**Comparação de métodos de estimação de
modelos de apreçamento de ativos**

Aníbal Emiliano da Silva Neto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística
Orientadora: Profa. Dra. Chang Chiann

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu
auxílio financeiro da CAPES.

São Paulo, agosto de 2012

**Comparação de métodos de estimação de
modelos de apreçamento de ativos**

Esta é a versão original da dissertação elaborada pelo
candidato Aníbal Emiliano da Silva Neto, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Comparação de métodos de estimação de modelos de apreçamento de ativos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 14/08/2012. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^ª. Dra. Chang Chiann (orientadora) – IME/USP
- Prof^ª. Dra. Airlane Pereira Alencar – IME/USP
- Prof. Dr. Guilherme de Oliveira Lima Cagliari Marques - UFABC

Dedico esta dissertação à minha orientadora Chang Chiann, por tudo que aprendi com ela e pelo apoio de mãe que me deu no decorrer de nossa convivência.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha mãe Odete e ao meu pai Francisco, pelos excelentes pais que sempre foram e pelo imenso apoio que me deram durante toda a minha vida.

À minha orientadora Chang Chiann, pela paciência de mãe que teve nos meses em me orientar.

Aos meus irmãos Mendell e Marcela, por sempre acreditarem em mim.

Ao meu sobrinho Francisco Antônio, por proporcionar tanta alegria à nossa família.

Aos meus grandes amigos Pedro e Rafael.

À minha querida amiga dona Edna, pela assistência e por me fazer rir nesses dois anos em São Paulo.

A todos os amigos e colegas do IME.

Resumo

SILVA NETO, A. E. **Comparação de Métodos de Estimação de Modelos de Apreçamento de Ativos**. 2012. 126 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

O objetivo deste trabalho é comparar diferentes formas de estimação de modelos de apreçamento de ativos. Além dos métodos tradicionais, que utilizam toda a amostra no processo de estimação dos parâmetros do modelo, será utilizado o método *rolling*, que estima os parâmetros através da utilização de janelas móveis de tamanho fixo. Com isso, utilizando a técnica de *backtesting*, procura-se averiguar se o método *rolling* proporciona um ganho na qualidade de ajuste em modelos de apreçamento de ativos.

Palavras-chave: modelos de apreçamento de ativos, análise *rolling*, modelos de fatores, modelos de consumo.

Abstract

SILVA NETO, A. E. **Comparison of methods for estimation of asset pricing models**. 2012. 126 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

The aim of this project is to compare methods of estimating asset pricing models. In addition to using traditional methods, which estimate the model's parameters by using the entire sample at once, the rolling method will be used. This method estimates the model's parameters by using a rolling window of fixed size through the sample. By using backtesting, we seek to investigate whether the rolling approach provides an improvement in the goodness of fit in asset pricing models.

Keywords: asset pricing models, rolling analysis, factor models, consumption-based models.

Sumário

Lista de Símbolos.....	15
1. Introdução.....	16
2. Conceitos Básicos.....	18
2.1. Preferências do Consumidor	18
2.2. Ativos, Ações e Dividendos	20
2.3. Retorno de Um Ativo.....	21
2.4. Payoff de Um Ativo.....	21
2.5. Beta de Um Ativo.....	22
3. Modelos de Apreçamento de Ativos.....	24
3.1. Modelos Baseados no Consumo	24
3.1.1. Problema do Investidor-Consumidor.....	25
3.1.2. O Fator Estocástico de Desconto.....	27
3.2. Fatos Clássicos em Finanças.....	28
3.3. Modelo com Função Utilidade Potência	32
3.4. Modelo com Função Utilidade Hábitos Externos	34
3.5. Modelos Lineares de Fatores.....	36
3.5.1. Modelo CAPM Sharpe-Lintner.....	36
3.5.2. CAPM Dinâmico.....	38
4. Métodos de Estimação.....	40
4.1. Mínimos Quadrados Ordinários.....	40
4.1.1. Estimação por Máxima Verossimilhança.....	42
4.2. Método Generalizado dos Momentos.....	44
5. Análise <i>Rolling</i> de Séries Temporais.....	49
5.1. Estatísticas Univariadas.....	49
5.2. Estatísticas Bivariadas.....	53
5.3. Regressão <i>Rolling</i>	54
5.4. Previsão <i>Rolling</i> e <i>Backtesting</i>	57

5.4.1. Comparação de Acurácia Preditiva.....	58
6. Metodologia Proposta.....	61
6.1. Obtenção do Fator Estocástico de Desconto.....	61
6.2. Estimação e Avaliação dos Modelos de Apreçamento.....	64
6.3. Dados Utilizados.....	69
7. Aplicações.....	70
7.1. Estimação e Avaliação dos dos Modelos de Fatores.....	73
7.1.1. Setor Alimentos e Bebidas.....	73
7.1.2. Setor Finanças e Seguros.....	85
7.1.3. Avaliação para os 13 Setores Restantes.....	99
7.1.4. Modelo CAPM – Fator Estocástico de Desconto	102
7.2. Estimação e Avaliação dos Modelos de Consumo.....	108
8. Considerações Finais.....	115
Referências.....	117
Apêndice 1: Retornos Líquidos dos Portfólios Setoriais.....	119
Apêndice 2: Composição dos Portfólios Setoriais.....	122
Apêndice 3: Resumo das Estimativas Obtidas.....	125
Apêndice 4: Retornos Líquidos de Variáveis Financeiras.....	126

Lista de Símbolos e Abreviações

$X \xrightarrow{P} Y$: A variável aleatória X convergem em probabilidade para Y .

s. a.: “sujeito à”, aplicando-se a um problema de otimização condicionada.

$E(.)$: Esperança de uma variável aleatória.

OLS: Método de Mínimos Quadrados Ordinários (*Ordinary Least Squares*).

RLS: Método de Mínimos Quadrados Recursivos (*Recursive Least Squares*).

GMM: Método Generalizado dos Momentos (*Generalized Method of Moments*).

R_t^{ei} : Excesso de retorno do ativo (ou portfólio) i em relação ao ativo livre de risco, no tempo t .

R_t^{em} : Excesso de retorno do portfólio de mercado em relação ao ativo livre de risco, no tempo t .

Capítulo 1. Introdução

Desde a sua primeira versão, creditada a Sharpe (1964) e Lintner (1965), o modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) é o primeiro, mais famoso e mais utilizado modelo de apreçamento de ativos até os tempos de hoje. Ele preconiza que todo o risco sistemático dos ativos é capturado apenas pelo índice de mercado. O CAPM deu origem ao estudo de apreçamento de ativos e, desde então, várias extensões a esse modelo foram desenvolvidas. Essas extensões, em grande parte, tiveram como objetivo tratar o beta do ativo (uma medida do grau de exposição de um ativo ao risco de mercado) como um parâmetro que varia ao longo do tempo, e não um parâmetro estático, como foi proposto primeiramente por Sharpe (1964). Um dos mais famosos exemplos nesse sentido é o ICAPM (*Intertemporal Capital Asset Pricing Model*), proposto por Merton (1973). Os mais recentes modelos CAPM buscam um comportamento estocástico para o beta de mercado. O trabalho de Korkas (2010), por exemplo, visa atribuir ao beta de mercado um comportamento autorregressivo de ordem 1. Adicionalmente, os modelos que se sucederam ao CAPM buscaram inserir novas variáveis que explicassem o comportamento dos retornos dos ativos (conhecidas como *fatores*), e não apenas o portfólio de mercado. Como exemplo desses modelos, podemos citar o modelo de apreçamento APT (*Arbitrage Pricing Model*) de Ross (1976), que ficou conhecido como um tipo de modelo de apreçamento chamado *multifatorial*, em contraste ao CAPM tradicional, um modelo *unifatorial*.

