então, ao nível de informação $\mathfrak{F}_t$, no evento $\{T > t\}$, temos que:*

$$P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t) = P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}})$$

para todo $k \geq i + 1$.

Demonstração

Se denotamos por I_i o evento $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ temos que, pelo lema A.2.1, quase-certamente com respeito a P^{I_i}

$$P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t) = P^{I_i}(T = T_{(k)j} | I_i \cap \mathfrak{F}_t)$$

$$P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}}) = P^{I_i}(T = T_{(k)j} | I_i \cap \mathfrak{F}_{T_{(i)}}).$$

Como nesse intervalo $I_i = \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ a informação de $\mathfrak{F}_{T_{(i)}}$ é a mesma que $\mathfrak{F}_t$, isto é, $\mathfrak{F}_t \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\} = \mathfrak{F}_{T_{(i)}} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$.

$$P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t) = P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}})$$

quase-certamente com respeito a P^{I_i} . Como ambas variáveis têm suporte em I_i , concluímos que

$$P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t) = P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}})$$

quase-certamente com respeito à probabilidade P . $\square$

Observação 1

Analogamente, podemos demonstrar que para todo $k \geq i + 1$

$$P(T \geq T_{(k)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t) = P(T \geq T_{(k)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}}).$$

2.2 Assinatura Dinâmica ao nível de Informação $\mathfrak{F}_t$

Nesta seção a informação disponível é dada pelas σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$, que representam o sistema coerente monitorado ao nível de seus componentes. Intuitivamente, a cada instante de tempo t observamos se a i -ésima falha ocorreu, ou não. Se ocorreu, conhecemos exatamente o instante de ocorrência e o componente que originou tal falha.

Se o sistema tem exatamente i falhas, a evolução de $P(T > t | \mathfrak{F}_t)$ está relacionado com a propensão de falhar num tempo posterior $T_{(k)}$ devido a algum componente $j \in \mathcal{C}$, $P(T = T_{(k)j} | \mathfrak{F}_t)$. O próximo lema determina tal relação:

Lema 2.2.1 (*Decomposição de $P(T > t | \mathfrak{F}_t)$ ao nível de informação $\mathfrak{F}_t$*)

Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n e sejam $T_1, \dots, T_n$ os $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada representando os tempos de vida dos seus componentes com $T_{(0)} = 0$ e $T_{(n+1)} = \infty$. Então, ao nível de informação $\mathfrak{F}_t$, no evento $\{T > t\}$, temos que:

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \sum_{i=0}^n h(i, t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})$$

onde

$$h(i, t) = \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n P(T = T_{(k)j} | \mathfrak{F}_t) 1(T_{(k)j} > t)$$

para $i = 0, 1, \dots, n-1$ e $h(n) = 0$.

Demonstração

Como os componentes não falham simultaneamente temos

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = E[1(T > t) | \mathfrak{F}_t] = \sum_{i=0}^n E[1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t].$$

Desenvolvendo cada parcela da última expressão

$$\begin{aligned} E[1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t] &= E\left[\int_0^\infty 1(s > t) dN_\Phi(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t\right] \\ &= E\left[\int_0^\infty 1(s > t) dA_\Phi(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde a segunda igualdade é devido ao lema A.2.2. Portanto

$$\begin{aligned} &E\left[\int_0^\infty 1(s > t) dA_\Phi(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t\right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n E\left[\int_0^\infty 1(s > t) 1(Y_{(k)j} < s \leq T) dA_{(k)j}(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n E \left[\int_0^\infty 1(s > t) 1(Y_{(k)j} < s \leq T) dN_{(k)j}(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n E [1(T_{(k)j} > t) 1(Y_{(k)j} < T_{(k)j} \leq T) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t] \\
&= \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n E [1(T_{(k)j} > t) 1(T = T_{(k)j}) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t], \tag{2.4}
\end{aligned}$$

onde a primeira igualdade é proveniente da decomposição do compensador $A_\Phi(t)$ (teorema 2.1.1). Se denotamos cada $E[1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t]$ por $h(i, t)$ temos que

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \sum_{i=0}^n h(i, t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})$$

o que demonstra o teorema. $\square$

Como consequência desse lema, o seguinte teorema nos permite definir uma assinatura dinâmica associada a $P(T > t | \mathfrak{F}_t)$

Teorema 2.2.1 (*Teorema de assinatura dinâmica para $\mathfrak{F}_t$*)

Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n e sejam $T_1, \dots, T_n$ os $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada representando os tempos de vida dos seus componentes com $T_{(0)} = 0$ e $T_{(n+1)} = \infty$. Então, sob o evento $\{T > t\}$, temos:

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \sum_{i=1}^n \beta(i, t) 1(T_{(i)} > t)$$

onde

$$\beta(i, t) = \sum_{j=1}^n P(T = T_{(i)j} | \mathfrak{F}_t) 1(T_{(i)j} > t)$$

com $\beta(i, t) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \beta(i, t) = 1$.

Demonstração

Primeiro provaremos a decomposição para $P(T > t | \mathfrak{F}_t)$. Para tal usaremos o fato de

$$1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) = 1(T_{(i)} \leq t) - 1(T_{(i+1)} \leq t)$$

na decomposição de $P(T > t | \mathfrak{F}_t)$ do lema 2.2.1. Assim

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \sum_{i=0}^n h(i, t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) = \sum_{i=0}^n h(i, t) (1(T_{(i)} \leq t) - 1(T_{(i+1)} \leq t)).$$

Multiplicando e rescrevendo o somatório temos

$$\begin{aligned}
P(T > t | \mathfrak{F}_t) &= \sum_{i=0}^n h(i, t) (1(T_{(i)} \leq t) - 1(T_{(i+1)} \leq t)) \\
&= \sum_{i=0}^n h(i, t) (1(T_{(i)} \leq t) - 1(T_{(i+1)} \leq t)) \\
&= h(0, t) 1(T_{(0)} \leq t) + \sum_{i=1}^n (h(i, t) - h(i-1, t)) 1(T_{(i)} \leq t) \\
&= h(0, t) 1(T_{(0)} \leq t) + \sum_{i=1}^n (h(i, t) - h(i-1, t)) + \sum_{i=1}^n (h(i-1, t) - h(i, t)) 1(T_{(i)} > t) \\
&= \sum_{i=1}^n (h(i-1, t) - h(i, t)) 1(T_{(i)} > t).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

A expressão $h(0, t) 1(T_{(0)} \leq t) + \sum_{i=1}^n (h(i, t) - h(i-1, t))$ é igual a zero porque

$$h(0, t) 1(T_{(0)} \leq t) + \sum_{i=1}^n (h(i, t) - h(i-1, t)) = h(0, t) + \sum_{i=1}^n (h(i, t) - h(i-1, t)) = h(n, t) = 0.$$

Portanto concluímos que

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \sum_{i=1}^n \beta(i, t) 1(T_{(i)} > t)$$

onde os $\beta(i, t)$ são iguais a os $h(i-1, t) - h(i, t)$ para $i = 1, \dots, n$.

Em seguida provaremos que os $\beta(i, t)$ são positivos. Basta notar que $\beta(i, t) = h(i-1, t) - h(i, t) = 1(T_{(i)} > t) P(T = T_{(i)} | \mathfrak{F}_t) \geq 0$.

Os $\beta(i, t)$ têm soma igual a um. Da definição de $\beta(i, t)$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \beta(i, t) &= \sum_{i=1}^n h(i-1, t) - h(i, t) = h(0, t) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n 1(T_{(k)j} > t) P(T = T_{(k)j} | \mathfrak{F}_t) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n P(T = T_{(k)j}, T_{(k)j} > t | \mathfrak{F}_t) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n P(T = T_{(k)j}, T > t | \mathfrak{F}_t) \\
&= P(T \geq T_{(1)}, T > t | \mathfrak{F}_t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

mas $P(T \geq T_{(1)}, T > t | \mathfrak{F}_t) = 1$ no evento $\{T > t\}$ terminando a demonstração do teorema. A terceira igualdade segue do fato que $1(T_{(k)j} > t)$ é $\mathfrak{F}_t$ -mensurável. $\square$

Definição 2.2.1 *O vetor $\beta(t)$ com coordenadas $\beta(i, t)$, $i = 1, \dots, n$ é chamado vetor de assinatura dinâmica com respeito a $\mathfrak{F}_t$.*

Sob as hipóteses que os tempos de vidas são independentes e identicamente distribuídos a assinatura dinâmica $\beta(t)$ se torna basicamente a assinatura α .

Teorema 2.2.2 (*Teorema de reconstrução da assinatura clássica*)

Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n tal que os tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ dos componentes são $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição F contínua. Então no nível de informação $\mathfrak{F}_t$, no evento $\{T > t\}$, temos que:

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1(T_{(k)} > t)$$

onde α_k são as coordenadas do vetor de assinatura α .

Demonstração

A partir da decomposição básica de $P(T > t | \mathfrak{F}_t)$ será suficiente analisar os $\beta(k, t)$

$$\begin{aligned} \beta(k, t) &= h(k-1, t) - h(k, t) \\ &= 1(T_{(k)} > t) P(T = T_{(k)} | \mathfrak{F}_t) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} 1(T_{(i+1)} > t \geq T_{(i)}) P(T = T_{(k)} | \mathfrak{F}_t) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P(T = T_{(k)}, T_{(i+1)} > t \geq T_{(i)} | \mathfrak{F}_t) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} P(T = T_{(k)}, T_{(i+1)} > t \geq T_{(i)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde a terceira igualdade segue porque $1(T_{(k)j} > t)$ é $\mathfrak{F}_t$ -mensurável e a última é devido ao lema 2.1.1. Como os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos temos que para $k > i$ que:

$$P(T = T_{(k)}, T_{(i+1)} > t \geq T_{(i)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}}) = P(T = T_{(k)}) P(T_{(i+1)} > t \geq T_{(i)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}})$$

e

$$\beta(k, t) = \sum_{i=0}^{k-1} P(T = T_{(k)}, T_{(i+1)} > t \geq T_{(i)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k-1} P(T = T_{(k)}) P(T_{(i+1)} > t \geq T_{(i)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}}) \\
&= P(T = T_{(k)}) \sum_{i=0}^{k-1} P(T_{(i+1)} > t \geq T_{(i)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}}) \\
&= P(T = T_{(k)}) \sum_{i=0}^{k-1} P(T_{(i+1)} > t \geq T_{(i)} | \mathfrak{F}_t) \\
&= P(T = T_{(k)}) 1(T_{(k)} > t)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde a quarta igualdade é proveniente do lema 2.1.1.

Portanto, provamos que cada $\beta(k, t) = P(T = T_{(k)}) 1(T_{(k)} > t)$ e que

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \sum_{k=1}^n \beta(k, t) 1(T_{(k)} > t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1(T_{(k)} > t)$$

o que conclui demonstração. $\square$

Observação 2

Tomando esperança na expressão de $P(T > t | \mathfrak{F}_t)$ temos $P(T > t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(T_{(k)} > t)$ tal como esperavamos.

2.3 Assinatura Dinâmica ao nível de Informação Completa $\mathfrak{F}^*$

Na seção anterior a evolução do sistema dinâmico foi analisado a partir das σ -álgebras $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$. Nesta seção, além da informação fornecida pelas σ -álgebras $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$, o observador do sistema coerente sabe se o evento $\{T \leq t\}$ ocorreu, ou não, a cada instante de inspeção t . Este tipo de observação é representado através das sub- σ -álgebras

$$\mathcal{R}_t = \sigma\{1(T > s) : 0 < s \leq t\}$$

Portanto a informação considerada nessa seção é a informação conjunta gerada pelas σ -álgebras $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ e $(\mathcal{R}_t, t \geq 0)$ que será denotada por $(\mathfrak{F}_t^*, t \geq 0)$ onde $\mathfrak{F}_t^*$ é a σ -álgebra minimal, que contem $\mathfrak{F}_t$ e $\mathcal{R}_t$, isto é:

$$\mathfrak{F}_t^* = \mathcal{R}_t \vee \mathfrak{F}_t.$$

Analisemos a evolução do sistema com respeito a $\mathfrak{F}_t^*$.

Lema 2.3.1 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n tal que os tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ dos componentes são $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada. Então:*

$$E[1(T > t)1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})|\mathfrak{F}_t^*] = \frac{1(T > t)}{P(T > t|\mathfrak{F}_t)} E[1(T > t)1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})|\mathfrak{F}_t].$$

Demonstração

Calcularemos a esperança condicional do lado direito e provaremos que é igual à do lado esquerdo. Para isto usaremos que a σ -álgebra $\mathfrak{F}_t^*$ é gerada pelas interseções $\{T > s\} \cap B$ onde $\{T > s\} \in \mathcal{R}_t$ com $s \leq t$ e $B \in \mathfrak{F}_t$. Para simplificar a notação denotaremos o evento $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ por I_i . Calculando

$$\begin{aligned} \int 1(B)1(T > s)E[1(T > t)1(I_i)|\mathfrak{F}_t^*]dP &= \int 1(B)1(T > t)1(I_i)\frac{P(T > t|\mathfrak{F}_t)}{P(T > t|\mathfrak{F}_t)}dP \\ &= \int 1(B)P(T > t|\mathfrak{F}_t)\frac{E[1(T > t)1(I_i)|\mathfrak{F}_t]}{P(T > t|\mathfrak{F}_t)}dP \\ &= \int 1(B)1(T > t)\frac{E[1(T > t)1(I_i)|\mathfrak{F}_t]}{P(T > t|\mathfrak{F}_t)}dP \\ &= \int 1(B)1(T > s)1(T > t)\frac{E[1(T > t)1(I_i)|\mathfrak{F}_t]}{P(T > t|\mathfrak{F}_t)}dP \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde a terceira igualdade é devido à definição de esperança condicional para $P(T > t|\mathfrak{F}_t)$.

Assim a igualdade (2.9) vale para todo evento da forma $1(B)1(T > s)$, os quais geram a σ -álgebra $\mathfrak{F}_t^*$ e portanto

$$E[1(T > t)1(I_i)|\mathfrak{F}_t^*] = \frac{1(T > t)}{P(T > t|\mathfrak{F}_t)} E[1(T > t)1(I_i)|\mathfrak{F}_t]$$

terminando a demonstração. $\square$

A análise da evolução de $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*)$ do sistema coerente $(\Phi, \mathcal{C})$, será sob a hipótese de que o sistema está funcionando. Heuristicamente $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*)$ evolui da seguinte forma: Se o instante de inspeção t é antes da falha de qualquer componente, $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) = 1$. Se no instante de inspeção t há exatamente i falhas (i.e $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$) a probabilidade de falhar em um tempo posterior a t será distribuída, basicamente, entre as possíveis falhas posteriores devido aos componentes j , $\{T = T_{(k)j}\}$, condicionado a $\{T \geq T_{(i+1)}\}$, isto é, com probabilidade $P(T = T_{(k)j})/P(T \geq T_{(i+1)})$ para $k \geq i + 1$.

O lema que segue confirma tais detalhes.

Lema 2.3.2 (*Decomposição de $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*)$ ao nível de informação $\mathfrak{F}_t^*$*)

Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n e sejam $T_1, \dots, T_n$ os $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada representando os tempos de vida dos seus componentes com $T_{(0)} = 0$ e $T_{(n+1)} = \infty$. Então, a um nível de informação completa $\mathfrak{F}_t^*$, no evento $\{T > t\}$, temos que:

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) = \sum_{i=0}^n h^*(i, t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})$$

onde

$$h^*(i, t) = \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} 1(T_{(k)j} > t)$$

para $i = 1, \dots, n-1$ e $h(n) = 0$ e onde $\{T_{(i)j} = s\}$ representa o evento $\{T_{(i)} = s, X_i = j\}$ (analogamente para $\{T_{(i)j} > s\}$ ou $\{T_{(i)j} < s\}$).

Demonstração

Como as falhas não ocorrem simultaneamente ¹, escrevemos

$$1(T > t) = \sum_{i=0}^n 1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}).$$

Para calcular $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) = E[1(T > t) | \mathfrak{F}_t^*]$ calculemos cada uma das parcelas $E[1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t^*]$.

