Preservação das classes de distribuições não-paramétricas e desigualdades estocásticas entre os D-espectros de *networks* para seus respectivos tempos de vidas

Pedro Minoru Saito

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Vanderlei da Costa Bueno

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, fevereiro de 2019

Preservação das classes de distribuições não-paramétricas e desigualdades estocásticas entre os D-espectros de *networks* para seus respectivos tempos de vidas

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 22/02/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^{a}. Dr^{a}. Vanderlei da Costa Bueno - IME-USP
- Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa - EP-USP
- Prof. Dr. Cristian Favio Coletti - UFABC

Resumo

SAITO, P. M. **Preservação das classes de distribuições não-paramétricas e desigualdades estocásticas entre os D-espectros de *networks* para seus respectivos tempos de vidas**. 2018. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Este trabalho reporta sobre a avaliação da confiabilidade de *networks*, uma representação analítica para diversos sistemas de engenharia e de comunicação, cujas falhas de seus componentes (*links*) ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo. Concluiremos que, na comparação de dois *networks* com a mesma quantidade de *links*, as desigualdades estocásticas de seus D-espectros serão preservadas em seus tempos de vidas e a preservação das classes de distribuições do D-espectro para o tempo de vida de um *network* ocorrerá com restrições na função de risco do Processo de Poisson Não Homogêneo.

Palavras-chave: confiabilidade, *networks*, processos de Poisson não homogêneo, desigualdades estocásticas, classes de distribuições não-paramétricas.

Abstract

SOBRENOME, A. B. C. **Preservation of D-spectra nonparametric distribution classes and stochastic inequalites to respective networks lifetimes**. 2018. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

This work reports networks reliability evaluation, an analytic representation to several engineering and comunication systems, whose components (links) failures occur according to a Nonhomogeneous Poisson Process. We will conclude that, on comparison of two networks with same number of links, stochastic orders of their D-spectra will be preserved to their lifetimes and distribution classes preservation of network D-spectrum to its lifetime will occur with restrictions in hazard function of Nonhomogeneous Poisson Process.

Keywords: reliability, networks, nonhomogeneous Poisson processes, stochastic orders, nonparametric distributions classes.

Sumário

Resumo **i**

Abstract **iii**

Lista de Abreviaturas **vii**

Lista de Figuras **ix**

1 *Networks* **1**

2 Resultados de preservação das desigualdades estocásticas **5**

2.1 Falhas segundo um Processo de Contagem 5

2.2 Resultados de equivalências de D-espectros para os D-espectros condicionais de *networks* 7

2.3 Preservações das desigualdades estocásticas entre D-espectro e tempo de vida de *networks* 11

2.4 Resultados de Preservações entre D-espectros condicionais e tempos de vidas residuais 14

3 Resultados de preservação das classes de distribuições **19**

3.1 Resultados de preservação de classes de distribuições do D-espectro para o tempo de vida de um *network* 19

3.2 Resultados de equivalências das classes de distribuições do D-espectro para o D-espectro condicional de um *network* 34

3.3 Resultados de preservação do D-espectro condicional para o tempo de vida de um *network* 38

4 Conclusões **41**

4.1 Considerações Finais 41

4.2 Sugestões para Pesquisas Futuras 41

A Apêndice **43**

A.1 Sistemas coerentes e assinaturas 43

A.2 Desigualdades estocásticas 47

A.3 Classes de distribuições 50

A.4 Verificações para os Exemplos 53

Referências Bibliográficas **71**

Lista de Abreviaturas

DFR	Taxa de falha decrescente (*Decreasing Failure Rate*)
DFRA	Taxa de falha decrescente em média (*Decreasing Failure Rate in Average*)
HR	Taxa de falha (*Hazard Rate*)
i.i.d.	Independentes e identicamente distribuídos
IFR	Taxa de falha crescente (*Increasing Failure Rate*)
IFRA	Taxa de falha crescente em média (*Increasing Failure Rate in Average*)
LR	Razão de verossimilhanças (*Likelihood Ratio*)
NBU	Novo melhor do que usado (*New better than used*)
NBUE	Novo melhor do que usado em média (*New better than used in expectation*)
NWU	Novo pior do que usado (*New worse than used*)
NWUE	Novo pior do que usado em média (*New worse than used in expectation*)
PPH	Processo de Poisson Homogêneo
PPNH	Processo de Poisson Não Homogêneo

Lista de Figuras

1.1 Figura 1.1. *Network* com 4 links, 4 nós e 3 terminais 2

A.1 Figura A.1.1. Sistema tipo série-paralelo com 3 componentes 45

Capítulo 1

Networks

Um *network* é uma coleção de nós e *links*, na qual alguns nós são chamados terminais. Representa uma variedade de sistemas da vida real na engenharia, indústria e comunicação. Exemplos de nós são: intersecções rodoviárias, estações de telecomunicações, servidores e computadores e exemplos de *links* são: rodovias, fibras de telecomunicações, cabos e canais sem fio.

De acordo com a literatura existente, um *network* pode ser modelado por uma tripla **N**=(V,E,T), na qual, V é o conjunto dos nós com cardinalidade |V| = m, E é o conjunto dos *links* com cardinalidade |E| = n, e T $\subseteq$ V é o conjunto dos terminais. Nesta dissertação, assumimos que os nós são determinísticos e que os *links* são aleatórios, sujeitos a falhas segundo um mecanismo estocástico. A falha de um *link* significa que este é removido e pode resultar na troca de estado do *network*. Quando todos os terminais do *network* estão conectados entre si, o *network* é denominado **T-conectado**.

Uma abordagem clássica do *network* é sua interpretação como um sistema coerente e, como tal, interpretamos seus *links* como componentes sujeitos a falhas estocásticas. Neste trabalho, o *network* e *links* têm dois estados: o estado de funcionamento (1) e o estado de falha (0).

Para analisar a confiabilidade de um *network* com n *links* os quais possuem tempos de vidas $T_1, T_2, ..., T_n$ independentes e identicamente distribuídos, com função de distribuição contínua G e tempo de vida T, um conceito útil e importante é seu espectro de destruição (**D-espectro**), que depende de sua estrutura. Para entender o conceito do D-espectro primeiramente definimos uma **âncora**.

Definição 1.1. (**Zarezadeh** *et al.*, **2013**) Considere um *network* com n *links*. Seja $\pi = (e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_n})$ uma permutação dos números dos *links* do *network*. Inicialmente suponha que todos os *links* da permutação π estejam funcionando, em seguida percorre-se toda a permutação π da esquerda para a direita e considere a falha de cada um dos *links* um após o outro. Tome e_{i_r}, r=1,2,...,n, como o primeiro elemento quando *network* muda seu estado para falha. O número de falhas sequenciais de *links* necessárias para a falha do *network*, denotado por $r(\pi)$, é denominado **âncora** de π, ou seja, $r(\pi) = r$.

Como os tempos de vida dos *links* são independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição contínua G, temos que cada permutação π tem probabilidade $P(\pi) = \frac{1}{n!}$. Se n_r é a quantidade de casos com r falhas, para essa hipótese, com r=1,...,n:

$$P(r(\pi) = r) = \frac{n_r}{n!}. \tag{1.1}$$

Com tais considerações, apresentamos a definição do D-espectro.

Definição 1.2. - ver Definição 1.1 de Zarezadeh *et al.* (2013) Considere um *network* com tempo de vida T e n *links*, com tempos de vida $T_1, ...T_n$, independentes e identicamente distribuídos e com função de distribuição contínua G. Seja π uma das permutações das falhas de seus *links* e r(π) sua âncora. O D-espectro do *network* é definido pelo vetor $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$, onde

$$f_i = P(T = T_{(i)}) = P(r(\pi) = i) = \frac{n_i}{n!},$$

e n_i é o número de permutações que causam a falha do *network* na i-ésima falha dos *links*, i=1,2,...,n, que constitui uma função discreta de probabilidade.

O D-espectro acumulado (Zarezadeh e Asadi, 2013) é sua função de distribuição definida por

$$F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k. \tag{1.2}$$

Esta medida é a função de distribuição do número de falhas dos *links* necessárias para causar a falha do *network*.

E sua função de sobrevivência (Zarezadeh e Asadi, 2013) é

$$\bar{F}_i = \sum_{k=i+1}^{n} f_k, \tag{1.3}$$

que é a probabilidade do *network* sobreviver a uma determinada quantidade de falhas de seus *links*.

Exemplo 1.1. (ver Exemplo 2.1 de Zarezadeh *et al.* (2013)) Considere um *network* com 4 *links*, 4 nós e 3 terminais, conforme a Figura 1.1. Assuma que todos os links estão sujeitos a falhas. O *network* funciona se e só se todos os terminais estiverem conectados um ao outro. Suponha que cada permutação dos links tenha a mesma probabilidade de ocorrência.

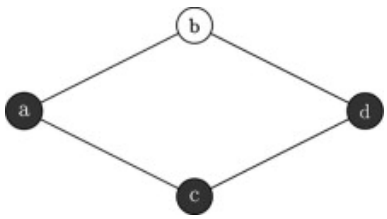

Figura 1.1: *Figura 1.1. Network com 4 links, 4 nós e 3 terminais*

Para o cálculo do D-espectro deste *network*, utilizamos a Definição 1.2 deste trabalho. Para resolver este caso disponibilizamos de um total de 4! permutações dos *links*, isto é, 24 permutações. Se avaliarmos o *network* desligando um *link* por vez, percebemos que os nós continuam conectados um ao outro, mesmo indiretamente, isto é, não estando próximos entre si. Portanto, a falha de um *link* não é suficiente para causar a falha do *network*. Assim, $f_1 = 0$.

Para que o *network* interrompa seu funcionamento com três falhas de seus *links* é suficiente que ocorra uma das seguintes desconexões sucessivas entre os *links*: $\{ab, bd, ac\}, \{ab, bd, cd\}$, $\{bd, ab, ac\}, \{bd, ab, cd\}$. Portanto: $f_3 = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

São necessárias no máximo três falhas dos *links* para interromper o funcionamento do *network*. Portanto: $f_4 = 0$.

Como o D-espectro é uma distribuição de probabilidade, temos:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \iff 0 + f_2 + \frac{1}{6} + 0 = 1 \iff f_2 = \frac{5}{6}.$$

O D-espectro do *network* é $\mathbf{f} = (0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$. Pela representação (1.3), a função de sobrevivência do D-espectro é $\bar{\mathbf{F}} = (1, 1, \frac{1}{6}, 0)$. Conforme a relação (1.2) a função de distribuição acumulada vale: $\mathbf{F} = (0, \frac{5}{6}, 1, 1)$.

Vale mencionar que o D-espectro definido acima é idêntico ao vetor de assinaturas (Definição A.1.3), largamente utilizado no estudo de sistemas coerentes (Definição A.1.2).

Recentemente vários autores como Gertsbakh e Shpungin (2011), Samaniego *et al.* (2009), Balakrishnan e Asadi (2012), Boland *et al.* (2003) e outros analisam a confiabilidade do *network* baseada no conceito de assinaturas com a suposição de que os tempos de vidas dos *links* são independentes e identicamente distribuídos com função de distribuição contínua G.

Autores como Esary *et al.* (1973) e A-Hameed e Proschan (1973) analisam a confiabilidade de um dispositivo sujeito a choques em seus componentes, no entanto as caracterizações da confiabilidade deste dispositivo e da probabilidade de sobrevivência a choques são idênticas à confiabilidade de um *network* e à função de sobrevivência do D-espectro, respectivamente e úteis nas provas dos teoremas de preservações das classes de distribuições. No entanto, Esary *et al.* (1973) analisam a confiabilidade de um dispositivo com componentes sujeitos a choques que ocorrem segundo um Processo de Poisson Homogêneo e A-Hameed e Proschan (1973) o fazem quando se tem um Processo de Poisson Não Homogêneo.

No entanto, para definir o D-espectro é suficiente assumir que as ordenações das falhas dos *links* têm igual probabilidade. Desta forma o D-espectro de um *network* não depende das distribuição dos tempos de vidas de seus *links*, e sim de sua estrutura, que também é uma característica do conceito de assinaturas (Samaniego *et al.*, 2009).

Nesta dissertação nosso objetivo é interpretar um *network* como um sistema coerente, e através de seu D-espectro (assinaturas) calcular sua confiabilidade, estudar propriedades de preservação das desigualdades estocásticas entre D-espectros para os tempos de vidas de seus respectivos *networks*, e das classes de distribuições do D-espectro para o tempo de vidas do respectivo *network*. Estes últimos resultados não aparecem formalmente na literatura sobre a confiabilidade de *networks*.

Em particular, assumimos que as ordenações das falhas dos *links* são igualmente prováveis e que as falhas ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo (PPNH).

Neste caso é interessante notar que a confiabilidade de um *network* cujas falhas dos *links* ocorrem segundo um processo de contagem é representada por uma mistura das confiabilidades dos primeiros n *records* de uma sequência de variáveis aleatórias não-negativas, independentes e identicamente distribuídas (vide Arnold *et al.* (1998) e Gupta e Kirman (1988)). Essa representação é análoga à forma de mistura da confiabilidade de um sistema coerente com n componentes em termos das confiabilidades das estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho n, como nas assinaturas (Definição A.1.2).

Em resumo, considere um *network* cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo $\{N(t) : t > 0\}$, com média $\Lambda(t)$. Denote por S_k o instante da k-ésima falha

do processo, com k=0,1,2.... Sua confiabilidade no instante t > 0 é

$$\bar{G}_k(t) = P(S_k > t) = P(N(t) < k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-\Lambda(t)}.\Lambda(t)^i}{i!},$$

onde $\Lambda(t) = E[N(t)] = -ln(\bar{G}(t))$ é o número médio de ocorrências do processo, também denominado **função de risco** no instante t, e $\bar{G}(t)$ a confiabilidade do instante da primeira ocorrência.

Como em Arnold *et al.* (1998) e Gupta e Kirman (1988), a confiabilidade $\bar{G}_k(t)$ resulta naturalmente da confiabilidade dos *records* superiores como segue:

Considere uma sequência de variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, ...$ independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição contínua G, representando os tempos de vidas dos *links* do *network*.

Com base nestes tempos de vidas, define-se uma sequência de *records* $\{U(n), n = 1, 2, ...\}$, com:

$$U(1) = 1;$$

$$U(n+1) = min\{j : j > U(n), Y_j > Y_{U(n)}\}, n \geq 1.$$

Essa sequência de *records* está relacionada a uma nova ordenação de índices das falhas dos *links*. Definimos a sequência $\{R_k, k \geq 1\}$ com $R_k = Y_{U(k)}$, ou seja, a observação R_k ultrapassa as observações anteriores. Se g é a função densidade de probabilidade da função de distribuição G, a função densidade de probabilidade de R_k é

$$g_k(t) = g(t)\frac{\Lambda(t)^{k-1}}{(k-1)!}, \text{ t} > 0, \text{ k=1,2,...}$$

Isso mostra que em um PPNH com função de risco $\Lambda(t) = -ln\bar{G}(t)$, R_k e S_k têm a mesma distribuição. Ou seja, um Processo de Poisson Não Homogêneo é um processo de contagem não explosivo onde a sequência dos instantes de ocorrências são os *records* de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição G, isto é, o instante da k-ésima falha dos *links* de um *network*, com ocorrências segundo um PPNH, com $\Lambda(t) = -ln(\bar{G}(t))$, é R_k, para k=0,1,2,...n.

Nesta dissertação, no Capítulo 2, analisamos resultados de preservações das desigualdades estocásticas entre D-espectro para seus respectivos *networks*.

No Capítulo 3, estudamos resultados de preservação de classes de distribuições não paramétricas dos D-espectros para os respectivos *networks*.

As verificações algébricas dos exemplos deste trabalho encontram-se na Seção A.4.

Além da sistematização dos resultados apresentados, uma das principais contribuições do autor foi a de exemplificar ou contra-exemplificar os resultados provados.

Capítulo 2

Resultados de preservação das desigualdades estocásticas

Antes de analisarmos a preservação das desigualdades estocásticas contextualizaremos o processo de contagem para as falhas dos *links* de um *network*.

2.1 Falhas segundo um Processo de Contagem

Considere um *network* com tempo de vida T, n *links*, e D-espectro **f**, onde as ordenações das falhas são igualmente prováveis e ocorrem segundo um processo de contagem $\{N(t) : t > 0\}$. Seja S_k, k=1,2...n, o instante da k-ésima falha. Pelo Teorema 2.1 de Zarezadeh e Asadi (2013), a confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}(t) = P(T > t) = \sum_{k=1}^{n} P(T > t|T = S_k)P(T = S_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(S_k > t|T = S_k)P(T = S_k).$$

Como as ordenações das falhas dos componentes são igualmente prováveis, os eventos $\{T = S_k\}$ e $\{S_k > t\}$ são independentes (Lema A.1.1). Portanto

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k.P(S_k > t). \tag{2.1}$$

Alternativamente a confiabilidade de um *network* é

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k.P(S_k > t) = \sum_{k=1}^{n} f_k.P(N(t) < k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} f_k.P(N(t) = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(\sum_{k=j+1}^{n} f_k).P(N(t) = j) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{F}_j.P(N(t) = j) = E[\bar{F}_{N(t)}].$$

A função densidade do tempo de vida de um *network* no instante t > 0 é

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\bar{H}(t) = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} f_k.P(S_k > t) = \sum_{k=1}^{n} f_k.g_k(t),$$

onde $g_k(t)$ é a função densidade de probabilidade do instante da k-ésima falha, k=1,2,..., t > 0.

As representações da confiabilidade do *network* e da função densidade de probabilidade de seu tempo de vida são calculadas por Zarezadeh e Asadi (2013).

Para esta dissertação consideramos como processo de contagem das falhas dos *links* do *network* em estudo um Processo de Poisson Não Homogêneo.

Para analisar um *network* com tempo de vida T, na dinâmica do tempo, consideramos o tempo de vida residual $\{T - t|T > t\}$ e definimos o D-espectro condicional (Zarezadeh *et al.*, 2013).

Seja **f** o D-espectro de um *network* cujas falhas ocorrem segundo um processo de contagem $\{N(t) : t > 0\}$. Considere o instante da k-ésima falha S_k, k=1,...,n. A confiabilidade do tempo de vida residual no instante x > 0, dado que o *network* sobreviveu ao instante t > 0, é

$$P(T - t > x|T > t) = \frac{P(T > x + t)}{P(T > t)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k P(S_k > x + t)}{\sum_{j=1}^{n} f_j P(S_j > t)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k P(S_k > x + t, S_k > t)}{\sum_{j=1}^{n} f_j P(S_j > t)}.$$

Esta última igualdade ocorre pois o evento $\{S_k > t + x\}$ está contido no evento $\{S_k > t\}$. Além disso, pela definição de probabilidade condicional, $P(S_k > t + x, S_k > t) = P(S_k > t).P(S_k > t + x|S_k > t)$, portanto:

$$\begin{aligned} P(T - t > x|T > t) &= \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k P(S_k > t).P(S_k > t + x|S_k > t)}{\sum_{j=1}^{n} f_j P(S_j > t)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_k(t).P(S_k > t + x|S_k > t), \end{aligned}$$

onde

$$p_k(t) = \frac{f_k P(S_k > t)}{\sum_{j=1}^{n} f_j P(S_j > t)}. \tag{2.2}$$

Interpretamos que a confiabilidade residual de um *network* que sobreviveu ao instante t é uma mistura das confiabilidades residuais de seus *links* que sobreviveram ao instante t.

Definição 2.1.1 Ao vetor $\mathbf{p(t)} = (p_1(t), ..., p_n(t))$ denominamos D-espectro condicional no instante t.

Uma interpretação para o k-ésimo componente do D-espectro condicional é a probabilidade do sistema falhar na k-ésima falha de seus *links*, dado que o *network* sobreviveu ao instante t, pois

$$P(T = S_k|T > t) = \frac{P(T = S_k, T > t)}{P(T > t)} = \frac{P(T = S_k, S_k > t)}{P(T > t)} = \frac{P(T = S_k).P(R_k > t|T = S_k)}{P(T > t)}.$$

Como assumimos que as ordenações das falhas dos componentes são igualmente prováveis, podemos dizer que o evento $\{S_k > t\}$ é independente do evento $\{T = S_k\}$ (Lema A.1.1).

Consequentemente

$$P(T = S_k|T > t) = \frac{P(T = S_k).P(S_k > t)}{P(T > t)} = \frac{f_k.P(S_k > t)}{\sum_{j=1}^{n} f_j P(S_j > t)} = p_k(t).$$

O D-espectro condicional, a interpretação dos respectivos termos e a confiabilidade residual do respectivo *network* dado que este sobreviveu ao instante t são verificados em Zarezadeh *et al.* (2013).

As representações da confiabilidade e da função densidade de probabilidade associadas a um *network* e seu tempo de vida residual são suficientes para estudar a preservação das desigualdades estocásticas entre os D-espectros de *networks* para seus tempos de vidas e a preservação das classes de distribuições do D-espectro para o tempo de vida do respectivo *network*.

Frequentemente estamos interessados em comparar a confiabilidade de dois *networks* através de desigualdades estocásticas, tais como a ordenação estocástica (ST), a ordenação através das taxas de falhas (HR) e a ordenação por razão de verossimilhanças (LR) citadas em ordem de relevância crescente (Definições A.2.1, A.2.2, A.2.3).

2.2 Resultados de equivalências de D-espectros para os D-espectros condicionais de *networks*

Veremos um exemplo de resultados de equivalências de desigualdades estocásticas entre D-espectros e D-espectros condicionais de seus respectivos *networks*. Este exemplo é de autoria própria neste trabalho.

Exemplo 2.2.1 (vide Exemplo A.4.1) Sejam $\mathbf{f_1} = (0,5; 0,2; 0,3)$ e $\mathbf{f_2} = (0,4; 0,2; 0,4)$ os D-espectros de *networks*, cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda = 2$ falhas/hora. Queremos analisar a equivalência das desigualdades estocásticas entre seus D-espectros e os D-espectros condicionais. Temos:

k	f_{1k}	f_{2k}	$\bar{F}_{1k}$	$\bar{F}_{2k}$	$\frac{\bar{F}_{2k}}{\bar{F}_{1k}}$	$\frac{f_{2k}}{f_{1k}}$
0	0,5	0,4	1	1	1	0,8
1	0,2	0,2	0,5	0,6	1,2	1,0
2	0,3	0,4	0,3	0,4	1,3	1,3

Com base na tabela acima, concluímos que $\mathbf{f_1} \leq_{ST} \mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_1} \leq_{HR} \mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_1} \leq_{LR} \mathbf{f_2}$, respectivamente sob as Definições A.2.1, A.2.2 e A.2.3, respectivamente.

Mostraremos que as mesmas desigualdades valem para o D-espectro condicional:

$$P(T_1 > t) = e^{-2t}(1 + t + 0,6t^2);$$

$$P(T_2 > t) = e^{-2t}(1 + 1,2.t + 0,8t^2).$$

Observe que

$$P(R_1 > t) = e^{-2t};$$

$$P(R_2 > t) = e^{-2t}(1 + 2t);$$

$$P(R_3 > t) = e^{-2t}(1 + 2t + 2t^2).$$

O k-ésimo componente do D-espectro condicional do i-ésimo *network*, k=1,2,...n e i=1,2, dado $\{T_i > t\}$ é

$$p_{ik}(t) = \frac{f_{ik}.P(R_k > t)}{P(T_i > t)}.$$

Portanto:

$$p_{11}(t) = \frac{0,5}{(1+t+0,6t^2)};$$

$$p_{12}(t) = \frac{0,2+0,4t}{(1+t+0,6t^2)};$$

$$p_{13}(t) = \frac{0,3+0,6.t+0,6.t^2)}{(1+t+0,6t^2)};$$

$$p_{21}(t) = \frac{0,4}{(1+1,2.t+0,8.t^2)};$$

$$p_{22}(t) = \frac{0,2+0,4.t}{(1+1,2.t+0,8.t^2)};$$

$$p_{23}(t) = \frac{0,4+0,8.t+0,8.t^2}{(1+1,2.t+0,8.t^2)}.$$

Consequentemente

$$\sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t) = \frac{0,5+t+0,6.t^2}{(1+t+0,6t^2)};$$

$$\sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t) = \frac{0,3+0,6.t+0,6.t^2)}{(1+t+0,6t^2)};$$

$$\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t) = \frac{0,6+1,2.t+0,8.t^2}{(1+1,2.t+0,8.t^2)};$$

$$\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t) = \frac{0,4+0,8.t+0,8.t^2}{(1+1,2.t+0,8.t^2)},$$

onde $\sum_{j=k}^{n} p_{ij}(t)$ é a função de sobrevivência do D-espectro condicional do i-ésimo *network* a k falhas dos *links* no instante t, i=1,2, k=1,...n.

Verificamos a equivalência da ordenação estocástica para o D-espectro condicional, ou seja, mostraremos que

$$\sum_{j=k}^{3} p_{2j}(t) - \sum_{j=k}^{3} p_{1j}(t) \geq 0, \qquad k = 2,3.$$

Temos:

$$\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t) - \sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t) = \frac{0,1+0,2.t+0,16.t^2}{(1+t+0,6t^2).(1+1,2.t+0,8.t^2)} \geq 0;$$

$$\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t) - \sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t) = \frac{(0,1+0,04.t).(1+2t+2t^2)}{(1+t+0,6t^2).(1+1,2.t+0,8.t^2)} \geq 0.$$

Concluímos que $\mathbf{p_1(t)} \leq_{ST} \mathbf{p_2(t)}$, sob a Definição A.2.1.

Verificaremos a equivalência da desigualdade através das taxas de falhas. Temos:

$$\frac{\sum_{j=1}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=1}^{3} p_{1j}(t)} = 1;$$

$$\frac{\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t)} = 1 + \frac{0,1 + 0,2.t + 0,12.t^2}{0,5 + 1,6.t + 2,2.t^2 + 1,52.t^3 + 0,48.t^4};$$

$$\frac{\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t)} = 1 + \frac{1 + 0,4.t}{3 + 3,6.t + 2,4.t^2}.$$

Observe que

$$\frac{\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t)} - \frac{\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t)} = \frac{0,2 + 0,84.t + 1,52.t^2 + 1,488.t^3 + 0,8.t^4 + 0,192t^5}{(3 + 3,6.t + 2,4.t^2)(0,5 + 1,6.t + 2,2.t^2 + 1,52.t^3 + 0,48.t^4)} \geq 0.$$

Concluímos que $\frac{\sum_{j=1}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=1}^{3} p_{1j}(t)} \leq \frac{\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t)} \leq \frac{\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t)}$ e $\mathbf{p_1(t)} \leq_{HR} \mathbf{p_2(t)}$, sob a Definição A.2.2.