Paralelamente, outro tipo de modelagem de apreçamento de ativos, mais geral, foi proposta, e seus modelos ficaram conhecidos como Modelos Baseados no Consumo (*Consumption-Based Models*), em contraste aos Modelos de Fatores (*Factor Models*). A característica fundamental desse tipo de modelo é que eles partem dos chamados fundamentos microeconômicos, ou seja, as características de preços e retornos são derivadas do processo de escolha do indivíduo, analogamente aos modelos tradicionais de Microeconomia, partindo do que se conhece por função utilidade. O grande mérito dos modelos baseados no consumo é que eles inseriram o conceito de *fator estocástico de desconto*, que resume qualquer modelo de apreçamento em apenas duas equações:

$$p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1}) \quad (1.1)$$

$$m_{t+1} = f(\text{dados}, \text{parâmetros}), \quad (1.2)$$

em que p_t é o preço do ativo, x_{t+1} é o que se conhece por *payoff* do ativo e m_{t+1} é o fator estocástico de desconto. A partir desse formato, todos os modelos de apreçamento (sejam eles para ações, opções, títulos, etc.) passaram a ser vistos como um caso especial dessas duas equações, inclusive os modelos fatoriais.

Os modelos de fatores (tais como o CAPM e o APT) já foram testados em inúmeros trabalhos, dentre eles o famoso trabalho de Fama e MacBeth (1973). Em contraste, os modelos baseados no consumo ainda carecem de testes empíricos presentes na literatura. Dentre os modelos de consumo que já foram testados empiricamente, destacam-se o modelo CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*), e o modelo Hábitos Externos, de Abel (1990).

O objetivo do presente trabalho é comparar diferentes métodos de estimação de alguns modelos de apreçamento, tanto modelos de fatores quanto modelos baseados no consumo, através do emprego de métodos que se utilizam de toda a amostra (*full sample*) e de métodos que utilizam o que se conhece por janela móvel (*rolling window*). Procura-se averiguar, desta forma, se a estimação utilizando janelas móveis promove algum ganho na qualidade de ajuste dos modelos.

Esta dissertação está dividida como segue: no Capítulo 2, os conceitos básicos necessários para o entendimento dos modelos de apreçamento estudados são apresentados. O Capítulo 3 descreve os modelos de apreçamento que serão estudados. Os Capítulos 4 e 5 expõem, respectivamente, os métodos de estimação utilizados e a análise *rolling* de séries temporais. A metodologia utilizada é apresentada no Capítulo 6 e no Capítulo 7 são feitas aplicações a séries reais. Por fim, o Capítulo 8 traz considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2. Conceitos Básicos

Um investidor, assim como um consumidor, procura maximizar o seu bem-estar através de decisões acerca da alocação de recursos escassos. O objetivo principal de um modelo de apreçamento de ativos é identificar o valor de fluxos de caixa futuros incertos. (Cochrane, 2001) Na teoria de apreçamento de ativos, vários conceitos de microeconomia e finanças, tais como função utilidade, aversão ao risco, fator estocástico de desconto, *payoffs*, dentre outros, aparecem frequentemente na literatura. Desta forma, o objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos de microeconomia e finanças que estarão presentes neste trabalho.

Serão apresentados os conceitos básicos de função utilidade e o problema do consumidor-investidor, além de conceitos tais como retorno, *payoff* e fator estocástico de desconto. Este último, como foi discutido no capítulo introdutório, é de importância central no estudo de apreçamento de ativos.

Na seção 2.1 serão abordados os conceitos básicos de função utilidade e de escolha do consumidor. A seção 2.2 abordará o conceito de ativos e ações, a seção 2.3 define o conceito de beta de um ativo financeiro e, por último, o conceito de *payoff* de um ativo é discutido na seção 2.4.

2.1. Preferências do Consumidor

Um conceito que será bastante mencionado ao longo deste trabalho é o conceito de utilidade. Varian (1987) define utilidade como uma forma de medir o grau de satisfação de um indivíduo em relação ao que se conhece por cesta de consumo. A função utilidade fornece valores numéricos às preferências do consumidor. Cestas de consumo que estão associadas a um valor numérico de utilidade maior que outra é considerada como preferível a esta, uma vez que proporciona um nível maior de bem-estar. Definindo $U(.)$ como uma função utilidade, o agente econômico procura maximizar seu bem-estar escolhendo combinações de bens que maximizem sua utilidade. Formalmente, podemos expressar o problema de escolha do consumidor como

$$\max_{\{q_1, \dots, q_n\}} U(q_1, \dots, q_n), \quad (2.1)$$

$$s.a. \quad p_1 q_1 + \dots + p_n q_n \leq Y \quad (2.2)$$

em que $q_1, \dots, q_n$ são os produtos disponíveis para escolha e Y é a renda do consumidor. Assim, o consumidor procura escolher quantidades $q_1^*, \dots, q_n^*$ tais que sua utilidade seja maximizada, sujeita à sua restrição orçamentária $p_1 q_1 + \dots + p_n q_n \leq Y$, ou seja, sujeito ao fato de que seus gastos não ultrapassem a sua renda.

Três suposições acerca das preferências do consumidor (conhecidas como axiomas da teoria do consumidor) conferem a característica de racionalidade ao processo de escolha do mesmo. Elas são:

- **Integralidade:** Assume-se que as cestas de consumo são comparáveis, ou seja, os consumidores podem comparar e ordenar todas as cestas de mercado. Assim, para quaisquer duas cestas A e B , um consumidor preferirá A a B , preferirá B a A ou será indiferente a qualquer uma das duas. Por *indiferente* indica-se que qualquer uma das cestas deixaria o indivíduo igualmente satisfeito. (Pindyck e Rubinfeld, 2010)
- **Transitividade:** As preferências são *transitivas*. Transitividade significa que, se um consumidor prefere a cesta de mercado A a B e prefere B a C , então ele prefere A a C (Pindyck e Rubinfeld, 2010).
- **Reflexividade:** Assume-se que qualquer cesta de consumo traz pelo menos o mesmo nível de bem-estar quanto ela própria (Varian, 1987).

Um conceito bastante presente em modelos de apereamento (sobretudo nos modelos baseados no consumo) é o conceito de *utilidade marginal*. Dada uma função utilidade $U(q_1, q_2)$, em que q_1 e q_2 representam, respectivamente, as quantidades dos bem 1 e 2, a utilidade marginal (**UMg**) do bem 1 é definida como segue:

$$UMg_1 \equiv \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{U(q_1 + \Delta q_1, q_2) - U(q_1, q_2)}{\Delta q_1} = \frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_1}. \quad (2.3)$$

Desta forma, a utilidade marginal de um bem é a derivada parcial da função utilidade em relação à quantidade desse bem. Em termos econômicos, a utilidade marginal mede

a satisfação adicional obtida através do incremento no consumo de determinado bem. Um conceito estreitamente ligado ao de utilidade marginal é o de *taxa marginal de substituição (TMS)*, que mede a taxa pela qual o consumidor está disposto a substituir o consumo de determinado bem por outro. A taxa marginal de substituição mede o valor que um indivíduo atribui a uma unidade extra de um bem em termos de outro ou, ainda, a quantidade de um dos bens que deve ser dada ao consumidor como forma de compensar a redução na quantidade consumida do outro. Formalmente,

$$TMS \equiv -\frac{\partial U(q_1, q_2)/\partial q_1}{\partial U(q_1, q_2)/\partial q_2}. \quad (2.4)$$

2.2. Ativos, Ações e Dividendos

Seguindo as definições presentes em Vinha (2006), ativos são bens concretos, direitos e valores que formam o patrimônio de uma empresa. Os ativos podem ser:

- Ativos correntes: dinheiro, depósitos bancários, ações e tudo que possa ser trocado por dinheiro rapidamente;
- Ativos fixos: propriedades, construções, fábricas, máquinas, veículos, mobílias;
- Ativos intangíveis: patentes, criações, capital intelectual.