Pelo lema 2.3.1

$$E\left[\int_0^\infty 1(s > t) dN_\Phi(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t^*\right] = \frac{1(T > t)}{P(T > t | \mathfrak{F}_t)} E\left[\int_0^\infty 1(s > t) dN_\Phi(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t\right].$$

Como $1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})$ é $\mathfrak{F}_t$ -mensurável temos

¹O fato que as falhas não ocorrem simultaneamente implica que a falha do sistema deve coincidir com um único tempo $T_{(i)j}$ para algum $i, 1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^\infty 1(s > t) dN_\Phi(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t^*\right] &= \frac{1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})}{P(T > t, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} E\left[\int_0^\infty 1(s > t) dA_\Phi(s) | \mathfrak{F}_t\right] \\
&= \sum_{k,j=1}^n \frac{1(T > t)}{P(T > t, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} E\left[\int_0^\infty 1(s > t) 1(Y_{(k)j} < s \leq T) dA_{(k)j}(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t\right] \\
&= \sum_{k,j=1}^n \frac{1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})}{P(T > t, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} E\left[\int_0^\infty 1(s > t) 1(Y_{(k)j} < s \leq T) dN_{(k)j}(s) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t\right] \\
&= \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1(T \geq T_{(i+1)})}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} E[1(T_{(k)j} > t) 1(T = T_{(k)j}) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

onde a segunda igualdade é proveniente da decomposição do $\mathfrak{F}_t$ -compensador A_Φ (Teorema 2.1.1) e a terceira igualdade segue da definição de $\mathfrak{F}_t$ -compensador para cada $N_{(k)j}$.

Denotando por $h^*(i, t)$ a última expressão de $E[1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t^*]$ concluímos que

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) = \sum_{i=0}^n h^*(i, t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})$$

terminando a demonstração do lema. $\square$

Como consequência temos o seguinte resultado. Observe que $I_k = \{T_{(k)} \leq t < T_{(k+1)}\}$.

Teorema 2.3.1 (*Teorema de assinatura dinâmica completa*)

Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n e sejam $T_1, \dots, T_n$ os $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada representando os tempos de vida dos seus componentes com $T_{(0)} = 0$ e $T_{(n+1)} = \infty$. Então, sob o evento $\{T > t\}$, temos:

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) = \sum_{i=1}^n \beta^*(i, t) 1(T_{(i)} > t)$$

onde os $\beta^*(i, t)$ são tais que:

- a) No intervalo I_{i-1} , $\beta^*(i, t)$ é positivo.
- b) No intervalo I_i , $\sum_{k=i+1}^n \beta^*(k, t) = 1$ e cada $\beta^*(k, t)$ é não negativo para $k \geq i+1$.

com $T_{(0)} = 0$, $T_{(n+1)} = \infty$.

Demonstração

Primeiro provaremos a decomposição de $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*)$. Para isso usaremos o fato de que

$$1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) = 1(T_{(i)} \leq t) - 1(T_{(i+1)} \leq t).$$

Assim

$$\begin{aligned} P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) &= \sum_{i=0}^n h^*(i, t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) \\ &= \sum_{i=0}^n h^*(i, t) (1(T_{(i)} \leq t) - 1(T_{(i+1)} \leq t)) \\ &= \sum_{i=1}^n (h^*(i-1, t) - h^*(i, t)) 1(T_{(i)} > t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Definindo $\beta^*(i, t) = h^*(i-1, t) - h^*(i, t)$, demonstramos a decomposição para $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*)$.

Vejamos que os $\beta^*(i, t)$ satisfazem os item[a)] e o item[b)].

item[a)] Como cada $h^*(i, t)$ só é significativo no intervalo I_i , temos que

$$\beta^*(i, t) = h^*(i-1, t) 1(I_{i-1}) - h^*(i, t) 1(I_i).$$

Assim, no intervalo I_{i-1} , $\beta^*(i, t)$ é positivo, no intervalo I_i , $\beta^*(i, t)$ é negativo e zero em qualquer outro intervalo.

item[b)] No intervalo I_i temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=i+1}^n \beta^*(k, t) &= \sum_{k=i+1}^n (h^*(k-1, t) 1(I_{k-1}) - h^*(k, t) 1(I_k)) \\ &= h^*(i, t) 1(I_i) - h^*(n, t) 1(I_n) \\ &= h^*(i, t) 1(I_i) - 0 \\ &= 1(T \geq T_{(i+1)}) 1(I_i) = 1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

no evento $1(T > t) 1(I_i)$, e concluimos a demonstração do teorema. $\square$

Com o teorema anterior podemos definir.

Definição 2.3.1 *O vetor $\beta^*(t)$ com coordenadas $\beta^*(i, t)$, $i = 1, \dots, n$ é chamado vetor de assinatura dinâmica com respeito a $\mathfrak{F}_t^*$.*

Sob as condições usuais de que os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos, recuperamos a noção de assinatura dinâmica de Samaniego a partir da assinatura dinâmica com respeito a $\mathfrak{F}_t^*$.

Teorema 2.3.2 *(Teorema de reconstrução)*

Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n tal que os tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ dos componentes são $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição contínua F . Então, ao nível de informação completa $\mathfrak{F}_t^$, no evento $\{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$, temos que:*

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) = \sum_{k=i+1}^n \beta_k 1(T_{(k)} > t)$$

onde β_k são as coordenadas do vetor de assinatura dinâmica dado o evento $\{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$

Demonstração

No evento $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$ analisaremos $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*)$. Usando o teorema da assinatura temos

$$\begin{aligned} P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) &= \sum_{k=1}^n \beta^*(k, t) 1(T_{(k)} > t) 1(I_i) \\ &= \sum_{k=1}^n (h^*(k-1, t) 1(I_{k-1}) - h^*(k, t) 1(I_{(k)})) 1(T_{(k)} > t) 1(I_i) \\ &= \sum_{k=i+1}^n (h^*(k-1, t) 1(I_{k-1}) - h^*(k, t) 1(I_{(k)})) 1(T_{(k)} > t) 1(I_i) \\ &= h^*(i, t) 1(I_i) 1(T_{(i+1)} > t) \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde a terceira igualdade vem do fato que $1(T_{(k)} > t) 1(I_i) = 1$ se $k > i$. Resta analisar $h^*(i, t) 1(I_i) 1(T_{(i+1)} > t)$.

Assim

$$\begin{aligned} h^*(i, t) &= \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} 1(T_{(k)j} > t) \\ &= \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}, T_{(k)j} > t | \mathfrak{F}_t)}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} \\ &= \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}, T > t | \mathfrak{F}_t)}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=i+1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} 1(T_{(k)} > t) \\
&= \sum_{k=i+1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i})}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i})} 1(T_{(k)} > t). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

A última linha é consequência direta do lema 2.1.1. Como os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos, para $k \geq i + 1$

$$P(T = T_{(k)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i}) = P(T = T_{(k)})P(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i})$$

$$P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i}) = P(T \geq T_{(i+1)})P(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i})$$

e

$$\begin{aligned}
h^*(i, t) &= \sum_{k=i+1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i})}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i})} 1(T_{(k)} > t) \\
&= \sum_{k=i+1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)})P(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i})}{P(T \geq T_{(i+1)})P(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_i})} 1(T_{(k)} > t) \\
&= \sum_{k=i+1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)})}{P(T \geq T_{(i+1)})} 1(T_{(k)} > t). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Portanto, no evento $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$

$$\begin{aligned}
P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) &= h^*(i) 1(I_i) 1(T_{(i+1)} > t) \\
&= \left(\sum_{k=i+1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)})}{P(T \geq T_{(i+1)})} 1(T_{(k)} > t) 1(I_i) \right) 1(T_{(i+1)} > t) \\
&= \sum_{k=i+1}^n \frac{P(T = T_{(k)})}{P(T \geq T_{(i+1)})} 1(T_{(k)} > t) 1(I_i) 1(T \geq T_{(i+1)}) 1(T_{(i+1)} > t) \\
&= \sum_{k=i+1}^n \frac{P(T = T_{(k)})}{P(T \geq T_{(i+1)})} 1(T_{(k)} > t) \tag{2.16}
\end{aligned}$$

o que demonstra o teorema. $\square$

Corolário 2.3.1 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n tal que os tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ dos componentes são $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição contínua F . Então, ao nível de informação completa $\mathfrak{F}_t^*$, no evento*

$\{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$, temos:

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \sum_{k=i+1}^n \beta_k 1(T_{(k)} > t)$$

onde β_k são as coordenadas do vetor de assinatura dinâmica condicionado ao evento $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$

Demonstração

Usando o lema 2.3.1 temos que $P(T > t, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t^*)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1(T > t)}{P(T > t, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} E[1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t] \\ &= \frac{1(T \geq T_{(i+1)})}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} E[1(T \geq T_{(i+1)}) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t] \\ &= \frac{1(T \geq T_{(i+1)})}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}})} E[1(T \geq T_{(i+1)}) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_{T_{(i)}}] \\ &= \frac{1(T \geq T_{(i+1)})}{P(T \geq T_{(i+1)}) P(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}})} E[1(T \geq T_{(i+1)})] P(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_{T_{(i)}}) \\ &= E[1(T > t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) | \mathfrak{F}_t]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Portanto, usando o teorema anterior

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \sum_{k=i+1}^n \beta_k 1(T_{(k)} > t)$$

no evento $\{T > t\} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$. $\square$

Observação 3

É possível recuperar a decomposição de $P(T > t | \mathfrak{F}_t)$ com respeito a $\mathfrak{F}_t$, usando $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*)$. Para tal condicionamos, $P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) = \sum_{i=0}^n h^*(i, t) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})$ à σ -álgebra $\mathfrak{F}_t$

Calculando $E[h^*(i, t) | \mathfrak{F}_t]$,

$$\begin{aligned} E[h^*(i, t) | \mathfrak{F}_t] &= \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n P(T \geq T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t) \frac{P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} 1(T_{(k)j} > t) \\ &= \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t) \frac{P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)} \\ &= \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n P(T = T_{(k)j} | \mathfrak{F}_t) \end{aligned} \tag{2.18}$$

recuperamos a decomposição de $P(T > t | \mathfrak{F}_t)$ no intervalo $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$. $\square$

Usando os mesmos métodos desenvolvidos nas seções anteriores, podemos analisar o tempo de vida restante de um sistema coerente dado a informação $\mathfrak{F}_t$ ou a informação $\mathfrak{F}_t^*$. Analisaremos primeiro com respeito a $\mathfrak{F}_t^*$. Assim para $x \geq 0$

$$\begin{aligned} P(T > t + x | \mathfrak{F}_t^*) &= \sum_{i=0}^n h d^*(i, t, x) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) \\ P(T > t + x | \mathfrak{F}_t^*) &= \sum_{i=1}^n \beta d^*(i, t, x) 1(T_{(i)} > t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde

$$h d^*(i, t, x) = \sum_{k=i+1}^n \sum_{j=1}^n 1(T \geq T_{(i+1)}) \frac{P(T = T_{(k)j}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}, T_{(k)j} > t + x | \mathfrak{F}_t)}{P(T \geq T_{(i+1)}, T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)} | \mathfrak{F}_t)}$$

e

$$\beta d^*(i, t, x) = h d^*(i-1, t, x) - h d^*(i, t, x).$$

Se definimos $\beta d^*(t, x)$ como o vetor com coordenadas $\beta d^*(i, t, x)$, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.3 *Considere dois sistemas coerentes com tempos de vida S_1 e S_2 , e com assinaturas dinâmicas $\beta_1^*(t)$ e $\beta_2^*(t)$ respectivamente. Então:*

a) *Se $\beta_1^*(t) \leq_{st} \beta_2^*(t)$ então no evento $\{S_1 > t\} \cap \{S_2 > t\}$*

$$P(S_1 > t | \mathfrak{F}_t^*) \leq P(S_2 > t | \mathfrak{F}_t^*)$$

b) *Se $\beta_1 d^*(t, x) \leq_{st} \beta_2 d^*(t, x)$ para todo $x \geq 0$ então no evento $\{S_1 > t\} \cap \{S_2 > t\}$*

$$(S_1 - t | \mathfrak{F}_t^*) \leq_{st} (S_2 - t | \mathfrak{F}_t^*)$$

Demonstração

Item[a)]. Se T é o tempo de vida de um sistema coerente, do teorema de assinaturas temos

$$\begin{aligned} P(T > t | \mathfrak{F}_t^*) &= \sum_{i=1}^n \beta^*(i, t) 1(T_{(i)} > t) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i+1}^n \beta^*(k, t) \right) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Então se $\beta_1^*(t) \leq_{st} \beta_2^*(t)$ temos $P(S_1 > t | \mathfrak{F}_t^*) \leq P(S_2 > t | \mathfrak{F}_t^*)$.

Item[b)]. Basta notar que

$$P(T > t + x | \mathfrak{F}_t^*) = \sum_{i=0}^n h d^*(i, t, x) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)})$$

$$= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n \beta d^*(j, t, x) \right) 1(T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}) \quad (2.21)$$

para qualquer sistema coerente, assim $\beta_1 d^*(t, x) \leq_{st} \beta_2 d^*(t, x)$ implica que

$$P(S_1 > t + x | \mathfrak{F}_t^*) \leq P(S_2 > t + x | \mathfrak{F}_t^*)$$

para $x \geq 0$, terminando a demonstração do teorema.

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Importância de Barlow-Proschan e Assinatura

Um dos objetivos das medidas de importância da confiabilidade dos componentes para a confiabilidade do sistema é identificar componentes cuja melhoria implica na melhoria do desempenho do sistema. Existem muitas medidas de importância da confiabilidade dos componentes para a confiabilidade do sistema, e entre as mais utilizadas está a importância de Barlow e Proschan [5]. Neste trabalho, Barlow e Proschan consideram que os componentes são independentes com função de distribuição contínua e definem

$$I_j^{BP} = \int_0^\infty [P(T > t | T_j > t) - P(T > t | T_j \leq t)] dF_j(t)$$

onde $F_j(t)$ é a função de distribuição contínua do componente j . Em outro artigo, Bueno e Menezes [9], a importância de Barlow e Proschan é considerada para componentes dependentes e, possivelmente, com falhas simultâneas. No contexto das assinaturas o sistema é considerado como função das estatísticas de ordem (não mais dos componentes) e mesmo que os componentes sejam independentes e identicamente distribuídos as estatísticas de ordem não o são. É interessante perguntar sobre a importância de confiabilidade do componente j para que a falha do sistema coincida com a i -ésima falha dos componentes.

No artigo de Bueno e Menezes [9] temos a seguinte definição.

Definição 3.1.1 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n e T_j o tempo de vida do componente j . A Importância de Barlow-Proschan do componente j para a confiabilidade do sistema é definida por*

$$I_j^{BP} = E\{[A_j(T) - A_j(Y_j)]^+\}$$

onde A_j é o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de N_j e Y_j é o nível crítico do componente j , definido como o primeiro instante a partir do qual a falha do componente j causa a falha do sistema.

Observação 4

Quando os tempos de vida dos componentes são independentes e totalmente inacessíveis (Ver apêndice para a definição) o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de $1(T_j \leq t)$ é $A_j = -\ln(\overline{F}_j(t \wedge T_j))$ e portanto a importância de Barlow-Proshan do componente j para a confiabilidade do sistema é dada por

$$I_j^{BP} = E\{[-\ln \frac{\overline{F}_j(T \wedge T_j)}{\overline{F}_j(Y_j \wedge T_j)}]^+\}$$

Definição 3.1.2 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n com componentes identicamente distribuídos e seja $A_{(i)j}(t)$ o $\mathfrak{F}_t$ -compensador do processo $N_{(i)j}(t)$. Então a importância da confiabilidade do componente j para a confiabilidade do sistema ao nível i (para que a falha do sistema coincida com a i -ésima falha dos componentes) é:*

$$I_{(i)j}^{BP} = E\{[A_{(i)j}(T) - A_{(i)j}(Y_{(i)j})]^+\}$$

onde $a^+ = \max\{a, 0\}$ e $Y_{(i)j}$ é o nível crítico do componente j para que a falha do sistema coincida com a i -ésima falha dos componentes.

A Importância da confiabilidade da i -falha para a confiabilidade do sistema será definida como:

$$I_{(i)}^{BP} = \sum_{j=1}^n I_{(i)j}^{BP}.$$

Observe que $\{T_{(i)j} = s\}$ expressa o evento $\{T_{(i)} = s\} \cap \{X_i = j\}$. Analogamente para $\{T_{(i)j} \geq s\}$, $\{T_{(i)j} \leq s\}$ e $F_{(i)j}(s) = P(T_{(i)} \leq s, X_i = j)$, uma sub-distribuição que consideramos padronizada.