Avaliaremos a equivalência para as desigualdades através da razão de verossimilhanças. Temos:

$$\frac{p_{21}(t)}{p_{11}(t)} = \frac{0,8.(1 + t + 0,6.t^2)}{1 + 1,2.t + 0,8.t^2};$$

$$\frac{p_{22}(t)}{p_{12}(t)} = \frac{1 + t + 0,6.t^2}{1 + 1,2.t + 0,8.t^2};$$

$$\frac{p_{23}(t)}{p_{13}(t)} = \frac{4.(1 + t + 0,6.t^2)}{3.(1 + 1,2.t + 0,8.t^2)}.$$

Concluímos que $\frac{p_{21}(t)}{p_{11}(t)} \leq \frac{p_{22}(t)}{p_{12}(t)} \leq \frac{p_{23}(t)}{p_{13}(t)}$ e $\mathbf{p_1(t)} \leq_{\mathbf{LR}} \mathbf{p_2(t)}$, sob a Definição A.2.3.

O exemplo mostra a equivalência das desigualdades estocásticas entre D-espectros e D-espectros condicionais. Essa equivalência é sempre verdadeira como prova o Teorema 2.3.1. A prova deste teorema é relevante para verificarmos que a comparação estocástica entre os D-espectros de seus *networks* nos basta para compararmos estocasticamente os respectivos D-espectros condicionais na dinâmica do tempo. Este teorema e a sua prova são do próprio autor.

Teorema 2.2.1 Sejam $\mathbf{f_1}$ e $\mathbf{f_2}$ os D-espectros de dois *networks* com n *links*, cujas falhas ocorrem segundo um mesmo Processo de Poisson Não Homogêneo $\{N(t) : t > 0\}$, com função de risco $\Lambda(t), t > 0$. Sejam $\mathbf{p_1}$(t) e $\mathbf{p_2}$(t), t > 0, os respectivos D-espectros condicionais no instante t.

(a) $\mathbf{f_1} \leq_{ST} \mathbf{f_2} \iff \mathbf{p_1}(\mathrm{t}) \leq_{ST} \mathbf{p_2}(\mathrm{t}), \forall\, t > 0$;

(b) $\mathbf{f_1} \leq_{HR} \mathbf{f_2} \iff \mathbf{p_1}(\mathrm{t}) \leq_{HR} \mathbf{p_2}(\mathrm{t}), \forall\, t > 0$;

(c) $\mathbf{f_1} \leq_{LR} \mathbf{f_2} \iff \mathbf{p_1}(\mathrm{t}) \leq_{LR} \mathbf{p_2}(\mathrm{t}), \forall\, t > 0$.

Prova

O k-ésimo termo do D-espectro condicional $\mathbf{p}$(t), no instante t, é $p_k(t) = \frac{f_k.P(R_k>t)}{\sum_{j=1}^{n} f_j.P(R_j>t)}$.

Tomando-se o limite quando t tende a zero temos:

$$p_k(t) = \frac{f_k.P(R_k > t)}{\sum_{j=1}^{n} f_j.P(R_j > t)} \to_{t\to 0} \frac{f_k.P(R_k > 0)}{\sum_{j=1}^{n} f_j.P(R_j > 0)} = f_k.$$

Assim

$$\sum_{j=k+1}^{n} p_j(t) \to_{t\to 0} \sum_{j=k+1}^{n} f_j = \bar{F}_k.$$

Parte (a) Provemos a suficiência do resultado.

Por hipótese $\mathbf{p_1(t)} \leq_{ST} \mathbf{p_2(t)}$. Então, para todo j=1,2,...n

$$\sum_{k=j+1}^{n} [p_{2k}(t) - p_{1k}(t)] \geq 0 \iff \sum_{k=j+1}^{n} \frac{f_{2k}.P(R_k > t)}{P(T_2 > t)} - \frac{f_{1k}.P(R_k > t)}{P(T_1 > t)} \geq 0,$$

onde R_k é o instante da k-ésima falha dos *links* do *network*, k=1,...,n.

Tomando o limite quando t tende a zero, temos

$$\sum_{k=j+1}^{n} [f_{2k} - f_{1k}] \geq 0.$$

A última expressão vale pois $P(R_k > 0) = 1$ e $P(T_i > 0) = 1$, para i=1,2.

Conclui-se que, para todo j=1,2,...,n $\bar{F}_{2j} - \bar{F}_{1j} \geq 0$ e portanto, $\mathbf{f}_1 \leq_{ST} \mathbf{f}_2$, pela Definição A.2.1.

Para provar a condição necessária, basta supor, por absurdo, que $\mathbf{p}_1(t) \not\leq_{ST} \mathbf{p}_2(t)$, ou seja, existe j_0=1,2,...,n tal que

$$\sum_{k=j_0+1}^{n} [p_{2k}(t) - p_{1k}(t)] < 0.$$

Tomando-se o limite quando t tende a zero como anteriormente, resulta que, existe j_0=1,2,...,n tal que

$$\bar{F}_{2j_0} - \bar{F}_{1j_0} < 0,$$

isto é, $\mathbf{f_1} \not\leq_{ST} \mathbf{f_2}$, o que é uma contradição, pois, por hipótese, $\mathbf{f_1} \leq_{ST} \mathbf{f_2}$., sob a Definição A.2.1.

Parte (b) Provemos a condição suficiente.

Suponha $\mathbf{p_1(t)} \leq_{HR} \mathbf{p_2(t)}$. Então, para todo k=1,2,...,n, j=1,2,...n, $k \geq j$ e t $>$ 0 fixado,

$$\frac{\sum_{l=k+1}^{n} p_{2l}(t)}{\sum_{l=k+1}^{n} p_{1l}(t)} \geq \frac{\sum_{m=j+1}^{n} p_{2m}(t)}{\sum_{m=j+1}^{n} p_{1m}(t)},$$

equivalentementemente

$$\sum_{l=k+1}^{n} p_{2l}(t) \sum_{m=j+1}^{n} p_{1m}(t) - \sum_{l=k+1}^{n} p_{1l}(t) \sum_{m=j+1}^{n} p_{2m}(t) \geq 0.$$

Tomando o limite quando t tende a zero de forma análoga à parte (a) do teorema, temos:

$$\sum_{l=k+1}^{n} f_{2l} \sum_{m=j+1}^{n} f_{1m} - \sum_{l=k+1}^{n} f_{1l} \sum_{m=j+1}^{n} f_{2m} \geq 0.$$

Concluímos que, para todo j=1,2,...,n $\bar{F}_{2k}\bar{F}_{1j} - \bar{F}_{2j}.\bar{F}_{1k} \geq 0$ e, portanto, $\mathbf{f_1} \leq_{HR} \mathbf{f_2}$, pela Definição A.2.2.

Para provar a condição necessária da parte (b), suponha, por absurdo, que $\mathbf{p_1(t)} \not\leq_{HR} \mathbf{p_2(t)}$, ou seja, existem k_0=1,2,...,n e j_0=1,2,...,n tais que

$$\sum_{l=k_0+1}^{n} p_{2l}(t) \sum_{m=j_0+1}^{n} p_{1m}(t) - \sum_{l=k_0+1}^{n} p_{1l}(t) \sum_{m=j_0+1}^{n} p_{2m}(t) < 0.$$

Quando t tende a zero, concluímos que existem k_0=1,2,...,n e j_0=1,2,...,n, tais que

$$\bar{F}_{2k_0}\bar{F}_{1j_0} - \bar{F}_{2j_0}.\bar{F}_{1k_0} < 0,$$

e, portanto, $\mathbf{f_1} \not\leq_{HR} \mathbf{f_2}$, o que é uma contradição à hipótese $\mathbf{f_1} \leq_{HR} \mathbf{f_2}$, sob a Definição A.2.2.

Parte (c)

O resultado é suficiente pois, por hipótese, $\mathbf{p_1(t)} \leq_{LR} \mathbf{p_2(t)}$, isto é, para todos k,j=1,...,n, $k \geq j$ e t $>$ 0 fixado

$$p_{2k}(t).p_{1j}(t) - p_{2k}(t).p_{1j}(t) \geq 0.$$

Quando t tende a zero, para todo k, j = 1,...,n, temos

$$f_{2k}.f_{1j} - f_{2k}.f_{1j} \geq 0.$$

Portanto, $\mathbf{f}_1 \leq_{LR} \mathbf{f}_2$, pela Definição A.2.3.

Prova-se a recíproca supondo, por absurdo, que $\mathbf{p_1(t)} \not\leq_{LR} \mathbf{p_2(t)}$, ou seja, existem $k_0 = 1, 2, ..., n$ e $j_0 = 1, 2, ..., n$ tais que

$$p_{2k_0}(t).p_{1j_0}(t) - p_{2k_0}(t).p_{1j_0}(t) < 0.$$

Quando t tende a zero, concluímos que existem $k_0 = 1, 2, ..., n$ e $j_0 = 1, 2, ..., n$ tais que

$$f_{2k_0}.f_{1j_0} - f_{2k_0}.f_{1j_0} < 0,$$

e portanto $\mathbf{f}_1 \not\leq_{LR} \mathbf{f}_2$, contradizendo a hipótese $\mathbf{f}_1 \leq_{LR} \mathbf{f}_2$, pela Definição A.2.3.

Concluímos que se o D-espectro de um *network* é mais confiável, o D-espectro condicional permanece mais confiável na dinâmica do tempo. Contudo, se o D-espectro do *network* está mais propenso a falhas, o respectivo D-espectro condicional é mais propenso a falhas e, portanto, menos confiável no decorrer do tempo.

2.3 Preservações das desigualdades estocásticas entre D-espectro e tempo de vida de *networks*

Enunciamos um exemplo de preservação das desigualdades estocásticas entre os D-espectros de *networks* para seus respectivos tempos de vidas. Este exemplo foi produzido e verificado pelo próprio autor.

Exemplo 2.3.1 (verificado no Exemplo A.4.2) Considere dois *networks* com 3 *links* cada. Sejam $\mathbf{f}_1 = (0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}3)$ e $\mathbf{f}_2 = (0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}4)$ os D-espectros dos *networks*. Considere T_1 e T_2 seus respectivos tempos de vidas e que suas falhas ocorrem segundo um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda = 2$ falhas/hora.

Pretende-se estudar a preservação das desigualdades estocásticas para os *networks*.
Sabemos, pelo Exemplo 2.2.1, que $\mathbf{f_1} \leq_{ST} \mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_1} \leq_{HR} \mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_1} \leq_{LR} \mathbf{f_2}$.

Para analisar a preservação da ordenação estocástica dos *networks*, temos:

$$P(T_1 > t) = e^{-2t}(1 + t + 0,6.t^2);$$

$$P(T_2 > t) = e^{-2t}(1 + 1,2.t + 0,8.t^2).$$

Concluímos que $P(T_1 > t) \leq P(T_2 > t)$ e $T_1 \leq_{ST} T_2$, pela Definição A.2.1.

Para estudar a preservação da desigualdade por taxas de falhas dos *networks*, temos

$$\frac{P(T_2 > t)}{P(T_1 > t)} = \frac{1 + 1,2.t + 0,8.t^2}{1 + t + 0,6.t^2}.$$

Assim

$$\frac{d}{dt}\frac{P(T_2 > t)}{P(T_1 > t)} = \frac{0,2 + 0,4.t + 0,08.t^2}{(1 + t + 0,6.t^2)^2} \geq 0.$$

Concluímos que $\frac{P(T_2>t)}{P(T_1>t)}$ é crescente em t $>$ 0 e, portanto, $T_1 \leq_{HR} T_2$, pela Definição A.2.2.

Analisaremos a preservação da desigualdade através da razão de verossimilhanças. Seja

$$h_i(t) = \sum_{k=1}^{3} f_{ik}.g_k(t),$$

a função densidade de probabilidade do tempo de vida do i-ésimo *network* no instante t $>$ 0, i=1,2. $g_k(t)$ é a função densidade de probabilidade de R_k, k=1,2...n.
Assim

$$h_1(t) = e^{-2t}.(1 + 0,8.t + 1,2.t^2),$$

$$h_2(t) = e^{-2t}.(0,8 + 0,8.t + 1,6.t^2).$$

Portanto

$$\frac{h_2(t)}{h_1(t)} = \frac{0,8 + 0,8.t + 1,6.t^2}{1 + 0,8.t + 1,2.t^2};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{h_2(t)}{h_1(t)} = \frac{0,16 + 1,28.t + 0,32.t^2}{(1 + 0,8.t + 1,2.t^2)^2} \geq 0.$$

Concluímos que $\frac{h_2(t)}{h_1(t)}$ é crescente em t $>$ 0 e, portanto, $T_1 \leq_{LR} T_2$, pela Definição A.2.3.

Do exemplo concluímos que as desigualdades estocásticas dos D-espectros dos *networks* foram preservadas em seus tempos de vidas. Este fato é sempre verdadeiro e apresentamos o teorema de preservação das desigualdades estocásticas entre D-espectros para os respectivos *networks*. A

motivação para a prova deste teorema é verificar que a comparação estocástica entre os D-espectros de *networks* é suficiente para comparar os tempos de vidas dos *networks*.

Teorema 2.3.1. (vide Teorema 3.7 de Zarezadeh e Asadi (2013)) Sejam $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ D-espectros de dois *networks* cujas falhas ocorrem segundo um mesmo Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t)$, t $>$ 0. Sejam T_1 e T_2 os respectivos tempos de vida. Então:

(i) Se $\mathbf{f}_1 \leq_{ST} \mathbf{f}_2$, então $T_1 \leq_{ST} T_2$;

(ii) Se $\mathbf{f}_1 \leq_{HR} \mathbf{f}_2$, então $T_1 \leq_{HR} T_2$;

(iii) Se $\mathbf{f}_1 \leq_{LR} \mathbf{f}_2$, então $T_1 \leq_{LR} T_2$.

Prova

É desenvolvida pelo próprio autor da dissertação.

Para provar a parte (i) mostraremos que, para todo t $>$ 0 $\bar{H}_2(t) \geq \bar{H}_1(t)$, onde $\bar{H}_i(t) = E[\bar{F}_{i,N(t)}] = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_{ik}.\frac{e^{-\Lambda(t)}.\Lambda(t)^k}{k!}$ é a confiabilidade do i-ésimo *network* no instante t $>$ 0, i=1,2.

Como por hipótese $\mathbf{f}_1 \leq_{ST} \mathbf{f}_2$, isto é, $\bar{F}_{1k} \leq \bar{F}_{2k}, \forall k = 0, ...n-1$ (Definição A.2.1), temos

$$\bar{H}_2(t) = E[\bar{F}_{2,N(t)}] \geq E[\bar{F}_{1,N(t)}] = \bar{H}_1(t),$$

e, portanto, $T_1 \leq_{ST} T_2$ (Definição A.2.1).

Para provar a parte (ii) verificaremos que $\bar{H}_i(t)$ é TP_2 em i e t, com i=1,2 e t $>$ 0.

Por hipótese, $\mathbf{f}_1 \leq_{HR} \mathbf{f}_2$, isto é, sob a Definição A.2.2, se k $\geq$ j = 0,...,n-1

$$\bar{F}_{2k}.\bar{F}_{1j} - \bar{F}_{2j}.\bar{F}_{1k} \geq 0,$$

e se k $<$ j = 0,...,n-1

$$\bar{F}_{2k}.\bar{F}_{1j} - \bar{F}_{2j}.\bar{F}_{1k} < 0.$$

Do Exemplo A.2.2 sabemos que P(N(t)=k) é TP_2 em i=0,...,n-1 e t $>$ 0, ou seja, para $0 \leq s \leq t$, se k $\geq$ j

$$P(N(t) = k).P(N(s) = j) - P(N(t) = j).P(N(s) = k) \geq 0,$$

e se k $<$ j

$$P(N(t) = k).P(N(s) = j) - P(N(t) = j).P(N(s) = k) < 0.$$

Portanto

$$(\bar{F}_{2k}.\bar{F}_{1j} - \bar{F}_{2j}.\bar{F}_{1k}).(P(N(t) = k).P(N(s) = j) - P(N(t) = j).P(N(s) = k)) \geq 0.$$

A desigualdade resulta do produto de expressões de mesmo sinal. Assim

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(\bar{F}_{2k}.\bar{F}_{1j} - \bar{F}_{2j}.\bar{F}_{1k}).(P(N(t) = k).P(N(s) = j) - P(N(t) = j).P(N(s) = k)) \geq 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n-1}\bar{F}_{2k}.(P(N(t) = k)\sum_{j=0}^{n-1}\bar{F}_{1j}.P(N(s) = j) - \sum_{k=0}^{n-1}\bar{F}_{1k}).(P(N(s) = k).\sum_{j=0}^{n-1}\bar{F}_{2j}.P(N(t) = j)$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\bar{F}_{1k}.(P(N(t)=k)\sum_{j=0}^{n-1}\bar{F}_{2j}.P(N(s)=j)+\sum_{k=0}^{n-1}\bar{F}_{1k}).(P(N(s)=k).\sum_{j=0}^{n-1}\bar{F}_{2j}.P(N(t)=j)\geq 0,$$

e concluímos que

$$P(T_2>t).P(T_1>s)-P(T_2>s).P(T_1>t)\geq 0.$$

Então $P(T_i>t)$ é TP_2 em i=1,2 e t $>$ 0 e, portanto, $T_1\leq_{HR}T_2$, sob a Definição A.2.2.

Para provar a parte (iii) basta verificar que, para $0\leq s\leq t$

$$h_2(t).h_1(s)-h_2(s).h_1(t)\geq 0,$$

onde $h_i(t)=\sum_{k=1}^{n}f_{ik}.g_k(t)$ é a função densidade de probabilidade do tempo de vida i-ésimo *network* no instante t $>$ 0, i=1,2, e $g_k(t)$ é a função densidade de probabilidade de R_k, k=1,2,...n.

Para $0\leq s\leq t$, $0\leq j\leq k$, j,k=1,...,n, temos

$$\frac{g_k(t)}{g_j(t)}=\frac{\lambda(t).P(N(t)=k-1)}{\lambda(t).P(N(t)=j-1)}\geq\frac{P(N(s)=k-1)}{P(N(s)=j-1)}=\frac{\lambda(s).P(N(s)=k-1)}{\lambda(s).P(N(s)=j-1)}=\frac{g_k(s)}{g_j(s)},$$

onde $\lambda(t)$ é a taxa de falha do instante da primeira falha dos *links*. A desigualdade vale pois P(N(t)=k) é TP_2 em k=1,..,n e t $>$ 0. Portanto $g_k(t)$ é TP_2 em k=1,2,..,n e t $>$ 0.

A prova ocorre de maneira análoga à parte (ii) do teorema, substituindo-se $\bar{F}_{ik}$ e P(N(t)=k) por f_{ik} e g_k, respectivamente, i=1,2, k=1,2,...n.

Concluímos que $h_2(t).h_1(s)-h_2(s).h_1(t)\geq 0$ e, portanto, $T_1\leq_{LR}T_2$, sob a Definição A.2.3.

Observação 2.2.1 Em relação à preservação da desigualdade estocástica usual entre *networks*, concluímos que um *network* que tenha probabilidade maior de sobreviver uma quantidade de falhas de *links* seja mais confiável.

Entendemos que se um D-espectro é mais propenso a falhas, então seu respectivo *network* é menos confiável.

A desigualdade por razão de verossimilhanças implica as desigualdades estocásticas e as ordenações estocásticas (Teorema A.2.1).

No que segue provaremos resultados de equivalência de desigualdades estocásticas entre D-espectros e D-espectros condicionais de *networks* cujas falhas dos *links* ocorrem segun*do* um Processo de Poisson Não Homogêneo.

Analisaremos a preservação das desigualdades estocásticas entre os D-espectros condicionais e os tempos de vida residuais de dois *networks*.

2.4 Resultados de Preservações entre D-espectros condicionais e tempos de vidas residuais

Veremos um exemplo da preservação das desigualdades estocásticas de D-espectros condicionais para tempos de vidas residuais de *networks*. Este exemplo é produção do autor deste trabalho.

Exemplo 2.4.1 (ver Exemplo A.4.3.) Considere dois *networks* com D-espectros $\mathbf{f}_1$ = (0,4; 0,4; 0,2) e $\mathbf{f}_2$ = (0,2; 0,4; 0,4) e $\mathbf{p}_1(t)$ e $\mathbf{p}_2(t)$ os respectivos D-espectros condicionais no instante t

> 0. Sejam T_1 e T_2 seus tempos de vidas e $\{T_1 - t|T_1 > t\}$ e $\{T_2 - t|T_2 > t\}$ os respectivos tempos de vidas residuais no instante t. Suponha que as falhas dos *links* dos *networks* ocorrem segundo um mesmo Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda = 1$ falha/hora.

A confiabilidade do i-ésimo *network* é

$$P(T_i > t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k),$$

onde $\bar{F}_{ik}$ é a função de sobrevivência do D-espectro do i-ésimo *network* a k falhas de seus *links*, i=1,2, k=0,1,2...n-1 (Zarezadeh e Asadi, 2013).

Temos: $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{21} = 1$, $\bar{F}_{12} = 0,6$, $\bar{F}_{22} = 0,8$, $\bar{F}_{13} = 0,2$, $\bar{F}_{23} = 0,4$.

O k-ésimo componente do D-espectro condicional do i-ésimo *network* no instante t é

$$p_{ik}(t) = \frac{f_{ik}.P(R_k > t)}{P(T_i > t)},$$

onde R_k é o instante da k-ésima falha dos *links* (ver Definição 2.1.1).

Assim

$$P(R_1 > t) = e^{-t};$$

$$P(R_2 > t) = e^{-t}(1 + t);$$

$$P(R_3 > t) = e^{-t}(1 + t + \frac{t^2}{2}).$$

E

$$P(T_1 > t) = e^{-t}(1 + 0,6t + 0,1t^2);$$

$$P(T_2 > t) = e^{-t}(1 + 0,8t + 0,2t^2).$$

As funções densidades de probabilidade dos tempos de vidas dos *networks* são (ver Zarezadeh e Asadi (2013))

$$h_1(t) = 0,2.e^{-t}.(2 + t)^2;$$

$$h_2(t) = 0,2.e^{-t}.(1 + t)^2.$$

Verificaremos que $\mathbf{p_1(t)} \leq_{LR} \mathbf{p_2(t)}$, isto é, $\frac{p_{2k}(t)}{p_{1k}(t)}$ é crescente em k (Definição A.2.3). Temos:

$$p_{11}(t) = \frac{0,4}{1 + 0,6t + 0,1t^2};$$

$$p_{12}(t) = \frac{(0,4 + 0,4t)}{(1 + 0,6t + 0,1t^2)};$$

$$p_{13}(t) = \frac{0,2 + 0,2t + 0,1.t^2}{1 + 0,6t + 0,1t^2};$$

$$p_{21}(t) = \frac{0,2}{1 + 0,8t + 0,2t^2};$$

$$p_{22}(t) = \frac{(0,4+0,4t)}{(1+0,8t+0,2t^2)};$$

$$p_{23}(t) = \frac{0,4+0,4t+0,2.t^2}{1+0,8t+0,2t^2}.$$

Portanto

$$\frac{p_{21}(t)}{p_{11}(t)} = \frac{1}{2}.(\frac{1+0,6t+0,1t^2}{1+0,8t+0,2t^2});$$

$$\frac{p_{22}(t)}{p_{12}(t)} = 1.(\frac{1+0,6t+0,1t^2}{1+0,8t+0,2t^2});$$

$$\frac{p_{23}(t)}{p_{13}(t)} = 2.(\frac{1+0,6t+0,1t^2}{1+0,8t+0,2t^2}).$$

Concluímos que $\frac{p_{21}(t)}{p_{11}(t)} \leq \frac{p_{22}(t)}{p_{12}(t)} \leq \frac{p_{23}(t)}{p_{13}(t)}$ e $\mathbf{p_1(t)} \leq_{LR} \mathbf{p_2(t)}$.
Pelo Teorema A.2.1 isto implica $\mathbf{p_1(t)} \leq_{HR} \mathbf{p_2(t)}$, consequentemente $\mathbf{p_1(t)} \leq_{ST} \mathbf{p_2(t)}$.

A função densidade do tempo de vida residual do i-ésimo *network* em x, dado $\{T_i > t\}$ é

$$h_i(x|t) = \frac{h_i(x+t)}{P(T_i > t)}.$$

Verificaremos que $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{LR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$, isto é $\frac{h_2(x|t)}{h_1(x|t)}$ é crescente em x (Definição A.2.3).

Observe que

$$\frac{h_2(x|t)}{h_1(x|t)} = \frac{\frac{h_2(x+t)}{P(T_2>t)}}{\frac{h_1(x+t)}{P(T_1>t)}} = \frac{P(T_1>t)}{P(T_2>t)}\frac{h_2(t+x)}{h_1(t+x)}.$$

Como $\frac{P(T_1>t)}{P(T_2>t)}$ não depende de x e é positivo, basta verificar que $\frac{h_2(t+x)}{h_1(t+x)}$ é crescente em x.
Portanto

$$\frac{d}{dx}\frac{h_2(t+x)}{h_1(t+x)} = \frac{2(1+t+x)}{(2+t+x)^3} \geq 0.$$

Concluímos que $\frac{h_2(x|t)}{h_1(x|t)}$ é crescente em x e $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{LR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$. Pelo Teorema A.2.1, isto implica $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{HR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$ e consequentemente $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{ST} \{T_2 - t|T_2 > t\}$.

Enunciaremos um lema que auxiliará na prova da preservação de desigualdades estocásticas entre os D-espectros condicionais e os tempos de vida residuais de *networks*. O lema é desenvolvido e provado pelo próprio autor.

Lema 2.4.1 Seja R_k o instante da k-ésima falha dos *links* de um *network*, que ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t), t > 0$. Seja $g_k(t)$ a respectiva função densidade de probabilidade no instante t $>$ 0, k=1,2,...n. Então

(i) $R_k \leq_{LR} R_{k+1}$, k=1,2,...,n;
(ii) $\{R_k - t|R_k > t\} \leq_{LR} \{R_{k+1} - t|R_{k+1} > t\}$, k=1,2,...,n.

Prova

Para provar a parte (i), se $0 \leq s \leq t$, temos que

$$\frac{g_{k+1}(t)}{g_k(t)} = \frac{\lambda(t).\frac{e^{-\Lambda(t)}.(\Lambda(t))^k}{(k)!}}{\frac{\lambda(t).e^{-\Lambda(t)}.(\Lambda(t))^{k-1}}{(k-1)!}} = \frac{\Lambda(t)}{k},$$

onde $\lambda(t)$ é a taxa de falha do instante da primeira ocorrência do processo e $\lambda(t) = \frac{d\Lambda(t)}{dt}$

Como $\Lambda(t)$ é crescente em t, $\frac{g_{k+1}(t)}{g_k(t)}$ é crescente em t $>$ 0 e, portanto, $R_k \leq_{LR} R_{k+1}$ (ver Definição A.2.3).

Para provar a parte (ii), seja $g_k(x|t)$ a função densidade de probabilidade de $\{R_k - t|R_k > t\}$, em x $>$ 0, para t $>$ 0 fixado e k=1,...n.