O tipo de ativo que está presente nos modelos estudados neste trabalho são as ações. Uma ação é um título de renda variável, emitido por sociedades anônimas, que representam a menor fração do capital da empresa emitente. O investidor em ações é um co-proprietário da sociedade anônima da qual é acionista, participando dos seus resultados. As ações são conversíveis em dinheiro, a qualquer tempo, pela negociação em bolsas de valores. Os dois tipos de ações são:

- Ordinárias (ON): proporcionam participação nos resultados da empresa e conferem o direito de voto em assembleias gerais;
- Preferenciais (PN): garantem ao acionista a prioridade no recebimento de dividendos (geralmente em percentual mais elevado do que o atribuído às ações ordinárias) e no reembolso de capital, no caso de dissolução da sociedade.

Os *dividendos* referem-se à parcela do lucro líquido obtido pela empresa que é distribuída aos acionistas no encerramento do exercício social, e cuja periodicidade de

pagamento pode ser mensal, trimestral, semestral ou anual. Por lei, a empresa deve distribuir pelo menos 25% dos lucros na forma de dividendos, sendo a Assembleia Geral Ordinária que determina a parcela a ser paga, em função da política da empresa e dos interesses dos acionistas. Os dividendos são uma fonte importante na formação do retorno da ação, e diferentemente do preço da ação, os dividendos são em parte definidos pela própria empresa, de acordo com sua política de dividendos. Desta forma, os dividendos são uma parte influenciável do retorno pela empresa, ao contrário do preço da ação.

2.3. Retorno de um Ativo

O retorno de um ativo representa a variação dos preços deste ativo entre dois instantes $t - 1$ e t (Morettin, 2011). Denominando p_t o preço do ativo no instante t o *retorno bruto simples* pode ser obtido por

$$R_t = \frac{p_t}{p_{t-1}}. \quad (2.5)$$

Chamamos $R_t - 1 = p_t/p_{t-1} - 1$ de *retorno líquido simples*. Quando há pagamento de dividendos d_t no período, o retorno bruto simples fica

$$R_t = \frac{p_t + d_t}{p_{t-1}}. \quad (2.6)$$

Com frequência expressamos o retorno dos ativos em termos *reais*, ou seja, com o ajuste pela inflação. O *retorno real* de um ativo corresponde a seu retorno simples (ou nominal) subtraído da taxa de inflação (Pindyck e Rubinfeld, 2010).

2.4. Payoff de um Ativo

O *payoff* de um ativo é o valor desse ativo no futuro. Por exemplo, ao comprar uma ação no tempo t a um preço p_t , sendo d_{t+1} o valor dos dividendos pagos entre os períodos t e $t + 1$, e p_{t+1} o preço da ação em $t + 1$, o *payoff* x_{t+1} dessa ação é dado pelo preço da mesma no próximo período mais os dividendos pagos, ou seja, $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$. Assim, o retorno bruto simples de uma ação pode ser expresso em função do *payoff* como

$$R_t = \frac{p_t + d_t}{p_{t-1}} = \frac{x_t}{p_{t-1}}. \quad (2.7)$$

Em termos de retorno, podemos pensá-lo como sendo um *payoff* com preço um. Se pagarmos, por exemplo, um real para adquirir um ativo hoje, seu retorno será quantos reais ou unidades de consumo poderemos adquirir amanhã. Logo, quando consideramos retornos, teremos $x_t = R_t$.

Dependendo do tipo de ativo em consideração, a expressão para o *payoff* muda, porém a definição é a mesma para qualquer tipo de ativo. Por exemplo, é comum em finanças estabelecer o preço de um título livre de risco como 1, de forma que seu *payoff*, que é o preço do título multiplicado por sua taxa de remuneração R^f , é dado por $x_{t+1} = R^f$, ou seja, a sua própria taxa de remuneração.

Para mais detalhes acerca da expressão específica do *payoff* para cada tipo de ativo, consultar Cochrane (2001). A tabela abaixo, adaptada de Cochrane (2001), expressa os preços dos ativos que serão mencionados neste trabalho e seus respectivos *payoffs*.

Tabela 2.1: Preços e *payoffs* para alguns tipos de ativos.

	Preço p_t	Payoff x_{t+1}
Ação	p_t	$p_{t+1} + d_{t+1}$
Retorno	1	R_t
Excesso de retorno	0	$R_{t+1}^e = R_t - R_{t+1}^f$
Taxa livre de risco	1	R^f
Título de um período	p_t	1

*Adaptado de Cochrane (2001).

2.5. Beta de um Ativo

Um conceito bastante presente em modelos de apreçamento e ao longo deste trabalho é o de beta de um ativo. Ele mede o risco de um ativo i relativamente ao risco do mercado como um todo (Varian, 1987). Sua expressão é dada por

$$\beta_i \equiv \frac{cov(R^i, R^m)}{\sigma_m^2}, \quad (2.8)$$

em que R^i é o retorno do ativo i , R^m é o retorno do portfólio de mercado¹, σ_m^2 é a variância do portfólio de mercado e $cov(R^i, R^m)$ é a covariância entre R^i e R^m . O beta do ativo i mede o grau de exposição linear desse ativo ao risco de mercado. Vale salientar que, uma vez que o beta do ativo possui como componente a covariância entre o retorno do ativo i e o retorno da carteira de mercado, essa medida captura uma dependência linear do retorno da carteira em relação retorno de mercado. O beta do ativo i pode ser considerado como uma medida de risco que um investidor está exposto ao investir no ativo i em relação ao portfólio de mercado. Considerando uma regressão do retorno do ativo i contra o retorno de mercado R^m ,

$$R_t^i = \alpha_i + \beta_i R_t^m + \epsilon_t, \quad (2.9)$$

valores de β_i maiores que 1 indicam que o ativo i possui uma alta sensibilidade em relação às variações no portfólio de mercado; valores de β_i em torno de 1 indicam que o ativo i é afetado por variações nas condições de mercado em proporção semelhante ao portfólio de mercado; por fim, valores de β_i abaixo de 1 implicam numa baixa sensibilidade do ativo i a variações nas condições de mercado.

---

¹ Entende-se por portfólio de mercado o conjunto de ativos que captura todas as fontes de risco dos ativos disponíveis no mercado. Para fins empíricos, o portfólio de mercado é representado por índices abrangentes, tais como o Ibovespa e S&P500.

Capítulo 3. Modelos de Apreçamento de Ativos

A teoria de apreçamento de ativos procura entender os preços e/ou valores de pagamentos futuros incertos (Cochrane, 2001). Um modelo de apreçamento de ativos procura trazer para o presente esses valores incertos por duas abordagens: modelando o comportamento do investidor e dos ativos financeiros. A primeira abordagem, mais geral, tem seus modelos conhecidos por modelos baseados no consumo (*consumption-based models*) e o modelo de apreçamento é um modelo microeconômico de escolha do consumidor, onde, a partir de hipóteses acerca de seu comportamento, chega-se a valores esperados para os preços dos ativos. A segunda abordagem, cujos modelos são os mais utilizados em finanças e dominam o trabalho empírico, é um caso especial dos modelos baseados no consumo. As variáveis explanatórias nesse tipo de modelo (conhecidas como fatores) são escolhidas de modo que possam prever os preços e retornos de ativos. Fatores comumente presentes são: índices de ações abrangentes, tais como o Ibovespa e S&P500, retornos de ações, razão dividendo/preço, entre outros.

Neste trabalho iremos estudar alguns modelos dos dois tipos de abordagem. Este capítulo visa prover um arcabouço teórico para o entendimento dessas duas abordagens. Na seção 3.1 os modelos baseados no consumo têm seus fundamentos apresentados. A seção 3.2 apresenta o conceito de fator estocástico de desconto, que surge naturalmente do problema do consumidor-investidor. As seções 3.3 e 3.4 apresentam dois modelos de consumo que serão estudados neste trabalho. Por fim, a seção 3.5 apresenta os modelos de apreçamento de fatores.