Proposição 3.1.1 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n com componentes independentes e identicamente distribuídas e seja $A_{(i)j}(t)$ o $\mathfrak{F}_t$ -compensador do processo $N_{(i)j}(t)$ da forma $A_{(i)j}(t) = -\ln(\overline{F}_{(i)j}(t \wedge T_{(i)j}))$. Então a importância da confiabilidade do componente j para a confiabilidade do sistema no nível i é:*

$$I_{(i)j}^{BP} = P(T = T_{(i)j}).$$

Demonstração

Da definição de importância temos que

$$I_{(i)j}^{BP} = E\{[A_{(i)j}(T) - A_{(i)j}(Y_{(i)j})]^+\} = E\left[\int_0^\infty 1(Y_{(i)j} < s \leq T) dA_{(i)j}(s)\right]$$

e do fato que $A_{(i)j}(t) = -\ln(\overline{F}_{(i)j}(t \wedge T_{(i)j}))$, a importância da confiabilidade do componente j para a confiabilidade do sistema na i -ésima falha, $I_{(i)j}^{BP}$, é igual a

$$\begin{aligned} I_{(i)j}^{BP} &= E\left[\int_0^\infty 1(Y_{(i)j} < s \leq T) d(-\ln(\overline{F}_{(i)j}(t \wedge T_{(i)j})))\right] \\ &= E\left[\int_0^{T_{(i)j}} 1(Y_{(i)j} < s \leq T) d(-\ln(\overline{F}_{(i)j}(s)))\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty E\left[\int_0^{T_{(i)j}} 1(Y_{(i)j} < s \leq T) \frac{dF_{(i)j}(s)}{\bar{F}_{(i)j}(s)} | T_{(i)j} = t\right] dF_{(i)j}(t) \\
&= \int_0^\infty E\left[\int_0^t 1(Y_{(i)j} < s \leq T) \frac{dF_{(i)j}(s)}{\bar{F}_{(i)j}(s)} | T_{(i)j} = t\right] dF_{(i)j}(t) \\
&= \int_0^\infty E[1(Y_{(i)j} < T_{(i)j} \leq T) | T_{(i)j} = t] dF_{(i)j}(t) \\
&= \int_0^\infty P(T = T_{(i)j} | T_{(i)j} = t) dF_{(i)j}(t). \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Assim

$$I_{(i)j}^{BP} = \int_0^\infty P(T = T_{(i)j} | T_{(i)j} = t) dF_{(i)j}(t) = P(T = T_{(i)j}).$$

terminando a demonstração. $\square$

A hipótese que os componentes têm tempos de vida independentes e identicamente distribuídos, não é essencial para tal definição.

Proposição 3.1.2 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ com tempos de vida dos componentes T_i , $i = 1, \dots, n$ $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada totalmente inacessíveis, e seja $A_{(i)j}(t)$ o $\mathfrak{F}_t$ -compensador do processo $N_{(i)j}(t)$. Então a importância da confiabilidade do componente j para a confiabilidade do sistema no nível i é:*

$$I_{(i)j}^{BP} = \int_0^\infty P(T = T_{(i)j} | T_{(i)j} = s) dF_{(i)j}(s)$$

Demonstração

Consideramos o processo $\mathfrak{F}_t$ -previsível $1(Y_{(i)j} < t \leq T)$. Como o $\mathfrak{F}_t$ -compensador $A_{(i)j}(t)$ é contínuo temos que

$$\begin{aligned}
I_{(i)j}^{BP} &= E\{[A_{(i)j}(T) - A_{(i)j}(Y_{(i)j})]^+\} \\
&= E\left\{\int_0^\infty 1(Y_{(i)j} < t \leq T) dA_{(i)j}(s)\right\} \\
&= E\left\{\int_0^\infty 1(Y_{(i)j} < t \leq T) dN_{(i)j}(s)\right\} \\
&= E[Y_{(i)j} < T_{(i)j} \leq T] = P(Y_{(i)j} < T_{(i)j} \leq T) \\
&= P(T = T_{(i)j}) = \int_0^\infty P(T = T_{(i)j} | T_{(i)j} = s) dF_{(i)j}(s) \tag{3.2}
\end{aligned}$$

terminando a demonstração da proposição. $\square$

O seguinte teorema relaciona a importância de Barlow-Proshan com a assinatura do sistema coerente.

Teorema 3.1.1 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente Φ de ordem n tal que os tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ dos componentes são $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição F contínua. A importância de confiabilidade do sistema no nível i é:*

$$I_{(i)}^{BP} = \alpha_i$$

onde α_i é o i -ésimo componente do vetor de assinatura clássica.

Demonstração

Como nosso sistema coerente Φ de ordem n as falhas não ocorrem simultaneamente temos que para qualquer $i = 1, \dots, n$

$$1(T = T_{(i)}) = \sum_{j=1}^n 1(T = T_{(i)j}),$$

assim

$$\begin{aligned} \alpha_i &= P(T = T_{(i)}) = \sum_{j=1}^n E[1(T = T_{(i)j})] \\ &= \sum_{j=1}^n E\left[\int_0^\infty 1(Y_{(i)j} < s \leq T) dN_{(i)j}(s)\right] \\ &= \sum_{j=1}^n E\left[\int_0^\infty 1(Y_{(i)j} < s \leq T) dA_{(i)j}(s)\right] \\ &= \sum_{j=1}^n E\left[\int_0^\infty 1(Y_{(i)j} < s \leq T) dA_{(i)j}(s)\right] \\ &= \sum_{j=1}^n E\{[A_{(i)j}(T) - A_{(i)j}(Y_{(i)j})]^+\} \\ &= \sum_{j=1}^n I_{(i)j}^{BP} = I_{(i)}^{BP} \end{aligned} \tag{3.3}$$

finalizando a demonstração do teorema. $\square$

Exemplo 3.1.1

Seja $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3)$ um vetor de tempos de vida independentes e identicamente distribuídos, e consideremos o sistema coerente com tempo de vida $T = T_1 \wedge (T_2 \vee T_3)$. Calculemos então o vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Se

$$\begin{aligned}
 T_1 < T_2 < T_3 & \text{ então } T = T_{(1)} \\
 T_1 < T_3 < T_2 & \text{ então } T = T_{(1)} \\
 T_2 < T_1 < T_3 & \text{ então } T = T_{(2)} \\
 T_2 < T_3 < T_1 & \text{ então } T = T_{(2)} \\
 T_3 < T_1 < T_2 & \text{ então } T = T_{(2)} \\
 T_3 < T_2 < T_1 & \text{ então } T = T_{(2)}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

assim $\alpha_1 = P(T = T_{(1)}) = 1/3$, $\alpha_2 = P(T = T_{(2)}) = 2/3$ e $\alpha_3 = P(T = T_{(3)}) = 0$ e a decomposição do tempo de vida mediante a assinatura é:

$$P(T \leq t) = \frac{1}{3}P(T_{(1)} \leq t) + \frac{2}{3}P(T_{(2)} \leq t).$$

Primeiro notemos que os níveis críticos do sistema são:

a) Para a primeira falha:

$$Y_{(1)1} = 0, Y_{(1)2} = \infty, Y_{(1)3} = \infty;$$

b) Para a segunda falha:

$$Y_{(2)1} = T_2 \wedge T_3, Y_{(2)2} = T_3, Y_{(2)3} = T_2$$

e $Y_{(3)j} = \infty$ para qualquer j , pois quando dois componentes falham o sistema falha.

Calculemos agora os $I_{(i)j}^{BP}$ com $1 \leq i, j \leq 3$

$$\begin{aligned}
 I_{(1)1}^{BP} &= E\{[A_{(1)1}(T) - A_{(1)1}(Y_{(1)1})]^+\} \\
 &= E\left[\int_0^\infty 1(0 < s \leq T) dN_{(1)1}(s)\right] \\
 &= P(T_{(1)1} \leq T) \\
 &= P(T_1 < T_2 \vee T_3) = \int_0^\infty P(T_2 > s, T_3 > s) dF(s) \\
 &= \int_0^\infty (1 - F(s))^2 dF(s) = \frac{1}{3}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

e para as outras importâncias associadas à primeira falha, $I_{(1)2}^{BP} = I_{(1)3}^{BP} = 0$. Assim $I_{(1)1}^{BP} = 1/3 = \alpha_1$.

$$\begin{aligned}
I_{(2)1}^{BP} &= E\{[A_{(2)1}(T) - A_{(2)1}(Y_{(2)1})]^+\} \\
&= E\left[\int_0^\infty 1(T_2 \wedge T_3 < s \leq T) dN_{(2)1}(s)\right] \\
&= P(T_2 \wedge T_3 < T_{(2)1} \leq T) \\
&= P(T_2 \wedge T_3 < T_1 \leq T_2 \vee T_3) \\
&= \int_0^\infty P(T_2 \wedge T_3 < s \leq T_2 \vee T_3) dF(s) \\
&= 2 \int_0^\infty F(s)(1 - F(s)) dF(s) = \frac{1}{3};
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
I_{(2)2}^{BP} &= E\{[A_{(2)2}(T) - A_{(2)2}(Y_{(2)2})]^+\} \\
&= E\left[\int_0^\infty 1(T_3 < s \leq T) dN_{(2)2}(s)\right] \\
&= P(T_3 < T_{(2)2} \leq T) = P(T_3 < T_2 \leq T_1) \\
&= \int_0^\infty P(s < T_2 \leq T_1) dF(s) \\
&= 2 \int_0^\infty \left[\int_s^\infty (1 - F(t)) dF(t)\right] dF(s) = \frac{1}{6};
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
I_{(2)3}^{BP} &= E\{[A_{(2)3}(T) - A_{(2)3}(Y_{(2)3})]^+\} \\
&= E\left[\int_0^\infty 1(T_2 < s \leq T) dN_{(2)3}(s)\right] \\
&= P(T_2 < T_{(2)3} \leq T) = P(T_2 < T_3 \leq T_1) \\
&= \int_0^\infty P(s < T_3 \leq T_1) dF(s) \\
&= 2 \int_0^\infty \left[\int_s^\infty (1 - F(t)) dF(t)\right] dF(s) = \frac{1}{6};
\end{aligned} \tag{3.8}$$

logo $I_{(2)}^{BP} = I_{(2)1}^{BP} + I_{(2)2}^{BP} + I_{(2)3}^{BP} = 2/3 = \alpha_2$.

Como $Y_{(3)j} = \infty$ para qualquer j temos $I_{(3)1}^{BP} = I_{(3)2}^{BP} = I_{(3)3}^{BP} = I_{(3)}^{BP} = 0 = \alpha_3$.

3.2 Importância de Componentes e Transformação no Compensador

Um fato interessante observado é que várias medidas da confiabilidade dos componentes para a confiabilidade do sistema pode ser obtida como a diferença entre os tempos de vida médios dos sistemas quando realizamos uma modificação na função de distribuição do tempo de vida do componente. É bem conhecido que existe uma correspondência bijetiva entre os espaço das funções de

distribuição dos $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada e o espaço dos $\mathfrak{F}_t$ -compensadores dada pela fórmula exponencial de Doleans (Ver Arjas [1]). Interpretaremos qualquer modificação de algum componente (i.e modificação da sua função de distribuição) através de uma transformação do respectivo compensador. As transformações do $\mathfrak{F}_t$ -compensador do processo que usaremos são da forma:

$$B_i(t) = \int_0^t \mu_i(s) dA_i(s)$$

onde $1 \leq i \leq n$ e $(\mu_i(s), s \geq 0)$ é um processo positivo, $\mathfrak{F}_t$ -previsível. Notemos que se $\mu_i(s) \leq 1$ o risco do processo $\mu_i(s) dA_i(s)$ é menor que $dA_i(s)$ e entenderemos isso como uma melhora no componente i , como por exemplo, através de uma operação de redundância.

Para $B_i(t)$ ser o novo $\mathfrak{F}_t$ -compensador do processo $N_i(t) = 1(T_i \leq t)$ deveremos alterar a medida de probabilidade usando o teorema de Girsanov (Ver teorema A.2.6).

No caso de um reparo mínimo a transformação do $\mathfrak{F}_t$ -compensador é da forma (Ver Bueno [8]):

$$B_i(t) = \int_0^t \frac{A_i(s)}{1 + A_i(s)} dA_i(s) = A_i(t) - \ln(1 + A_i(t))$$

e

$$L_t(\mu_i) = \left[\frac{A_i(T_i)}{1 + A_i(T_i)} \right]^{N_i(t)} (1 + A_i(t)).$$

Usando o fato de que, quando o compensador é contínuo, as variáveis aleatórias $A_j(T_j)$, $1 \leq j \leq n$, são independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de parâmetro 1 (Ver teorema A.2.7). Definimos uma nova medida de probabilidade Q_{μ_i} pelo teorema de Radon-Nykodin

$$\frac{dQ_{\mu_i}}{dP} = L(\mu_i) = A_i(T_i).$$

Neste ponto devemos responder como uma transformação realizada no $\mathfrak{F}_t$ -compensador correspondente ao componente k , afeta os $\mathfrak{F}_t$ -compensadores das estatísticas de ordem.

Lema 3.2.1 *Seja T_k o $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada, totalmente inacessível, representando o tempo de vida do componente k e seja $A_k(t)$ o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de processo $N_k(t) = 1(T_k \leq t)$. Consideremos a transformação, através do reparo mínimo, no compensador do componente k ,*

$$B_k(t) = \int_0^t \frac{A_k(s)}{1 + A_k(s)} dA_k(s).$$

Então para $i, 1 \leq i \leq n$, o $\mathfrak{F}_t$ -compensador da i -ésima falha $A_{(i)}(t)$ é transformado em :

$$B_{(i)}(t) = \sum_{j=1}^n B_{(i)j}$$

onde

$$B_{(i)k}(t) = \int_0^t \frac{A_{(i)k}(s)}{1 + A_{(i)k}(s)} dA_{(i)k}(s)$$

para o componente k

$$B_{(i)j}(t) = A_{(i)j}(t),$$

para $j \neq k$.

Demonstração

Primeiro notemos que o $\mathfrak{F}_t$ -compensador do componente j pode ser escrito da forma $A_j(t) = \sum_{i=1}^n A_{(i)j}(t)$ e que cada $dA_{(i)j}(t)$ é nulo fora do intervalo $\{T_{(i-1)} < t \leq T_{(i)}\}$:

$$dA_j(t) = \sum_{i=1}^n 1(T_{(i-1)} < t \leq T_{(i)}) dA_{(i)j}.$$

Assim no caso de um reparo mínimo no componente k através do $\mathfrak{F}_t$ -compensador temos:

$$\begin{aligned} B_k(t) &= \int_0^t \frac{A_k(s)}{1 + A_k(s)} dA_k(s) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{T_{(i-1)}}^{t \wedge T_{(i)}} \frac{A_k(s)}{1 + A_k(s)} dA_k(s) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{T_{(i-1)}}^{t \wedge T_{(i)}} \frac{A_{(i)k}(s)}{1 + A_{(i)k}(s)} dA_{(i)k}(s). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Notemos que o efeito de reparo mínimo do componente k , no compensador da i falha se dá através do i -ésimo termo da última soma. Como $B_{(i)}(t) = \sum_{j=1}^n B_{(i)j}$ temos

$$\begin{aligned} &= 1(T_{(i-1)} < t \leq T_{(i)}) \cdot \left[\sum_{j \neq k} A_{(i)j} + \int_{T_{(i-1)}}^{t \wedge T_{(i)}} \frac{A_{(i)k}(s)}{1 + A_{(i)k}(s)} dA_{(i)k}(s) \right] \\ &= 1(T_{(i-1)} < t \leq T_{(i)}) \cdot \left[\sum_{j \neq k} A_{(i)j} + \int_{T_{(i-1)}}^{t \wedge T_{(i)}} \frac{A_k(s)}{1 + A_k(s)} dA_k(s) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Desde que $E[A_k(T_k)] = 1$, pelo teorema de Girsanov definimos uma medida de probabilidade Q_{μ_k} , com

$$\frac{dQ_{\mu_k}}{dP} = A_k(T_k)$$

de forma que, sob tal medida, a transformação $B_{(i)}(t)$ é o $\mathfrak{F}_t$ -compensador do processo $N_{(i)}(t) = 1(T_{(i)} \leq t)$ e o efeito de reparo mínimo da transformação no componente k na i -ésima falha é:

$$B_{(i)k}(t) = \int_0^t \frac{A_{(i)k}(s)}{1 + A_{(i)k}(s)} dA_{(i)k}(s)$$

concluindo a demonstração. $\square$

Realizando reparos mínimos em todos os componentes podemos definir uma nova medida de probabilidade Q_μ definida pela derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ_\mu}{dP} = \prod_{k=1}^n A_k(T_k).$$

Usando o teorema de Girsanov temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.1 *Seja $A_j(t)$ o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de $N_j(t) = 1(T_j \leq t)$ onde T_j é um $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada totalmente inacessível, representando o tempo de vida do componente j . Considere a transformação*

$$B_j(t) = \int_0^t \frac{A_j(s)}{1 + A_j(s)} dA_j(s)$$

para $j, 1 \leq j \leq n$. Então o novo $\mathfrak{F}_t$ -compensador da i -ésima falha, $A_{(i)}(t)$ é:

$$B_{(i)}(t) = \sum_{j=1}^n B_{(i)j}$$

onde

$$B_{(i)k}(t) = \int_0^t \frac{A_{(i)k}(s)}{1 + A_{(i)k}(s)} dA_{(i)k}(s)$$

para todo $k, 1 \leq k \leq n$.