Queremos verificar que $\frac{g_{k+1}(x|t)}{g_k(x|t)}$ é crescente em x $>$ 0, para t $>$ 0 fixado. Temos:

$$g_k(x|t) = -\frac{d}{dx}P(R_k > t + x|R_k > t) = -\frac{d}{dx}\frac{P(R_k > t + x)}{P(R_k > t)} = \frac{g_k(t + x)}{P(R_k > t)},$$

e

$$\frac{g_{k+1}(x|t)}{g_k(x|t)} = \frac{\frac{g_{k+1}(t+x)}{P(R_{k+1}>t)}}{\frac{g_k(t+x)}{P(R_k>t)}} = \frac{P(R_k > t)}{P(R_{k+1} > t)}.\frac{g_{k+1}(x + t)}{g_k(x + t)}.$$

Como $\frac{P(R_k>t)}{P(R_{k+1}>t)} \geq 0$ e $\frac{g_{k+1}(x+t)}{g_k(x+t)}$ é crescente em x $>$ 0, concluímos que $\frac{g_{k+1}(x|t)}{g_k(x|t)}$ também o é e, portanto, $\{R_k - t|R_k > t\} \leq_{LR} \{R_{k+1} - t|R_{k+1} > t\}$ (ver Definição A.2.3).

Interessa-nos verificar que a comparação estocástica entre D-espectros condicionais é suficiente para esta comparação entre os respectivos *networks* na dinâmica do tempo. Tal fato é verdadeiro e é provado no teorema de preservação de desiguades estocásticas entre D-espectros condicionais de seus *networks* para seus respectivos tempos de vidas residuais.

Teorema 2.4.1 (ver Teorema 2.6 de Zarezadeh *et al.* (2013)) Sejam T_1 e T_2 os tempos de vida de dois *networks* com n componentes cada, cujas falhas ocorrem segundo um mesmo Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t)$, t $>$ 0. Sejam $\mathbf{f_1}$ e $\mathbf{f_2}$ seus D-espectros e $\mathbf{p_1(t)}$ e $\mathbf{p_2(t)}$ os respectivos D-espectros condicionais no instante t $>$ 0.

(i) Se $\mathbf{p_1(t)} \leq_{\mathbf{ST}} \mathbf{p_2(t)}$, então $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{ST} \{T_2 - t|T_2 > t\}$;
(ii) Se $\mathbf{p_1(t)} \leq_{\mathbf{HR}} \mathbf{p_2(t)}$, então $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{HR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$;
(iii) Se $\mathbf{p_1(t)} \leq_{\mathbf{LR}} \mathbf{p_2(t)}$, então $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{LR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$.

Prova

(i) É suficiente verificar que, para todo x $>$ 0, $P(T_2 - t > x|T_2 > t) \geq P(T_1 - t > x|T_1 > t)$

Observe que, pelo Lema 2.4.1, $\{R_k - t|R_k > t\} \leq_{LR} \{R_{k+1} - t|R_{k+1} > t\}$, consequentemente $\{R_k - t|R_k > t\} \leq_{HR} \{R_{k+1} - t|R_{k+1} > t\}$, o que implica, $\{R_k - t|R_k > t\} \leq_{ST} \{R_{k+1} - t|R_{k+1} > t\}$, usando o Teorema A.2.1.

Assim

$$P(T_2 - t > x|T_2 > t) = \sum_{k=1}^{n} p_{2k}(t).P(R_k > t + x|R_k > t)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} p_{1k}(t).P(R_k > t + x|R_k > t) = P(T_2 - t > x|T_2 > t).$$

A desigualdade é válida, pois, por hipótese, $\mathbf{p_1(t)} \leq_{ST} \mathbf{p_2(t)}$, t $>$ 0, e $\{R_k - t|R_k > t\} \leq_{ST} \{R_{k+1} - t|R_{k+1} > t\}$, k=1,2...n.

Portanto, usando o Teorema A.2.2 (a) e a Definição A.2.1, $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{ST} \{T_2 - t|T_2 > t\}$.

(ii) Verificaremos que $P(T_i > t + x|T_i > t)$ é TP_2 em i=1,2 e x $>$ 0, para t $>$ 0 fixado.

Sabemos que $\{R_k - t|R_k > t\} \leq_{LR} \{R_{k+1} - t|R_{k+1} > t\}$. Pelo Teorema A.2.1, temos $\{R_k - t|R_k > t\} \leq_{HR} \{R_{k+1} - t|R_{k+1} > t\}$.

Como $\mathbf{p_1(t)} \leq_{HR} \mathbf{p_2(t)}$ por hipótese, pelo Teorema A.2.2 (b) e a Definição A.2.2, concluímos que $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{HR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$.

(iii) Considere $h_i(x|t)$ a função densidade de probabilidade de $\{T_i - t|T_i > t\}$ para x $>$ 0 e t $>$ 0 fixado, tal que $h_i(x|t) = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}.g_k(x|t)$.

Basta verificar que $h_i(x|t)$ é TP_2 em i=1,2 e x $>$ 0, para t $>$ 0 fixado.

Usando o Lema 2.4.1 $\{R_k - t|R_k > t\} \leq_{LR} \{R_{k+1} - t|R_{k+1} > t\}$.

Como $\mathbf{p_1(t)} \leq_{LR} \mathbf{p_2(t)}$ por hipótese, pelo Teorema A.2.2 (c) e a Definição A.2.3, concluímos que $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{LR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$.

Concluímos que um *network* com D-espectro condicional mais confiável permanece mais confiável na dinâmica do tempo. Contudo se o respectivo D-espectro condicional é mais propenso a falhas, então o *network* também o é com o decorrer do tempo e, portanto, menos confiável (Teorema A.2.1).

No próximo capítulo, analisaremos a preservação das classes de distribuições para os *networks* em estudo.

Capítulo 3

Resultados de preservação das classes de distribuições

Um dos interesses do estudo de classes de distribuições úteis na Teoria da Confiabilidade é sua aplicação em testes de vida, políticas de manutenção, políticas de garantias, etc. Neste sentido torna-se importante considerar tais conceitos para o D-espectro do *network* e analisar em que condições as propriedades são preservadas para seu tempo de vida. Parece-nos que um estudo sistemático de tais procedimentos não aparece na literatura de *networks*.

Neste capítulo estudaremos resultados de preservação de diversas classes de distribuições do D-espectro de um *network* para seu respectivo tempo de vida.

3.1 Resultados de preservação de classes de distribuições do D-espectro para o tempo de vida de um *network*

Uma classe de distribuições importante é a das distribuições com taxa de falha crescente (IFR), em que a idade é adversa, no sentido de que o tempo de vida residual decresce estocasticamente no tempo. Se a idade do objeto é benéfica, de forma que a probabilidade de sobrevivência condicional é crescente em função da idade tem taxa de falha decrescente (DFR). Em termos do D-espectro definimos tais classes de distribuições.

Definição 3.1.1 (Barlow e Proschan, 1975) Considere um *network* com D-espectro **f**. Dizemos que o D-espectro ou sua distribuição tem taxa de falha crescente (decrescente) - IFR (DFR) se, para m=1,2...n, fixado $\frac{\bar{F}_{k+m-1}}{\bar{F}_{k-1}}$ é decrescente (crescente) em k=1,2...n.

Equivalentemente, o D-espectro **f** é IFR (DFR) se $\frac{f_k}{\bar{F}_{k-1}}$ é crescente (decrescente) em k=1,2...n.

Exemplo 3.1.1 (vide Exemplo A.4.4) Seja **f** = (0,5; 0,2; 0,3) o D-espectro de um *network*. Considere $\bar{F}$ um vetor com a função de sobrevivência do D-espectro, da forma
$\bar{F} = (\bar{F}_0, \bar{F}_1, \bar{F}_2) = (1; 0{,}5; 0{,}3)$.
Verificamos que

$$\frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} \leq \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} \iff \bar{F}_1^2 - \bar{F}_2.\bar{F}_0 = 0,5^2 - 1\ .\ 0,3 = -0,05 \leq 0$$

e, portanto, **f** é DFR.

Veremos um exemplo da preservação da classe IFR (DFR) do D-espectro para o respectivo *network*.

Exemplo 3.1.2 (ver Exemplo A.4.5) Considere um *network* com D-espectro $\mathbf{f}$ = (0,6; 0,1; 0,3). Seja $\Lambda(t) = 1 - e^{-t}$

Verificamos a classe de distribuições do D-espectro $\mathbf{f}$. Temos que

$$\frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} - \frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} = \frac{0,4}{1} - \frac{0,3}{0,4} = 0,4 - 0,75 = -0,35 \leq 0,$$

onde $\bar{F}_k$ é a função de sobrevivência do D-espectro a k falhas de seus *links*. Então, sob a Definição 3.1.1, $\mathbf{f}$ é DFR.

Verificamos a convexidade da função de risco $\Lambda(t)$

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = e^{-t};$$

$$\frac{d^2\Lambda(t)}{dt^2} = -e^{-t} < 0.$$

Então a função de risco é côncava.

A confiabilidade do *network* é

$$\bar{H}(t) = e^{-1}e^{-e^{-t}}.(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t}).$$

A função densidade de probabilidade de T é

$$h(t) = e^{-(1-e^{-t})}(0,85e^{-t} - 0,4e^{-2t} + 0,15e^{-3t}).$$

A taxa de falha do *network* é

$$r(t) = \frac{0,85e^{-t} - 0,4e^{-2t} + 0,15e^{-3t}}{1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t}}.$$

Verificamos que a taxa de falha é decrescente

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1,3175e^{-t} + 1,24e^{-2t} - 0,85e^{-3t} + 0,210e^{-4t} - 0,0225e^{-5t}}{(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t})^2} \leq 0.$$

A desigualdade é válida pois: $e^{-at} \leq 1, \forall a, t \geq 0$, e $e^{-at} \leq e^{-bt}, a \geq b \geq 0, \forall t \geq 0$.

Sob a Definição A.3.1 e a Observação A.3.1, concluímos que T é DFR.

Analisaremos a preservação da classe de distribuição IFR (DFR) do D-espectro para o tempo de vida de um *network* pelo seguinte teorema. A motivação para a prova deste teorema é constatar se o estudo da classe de distribuição IFR para o D-espectro de um *network* e a convexidade da função de risco do Processo de Poisson Não Homogêneo para as falhas de seus *links* são suficientes para avaliar tal classe para o respectivo *network*.

Teorema 3.1.1 Seja T o tempo de vida de um *network* com função de distribuição contínua e D-espectro $\mathbf{f}$, cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo

com função de risco $\Lambda(t) > 0$, t > 0. Seja $\lambda(t)$ a taxa de falha no instante da primeira falha. Se **f** é IFR (DFR), e $\Lambda(t)$, é convexa (côncava), então T é IFR (DFR).

Prova Provamos a preservação da classe de distribuições IFR.

Em primeiro lugar, considere um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda > 0$ (Teorema 3.1, parte (3.2) de Esary *et al.* (1973)). Neste caso, a confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}^*(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.P(N(t) = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.\frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!},$$

onde $\bar{F}_k = \sum_{j=k+1}^{n} f_j$ é a função de sobrevivência do D-espectro em k=1,2...,n.

Como **f** é IFR, pela Definição 3.1.1, temos

$$\frac{\bar{F}_{k+1}}{\bar{F}_k} \leq \frac{\bar{F}_k}{\bar{F}_{k-1}} \iff log\bar{F}_{k+1} - log\bar{F}_k \leq log\bar{F}_k - log\bar{F}_{k-1} \iff log\bar{F}_{k+1} + log\bar{F}_{k-1} \leq 2.log\bar{F}_k.$$

Então $\bar{F}_k$ é log-côncava em k=1,2...n.

Portanto, para $\xi > 0$ e $a > 0$ fixados, $\bar{F}_k - a.\xi^k$ possui no máximo duas trocas de sinais do tipo negativo-positivo-negativo. Observe que se $\bar{F}_k - a.\xi^k \leq (\geq) 0$, então $log\bar{F}_k \leq (\geq) loga + k.log\xi$, o que justifica a log-concavidade de $\bar{F}_k$.

Como P(N(t)=k) é TP_2 em k=0...,n-1 e t > 0 (Exemplo A.2.2), usando a propriedade da diminuição da variação (ver seção A.3 do Apêndice),

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{F}_k - a.\xi^k).\frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_k.\frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} a.\xi^k.\frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!} = \bar{H}(t) - a.\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda.t}\frac{(\xi.\lambda.t)^k}{k!}$$

$$= \bar{H}^*(t) - a.e^{-\lambda.t}.e^{\lambda.\xi.t} = \bar{H}^*(t) - a.e^{-(1-\xi).\lambda.t}$$

também possui no máximo duas trocas de sinais do tipo negativo-positivo-negativo em t > 0.

Considerando-se $\theta = (1 - \xi).\lambda < \lambda$, com $\xi \in (0, 1)$, a última expressão tem no máximo duas trocas de sinais do tipo negativo-positivo-negativo em relação a t > 0.

Como $\bar{H}^*(t) = e^{-\lambda.t} + \sum_{k=1}^{n-1} \bar{F}_k.\frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!}$ (pois $\bar{F}_0 = 1$), temos

$$\bar{H}^*(t) \geq e^{-\lambda.t} \geq e^{-\theta.t}, t > 0, \text{ para } \theta \geq \lambda.$$

Então

$$\bar{H}^*(t) \geq e^{-\theta.t}, \forall t > 0, \forall \theta > 0.$$

Concluímos que $\bar{H}^*(t) - e^{-\theta.t}$ tem no máximo duas trocas de sinais do tipo negativo-positivo-negativo em respeito a t > 0, portanto, $\bar{H}^*(t)$ é log-côncava em t > 0 e $\bar{H}^*(t)$ é IFR.

Considere agora a confiabilidade do *network* no instante t > 0 $\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.\frac{e^{-\Lambda(t)}.\Lambda(t)^k}{k!}$ e sua respectiva taxa de falha $r(t)$ (Teorema 3.1 (c) de A-Hameed e Proschan (1973)).

Observe que $\bar{H}(t)$ pode ser escrito como $\bar{H}(t) = \bar{H}^*(\Lambda(t))$, onde

$$\bar{H}^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.\frac{e^{-x}.x^k}{k!}$$

é a confiabilidade de um *network* cujas falhas dos *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Homogêneo com taxa 1, no instante x > 0, com taxa de falha $r^*(t)$.

Assim
$$\frac{d}{dt}log\bar{H}(t) = \frac{d}{dt}log\bar{H}^*(\Lambda(t)) = -\frac{h^*(\Lambda(t))}{\bar{H}^*(\Lambda(t))}.\lambda(t) = -r^*(\Lambda(t)).\lambda(t).$$

Então
$$\frac{d^2}{dt^2}log\bar{H}(t) = \frac{d^2}{dt^2}log\bar{H}^*(\Lambda(t)) = -\frac{d}{dt}r^*(\Lambda(t)).\lambda(t)$$

$$= -\frac{d}{dt}r^*(\Lambda(t)).\lambda^2(t) - r^*(\Lambda(t)).\frac{d}{dt}\lambda(t).$$

Como $\bar{H}^*(t)$ é IFR, então $\frac{d}{dt}r^*(\Lambda(t)) \geq 0$, e $\frac{d}{dt}r(t) = \frac{d}{dt}r^*(\Lambda(t)) \geq 0$, e

$$\frac{d^2}{dt^2}log\bar{H}(t) = -\frac{d}{dt}r^*(\Lambda(t)).\lambda^2(t) - r^*(\Lambda(t)).\frac{d}{dt}\lambda(t) \leq 0.$$

Sob a Definição A.3.1, concluímos que T é IFR.

Além da classe de distribuição do D-espectro do *network*, a convexidade (concavidade) da função de risco do Processo de Poisson Não Homogêneo é indispensável. Não é difícil notar que esta propriedade significa que o instante da primeira falha dos *links* tem taxa de falha crescente.

Observação 3.1 Como $\Lambda(t) = -log\bar{G}(t)$, onde $\bar{G}(t) = P(R_1 > t)$ e R_1 é o instante da primeira falha dos *links* do *network*, temos que $\Lambda(t)$ convexa, consequentemente $\bar{G}$ é log-côncava e R_1 tem taxa de falha crescente.

Esta observação nos motiva a compreender claramente a importância da convexidade da função de risco do Processo de Poisson Não Homogêneo para as falhas dos *links* de um *network*.

O exemplo que segue mostra-nos a classe de distribuição do tempo de vida do *network*, ao desconsiderarmos a convexidade da função de risco (este exemplo tem autoria própria).

Exemplo 3.1.3 (vide Exemplo A.4.6) Considere um *network* com D-espectro **f** = (0,5; 0,2; 0,3). Suponha que as falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo $\{N(t) : t > 0\}$ com função de risco $\Lambda(t) = e^t$.

Sabemos, pelo Exemplo 3.1.1, que **f** é DFR.

A confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}(t) = P(T > t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k) = e^{-e^t}.(1 + 0,5.e^t + 0,15.(e^t)^2).$$

Então
$$log\bar{H}(t) = -e^t + log(1 + 0,5.e^t + 0,15.(e^t)^2);$$

$$\frac{d}{dt}log\bar{H}(t) = \frac{-0,5.e^t - 0,2.e^{2t} - 0,15.e^{3t}}{1 + 0,5.e^t + 0,15.(e^{2t})};$$

$$\frac{d^2}{dt^2}log\bar{H}(t) = \frac{-0,5.e^t - 0,4.e^{2t} - 0,475.e^{3t} - 0,15.e^{4t} - 0,1125.e^{5t}}{(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})^2} \leq 0.$$

Logo, $\frac{d}{dt}log\bar{H}(t)$ é decrescente em t $>$ 0.

Observe que $\frac{d}{dt}\Lambda(t) = e^t \geq 0$ e, portanto, $\Lambda(t) = e^t$ é convexa.

Sob a Definição A.3.1, concluímos que T é IFR, sentido contrário à classe de distribuição do D-espectro **f**.

Pode-se pensar de maneira intuitiva que o tempo de vida de um *network* como função crescente dos tempos de vidas de seus *links*, tenha a propriedade IFR se seus *links* são IFR. Contudo, tal pensamento é falso. Ou seja, um *network* com *links* IFR nem sempre é IFR, isto é, a coleção de *networks* não é fechada em relação à classe IFR (ver Barlow e Proschan (1975)). Contudo, podemos definir a classe de distribuições IFRA, que, no contexto desta dissertação, é preservada na formação do *network*.

Definição 3.1.2 (Barlow e Proschan, 1975) Considere um *network* com D-espectro **f**. Dizemos que **f**, ou sua distribuição, tem taxa de falha crescente (decrescente) em média - IFRA (DFRA) se

$$-\frac{1}{k}.log(\bar{F}_k)$$

é crescente (decrescente) em k=1,2...,n, onde $\bar{F}_k = \sum_{j=k+1}^{n} f_j$.

Equivalentemente, o D-espectro **f** é IFRA (DFRA) se $\bar{F}_k^{\frac{1}{k}}$ é decrescente (crescente) em k=1,2...,n.

De maneira prática, o D-espectro de um *network* tem taxa de falha crescente em média quando à medida que aumenta a quantidade de falhas de seus *links* a propensão do *network* a falhas aumenta em média. Pode-se mostrar que se uma distribuição é IFR, então é IFRA (ver Apêndice).

Exemplo 3.1.4 (ver Exemplo A.4.7) Considere o *network* e seu D-espectro vistos no Exemplo 3.1.1.

Vamos avaliar a classe IFRA (DFRA) para o D-espectro.

Considere $\bar{F}^*$ um vetor tal que, para este exemplo

$\bar{F}^* = (\bar{F}_1^{\frac{1}{1}}, \bar{F}_2^{\frac{1}{2}}) = (0,5^{\frac{1}{1}}, 0,3^{\frac{1}{2}}) = (0{,}5;\ 0{,}55)$.

Como $\bar{F}_k^{\frac{1}{k}}$ é crescente em k=1,2, concluímos que **f** é DFRA.

Veremos um exemplo de preservação da classe IFRA.

Exemplo 3.1.5 (ver Exemplo A.4.8) Considere um *network* com D-espectro **f** = (0,5; 0,2; 0,3), e que as falhas de seus *links* ocorrem de acordo com um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t) = \sqrt{t}$.

Pelo Exemplo 3.1.4, sabemos que **f** é DFRA.

Verificamos se a função de risco é *star-shaped* (Definição A.3.5)

$$\frac{d}{dt}\frac{\Lambda(t)}{t} = -\frac{1}{2}.t^{-\frac{3}{2}} \leq 0$$

Portanto, $\frac{\Lambda(t)}{t}$ é decrescente, e $\Lambda(t)$ é *antistar-shaped* .

A confiabilidade do *network* é

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k) = e^{-\sqrt{t}}(1 + \sqrt{t} + \frac{t}{2}).$$

Temos que

$$\frac{log\bar{H}(t)}{t} = t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{t}log(1 + t^{\frac{1}{2}} + \frac{t}{2}).$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\frac{log\bar{H}(t)}{t} = \frac{1}{2}.t^{-\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{2}.t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}}{1 + t^{\frac{1}{2}} + \frac{t}{2}} \geq 0,$$

e $log\bar{H}(t)$ é *star-shaped*. Portanto T é DFRA (Definição A.3.2 e Observação A.3.2).

Enunciaremos o teorema de preservação da classe de distribuições IFRA (DFRA) do D-espectro de um *network* para seu tempo de vida. Observe que a definição da classe IFRA é equivalente a dizer que $-log\bar{H}(t)$ é *star-shaped* (Definição A.3.5), onde $\bar{H}(t)$ é a confiabilidade do *network* no instante t > 0. A motivação para enunciar e provar este teorema é verificar que o estudo da classe IFRA para o D-espectro e da propriedade *star-shaped* para a função de risco do Processo de Poisson Não Homogêneo para as falhas dos *links* nos basta para concluir que o *network* é IFRA.

Teorema 3.1.2 Seja T o tempo de vida de um *network* com função de distribuição contínua e D-espectro **f**, cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t)$. Se **f** é IFRA (DFRA) e $\Lambda(t)$ é *star-shaped* (respectivamente *antistar-shaped*) , então T é IFRA (DFRA).

Prova Provaremos a preservação da classe IFRA.

Primeiramente, considere um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda > 0$ (Teorema 3.1 parte (3.4) de Esary *et al.* (1973)). Neste caso, a confiabilidade do *network* no instante t > 0 é.

$$\bar{H}^*(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.\frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!}.$$

Por hipótese **f** é IFRA, isto é, $\bar{F}_k^{\frac{1}{k}}$é decrescente em k=0,...,n-1 (Definição 3.1.2.). Então, para $\xi \in (0,1)$ fixado, $\bar{F}_k^{\frac{1}{k}} - \xi$ tem no máximo uma troca de sinal, de positivo para negativo. Assim, $\bar{F}_k - \xi^k$ também possui no máximo uma troca de sinal de positivo para negativo em k.

Como P(N(t)=k) é TP_2 em t > 0 e k=0,1,2...,n-1, usando a propriedade de diminuição da variação (ver seção A.3 do Apêndice),

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{F}_k - \xi^k)e^{-\lambda.t}\frac{(\lambda.t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\bar{F}_k.e^{-\lambda.t}\frac{(\lambda.t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\xi^k e^{-\lambda.t}\frac{(\lambda.t)^k}{k!}$$

$$= \bar{H}^*(t) - \sum_{k=0}^{\infty}\xi^k e^{-\lambda.t}\frac{(\lambda.t)^k}{k!} = \bar{H}^*(t) - e^{-\lambda.t}.e^{+\lambda.\xi.t} = \bar{H}^*(t) - e^{-(1-\xi).\lambda.t}$$

tem no máximo uma troca de sinal de positivo para negativo.

Tome $\theta = (1 - \xi).\lambda < \lambda$. Então, $\bar{H}^*(t) - e^{-\theta.t}$ tem no máximo uma troca de sinal de positivo para negativo.

Se $\theta \geq \lambda$, então $e^{-\theta.t} \leq e^{-\lambda.t}$, t > 0.

Desde que

$$\bar{H}^*(t) = e^{-\lambda.t} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}_k.e^{-\lambda.t}\frac{(\lambda.t)^k}{k!} \geq e^{-\lambda.t},$$

Temos que $\bar{H}^*(t) \geq e^{-\theta.t}$, t $>$ 0

Concluímos que, para todo $\theta > 0$, $\bar{H}(t) - e^{-\theta.t}$ tem no máximo uma troca de sinal de positivo para negativo. Assim, pelo (Teorema A.3.2), $\bar{H}^*(t)^{\frac{1}{t}}$ é decrescente. Portanto, sob a Definição A.3.2, $\bar{H}^*(t)$ é IFRA.

Considerando $\lambda = 1$, representamos $\bar{H}(t)$ por $\bar{H}(t) = \bar{H}^*(\Lambda(t)), t > 0$ (Teorema 3.1 (d) de A-Hameed e Proschan (1973)), onde

$$\bar{H}^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.\frac{e^{-x}.x^k}{k!}.$$

Como **f** e $\bar{H}^*(t)$ é IFRA, $-\frac{1}{t}log\bar{H}^*(t)$ é crescente (Definição A.3.2) e $-log\bar{H}^*(t)$ é *star-shaped*.

Como $\bar{H}^*(t)$ é decrescente em t, então $-log\bar{H}^*(t)$ é crescente em t $>$ 0.

Assim, para $\alpha \in (0,1)$,

$$-log\bar{H}(\alpha.t) = -log\bar{H}^*(\Lambda(\alpha.t)) \leq -log\bar{H}^*(\alpha.\Lambda(t)) \leq -\alpha.log\bar{H}^*(\Lambda(t)) = -\alpha.log\bar{H}(t).$$

A primeira desigualdade é válida, pois $\Lambda(t)$ é *star-shaped* e $-log\bar{H}^*(t)$ é crescente em t $>$ 0. A segunda também o é, pois $-log\bar{H}^*(t)$ é *star-shaped*.

Como $-log\bar{H}(t)$ é *star-shaped*, T é IFRA (Definições A.3.2 e A.3.5).

Além da classe IFRA (DFRA) para o D-espectro, é imprescindível considerar a propriedade *star-shaped* (ou *antistar-shaped*) para a função de risco do Processo de Poisson Não Homogêneo para as falhas dos *links*. Dizer que a função de risco é *star-shaped* significa que o instante da primeira falha dos *links* tem taxa de falha crescente em média.

Observação 3.1.2 Se a função de risco $\Lambda(t) = -log\bar{G}(t)$ é *star-shaped*, então $\frac{-log\bar{G}(t)}{t}$ é crescente em t, onde $\bar{G}(t) = P(R_1 > t)$ portanto, sob a Definição A.3.2, $\bar{G}$ é IFRA e R_1 é IFRA.

Enunciamos um exemplo do que ocorre ao ignorarmos a propriedade para a função de risco (exemplo do próprio autor).

Exemplo 3.1.6 (ver Exemplo A.4.9) Considere um *network* com tempo de vida T e D-espectro **f** = (0,5; 0,2; 0,3). Considere que as falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t) = t^2$. Queremos analisar a preservação da classe IFRA (DFRA) para este *network*.

Pelo Exemplo 3.1.4 sabemos que o D-espectro **f** é DFRA.

A confiabilidade do *network* no instante t $>$ 0 é

$$\bar{H}(t) = e^{-t^2}(1 + 0,5.t^2 + 0,15.t^4).$$

Temos:

$$\frac{1}{t}log\bar{H}(t) = \frac{1}{t}.[-t^2 + log(1 + 0,5.t^2 + 0,15.t^4)] = -t + \frac{log(1 + 0,5.t^2 + 0,15.t^4)}{t};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{log\bar{H}(t)}{t} = \frac{0,1.t^4 - 0,15.t^6 - (1+0,5.t^2+0,15.t^4).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)}{(1+0,5.t^2+0,15.t^4).t^2}.$$

Como o denominador é positivo, é suficiente analisar o sinal do numerador.