3.1. Modelos Baseados em Consumo

Os modelos de apreçamento baseados em consumo são derivados do problema bastante conhecido em microeconomia: a decisão de um indivíduo em relação ao consumo. A partir de suas preferências, que, conforme vimos no capítulo 2, são caracterizadas por sua função utilidade, e a partir de uma restrição orçamentária, o investidor-consumidor faz sua escolha acerca de quanto consumir e quanto poupar.

3.1.1. Problema do Investidor-Consumidor

De acordo com Cochrane (2001), o investidor deve decidir quanto poupar, quanto consumir e quais portfólios² manter. A equação central em apreçamento de ativos vem da condição de primeira ordem associada a essa decisão. No equilíbrio, a perda de utilidade associada a consumir um pouco menos hoje e poupar um pouco mais para o futuro deve ser igual ao ganho de utilidade associado ao consumo maior no futuro, proporcionado pelos rendimentos adicionais dos ativos. Portanto, em equilíbrio, o preço de um ativo deve ser igual ao valor esperado do *payoff* descontado desse ativo, utilizando como fator de desconto a utilidade marginal do investidor. Essa ideia, de acordo com Cochrane (2001), é a premissa básica para quaisquer modelos de apreçamento.

O comportamento de escolha dos investidores é usualmente modelado por uma função utilidade definida sobre valores presentes e futuros de consumo,

$$p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1}), \quad (3.1)$$

em que c_t denota o nível de consumo no tempo t e θ refere-se ao “grau de impaciência” do investidor ou, mais formalmente, ao fator de desconto subjetivo. O formato funcional para $u(c_t)$ mais comumente encontrado na literatura é a utilidade potência, dada por

$$u(c_t) = \frac{1}{1-\gamma} c_t^{1-\gamma}, \quad (3.2)$$

em que γ é o que se conhece por coeficiente de aversão ao risco, com $\gamma \geq 0$ e $\gamma \neq 1$.

Seguindo a formalização presente em Bonomo (2004), denotemos por e_t e e_{t+1} as dotações de consumo³ nos períodos t e $t+1$, respectivamente, e por ξ a quantidade investida em ativos financeiros. A título de ilustração, suponhamos que um investidor possa comprar e vender livremente seus ativos a um preço p_t , que o mesmo vive por dois períodos, t e $t+1$, e que não há a existência de herança. Assim, seu problema de maximização de utilidade será dado por

$$\max_{\{\xi\}} u(c_t) + \theta E_t[u(c_{t+1})] \quad (3.3)$$

---

² Entende-se por portfólio o conjunto de ativos que o investidor tem em mãos, ou seja, o conjunto de ativos que compõem a sua carteira de investimentos.

³ O termo *dotação de consumo* refere-se ao nível de consumo caso nada fosse investido, ou seja, o nível de consumo caso o indivíduo optasse por consumir toda a sua renda.

$$s. a \quad c_t = e_t - p_t \xi, \quad (3.4)$$

$$c_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1} \xi. \quad (3.5)$$

A equação de restrição (3.4) denota o consumo no tempo t , que é dado pela dotação de consumo e_t , subtraído do valor investido $p_t \xi$ (o preço do ativo p_t multiplicado pela quantidade ξ de ativos comprados). A equação de restrição (3.2) denota o consumo no período $t + 1$, dado pela dotação de consumo e_{t+1} somada ao valor dos ativos no mesmo período, $x_{t+1} \xi$. Notemos que, como o investidor vive por somente dois períodos e não há a existência de herança, todo o valor do investimento, $x_{t+1} \xi$, é consumido no período $t + 1$.

Substituindo as duas restrições na função objetivo $u(c_t) + \theta E_t[u(c_{t+1})]$, diferenciando em relação a ξ e igualando a zero, obtemos as condições de primeira ordem desse problema de maximização:

$$p_t u'(c_t) = E_t[\theta u'(c_{t+1}) x_{t+1}], \quad (3.6)$$

ou ainda,

$$p_t = E_t \left[\theta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1} \right]. \quad (3.7)$$

O investidor-consumidor, portanto, irá adquirir ativos financeiros até o momento em que as condições de primeira ordem sejam satisfeitas.

O lado esquerdo da equação (3.6) refere-se à condição marginal usual de otimização em microeconomia: $p_t u'(c_t)$ representa a perda de utilidade se o investidor decidir comprar uma unidade a mais do ativo financeiro. O lado direito, dado por $E_t[\theta u'(c_{t+1}) x_{t+1}]$, é o acréscimo esperado do valor presente da utilidade obtido pelo *payoff* extra em $t + 1$. Desta forma, o investidor adquire ativos financeiros até o ponto em que a perda marginal (decorrente da redução no consumo presente) associada à compra de uma unidade de ativo seja igual ao ganho marginal (associado ao *payoff* adicional).

3.1.2. O Fator Estocástico de Desconto

Define-se o fator de desconto estocástico m_{t+1} como

$$m_{t+1} \equiv \theta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}. \quad (3.8)$$

Utilizando essa definição, a equação básica de apreçamento (3.7) pode ser simplificada expressa como

$$p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1}). \quad (3.9)$$

De acordo com Bonomo (2004), o fator estocástico de desconto generaliza a ideia de fator de desconto em matemática financeira, uma vez que esse conceito traz para o valor futuro de uma variável para o presente. Cochrane (2001) enfatiza que o conceito de fator estocástico de desconto é bastante geral, pois em sua definição não há nenhuma suposição acerca do formato funcional da função utilidade nem da forma de organização dos mercados. Na ausência de incerteza tanto em relação a t quanto ao *payoff* x_{t+1} , por exemplo, pode-se escrever (3.9) como

$$p_t = E_t(m_{t+1})x_{t+1} = \frac{1}{R_{t+1}^f} x_{t+1}, \quad (3.10)$$

em que R_{t+1}^f é a taxa bruta sem risco. Aqui, $\frac{1}{R_{t+1}^f}$ é uma forma específica do fator de desconto, ou seja, $m_{t+1} = \frac{1}{R_{t+1}^f}$ quando há ausência de incerteza, no sentido de que o retorno no período $t + 1$ é conhecido no período t .

Especificando adequadamente o *payoff* x_{t+1} , a equação (3.9) é válida para qualquer ativo: títulos de renda fixa, ações, derivativos, etc (Bonomo, 2004). Por exemplo, se estamos considerando ações no nosso estudo, o *payoff* é dado pelo preço do próximo período somado aos dividendos pagos, ou seja,

$$x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1} \quad (3.11)$$

em que p_{t+1} e d_{t+1} são, respectivamente, o preço da ação e os dividendos pagos no período $t + 1$. Se considerarmos o excesso de retorno em relação a algum ativo de referência (por exemplo, um índice de mercado abrangente, como o IBOVESPA), o *payoff* é dado por

$$x_{t+1} = R_{t+1}^i - R_{t+1}^a, \quad (3.12)$$

em que R_{t+1}^i é o retorno bruto do ativo em estudo (por exemplo, o retorno de uma determinada ação listada na Bovespa) e R_{t+1}^a o retorno do ativo de referência (por exemplo, o retorno do Ibovespa). Para outros ativos financeiros em estudo, há formas convenientes para x_{t+1} . Para uma lista completa, ver Cochrane (2001).

Para qualquer tipo de ativo financeiro em estudo, o fator de desconto estocástico é sempre dado pela mesma expressão geral, $\theta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$, daí seu papel central em apreçamento de ativos. m_{t+1} é também chamado de *taxa marginal de substituição intertemporal do consumo*. De fato, a expressão (3.5) é a taxa em que o investidor está disposto a abrir mão de consumo presente por consumo futuro, o que corresponde à definição dada no capítulo 2 para o conceito de taxa marginal de substituição.