3.2.1 Importância de Natvig

Como em Bueno(2011) [7], definimos a importância da confiabilidade de Natvig para o componente j como

$$I_j^N = E_{Q_j}[T] - E_P[T]$$

onde a medida Q_j é dada pelo teorema de Radon-Nykodim

$$\frac{dQ_j}{dP} = A_j(T_j).$$

Analisaremos detalhadamente $A_{(i)j}(t)$ e $Q_j(T > t)$.

Lema 3.2.2 *Sejam $T_1, \dots, T_n$ $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada totalmente inacessíveis representando os tempos de vida dos componentes de um sistema coerente Φ com tempo de vida T . Seja $A_{(i)j}$ o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de $N_{(i)j}(t) = 1(T_{(i)j} \leq t)$ e A_j o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de $N_j(t) = 1(T_j \leq t)$ então:*

- a) $A_{(i)j}(t)$ é contínuo;
- b) $A_{(i)j}(T_{(i)j})$ tem distribuição exponencial de parâmetro 1;

$$c) A_{(i)j}(T_{(i)j}) = A_j(T_j)1(X_i = j).$$

Demonstração

Item[a)]. Provaremos que $T_{(i)j}$ é um tempo de parada totalmente inacessível. Seja S qualquer tempo de parada acessível, então

$$\begin{aligned} P(\omega : T_{(i)j}(\omega) = S(\omega) < \infty) &= P(\omega : T_{(i)j}(\omega) < \infty, S(\omega) < \infty, T_{(i)j}(\omega) = S(\omega)) \\ &= P(\omega : T_j(\omega) < \infty, X_i = j, T_j(\omega) = S(\omega)) \\ &\leq P(\omega : T_j(\omega) = S(\omega) < \infty) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde a última igualdade segue do fato que T_j é totalmente inacessível. Segue, do teorema de decomposição de Doob-Meyer, o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de $1(T_{(i)j} \leq t)$, $A_{(i)j}(t)$, é contínuo.

Item[b)] Consequência do teorema A.2.7

Item[c)] Pela definição de $\mathfrak{F}_t$ -compensador, o processo $A_j(t)1(X_i = j)$ é não-decrescente adaptado e previsível. Logo pela unicidade do $\mathfrak{F}_t$ -compensador basta provar que $N_{(i)j}(t) - A_j(t)1(X_i = j)$ é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal. Sabemos que $N_j(t) - A_j(t)$ é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal e como $\{X_i = j\} \in \mathfrak{F}_0$ temos que

$$(N_j(t) - A_j(t))1(X_i = j) = N_j(t)1(X_i = j) - A_j(t)1(X_i = j) = N_{(i)j}(t) - A_j(t)1(X_i = j)$$

é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal, o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Lema 3.2.3 *Sejam $T_1, \dots, T_n$ $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada independentes totalmente inacessíveis representando os tempos de vida dos componentes de um sistema coerente Φ com tempo de vida T . Seja $A_{(i)j}$, o $\mathfrak{F}_t$ -compensador de $N_{(i)j}(t) = 1(T_{(i)j} \leq t)$ e $F_{(i)j}(t)$ a distribuição $P(T_{(i)j} \leq t | \mathfrak{F}_t)$ padronizada. Suponha que os $A_{(i)j}$ são funções injetoras ¹ então:*

a) Para todo $i, i \geq 1$ temos

$$Q_j(T = T_{(i)}) = \sum_{k \neq j}^n P(T = T_{(i)k}) + E[\overline{F_{(i)j}}(Y_{(i)j})(1 - \ln(\overline{F_{(i)j}}(Y_{(i)j}))) - \overline{F_{(i)j}}(T)(1 - \ln(\overline{F_{(i)j}}(T)))]$$

b) A distribuição de $T_{(i)}$ com respeito a medida Q_j é dada por

$$Q_j(T_{(i)} > t) = \sum_{k \neq j}^n E[\overline{F_{(i)k}}(t)] + E[(1 - \ln(\overline{F_{(i)j}}(t))) \overline{F_{(i)j}}(t)]$$

Demonstração

Item[a)] Calculando a probabilidade temos

$$Q_j(T = T_{(i)}) = \sum_{k=1}^n Q_j(T = T_{(i)k})$$

¹ Por exemplo isso é certo quando o sistema é suportivo. Ver Apêndice Definição A.2.6, Arjas and Norros [2] e Norros [16].

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \neq j}^n E[A_j(T_j)1(T = T_{(i)k})] + E[A_j(T_j)1(T = T_{(i)j})] \\
&= \sum_{k \neq j}^n E[1(T = T_{(i)k})] + E[A_j(T_j)1(T = T_{(i)j})] \\
&= \sum_{k \neq j}^n E[1(T = T_{(i)k})] + E[A_{(i)j}(T_{(i)j})1(T = T_{(i)j})] \tag{3.12}
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade vem do fato que os $A_j(T_j)$ são independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de parâmetro 1, a quarta igualdade do lema 3.2.2 c) , logo

$$\begin{aligned}
Q_j(T = T_{(i)}) &= \sum_{k \neq j}^n E[1(T = T_{(i)k})] + E[A_{(i)j}(T_{(i)j})1(Y_{(i)j} < T_{(i)j} \leq T)] \\
&= \sum_{k \neq j}^n E[1(T = T_{(i)k})] + E[A_{(i)j}(T_{(i)j})1(A_{(i)j}(Y_{(i)j}) < A_{(i)j}(T_{(i)j}) \leq A_{(i)j}(T))] \tag{3.13}
\end{aligned}$$

onde a última igualdade provem do fato que os $A_{(i)j}(t)$ são funções injetoras. Usando a Observação 6 do Apêndice A e o lema 3.2.2 a), $A_{(i)j}(t) = -\ln \overline{F}_{(i)j}(t)$, onde $F_{(i)j}(t) = P(T_{(i)j} \leq t | \mathfrak{F}_t)$ e portanto

$$\begin{aligned}
Q_j(T = T_{(i)}) &= \sum_{k \neq j}^n E[1(T = T_{(i)k})] + E\left[\int_{A_{(i)j}(Y_{(i)j})}^{A_{(i)j}(T)} x e^{-x} dx\right] \\
&= \sum_{k \neq j}^n E[1(T = T_{(i)k})] + E[\overline{F}_{(i)j}(Y_{(i)j})(1 - \ln(\overline{F}_{(i)j}(Y_{(i)j}))) - \overline{F}_{(i)j}(T)(1 - \ln(\overline{F}_{(i)j}(T)))] \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Item[b)] Calcularemos a distribuição de $T_{(i)}$ com a medida de probabilidade Q_j

$$\begin{aligned}
Q_j(T_{(i)} > t) &= \sum_{k=1}^n Q_j(T_{(i)k} > t) \\
&= \sum_{k=1}^n E[A_j(T_j)1(T_{(i)k} > t)] \\
&= \sum_{k \neq j}^n E[1(T_{(i)k} > t)] + E[A_j(T_j)1(T_{(i)j} > t)] \\
&= \sum_{k \neq j}^n E[1(T_{(i)k} > t)] + E[A_{(i)j}(T_{(i)j})1(T_{(i)j} > t)] \\
&= \sum_{k \neq j}^n E[1(T_{(i)k} > t)] + E\left[\int_{A_{(i)j}(t)}^{\infty} x e^{-x} dx\right] \tag{3.15}
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é devido ao fato que os $A_j(T_j)$ são independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de parametro 1 e, a quarta e quinta igualdade sai do lema 3.2.2 parte c) e a) respectivamente. Da fórmula de Dolean (Observação 6 do Apêndice A) e o lema 3.2.2 a), $A_{(i)j}(t) = -\ln \overline{F_{(i)j}}(t)$, onde $F_{(i)j}(t) = P(T_{(i)j} \leq t | \mathfrak{F}_t)$. Assim

$$Q_j(T_{(i)} > t) = \sum_{k \neq j}^n E[\overline{F_{(i)k}}(t) + E[\{1 - \ln \overline{F_{(i)j}}(t)\} \overline{F_{(i)j}}(t)]]$$

terminando a demonstração do lema. $\square$

Teorema 3.2.1 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente de ordem n e $T_1, \dots, T_n$ os $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada totalmente inacessíveis independentes e identicamente distribuídos com distribuição F , representando os tempos de vida dos componentes. Suponha que os $A_{(i)j}$ são funções injetoras. Então a Importância da confiabilidade de Natvig para o componente j é:*

$$I_j^N = - \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} E \left[\int_0^\infty \overline{F_{(i)j}}(t) \ln \overline{F_{(i)j}}(t) dt \right]$$

onde $\alpha_{ij} = P(T = T_{(i)j}) = I_{(i)j}$

Demonstração Primeiro provaremos que sob a medida Q_j as variáveis $T_1, \dots, T_n$ são independentes.

$$\begin{aligned} Q_j(T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n) &= E[A_j(T_j) 1(T_j \leq t_j)] \prod_{k \neq j}^n E[1(T_k \leq t_k)] \\ &= E[A_j(T_j) 1(T_j \leq t_j)] \prod_{k \neq j}^n E[A_j(T_j) 1(T_k \leq t_k)] \\ &= E_{Q_j}[1(T_j \leq t_j)] \prod_{k \neq j}^n E_{Q_j}[1(T_k \leq t_k)] \\ &= \prod_{k=1}^n Q_j[T_k \leq t_k] \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde a segunda igualdade vale porque $A_j(T_j)$ é independente dos T_k , para $k \neq j$ e $E[A_j(T_j)] = 1$.

Como as variáveis $T_1, \dots, T_n$ são independentes, usando a decomposição por assinaturas das probabilidades $P(T > t)$ e $Q_j(T > t)$ temos

$$\begin{aligned} P(T > t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n P(T = T_{(i)k}) P(T_{(i)k} > t) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq j}^n \alpha_{(i)k} P(T_{(i)k} > t) + \sum_{i=1}^n \alpha_{(i)j} E[1(A_{(i)j}(T_{(i)j}) > A_{(i)j}(t))] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq j}^n \alpha_{(i)k} P(T_{(i)k} > t) + \sum_{i=1}^n \alpha_{(i)j} E \left[\int_{A_{(i)j}(t)}^\infty e^{-x} dx \right] \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde na última igualdade usamos que os $A_{(i)j}(T_{(i)j})$ têm distribuição exponencial de parâmetro 1.

$$\begin{aligned}
Q_j(T > t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n Q_j(T = T_{(i)k}, T_{(i)k} > t) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n E[1(T = T_{(i)k})1(T_{(i)k} > t)A_j(T_j)] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq j}^n \alpha_{(i)k} E[1(T_{(i)k} > t)A_j(T_j)] + \sum_{i=1}^n \alpha_{(i)j} E[1(T_{(i)j} > t)A_j(T_j)] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq j}^n \alpha_{(i)k} P(T_{(i)k} > t) + \sum_{i=1}^n \alpha_{(i)j} E[1(A_{(i)j}(T_{(i)j}) > A_{(i)j}(t))A_j(T_j)] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq j}^n \alpha_{(i)k} P(T_{(i)k} > t) + \sum_{i=1}^n E\left[\int_{A_{(i)j}(t)}^{\infty} x e^{-x} dx\right] \tag{3.18}
\end{aligned}$$

onde na quarta linha vem da hipótese que os $A_{(i)j}$ são injetivos e na última igualdade usamos que os $A_{(i)j}$ tem distribuição exponencial de parâmetro 1. Portanto temos que

$$\begin{aligned}
I_j^N &= \int_0^{\infty} (Q_j(T > t) - P(T > t)) dt \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} E\left[\int_{A_{(i)j}(t)}^{\infty} (x-1)e^{-x} dx\right] dt \\
&= - \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} E\left[\int_0^{\infty} \overline{F_{(i)j}}(t) \ln \overline{F_{(i)j}}(t) dt\right] \tag{3.19}
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que $A_{(i)j} = -\ln \overline{F_{(i)j}}(t)$, terminando assim a demonstração do teorema. $\square$

É interessante perguntar como a assinatura é afetada por reparos mínimos em todos os componentes, analisando a decomposição através de assinatura sob a nova probabilidade Q_μ definida por o teorema de Radon-Nykodim:

$$\frac{dQ_\mu}{dP} = \prod_{j=1}^n \frac{dQ_j}{dP} = \prod_{j=1}^n A_j(T_j).$$

A resposta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.2.2 *Seja T o tempo de vida de um sistema coerente de ordem n e $T_1, \dots, T_n$ os $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada totalmente inacessíveis independentes e identicamente distribuídos com distribuição F , representando os tempos de vida dos componentes. Suponha que o $A_{(i)j}$ compensador de $N_{(i)j}$ é uma função injetora, para todo i, j . Então, depois de um reparo mínimo em todos os componentes*

do sistema temos que no intervalo $\{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}$:

$$Q_\mu(T > t | \mathfrak{F}_t^*) = \sum_{k=i+1}^n \frac{Q_\mu(T = T_{(k)})}{Q_\mu(T \geq T_{(i+1)})} 1_{(T_{(k)} > t)}$$

onde

a) Para $k \geq i+1$ temos

$$Q_\mu(T = T_{(k)}) = \sum_{i=1}^n E[\overline{F_{(k)i}}(Y_{(k)i})(1 - \ln(\overline{F_{(k)i}}(Y_{(k)i)})) - \overline{F_{(k)i}}(T)(1 - \ln(\overline{F_{(k)i}}(T)))];$$

b) $Q_\mu(T \geq T_{(i+1)})$ é dado por $\sum_{k=i+1}^n Q_\mu(T = T_{(k)})$;

c) A distribuição de $T_{(i)}$ com respeito a medida Q_μ é dada por

$$Q_\mu(T_{(i)} > t) = \sum_{j=1}^n E[(1 - \ln(\overline{F_{(i)j}}(t))) \overline{F_{(i)j}}(t)].$$

onde $F_{(i)j}(t) = P(T_{(i)j} \leq t | \mathfrak{F}_t)$.

Demonstração

Primeiro provaremos que na medida de probabilidade Q_μ , os $\mathfrak{F}_t$ -tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ são independentes. Para isso calcularemos a distribuição conjunta dos $\mathfrak{F}_t$ -tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ com respeito a Q_μ .

$$Q_\mu(T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n) = E_{Q_\mu}[\prod_{k=1}^n 1(T_k \leq t_k)] = E[\prod_{k=1}^n A_k(T_k) 1(T_k \leq t_k)].$$

Pela independência das variáveis $A_k(T_k)$ e dos $\mathfrak{F}_t$ -tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ temos que

$$\begin{aligned} Q_\mu(T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n) &= E[\prod_{k=1}^n A_k(T_k) 1(T_k \leq t_k)] \\ &= \prod_{k=1}^n E[A_k(T_k) 1(T_k \leq t_k)] \\ &= \prod_{k=1}^n E_{Q_{\mu_k}}[1(T_k \leq t_k)] \\ &= \prod_{k=1}^n Q_\mu[T_k \leq t_k] \end{aligned} \tag{3.20}$$

e portanto os $\mathfrak{F}_t$ -tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ são independentes com respeito a probabilidade Q_μ .

Para provar que são identicamente distribuídos sob a medida de probabilidade Q_μ basta notar que como os $\mathfrak{F}_t$ -tempos de vida $T_1, \dots, T_n$ são identicamente distribuídos, os $\mathfrak{F}_t$ -compensadores dos $1(T_j \leq t)$ são idênticos e portanto os $T_1, \dots, T_n$ são identicamente distribuídos sob Q_μ .