Seja

$$\phi(t) = 0,1.t^4 - 0,15.t^6 - (1+0,5.t^2+0,15.t^4).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4).$$

Temos: $\phi(0) = 0$ e

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -t - 0,2t^3 - 0,9t^5 - (t+0,6t^3).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4) \leq 0.$$

Então $\phi(t) \leq 0$ e portanto

$$\frac{d}{dt}\frac{log\bar{H}(t)}{t} \leq 0.$$

Concluímos que $\frac{1}{t}log\bar{H}(t)$ é decrescente em t e T é IFRA (Definição A.3.2), em sentido contrário ao D-espectro **f**.

Observe que

$$\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{t^2}{t} = t$$

é crescente em t $>$ 0. Portanto, a função de risco $\Lambda(t) = t^2$ é *star-shaped*. Tal condição não implica a preservação da classe do D-espectro para o tempo de vida.

Outras classes de distribuições usadas em políticas de manutenção são as classes NBU (NWU) e NBUE (NWUE).

Definição 3.1.3 (Barlow e Proschan, 1975) Considere um *network* com n componentes e **f** seu D-espectro. Dizemos que o D-espectro **f**, é novo melhor (pior) do que usado - NBU (NWU) se, para k e j=1...n.

$$\bar{F}_{k+l} \leq (\geq)\bar{F}_k\bar{F}_l.$$

Dizer que uma distribuição é NBU é equivalente a afirmar que a probabilidade de sobrevivência condicionada à certa idade é menor do que a probabilidade de sobrevivência de uma unidade nova. É claro que a classe de distribuição NBU inclui a classe de distribuições IFR e que em tais casos é recomendável o uso de uma política de manutenção e de reparos. Pode-se mostrar que se uma distribuição é IFRA, então é NBU (ver Teorema A.3.3 parte (ii)).

Exemplo 3.1.7 (ver Exemplo A.4.10) Considere um *network* com D-espectro **f** = (0,5; 0,2; 0,3).

Verificamos se o D-espectro é NBU. Como $\bar{F}_2 - \bar{F}_1.\bar{F}_1 = 0,3 - 0,5.0,5 = 0,05 > 0$, o D-espectro é NWU.

Veremos um exemplo da preservação da classe NBU (NWU).

Exemplo 3.1.8 (ver Exemplo A.4.11) Seja T o tempo de vida de um *network* com D-espectro **f** = (0,1; 0,3; 0,6), cujas falhas de seus *links* ocorrem de acordo com um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda(t) = 1$

Verificamos que o D-espectro é NBU. Como $\bar{F}_2 - \bar{F}_1.\bar{F}_1 = 0,6 - 0,9.0,9 = -0,21 \leq 0$, **f** é NBU (Definição 3.1.3).

Observe que

$$\Lambda(t+x) = \lambda.t + \lambda.x = \Lambda(t) + \Lambda(x),$$

ou seja, $\Lambda(t) = \lambda.t$ é superaditiva e subaditiva (Definição A.3.6).

A confiabilidade do *network* é

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t)=k) = e^{-t}(1+0,9.t+0,3.t^2).$$

Concluímos que

$$\bar{H}(t+x) - \bar{H}(t)\bar{H}(x) = -0,21tx - 0,27t^2x - 0,27tx^2 - 0,09t^2x^2 \leq 0,$$

e, portanto, sob a Definição A.3.3, T é NBU.

Enunciamos o teorema de preservação da classe de distribuições NBU do D-espectro para o tempo de vida de um *network*. Estamos interessados em provar que a análise da classe NBU para o D-espectro e da superaditividade da função de risco são suficientes para deduzir que o tempo de vida do *network* é NBU.

Teorema 3.1.3 Seja T o tempo de vida de um *network* com função de distribuição contínua e D-espectro **f**, cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t)$. Se **f** é NBU (NWU) e $\Lambda(t)$ é superaditiva (subaditiva), então T é NBU (NWU).

Prova Verificaremos a preservação da classe NBU.

Inicialmente, considere um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda > 0$ (Teorema 3.2 parte (3.5) de Esary *et al.* (1973)). Neste caso, a confiabilidade do *network* no instante t $>$ 0 é

$$\bar{H}^*(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.\frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!}.$$

Basta verificar que, para x $>$ 0 e t $>$ 0,

$$\bar{H}^*(x)\bar{H}^*(t) - \bar{H}^*(x+t) \leq 0,$$

onde $\bar{H}^*(t)$ é a confiabilidade do *network*, cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda > 0$.

Assim

$$\bar{H}^*(x)\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \bar{F}_k.P(N(x)=k).\bar{F}_j.P(N(t)=j)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \bar{F}_k.\bar{F}_j.\frac{e^{-\lambda.x}.(\lambda.x)^k}{k!}.\frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^j}{j!} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \bar{F}_{k+j}.e^{-\lambda.(x+t)}.\frac{(\lambda.x)^k.(\lambda.t)^j}{k!j!}.$$

A desigualdade ocorre pois **f** é NBU, ou seja, $\bar{F}_k.\bar{F}_j \leq \bar{F}_{k+j}$, para k,j=1...,n (Definição 3.1.3).

Aplicando l = k+j, temos

$$\bar{H}^*(x)\bar{H}^*(t) \geq \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=k}^{n-1+k} \bar{F}_l.e^{-\lambda.(x+t)}.\frac{(\lambda.x)^k.(\lambda.t)^{l-k}}{k!(l-k)!} = \sum_{l=0}^{2(n-1)}\sum_{k=0}^{l} \bar{F}_l.e^{-\lambda.(x+t)}.\frac{(\lambda.x)^k.(\lambda.t)^{l-k}}{k!(l-k)!}.$$

Como $\bar{F}_k = 0$, para k=n,n+1,...2(n-1), temos:

$$\bar{H}^*(x)\bar{H}^*(t) \geq \sum_{l=0}^{n-1} \bar{F}_l.e^{-\lambda.(x+t)}.\frac{1}{l!}.(\lambda(x+t))^l \sum_{k=0}^{l} \frac{(\lambda.x)^k.(\lambda.t)^{l-k}}{(\lambda.(x+t))^l.k!(l-k)!}.l!$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \bar{F}_l.e^{-\lambda.(x+t)}.\frac{1}{l!}.(\lambda(x+t))^l = \bar{H}^*(x+t).$$

A penúltima igualdade resulta do Binômio de Newton. Sob a Definição A.3.3, concluímos que $\bar{H}^*(t)$ é NBU.

Tome $\lambda = 1$ e considere as representações $\bar{H}$ e $\bar{H}^*$ do Teorema 3.1.1 (mais detalhes no Teorema 3.1 parte (f) de A-Hameed e Proschan (1973)).

Provamos que se **f** é NBU, então $\bar{H}^*(t)$ é NBU, ou seja,

$$\bar{H}^*(x+y) \leq \bar{H}^*(x).\bar{H}^*(y) \iff -log\bar{H}^*(x+y) \geq -(log\bar{H}^*(x) + log\bar{H}^*(y)),$$

ou seja $-log\bar{H}^*(x)$ é superaditiva em x > 0 (Definição A.3.6).

Assim

$$-log\bar{H}(x+y) = -log\bar{H}^*(\Lambda(x+y)) \geq -log\bar{H}^*(\Lambda(x) + \Lambda(y))$$

$$\geq -(log\bar{H}^*(\Lambda(x)) + log\bar{H}^*(\Lambda(y))) = -(log\bar{H}(x) + log\bar{H}(y)).$$

A primeira desigualdade vale, pois $\Lambda(t)$ é superaditiva e $\bar{H}^*(t)$ é decrescente. A segunda é válida, pois $-log\bar{H}^*(t)$ é superaditiva. Então $-log\bar{H}(t)$ é superaditiva e T é NBU (Definição A.3.3).

A superaditividade ou subaditividade da função de risco do Processo de Poisson Não Homogêneo das falhas dos *links* de um *network* deve ser considerada juntamente à classe NBU ou NWU para o D-espectro do *network*.

Observação 3.1.3 Se a função de risco $\Lambda(t) = -log\bar{G}(t)$é superaditiva, onde $\bar{G}(t) = P(R_1 > t)$, e R_1 é o instante da primeira falha dos *links* do *network*, então, para t e x reais positivos

$$\Lambda(t+x) \geq \Lambda(t) + \Lambda(x) \Rightarrow -log\bar{G}(t+x) \geq -log\bar{G}(t) - log\bar{G}(x)$$

$$\Rightarrow -log\bar{G}(t+x) \geq -log(\bar{G}(t).\bar{G}(x)) \Rightarrow \bar{G}(t+x) \leq \bar{G}(t).\bar{G}(x).$$

Portanto, $\bar{G}$ é NBU e R_1 é NBU.

Concluímos que se a função de risco é superaditiva, o instante da primeira falha dos *links* de um *network* tem a propriedade do melhor novo do que usado. Esta observação nos fornece um entendimento mais lúcido de que não é suficiente que o D-espectro seja NBU para que o tempo de vida do *network* também o seja.

Apresentamos um exemplo de *network* em que a superaditividade da função de risco não é considerada. O exemplo é desenvolvido pelo próprio autor.

Exemplo 3.1.9 (vide Exemplo A.4.12) Considere um *network* com D-espectro **f** = (0,5; 0,2; 0,3) e T seu tempo de vida e que as falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t) = t^2$. Queremos estudar a preservação da classe NBU (NWU) para o *network*.

Segundo o Exemplo 3.1.7, o D-espectro **f** é NWU.

A confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}(t) = e^{-t^2}(1 + 0,5.t^2 + 0,15.t^4).$$

Tome $t_3 = 1$, $t_1 = 0,3$ e $t_2 = 0,7$.

Assim

$$P(T > 1) - P(T > 0,3).P(T > 0,7) = -0,81 < 0.$$

Então, existem $t_3 = 1$, $t_1 = 0,3$ e $t_2 = 0,7$, com $t_3 = t_1 + t_2$ tais que

$$P(T > t_3) - P(T > t_1).P(T > t_2) \leq 0.$$

Observe que a função de risco $\Lambda(t) = t^2$ é superaditiva, ou seja, para todo x, y > 0 $\Lambda(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2.x.y \geq x^2 + y^2 = \Lambda(x) + \Lambda(y)$.

Portanto T não é NWU (Definição A.3.3 e Observação A.3.3), diferentemente à classe do D-espectro **f**.

Em nosso contexto, a classe de distribuições NBU é fechada na formação de *networks*, no sentido de que o tempo de vida de um *network* cujos tempos de vidas de seus *links* sejam NBU também terá essa propriedade. No entanto, em um *network* cuja confiabilidade é uma mistura das distribuições dos instantes de falhas dos *links* a preservação da classe NBU a partir de seu D-espectro depende da superaditividade de função de risco.

Outra classe de distribuições indispensável em políticas de manutenção com base na idade é a classe NBUE.

Definição 3.1.4 (Barlow e Proschan, 1975) Considere um *network* com n componentes e **f** seu D-espectro. Dizemos que **f** é novo melhor (pior) do que usado, em média - NBUE (NWUE), para k=1,...n se

(i) $\mu = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k < \infty$;

(ii) $\bar{F}_k.\mu \geq (\leq) \sum_{j=k}^{n} \bar{F}_{j-1}$.

Exemplo 3.10 (ver Exemplo A.4.13) Considere um *network* com D-espectro **f** = (0,5; 0,2; 0,3).

Analisamos a preservação da classe NBUE (NWUE). Observe que

(i) $\mu = \sum_{j=1}^{3} \bar{F}_j = 1,8 < \infty$;

(ii) Avaliamos o sinal de $\sum_{j=k}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_k$ para k=1,2,3.

Para k = 1

$\sum_{j=1}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_1 = 1,8 - 1,8.0,5 = 0,9 > 0;$

Para k = 2
$\sum_{j=2}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_2 = 0,8 - 1,8.0,3 = 0,26 > 0;$

Para k = 3
$\sum_{j=3}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_3 = 0,3 - 1,8.0 = 0,3 > 0.$

Assim, $\sum_{j=k}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_k > 0$, para k=1,2,3.
Portanto o D-espectro **f** é NWUE.

Dizer que uma distribuição é NBUE equivale a afirmar que o tempo de vida médio residual condicionado à determinada idade é menor do que o tempo de vida médio de uma unidade nova. Pode-se mostrar que se uma distribuição é NBU, então é NBUE (Teorema A.3.3 (iii)). A classe NBUE não é fechada na formação de *networks*. Contudo existem exemplos em que tal propriedade é satisfeita.

Veremos um exemplo da preservação da classe NBUE.

Exemplo 3.1.11 (vide Exemplo A.4.14) Seja T o tempo de vida de um *network* com D-espectro **f** = (0,1; 0,3; 0,6), cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda(t) = 1$.

Do Exemplo 3.1.8, sabemos que **f** é NBU, o que implica, pelo Teorema A.3.3 (iii), que **f** é NBUE.

Observe que

$$\frac{\Lambda(t+x)}{t+x} - \frac{\Lambda(t)}{t} = \lambda - \lambda = 0,$$

e a função de risco $\Lambda(t) = \lambda.t$ é *star-shaped* e *antistar-shaped* (Definição A.3.5).

A confiabilidade do *network* é

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k) = e^{-t}(1 + 0,9t + 0,3t^2).$$

O tempo médio do *network* é

$$\mu = E(T) = \int_0^\infty \bar{H}(t)dt = 1 + 0,9 + 0,6 = 2,5.$$

Vamos verificar que $\bar{H}(t).\mu \geq \int_t^\infty \bar{H}(s)ds$.

Observe que

$$\int_t^\infty \bar{H}(s)ds = \int_t^\infty e^{-s}(1 + 0,9s + 0,3s^2)ds$$

$$= 2,5.e^{-t}(1 + 0,6.t + 0,12.t^2) \leq \mu.e^{-t}(1 + 0,9t + 0,3t^2) = \mu.\bar{H}(t).$$

Sob a Definição A.3.4, concluímos que T é NBUE.

Analisaremos a preservação da classe de distribuição NBUE (NWUE) do D-espectro de um *network* para seu tempo de vida. Nossa motivação para enunciar e provar este teorema é constatar que basta estudar a classe NBUE para o D-espectro e a propriedade *star-shaped* para a função de risco do PPNH para as falhas dos seus *links* para deduzir a classe de distribuições para o *network*.

Teorema 3.1.4 Seja T o tempo de vida de um *network* com função de distribuição contínua e D-espectro **f**, cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t)$. Se **f** é NBUE (NWUE) e $\Lambda(t)$ é *(anti)star-shaped*, então T é NBUE (NWUE).

Prova Provamos a preservação da classe NBUE.

Primeiramente, considere um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda > 0$ (Teorema 3.1 parte (3.6) de Esary *et al.* (1973)). Neste caso, a confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}^*(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k . \frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!}.$$

Considere inicialmente o caso $\Lambda(t) = \lambda.t$, $\lambda > 0$.

(i) Seja

$$\mu^* = \int_0^\infty \bar{H}^*(t)dt = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.P(N(t) = k)dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k . \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!}dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{F}_k}{\lambda} . \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k.\lambda}{k!}dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{F}_k}{\lambda} < \infty,$$

onde $\bar{H}^*(t)$ é a confiabilidade de um *network*, cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Homogêneo com taxa $\lambda > 0$.

A penúltima igualdade resulta da integração da função densidade de probabilidade da distribuição Gama(k+1,λ) em (0,∞) e o valor da somatória é finito pois **f** é NBUE, então $\sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k < \infty$.

Portanto $\bar{H}^*(t)$ satisfaz a condição (i) da classe NBUE.

(ii) Basta verificar que $\bar{H}^*(t).\mu^* - \int_t^\infty \bar{H}^*(x)dx \leq 0$.

$$\bar{H}^*(t).\mu^* - \int_t^\infty \bar{H}^*(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.P(N(t) = k).\frac{\sum_{j=0}^{n-1} \bar{F}_j}{\lambda} - \int_t^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k.P(N(x) = k)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k . \frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!} . \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \bar{F}_j}{\lambda} - \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F}_k . \int_t^\infty \frac{e^{-\lambda.x}.(\lambda.x)^k}{k!}dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^k}{k!} [\bar{F}_k . \sum_{j=0}^{n-1} \bar{F}_j - \sum_{j=k}^{n-1} \bar{F}_j] \leq 0.$$

A última igualdade resulta de

$$\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda.x}.(\lambda.x)^k}{k!}dx = \frac{\Gamma(k+1, \lambda.t)}{\Gamma(k+1)}$$

$$= P(R_{k+1} > t) = P(N(t) < k+1) = P(N(t) \leq k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-\lambda.t}.(\lambda.t)^j}{j!}.$$

Como **f** é NBUE, satisfaz a condição (ii) da classe NBUE. Portanto $\bar{H}^*(t)$ é NBUE, sob a Definição A.3.4.

Baseamo-nos agora no Teorema 3.1 parte (6) de A-Hameed e Proschan (1973).

(i) Considere $\mu = E(T)$, e $\bar{H}(t) = \bar{H}^*(\Lambda(t))$ sob o Teorema 3.1.1.

Provamos que se **f** é NBUE, então $\bar{H}^*(t)$ é NBUE, e satisfaz a condição (i), ou seja, $\int_0^\infty \bar{H}^*(t)dt < \infty$.

Como o Processo de Poisson Não Homogêneo para as falhas dos *links* do *network* é um processo de contagem não-explosivo, $\mu = \int_0^\infty \bar{H}(t)dt = \int_0^\infty \bar{H}^*(\Lambda(t))dt < \infty$, e T satisfaz a condição (i).

(ii) Temos que

$$\bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_0^\infty \bar{H}^*(\Lambda(x))dx - \int_t^\infty \bar{H}^*(\Lambda(x))dx$$

$$= \bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_0^t \bar{H}^*(\Lambda(x))dx - H^*(\Lambda(t)).\int_t^\infty \bar{H}^*(\Lambda(x))dx$$

$$\geq \bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_0^t \bar{H}^*(\Lambda(x.\frac{\Lambda(t)}{t}))dx - H^*(\Lambda(t)).\int_t^\infty \bar{H}^*(\Lambda(x.\frac{\Lambda(t)}{t}))dx.$$

A igualdade vale, pois $\bar{H}^*(t) + H^*(t) = 1$ e a desigualdade é válida, pois $\Lambda(t)$ é *star-shaped* (Definição A.3.5) e $\bar{H}^*(t)$ é decrescente. Fazendo a mudança de variável $y = \frac{x.\Lambda(t)}{t}$, temos:

$$= \frac{t}{\Lambda(t)}[\bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_0^{\Lambda(t)} \bar{H}^*(y)dy - H^*(\Lambda(t)).\int_{\Lambda(t)}^\infty \bar{H}^*(y)dy]$$

$$= \frac{t}{\Lambda(t)}[\bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_0^{\Lambda(t)} \bar{H}^*(y)dy - H^*(\Lambda(t)).\int_{\Lambda(t)}^\infty \bar{H}^*(y)dy$$

$$-\bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_{\Lambda(t)}^\infty \bar{H}^*(y)dy + \bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_{\Lambda(t)}^\infty \bar{H}^*(y)dy]$$

$$= \frac{t}{\Lambda(t)}[\bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_0^{\Lambda(t)} \bar{H}^*(y)dy + \bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_{\Lambda(t)}^\infty \bar{H}^*(y)dy$$

$$-H^*(\Lambda(t)).\int_{\Lambda(t)}^\infty \bar{H}^*(y)dy - -\bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_{\Lambda(t)}^\infty \bar{H}^*(y)dy]$$

$$= \frac{t}{\Lambda(t)}[\bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_0^\infty \bar{H}^*(y)dy - (H^*(\Lambda(t)) + \bar{H}^*(\Lambda(t))).\int_{\Lambda(t)}^\infty \bar{H}^*(y)dy]$$

$$= \frac{t}{\Lambda(t)}[\bar{H}^*(\Lambda(t)).\int_0^\infty \bar{H}^*(y)dy - \int_{\Lambda(t)}^\infty \bar{H}^*(y)dy] = 0.$$

Estas igualdades são válidas pois somamos integrais sobre os intervalos disjuntos (0,t) e (t,∞) e $\bar{H}^*(\Lambda(t)) + H^*(\Lambda(t)) = 1$.

Concluímos que $\bar{H}(t).\int_0^\infty \bar{H}(x)dx \geq \int_t^\infty \bar{H}(x)dx$ e, sob a Definição A.3.4, T é NBUE.

Observação 3.1.4 Se a função de risco $\Lambda(t) = -log\bar{G}(t)$ é star-shaped, vimos na Observação 3.1.2 que $\bar{G}$ é IFRA. Sob o Teorema A.3.3, $\bar{G}$ é NBU, e consequentemente NBUE. Portanto, R_1, o instante da primeira falha dos *links* do *network* pertence à classe do novo melhor do que usado em média.

Com o Teorema 3.1.4, podemos dizer que o uso indiscriminado da função de risco $\Lambda(t)$ não garante a preservação da classe NBUE (NWUE) entre o D-espectro e o tempo de vida do *network* cujos *links* falham segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo. Observamos o exemplo, do próprio autor, a seguir.

Exemplo 3.1.12 (vide Exemplo A.4.15) Considere um *network* com D-espectro $\mathbf{f}$ = (0,5; 0,2; 0,3) e tempo de vida T e que as falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t) = e^t$, t > 0.

Queremos avaliar a preservação da classe de distribuição NBUE (NWUE).

Observe que

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \frac{e^t}{t^2}(t-1).$$

Concluímos que $\frac{d\Lambda(t)}{dt} \geq (\leq) 0 \iff t \geq (\leq) 1$.

Portanto, $\Lambda(t)$ é *antistar-shaped* para t ≤ 1 e *star-shaped* para $t \geq 1$ (Definição A.3.5).

Segundo o Exemplo 3.1.10, o D-espectro $\mathbf{f}$ é NWUE.

A confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}(t) = e^{-e^t}.(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t}).$$

Verificamos a parte (i) da classe NBUE (NWUE).

O tempo médio de vida do *network* é

$$\mu = E(T) = \int_0^\infty \bar{H}(t)dt = \int_0^\infty e^{-e^t}.(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})dt.$$

Aplicando a mudança de variável $v = e^t$, temos

$$\mu = \int_1^\infty e^{-v}.(1 + 0,5.v + 0,15.v^2)\frac{dv}{v} = Ei(-1) + 0,8.e^{-1} \approx 0,22 + 0,8.e^{-1} \approx 0,51 < \infty,$$

onde Ei(.) é a Função Exponencial Integral (Definição A.3.9).

(ii)

Considere $t_0 = 2$. Então

$$\bar{H}(2) = e^{-e^2}(1 + 0,5.e^2 + 0,15.e^4) \approx 0,08;$$

$$\int_2^\infty \bar{H}(t)dt = \int_2^\infty e^{-e^t}.(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})dt = Ei(-e^2) + 0,001 \approx 0,00107.$$

Portanto

$$\int_2^\infty \bar{H}(t)dt - \mu.\bar{H}(2) = 0,00107 - 0,51.0,008 \approx -0,003 < 0.$$

.

Então existe $t_0 = 2$ tal que $\int_2^\infty \bar{H}(t)dt - \mu.\bar{H}(2) < 0$ e, portanto, T não é NWUE (Definição A.3.4), diferentemente do D-espectro $\mathbf{f}$.

Concluímos que em um *network* cujos *links* estão sujeitos a falhas de acordo com um Processo de Poisson Não Homogêneo, a preservação das classes de distribuições do D-espectro do *network* depende de restrições adequadas sobre a função de risco do processo.

3.2 Resultados de equivalências das classes de distribuições do D-espectro para o D-espectro condicional de um *network*

Veremos um exemplo de equivalências das classes de distribuições do D-espectro para o D-espectro condicional de um *network*.

Exemplo 3.2.1 (vide Exemplo A.4.16, de autoria própria Seja **f** = (0,1; 0,3; 0,6) o D-espectro de um *network* com tempo de vida T, cujas falhas de seus *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t) = t^2$. Seja $\mathbf{p(t)}$ seu D-espectro condicional no instante t. Queremos analisar a equivalência das classes de distribuições do D-espectro para o D-espectro condicional para t > 0, fixado.

Seja $\bar{F}_k$ a função de sobrevivência do D-espectro **f**.
Temos que $\bar{F}_0 = 1$; $\bar{F}_1 = 0,9$; e $\bar{F}_2 = 0,6$;
Verificaremos se **f** é IFR.
Como $\bar{F}_2^2 - \bar{F}_1.\bar{F}_3 = 0,9^2 - 1.0,3 = 0,21 \geq 0$, concluímos que $\bar{F}_{k+l}.\bar{F}_{k+1} - \bar{F}_{k+1+l}.\bar{F}_k \geq 0$, para todo k, l = 1,2,...5, e, portanto, **f** é IFR (Definição 3.1.1).
Segundo o Teorema A.3.3, **f** é IFRA, NBU e NBUE.

O k-ésimo componente do D-espectro condicional em t é

$$p_k(t) = \frac{f_k.P(R_k > t)}{P(T > t)}.$$

A confiabilidade do *network* é

$$P(T > t) = e^{-t^2}(1 + 0,9t^2 + \frac{0,6}{2}t^4) = e^{-t^2}(1 + 0,9t^2 + 0,3t^4).$$

Temos

$$P(R_1 > t) = e^{-t^2};$$

$$P(R_2 > t) = e^{-t^2}(1 + t^2);$$

$$P(R_3 > t) = e^{-t^2}(1 + t^2 + \frac{t^4}{2});$$

Portanto

$$p_1(t) = \frac{0,1}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4};$$

$$p_2(t) = \frac{0,3 + 0,3t^2}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4};$$

$$p_3(t) = \frac{0,6 + 0,6t^2 + 0,3t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4}.$$

Além disso

$$\sum_{k=1}^{3} p_k(t) = 1;$$

$$\sum_{k=2}^{3} p_k(t) = \frac{0,9 + 0,9t^2 + 0,3t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4};$$

$$\sum_{k=3}^{3} p_k(t) = \frac{0,6 + 0,6t^2 + 0,3t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4}.$$

Verificamos que $\mathbf{p(t)}$ é IFR, ou seja, $\frac{\sum_{k=j+1}^{3} p_k(t)}{\sum_{k=j}^{3} p_k(t)}$ é decrescente em j, isto é

$$(\sum_{k=j}^{3} p_k(t))^2 - \sum_{k=j-1}^{3} p_k(t). \sum_{k=j+1}^{3} p_k(t) \geq 0.$$

Então

$$(\sum_{k=2}^{3} p_k(t))^2 - \sum_{k=1}^{3} p_k(t). \sum_{k=3}^{3} p_k(t) = \frac{0,21 + 0,48t^2 + 0,33t^4 + 0,09t^6}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4} \geq 0.$$

Concluímos que $\mathbf{p(t)}$ é IFR (Definição A.3.1, para t fixado). Isto implica, segundo o Teorema A.3.3, que $\mathbf{p(t)}$ é IFRA.