3.2. Fatos Clássicos em Finanças

Optou-se por colocar esta seção logo após a subseção sobre o fator de desconto estocástico porque muitos fatos clássicos em finanças podem ser obtidos através de manipulações da equação básica de apreçamento $p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1})$.

- **Taxa Livre de Risco com Retornos Conhecidos**

Considerando uma taxa livre de risco R^f pré-fixada, podemos tratá-la como uma constante. Pela Tabela 1, sabemos que o *payoff* x_{t+1} de um ativo livre de risco é dado por seu retorno R^f . Assim,

$$p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1}) \Rightarrow 1 = E_t(m_{t+1}R^f) = E_t(m_{t+1})R^f. \quad (3.13)$$

Logo,

$$R^f = \frac{1}{E_t(m_{t+1})}. \quad (3.14)$$

Considerando novamente caso de utilidade potência, temos

$$R^f = \frac{1}{\theta} \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^\gamma, \quad (3.15)$$

em que o parâmetro γ é o que se conhece por coeficiente de aversão relativa ao risco. A equação (3.7) nos dá alguns resultados acerca de taxas livres de risco trazidos pelos modelos de apreçamento baseados no consumo:

- As taxas reais de juros são altas quando as pessoas são impacientes, ou seja, quando θ é baixo. De fato, se a propensão dos indivíduos é consumir mais no presente, apenas uma taxa mais alta irá convencê-los de transferir consumo para o futuro.
- Quando o crescimento no consumo é alto as taxas reais de juros são elevadas. Taxas de juros elevadas “pagam” os investidores a consumir menos no presente, investir mais e consumir mais no futuro. Portanto, taxas de juros elevadas diminuem o nível de consumo hoje e aumentam a taxa de crescimento do mesmo.
- As taxas reais de juros são mais sensíveis ao crescimento do consumo se o parâmetro de aversão ao risco γ é alto. Se esse parâmetro é elevado, os investidores se preocupam em manter um padrão de consumo estável ao longo do tempo, e assim são menos propensos a alterar seu padrão de consumo em resposta a uma mudança na taxa real de juros. Logo, é necessária uma taxa real de juros mais elevada para induzir o investidor a mudar seu padrão de consumo.

Para mais detalhes, ver Cochrane (2001).

• Correções ao Risco

Utilizando a definição de covariância $cov_t(m_{t+1}, x_{t+1}) = E_t(m_{t+1}x_{t+1}) - E_t(m_{t+1})E_t(x_{t+1})$, em que o subscrito t denota a informação disponível até o tempo t , podemos escrever a equação básica de apreçamento $p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1})$ como

$$p_t = E_t(m_{t+1})E_t(x_{t+1}) + cov_t(m_{t+1}, x_{t+1}). \quad (3.16)$$

Substituindo a expressão para a taxa livre de risco (3.14), obtemos

$$p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1}) \quad (3.17)$$

Substituindo m_{t+1} por sua expressão geral, dada pela equação (3.8), teremos

$$p_t = \frac{E_t(x_{t+1})}{R^f} + \frac{cov_t[\beta u'(c_{t+1}), x_{t+1}]}{u'(c_t)}. \quad (3.18)$$

Conforme sabemos dos axiomas da teoria do consumidor, a utilidade marginal $u'(c_t)$ diminui conforme c_t aumenta. Desta forma, pela análise da equação (3.18), vemos que o preço do ativo é menor se o seu *payoff* possui covariância positiva com o consumo. Alternativamente, o preço de um ativo é maior se o seu *payoff* possui covariância negativa com o consumo.

De acordo com Bonomo (2004), os investidores não gostam de incerteza no consumo. Desta forma, ativos que covariam positivamente com o consumo devem ter um preço menor de forma a induzir os investidores a tê-lo em suas carteiras.

Aplicando a definição de covariância para o caso especial da equação básica de apreçamento para retornos, dada por $1 = E_t(m_{t+1}R_{t+1}^i)$, temos

$$1 = E_t(m_{t+1})E_t(R_{t+1}^i) + cov_t(m_{t+1}, R_{t+1}^i). \quad (3.19)$$

Utilizando $R^f = 1/E_t(m_{t+1})$, chegamos a

$$E_t(R_{t+1}^i) - R^f = -\frac{cov_t[u'(c_{t+1}), R_{t+1}^i]}{E_t[u'(c_{t+1})]}. \quad (3.20)$$

Assim, os retornos esperados de todos os ativos são iguais à taxa livre de risco mais um fator de correção do risco. Como também pode ser visto através da expressão (3.20), ativos que covariam positivamente com o consumo devem oferecer retornos mais altos de forma a induzir os investidores a mantê-los em suas carteiras. De fato, a propriedade acima é coerente com a ideia de que os indivíduos preferem manter um padrão estável de consumo ao longo de sua existência (Cochrane, 2001). Investimentos que apresentam baixo desempenho em períodos de consumo baixo e alta desempenho em períodos de consumo alto tendem a ser menos desejados que aqueles que possuem propriedade inversa em relação ao consumo, de forma que um retorno mais elevado é necessário para induzir os indivíduos a mantê-los em suas carteiras. Alternativamente, investimentos que se correlacionam negativamente com o consumo são desejados pelos indivíduos, mesmo que ofereçam um baixo retorno. Um exemplo bastante comum presente na literatura é o caso dos seguros. Mesmo, em média, o retorno oferecido por

um seguro ser negativo, o fato do recebimento do prêmio do seguro em caso de ocorrência do sinistro atrai os indivíduos a possuírem seguros.

- **Risco Idiossincrático.**

Apesar de num primeiro momento se pensar que um ativo com um *payoff* volátil é arriscado e por isso devem oferecer uma correção ao risco mais elevada, essa ideia não é completamente correta (Cochrane, 2001). Por exemplo, no caso extremo de um ativo cujo *payoff* é não correlacionado com o fator estocástico de desconto m_{t+1} , o preço de tal ativo, de acordo com a expressão (3.20), não receberá correção ao risco e, portanto, seu retorno esperado será igual ao retorno do ativo livre de risco. Algebricamente, teremos

$$\text{cov}_t(m_{t+1}, x_{t+1}) = 0 \Rightarrow p_t = \frac{E_t(x_{t+1})}{R^f}, \quad (3.21)$$

Não importa o quão elevado seja $\sigma^2(x_{t+1})$. Esse resultado continua válido mesmo se o *payoff* x seja bastante volátil.

Desta forma, um investidor não é compensado por manter o chamado risco idiossincrático. Apenas o conhecido risco sistemático gera uma correção ao risco, ou seja, apenas o risco sistemático exerce influência no apreamento do ativo. Para mais detalhes, consultar Cochrane (2001), Bonomo (2004) e LeRoy e Werner (2000).

- **Representação em Função do Beta e do Retorno Esperado.**

Note que podemos expressar a equação (3.20) como

$$E_t(R_{t+1}^i) = R^f + \left(\frac{\text{cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}^i)}{\text{var}_t(m_{t+1})} \right) \left(\frac{-\text{var}_t(m_{t+1})}{E_t(m_{t+1})} \right), \quad (3.22)$$

ou ainda,

$$E_t(R_{t+1}^i) = R^f + \beta_{i,m} \lambda_m, \quad (3.23)$$

em que $\beta_{i,m} \equiv \frac{\text{cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}^i)}{\text{var}_t(m_{t+1})}$ e $\lambda_m \equiv -\frac{\text{var}_t(m_{t+1})}{E_t(m_{t+1})}$. Esta última variável é usualmente conhecida como o preço do risco e a primeira como a quantidade de risco associada a cada ativo. Notemos ainda que $\beta_{i,m}$ é o coeficiente de regressão do retorno R_{t+1}^i em m_{t+1} . O formato acima é conhecido como modelo de apreamento beta, e estabelece que o retorno esperado de cada ativo i é proporcional ao seu beta. Assim, um resultado

importante extraído desse formato é que o preço do risco λ_m depende da volatilidade do fator estocástico de desconto m_{t+1} .