Item[a)] Calculando diretamente

$$\begin{aligned}
 Q_\mu(T = T_{(i)}) &= \sum_{j=1}^n Q_\mu(T = T_{(i)j}) \\
 &= \sum_{j=1}^n E\left[\prod_{k=1}^n A_k(T_k) 1(T = T_{(i)j})\right] \\
 &= \sum_{j=1}^n E[A_j(T_j) 1(T = T_{(i)j})] \\
 &= \sum_{j=1}^n E[A_{(i)j}(T_{(i)j}) 1(T = T_{(i)j})] \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade vem do fato que os $A_j(T_j)$ são independentes e identicamente distribuídos com distribuição exponencial de parâmetro 1, a quarta igualdade do lema 3.2.2 c) , portanto

$$\begin{aligned}
 Q_\mu(T = T_{(i)}) &= \sum_{j=1}^n E[A_{(i)j}(T_{(i)j}) 1(Y_{(i)j} < T_{(i)j} \leq T)] \\
 &= \sum_{j=1}^n E[A_{(i)j}(T_{(i)j}) 1(A_{(i)j}(Y_{(i)j}) < A_{(i)j}(T_{(i)j}) \leq A_{(i)j}(T))] \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

onde a última igualdade sai do fato que os $A_{(i)j}(t)$ são funções injetoras. Usando $A_{(i)j} = -\ln \overline{F_{(i)j}}(t)$, onde $F_{(i)j}(t) = P(T_{(i)j} \leq t | \mathfrak{F}_t)$ temos

$$\begin{aligned}
 Q_\mu(T = T_{(i)}) &= \sum_{j=1}^n E\left[\int_{A_{(i)j}(Y_{(i)j})}^{A_{(i)j}(T)} x e^{-x} dx\right] \\
 &= \sum_{j=1}^n E[\overline{F_{(k)i}}(Y_{(k)i})(1 - \ln(\overline{F_{(k)i}}(Y_{(k)i}))) - \overline{F_{(k)i}}(T)(1 - \ln(\overline{F_{(k)i}}(T)))]. \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Item[b)]. É consequência direta do fato que $\{T \geq T_{(i)}\}$ pode ser escrita como união disjunta dos eventos $\{T = T_{(k)}\}$, para $k \geq i$.

Item[c)] Calcularemos a distribuição de $T_{(i)}$ com a medida de probabilidade Q_μ

$$\begin{aligned}
 Q_\mu(T_{(i)} > t) &= \sum_{j=1}^n Q_\mu(T_{(i)j} > t) \\
 &= \sum_{j=1}^n E\left[\prod_{k=1}^n A_k(T_k) 1(T_{(i)j} > t)\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n E[A_j(T_j)1(T_{(i)j} > t)] \\
&= \sum_{j=1}^n E[A_{(i)j}(T_{(i)j})1(T_{(i)j} > t)] \\
&= \sum_{j=1}^n E\left[\int_{A_{(i)j}(t)}^{\infty} x e^{-x} dx\right] \tag{3.24}
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade sai do fato que os $A_j(T_j)$ são independentes e identicamente distribuídos com distribuição exponencial de parametro 1 e, a quarta e quinta igualdade vem do lema 3.2.2 parte c) e a), respectivamente. Da fórmula de Dolean $A_{(i)j} = -\ln \overline{F_{(i)j}}(t)$, onde $F_{(i)j}(t) = P(T_{(i)j} \leq t | \mathfrak{F}_t)$. Assim

$$Q_{\mu}(T_{(i)} > t) = \sum_{j=1}^n E[\{1 - \ln \overline{F_{(i)j}}(t)\} \overline{F_{(i)j}}(t)]$$

terminando a demonstração de todos os items. $\square$

3.3 Teoria de Valores Extremos e Assinaturas

Em teoria da confiabilidade temos grande interesse na dinâmica do sistema no tempo, em particular em estimar a probabilidade de que um sistema usado, com idade u , falhe em um tempo adicional de x unidades de tempo, $P(T - u \leq x | T > u)$. Por exemplo, se o sistema é um componente eletrônico que tem funcionado u unidades de tempo, estamos interessados na probabilidade que o componente eletrônico falhe no intervalo $[u, u + x]$.

Nesta seção analisaremos tal questão no contexto das assinaturas, em que a estrutura do sistema é uma função das estatísticas de ordem e os resultados analíticos decorrem da teoria de valores extremos. Em um primeiro lugar enunciaremos resultados da teoria de valores extremos, já conhecidos, que serão usado para demonstrar o teorema principal.

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição F . A distribuição do máximo das n observações, $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ é dada por

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F^n(x)$$

porque as variáveis são independentes e identicamente distribuídas. Suponhamos que seja possível encontrar sequências de números reais $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, e uma função de distribuição $H(x)$ não degenerada tal que $(M_n - b_n)/a_n$ converge em distribuição:

$$\begin{aligned}
P((M_n - b_n)/a_n \leq x) &= P(M_n \leq a_n x + b_n) \\
&= F^n(a_n x + b_n) \rightarrow H(x) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

quando n tende ao infinito. Quando essa condição é satisfeita, dizemos que F pertence ao domínio máximo de atração de H , denotado por $F \in MDA(H)$. O seguinte teorema caracteriza as possíveis funções de distribuição limite.

Teorema 3.3.1 *Se existe constantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ e uma distribuição não-degenerada H tal que*

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{D} H$$

então H tem uma das seguintes formas:

$$\Phi_\delta = \begin{cases} \exp\{-x^{-\delta}\}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\Psi_\delta = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \exp\{-(-x)^\delta\}, & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)) \quad (3.28)$$

Onde Ψ_δ é a distribuição de Frechét, Ψ_δ é a distribuição de Weibull e Λ é a distribuição de Gumbel.

Demonstração Ver Fisher-Tippett(1928) [12], Gnedenko(1943) [13].

A caracterização de cada distribuição esta dado pelo seguinte teorema.

Teorema 3.3.2 *Seja F uma função de distribuição então:*

a) $F \in MDA(\Phi_\delta)$ se, e somente se $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$ é infinito e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(\lambda x)}{1 - F(x)} = \lambda^\delta \quad (3.29)$$

para todo λ positivo.

b) $F \in MDA(\Psi_\delta)$ se, e somente se $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$ é finito e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x_F - \frac{1}{\lambda x})}{1 - F(x_F - \frac{1}{x})} = \lambda^{-\delta} \quad (3.30)$$

para todo λ positivo.

c) $F \in MDA(\Lambda)$ se, e somente se

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{1 - F(x + tb(x))}{1 - F(x)} = \exp(-t) \quad (3.31)$$

para todo t positivo, e para alguma função positiva $b(\cdot)$. Se a igualdade for válida para alguma função $b(\cdot)$ então $\int_x^{x_F} (1 - F(s))ds < \infty$ para $x < x_F$ e podemos identificar

$$b(x) = \frac{\int_x^{x_F} (1 - F(s))ds}{1 - F(x)}$$

Demonstração. Ver DeHaan [10]

Lema 3.3.1 *Seja F uma função de distribuição absolutamente contínua com função de densidade f , e $F_{(k)}$ a função de distribuição da k -ésima estatística de ordem de n -variáveis independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F . Então*

- a) *Se $F \in MDA(\Phi_\delta)$ temos que $F_{(k)} \in MDA(\Phi_{(n-k+1)\delta})$;*
- b) *Se $F \in MDA(\Psi_\delta)$ temos que $F_{(k)} \in MDA(\Psi_{(n-k+1)\delta})$;*
- c) *Se $F \in MDA(\Lambda)$ temos que $F_{(k)} \in MDA(\Lambda)$.*

Demonstração

item[a)]. Do teorema anterior, $F \in MDA(\Phi_\delta)$ se, e somente se $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$ é infinito e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(\lambda x)}{1 - F(x)} = \lambda^\delta$$

Analisaremos o comportamento de $F_{(k)}$. Da continuidade de F , temos que $x_{F_{(k)}} = x_F$. Calculemos o limite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{(k)}(\lambda x)}{1 - F_{(k)}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{\lambda x}^1 F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k} dF(x)}{\int_x^1 F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k} dF(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{F(\lambda x)}{F(x)} \right]^{k-1} \left[\frac{1 - F(\lambda x)}{1 - F(x)} \right]^{n-k} \left[\frac{f(\lambda x)\lambda}{f(x)} \right] \\ &= \lambda^{(n-k)\delta} \cdot \lambda^\delta = \lambda^{(n-k+1)\delta} \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde a segunda linha segue da regra de l'Hospital, e a terceira do fato que $F \in MDA(\Phi_\delta)$. Assim temos provado que $F_{(k)} \in MDA(\Phi_{(n-k+1)\delta})$.

item[b)] Para provar que $F_{(k)} \in MDA(\Psi_\delta)$, basta provar, pelo teorema anterior, que $x_{F_{(k)}} = \sup\{x : F_{(k)}(x) < 1\}$ é finito e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{(k)}(x_{F_{(k)}} - \frac{1}{\lambda x})}{1 - F_{(k)}(x_{F_{(k)}} - \frac{1}{x})} = \lambda^{-\delta}$$

Analisaremos o comportamento de $F_{(k)}$. Da continuidade de F , temos que $x_{F_{(k)}} = x_F$ e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{(k)}(x_F - \frac{1}{\lambda x})}{1 - F_{(k)}(x_F - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_F - \frac{1}{\lambda x}}^1 F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k} dF(x)}{\int_{x_F - \frac{1}{x}}^1 F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k} dF(x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{F(x_F - \frac{1}{\lambda x})}{F(x_F - \frac{1}{x})} \right]^{k-1} \left[\frac{1 - F(\lambda x_F - \frac{1}{\lambda x})}{1 - F(x_F - \frac{1}{x})} \right]^{n-k} \left[\frac{f(x_F - \frac{1}{\lambda x}) \lambda x^2 \lambda}{f(x_F - \frac{1}{x}) x^2} \right] \\
&= \lambda^{-(n-k)\delta} \lambda^{-\delta} = \lambda^{-(n-k+1)\delta}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

onde a segunda linha é consequência da regra de l'Hospital, e a terceira é proveniente do fato que F pertence ao domínio de atração de Ψ_δ . Assim temos provado que $F_{(k)} \in MDA(\Psi_{(n-k+1)\delta})$.

item[c)] Do teorema anterior, $F \in MDA(\Lambda)$ se, e somente se

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{1 - F(x + tb(x))}{1 - F(x)} = \exp(-t)$$

para alguma função $b(x)$ positiva. Do fato que $F \in MDA(\Lambda)$, podemos escolher $b(x)$ da forma

$$b(x) = \frac{\int_x^{x_F} (1 - F(s)) ds}{1 - F(x)}$$

Para provar que $F_{(k)} \in MDA(\Lambda)$, escolhamos $bk(x) = b(x)/(n - k + 1)$. Assim, usando a regra de l'Hospital e o fato que $F \in MDA(\Lambda)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{1 - F_{(k)}(x + tbk(x))}{1 - F_{(k)}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_F} \frac{\int_{x+tbk(x)}^1 F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k} dF(x)}{\int_x^1 F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k} dF(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_F} \left[\frac{F(x + tbk(x))}{F(x)} \right]^{k-1} \left[\frac{1 - F(x + tbk(x))}{1 - F(x)} \right]^{n-k} \left[\frac{f(x + tbk(x)) tbk'(x)}{f(x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow x_F} \left[\frac{F(x + tbk(x))}{F(x)} \right]^{k-1} \left[\frac{1 - F(x + tb(x)/(n - k + 1))}{1 - F(x)} \right]^{n-k} \left[\frac{f(x + t \frac{b(x)}{(n-k+1)}) t \frac{b'(x)}{(n-k+1)}}{f(x)} \right] \\
&= \left(\exp\left(-\frac{t}{n - k + 1}\right) \right)^{n-k} \cdot \exp\left(-\frac{t}{n - k + 1}\right) = \exp\left(-\frac{t}{n - k + 1}\right) (n - k + 1) = \exp(-t)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

o que implica que $F_{(k)} \in MDA(\Lambda)$, terminando a demonstração do teorema. $\square$

Definição 3.3.1 (*Distribuição de Valores Extremos Generalizada*)

Definimos a seguinte função de distribuição H_γ por

$$H_\gamma = \begin{cases} \exp\{-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\}, & \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\}, & \gamma = 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

onde $1 + \gamma x > 0$. O suporte é

$$x > -\frac{1}{\gamma} \quad \text{se} \quad \gamma > 0$$

$$\begin{aligned} x &< -\frac{1}{\gamma} \quad \text{se } \gamma < 0 \\ x &\in \mathbb{R} \quad \text{se } \gamma = 0 \end{aligned} \tag{3.36}$$

A função de distribuição H_γ é chamada distribuição de valores extremos generalizada (GEV), e unifica as distribuições Φ_δ, Φ_δ e Λ em uma família paramétrica com parâmetro $\gamma = 1/\delta$.

O lema anterior pode ser lido da seguinte forma: Se $F \in MDA(H_\gamma)$ então $F_{(k)} \in MDA(H_{\gamma/(n-k+1)})$.

Definição 3.3.2 (*Distribuição de Pareto Generalizada*)

Definimos a seguinte função de distribuição G_γ por

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}, & \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp(-x), & \gamma = 0 \end{cases} \tag{3.37}$$

com $x \in D(\gamma)$, onde

$$D(\gamma) = \begin{cases} 0 \leq x < \infty, & \gamma \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -1/\gamma, & \gamma < 0 \end{cases} \tag{3.38}$$

A função de distribuição G_γ é chamada distribuição de Pareto generalizada (GPD).

Teorema 3.3.3 (*Teorema de Pickands-Balkema-de Haan*)

Para $\gamma \in \mathbb{R}$ são equivalentes:

- a) $F \in MDA(H_\gamma)$
- b) Existe uma função mensurável estritamente positiva $\beta(\cdot)$ tal que

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{x \in (0, x_F - u)} |F_u(x) - G_{\gamma, 0, \beta(u)}(x)| = 0$$

onde $F_u = P(X - u \leq x | X > u)$ é denominada função de distribuição de excesso da distribuição F acima do valor u e $G_{\gamma, 0, \beta(u)}$ denota a família de distribuições $G_{\gamma, \mu, \beta}$ relacionada a GPD definida por

$$G_{\gamma, \mu, \beta}(x) = 1 - (1 + \gamma \frac{x - \mu}{\beta})^{-1/\gamma}.$$

Demonstração. Ver Pickands [17], Balkema e de Haan [3], e Degen [11].

Estamos interessado em estimar a probabilidade de que o sistema coerente usado, com idade u , falhe antes de um tempo adicional de x unidades de tempo, $F_u = P(T - u \leq x | T > u)$, no contexto das assinaturas. Usando a teoria de valores extremos temos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.4 *Sejam $T_1, \dots, T_n$ $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada independentes e identicamente distribuídos com distribuição F , representando os tempos de vida dos componentes de um sistema coerente Φ com tempo de vida T . Se F é uma função de distribuição absolutamente contínua com função de densidade f e $F \in MDA(H_\gamma)$. Então:*

A função de distribuição de excesso do tempo de vida T , $F_u = P(T - u \leq x | T > u)$ converge uniformemente, quando u tende a x_T , à distribuição de Pareto generalizada,

$$G_{\frac{\gamma}{n-k+1}, 0, \beta_k(u)}$$

onde k é o maior número com $\alpha_k = P(T = T_{(k)})$ diferente de zero, e $\beta_k(u)$ é uma função mensurável estritamente positiva.