Verificamos que $\mathbf{p(t)}$ é NBU.

$$\sum_{k=3}^{3} p_k(t) - \sum_{k=1}^{3} p_k(t). \sum_{k=2}^{3} p_k(t) = \frac{0,6 + 0,6t^2 + 0,3t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4} - 1.\frac{0,9 + 0,9t^2 + 0,3t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4} \leq 0$$

e portanto $\mathbf{p(t)}$ é NBU (Definição A.3.3, para t fixado).

Verificaremos que $\mathbf{p(t)}$ é NBUE, ou seja

$$\sum_{k=j} p_k(t).\mu(t) - \sum_{k=j}^{3} \sum_{l=k}^{3} p_l(t) \geq 0,$$

onde

$$\mu(t) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=j}^{3} p_k(t) = \frac{2,5 + 1,8t^2 + 0,9t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4}.$$

Concluímos que

$$\sum_{k=2} p_k(t).\mu(t) - \sum_{k=2}^{3} \sum_{l=k}^{3} p_l(t) = \frac{0,75 + 1,02t^2 + 0,78t^4 + 0,36t^6 + 0,09t^8}{(1 + 0,9t^2 + 0,3t^4)^2} \geq 0,$$

e, portanto, $\mathbf{p(t)}$ é NBUE (Definição A.3.4, para t fixado).

Enunciamos o teorema de equivalência das classes de distribuições entre o D-espectro e o D-espectro condicional de um *network*. Nossa motivação agora é verificar que basta estudar as classes

de distribuições do D-espectro para deduzir as classes para o D-espectro condicional de seu respectivo *network*. O teorema é enunciado e provado pelo próprio autor.

Teorema 3.2.1 Seja **f** o D-espectro de um *network* com n *links*. Seja $p(t)$ seu D-espectro condicional no instante t > 0, fixado. Então:

(a) **f** é IFR (DFR) $\Longleftrightarrow$ **p(t)** é IFR (DFR);

(b) **f** é IFRA (DFRA) $\Longleftrightarrow$ **p(t)** é IFRA (DFRA);

(c) **f** é NBU (NWU) $\Longleftrightarrow$ **p(t)** é NBU (NWU);

(d) **f** é NBUE (NWUE) $\Longleftrightarrow$ **p(t)** é NBUE (NWUE).

Prova

Parte (a)

Provaremos a equivalência para a classe IFR.

Acondição é suficiente, pois se IFR, ou seja, sob a Definição A.3.1, para todo k, j=1,2,...,n com k $\geq$ j e m=1,2,...,n fixado

$$\frac{\sum_{l=k+m+1}^{n} p_l(t)}{\sum_{l=k+1}^{n} p_l(t)} \leq \frac{\sum_{l=j+m+1}^{n} p_l(t)}{\sum_{l=j+1}^{n} p_l(t)},$$

ou equivalentementemente,

$$\sum_{i=k+m+1}^{n} p_i(t). \sum_{l=j+1}^{n} p_l(t) - \sum_{i=k+1}^{n} p_i(t). \sum_{l=j+m+1}^{n} p_l(t) \leq 0.$$

Tomando o limite quando t tende a zero, temos:

$$\sum_{i=k+m+1}^{n} f_i. \sum_{l=j+1}^{n} f_l - \sum_{i=k+1}^{n} f_i. \sum_{l=j+m+1}^{n} f_l \leq 0.$$

Concluímos que, para todo k, j=1,2,...,n com k $\geq$ j e m=1,2,...,n fixado

$$\bar{F}_{k+m}.\bar{F}_j - \bar{F}_k.\bar{F}_{j+m} \leq 0,$$

e, portanto, sob a Definição 3.1.1, **f** é IFR.

Para verificar a condição necessária da parte (a), suponha, por absurdo, que **p(t)** não é IFR, isto é, existem k_0 e $j_0 = 1, ..., n$, com $k_0 \geq j_0$ e m=1,2...,n fixado tais que

$$\sum_{i=k_0+m+1}^{n} p_i(t). \sum_{l=j_0+1}^{n} p_l(t) - \sum_{i=k_0+1}^{n} p_i(t). \sum_{l=j_0+m+1}^{n} p_l(t) > 0.$$

Quando t tende a zero,

$$\sum_{i=k_0+m+1}^{n} f_i. \sum_{l=j_0+1}^{n} f_l - \sum_{i=k_0+1}^{n} f_i. \sum_{l=j_0+m+1}^{n} f_l > 0.$$

Então, existem k_0 e $j_0 = 1, ..., n$, com $k_0 \geq j_0$ e m=1,2...,n fixado tais que

$$\bar{F}_{k_0+m}.\bar{F}_{j_0} - \bar{F}_{k_0}.\bar{F}_{j_0+m} \leq 0.$$

Portanto, **f** não é IFR. O que é uma contradição, pois por hipótese, **f** é IFR. Para o caso DFR procede-se analogamente.

Parte (b)

Provemos o caso IFRA.

Suponha inicialmente que $\mathbf{p(t)}$, t > 0, é IFRA, isto é, sob a Definição A.3.2, $(\sum_{j=k+1}^{n} p_j(t))^{\frac{1}{k}}$ é decrescente em k=1,2,...n.

Quando t tende a zero, concluímos que $(\sum_{j=k+1}^{n} f_j)^{\frac{1}{k}} = \bar{F}_k^{\frac{1}{k}}$ é decrescente em k=1,2,...n. Portanto, sob a Definição A.3.2, **f** é IFRA.

Para provar a recíproca, suponha, por absurdo, que $\mathbf{p(t)}$, t > 0, não é IFRA, ou seja

Existe k_0=1,...,n tal que

$$(\sum_{j=k_0+1}^{n} p_j(t))^{\frac{1}{k_0}} < (\sum_{j=k_0+2}^{n} p_j(t))^{\frac{1}{k_0+1}}.$$

Considerando o limite quanto t tende a zero temos

$$\bar{F}_{k_0}^{\frac{1}{k_0}} < \bar{F}_{k_0+1}^{\frac{1}{k_0+1}}.$$

Portanto, **f** não é IFRA, contradizendo à hipótese de que **f** é IFRA.

Parte (c)

Provaremos o caso NBU.

Considere inicialmente que $\mathbf{p(t)}$ é NBU, ou seja, sob a Definição A.3.3, para k e l=1,...,n, e t > 0 fixado.

$$\sum_{i=k+l+1}^{n} p_i(t) \leq \sum_{i=k+1}^{n} p_i(t). \sum_{i=l+1}^{n} p_i(t).$$

Quando t tende a zero concluímos que $\bar{F}_{k+l} \leq \bar{F}_k.\bar{F}_l$ e portanto, sob a Definição 3.1.3, **f** é NBU.

Para verificar a recíproca, suponha, por absurdo, que existem k_0, l_0=1,2,...n, tais que

$$\sum_{i=k_0+l_0+1}^{n} p_i(t) > \sum_{i=k_0+1}^{n} p_i(t). \sum_{i=l_0+1}^{n} p_i(t).$$

Quando t tende a zero, existem k_0, l_0=1,2,...n, tais que $\bar{F}_{k_0+l_0} > \bar{F}_{k_0}.\bar{F}_{l_0}$. Portanto, **f** não é NBU, contradizendo a hipótese de que **f** é NBU.

Parte (d)

Provaremos o caso NBUE.

Considere inicialmente que $\mathbf{p(t)}$ é NBUE (Definição A.3.4). Então

(i) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} p_t(t) < \infty$.

Quando t tende a zero, $\sum_{k=0}^{n} \bar{F}_k < \infty$.

(ii) $\sum_{j=k+1}^{n} p_j(t). \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=i+1}^{n} p_l(t) \geq \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{l=i+1}^{n} p_l(t)$.

Quando t tende a zero, temos que

$$\bar{F}_k.\sum_{i=0}^{n}\bar{F}_i \geq \sum_{i=k+1}^{n}\bar{F}_i.$$

Portanto, sob a Definição 3.1.4, **f** é NBUE.

Vamos verificar a recíproca da parte (d) do teorema.
(i) Suponha, por absurdo, que

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} p_t(t) = \infty.$$

Quando t tende a zero, temos $\sum_{k=0}^{n}\bar{F}_k = \infty$. É uma contradição, pois, por hipótese $\sum_{k=0}^{n}\bar{F}_k < \infty$.

(ii) Por absurdo, assuma que $\mathbf{p(t)}$ não é NBUE, ou seja, para t $>$ 0 fixado, existe k_0=1,...n, tal que

$$\sum_{j=k_0+1}^{n} p_j(t).\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=i+1}^{n} p_l(t) < \sum_{i=k_0+1}^{n}\sum_{l=i+1}^{n} p_l(t).$$

Quando t tende a zero, concluímos que, para t $>$ 0 fixado, existe k_0=1,...,n tal que

$$\bar{F}_{k_0}.\sum_{i=0}^{n}\bar{F}_i < \sum_{i=k_0+1}^{n}\bar{F}_i.$$

Portanto, **f** não é NBUE. Uma contradição, pois $\bar{F}_k$, k=1,...n, é NBUE.

3.3 Resultados de preservação do D-espectro condicional para o tempo de vida de um *network*

Veremos um exemplo de preservação das classes de distribuições do D-espectro condicional para seu respectivo *network*.

Exemplo 3.3.1 (vide Exemplo A.4.17) Seja T o tempo de vida de um *network* com D-espectro **f** = (0,3; 0,3; 0,4), cujas falhas de seus *links*, ocorrem de acordo com um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t) = t^2$. Seja $\mathbf{p(t)}$ o respectivo D-espectro condicional no instante t $>$ 0.

Nosso interesse é analisar a preservação das classes de distribuições do D-espectro condicional $\mathbf{p(t)}$ para o tempo de vida do *network*.

Seja $\bar{F} = (\bar{F}_0, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)$, onde $\bar{F}_k$ é a função de sobrevivência do D-espectro **f** após k falhas de seus *links*.

A confiabilidade do *network* no instante t é

$$\bar{H}(t) = P(T > t) = \sum_{k=0}^{2}\bar{F}_k.P(N(t) = k) = e^{-t^2}(1 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4).$$

O k-ésimo componente do D-espectro condicional do *network* é

$$p_k(t) = \frac{f_k.P(R_k > t)}{\bar{H}(t)},$$

onde R_k é o instante da k-ésima falha dos *links* do *network*.

Verificaremos que $\mathbf{p(t)}$ tem taxa de falha crescente, isto é (Definição A.3.1), $\frac{p_k(t)}{\sum_{j=k}^{n} p_j(t)}$ é crescente em k=1,2,3,4. Temos:

$$p_1(t) = \frac{0,3}{1 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4};$$

$$p_2(t) = \frac{0,3 + 0,3.t^2}{1 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4};$$

$$p_3(t) = \frac{0,4 + 0,4.t^2 + 0,2.t^4}{1 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4}.$$

A função de sobrevivência do D-espectro condicional para os valores de k é

$$\sum_{j=1}^{3} p_j(t) = 1,$$

$$\sum_{j=2}^{3} p_j(t) = \frac{0,7 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4}{1 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4};$$

$$\sum_{j=3}^{3} p_j(t) = \frac{0,4 + 0,4.t^2 + 0,2.t^4}{1 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4}.$$

A primeira igualdade vale, pois o D-espectro condicional é uma distribuição de probabilidades para cada t > 0, fixado.

As taxas de falhas para os componentes do D-espectro condicional em t são

$$r_1(t) = \frac{p_1(t)}{\sum_{j=1}^{3} p_j(t)} = \frac{0,3}{1 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4};$$

$$r_2(t) = \frac{p_2(t)}{\sum_{j=2}^{3} p_j(t)} = \frac{0,3 + 0,3.t^2}{0,7 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4};$$

$$r_3(t) = \frac{p_3(t)}{\sum_{j=3}^{3} p_j(t)} = 1.$$

Observe que $r_1(t) \leq r_2(t)$, pois $0,3 \leq 0,3 + 0,3.t^2$ e $1 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4 \geq 0,7 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4$. É imediato concluir que $r_2(t) \leq r_3(t)$.

Portanto, o D-espectro condicional $\mathbf{p(t)}$ é IFR.

Usando o Teorema A.3.3, $\mathbf{p(t)}$ também é IFRA, NBU e NBUE.

Observe que

$$\frac{d^2\Lambda(t)}{dt^2} = \frac{d^2t^2}{dt^2} = 2 > 0.$$

Portanto, a função de risco $\Lambda(t) = t^2$ é côncava.

Note que

$$\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{t^2}{t} = t;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{d}{dt}\frac{t^2}{t} = 1 > 0,$$

isto é, $\frac{\Lambda(t)}{t}$ é crescente em t > 0. Portanto, $\Lambda(t) = t^2$ é *star-shaped* (Definição A.3.5).

Observe que $\Lambda(t+x) = (t+x)^2 = t^2 + x^2 + 2.t.x \geq t^2 + x^2 = \Lambda(t) + \Lambda(x)$, e, portanto, a função de risco é superaditiva (Definição A.3.6).

Verificamos a logconcavidade de $\bar{H}(t)$. Temos:

$$log\bar{H}(t) = -t^2 + log(1 + 0,7t^2 + 0,2t^4);$$

$$\frac{d}{dt}log\bar{H}(t) = \frac{-0,6 - 1,38t^2 - 1,5t^4 - 0,4t^6 - 0,32t^8}{(1 + 0,7t^2 + 0,4t^4)^2} \leq 0.$$

Sob a Definição A.3.1, concluímos que T é IFR. Usando o Teorema A.3.3, isto implica que T é IFRA, NBU e NBUE.

Com base neste exemplo, percebemos que as classes de distribuições do D-espectro condicional foram preservadas no *network*, na presença das respectivas propriedades algébricas sobre a função de risco. Isto é provado através do corolário que enunciaremos. Queremos constatar, pela prova deste corolário, que basta estudar as classes de distribuições para o D-espectro condicional e as respectivas propriedades para a função de risco do PPNH para as falhas dos *links* do *network* a fim de deduzir as classes de distribuições para o *network*.

Corolário 3.3.1 Seja T o tempo de vida um *network* com n *links*, função de distribuição contínua e D-espectro **f** com n *links*, cujas falhas ocorrem de acordo com um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t)$. Seja **p**(t) o respectivo D-espectro condicional e $\{T - t|T > t\}$ o respectivo tempo de vida residual no instante t. Então

(a) Se **p**(t) é IFR (DFR) e $\Lambda(t)$ é côncava, então T é IFR (DFR);

(b) Se **p**(t) é IFRA (DFRA) e $\Lambda(t)$ é *(anti)star-shaped* , então T IFRA (DFRA);

(c) Se **p**(t) é NBU (NWU) e $\Lambda(t)$ é superaditiva (subaditiva) então T é NBU (NWU);

(d) Se **p**(t) é NBUE (NWUE) e $\Lambda(t)$ é *(anti)star-shaped* então T é NBUE (NWUE).

Prova Provamos este corolário utilizando o Teorema 3.2.1, seguido dos Teoremas 3.1.2, 3.1.3 e 3.1.4, respectivamente.

A preservação das classes de distribuições do D-espectro condicional para o tempo de vida de *networks* ocorreu de maneira semelhante à do D-espectro para seu tempo de vida, isto é, quando as falhas dos *links* ocorrem segundo um Processo de Poisson Não Homogêneo a preservação das classes de distribuições do D-espectro condicional do *network* para seu tempo de vida depende das respectivas propriedades para sua função de risco.

Capítulo 4

Conclusões

Deduzimos que um *network* no qual a ordenação das falhas dos *links* são igualmente prováveis e que ocorrem de acordo com um Processo de Poisson Não Homogêneo as desigualdades estocásticas entre os D-espectros são preservadas nos respectivos tempos de vidas.

Deduzimos também que as classes de distribuições não paramétricas dos D-espectros acompanhadas de propriedades algébricas convenientes da função de risco são preservadas nos tempos de vidas dos *networks*.

4.1 Considerações Finais

Quando o interesse é comparar estocasticamente dois *networks* mostramos que é suficiente comparar estocasticamente as distribuições dos respectivos D-espectros.

Como na Teoria da Confiabilidade o estudo de classes de distribuições IFR e NBU auxiliam nas tomadas de decisão, na adoção de medidas preventivas e de manutenção. Presume-se que, com os resultados obtidos, o estudo das classes não paramétricas das distribuições discretas dos D-espectros e das propriedades algébricas estudadas para a função de risco sejam suficientes para tais procedimentos.

4.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

Como pesquisa futura, podemos avaliar resultados de preservações de desigualdades estocásticas e de classes de distribuições para *networks* e *links* com mais de dois estados (multiestados) sob independência dos tempos de vidas dos *links* (Gertsbakh e Shpungin, 2011).

Podemos também estender a ideia de importância de componentes (Barlow e Proschan, 1975) para *networks* e *links* multiestados.

É possível estudar a confiabilidade do *network* utilizando processos pontuais (Bueno, 2015).

Apêndice A

Apêndice

A.1 Sistemas coerentes e assinaturas

O tempo de vida T de um sistema com n componentes, está relacionado com os tempos de vida de seus componentes T_i, i=1,2,...,n, por meio de uma função de estrutura Φ.

$$T = \Phi(T_1, T_2, ..., T_n).$$

Definição A.1.1 (Barlow e Proschan (1975)) Considere um sistema com n componentes e $T_1, ...T_n$ seus respectivos tempos de vidas. O componente i, i = 1,2...,n é relevante para o sistema se $\forall$ t, t $>$ 0, existe uma configuração $\mathbf{X}$(t) = $(X_1(t), ..., X_n(t))$, com $X_i(t) = 1_{\{T_i > t\}}$, tais que o sistema funciona se $X_i(t) = 1$ e falha se $X_i(t) = 0$.

Não é razoável que a melhora de um componente prejudique o funcionamento do sistema, e que os componentes não sejam essenciais para o funcionamento do sistema. Definimos sistema coerente.

Definição A.1.2 (Barlow e Proschan (1975)) Um sistema $T = \Phi(\mathbf{T})$ é coerente se todo componente é relevante e se Φ é crescente em cada componente.

Exemplo A.1.1 São sistemas coerentes:

- Sistema em série
$$T = \min_{1 \leq i \leq n} \{T_i\};$$
- Sistema em paralelo
$$T = \max_{1 \leq i \leq n} \{T_i\};$$
- Sistema série-paralelo
$$T = \min_{1 \leq j \leq k} \max_{i \in K_j} \{T_i\},$$
onde, K_j é o conjunto de cortes minimais, isto é, um conjunto mínimo de componentes cujas falhas causem a falha do sistema (Barlow e Proschan (1975)).

Para avaliar a confiabilidade de um sistema coerente, em termos de seu tempo de vida, a função de estrutura do sistema é uma representação relativamente ampla e de certo modo imprópria.

Uma função de estrutura útil para o tempo de vida do sistema é através de sua representação por assinatura (Samaniego *et al.* (2009)), sob a hipótese de que os tempos de vida dos componentes são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) com distribuição contínua F. Sob tal associação, a assinatura é uma medida estrutural que independe dos tempos de vidas dos componentes e permite uma representação para a confiabilidade do sistema como uma mistura das estatísticas de ordem associadas aos tempos de vida dos componentes útil no cálculo da confiabilidade do sistema e na análise da preservação das desigualdades estocásticas.

As condições da definição de assinatura restringem seu uso generalizado, mas existem várias aplicações em que o uso das assinaturas é apropriado.

- Podemos encontrar alguns exemplos em que a aplicação das assinaturas é apropriada: baterias de sistemas luminosos, pastilhas ou *chips* de um computador digital, e sistema de velas de ignição automobilísticas;
- As assinaturas de um sistema devem ser usadas cuidadosamente quando se questiona a suposição i.i.d. No entanto, podemos esperar que elas sejam úteis e informativas quando os componentes de um sistema funcionarem sob hipóteses próximas ao caso i.i.d.;
- A assinatura é uma medida estrutural que nos permite comparar realisticamente os sistemas coerentes. Observe que, estocasticamente, um sistema em série com componentes com alta confiabilidade têm um melhor desempenho do que um sistema em paralelo com componentes de baixa confiabilidade.

Definimos assinaturas:

Definição A.1.3 (Samaniego *et al.*, 2009) Seja T o tempo de vida de um sistema coerente com n componentes, com tempos de vida $T_1, T_2, ..., T_n$ independentes e identicamente distribuídos com distribuição contínua, definidos em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Seja $\mathrm{T}_{(i)}$, i=1,2,...,n a i-ésima estatística de ordem associada aos tempos de vida dos componentes. Então a **assinatura** do sistema é definida pelo vetor

$$\mathrm{s} = (s_1, ..., s_n),$$

onde, para i=1,...,n

$$s_i = P(T = T_{(i)}).$$

Nestas suposições pode-se provar que a assinatura não depende diretamente dos tempos de vida dos componentes, mas da estrutura do sistema e da quantidade de componentes que falharam.

Exemplo A.1.2 Considere um sistema com três componentes, do tipo série-paralelo, estruturalmente modelado como mostra a Figura A.1. Suponha que os tempos de vidas dos componentes são i.i.d.

Portanto

$$s_1 = P(T = T_{(1)}) = P(T_1 < T_2 < T_3) + P(T_1 < T_3 < T_2) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3};$$

$$s_2 = P(T = T_{(2)}) = P(T_2 < T_1 < T_3) + P(T_2 < T_3 < T_1) + P(T_3 < T_1 < T_2) + P(T_3 < T_2 < T_1) = \frac{4}{3!} = \frac{2}{3};$$

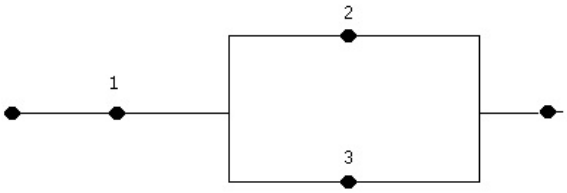

Figura A.1: *Figura A.1.1. Sistema tipo série-paralelo com 3 componentes*

$$s_3 = 0.$$

Observe que devido à sua estrutura, o sistema falha até a segunda falha de componentes. Então a assinatura do sistema é: $\mathbf{s} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$.

Exemplo A.1.3. Em um **Sistema k-de-n** é necessário que pelo menos k componentes falhem para o sistema falhar. Desse modo, $s_k = P(T = T_{(k)}) = 1$, k=1...n e $s_j = P(T = T_{(j)}) = 0$, para j=1,2,...,k-1,k+1,...,n-1. A assinatura para um sistema k-de-n é $\mathbf{s}$ = (0,0,0,...,0,1,0,...,0).

Observação A.1.1. Em um sistema em série a assinatura do sistema é $\mathbf{s}$ = (1,0,0,...,0), pois a falha de um componente causa a falha do sistema. Assim, $s_1 = P(T = T_{(1)}) = 1$ e $s_k = P(T = T_{(k)}) = 0$, para k=2,...,n. Em um sistema em paralelo, a assinatura do sistema é representada por: $\mathbf{s}$ = (0,0,0,...,1), pois somente a falha de todos os componentes causa a falha do sistema. Dessa maneira, $s_n = P(T = T_{(n)}) = 1$ e $s_k = P(T = T_{(k)}) = 0$, para k=1,2,3,...,n-1.

Definimos a confiabilidade de um sistema coerente.

Definição A.1.4. - disponível no Teorema 1.1 de Samaniego *et al.* (2009) Seja T o tempo de vida de um sistema coerente com n componentes com tempos de vida $T_1, T_2, ..., T_n$ definidos em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A confiabilidade do sistema no instante t, t $>$ 0, fixado, é definida como a probabilidade de sobreviver ao instante t, $P(T > t)$.

Sob a hipótese dos componentes independentes, identicamente distribuídos e com distribuição contínua, utilizando a Lei da Probabilidade Total, podemos representar a confiabilidade do sistema no instante t $>$ 0, através da mistura

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} P(T > t, T = T_{(i)}) = \sum_{i=1}^{n} P(T > t | T = T_{(i)}) P(T = T_{(i)})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(T_{(i)} > t | T = T_{(i)}) P(T = T_{(i)}) = \sum_{i=1}^{n} P(T_{(i)} > t) P(T = T_{(i)}) = \sum_{i=1}^{n} s_i . P(T_{(i)} > t).$$

A penúltima igualdade é válida, pois os eventos $\{T_{(i)} > t\}$ e $\{T = T_{(i)}\}$ são independentes, desde que o primeiro evento depende da distribuição F, enquanto que o segundo evento depende apenas da ordenação dos tempos de vida dos componentes. Tal argumento é provado no Lema A.1.1.

Enunciamos um lema em que um evento que depende apenas da ordem das falhas dos componentes independe de um evento que depende apenas da ordenação de tempos de vidas dos componentes que nos auxilia na construção da confiabilidade de sistemas como mistura das confiabilidades dos instantes de falhas (vide seção 2.1).

Lema A.1.1 (Lema 8.3.11 de Randles e Wolfe (1979)) Sejam $Z_1, ...Z_n$ v.a. i.i.d. contínuas com função densidade de probabilidade f com a função densidade conjunta $f_{\mathbf{Z}}$ para $\mathbf{Z} = (Z_1, ..., Z_n)$. Seja $\mathbf{R^*}$ o vetor dos postos (ordens) associados a essas observações e $Z_{(1)}, ...Z_{(n)}$ as estatísticas de ordem associadas às variáveis $Z_1, ...Z_n$. Então, $\mathbf{R^*}$ e $Z_{(1)}, ...Z_{(n)}$ são independentes.

Prova Seja g a f.d.p. de $Z_{(1)}, ...Z_{(n)}$ dado $\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*}$. Considere h a f.d.p. conjunta de $Z_{(1)}, ...Z_{(n)}$ e $\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*}$. Temos:

$$g(z_{(1)}, ...z_{(n)}|\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*}) = \frac{h(z_{(1)}, ...z_{(n)}, \mathbf{R^*} = \mathbf{r^*})}{P(\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*})}.$$

Mas $P(\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*}) = \frac{1}{n!}$, para todo vetor $\mathbf{r^*}$. Assim, dizemos que a distribuição conjunta das estatísticas de ordem é permutável, ou seja, para todo $\mathbf{r^*}$ e $\mathbf{r'}$ vetores de postos associados às estatísticas de ordem. Temos

$$P(\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*}) = P(\mathbf{R^*} = \mathbf{r'}) = \frac{1}{n!}.$$

Dessa maneira, para $\{\mathbf{R^*}=\mathbf{r^*}\}$, podemos escolher um vetor de postos r* = (1,2,...,n) como argumento similar a um outro vetor r'=$(\pi_1, ..., \pi_n)$, onde π_k é um k-ésimo posto de uma observação após uma nova ordenação π das observações. Ademais, na escolha r* = (1,2,...,n) para o vetor de postos, as estatísticas de ordem terão seus postos coincidindo com os valores do vetor r*, após ordenarmos as observações Z_i, i=1,2,...,n. Então:

$$g(z_{(1)}, ...z_{(n)}|\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*}) = \frac{f_{\mathbf{Z}}(z_{(1)}, ...z_{(n)})}{P(\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*})}.$$

Como $Z_k, k = 1, 2, ..., n$ são independentes e identicamente distribuídas, temos:

$$g(z_{(1)}, ...z_{(n)}|\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*}) = \frac{\prod_{k=1}^{n} f(z_{(k)})}{\frac{1}{n!}} = n! \prod_{k=1}^{n} f(z_{(k)}) = g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}),$$

que é a função densidade conjunta de estatísticas de ordem associadas a variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Ao particularizar a demonstração para o caso univariado, para uma das estatísticas de ordem, dados os postos das variáveis temos:

$$g(z_{(k)}|\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*}) = \int_0^\infty ... \int_0^\infty g(z_{(1)}, ...z_{(n)}|\mathbf{R^*} = \mathbf{r^*}) dz_{(1)} dz_{(2)} ... dz_{(k-1)} dz_{(k+1)}, ...dz_{(n)}$$

$$= \int_0^\infty ... \int_0^\infty g_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) dz_{(1)} dz_{(2)} ... dz_{(k-1)} dz_{(k+1)}, ...dz_{(n)} = g(z_{(k)}).$$

Com essa demonstração fica provada a independência entre um evento que dependa do posto do instante de uma k-ésima falha, com k=1,...,n, em relação a um evento que dependa da permutação entre os postos dos instantes de falha, e portanto, entre os componentes.