3.3. Modelo com Função Utilidade Potência

Uma das funções utilidade que iremos utilizar nos modelos de consumo é a função de utilidade potência, que também é conhecida por CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*). Seguiremos o desenvolvimento presente em Issler e Piqueira (2000) e Hansen e Singleton (1982) para derivá-la. Ao contrário do desenvolvimento introdutório presente na seção (3.1.1), aqui há a suposição de infinitos períodos.

A função utilidade é do tipo *von Neumann-Morgenstern*, dada por

$$U(c_t) = E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \theta^j u(c_{t+j}) \right], \quad (3.24)$$

em que C_t representa o consumo real *per capita*, $E_t(\cdot)$ é o valor esperado condicionado a informação disponível até o tempo t e θ é a taxa de desconto intertemporal, $0 < \theta < 1$. Conforme discutido na seção (3.1.1), o investidor-consumidor decide o seu nível de consumo e poupança de forma a maximizar sua utilidade, sujeito a uma restrição orçamentária. Para o caso de infinitos períodos, esta é dada por:

$$c_{t+j} + p_{t+j} \xi_{t+j} \leq (p_{t+j} + d_{t+j}) \xi_{t+j} + y_{t+j}, \quad (3.25)$$

$$\forall j = 0, 1, 2, \dots$$

As variáveis ξ_t e p_t são definidas na seção (3.1.1), d_t representa o valor dos dividendos pagos e y_t é uma variável exógena que representa a renda recebida pelo investidor-consumidor. A maximização do problema representado na equação (3.24) sujeito às restrições em (3.25) resulta nas seguintes condições de primeira ordem, conhecidas como Equações de Euler:

$$u'(c_t) = E_t [\theta u'(c_{t+1}) (1 + R_{i,t+1})], \quad \forall i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.26)$$

Aqui, o retorno real para o ativo i é definido por $R_{i,t+1} \equiv \frac{p_{i,t+1} + d_{i,t+1}}{p_{i,t}} - 1$. Dividindo ambos os lados de (3.26) por $u'(c_t)$ temos:

$$1 = E_t \left[\theta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} (1 + R_{i,t+1}) \right] = E_t [m_{t+1}^{CRRA} (1 + R_{i,t+1})], \quad \forall i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.27)$$

Utilizamos aqui o caso especial do fator estocástico de desconto para uma função utilidade do tipo CRRA. A sigla CRRA em m_{t+1}^{CRRA} é para fazer menção ao fato de que estamos utilizando esse tipo de função utilidade no fator estocástico de desconto.

Supondo que a função utilidade do consumidor é do tipo potência, ou seja,

$$u(c_t) = \frac{1}{1-\gamma} c_t^{1-\gamma}. \quad (3.28)$$

Conforme descrito anteriormente, γ é o coeficiente de aversão relativa ao risco, em que $\gamma \neq 1$. De acordo com Issler e Piqueira (2000), uma das fraquezas da utilização da função utilidade CRRA (3.27) é que apenas um parâmetro (γ) determina tanto o coeficiente de aversão relativa ao risco quanto a elasticidade de substituição intertemporal do consumo (definido por ψ), uma vez que

$$\psi \equiv \frac{\partial \ln \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)}{\partial \ln R_{t+1}} = \frac{1}{\gamma}. \quad (3.29)$$

Como uma das desvantagens de tal formato funcional, Issler e Piqueira (2000) citam o exemplo de um investidor avesso ao risco (γ alto). Em caso de variações elevadas na taxa de juros, o investidor-consumidor não irá responder significativamente a esta mudança, uma vez que sua elasticidade é o recíproco de γ e, portanto, possui um valor baixo.

3.4. Modelo com Função Utilidade Hábitos Externos

O segundo tipo de função utilidade em modelos de apreçamento baseados no consumo que iremos utilizar neste trabalho é o chamado modelo de Hábitos Externos. A diferença entre este modelo e o da seção anterior é que neste o consumo de períodos

anteriores exerce influência no consumo presente. A função de utilidade intertemporal depende de um parâmetro adicional, v ,

$$U(c_t, v_t) = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j u(c_{t+j}, v_{t+j}) \quad (3.30)$$

Diferentes formas funcionais para $u(\cdot)$ e $v(\cdot)$ resultam em diferentes modelos de formação de hábitos. Neste trabalho, iremos utilizar o modelo proposto por Abel (1990) e que também foi estudado em Issler e Piqueira (2000). A forma específica para $v(\cdot)$ é dada por

$$v_t \equiv (c_{t-1}^D \bar{c}_{t-1}^{1-D})^\kappa \quad (3.31)$$

em que c_{t-1} é o consumo do agente no tempo $t - 1$ e κ é o parâmetro que controla a separabilidade temporal da função de utilidade. Há a ocorrência de hábitos externos se $D = 0$ e $\kappa > 0$, de forma que, neste caso, o nível de hábito do agente é uma variável de estado. Alternativamente, para $D = 1$ e $\kappa > 0$ temos um modelo de hábito interno, e a escolha do nível de consumo para um certo período influencia a formação de hábito do próximo período. A função de utilidade proposta por Abel (1990) é dada por

$$u(c_t, v_t) = \frac{\left(\frac{c_t}{v_t}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}. \quad (3.32)$$

A partir da hipótese de hábitos externos, ou seja, $D = 0$ e $\kappa > 0$, substituindo (3.30) em (3.31) e, então, substituindo a expressão resultante em (3.32), obtemos o seguinte problema de maximização do consumidor-investidor:

$$\max_{\{c_{t+j}\}_{j=0}^{\infty}, \{\xi_{t+j}\}_{j=0}^{\infty}} E_t \left(\sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \left(\frac{\left(\frac{c_{t+j}}{(\bar{c}_{t+j-1})^\kappa} \right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) \right) \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \text{s. a} \quad c_{t+j} + p_{t+j} \xi_{t+j} &\leq (p_{t+j} + d_{t+j}) \xi_{t+j} + y_{t+j}, \\ \forall j &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

Como há infinitos períodos em consideração, o investidor-consumidor não necessariamente consome todo o *payoff* do ativo e sua renda do trabalho no período seguinte. As restrições acima dizem o seguinte: o consumo no período $t + j$, dado por c_{t+j} , somado ao valor poupado, dado por $p_{t+j}\xi_{t+j}$, não devem ser maior que a renda do período $t + j$, y_{t+j} , dada como exógena no modelo, somada ao valor dos ativos em posse mais os dividendos recebidos, $(p_{t+j} + d_{t+j})\xi_{t+j}$. Desta forma, em termos econômicos, não existem formas de financiamento nesse modelo; o consumidor-investidor só consome e investe aquilo que tem em mãos.

As equações de Euler para o problema de maximização acima são dadas por:

$$1 = E_t \left[\theta \left(\frac{c_t}{c_{t-1}} \right)^{\kappa(\gamma-1)} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} (1 + R_{i,t+1}) \right], \quad (3.35)$$

$$\forall i = 0, 1, \dots, N.$$

O fator estocástico de desconto m_{t+1}^{HE} para esse modelo, assim, inclui um termo de *lag* para o crescimento do consumo. A abreviação HE em m_{t+1}^{HE} é para especificar que estamos considerando o modelo de Hábitos Externos.

$$m_{t+1}^{HE} = m_{t+1}^{CRR A} \left(\frac{c_t}{c_{t-1}} \right)^{\kappa(\gamma-1)} \quad (3.36)$$

Notemos que a função utilidade CRR A é um caso especial da função de Hábitos Externos, que ocorre quando $\kappa = 0$.