Demonstração Como os $T_1, \dots, T_n$ são $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada independentes e identicamente distribuídos com distribuição F , representando os tempos de vida dos componentes de um sistema coerente Φ com tempo de vida T , da decomposição por assinaturas temos

$$\begin{aligned} F_u(x) &= P(T - u \leq x | T > u) = \frac{P(T \leq u + x, T > u)}{P(T > u)} \\ &= \frac{P(T \leq u + x) - P(T \leq u)}{P(T > u)} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i P(T_{(i)} \leq x + u | T_{(i)} > u) \frac{P(T_{(i)} > u)}{P(T > u)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Analisaremos os termos de cada parcela $P(T_{(i)} \leq x + u | T_{(i)} > u)$ e $P(T_{(i)} > u) / P(T > u)$ quando u tende a x_T . Primeiro $P(T_{(i)} \leq x + u | T_{(i)} > u)$. Como $F \in MDA(H_\gamma)$, do lema 3.3.1, segue que $T_{(i)} \in MDA(H_{\gamma/(n-i+1)})$ e do teorema de Pickands-Balkema-de Haan temos que existe uma função mensurável $\beta_i(\cdot)$ tal que ²:

$$\lim_{u \uparrow x_T} \sup_{x \in (0, x_T - u)} |P(T_{(i)} \leq x + u | T_{(i)} > u) - G_{\gamma/(n-i+1), 0, \beta_i(u)}(x)| = 0. \quad (3.40)$$

Passemos a analisar cada $P(T_{(i)} > u) / P(T > u)$. Seja k é o maior número com α_k diferente de zero. Como F é uma função de distribuição absolutamente contínua com função de densidade f temos usando a regra de l'Hôpital que:

$$\lim_{u \uparrow x_T} \frac{P(T_{(i)} > u)}{P(T_{(k)} > u)} = \begin{cases} 0, & i < k \\ 1, & i = k. \end{cases} \quad (3.41)$$

Assim

$$\lim_{u \uparrow x_T} \frac{P(T_{(i)} > u)}{\sum_{j=1}^k \alpha_j P(T_{(j)} > u)} = \begin{cases} 0, & i < k \\ 1/\alpha_k, & i = k. \end{cases} \quad (3.42)$$

²Podemos escrever x_T em vez de $x_{T_{(i)}}$ devido à decomposição de assinaturas, $P(T > t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(T_{(i)} > t)$

Denotemos o limite de $P(T_{(i)} > u)/P(T > u)$, quando u tende a x_T , por q_i .

Se denotamos por $M(u, i) = \sup_{x \in (0, x_F - u)} |P(T_{(i)} \leq x + u | T_{(i)} > u) - G_{\gamma/n-i+1, 0, \beta_i(u)}(x)|$ temos que

$$\begin{aligned} & \left| P(T_{(i)} \leq x + u | T_{(i)} > u) \frac{P(T_{(i)} > u)}{P(T > u)} - q_i G_{\gamma/n-i+1, 0, \beta_i(u)}(x) \right| \\ & \leq G_{\gamma/n-i+1, 0, \beta_i(u)}(x) \left| \frac{P(T_{(i)} > u)}{P(T > u)} - q_i \right| + M(u, i) \frac{1}{\alpha_i} \\ & \leq \left| \frac{P(T_{(i)} > u)}{P(T > u)} - q_i \right| + M(u, i) \frac{1}{\alpha_i} \end{aligned} \tag{3.43}$$

converge uniformemente a zero, quando u tende a x_T . A última linha sai do fato que os GPD são funções de distribuições. Portanto, se denotamos por λ_i o produto $\alpha_i q_i$, temos

$$\begin{aligned} & \left| P(T \leq x + u | T > u) - \sum_{i=1}^n \lambda_i G_{\gamma/n-i+1, 0, \beta_i(u)}(x) \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i P(T_{(i)} \leq x + u | T_{(i)} > u) \frac{P(T_{(i)} > u)}{P(T > u)} - \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i G_{\gamma/n-i+1, 0, \beta_i(u)}(x) \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \left| P(T_{(i)} \leq x + u | T_{(i)} > u) \frac{P(T_{(i)} > u)}{P(T > u)} - q_i G_{\gamma/n-i+1, 0, \beta_i(u)}(x) \right| \end{aligned}$$

converge uniformemente a zero, quando u tende a x_F . Usando o fato que $\lambda_k = 1$ e λ_i é zero para o resto de índices temos que

$$\left| P(T \leq x + u | T > u) - G_{\gamma/n-k+1, 0, \beta_k(u)}(x) \right| = \left| P(T \leq x + u | T > u) - \sum_{i=1}^n \lambda_i G_{\gamma/n-i+1, 0, \beta_i(u)}(x) \right|$$

converge converge uniformemente a zero, quando u tende a x_F , terminando a demonstração do teorema. $\square$

Como consequência temos o seguinte corolário.

Corolário 3.3.1 *Sejam $T_1, \dots, T_n$ $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada independentes e identicamente distribuídos com distribuição F , representando os tempos de vida dos componentes de um sistema coerente Φ com tempo de vida T . Sejam $T^1, \dots, T^m$ tempos de vida independentes e identicamente distribuídos, com a mesma função de distribuição que o tempo de vida T do sistema Φ . Se F é uma função de distribuição absolutamente contínua com função de densidade f e $F \in MDA(H_\gamma)$. Então, o tempo de vida do sistema em paralelo com componentes T^j converge, convenientemente padronizada, em distribuição à função de não degenerada $H_{\gamma/n-k+1}$, k é o maior número com $\alpha_k = P(T = T_{(k)})$ diferente de zero e α é o vetor de assinatura do sistema Φ .*

Demonstração

Do teorema anterior temos que

$$\lim_{u \uparrow x_T} \sup_{x \in (0, x_T - u)} |P(T \leq x + u | T > u) - G_{\gamma/n-k+1, 0, \beta_k(u)}(x)| = 0.$$

Usando o teorema de Pickands-Balkema-de Haan, concluimos que $T \in MDA(H_{\gamma/n-k+1})$, é dizer, existem sequências de números $a_m \in \mathbb{R}^+$, $b_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$(\max\{T^1, \dots, T^m\} - b_m) / a_m \xrightarrow{D} H_{\gamma/n-k+1}$$

quando m tende ao infinito, onde as variáveis aleatórias $\{T^k : k \in \mathbb{N}\}$ são independentes e identicamente distribuídas com a mesma distribuição que o tempo de vida T do sistema Φ . $\square$

Capítulo 4

Conclusões

4.1 Considerações Finais

Neste trabalho, estendemos a noção de assinaturas para o caso de dependência dos tempos de vida dos componentes. Provamos que sob diferentes níveis de informação, o tempo de vida de um sistema coerente se expressa, ainda, como combinação linear das estatísticas de ordem dos tempos de vida dos componentes. Este ponto de vista é de carácter prático, porque quando analisamos um sistema fisicamente, a informação a disposição é dada pela falhas dos componentes ordenados, isto é, sabemos qual componente falhou e o instante exato de sua falha. Analisamos também as diferentes medidas de importâncias da confiabilidade dos componentes para a confiabilidade do sistema e o tempo de vida residual de um sistema coerente no contexto das assinaturas.

4.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

- Analisar classes de distribuições úteis na teoria da confiabilidade, no contexto das assinaturas, como $MIFR|\mathfrak{F}_t$, $NBU|\mathfrak{F}_t$, etc;
- Estudar desigualdades estocásticas entre sistema coerentes baseada nas desigualdades estocásticas entre suas assinaturas;
- Estudar relações assintóticas do tempo de vida do sistema coerente no contexto das assinaturas;
- Procurar relações entre a importância dos componentes e as assinaturas dinâmicas.

Apêndice A

Apêndice

Nesta seção revisaremos alguns resultados da teoria dos processos pontuais. Por simplicidade de notação vamos assumir que as relações entre conjuntos mensuráveis e variables aleatórias, como $\subset, \subseteq, \leq, <, =$ serão sempre com probabilidade um, assim expressões ou termos como P-q.c geralmente serão omitido. Para terminar, com respeito as esperanças condicionais não faremos distinção entre uma versão e a classe de equivalência P-q.c dessa versão.

A.1 Processos Estocásticos

Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $(E, \mathcal{E})$ um espaço topológico. Um processo estocástico com valores em E é uma função $X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow E$ mensurável com respeito à σ -álgebra produto $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathfrak{F}$, onde $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ é a σ -álgebra gerada pelos borelianos em $\mathbb{R}^+$.

Com a definição de processo estocástico associamos a definição de filtragem.

Definição A.1.1 *O conjunto $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ é uma filtragem em $(\Omega, \mathfrak{F})$ se para cada $t \geq 0$, $\mathfrak{F}_t$ é uma sub- σ -álgebra de $\mathfrak{F}$ e para todo $s \leq t$*

$$\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$$

Se, em adição, para todo $t \geq 0$ temos que

$$\mathfrak{F}_t = \bigcap_{h>0} \mathfrak{F}_{t+h}$$

dizemos que a filtragem é contínua à direita.

Se $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ é contínua à direita e completa, dizemos que $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ satisfaz as condições de Dellacherie.

Denotamos por $\mathfrak{F}_\infty$ a menor σ -álgebra que contém todos os $\mathfrak{F}_t$, $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathfrak{F}_t)$.

Definição A.1.2 *O processo estocástico $(X_t, t \geq 0)$ é $\mathfrak{F}_t$ -progressivo se, para todo $t \geq 0$, a função $X_s(w) = X(s, w)$ para $(s, w) \in [0, t] \times \Omega$ é $\mathcal{B}[0, t] \times \mathfrak{F}_t$ -mensurável. Se X_t é $\mathfrak{F}_t$ -mensurável dizemos que o processo é adaptado a $\mathfrak{F}_t$.*

Teorema A.1.1 *Seja $(E, \mathcal{E})$ um espaço topológico metrizável e seja X_t um processo estocástico adaptado a $\mathfrak{F}_t$. Se X_t é contínuo à direita (ou contínuo à esquerda) então X_t é $\mathfrak{F}_t$ -progressível.*

Demonstração Bremaud [6].

Além das noções de mensurabilidade e progressividade uma noção importante é a noção de previsibilidade.

Definição A.1.3 *Seja $\mathfrak{F}_t$ uma filtragem associada ao espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Definimos a σ -álgebra $\mathfrak{F}_t$ -previsível sobre $(0, \infty) \times \Omega$ e denotamos por $\mathcal{P}(\mathfrak{F}_t)$ ou simplesmente $\mathcal{P}_t$ a σ -álgebra sobre $(0, \infty) \times \Omega$ gerada por elementos da forma*

$$(s, t] \times A; A \in \mathfrak{F}_s; s \leq t.$$

Um processo estocástico com valores em $\mathbb{R}$ é $\mathfrak{F}_t$ -previsível se a função $(t, w) \rightarrow X_t(w)$ definida em $(0, \infty) \times \Omega$ e $\mathcal{P}(\mathfrak{F}_t)$ -mensurável.

O teorema seguinte fornece um método fácil de verificar se um processo é $\mathfrak{F}_t$ -previsível

Teorema A.1.2 *Qualquer processo X_t com valores em $\mathbb{R}$, adaptado a $\mathfrak{F}_t$ contínuo à esquerda é um processo $\mathfrak{F}_t$ -previsível.*

Demonstração Bremaud [6].

Observe que, na hierarquia de mensurabilidade, a noção de previsibilidade é a mais forte:

Teorema A.1.3 *Se o processo X_t é $\mathfrak{F}_t$ -previsível então X_t é $\mathfrak{F}_t$ -progressivo.*

Demonstração Bremaud [6].

A.1.1 Tempo de Parada

Seja $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ uma filtragem de $(\Omega, \mathfrak{F})$. Uma variável aleatória $T : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow [0, \infty]$ é chamada Tempo de Parada com respeito a $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ ou simplesmente $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada, se para todo $t \geq 0$

$$\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t.$$

Associado ao tempo de parada T temos duas σ -álgebras, relacionadas ao passado de T e ao passado estrito de T .

Definição A.1.4 *Seja T um $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada. Então o passado no tempo de parada T , é dado pela σ -álgebra $\mathfrak{F}_T$ definida como*

$$\mathfrak{F}_T = \{A \in \mathfrak{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}.$$

O passado estrito em T é a σ -álgebra $\mathfrak{F}_{T-}$ definida como

$$\mathfrak{F}_{T-} = \sigma\{A_0 \in \mathfrak{F}_0, A_s \cap \{T > s\} : A_s \in \mathfrak{F}_s, s \geq 0\}.$$

Algumas definições que relacionam os conceitos de tempo de parada e de previsibilidade são:

Definição A.1.5 *Seja T um $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada então:*

- a) *T é um $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada previsível se existe uma sequência crescente $(T_n, n \geq 0)$ de $\mathfrak{F}_t$ -tempos de paradas com $T_n < T$ e $\lim T_n = T$. Tal sequência é dita que anuncia T .*
- b) *T é um $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada totalmente inacessível se $P(T = \tau < \infty) = 0$ para todo τ , $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada previsível.*

A.1.2 Martingal

Definição A.1.6 *(Martingal, Submartingal e Supermartingal) Seja $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$ uma filtragem em $(\Omega, \mathfrak{F})$. Um processo M_t com valores reais é chamado $(P, \mathfrak{F}_t)$ -martingal sobre $[0, d]$ (onde d é um numero real não negativo) se*

- a) *M_t é adaptado a $\mathfrak{F}_t$;*
- b) *M_t é $\mathfrak{F}_t$ -integrável, $E[|M_t|] < \infty$, $t \in [0, d]$;*
- c) *$E[M_t | \mathfrak{F}_s] = M_s$ P -q.c, para todo $0 \leq s \leq t$.*

Se M_t é um $(P, \mathfrak{F}_t)$ -martingal sobre $[0, d]$ para todo $d \geq 0$ então M_t é chamado $(P, \mathfrak{F}_t)$ -martingal.

Se no item[c)] a igualdade é substituída por $E[M_t | \mathfrak{F}_s] \leq M_s$, M_t é chamado $(P, \mathfrak{F}_t)$ -supermartingal.

Se no item[c)] a igualdade é substituída por $E[M_t | \mathfrak{F}_s] \geq M_s$, M_t é chamado $(P, \mathfrak{F}_t)$ -submartingal.

Alguns teoremas importantes na teoria dos martingais são:

Teorema A.1.4 *(Teorema de Amostragem Opcional)*

Seja M_t um $\mathfrak{F}_t$ -supermartingal contínuo à direita com S e T dois tempos de parada finitos tais que $S \leq T$. Então :

- a) *Se T é limitada por uma constante (e portanto S também é limitada) ou*
- b) *Se M_t é uniformemente integrável, isto é*

$$\lim_{A \uparrow \infty} \sup \left\{ \int_{|M_t| > A} |M_t| dP : t \geq 0 \right\} = 0$$

então

$$E[M_T | \mathfrak{F}_S] \leq M_S.$$

Observação 5 *Quando M_t é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal contínuo à direita temos que*

$$E[M_T | \mathfrak{F}_S] = M_S$$

como consequência direta do teorema de amostragem opcional desde que M_t e $-M_t$ são supermartingais.

Demostração Protter [18].

Teorema A.1.5 *Seja $(M_t, t \geq 0)$ é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal que é uniformemente integrável, então existe uma variável aleatória M_∞ tal que*

$$M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$$

e

$$M_t = E[M_\infty | \mathfrak{F}_t].$$

Demostração Protter [18].

Lema A.1.1 *(Lema de Komatsu)*

Seja $(X_t, t \geq 0)$ um processo $\mathcal{F}_t$ -progressivo tal que para todo tempo de parada T , X_T é integrável e $E[X_T] = E[X_0]$. Então o processo $(X_t, t \geq 0)$ é um $\mathcal{F}_t$ -martingal.

Demostração Bremaud [6].

Teorema A.1.6 *(Formula Integral de Dellacherie)*

Seja $(A_t, t \geq 0)$ um processo $\mathcal{F}_t$ -adaptado crescente e $(M_t, t \geq 0)$ um $\mathfrak{F}_t$ -martingal não negativo, contínuo à direita e uniformemente integrável. Então para qualquer tempo de parada T , adaptado à filtragem $\mathfrak{F}_t$, temos

$$E\left[\int_0^T M_s dA_s\right] = E[M_T A_T].$$

Demostração Protter [18].

Por razões técnicas a noção de martingal não é suficiente e necessitamos de um conceito mais geral, o conceito de martingal local.

Definição A.1.7 *Seja X_t um processo $\mathfrak{F}_t$ -adaptado e $(S_n, n \geq 1)$ uma família de $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada tais que:*

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$;
- b) Para cada $n \geq 1$, $X_{t \wedge S_n}$ é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal.

Então X_t é chamado $(P, \mathfrak{F}_t)$ -martingal local, ou $\mathfrak{F}_t$ -martingal local quando P é evidente.

Teorema A.1.7 (*Decomposição de Doob-Meyer*)

Seja $(X_t, t \geq 0)$ um processo $\mathcal{F}_t$ -adaptado, contínuo à direita e com limite à esquerda. Então X_t é um $\mathcal{F}_t$ -submartingal uniformemente integrável se, e somente se, o processo $(X_t, t \geq 0)$ possui uma decomposição da forma

$$X_t = M_t + A_t$$

onde $(A_t, t \geq 0)$ é um processo $\mathcal{F}_t$ -previsível, crescente, contínuo à direita, com $A_0 = 0$ e $(M_t, t \geq 0)$ é um $\mathcal{F}_t$ -martingal uniformemente integrável. Essa decomposição é única.