A.2 Desigualdades estocásticas

As desigualdades estocásticas mais utilizadas são definidas:

Definição A.2.1 - Seção 1.A de Shaked e Shanthikumar (2007) Sejam S e T dois tempos de vidas. Dizemos que S é estocasticamente menor que T (S $\leq_{ST}$ T) se, para todo $t > 0$: $P(S > t) \leq P(T > t)$.

Se S e T admitem funções discretas de probabilidade, S $\leq_{ST}$ T se, e somente se, para k $\in \mathbb{N}$: $P(S > k) \leq P(T > k)$.

Estas desigualdades sugerem que um objeto com tempo de vida T é mais confiável do que com tempo de vida S.

Definição A.2.2 - Seção 1.B de Shaked e Shanthikumar (2007) Sejam S e T dois tempos de vida. Dizemos que S é menor, em taxa de falha (*hazard rate*), do que T (S $\leq_{HR}$ T) se, para todo $t > 0$: $\frac{P(T>t)}{P(S>t)}$ é crescente em t. Equivalentemente, se S e T admitem funções densidades de probabilidade, S $\leq_{HR}$ T se, e somente se, $\lambda_S \geq \lambda_T$, onde λ_S e λ_T são as taxas de falha de S e de T respectivamente.

Alternativamente, se S e T admitem funç oes discretas de probabilidade, S $\leq_{HR}$ T se, e somente se, $\in \mathbb{N}$: $\frac{P(T>k)}{P(S>k)}$, é crescente em k $\in \mathbb{N}$. Equivalentemente, S $\leq_{HR}$ T se, e somente se, para todo k $\in \mathbb{N}$: $\frac{P(S=k)}{P(S\geq k)} \geq \frac{P(T=k)}{P(T\geq k)}$.

Interpretamos que um objeto com tempo de vida S tem maior propensão a falhas do que um objeto com tempo de vida T.

Definição A.2.3 - Seção 1.C de Shaked e Shanthikumar (2007) Sejam S e T dois tempos de vidas.

Se S e T admitem funções densidades de probabilidades, dizemos que S é menor, em razão de verossimilhanças, do que T (S $\leq_{LR}$ T) se, para todo t $\in \mathbb{R}$: $\frac{g_T(t)}{g_S(t)}$ é crescente em t, onde g_T e g_S são as funções densidades de probabilidade de T e S respectivamente.

Se S e T admitem funções discretas de probabilidade, então S $\leq_{LR}$ T se, e somente se, para todo k $\in \mathbb{N}$: $\frac{P(T=k)}{P(S=k)}$ é crescente em k.

Existe uma hierararquia entre as desigualdades estocásticas. Observamos que a ordenação através da razão de verossimilhanças monótona implica a ordenação através das taxas de falhas, que, por sua vez, implica a ordenação estocástica.

Teorema A.2.1 (ver Teoremas 1.B.1 e 1.C.1 de Shaked e Shanthikumar (2007)) Sejam S e T duas variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Então

$$S \leq_{HR} T \Rightarrow S \leq_{ST} T.$$

Se S e T têm funções de distribuições absolutamente contínuas (ou discretas), então

$$S \leq_{LR} T \Rightarrow S \leq_{HR} T.$$

Prova: Sejam f, g as funções densidades (ou discretas) de probabilidade de S e T respectivamente. Sejam $\bar{F}$ e $\bar{G}$ suas funções de sobrevivência. Então

$$S \leq_{HR} T \Rightarrow \frac{\bar{G}(u)}{\bar{F}(u)} \geq \frac{\bar{G}(v)}{\bar{F}(v)}, u \geq v \Rightarrow \frac{\bar{G}(u)}{\bar{F}(u)} \geq \frac{\bar{G}(0)}{\bar{F}(0)}, u \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{G}(u)}{\bar{F}(u)} \geq 1, \Rightarrow \bar{G}(u) \geq \bar{F}(u) \Rightarrow S \leq_{ST} T.$$

$$S \leq_{LR} T \Rightarrow \frac{g(s)}{f(s)} \leq \frac{g(t)}{f(t)}, s \leq t$$

$$g(t)f(s) - f(t)g(s) \geq 0 \Rightarrow \int_u^\infty \int_v^\infty [dG(t)dF(s) - dF(t)dG(s)] \geq 0, \quad u \geq v$$

$$\Rightarrow \int_u^\infty dG(t) \int_v^\infty dF(s) - \int_u^\infty dF(t) \int_v^\infty dG(s) \geq 0, \quad u \geq v$$

$$\Rightarrow \bar{G}(u)\bar{F}(v) - \bar{G}(v)\bar{F}(u) \geq 0, u \geq v \Rightarrow \frac{\bar{G}(u)}{\bar{F}(u)} \geq \frac{\bar{G}(v)}{\bar{F}(v)}, \quad u \geq v \Rightarrow S \leq_{HR} T.$$

As recíprocas das implicações acima nem sempre são válidas. Eis dois contra-exemplos:

Exemplo A.2.1 Considere $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ duas funções discretas de probabilidade, tais que $\mathbf{f} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ e $\mathbf{g} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

As respectivas funções de sobrevivência são: $\bar{\mathbf{F}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ e $\bar{\mathbf{G}} = (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Concluímos que $\bar{\mathbf{F}} \leq \bar{\mathbf{G}}$ e, portanto, $\mathbf{f} \leq_{ST} \mathbf{g}$.

Vamos avaliar a desigualdade através das taxas de falhas, usando a relação $\frac{\bar{G}}{\bar{F}}$. Temos:
$\frac{\bar{G}(1)}{\bar{F}(1)} = 1$, $\frac{\bar{G}(2)}{\bar{F}(2)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$, e $\frac{\bar{G}(3)}{\bar{F}(3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.
Então $\frac{\bar{G}}{\bar{F}}$ é não-crescente, e $\mathbf{f} \not\leq_{HR} \mathbf{g}$. Portanto $\mathbf{f} \leq_{ST} \mathbf{g} \not\Rightarrow \mathbf{f} \leq_{HR} \mathbf{g}$.

Exemplo A.2.2 Considere $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ duas funções discretas de probabilidade, tais que $\mathbf{f} = (0,2; 0,2; 0,6)$ e $\mathbf{g} = (0,3; 0,4; 0,3)$.

As respectivas funções de sobrevivência são: $\bar{\mathbf{F}} = (1; 0,7; 0,3)$ e $\bar{\mathbf{G}} = (1; 0,8; 0,6)$.

Vamos avaliar a desigualdade através das taxas de falhas. Temos:
$\frac{\bar{G}(1)}{\bar{F}(1)} = 1$, $\frac{\bar{G}(2)}{\bar{F}(2)} = \frac{0,8}{0,7} = \frac{8}{7}$, e $\frac{\bar{G}(3)}{\bar{F}(3)} = \frac{0,6}{0,3} = 2$.
Então $\frac{\bar{G}}{\bar{F}}$ é crescente, e $\mathbf{f} \leq_{HR} \mathbf{g}$.

Avaliamos a desigualdade através da razão de verossimilhanças:
$\frac{g(1)}{f(1)} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$, $\frac{g(2)}{f(2)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$, e $\frac{g(3)}{f(3)} = \frac{0,6}{0,3} = 2$.
Então $\frac{g}{f}$ é não-crescente, e $\mathbf{f} \not\leq_{LR} \mathbf{g}$. Portanto $\mathbf{f} \leq_{HR} \mathbf{g} \not\Rightarrow \mathbf{f} \leq_{LR} \mathbf{g}$.

Definição A.2.4. Sejam A e B dois subconjuntos na reta real. Uma função não-negativa K definida em A x B chama-se totalmente positiva de ordem 2 (TP_2) (Karlin, 1968), se para $a_1 < a_2$ e $b_1 < b_2$, com $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$,

$$K(a_1, b_1)K(a_2, b_2) - K(a_1, b_2)K(a_2, b_1) \geq 0.$$

Isto equivale a

$$\frac{K(a_1, b_1)}{K(a_1, b_2)} \leq \frac{K(a_2, b_1)}{K(a_2, b_2)}.$$

Exemplo A.2.3. Considere $\{N(t) : t \geq 0\}$ um Processo de Poisson Não Homogêneo, com função de risco $\Lambda(t)$, t $>$ 0. Para $0 \leq s \leq t$ e j $\leq$ k=0,1,2,..., temos

$$P(N(t) = k).P(N(s) = j) - P(N(t) = j).P(N(s) = k)$$

$$= \frac{e^{-\Lambda(t)}.\Lambda(t)^k}{k!}.\frac{e^{-\Lambda(s)}.\Lambda(s)^j}{j!} - \frac{e^{-\Lambda(t)}.\Lambda(t)^j}{j!}.\frac{e^{-\Lambda(s)}.\Lambda(s)^k}{k!}$$

$$= \frac{e^{-\Lambda(t)-\Lambda(s)}}{k!j!}.[\Lambda(t)^k.\Lambda(s)^j - \Lambda(t)^j.\Lambda(s)^k].$$

Basta verificar que $\Lambda(t)^k.\Lambda(s)^j - \Lambda(t)^j.\Lambda(s)^k \geq 0$.
Como $\Lambda(t)$ é crescente e k $\geq$ j=0,1,2..., temos que

$$[\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(s)}]^k \geq [\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(s)}]^j \Rightarrow \Lambda(t)^k.\Lambda(s)^j - \Lambda(t)^j.\Lambda(s)^k \geq 0.$$

Então

$$P(N(t) = k).P(N(s) = j) - P(N(t) = j).P(N(s) = k) \geq 0,$$

e portanto, $P(N(t) = k)$ é TP_2 em t $>$ 0 e k=0,1,2,... para um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de risco $\Lambda(t)$.

Teorema A.2.2 (ver Teoremas 1.A.6, 1.B.14 e 1.C.17 de Shaked e Shanthikumar (2007)) Seja $\mathcal{X}$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $\{G_\theta, \theta \in \mathcal{X}\}$ ums família de distribuições. Sejam Θ_1 e Θ_2 duas variáveis aleatórias com suportes em $\mathcal{X}$ com respectivas funções de distribuições F_1 e F_2. Sejam Y_1 e Y_2 duas variáveis aleatórias tais que $Y_i =_{ST} X(\Theta_i)$ i=1,2, onde $X(\Theta_i)$ é uma variável aleatória cuja função de distribuição é

$$H(y) = \int_{\mathcal{X}} G_\theta(y) dF_i(\theta),$$

com funccão densidade de probabilidade

$$h(y) = \int_{\mathcal{X}} g_\theta(y) dF_i(\theta).$$

Seja $\bar{H}$ sua respectiva função de sobrevivência, dada por

$$\bar{H}(y) = \int_{\mathcal{X}} \bar{G}_\theta(y) dF_i(\theta),$$

para $y \in \mathbb{R}$, i=1,2
a) Se $X(\theta) \leq_{ST} X(\theta')$, para $\theta \leq \theta'$ e $\Theta_1 \leq_{ST} \Theta_2$, então $Y_1 \leq_{ST} Y_2$;
b) Se $X(\theta) \leq_{HR} X(\theta')$, para $\theta \leq \theta'$ e $\Theta_1 \leq_{HR} \Theta_2$, então $Y_1 \leq_{HR} Y_2$;
c) Se $X(\theta) \leq_{LR} X(\theta')$, para $\theta \leq \theta'$ e $\Theta_1 \leq_{LR} \Theta_2$, então $Y_1 \leq_{LR} Y_2$.

Prova
a) $X(\theta) \leq_{ST} X(\theta')$ implica $P(X(\theta) > y)$ é crescente em θ para todo y. Então

$$P(Y_1 > y) = \int_{\mathcal{X}} P(X(\theta) > y) dF_1(\theta) \leq \int_{\mathcal{X}} P(X(\theta) > y) dF_2(\theta) = P(Y_2 > y).$$

A desigualdade vale pois $\Theta_1 \leq_{ST} \Theta_2$ e $P(Y_i > y)$ é a esperança de uma função crescente em $\theta \in \mathcal{X}$.

Portanto $Y_1 \leq_{ST} Y_2$.

b) $X(\theta) \leq_{HR} X(\theta')$ implica $P(X(\theta) > y)$ é TP_2 em $\theta \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathbb{R}$. $\Theta_1 \leq_{HR} \Theta_2$, istoé, $\bar{F}_i(\theta)$ TP_2 em i=1,2 e $\theta \in \mathcal{X}$.

Além disso $X(\theta) \leq_{HR} X(\theta')$ implica $X(\theta) \leq_{ST} X(\theta')$, ou seja, $P(X(\theta) > y)$ é crescente em $\theta > 0$.

Assim, pelo Teorema 2.1 de Joag-Dev *et al.* (1992), $\bar{H}_i(y)$ é TP_2 em i=1,2 e $y \in \mathbb{R}$ e $Y_1 \leq_{HR} Y_2$.

c) $X(\theta) \leq_{LR} X(\theta')$ implica $g_\theta(y)$ é TP_2 em $\theta \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathbb{R}$. $\Theta_1 \leq_{LR} \Theta_2$ implica $\bar{f}_i(\theta)$ TP_2 em i=1,2 e $\theta \in \mathcal{X}$. Além disso $X(\theta) \leq_{LR} X(\theta')$ implica $X(\theta) \leq_{HR} X(\theta')$, ou seja, $P(X(\theta) > y)$ é TP_2 em $\theta > 0$.

Portanto para $0 \leq y_1 \leq y_2$

$$\int\int_{\theta \leq \theta'} (g_\theta(y_1).g_\theta(y_2) - g_\theta(y_2).g_\theta(y_1)).(dF_1\theta.dF_2\theta' - dF_1\theta'.dF_2\theta) \geq 0$$

e

$$\int\int_{\theta > \theta'} (g_\theta(y_1).g_\theta(y_2) - g_\theta(y_2).g_\theta(y_1)).(dF_1\theta.dF_2\theta' - dF_1\theta'.dF_2\theta) \geq 0.$$

Ambas as integrais são não-negativas devido à integração de produto de expressões de mesmo sinal. Temos:

$$\int\int_{\mathcal{X}} (g_\theta(y_1).g_\theta(y_2) - g_\theta(y_2).g_\theta(y_1)).(dF_1\theta.dF_2\theta' - dF_1\theta'.dF_2\theta) \geq 0$$

$$\iff g_1(y_1).g_2(y_2) - g_1(y_2).g_2(y_1) - g_1(y_2).g_2(y_1) + g_1(y_1).g_2(y_2) \geq 0$$

$$\iff 2.g_1(y_1).g_2(y_2) - 2.g_1(y_2).g_2(y_1) \geq 0 \iff g_1(y_1).g_2(y_2) - g_1(y_2).g_2(y_1) \geq 0.$$

Concluímos que $g_i(y)$ é TP_2 em i=1...n e y $>$ 0 e portanto $Y_1 \leq_{LR} Y_2$.

A.3 Classes de distribuições

Inicialmente enunciamos uma propriedade que nos auxilia a provar a preservação de algumas classes de distribuição do D-espectro de um *network* para o respectivo tempo de vida.

Propriedade da diminuição da variação (Karlin, 1968)

(a) Versão usual para variáveis aleatórias com distribuições contínuas Sejam f e g duas funções reais, tais que $f : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ e $g : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Seja h tal que

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, z).g(z)dz.$$

Se f é TP_2 em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e g(t) tem no máximo r trocas de sinais em t $\in \mathbb{R}$, então h tem no máximo r-1 trocas de sinais em t $\in \mathbb{R}$.

Se h e g têm a mesma quantidade de trocas de sinais, então ocorrem no mesmo sentido.

(b) Versão usual para variáveis aleatórias com distribuições discretas Sejam f e g duas funções discretas, tais que $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Seja h tal que

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k,t).g(k).$$

Se f é TP_2 em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e g(k) tem no máximo r trocas de sinais em k $\in \mathbb{N}$, então h tem no máximo r-1 trocas de sinais em t $\in \mathbb{R}$.

Se h e g têm a mesma quantidade de trocas de sinais, em t $\in \mathbb{R}$ e em k $\in \mathbb{N}$ respectivamente, então ocorrem no mesmo sentido.

Apresentamos as classes de distribuições para tempos de vidas com distribuições contínuas, definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definição A.3.1 Considere T um tempo de vida com distribuição contínua F em $(0, \infty)$. Dizemos que T tem taxa de falha crescente (IFR) se, para x $>$ 0, $\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$ é decrescente em t $>$ 0.

Equivalentemente, se T tem função densidade de probabilidade f(t), T é IFR se $\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$ é crescente em t.

Observação A.3.1 T tem taxa de falha decrescente (DFR) se na definição acima as monotonicidades são contrárias.

Definição A.3.2 Seja T um tempo de vida com distribuição contínua F. Dizemos que T tem taxa de falha crescente em média (IFRA) se $-\frac{1}{t}.log\bar{F}(t)$ é crescente em t $>$ 0.

Equivalentemente, T possui a propriedade IFRA se $\bar{F}(t)^{\frac{1}{t}}$ é decrescente em t $>$ 0.

Observação A.3.2 T tem taxa de falha decrescente em média (DFRA) se as monotonicidades da definição acima são contrárias.

Definição A.3.3 Seja T um tempo de vida com função de distribuição contínua F. Dizemos que T é novo melhor que usado (NBU) se, para x $>$ 0 e t $>$ 0.

$$\bar{F}(x+t) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(t).$$

Observação A.3.3 T é novo pior que usado (NWU) se a desigualdade na definição acima é contrária.

Definição A.3.4 Seja T um tempo de vida com função de distribuição contínua F. Dizemos que T é novo melhor que usado em média (NBUE), para t $>$ 0 se

(i) $\mu = E(T) < \infty$;

(ii) $\bar{F}(t).\mu \geq (\leq) \int_t^{\infty} \bar{F}(x)dx$.

Observação A.3.4 T é novo pior que usado em média (NWUE) se a desigualdade na definição acima é contrária.

Definição A.3.5 Seja g uma função real. g é *star-shaped* (*antistar-shaped*) se, e somente se, $\frac{g(x)}{x}$ é crescente (decrescente) em x $>$ 0.

Definição A.3.6 Considere f uma funç ao real. f é superaditiva (subaditiva) em algum subconjunto A de $\mathbb{R}$, se, para todo x, y $\in$ A

$$f(x+y) \geq (\leq) f(x) + f(y).$$

Observe que se uma função de sobrevivência $\bar{H}$ é NBU, isto é, $\bar{H}(x+y) \leq \bar{H}(x)\bar{H}(y)$ em x $>$ 0 e y $>$ 0, $\bar{H}(x)$ é subaditiva.

Definição A.3.9 Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e x $\in$ A. Denominamos a função $Ei(x) = \int_{-x}^{\infty} \frac{e^z}{z} dz$ de Função Exponencial Integral em x.

Teorema A.3.1 - Teorema 2.17 de Barlow e Proschan (1975) Seja T um tempo de vida com distribuição contínua F. Então T é IFRA se, e somente se, $-log\bar{F}(t)$ é *star-shaped*.

Teorema A.3.2 - Teorema 2.18 de Barlow e Proschan (1975) Seja T um tempo de vida com distribuição contínua F. Então, T é IFRA (DFRA) se, e somente se, para $\lambda > 0$, $\bar{F}(t) - e^{-\lambda.t}$ tem uma troca de sinal de positivo para negativo (negativo para positivo) em relação a t $>$ 0.

Assim como as desigualdades estocásticas as classes de distribuições apresentam entre si uma hierarquia, provada neste teorema.

Teorema A.3.3 - Hierarquia das classes de distribuições (Barlow e Proschan, 1975) Seja T um tempo de vida com função de distribuição contínua (discreta) F e função densidade (discreta) de probabilidade f.

(i) Se T é IFR (DFR), então T é IFRA (DFRA);
(ii) Se T é IFRA (DFRA), então T é NBU (NWU);
(iii) Se T é NBU (NWU), então T é NBUE (NWUE).

Prova Consideramos as provas para T com função de distribuição absolutamente contínua.

(i) Provamos a partir da classe IFR.

Verificamos que R(t) é *star-shaped*, onde R(t) é a função de risco do tempo de vida T em t $>$ 0, com

$$R(t) = \int_0^t r(s)ds = -log\bar{F}(t).$$

A taxa de falha de T no instante t é

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}.$$

Como T é IFR, para $0 \leq s \leq t$, temos que $r(t) \geq r(s)$.

Se $0 \leq s' \leq t'$, então

$$\int_0^{t'} r(t)dt \geq \int_0^{t'} r(s)dt \Rightarrow R(t') \geq t'.r(s) \Rightarrow \int_0^{s'} R(t')ds \geq \int_0^{s'} t'.r(s)ds \Rightarrow s'.R(t') \geq t'.R(s')$$

$$\Rightarrow \frac{R(t')}{t'} \geq \frac{R(s')}{s'} \Rightarrow \frac{-log\bar{F}(t')}{t'} \geq \frac{-log\bar{F}(s')}{s'}.$$

Concluímos que R é *star-shaped*, portanto T é IFRA.

(ii) Provamos a partir da classe IFRA
Verificaremos se, para t e x > 0

$$\bar{F}(t+x) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(x) \iff \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \leq \bar{F}(x) \iff \frac{e^{-R(t+x)}}{e^{-R(t)}} \leq e^{-R(x)},$$

onde R é a função de risco do tempo de vida T, com

$$R(t) = \int_0^t r(s)ds = -log\bar{F}(t).$$

Observe que, para t e x reais positivos

$$R(t+x) - R(t) \geq (t+x).\frac{R(x)}{x} = (1+\frac{x}{t}).R(x) \geq R(x).$$

A primeira desigualdade é válida pois T é IFRA, ou seja, R é *star-shaped*. Portanto

$$\frac{e^{-R(t+x)}}{e^{-R(t)}} \leq e^{-R(x)}.$$

Concluímos que $\bar{F}(t+x) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(x)$ para t e x reais positivos, e T é NBU.

(iii) Provamos a partir da classe NBU
Como T é NBU, isto é, $\bar{F}(t+x) \leq \bar{F}(t).\bar{F}(x)$, temos

$$\int_0^\infty \bar{F}(t+x)dx \leq \int_0^\infty \bar{F}(t).\bar{F}(x)dx \Rightarrow \int_t^\infty \bar{F}(s)ds \leq \bar{F}(t).\int_0^\infty \bar{F}(x)dx$$
$$\Rightarrow \int_t^\infty \bar{F}(s)ds \leq \bar{F}(t).E(T).$$

A primeira implicação resulta da mudança de variáveis $s = t + x$. Concluímos que T é NBUE.

Na próxima seção verificaremos as operações algébricas dos exemplos deste trabalho.

A.4 Verificações para os Exemplos

Exemplo A.4.1. Verificação do Exemplo 2.2.1.

k	f_{1k}	f_{2k}	$\bar{F}_{1k}$	$\bar{F}_{2k}$	$\frac{\bar{F}_{2k}}{\bar{F}_{1k}}$	$\frac{f_{2k}}{f_{1k}}$
0	0,5	0,4	1	1	1	0,8
1	0,2	0,2	0,5	0,6	1,2	1,0
2	0,3	0,4	0,3	0,4	1,3	1,3

Com base na tabela acima, concluímos que $\mathbf{f_1} \leq_{ST} \mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_1} \leq_{HR} \mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_1} \leq_{LR} \mathbf{f_2}$.

Mostraremos que as mesmas desigualdades valem para o D-espectro condicional:

$$P(T_1 > t) = e^{-2t}(1 + t + 0,6t^2);$$

$$P(T_2 > t) = e^{-2t}(1 + 1,2.t + 0,8t^2).$$

Observe que

$$P(R_1 > t) = e^{-2t};$$

$$P(R_2 > t) = e^{-2t}(1 + 2t);$$

$$P(R_3 > t) = e^{-2t}(1 + 2t + \frac{4t^2}{2}) = e^{-2t}(1 + 2t + 2t^2).$$

O k-ésimo componente do D-espectro condicional do i-ésimo *network*, k=1,2,...n e i=1,2, dado $\{T_i > t\}$ é

$$p_{ik}(t) = \frac{f_{ik}.P(R_k > t)}{P(T_i > t)}.$$

Temos:

$$p_{11}(t) = \frac{0,5.e^{-2t}}{(1 + t + 0,6t^2)e^{-2t}} = \frac{0,5}{(1 + t + 0,6t^2)};$$

$$p_{12}(t) = \frac{0,2.e^{-2t}(1 + 2t)}{(1 + t + 0,6t^2)e^{-2t}} = \frac{0,2 + 0,4t}{(1 + t + 0,6t^2)};$$

$$p_{13}(t) = \frac{0,3.e^{-2t}(1 + 2t + 2t^2)}{(1 + t + 0,6t^2)e^{-2t}} = \frac{0,3 + 0,6.t + 0,6.t^2)}{(1 + t + 0,6t^2)};$$

$$p_{21}(t) = \frac{0,4.e^{-2t}}{(1 + 1,2t + 0,8.t^2)e^{-2t}} = \frac{0,4}{(1 + 1,2.t + 0,8.t^2)};$$

$$p_{22}(t) = \frac{0,2.e^{-2t}(1 + 2t)}{(1 + 1,2t + 0,8.t^2)e^{-2t}} = \frac{0,2 + 0,4.t}{(1 + 1,2.t + 0,8.t^2)};$$

$$p_{23}(t) = \frac{0,4.e^{-2t}(1 + 2t + 2.t^2)}{(1 + 1,2t + 0,8.t^2)e^{-2t}} = \frac{0,4 + 0,8.t + 0,8.t^2}{(1 + 1,2.t + 0,8.t^2)}.$$

Portanto

$$\sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t) = \frac{0,2 + 0,4t}{(1 + t + 0,6t^2)} + \frac{0,3 + 0,6.t + 0,6.t^2)}{(1 + t + 0,6t^2)} = \frac{0,5 + t + 0,6.t^2}{(1 + t + 0,6t^2)};$$

$$\sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t) = p_{13}(t) = \frac{0,3 + 0,6.t + 0,6.t^2)}{(1 + t + 0,6t^2)};$$

$$\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t) = \frac{0,2 + 0,4.t}{(1 + 1,2.t + 0,8.t^2)} + \frac{0,4 + 0,8.t + 0,8.t^2}{(1 + 1,2.t + 0,8.t^2)} = \frac{0,6 + 1,2.t + 0,8.t^2}{(1 + 1,2.t + 0,8.t^2)};$$

$$\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t) = p_{23}(t) = \frac{0,4 + 0,8.t + 0,8.t^2}{(1 + 1,2.t + 0,8.t^2)}.$$

Verificamos a ordenação estocástica para o D-espectro condicional, ou seja, mostraremos que

$$\sum_{j=k}^{3} p_{2j}(t) - \sum_{j=k}^{3} p_{1j}(t) \geq 0.$$

Temos:

$$\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t) - \sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t) = \frac{0,6+1,2.t+0,8.t^2}{(1+1,2.t+0,8.t^2)} - \frac{0,5+t+0,6.t^2}{(1+t+0,6t^2)}$$

$$= \frac{(0,6+1,2.t+0,8.t^2)(1+t+0,6t^2)-(0,5+t+0,6.t^2)(1+1,2.t+0,8.t^2)}{(1+t+0,6t^2).(1+1,2.t+0,8.t^2)}$$

$$= \frac{0,1+0,2.t+0,16.t^2}{(1+t+0,6t^2).(1+1,2.t+0,8.t^2)} \geq 0,$$

e

$$\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t) - \sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t) = \frac{0,4+0,8.t+0,8.t^2}{(1+1,2.t+0,8.t^2)} - \frac{0,3+0,6.t+0,6.t^2)}{(1+t+0,6t^2)}$$

$$= \frac{0,4(1+2t+2t^2)}{1+1,2.t+0,8.t^2} - \frac{0,3(1+2t+2t^2)}{1+t+0,6t^2}$$

$$= \frac{1+2t+2t^2}{(1+1,2.t+0,8.t^2)(1+t+0,6t^2)}.[0,4(1+t+0,6t^2)-0,3(1+1,2.t+0,8.t^2)]$$

$$= \frac{1+2t+2t^2}{(1+1,2.t+0,8.t^2)(1+t+0,6t^2)}.[0,4+0,4t+0,24t^2-(0,3+0,36.t+0,24.t^2)]$$

$$= \frac{(0,1+0,04.t).(1+2t+2t^2)}{(1+t+0,6t^2).(1+1,2.t+0,8.t^2)} \geq 0.$$

Concluímos que $\mathbf{p_1(t)} \leq_{ST} \mathbf{p_2(t)}$.