3.5. Modelos Lineares de Fatores

Os modelos de apreçamento de fatores, assim como os modelos baseados em consumo, são intimamente relacionados ao fator estocástico de desconto. A diferença mais importante entre esse tipo de modelo e os modelos baseados em consumo é que nos modelos de fatores o fator estocástico de desconto está relacionado a outras variáveis, tais como retornos de ativos, retornos de portfólios, variáveis macroeconômicas, etc. A expressão para m_{t+1} é dada por

$$m_{t+1} = a + \mathbf{b}' \mathbf{f}_{t+1}, \quad (3.37)$$

em que a é um parâmetro livre e $\mathbf{b}$ é um vetor de parâmetros livres, ou seja, podem assumir quaisquer valores reais, e $\mathbf{f}_{t+1}$ é o vetor de fatores.

Pode-se demonstrar (ver Cochrane, 2001) que a expressão (3.36) para m_{t+1} , é equivalente à seguinte expressão em termos de retorno:

$$E_t(R_{t+1}) = \gamma + \boldsymbol{\beta}'\lambda, \quad (3.38)$$

em que $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor de coeficientes de regressão múltipla dos retornos R nos fatores $\mathbf{f}$, e γ e λ são os parâmetros do modelo.

Em geral, os modelos de fatores procuram fatores $\mathbf{f}$ que sejam bons *proxies* (ou seja, bons substitutos) para o crescimento da utilidade marginal (que é uma medida do bem-estar do investidor), ou seja, variáveis tais que

$$\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \approx a + \mathbf{b}'\mathbf{f}_{t+1} \quad (3.39)$$

seja uma aproximação que permita uma interpretação econômica (Cochrane, 2001). Dentre os modelos lineares de fatores mais conhecidos, destacam-se o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) e suas extensões e o modelo APT (*Arbitrage Pricing Theory*).

3.5.1. Modelo CAPM Sharpe-Lintner

A primeira versão do modelo de apreçamento CAPM foi desenvolvida por Sharpe (1964) e Lintner (1965). Sua simplicidade e facilidade de interpretação fazem do CAPM de Sharpe-Lintner um dos modelos mais utilizados até hoje em inúmeras aplicações, tais como a estimação do custo de capital para empresas e a avaliação de performance de portfólios. Assim como todos os modelos de fatores lineares, o modelo CAPM pode ser expresso tanto na forma de fator de desconto estocástico quanto no formato mais utilizado de excesso de retornos.

Em termos do fator estocástico de desconto, o CAPM estabelece uma relação linear entre m_{t+1} e o seu fator $\mathbf{f}_{t+1}$, que é dado pelo retorno do portfólio de mercado R_t^m , de forma que

$$m_{t+1} = a + bR_{t+1}^m. \quad (3.40)$$

em que a e b são os parâmetros do modelo. De acordo com LeRoy e Werner (2000), não é fácil encontrar um bom *proxy* para o retorno de mercado; em geral, para fins

empíricos, portfólios abrangentes, tais como o IBOVESPA, S&P500, dentre outros, são utilizados como o portfólio de mercado.

Em sua forma mais comumente encontrada na literatura, o CAPM no formato de excesso de retornos é dado por

$$E_t(R_{t+1}^i) - R_t^f = \beta_i[E_t(R_{t+1}^m) - R_{t+1}^f], \quad (3.41)$$

em que R_{t+1}^i é o retorno do ativo i no período $t + 1$, R_t^f é o retorno do ativo livre de risco, R_{t+1}^m é o retorno do portfólio de mercado no período $t + 1$ e β_i é o beta do ativo i em relação ao mercado.

Na versão Sharpe-Lintner, portanto, o CAPM diz o seguinte: o prêmio de risco de um ativo é igual ao seu beta, β_i , vezes o prêmio de risco do portfólio de mercado. Assim, β_i é a medida de risco no CAPM. (Zivot e Wang, 2006)

Para fins empíricos, é bastante comum utilizar como fator o excesso de retorno do portfólio de mercado em relação ao ativo livre de risco, de forma que a seguinte expressão é utilizada para versão Sharpe-Lintner do CAPM:

$$R_t^i - R_t^f = \alpha_i + \beta_i(R_t^m - R_t^f) + \varepsilon_t^i, \quad (3.42)$$

$$i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T,$$

em que ε_t^i é um termo de erro aleatório. No caso do formato em fator estocástico de desconto, temos

$$m_{t+1} = a + b(R_t^m - R_t^f). \quad (3.43)$$

A intuição do CAPM Sharpe-Lintner é a seguinte: O portfólio de mercado R_t^m captura os fatores do chamado risco de mercado ou risco sistemático, ou seja, o tipo de risco que afeta todos os retornos e não pode ser eliminado. O beta do ativo captura a magnitude desse risco. O termo de erro ε_t^i representa eventos aleatórios que afetam as ações de determinada empresa, capturando, assim, os riscos de nível microeconômico, que também é conhecido por risco idiossincrático ou risco residual. Esse tipo de risco pode ser reduzido por meio de uma política de diversificação de portfólio. O CAPM Sharpe-Lintner diz que, em equilíbrio, o prêmio de risco de qualquer ativo está diretamente relacionado à magnitude de seu beta, ou seja, de seu risco não diversificável. Conforme sabemos dos fatos estilizados da seção (3.2), o risco

diversificável não é precificado e, portanto, não influencia o prêmio de risco (Zivot e Wang, 2006).

A independência entre R_t^m e ε_t^i nos permite realizar a seguinte decomposição da variabilidade incondicional do retorno do ativo i , R_t^i : a variabilidade devido ao índice de mercado, dada por $\beta_i^2 \sigma_m^2$, e a variabilidade devido ao componente microeconômico, dada por σ_i^2 . O primeiro componente é o coeficiente de determinação de regressão R^2 . Pode-se, portanto, interpretar o R^2 como a proporção do risco do ativo i que não pode ser diversificada, e $1 - R^2$ a proporção que pode ser diversificada. (Zivot e Wang, 2006)

3.5.2. CAPM Dinâmico

Uma outra versão do CAPM que iremos estudar é a versão dinâmica simples do mesmo.

$$R_t^i - R_t^f = \alpha_i + \phi_i(R_{t-1}^i - R_{t-1}^f) + \beta_{0,i}(R_t^m - R_t^f) + \beta_{1,i}(R_{t-1}^m - R_{t-1}^f) + \varepsilon_t^i, \quad (3.44)$$

$$i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T.$$

Em seu formato de valor esperado, temos:

$$E(R_t^i - R_t^f) = \phi_i E(R_{t-1}^i - R_{t-1}^f) + \beta_{0,i} E(R_t^m - R_t^f) + \beta_{1,i} E(R_{t-1}^m - R_{t-1}^f), \quad (3.45)$$

$$i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T.$$

Nesta versão dinâmica do CAPM, portanto, o excesso de retorno do ativo i no tempo t depende não somente do retorno de mercado, mas também de seu excesso de retorno no período anterior. Assim, o retorno do ativo no período anterior e o retorno de mercado no período anterior são vistos como fonte de risco sistemático neste modelo (Zivot e Wang, 2006).

Capítulo 4. Métodos de Estimação

Neste trabalho iremos utilizar dois métodos de estimação para os modelos de apreçamento considerados. São eles: o método tradicional de Mínimos Quadrados Ordinários e o Método Generalizado dos Momentos. Para cada um desses métodos, utilizaremos também a abordagem *rolling*, ou seja, utilizaremos janelas de tamanho fixo de subconjuntos da amostra. Nas próximas seções cada um desses métodos será exposto, seguindo a notação presente em Campbell et. al. (1997), Cochrane (2001) e Zivot e Wang (2006). No próximo capítulo, a análise *rolling* de séries temporais será discutida.