Demonstração Protter [18].

Definição A.1.8 (*Semimartingal Regular*)

Seja $(X_t, t \geq 0)$ um processo estocástico $\mathcal{F}_t$ -adaptado. Dizemos que $(X_t, t \geq 0)$ é um semimartingal regular se ele tem uma decomposição da forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s ds + M_t$$

onde $(f_t, t \geq 0)$ um processo estocástico progressivamente mensurável com a propriedade que para todo $t \geq 0$

$$E\left[\int_0^t |f_s| ds\right] < \infty,$$

$E|X_0|$ é finito e $(M_t, t \geq 0)$ é um $\mathcal{F}_t$ -martingal contínuo à direita com limite à esquerda e $M_0 = 0$.

Tal processo se diz que tem uma decomposição do tipo SMR.

A.2 Processos Pontuais

Primeiro, por simplicidade, estudaremos o que é um processo pontual univariado, ou simplesmente um processo pontual. Um processo pontual é uma sequência $(T_n, n \geq 1)$ crescente, de variáveis aleatórias positivas que podem assumir o valor infinito. A partir de agora assumiremos que o processo é não explosivo, isto é:

$$T_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$$

Como $(T_n, n \geq 1)$ é uma sequência crescente o limite existe.

Uma maneira equivalente de definir um processo pontual é definir o processo de contagem associado a $(T_n, n \geq 1)$:

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1(T_k \leq t)$$

que está bem definido se assumimos que o processo $(T_n, n \geq 1)$ é não explosivo. Para cada realização ω , $(N_t(\omega), t \geq 0)$, é uma função escada, contínua à direita com limite à esquerda e com saltos de tamanho 1. O processo $(N_t, t \geq 0)$ conta o número de pontos T_n que ocorrem até o instante de tempo t .

Com a definição de processo pontual relacionamos o conceito de compensador.

Definição A.2.1 *Seja $(N_t, t \geq 0)$ um processo de contagem integrável, adaptado a uma filtração $\mathfrak{F}_t$, e seja Λ_t um processo $\mathfrak{F}_t$ -previsível, integrável e não-decrescente tal que a diferença*

$$M_t = N_{(t)} - \Lambda_t$$

é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal. Então o processo Λ_t é chamado o $\mathfrak{F}_t$ -compensador do processo $(N_t, t \geq 0)$.

A existência do compensador é dada pelo Teorema da decomposição de Doob-Meyer.

Uma maneira alternativa de verificar tal condição é provar que a igualdade

$$E\left[\int_0^\infty C_s dN_s\right] = E\left[\int_0^\infty C_s d\Lambda_s\right]$$

é satisfeita para todo processo $\mathfrak{F}_t$ -previsível não negativo C_t .

Intuitivamente o compensador satisfaz

$$\Lambda_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^t (E[N_{s+h} | \mathfrak{F}_s] - N_s) ds, \quad d\Lambda_t = E[dN_t | \mathfrak{F}_t].$$

Em alguns casos a medida gerada pelo compensador é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue o que nos leva à seguinte definição.

Definição A.2.2 *Seja $(N_t, t \geq 0)$ um processo de contagem integrável adaptado a uma filtração $\mathfrak{F}_t$, e λ_t um processo $\mathfrak{F}_t$ -progressivo tal que :*

$$\int_0^t \lambda_s ds < \infty.$$

Se para todo processo C_t , $\mathfrak{F}_t$ -previsível e não negativo, temos

$$E\left[\int_0^\infty C_s dN_s\right] = E\left[\int_0^\infty C_s \lambda_s ds\right],$$

dizemos que o processo $N = (N_t, t \geq 0)$ admite a intensidade λ_t . Note que λ_t depende da filtração $\mathfrak{F}_t$ e da probabilidade P , assim dizemos que λ_t é $(P, \mathfrak{F}_t)$ -intensidade.

Se requeremos que λ_t seja $\mathfrak{F}_t$ -previsível, é possível demonstrar que a intensidade é única. Por outro lado se existe intensidade para um processo pontual sempre é possível encontrar uma versão, dessa intensidade, que seja previsível.

Em geral o cálculo de intensidade é um trabalho árduo. No teorema seguinte temos um método para calcular a intensidade baseado nas densidades dos tempos entre as chegadas, do processo pontual.

Teorema A.2.1 *Seja $(N_t, t \geq 0)$ um processo de contagem integrável adaptado a uma filtragem $\mathfrak{F}_t$, onde $\mathfrak{F}_t$ e o σ -álgebra natural associada a $(N_t, t \geq 0)$, $\mathfrak{F}_t = \sigma\{N_s : 0 \leq s \leq t\}$. Suponhamos que $G_n(w, B)$ é a distribuição condicional regular dos tempos entre as chegadas $U_{n+1} = T_{n+1} - T_n$, $n \geq 0$, e $T_0 = 0$ dado o passado $\mathfrak{F}_{T_n}$, isto é:*

$$G_n(w, B) = P(U_{n+1} \in B | \mathfrak{F}_{T_n}) = P(T_{n+1} - T_n \in B | \mathfrak{F}_{T_n})$$

para todo boreliano B .

Então

$$A_t = A_{T_n} + \int_0^{t-T_n} \frac{G_n(ds)}{G_n[s, \infty]}$$

no intervalo $\{T_n < t \leq T_{n+1}\}$.

Note que o compensador A_t é aditivo!.

Se a distribuição condicional regular dos tempos entre as chegadas G_n admite uma densidade g_n , $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ então a intensidade $\mathfrak{F}_t$ -previsível λ é dada por:

$$\lambda_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n(t - T_n)}{1 - \int_0^{t-T_n} g_n(s) ds} 1_{(T_n < t \leq T_{n+1})}$$

Demonstração Bremaud [6].

No caso particular de processos pontuais temos os seguintes teoremas.

Teorema A.2.2 *Seja $(N_t, t \geq 0)$ um processo pontual $\mathcal{F}_t$ -adaptado com intensidade λ_t , e $M_t = N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ o martingal associado e seja $(X_t, t \geq 0)$ e um processo $\mathcal{F}_t$ -previsível $t \geq 0$*

a) Se

$$E\left[\int_0^t |X_s| \lambda_s ds\right] < \infty,$$

então $Y_t = \int_0^t X_s dM_s$ é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal

b) Se

$$\int_0^t |X_s| \lambda_s ds < \infty, t \geq 0,$$

então $Y_t = \int_0^t X_s dM_s$ é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal local

Teorema A.2.3 *Seja T um tempo de parada associado à σ -álgebra $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$.*

a) *Se o processo $(N_t, t \geq 0)$, com $N_t = 1(T \leq t)$, tem uma representação do tipo SMR*

$$N_t = \int_0^t 1(T \geq s) \lambda_s ds + M_t$$

então T é $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada totalmente inacessível e M_t é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal quadrado integrável de média zero.

b) *Se T é $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada totalmente inacessível então o processo associado $(N_t, t \geq 0)$ tem uma única decomposição do tipo*

$$N_t = \Lambda_t + M_t$$

onde M_t é um $\mathfrak{F}_t$ -martingal integrável e Λ é contínuo.

Demonstração Protter [18].

Uma generalização do processo pontual univariado é o conceito de processo pontual multivariado.

Definição A.2.3 *Seja $(T_n, n \geq 1)$ um processo pontual univariado e $(Z_n, n \geq 1)$ uma sequência de variáveis aleatórias com valores em um alfabeto finito $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. A sequência de pares (T_n, Z_n) com $n \geq 1$ é chamado processo pontual multivariado. Com esta sequência de pares associamos um processo de contagem N_t representando por um vetor de tamanho m , onde m é o número de elemento do alfabeto $\mathcal{A}$, da seguinte forma:*

$$N_t = (N_t(1), N_t(2), \dots, N_t(m))$$

onde

$$N_t(i) = \sum_{k \geq 1} 1(T_k \leq t) 1(V_k = a_i)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

A.2.1 Fórmula Exponencial e Teorema de Girsanov

Nesta subseção consideramos processos que são contínuos à direita com limite à esquerda. No desenvolvimento da dissertação, para estudar conceitos como importância de componentes, reparos mínimos utilizamos transformações nos compensadores. Um teorema importante para analisar tais transformações é o teorema de Girsanov. Para demonstrá-lo usaremos os seguintes resultados:

Teorema A.2.4 *(Fórmula do Produto)*

Sejam f e g duas funções contínuas à direita com limites à esquerda e de variação limitada sobre qualquer intervalo finito. Então:

$$f(t)g(t) = f(0)g(0) + \int_0^t f(s)dg(s) + \int_0^t g(s-)df(s)$$

Observação: O produto de f e g , $f(t)g(t)$, também pode ser escrito como

$$f(0)g(0) + \int_0^t f(s-)dg(s) + \int_0^t g(s)df(s)$$

.

Teorema A.2.5 (*Formula Exponencial*)

Sejam a uma função contínua à direita, crescente, com $a(0) = 0$, e ψ uma função tal que, para todo $t \geq 0$,

$$\int_0^t |\psi(s)|da(s) < \infty.$$

Então a equação

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x(s-)\psi(s)da(s)$$

admite uma única solução localmente limitada ($\sup_{s \in [0, t]} |x(s)| < \infty$) dada pela formula

$$x(t) = x(0) \cdot \prod_{0 < s \leq t} (1 + \psi(s)\Delta a(s)) \cdot \exp\left(\int_0^t \psi(s)da^c(s)\right)$$

onde $\Delta a(t) = a(t) - a(t-)$ e $a^c(t) = a(t) - \sum_{s \leq t} \Delta a(s)$.

Demonstração Ver Bremaud [6].

Observação 6

Como consequência existe uma correspondência bijetiva entre os espaço das funções de distribuição dos $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada e o espaço dos $\mathfrak{F}_t$ -compensadores

$$P(T > t | \mathfrak{F}_t) = \exp[-A_t^c] \prod_{0 < s \leq t} (1 - \Delta A_s)$$

onde A_t é o $\mathfrak{F}_t$ -compensador do processo $1(T \leq t)$, $\Delta A_t = A_t - A_{t-}$ e $A_s^c = A_t - \sum_{0 < s \leq t} \Delta A_s$ é a parte contínua de A_t .

O teorema de Girsanov nos permite realizar transformações no espaço dos $\mathfrak{F}_t$ -compensadores.

Teorema A.2.6 (*Teorema de Girsanov para Processos Pontuais*)

Seja $(N_t(1), \dots, N_t(k))$ um processo pontual k -variado adaptado à filtragem $\mathfrak{F}_t$ e $\lambda_t(i), 1 \leq i \leq k$ a

intensidade $(P, \mathfrak{F}_t)$ -previsível associada a $N_t(i)$. Seja $\mu_t(i), 1 \leq i \leq k$, um processo $\mathfrak{F}_t$ -previsível, não negativo tal que para $t \geq 0$ e $1 \leq i \leq k$

$$\int_0^t \mu_s(i) \lambda_s(i) ds < \infty.$$

Seja L_t o processo

$$L_t = \prod_{i=1}^k L_t(i)$$

onde o $L_t(i)$ é definido como

$$L_t(i) = \prod_{n \geq 1} \mu_{T_n(i)}^{1(T_n(i) \leq t)} \cdot \exp(A_t(i) - B_t(i))$$

com $A_t(i) = \int_0^t \lambda_s(i) ds$ e $B_t(i) = \int_0^t \mu_s(i) \lambda_s(i) ds = \int_0^t \mu_s(i) dA_t(i)$.

Então L_t é um $(P, \mathfrak{F}_t)$ -martingal local não negativo e um $(P, \mathfrak{F}_t)$ -supermartingal.

Demonstração

Primeiro provaremos que o processo L_t satisfaz a seguinte equação :

$$L_t = 1 + \sum_{i=1}^k \int_0^t L_{s-} \cdot (\mu_s(i) - 1) \cdot dM_s(i)$$

onde $M_s(i) = N_s(i) - \int_0^s \lambda_s(i) ds$.

Da definição de $L_t(i)$ temos que se $\psi_s(i) = \mu_s(i) - 1$, $M_s(i) = N_s(i) - \int_0^s \lambda_s(i) ds$, $\Delta M_s(i) = \Delta N_s(i)$ e $M_t(i) - \sum_{s \leq t} \Delta M_s(i) = M_t(i) - \sum_{s \leq t} \Delta N_s(i) = - \int_0^t \lambda_s(i) ds$ pois $N_t = \sum_{s \leq t} \Delta N_s(i)$. Assim temos que

$$\begin{aligned} \prod_{0 < s \leq t} (1 + \psi_s(i) \Delta N_s) &= \prod_{0 < s \leq t} (1 + (\mu_s(i) - 1) \cdot \Delta N_s) \\ &= \prod_{n \geq 1} \mu_{T_n(i)}^{1(T_n(i) \leq t)}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Usando a fórmula exponencial para o processo $L_t(i)$ temos:

$$L_t(i) = 1 + \int_0^t L_{s-}(i) \cdot (\psi_s(i)) \cdot dM_s(i)$$

onde $\psi_s(i) = \mu_s(i) - 1$.

Usando a fórmula do produto repetida vezes para $L_t = \prod_{i=1}^k L_t(i)$ obtemos

$$L_t = \prod_{i=1}^k L_t(i) = 1 + \sum_{i=1}^k \int_0^t \prod_{m=1, m \neq i}^k L_{s-}(m) dL_s(i)$$

mas $dL_s(i) = L_{s-}(i) \cdot (\mu_s(i) - 1) \cdot dM_s(i)$, $1 \leq i \leq k$. Portanto concluímos que

$$L_t = 1 + \sum_{i=1}^k \int_0^t L_{s-} \cdot (\mu_s(i) - 1) \cdot dM_s(i).$$

Usaremos tal expressão para provar que o processo L_t é um martingal local e uma supermartingal.

Para provar que L_t é um martingal local consideremos os tempos de parada

$$S_n = \inf \left\{ t > 0 : L_{t-} \geq n \text{ ou } \sum_{i=1}^k \int_0^t |\mu_s(i) - 1| d\lambda_s(i) \geq n \right\}$$

se o conjunto $\{t : L_{t-} \geq n \text{ ou } \sum_{i=1}^k \int_0^t |\mu_s(i) - 1| d\lambda_s(i) \geq n\}$ é não vazio e $S_n = \infty$ se for vazio. Logo o processo $L_{t \wedge S_n}$ é um martingal pois, para $t \leq S_n$, temos

$$E\left[\sum_{i=1}^k \int_0^t |L_{s-} \cdot (\mu_s(i) - 1)| \cdot d\lambda_s(i)\right] < \infty$$

O que resta provar é que a sequência $(S_n, n \geq 0)$ tende ao infinito. Claramente a sequência é crescente, e se o limite fosse um numero real positivo finito teríamos uma contradicção com o fato que $\int_0^t \mu_s(i) \lambda_s(i) ds < \infty$, $\int_0^t \lambda_s(i) ds < \infty$ e L_{t-} é um processo contínuo à esquerda. Assim o processo $L_{t \wedge S_n}$ é um martingal e L_t é um local martingal.

Para provar que L_t é um $\mathfrak{F}_t$ -supermartingal, usaremos o fato que $L_{t \wedge S_n}$ é um martingal

$$E[L_{t \wedge S_n} | \mathfrak{F}_s] = L_{s \wedge S_n}$$

e como os L_t são positivos usamos o lema de Fatou para concluir que

$$\begin{aligned} E[L_t | \mathfrak{F}_s] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[L_{t \wedge S_n} | \mathfrak{F}_s] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} L_{s \wedge S_n} = L_s \end{aligned}$$

isto é, L_t é um supermartingal. $\square$

Seja $\mathcal{G}$ uma σ -sub-álgebra de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ e denotamos por $\mathcal{G} \cap A$ o traço da σ -álgebra $\mathcal{G}$ em A . Isto é

$$\mathcal{G} \cap A = \{G \cap A / G \in \mathcal{G}\}$$

onde A é um subconjunto de Ω . Claramente $\mathcal{G} \cap A$ é uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{G}$ e se A é um elemento de $\mathfrak{F}$ com probabilidade $P(A)$ positiva, definimos a probabilidade P^A sobre $\mathcal{G} \cap A$ da seguinte maneira

$$P^A(G \cap A) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)}$$

para $G \in \mathcal{G}$. $E^A[X|G \cap A]$ denota a esperança condicional da variável X com respeito a probabilidade P^A e a σ -álgebra $\mathcal{G} \cap A$.