Verificaremos a preservação da desigualdade através das taxas de falhas. Temos:

$$\frac{\sum_{j=1}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=1}^{3} p_{1j}(t)} = 1;$$

$$\frac{\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t)} = \frac{\frac{0,6+1,2.t+0,8.t^2}{(1+1,2.t+0,8.t^2)}}{\frac{0,5+t+0,6.t^2}{(1+t+0,6t^2)}} = \frac{0,6+0,6t+0,36t^2+1,2t+1,2t^2+0,72t^3+0,8t^2+0,8t^3+0,48t^4}{0,5+t+0,6t^2+0,6t+1,2t^2+0,72t^3+0,4t^2+0,8t^3+0,48t^4}$$

$$= \frac{0,6+1,8t+2,32t^2+1,52t^3+0,48t^4}{0,5+1,6t+2,2t^2+1,52t^3+0,48t^4} = \frac{0,1+0,5+0,2t+1,6t+0,12t^2+2,2t^2+1,52t^3+0,48t^4}{0,5+1,6t+2,2t^2+1,52t^3+0,48t^4}$$

$$= 1 + \frac{0,1+0,2.t+0,12.t^2}{0,5+1,6.t+2,2.t^2+1,52.t^3+0,48.t^4} \geq 1 = \frac{\sum_{j=1}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=1}^{3} p_{1j}(t)};$$

$$\frac{\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t)} = \frac{\frac{0,4+0,8.t+0,8.t^2}{(1+1,2.t+0,8.t^2)}}{\frac{0,3+0,6.t+0,6.t^2)}{(1+t+0,6t^2)}} = \frac{0,4}{0,3}.\frac{\frac{1+2t+2t^2}{1+1,2t+0,8t^2}}{\frac{1+2t+2t^2}{1+t+0,6t^2}}$$

$$= \frac{4}{3}.\frac{1+t+0,6t^2}{1+1,2t+0,8t^2} = \frac{4+4t+2,4t^2}{3+3,6t+2,4t^2} = \frac{3+1+3,6t+0,4t+2,4t^2}{3+3,6t+2,4t^2}$$

$$= \frac{3+3,6t+2,4t^2}{3+3,6t+2,4t^2} + \frac{1+0,4t}{3+3,6t+2,4t^2} = 1 + \frac{1+0,4.t}{3+3,6.t+2,4.t^2}.$$

Observe que

$$\frac{\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t)} - \frac{\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t)} = 1 + \frac{1+0,4.t}{3+3,6.t+2,4.t^2} - (1 + \frac{0,1+0,2.t+0,12.t^2}{0,5+1,6.t+2,2.t^2+1,52.t^3+0,48.t^4})$$

$$= \frac{(1+0,4.t).(0,5+1,6.t+2,2.t^2+1,52.t^3+0,48.t^4)}{(3+3,6.t+2,4.t^2)(0,5+1,6.t+2,2.t^2+1,52.t^3+0,48.t^4)}$$

$$- \frac{(0,1+0,2.t+0,12.t^2).(3+3,6.t+2,4.t^2)}{(3+3,6.t+2,4.t^2)(0,5+1,6.t+2,2.t^2+1,52.t^3+0,48.t^4)}$$

$$= \frac{0,5+1,6t+2,2t^2+1,52t^3+0,48t^4+0,2t+0,64t^2+0,88t^3+0,608t^4+0,192t^5}{(3+3,6.t+2,4.t^2)(0,5+1,6.t+2,2.t^2+1,52.t^3+0,48.t^4)}$$

$$- \frac{(0,3+0,36t+0,24t^2+0,6t+0,72t^2+0,48t^3+0,36t^2+0,432t^3+0,288t^4)}{(3+3,6.t+2,4.t^2)(0,5+1,6.t+2,2.t^2+1,52.t^3+0,48.t^4)}$$

$$= \frac{0,2+0,84.t+1,52.t^2+1,488.t^3+0,8.t^4+0,192t^5}{(3+3,6.t+2,4.t^2)(0,5+1,6.t+2,2.t^2+1,52.t^3+0,48.t^4)} \geq 0.$$

Concluímos que $\frac{\sum_{j=1}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=1}^{3} p_{1j}(t)} \leq \frac{\sum_{j=2}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=2}^{3} p_{1j}(t)} \leq \frac{\sum_{j=3}^{3} p_{2j}(t)}{\sum_{j=3}^{3} p_{1j}(t)}$ e $\mathbf{p_1(t)} \leq_{HR} \mathbf{p_2(t)}$.

Avaliaremos a desigualdade através da razão de verossimilhanças. Temos:

$$\frac{p_{21}(t)}{p_{11}(t)} = \frac{\frac{0,4}{1+1,2.t+0,8.t^2}}{\frac{0,5}{1+t+0,6.t^2}} = \frac{0,8.(1+t+0,6.t^2)}{1+1,2.t+0,8.t^2};$$

$$\frac{p_{22}(t)}{p_{12}(t)} = \frac{\frac{0,2(1+2t)}{1+1,2.t+0,8.t^2}}{\frac{0,2(1+2t)}{1+t+0,6.t^2}} = \frac{1+t+0,6.t^2}{1+1,2.t+0,8.t^2};$$

$$\frac{p_{23}(t)}{p_{13}(t)} = \frac{\frac{0,4(1+2t+2t^2)}{1+1,2.t+0,8.t^2}}{\frac{0,3(1+2t+2t^2)}{1+t+0,6.t^2}} = \frac{4.(1+t+0,6.t^2)}{3.(1+1,2.t+0,8.t^2)}.$$

Concluímos que $\frac{p_{21}(t)}{p_{11}(t)} \leq \frac{p_{22}(t)}{p_{12}(t)} \leq \frac{p_{23}(t)}{p_{13}(t)}$ e $\mathbf{p_1(t)} \leq_{LR} \mathbf{p_2(t)}$.

Exemplo A.4.2 Verificação para o Exemplo 2.3.1. Sabemos, pelo Exemplo 2.2.1, que $\mathbf{f_1} \leq_{ST} \mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_1} \leq_{HR} \mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_1} \leq_{LR} \mathbf{f_2}$.

Pretende-se estudar a preservação das desigualdades estocásticas para os *networks*.

Para analisar a preservação da ordenação estocástica, temos:

$$P(T_1 > t) = 1.e^{-2t} + 0,5.e^{-2t}(2.t) + 0,3.e^{-2t}\frac{(2.t)^2}{2} = e^{-2t}(1+t+0,6.t^2);$$

$$P(T_2 > t) = 1.e^{-2t} + 0,6.e^{-2t}(2.t) + 0,4.e^{-2t}\frac{(2.t)^2}{2} = e^{-2t}(1+1,2.t+0,8.t^2).$$

Concluímos que $P(T_1 > t) \leq P(T_2 > t)$ e $T_1 \leq_{ST} T_2$.

Para estudar a preservação da desigualdade através de taxas de falhas, temos

$$\frac{P(T_2 > t)}{P(T_1 > t)} = \frac{1 + 1,2.t + 0,8.t^2}{1 + t + 0,6.t^2};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{P(T_2 > t)}{P(T_1 > t)} = \frac{0,2 + 0,4.t + 0,08.t^2}{(1 + t + 0,6.t^2)^2} \geq 0.$$

Concluímos que $\frac{P(T_2>t)}{P(T_1>t)}$ é crescente em t $>$ 0 e, portanto, $T_1 \leq_{HR} T_2$.

Analisaremos a preservação da desigualdade através da razão de verossimilhanças.

A função densidade de probabilidade do tempo de vida do i-ésimo *network* no instante t $>$ 0, i=1,2 é $h_i(t) = \sum_{k=1}^{3} f_{ik}.g_k(t)$.

Seja $g_k(t)$ é a função densidade de probabilidade de R_k, k=1,2...n.

Então

$$h_1(t) = 0,5.2.e^{-2t} + 0,2.2.e^{-2t}(2.t) + 0,3.2.e^{-2t}.\frac{(2t)^2}{2} = e^{-2t}.(1 + 0,8.t + 1,2.t^2);$$

$$h_2(t) = 0,4.2.e^{-2t} + 0,2.2.e^{-2t}(2.t) + 0,4.2.e^{-2t}.\frac{(2t)^2}{2} = e^{-2t}.(0,8 + 0,8.t + 1,6.t^2);$$

$$\frac{h_2(t)}{h_1(t)} = \frac{0,8 + 0,8.t + 1,6.t^2}{1 + 0,8.t + 1,2.t^2}.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\frac{h_2(t)}{h_1(t)} = \frac{(0,8 + 3,2t)(1 + 0,8t + 1,2t^2) - (0,8 + 0,8t + 1,6t^2)(0,8 + 2,4t)}{(1 + 0,8t + 1,2t^2)^2}$$

$$= \frac{0,8 + 0,64t + 0,96 + 3,2t + 2,56t^2 + 3,84t^3 - 0,64 - 0,64t - 1,28t^2 - 1,92t - 1,92t^2 - 3,84t^3}{(1 + 0,8t + 1,2t^2)^2}$$

$$= \frac{0,16 + 1,28.t + 0,32.t^2}{(1 + 0,8.t + 1,2.t^2)^2} \geq 0.$$

Concluímos que $\frac{h_2(t)}{h_1(t)}$ é crescente em t $>$ 0 e, portanto, $T_1 \leq_{LR} T_2$.

Exemplo A.4.3. Verificação do Exemplo 2.4.1.

A confiabilidade do i-ésimo *network* é

$$P(T_i > t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k),$$

onde $\bar{F}_{ik}$ é a função de sobrevivência do D-espectro do i-ésimo *network* a k falhas de seus *links*, i=1,2, k=0,1,2...n-1.

Temos: $\bar{F}_{11} = \bar{F}_{21} = 1$, $\bar{F}_{12} = 0,6$, $\bar{F}_{22} = 0,8$, $\bar{F}_{13} = 0,2$, $\bar{F}_{23} = 0,4$.

O k-ésimo componente do D-espectro condicional do i-ésimo *network* no instante t é

$$p_{ik}(t) = \frac{f_{ik}.P(R_k > t)}{P(T_i > t)},$$

onde R_k é o instante da k-ésima falha dos *links*.

Assim

$$P(R_1 > t) = e^{-t};$$

$$P(R_2 > t) = e^{-t}(1 + t);$$

$$P(R_3 > t) = e^{-t}(1 + t + \frac{t^2}{2});$$

$$P(T_1 > t) = e^{-t}(1 + 0,6t + 0,1t^2);$$

$$P(T_2 > t) = e^{-t}(1 + 0,8t + 0,2t^2).$$

As funções densidades de probabilidade dos tempos de vidas dos *networks* são

$$h_1(t) = \frac{-dP(T_1 > t)}{dt} = e^{-t}(1 + 0,6t + 0,1t^2) - e^{-t}(0,6 + 0,2t)$$
$$= e^{-t}(0,4 + 0,4t + 0,1t^2) = 0,2.e^{-t}.(2 + t)^2;$$
$$h_2(t) = \frac{-dP(T_2 > t)}{dt} = e^{-t}(1 + 0,8t + 0,2t^2) - e^{-t}(0,8 + 0,4t)$$
$$= e^{-t}(0,2 + 0,4t + 0,2t^2) = 0,2.e^{-t}.(1 + 2t + t^2) = 0,2.e^{-t}.(1 + t)^2.$$

Verificaremos que $\mathbf{p_1(t)} \leq_{LR} \mathbf{p_2(t)}$, isto é $\frac{p_{2k}(t)}{p_{1k}(t)}$ é crescente em k.

Temos:

$$p_{11}(t) = \frac{f_{11}.P(R_1 > t)}{P(T_1 > t)} = \frac{0,4.e^{-t}}{e^{-t}(1 + 0,6t + 0,4t^2)} = \frac{0,4}{1 + 0,6t + 0,1t^2};$$

$$p_{12}(t) = \frac{f_{12}.P(R_2 > t)}{P(T_1 > t)} = \frac{(0,4(1 + t).e^{-t}}{e^{-t}(1 + 0,6t + 0,4t^2)} = \frac{(0,4 + 0,4t)}{(1 + 0,6t + 0,1t^2)};$$

$$p_{13}(t) = \frac{f_{13}.P(R_3 > t)}{P(T_1 > t)} = \frac{0,2(1 + t + \frac{t^2}{2}).e^{-t}}{e^{-t}(1 + 0,6t + 0,4t^2)} = \frac{0,2 + 0,2t + 0,1.t^2}{1 + 0,6t + 0,1t^2};$$

$$p_{21}(t) = \frac{f_{21}.P(R_2 > t)}{P(T_2 > t)} = \frac{0,2.e^{-t}}{e^{-t}(1 + 0,8t + 0,2t^2)} = \frac{0,2}{1 + 0,8t + 0,2t^2};$$

$$p_{22}(t) = \frac{f_{22}.P(R_2 > t)}{P(T_2 > t)} = \frac{(0,4(1 + t).e^{-t}}{e^{-t}(1 + 0,8t + 0,2t^2)} = \frac{(0,4 + 0,4t)}{(1 + 0,8t + 0,2t^2)};$$

$$p_{23}(t) = \frac{f_{23}.P(R_3 > t)}{P(T_2 > t)} = \frac{0,4(1 + t + \frac{t^2}{2}).e^{-t}}{e^{-t}(1 + 0,8t + 0,2t^2)} = \frac{0,4 + 0,4t + 0,2.t^2}{1 + 0,8t + 0,2t^2}.$$

Portanto

$$\frac{p_{21}(t)}{p_{11}(t)} = \frac{\frac{0,2}{1+0,8t+0,2t^2}}{\frac{0,4}{1+0,6t+0,1t^2}} = \frac{1}{2}.(\frac{1 + 0,6t + 0,1t^2}{1 + 0,8t + 0,2t^2});$$

$$\frac{p_{22}(t)}{p_{12}(t)} = \frac{\frac{0,4(1+t)}{1+0,8t+0,2t^2}}{\frac{0,4(1+t)}{1+0,6t+0,1t^2}} = 1.(\frac{1+0,6t+0,1t^2}{1+0,8t+0,2t^2});$$

$$\frac{p_{23}(t)}{p_{13}(t)} = \frac{\frac{0,4(1+t+\frac{t^2}{2})}{1+0,8t+0,2t^2}}{\frac{0,2(1+t+\frac{t^2}{2})}{1+0,6t+0,1t^2}} = 2.(\frac{1+0,6t+0,1t^2}{1+0,8t+0,2t^2}).$$

Concluímos que $\frac{p_{21}(t)}{p_{11}(t)} \leq \frac{p_{22}(t)}{p_{12}(t)} \leq \frac{p_{23}(t)}{p_{13}(t)}$ e $\mathbf{p_1(t)} \leq_{LR} \mathbf{p_2(t)}$.
Pelo Teorema A.2.1 isto implica $\mathbf{p_1(t)} \leq_{HR} \mathbf{p_2(t)}$ e consequentemente $\mathbf{p_1(t)} \leq_{ST} \mathbf{p_2(t)}$.

A função densidade do tempo de vida residual do i-ésimo *network* em x, dado $\{T_i > t\}$ é

$$h_i(x|t) = \frac{h_i(x+t)}{P(T_i > t)}.$$

Verificaremos que $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{LR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$, isto é $\frac{h_2(x|t)}{h_1(x|t)}$ é crescente em x.
Temos:

$$\frac{h_2(x|t)}{h_1(x|t)} = \frac{\frac{h_2(x+t)}{P(T_2>t)}}{\frac{h_1(x+t)}{P(T_1>t)}} = \frac{P(T_1 > t)}{P(T_2 > t)}\frac{h_2(t+x)}{h_1(t+x)}.$$

Como $\frac{P(T_1>t)}{P(T_2>t)}$ não depende de x e é positivo, basta verificar que $\frac{h_2(t+x)}{h_1(t+x)}$ é crescente em x.
Temos:

$$\frac{h_2(t+x)}{h_1(t+x)} = \frac{(1+t+x)^2}{(2+t+x)^2} = (\frac{(1+t+x)}{(2+t+x)})^2;$$

$$\frac{d}{dx}\frac{h_2(t+x)}{h_1(t+x)} = 2.\frac{1+t+x}{2+t+x}.(\frac{(2+t+x)-(1+t+x)}{(2+t+x)^2}) = \frac{2(1+t+x)}{(2+t+x)^3} \geq 0.$$

Concluímos que $\frac{h_2(x|t)}{h_1(x|t)}$ é crescente em x e $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{LR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$. Pelo Teorema A.2.1, isto implica $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{HR} \{T_2 - t|T_2 > t\}$ e consequentemente $\{T_1 - t|T_1 > t\} \leq_{ST} \{T_2 - t|T_2 > t\}$.

Exemplo A.4.4. Verificação do Exemplo 3.1.1.
Considere $\bar{F}$ um vetor com a função de sobrevivência do D-espectro, da forma
$\bar{F} = (\bar{F}_0, \bar{F}_1, \bar{F}_2) = (1; 0,5; 0,3)$.
Verificamos que

$$\frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} \leq \frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} \iff \bar{F}_1^2 - \bar{F}_2.\bar{F}_0 \leq 0.$$

Como $\bar{F}_1^2 - \bar{F}_0.\bar{F}_2 = 0,5^2 - 1\ .\ 0,3 = -0,05 \leq 0$, concluímos que **f** é DFR.

Exemplo A.4.5. Verificação do Exemplo 3.1.2.
Verificamos a classe de distribuições do D-espectro **f**. Portanto

$$\frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_0} - \frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} = \frac{0,4}{1} - \frac{0,3}{0,4} = 0,4 - 0,75 = -0,35 \leq 0,$$

onde $\bar{F}_k$ é a função de sobrevivência do D-espectro após k falhas de seus *links*.
Então **f** é DFR.

Verificamos a convexidade da função de risco $\Lambda(t)$.
Portanto $\frac{d\Lambda(t)}{dt} = e^{-t}$ e $\frac{d^2\Lambda(t)}{dt^2} = -e^{-t} < 0$.
Então a função de risco é côncava.

A confiabilidade do *network* é

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k)$$

$$= e^{-(1-e^{-t})}(1 + 0,4.(1 - e^{-t}) + 0,15(1 - e^{-t})^2) = e^{-1}e^{-e^{-t}}.(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t}).$$

A função densidade de probabilidade de T é

$$h(t) = -\frac{d\bar{H}(t)}{dt} = -[e^{-(1-e^{-t})}.(-e^{-t})(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t}) + e^{-(1-e^{-t})}.(0,7e^{-t} - 0,3e^{-2t})]$$

$$= e^{-(1-e^{-t})}(0,85e^{-t} - 0,4e^{-2t} + 0,15e^{-3t}).$$

A taxa de falha do *network* é

$$r(t) = \frac{h(t)}{\bar{H}(t)} = \frac{e^{-(1-e^{-t})}(0,85e^{-t} - 0,4e^{-2t} + 0,15e^{-3t})}{e^{-1}e^{-e^{-t}}.(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t})} = \frac{0,85e^{-t} - 0,4e^{-2t} + 0,15e^{-3t}}{1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t}}.$$

Verificamos que a taxa de falha é decrescente

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{(-0,85e^{-t} + 0,8e^{-2t} - 0,45e^{-3t})(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t})}{(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t})^2}$$

$$-\frac{(0,85e^{-t} - 0,4e^{-2t} + 0,15e^{-3t})(0,7.e^{-t} - 0,3e^{-2t})}{(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t})^2}$$

$$= \frac{-1,3175e^{-t} + 0,595e^{-2t} - 0,1275e^{-3t} + 1,24e^{-2t} - 0,56e^{-3t} + 0,12e^{-4t} - 0,6975e^{-3t} + 0,315e^{-4t}}{(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t})^2}$$

$$-\frac{0,0675e^{-5t} + 0,595e^{-2t} - 0,255e^{-3t} - 0,28e^{-3t} + 0,12e^{-4t} + 0,105e^{-4t} - 0,045e^{-5t}}{(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t})^2}$$

$$= -\frac{1,3175e^{-t} + 1,24e^{-2t} - 0,85e^{-3t} + 0,210e^{-4t} - 0,0225e^{-5t}}{(1,55 - 0,7.e^{-t} + 0,15e^{-2t})^2} \leq 0.$$

A desigualdade é válida pois:

- $1,3175e^{-t} \geq 1,24e^{-2t}$;
- $0,85e^{-3t} \geq 0,210e^{-4t}$;
- $e^{-at} \leq 1, \forall a, t \geq 0$;
- $e^{-at} \leq e^{-bt}, a \geq b \geq 0, \forall t \geq 0$.

Concluímos que $\bar{H}(t)$ é log-convexa e T é DFR.

Exemplo A.4.6. Verificação do Exemplo 3.1.3.
Sabemos, pelo Exemplo 3.1.1, que **f** é DFR.

A confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}(t) = P(T > t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k) = e^{-e^t}.(1 + 0,5.e^t + 0,15.(e^t)^2).$$

Então

$$log\bar{H}(t) = -e^t + log(1 + 0,5.e^t + 0,15.(e^t)^2);$$

$$\frac{d}{dt}log\bar{H}(t) = -e^t + \frac{0,5.e^t + 0,3.(e^t)^2}{1 + 0,5.e^t + 0,15.(e^t)^2} = \frac{-e^t - 0,5e^{2t} - 0,15e^{3t} + 0,5e^t + 0,3e^{2t}}{1 + 0,5.e^t + 0,15.(e^t)^2}$$

$$= \frac{-0,5.e^t - 0,2.e^{2t} - 0,15.e^{3t}}{1 + 0,5.e^t + 0,15.(e^{2t})};$$

$$\frac{d^2}{dt^2}log\bar{H}(t) = \frac{(-0,5.e^t - 0,4.e^{2t} - 0,45.e^{3t})(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})}{(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})^2}$$

$$-\frac{(-0,5.e^t - 0,2.e^{2t} - 0,15.e^{3t})(0,5.e^t + 0,3.e^{2t})}{(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})^2}$$

$$= \frac{-0,5e^t - 0,25e^{2t} - 0,075e^{3t} - 0,4e^{2t} - 0,2e^{3t} - 0,06e^{4t} - 0,45e^{3t} - 0,225e^{4t} - 0,0675e^{5t}}{(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})^2}$$

$$+\frac{0,25e^{2t} + 0,15e^{3t} + 0,1e^{3t} + 0,06e^{4t} + 0,075e^{4t} + 0,045e^{5t}}{(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})^2}$$

$$= \frac{-0,5.e^t - 0,4.e^{2t} - 0,475.e^{3t} - 0,15.e^{4t} - 0,1125.e^{5t}}{(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})^2} \leq 0.$$

Portanto, $\frac{d}{dt}log\bar{H}(t)$ é decrescente em t > 0.

Observe que $\frac{d}{dt}\Lambda(t) = e^t \geq 0$ e, portanto, $\Lambda(t)$ é convexa.

Concluímos que $\bar{H}(t)$ é log-côncava e T é IFR, sentido contrário à classe de distribuição do D-espectro **f**.

Exemplo A.4.7. Verificação do Exemplo 3.1.4.

Vamos avaliar a classe IFRA (DFRA) para o D-espectro.

Considere $\bar{F}^*$ um vetor tal que, para este exemplo

$\bar{F}^* = (\bar{F}_1^{\frac{1}{1}}, \bar{F}_2^{\frac{1}{2}}) = (0,5^{\frac{1}{1}}, 0,3^{\frac{1}{2}}) = (0{,}5;\ 0{,}55)$.

Como $\bar{F}_k^{\frac{1}{k}}$ é crescente em k=1,2, concluímos que **f** é DFRA.

Exemplo A.4.8. Verificação do Exemplo 3.1.5.

Pelo Exemplo 3.1.4, sabemos que **f** é DFRA.

Verificamos se a função de risco é *star-shaped*

$$\frac{d}{dt}\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{d}{dt}\frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{d}{dt}t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.t^{-\frac{3}{2}} \leq 0.$$

Portanto, $\frac{\Lambda(t)}{t}$ é decrescente, e $\Lambda(t)$ é *antistar-shaped.*

A confiabilidade do *network* é

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k) = e^{-\sqrt{t}}(1 + \sqrt{t} + \frac{t}{2}).$$

Portanto

$$\frac{log\bar{H}(t)}{t} = -\frac{\sqrt{t}}{t} + \frac{1}{t}.log(1+\sqrt{t}+\frac{t}{2}) = t^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{t}log(1+t^{\frac{1}{2}}+\frac{t}{2}) = t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{t}log(1+t^{\frac{1}{2}}+\frac{t}{2}).$$

Verificamos que $\frac{log\bar{H}(t)}{t}$ é crescente em t.

$$\frac{d}{dt}\frac{log\bar{H}(t)}{t} = \frac{1}{2}.t^{-\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{2}.t^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}}{1+t^{\frac{1}{2}}+\frac{t}{2}} \geq 0.$$

Portanto, $log\bar{H}(t)$ é *star-shaped* e T é DFRA.

Exemplo A.4.9. Verificação do Exemplo 3.1.6.
Pelo Exemplo 3.1.4 sabemos que o D-espectro **f** é DFRA.
A confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}(t) = e^{-t^2}(1+0,5.t^2+0,15.t^4)$$

e

$$\frac{1}{t}log\bar{H}(t) = \frac{1}{t}.[-t^2+log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)] = -t + \frac{log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)}{t};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{log\bar{H}(t)}{t} = -1 + \frac{\frac{(t+0,6.t^3).t}{1+0,5.t^2+0,15.t^4} - log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)}{t^2}$$

$$= \frac{-t^2 + \frac{t^2+0,6t^4}{1+0,5.t^2+0,15.t^4} - log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)}{t^2}$$

$$= \frac{-t^2(1+0,5.t^2+0,15.t^4)+t^2+0,6t^4-(1+0,5.t^2+0,15.t^4).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)}{(1+0,5.t^2+0,15.t^4).t^2}$$

$$= \frac{-t^2-0,5.t^4-0,15.t^6+t^2+0,6t^4-(1+0,5.t^2+0,15.t^4).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)}{(1+0,5.t^2+0,15.t^4).t^2}$$

$$= \frac{0,1.t^4-0,15.t^6-(1+0,5.t^2+0,15.t^4).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)}{(1+0,5.t^2+0,15.t^4).t^2}.$$

Como o denominador é positivo, é suficiente analisar o sinal do numerador.
Seja

$$\phi(t) = 0,1.t^4 - 0,15.t^6 - (1+0,5.t^2+0,15.t^4).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4).$$

Temos: $\phi(0) = 0$ e

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 0,4t^3 - 0,9t^5 - [(t+0,6t^3).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)+(1+0,5.t^2+0,15.t^4).\frac{(t+0,6t^3}{1+0,5.t^2+0,15.t^4}]$$

$$= 0,4t^3 - 0,9t^5 - [(t+0,6t^3).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)+(1+0,5.t^2+0,15.t^4).\frac{t+0,6t^3}{1+0,5.t^2+0,15.t^4}]$$

$$= 0,4t^3 - 0,9t^5 - [(t+0,6t^3).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4)+t+0,6t^3]$$

$$= -t - 0,2t^3 - 0,9t^5 - (t+0,6t^3).log(1+0,5.t^2+0,15.t^4) \leq 0.$$

Então $\phi(t) \leq 0$ e portanto

$$\frac{d}{dt}\frac{log\bar{H}(t)}{t} \leq 0.$$

Concluímos que $\frac{1}{t}log\bar{H}(t)$ é decrescente em t e T é IFRA, em sentido contrário ao D-espectro **f**.

Observe que $\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{t^2}{t} = t$ é crescente e, portanto, a função de risco $\Lambda(t) = t^2$ 'e *star-shaped*. Tal condição não implica a preservação da classe do D-espectro para o tempo de vida.

Exemplo A.4.10. Verificação do Exemplo 3.1.7.
Como $\bar{F}_2 - \bar{F}_1.\bar{F}_1 = 0,3 - 0,5.0,5 = 0,05 > 0$, o D-espectro é NWU.

Exemplo A.4.11. Verificação do Exemplo 3.1.8.

Como $\bar{F}_2 - \bar{F}_1.\bar{F}_1 = 0,6 - 0,9.0,9 = -0,21 \leq 0$, **f** é NBU.

Observe que $\Lambda(t+x) = \lambda.t + \lambda.x = \Lambda(t) + \Lambda(x)$, ou seja, $\Lambda(t) = \lambda.t$ é superaditiva e subaditiva.

A confiabilidade do *network* é

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k) = e^{-t}(1 + 0,9.t + 0,3.t^2).$$

Portanto

$$\bar{H}(t+x) - \bar{H}(t)\bar{H}(x) = e^{-(t+x)}(1 + 0,9(t+x) + 0,3(t+x)^2)$$

$$-e^{-t}(1 + 0,9t + 0,3t^2)e^{-x}(1 + 0,9x + 0,3x^2)$$

$$= 1 + 0,9t + 0,9x + 0,3t^2 + 0,6tx + 0,3x^2$$

$$-(1 + 0,9x + 0,3x^2 + 0,9t + 0,81tx + 0,27tx^2 + 0,3t^2 + 0,27t^2x + 0,09t^2x^2)$$

$$= -0,21tx - 0,27t^2x - 0,27tx^2 - 0,09t^2x^2 \leq 0.$$

Concluímos que T é NBU.

Exemplo A.4.12. Verificação do Exemplo 3.1.9.
Segundo o Exemplo 3.1.7, o D-espectro **f** é NWU.
A confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}(t) = e^{-t^2}(1 + 0,5.t^2 + 0,15.t^4).$$

Tome $t_3 = 1$, $t_1 = 0,3$ e $t_2 = 0,7$.
Assim,

$$P(T > 1) - P(T > 0,3).P(T > 0,7) = 0,60 - 1,41 = -0,81 < 0.$$

Então, existem $t_3 = 1$, $t_1 = 0,3$ e $t_2 = 0,7$, com $t_3 = t_1 + t_2$ tais que

$$P(T > t_3) - P(T > t_1).P(T > t_2) \leq 0.$$

Observe que, para todo x, y > 0, $\Lambda(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2.x.y \geq x^2 + y^2 = \Lambda(x) + \Lambda(y)$ e, portanto, a função de risco $\Lambda(t) = t^2$ é superaditiva.

Concluímos que T não é NWU, contrariamente à classe do D-espectro **f**.

Exemplo A.4.13. Verificação do Exemplo 3.1.10.
Analisamos a preservação da classe NBUE (NWUE). Observe que
(i) $\mu = \sum_{j=1}^{3} \bar{F}_j = 1,8 < \infty$;
(ii) Avaliamos o sinal de $\sum_{j=k}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_k$ para k=1,2,3.

Se k = 1, então $\sum_{j=1}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_1 = 1,8 - 1,8.0,5 = 0,9 > 0$;
Se k = 2, então $\sum_{j=2}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_2 = 0,8 - 1,8.0,3 = 0,26 > 0$;
Se k = 3, então $\sum_{j=3}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_3 = 0,3 - 1,8.0 = 0,3 > 0$.

Assim, $\sum_{j=k}^{3} \bar{F}_{j-1} - \mu.\bar{F}_k > 0$, para k=1,2,3.
Portanto, o D-espectro **f** é NWUE.

Exemplo A.4.14. Verificação do Exemplo 3.1.11.
Do Exemplo 3.1.8, sabemos que **f** é NBU, o que implica, pelo Teorema A.3.3, que **f** é NBUE.
Observe que

$$\frac{\Lambda(t+x)}{t+x} - \frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{\lambda.(t+x)}{t+x} - \frac{\lambda.(t)}{t} = \lambda - \lambda = 0,$$

isto é, a função de risco $\Lambda(t) = \lambda.t$ é *star-shaped* e *antistar-shaped*.

A confiabilidade do *network* é

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k) = e^{-t}(1 + 0,9t + 0,3t^2).$$

O tempo de vida médio do *network* é

$$\mu = E(T) = \int_0^\infty \bar{H}(t)dt = \int_0^\infty e^{-t}(1+0,9t+0,3t^2)dt = \int_0^\infty e^{-t}dt + \int_0^\infty 0,9te^{-t}dt + \int_0^\infty 0,3t^2e^{-t}dt$$

$$= 1 + 0,9 + 0,6 = 2,5.$$

A segunda integral resulta de uma integração por partes e a terceira como integração da função densidade Gama(3,1).

Vamos veirificar que $\bar{H}(t).\mu \geq \int_t^\infty \bar{H}(s)ds$. Observe que

$$\int_t^\infty \bar{H}(s)ds = \int_t^\infty e^{-s}(1 + 0,9s + 0,3s^2)ds = \int_t^\infty e^{-s}ds + \int_t^\infty 0,9se^{-s}ds + \int_t^\infty 0,3s^2e^{-s}ds$$

$$= e^{-t} + 0,9.e^{-t}(1+t) + 0,3e^{-t}(1+2t+2t^2) = e^{-t}(2,5+1,5.t+0,3.t^2) = 2,5.e^{-t}(1+0,6.t+0,12.t^2)$$

$$\leq \mu.e^{-t}(1 + 0,9t + 0,3t^2) = \mu.\bar{H}(t).$$

A segunda e a terceira integrais resultam de integrações por partes, sendo uma para a segunda e duas para a terceira integral.
Concluímos que T é NBUE.

Exemplo A.4.15. Verificação do Exemplo 3.1.12.

Queremos avaliar a preservação da classe de distribuição NBUE (NWUE).
Observe que

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{e^t}{t} = \frac{e^t.t - e^t}{t^2} = \frac{e^t}{t^2}(t-1).$$

Concluímos que $\frac{d\Lambda(t)}{dt} \geq (\leq) 0 \iff t \geq (\leq) 1$.
Portanto, $\Lambda(t)$ é *antistar-shaped* para t ≤ 1 e *star-shaped* para $t \geq 1$.

Segundo o Exemplo 3.1.10, o D-espectro **f** é NWUE.

A confiabilidade do *network* no instante t > 0 é

$$\bar{H}(t) = e^{-e^t}.(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t}).$$

Verificamos a parte (i) da classe NBUE (NWUE)
O tempo de vida médio do *network* é

$$\mu = E(T) = \int_0^\infty \bar{H}(t)dt = \int_0^\infty e^{-e^t}.(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})dt.$$

Aplicando a mudança de variável $v = e^t$, temos

$$\mu = \int_1^\infty e^{-v}.(1 + 0,5.v + 0,15.v^2)\frac{dv}{v}$$

$$= Ei(-1) + 0,8.e^{-1} \approx 0,22 + 0,8.e^{-1} \approx 0,51 < \infty,$$

onde Ei(.) é a Função Exponencial Integral (Definição A.3.9).

(ii) Considere $t_0 = 2$. Então

$$\bar{H}(2) = e^{-e^2}(1 + 0,5.e^2 + 0,15.e^4) \approx 0,08;$$

$$\int_2^\infty \bar{H}(t)dt = \int_2^\infty e^{-e^t}.(1 + 0,5.e^t + 0,15.e^{2t})dt.$$

Aplicando a mudança de variável v $= e^t$, temos

$$\bar{H}(2) = \int_{e^2}^\infty e^{-v}.(1 + 0,5.v + 0,15.v^2)\frac{dv}{v} = Ei(-e^2) + 0,001 \approx 0,00107.$$

Portanto

$$\int_2^\infty \bar{H}(t)dt - \mu.\bar{H}(2) = 0,00107 - 0,51.0,008 \approx -0,003 < 0.$$

Então existe $t_0 = 2$ tal que

$$\int_2^\infty \bar{H}(t)dt - \mu.\bar{H}(2) < 0.$$

Concluímos que T não é NWU, contrariamente ao D-espectro **f**.

Exemplo A.4.16. Verificação do Exemplo 3.2.1.
Seja $\bar{F}_k$ a função de sobrevivência do D-espectro **f**.

Temos: $\bar{F}_0 = 1$ $\bar{F}_1 = 0,9$ $\bar{F}_2 = 0,6$.

Verificaremos se **f** é IFR, ou seja, para todo k, l = 1,2,...5

$$\frac{\bar{F}_{k+l}}{\bar{F}_k} \geq \frac{\bar{F}_{k+1+l}}{\bar{F}_{k+1}} \iff \bar{F}_{k+l}.\bar{F}_{k+1} - \bar{F}_{k+1+l}.\bar{F}_k \geq 0.$$

Concluímos que $\bar{F}_2^2 - \bar{F}_1.\bar{F}_3 = 0,9^2 - 1.0,3 = 0,21 \geq 0$.

Portanto $\bar{F}_{k+l}.\bar{F}_{k+1} - \bar{F}_{k+1+l}.\bar{F}_k \geq 0$, para todo k, l = 1,2,...5 e **f** é IFR. Segundo o Teorema A.3.3, **f** é IFRA, NBU e NBUE.

O k-ésimo termo do D-espectro condicional em t é

$$p_k(t) = \frac{f_k.P(R_k > t)}{P(T > t)}.$$

A confiabilidade do *network* é

$$P(T > t) = e^{-t^2}(1 + 0,9t^2 + \frac{0,6}{2}t^4) = e^{-t^2}(1 + 0,9t^2 + 0,3t^4).$$

Assim

$$P(R_1 > t) = e^{-t^2};$$

$$P(R_2 > t) = e^{-t^2}(1 + t^2);$$

$$P(R_3 > t) = e^{-t^2}(1 + t^2 + \frac{t^4}{2}).$$

Portanto

$$p_1(t) = \frac{0,1}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4};$$

$$p_2(t) = \frac{0,3 + 0,3t^2}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4};$$

$$p_3(t) = \frac{0,6 + 0,6t^2 + 0,3t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4}.$$

Além disso

$$\sum_{k=1}^{3} p_k(t) = 1;$$

$$\sum_{k=2}^{3} p_k(t) = \frac{0,3 + 0,3t^2}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4} + \frac{0,6 + 0,6t^2 + 0,3t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4} = \frac{0,9 + 0,9t^2 + 0,3t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4};$$

$$\sum_{k=3}^{3} p_k(t) = p_3(t) = \frac{0,6 + 0,6t^2 + 0,3t^4}{1 + 0,9t^2 + 0,3t^4}.$$

Verificamos que $\mathbf{p(t)}$ é IFR, ou seja, $\frac{\sum_{k=j+1}^{3} p_k(t)}{\sum_{k=j}^{3} p_k(t)}$ é decrescente em j, ou seja,

$$(\sum_{k=j}^{3} p_k(t))^2 - \sum_{k=j-1}^{3} p_k(t).\sum_{k=j+1}^{3} p_k(t) \geq 0.$$

Então

$$(\sum_{k=2}^{3} p_k(t))^2 - \sum_{k=1}^{3} p_k(t).\sum_{k=3}^{3} p_k(t) = (\frac{0,9+0,9t^2+0,3t^4}{1+0,9t^2+0,3t^4})^2 - 1.\frac{0,6+0,6t^2+0,3t^4}{1+0,9t^2+0,3t^4}$$

$$= \frac{0,81+1,62t^2+1,35t^4+0,54t^6+0,09t^8}{(1+0,9t^2+0,3t^4)^2} - \frac{(0,6+0,6t^2+0,3t^4)(1+0,9t^2+0,3t^4)}{(1+0,9t^2+0,3t^4)^2}$$

$$= \frac{0,81+1,62t^2+1,35t^4+0,54t^6+0,09t^8}{(1+0,9t^2+0,3t^4)^2} - \frac{0,6+1,14t^2+1,02t^4+0,45t^6+0,09t^8}{(1+0,9t^2+0,3t^4)^2}$$

$$= \frac{0,21+0,48t^2+0,33t^4+0,09t^6}{1+0,9t^2+0,3t^4} \geq 0.$$

Concluímos que $\mathbf{p(t)}$ é IFR. Isto implica, segundo o Teorema A.3.3, que *p(t)* é IFRA.

Verificamos que $\mathbf{p(t)}$ é NBU, isto é

$$\sum_{k=3}^{3} p_k(t) - \sum_{k=1}^{3} p_k(t).\sum_{k=2}^{3} p_k(t) = \frac{0,6+0,6t^2+0,3t^4}{1+0,9t^2+0,3t^4} - 1.\frac{0,9+0,9t^2+0,3t^4}{1+0,9t^2+0,3t^4} \leq 0.$$

Portanto $\mathbf{p(t)}$ é NBU.

Verificaremos que $\mathbf{p(t)}$ é NBUE, ou seja $\sum_{k=j}^{3} p_k(t).\mu(t) - \sum_{k=j}^{3}\sum_{l=k}^{3} p_l(t) \geq 0$, onde

$$\mu(t) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=j}^{3} p_k(t) = \frac{2,5+1,8t^2+0,9t^4}{1+0,9t^2+0,3t^4}.$$

Portanto

$$\sum_{k=2}^{3} p_k(t).\mu(t) - \sum_{k=2}^{3}\sum_{l=k}^{3} p_l(t) = \frac{0,9+0,9t^2+0,3t^4}{1+0,9t^2+0,3t^4}.\frac{2,5+1,8t^2+0,9t^4}{1+0,9t^2+0,3t^4} - \frac{1,5+1,5t^2+0,6t^4}{1+0,9t^2+0,3t^4}$$

$$= \frac{0,75+1,02t^2+0,78t^4+0,36t^6+0,09t^8}{(1+0,9t^2+0,3t^4)^2} \geq 0.$$

Portanto $\mathbf{p(t)}$ é NBUE.

Exemplo A.4.17 Verificação do Exemplo 3.3.1.

Nosso interesse é analisar a preservação das classes de distribuições do D-espectro condicional $\mathbf{p(t)}$ para o tempo de vida do *network*.

Seja $\bar{F} = (\bar{F}_0, \bar{F}_1, \bar{F}_2)$, onde $\bar{F}_k$ é a função de sobrevivência do D-espectro $\mathbf{f}$ a k falhas dos *links*.

A confiabilidade do *network* no instante t é

$$\bar{H}(t) = P(T > t) = \sum_{k=0}^{2} \bar{F}_k.P(N(t) = k) = 1.e^{-t^2} + 0,7.e^{-t^2}.t^2 + \frac{0,4}{2}.e^{-t^2}.t^4 = e^{-t^2}(1 + 0,7.t^2 + 0,2.t^4).$$

O k-ésimo componente do D-espectro condicional do *network* é

$$p_k(t) = \frac{f_k.P(R_k > t)}{\bar{H}(t)},$$

onde R_k é o instante da k-ésima falha dos *links*.

Verificaremos que $\mathbf{p(t)}$ tem taxa de falha crescente, isto é, $\frac{p_k(t)}{\sum_{j=k}^{n} p_j(t)}$ é crescente em k=1,2,3,4.

Temos:

$$p_1(t) = \frac{f_1.P(R_1 > t)}{\bar{H}(t)} = \frac{0,3.e^{-t^2}}{e^{-t^2}(1+0,7.t^2+\frac{0,2}{.}t^4)} = \frac{0,3}{1+0,7.t^2+0,2.t^4};$$

$$p_2(t) = \frac{f_2.P(R_2 > t)}{\bar{H}(t)} = \frac{0,3.(e^{-t^2}+e^{-t^2}.t^2)}{e^{-t^2}(1+0,7.t^2+0,2.t^4)} = \frac{0,3+0,3.t^2}{1+0,7.t^2+0,2.t^4};$$

$$p_3(t) = \frac{f_3.P(R_3 > t)}{\bar{H}(t)} = \frac{0,4.(e^{-t^2}+e^{-t^2}.t^2+e^{-t^2}.\frac{t^4}{2})}{e^{-t^2}(1+0,7.t^2+0,2.t^4)} = \frac{0,4+0,4.t^2+0,2.t^4}{1+0,7.t^2+0,2.t^4}.$$

A função de sobrevivência do D-espectro condicional para os valores de k é

$$\sum_{j=1}^{3} p_j(t) = 1;$$

$$\sum_{j=2}^{3} p_j(t) = \frac{0,7+0,7.t^2+0,2.t^4}{1+0,7.t^2+0,2.t^4};$$

$$\sum_{j=3}^{3} p_j(t) = \frac{0,4+0,4.t^2+0,2.t^4}{1+0,7.t^2+0,2.t^4}.$$

A primeira igualdade vale, pois o D-espectro condicional é uma função discreta de probabilidades para cada t > 0, fixado.

As taxas de falhas para os componentes do D-espectro condicional em t são

$$r_1(t) = \frac{p_1(t)}{\sum_{j=1}^{3} p_j(t)} = \frac{\frac{0,3}{1+0,7.t^2+0,2.t^4}}{1} = \frac{0,3}{1+0,7.t^2+0,2.t^4};$$

$$r_2(t) = \frac{p_2(t)}{\sum_{j=2}^{3} p_j(t)} = \frac{\frac{0,3+0,3.t^2}{1+0,7.t^2+0,2.t^4}}{\frac{0,7+0,7.t^2+0,2.t^4}{1+0,7.t^2+0,2.t^4}} = \frac{0,3+0,3.t^2}{0,7+0,7.t^2+0,2.t^4};$$

$$r_3(t) = \frac{p_3(t)}{\sum_{j=3}^{3} p_j(t)} = \frac{\frac{0,4+0,4.t^2+0,2.t^4}{1+0,7.t^2+0,2.t^4}}{\frac{0,4+0,4.t^2+0,2.t^4}{1+0,7.t^2+0,2.t^4}} = 1.$$

Observe que $r_1(t) \leq r_2(t)$, pois $0,3 \leq 0,3+0,3.t^2$ e $1+0,7.t^2+0,2.t^4 \geq 0,7+0,7.t^2+0,2.t^4$. É imediato concluir que $r_2(t) \leq r_3(t)$.

Portanto, o D-espectro condicional $\mathbf{p(t)}$ é IFR. Pelo Teorema A.3.3, $\mathbf{p(t)}$ também é IFRA, NBU e NBUE.

Observe que $\frac{d^2\Lambda(t)}{dt^2} = \frac{d^2t^2}{dt^2} = 2 > 0$, e, portanto, a função de risco $\Lambda(t) = t^2$ é côncava.

Note que $\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{t^2}{t} = t$ e $\frac{d}{dt}\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{d}{dt}\frac{t^2}{t} = 1 > 0$, isto é, $\frac{\Lambda(t)}{t}$ é crescente em t > 0. Portanto, $\Lambda(t) = t^2$ é *star-shaped*.

Observe que $\Lambda(t+x) = (t+x)^2 = t^2+x^2+2.t.x \geq t^2+x^2 = \Lambda(t)+\Lambda(x)$, ou seja, a função de risco é superaditiva.

Verificamos a logconcavidade de $\bar{H}(t)$. Temos:

$$log\bar{H}(t) = -t^2 + log(1 + 0,7t^2 + 0,2t^4);$$

$$\frac{d}{dt}log\bar{H}(t) = -2t + \frac{1,4t + 0,8t^3}{1 + 0,7t^2 + 0,2t^4};$$

$$\frac{d^2}{dt^2}log\bar{H}(t) = -2 + \frac{(1,4 + 2,4t^2)(1 + 0,7t^2 + 0,2t^4)}{(1 + 0,7t^2 + 0,2t^4)^2} - \frac{(1,4t + 0,8t^3)(1,4t + 0,8t^3)}{(1 + 0,7t^2 + 0,4t^4)^2}$$

$$= -2 + \frac{1,4 + 0,98t^2 + 0,28t^4 + 2,4t^2 + 1,68t^4 + 0,48t^6 - 1,96t^2 - 2,24t^4 - 0,64t^6}{(1 + 0,7t^2 + 0,4t^4)^2}$$

$$\frac{-2(1 + 0,7t^2 + 0,4t^4)^2 + 1,4 + 1,42t^2 - 0,28t^4 - 0,16t^6}{(1 + 0,7t^2 + 0,4t^4)^2}$$

$$= \frac{-2(1 + 1,4t^2 + 0,49t^4 + 0,4t^4 + 0,28t^6 + 0,16t^8)+}{(1 + 0,7t^2 + 0,4t^4)^2} + \frac{1,4 + 1,42t^2 - 0,28t^4 - 0,16t^6}{(1 + 0,7t^2 + 0,4t^4)^2}$$

$$= \frac{-0,6 - 1,38t^2 - 1,5t^4 - 0,4t^6 - 0,32t^8}{(1 + 0,7t^2 + 0,4t^4)^2} \leq 0.$$

Concluímos que $\bar{H}(t)$ é log-côncava e T é IFR. Usando o Teorema A.3.3, isto implica que T é IFRA, NBU e NBUE.

Referências Bibliográficas

A-Hameed e Proschan(1973) A-Hameed e Frank Proschan. Nonstationary shock models. *Stochastic Processes and their Applications I*, 1:383–404. Citado na pág. 3, 21, 25, 28, 31

Arnold *et al.***(1998)** B.C. Arnold, N. Balakrishnan e H.N. Nagraja. *Records*. John Wiley and Sons. Citado na pág. 3, 4

Balakrishnan e Asadi(2012) N. Balakrishnan e M. Asadi. A proposed measure of residual life of live components of a coherent system. *IEEE Transactions on Reliability*, 61:41–49. Citado na pág. 3

Barlow e Proschan(1975) Richard Barlow e F. Proschan. *Statistical theory of reliability and life testing*. To Begin With, Silver Spring, 7 edição. Citado na pág. 19, 23, 26, 29, 41, 43, 52

Boland *et al.***(2003)** P.J. Boland, F.J. Samaniego e E.M. Vestrup. Linking dominations and signatures in network reliability. *Mathematical and Statistical Methods in Reliability*, páginas 89–103. Citado na pág. 3

Bueno(2015) Vanderlei Da Costa Bueno. Preservation of non-parametric distribution classes under a system signature point process. Em *Signature Structural Reliability*, 60th ISI - World Statistics Congress, Rio de Janeiro. Citado na pág. 41

Esary *et al.***(1973)** Esary, Marshall e Frank Proschan. Shock models and wear processes. *The Annals of Probability*, 1:627–649. Citado na pág. 3, 21, 24, 27, 31

Gertsbakh e Shpungin(2011) I. Gertsbakh e Y. Shpungin. Network reliability and resilience. *Springer-Verlag*. Citado na pág. 3, 41

Gupta e Kirman(1988) R.C. Gupta e S.N.U.A. Kirman. Closure and monotonicity properties of nonhomogeneous poisson processes and record values. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2:475–484. Citado na pág. 3, 4

Joag-Dev *et al.***(1992)** Kumar Joag-Dev, Subhash Kochar e Frank Proschan. A general composition theorem and its applications to certain partial orderings of distributions. Citado na pág. 50

Karlin(1968) Samuel Karlin. *Total Positivity*, volume 1. Stanford University Press. Citado na pág. 48, 50

Randles e Wolfe(1979) Ronald H. Randles e Douglas A. Wolfe. *Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics*, volume 25. Wiley Series on Personality Processes. Citado na pág. 46

Samaniego *et al.***(2009)** Francisco J. Samaniego, N. Balakrishnan e Jorge Navarro. Dynamic signatures and their use in comparing the reliability of new and used systems. *Wiley Periodicals, Inc*, 56:577–591. Citado na pág. 3, 44, 45

Shaked e Shanthikumar(2007) M. Shaked e J. G. Shanthikumar. *Stochastic Orders*. Springer-Verlag. Citado na pág. 47, 49

Zarezadeh e Asadi(2013) S. Zarezadeh e M. Asadi. Network reliability modeling under stochastic process of component failures. *IEEE Transactions on Reliability*, 62:917–929. Citado na pág. 2, 5, 6, 13, 15

Zarezadeh *et al.***(2013)** S. Zarezadeh, M. Asadi e N. Balakrishnan. Dynamic network reliability modeling under nonhomogeneous poisson processes of component failures. *European Journal of Operational Research*, 232:561–571. Citado na pág. 1, 2, 6, 7, 17