Lema A.2.1 *Seja X uma variável integrável com respeito a P e $\mathcal{G}$ uma sub- σ -álgebra. Então X é P^A -integrável e se $A \in \mathcal{G}$ temos*

$$E^A[X|\mathcal{G} \cap A] = E[X|\mathcal{G}] \quad P^A - q.c.$$

Demonstração

Seja $B \in \mathcal{G}$, então

$$\begin{aligned} \int 1(B)1(A)E^A[X|\mathcal{G} \cap A]dP^A &= \int 1(B)1(A)XdP^A \\ &= \frac{1}{P(A)} \int 1(B)1(A)XdP \\ &= \frac{1}{P(A)} \int 1(B)E[1(A)X|\mathcal{G}]dP \\ &= \frac{1}{P(A)} \int 1(B)1(A)E[1(A)X|\mathcal{G}]dP \\ &= \int 1(B)1(A)E[1(A)X|\mathcal{G}]dP^A \end{aligned} \tag{A.2}$$

onde a segunda igualdade vem de $P^A(dx) = 1(A)P(dx)/P(A)$ e a quarta igualdade sai do fato de que $A \in \mathcal{G}$. Temos, portanto, demonstrado que

$$\int 1(B)1(A)E^A[X|\mathcal{G} \cap A]dP^A = \int 1(B)1(A)E[1(A)X|\mathcal{G}]dP^A$$

e como $E[1(A)X|\mathcal{G}] = 1(A)E[X|\mathcal{G}]$ é $\mathcal{G} \cap A$ -mensurável, da unicidade de esperança condicional, concluímos que $E^A[X|\mathcal{G} \cap A] = E[X|\mathcal{G}]$ quase-certamente com respeito a P^A . $\square$

Lema A.2.2 *Seja $(N_t, t \geq 0)$ um processo de contagem integrável adaptado a uma filtragem $\mathfrak{F}_t$, e*

Λ_t seu $\mathfrak{F}_t$ -compensador. Então

$$E\left[\int_0^\infty 1(t < s)dN_s|\mathfrak{F}_t\right] = E\left[\int_0^\infty 1(t < s)d\Lambda_s|\mathfrak{F}_t\right].$$

Demonstração

Seja $B \in \mathfrak{F}_t$ e consideremos o processo $C_s = 1(t < s)1(B)$. Este processo é $\mathfrak{F}_s$ -previsível porque é contínua à esquerda e $\mathfrak{F}_s$ -adaptada (devido a que $B \in \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_s$ para todo $t < s$). Assim para todo $B \in \mathfrak{F}_t$ temos

$$\begin{aligned} \int 1(B)E\left[\int_0^\infty 1(t < s)dN_s|\mathfrak{F}_t\right]dP &= \int 1(B) \int_0^\infty 1(t < s)dN_s dP \\ &= \int \int_0^\infty C_s dN_s dP \\ &= \int \int_0^\infty C_s d\Lambda_s dP \\ &= \int 1(B) \int_0^\infty 1(t < s)d\Lambda_s dP \\ &= \int 1(B)E\left[\int_0^\infty 1(t < s)d\Lambda_s\right]dP \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde a terceira igualdade vem da definição de $\mathfrak{F}_t$ -compensador. $\square$

Teorema A.2.7 *Sejam $T_1, \dots, T_n$ $\mathfrak{F}_t$ -tempos de parada e os $A_j(t)$ $\mathfrak{F}_t$ -compensadores associados aos processos $N_j(t) = 1(T_j \leq t)$ tais que:*

- a) *Para todo i, j com $i \neq j$, $P(T_i = T_j) = 0$;*
- b) *Todos os $\mathfrak{F}_t$ -compensadores, $A_j(t)$, são contínuos.*

Então as variáveis aleatórias $A_j(T_j), 1 \leq j \leq n$ são independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de parâmetro 1.

A demonstração é baseada no artigo de Norros [16].

Demonstração

Para provar tal resultado é suficiente demonstrar que para qualquer n -vetor de números reais $(u_1, \dots, u_n)$

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^n iu_j A_j(T_j)\right)\right] = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - iu_j}$$

onde i é o número complexo tal que $i^2 = -1$.

Definimos os seguintes processos, para $1 \leq j \leq n$

$$M_t(j) = (1 - iu_j)^{N_j(t)}.exp\{iu_j A_j(t)\}.$$

Da fórmula exponencial temos que os processos $M_t(j)$ satisfazem

$$\begin{aligned} M_t(j) &= 1 + \int_0^t M_{s-}(j) iu_j d(A_j(s) - N_j(s)) \\ &= 1 + \int_0^t (1 - iu_j)^{N_j(s-)} iu_j d(A_j(s) - N_j(s)). \end{aligned}$$

Portanto, os processos $M_t(j)$, $1 \leq j \leq n$ são martingais porque $A_j(t) - N_j(t)$ é um martingal, e $(1 - iu_j)^{N_j(s-)}$ é $\mathfrak{F}_t$ -previsível para cada j . Da continuidade dos processos $A_j(t)$, $1 \leq j \leq n$ e da hipótese que os processos $N_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, não possuem saltos simultâneos temos que o produto dos martingais $\prod_{j \geq 1} M_t(j)$ é um martingal.

Como $A_j(\infty) = A_j(T_j)$ temos que

$$E[\prod_{j \geq 1} M_\infty(j)] = E[\prod_{j \geq 1} (1 - iu_j)^{N_j(\infty)}.exp(iu_j A_j(\infty))] = E[\prod_{j \geq 1} (1 - iu_j).exp(iu_j A_j(T_j))]$$

e da propriedade de martingal (usando Kunita-Watanabe e a variação quadrática)

$$E[\prod_{j \geq 1} M_0(j)] = E[\prod_{j \geq 1} (1 - iu_j)^{N_j(0)}.exp(iu_j A_j(0))] = E[1] = 1$$

o que termina a demonstração do teorema. $\square$

É interessante notar que o resultado do teorema não depende das distribuições dos tempos de vida e da história do processo, desde que não apresentem falhas simultâneas.

Desde que o $\mathfrak{F}_t$ -compensador depende da historia interna do processo, escrevemos o $\mathfrak{F}_t$ -compensador $A_k(t)$ como

$$A_k(t) = \sum_i 1(T_{(i)} < t \leq T_{(i+1)}) a_t^{(i)}(k, T_{(1)}, X_1; \dots; T_{(n)}, X_n)$$

onde cada $a_{(\cdot)}^{(i)}(k; \dots)$ é uma função determinística em suas variáveis (Ver Bremaud [6]). Assim o compensador $A_k(\cdot)$ é determinística por partes, cada falha de um componentes produz uma nova função para escolher.

Usamos as seguintes definições: Um conjunto de historias é um conjunto finito H , que consiste em pares (t, i) , com $t \in \mathbb{R}^+$, $i \in \mathcal{C}$ tal que se os pares $(s, i) \in H$, $(t, j) \in H$ e $s \neq t$ então $i \neq j$. Denotemos por H^+ ao conjunto de componentes que estão em H , $H^+ = \{i : (s, i) \in H\}$.

Escrevemos $a_t[i; \{(T_{(1)}, X_1), \dots, (T_{(n)}, X_n)\}]$ em lugar de $a_t^{(i)}(t, k, T_{(1)}, X_1; \dots; T_{(n)}, X_n)$. Definimos a historia do processo

$$H_t = \{(T_{(k)}, X_k) : T_{(k)} < t\}$$

e assim escrevemos $A_i(t) = a_t(i; H_t)$.

Suponhamos que o conjunto de funções $a_t(i; H)$ satisfaz a condição A:

$$a_t[i; H \cup (s, j)] = a_t(i; H), t \leq s.$$

Definição A.2.4 *Seja H , um conjunto de historias. Suponha que a família de funções contínuas à direita, $a_t(i; H)$, com $1 \leq i \leq n$, satisfaz a condição A. Então $a_t(i; H)$ é chamada família de compensadores do vetor $(T_1, \dots, T_n)$, se cada processo $a_t(i; H_t)$ é uma versão do compensador $A_i(t)$, com $1 \leq i \leq n$.*

Com a família de compensadores $\{a_t(i; H)\}$ fixa, definimos

$$S_i = a_{T_i}(i; H_{T_i}) = A_i(T_i)$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$. Denotamos por $\psi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+^n$:

$$\psi(T_1, \dots, T_n) = (S_1, \dots, S_n).$$

A função ψ é chamada função de risco total do vetor $(T_1, \dots, T_n)$. Esta função é 'bijetiva'. É possível expressar sua 'inversa' ψ^* em termos da família de compensadores do vetor $(T_1, \dots, T_n)$ (Ver Norros [16]).

Definição A.2.5 *Sejam H_1 e H_2 dois conjuntos de historias. Dizemos que H_1 é menor que H_2 , $H_1 \leq H_2$, se $(t, i) \in H_2$ implica que $(s, i) \in H_1$, para algum $s \leq t$.*

$H_1 \leq H_2$ significa que as falhas em H_1 ocorrem antes e são mais numerosas que as falhas em H_2 .

Definição A.2.6 *Seja $\{a_t(i; H)\}$ a família de compensadores do vetor $(T_1, \dots, T_n)$. Dizemos que a família $\{a_t(i; H)\}$ é suportiva se a seguinte condição é satisfeita: Se $H_1 \leq H_2$ e $i \notin H_1^+$ então $a_t(i; H_1) \geq a_t(i; H_2)$.*

O termo suportivo indica que os componentes suportam uns aos outros, no sentido que mais falhas e as mais recentes falhas aumentam o risco para o resto dos componentes que as poucas e posteriores falhas.

Proposição A.2.1 *Se o vetor $(T_1, \dots, T_n)$ tem uma família de compensadores suportiva, então a função ψ^* é crescente, isto é, se $x \leq y$ então $\psi^*(x) \leq \psi^*(y)$. (Aqui, $x \leq y$ denota o ordem parcial componente a componente em $\mathbb{R}_+^n$)*

Demonstração Ver Norros [16].

A.3 Filtragens associadas aos Processos Pontuais

Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ um espaço de probabilidade, e sejam $(T_n, n \geq 1)$ e $(Z_n, n \geq 1)$ duas sequência de variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathfrak{F})$. Os T_n tomam valores reais e os Z_n tomam valores em um espaço $(E, \mathcal{E})$. Além disso suponhamos que $T_n < \infty$ e $0 < T_n \leq T_{n+1}$. A sequência (T_n, Z_n) é chamada processo pontual com valores em E .

Associado ao processo pontual (T_n, Z_n) temos o processo de contagem

$$N_t(A) = \sum_{n \geq 1} 1(T_n \leq t) 1(Z_n \in A), A \in \mathcal{E}$$

e a filtragem

$$\mathfrak{F}_t = \sigma(N_s(A); 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{E}).$$

Teorema A.3.1 *Seja (T_n, Z_n) um processo pontual com valores em E definido em $(\Omega, \mathfrak{F})$. Então:*

- a) *Para todo $n \geq 1$, T_n é um $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada;*
- b) *A filtragem $\mathfrak{F}_t$ é contínua à direita, i.e $\mathfrak{F}_t = \bigcap_{h>0} \mathfrak{F}_{t+h}$;*
- c) *$\mathfrak{F}_{T_n} = \sigma(T_i, Z_i; 0 \leq i \leq n)$.*

Demonstração. Ver Bremaud [6].

Teorema A.3.2 *Seja S um $\mathfrak{F}_t$ -tempo de parada. Então*

$$\mathfrak{F}_S \cap \{T_i \leq S < T_{i+1}\} = \mathfrak{F}_{T_i} \cap \{T_i \leq S < T_{i+1}\}.$$

Demonstração. Ver Bremaud [6].

O teorema pode ser lido como segue: "Se conhecemos que $\{T_i \leq S < T_{i+1}\}$, então $\mathfrak{F}_S$ contem a mesma informação que $\mathfrak{F}_{T_i}$ "

Observação 7

Nosso caso de interesse nesta dissertação é quando $S = t$ e os tempos que definem o processo pontual são dadas pelas estatística de ordem. Assim o teorema diz

$$\mathfrak{F}_t \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\} = \mathfrak{F}_{T_{(i)}} \cap \{T_{(i)} \leq t < T_{(i+1)}\}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] E. Arjas, *Survival models and martingale dynamics*, Scandinavian Journal of Statistics **16** (1989), no. 3, 177–225. [10](#), [35](#)
- [2] E. Arjas and I. Norros, *Life lengths and association: a dynamic approach*, Mathematics of Operations Research **9** (1984), 151–158. [38](#)
- [3] A. Balkema and Laurens de Haan, *Residual life time at great age*, Annals of Probability **2** (1974), 792–804. [48](#)
- [4] R. Barlow and F. Proschan, *Statistical theory of reliability and life testing: Probability models*, fourth ed., Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974. [1](#)
- [5] R. Barlow and F. Proschan, *Importance of systems components and fault tree events*, Stochastic Process and Applications **3** (1975), 153–173. [29](#)
- [6] P. Bremaud, *Point processes and queues: Martingale dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1981. [56](#), [58](#), [61](#), [63](#), [68](#), [70](#)
- [7] V. Bueno, *Minimal repair redundancy for a coherent system in its signature representation*, American Journal of Operations Research **1** (2011), p. 8/2011.11002–15. [37](#)
- [8] V.C. Bueno, *Minimal standby redundancy allocation in a k-out-of-n: F system of dependent components*, European Journal of Operational Research **165** (2005), 786–793. [35](#)
- [9] V.C. Bueno and J. Menezes, *Pattern’s reliability importance under dependence condition and different information levels*, European Journal of Operational Research **177** (2007), 354–364. [29](#)
- [10] L. De Haan and A. Ferreira, *Extreme value theory: An introduction*, Springer series in operations research and Financial engineering, New York, 2010. [46](#)
- [11] M. Degen, *On multivariate generalized pareto distributions and high risk scenarios*, Diploma Thesis, ETH Zurich, <http://www.math.ethz.ch/degen/diploma-thesis.pdf> (2006). [48](#)
- [12] R.A. Fisher and L.H.C. Tippett, *Limiting forms of the frequency distribution of largest or smallest member of a sample*, Proc. Cambridge Philos. Soc **24** (1928), no. 1, 180–190. [45](#)
- [13] B.V. Gnedenko, *Sur la distribution limite du terme d’une série aléatoire*, Annals of Mathematics **44** (1943), 423–453. [45](#)
- [14] Mukerjee H. Kochar, S. and F. Samaniego, *The signature of a coherent system and its application to comparisons among systems*, Naval Research Logistic **46** (1999), 507–523. [iii](#), [v](#), [5](#)

- [15] Balakrishnan N. Navarro, J. and F.J. Samaniego, *Mixture representation of residual lifetimes of used systems*, Journal of Applied Probability **45** (2008), 1097–1112. [iii](#), [v](#), [5](#)
- [16] I. Norros, *A compensator representation of multivariate life length distributions, with applications*, Scandinavian Journal of Statistics **13** (1986), no. 2, 99–112. [38](#), [67](#), [69](#)
- [17] J. Pickands, *Statistical inference using extreme order statistics*, Annals of Statistics **3** (1975), 119–131. [48](#)
- [18] P. Protter, *Stochastic integration and differential equations-a new approach*, Springer-Verlag, New York, 1990. [58](#), [59](#), [62](#)
- [19] Balakrishnan N. Navarro J. Samaniego, F., *Dynamic signature and their use in comparing the reliability of a new and used systems*, Naval Research Logistic **56** (2009), 577–596. [5](#), [6](#), [8](#), [9](#)
- [20] F. Samaniego, *System signature and their applications in engineering reliability*, International Series in Operation Research and Management Science **110**. [iii](#), [v](#), [1](#), [2](#), [3](#)
- [21] F. Samaniego, *On the closure of ifr class under formation of coherent systems*, IEEE. transactions on reliability **R-34** (1985), 69–72. [1](#)
- [22] F.J. Samaniego, *On comparison of engineered systems of different sizes*, in Proceeding of the 12th Annual Army conference on Applied Statistics. Aberdeen Proving Ground, Army Research Laboratory. [5](#)
- [23] M. Shaked and A. Suarez-Llorens, *On the comparison of reliability experiments based on the convolution order.*, Journal of American Statistical Association **98** (2003), 693–702. [5](#)