4.1. Mínimos Quadrados Ordinários

Consideremos um modelo de apreçamento linear de fatores (que é o caso do CAPM Sharpe-Lintner),

$$R_t^{ei} = \alpha_i + \beta_i R_t^{em} + \varepsilon_t^i, \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

ou, em forma matricial,

$$R_t^e = \alpha + \beta R_t^{em} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.2)$$

As suposições usuais de regressão de séries temporais são dadas por:

- O modelo linear em (4.1) não possui erro de especificação.
- $\{R_t^{ei}, R_t^{em}\}$ são conjuntamente estacionários e ergódicos, em que R_t^{ei} e R_t^{em} são, respectivamente, o excesso de retorno do ativo i em relação ao ativo livre de risco e o excesso de retorno do portfólio de mercado em relação ao ativo livre de risco.
- Os regressores R_t^{em} são pré-determinados: $E[R_s^{em} \varepsilon_t] = 0$ para todo $s \leq t$ e $i = 1, \dots, k$.
- $E[(R_t^{em})^2] > 0$.
- $\{R_t^{ei} \varepsilon_t\}$ é um processo não correlacionado com matriz de covariância de ordem $(k + 1) \times (k + 1)$ finita.

Definindo o *erro de apreçamento* (u_t) como a diferença entre o retorno estimado pelo modelo e o retorno observado,

$$u_t = R_t^e - \hat{R}_t^e, \quad (4.3)$$

o método dos Mínimos Quadrados Ordinários (OLS, de *Ordinary Least Squares*) estima os parâmetros α e β através da minimização da função soma dos quadrados dos erros de apreçamento (SSPE, *Sum of Squared Pricing Errors*),

$$SSPE(\alpha, \beta) = \sum_{t=1}^T u_t^2 = \sum_{t=1}^T (R_t^e - \hat{\alpha} - \hat{\beta} R_t^{em})^2. \quad (4.4)$$

Minimizando a função $SSPE$ em relação a $\hat{\beta}$ e $\hat{\alpha}$ as seguintes estimativas são obtidas:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T (R_t^e - \bar{R}^e)(R_t^{em} - \bar{R}^{em})}{\sum_{t=1}^T (R_t^{em} - \bar{R}^{em})^2} \quad (4.5)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{R}^e - \hat{\beta} \bar{R}^{em} \quad (4.6)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t^e - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \bar{R}_t^{em})(R_t^e - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \bar{R}_t^{em})', \quad (4.7)$$

em que $\bar{R}^e = \sum_{t=1}^T \frac{R_t^e}{T}$ e $\bar{R}^{em} = \sum_{t=1}^T \frac{R_t^{em}}{T}$ e $\hat{\Sigma}$ é a matriz de variância-covariância estimada dos erros de apreçamento.

Conforme sabemos do formato em excesso de retornos do CAPM Sharpe-Lintner,

$$E(R_{t+1}^i - R_t^f) = \beta_i [E(R_{t+1}^m - R_{t+1}^f)], \quad (4.8)$$

de forma que o modelo CAPM estabelece que os interceptos de cada portfólio i são iguais a zero, ou seja, $\alpha = \mathbf{0}$. Assim, ao obtermos um conjunto de α_i 's significativamente diferentes de zero, pode-se concluir que o CAPM subestima (quando $\alpha_i > 0$) ou superestima (quando $\alpha_i < 0$) o risco associado ao portfólio i .

Quando da estimação de modelos de apreçamento por *OLS*, um teste comumente realizado para verificar a significância de todos os parâmetros estimados do modelo (com exceção do intercepto) é o teste F , cuja estatística de teste é dada por:

$$F = \frac{R^2/k}{(1 - R^2)/(T - k - 1)}, \quad (4.9)$$

em que k é o número de regressores. Sob a hipótese nula de que todos os coeficientes angulares do modelo são nulos e que os erros de apreçamento são *i.i.d.* normais, a estatística F possui uma distribuição $F(k, T - k - 1)$. No caso do CAPM Sharpe-Lintner, que possui somente um regressor (o excesso de retorno do portfólio de mercado), $k = 1$, de forma que a estatística de teste possui uma distribuição $F(1, T - 2)$. Ainda em relação à adequabilidade do modelo de apreçamento estimado por *OLS*, uma componente importante é a análise dos erros de apreçamento do modelo estimado. Uma estatística comumente utilizada é a *estatística de Durbin-Watson (DW)*, que avalia se há correlação serial nos erros de apreçamento u_t ($i = 1, \dots, n$), dada por

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T u_t^2}. \quad (4.10)$$

Pode-se demonstrar (ver Zivot e Wang, 2006) que $DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$, em que $\hat{\rho}$ é o coeficiente de correlação entre u_t e u_{t-1} . Desta forma, os valores de DW situam-se entre 0 e 4. Valores de DW próximos de 2 indicam ausência de correlação serial nos erros de apreçamento, valores menores que 2 sugerem correlação serial positiva e valores maiores que 2 sugerem correlação serial negativa. Outra estatística comumente utilizada para verificar a existência de correlação serial nos erros de apreçamento é a estatística de Ljung-Box.

Conforme exposto na subseção 3.5.1, o coeficiente de determinação R^2 do modelo de apreçamento estimado é dado por

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T u_t^2}{\sum_{t=1}^T (R_t^{ei} - \bar{R}_t^{ei})^2} \quad (4.11)$$

que mede a proporção do risco do ativo (ou portfólio) i que não pode ser diversificada.

4.1.1. Estimação por Máxima Verossimilhança

Campbell et. al. (1997) e Cochrane (2001) mostram que, quando os fatores são excessos de retorno, os estimadores de máxima verossimilhança são idênticos aos estimadores de mínimos quadrados. Para desenvolver um estimador de máxima verossimilhança, é necessário especificar um modelo estatístico que descreva a distribuição conjunta dos dados. Dada então a hipótese de que os excessos de retorno dos portfólios $\mathbf{R}_t^e$ possuem uma distribuição conjunta normal, temos que sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(\mathbf{R}_t^e | R_t^{em}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{R}_t^e - \alpha - \beta R_t^{em})' \Sigma^{-1} (\mathbf{R}_t^e - \alpha - \beta R_t^{em}) \right]. \quad (4.12)$$

Dada ainda a hipótese de que os excessos de retorno são temporalmente *i. i. d.*, a função densidade de probabilidade conjunta é expressa como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{R}_1^e, \mathbf{R}_2^e, \dots, \mathbf{R}_T^e | R_1^{em}, R_2^{em}, \dots, R_T^{em}) &= \\ &= \prod_{t=1}^T f(\mathbf{R}_t^e | R_t^{em}) \\ &= \prod_{t=1}^T (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{R}_t^e - \alpha - \beta R_t^{em})' \Sigma^{-1} (\mathbf{R}_t^e - \alpha - \beta R_t^{em}) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para definir o estimador de máxima verossimilhança, formamos a função *log-verossimilhança*, ou seja, o logaritmo natural da equação (4.13), em que os parâmetros desconhecidos são α , β e Σ . Denotando por $\mathcal{L}$ tal função, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha, \beta, \Sigma) &= -\frac{nT}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log|\Sigma| \\ &- \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t^e - \alpha - \beta R_t^{em})' \Sigma^{-1} (\mathbf{R}_t^e - \alpha - \beta R_t^{em}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores dos parâmetros que maximizam a função $\mathcal{L}$. Para encontrar esses estimadores, diferenciamos (4.14) em relação a α , β e Σ , e igualamos as equações resultantes a zero. As derivadas parciais são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = \Sigma^{-1} \left[\sum_{t=1}^T (R_t^e - \alpha - \beta R_t^{em}) \right] \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \Sigma^{-1} \left[\sum_{t=1}^T (R_t^e - \alpha - \beta R_t^{em}) R_t^{em} \right] \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Sigma} = & -\frac{T}{2} \Sigma^{-1} \\ & + \frac{1}{2} \Sigma^{-1} \left[\sum_{t=1}^T (R_t^e - \alpha - \beta R_t^{em})(R_t^e - \alpha - \beta R_t^{em})' \right] \Sigma^{-1}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Igualando as equações (4.15), (4.16) e (4.17) a zero, obtemos os estimadores de máxima verossimilhança, dados por

$$\hat{\alpha}^{MV} = \bar{R}_t^e - \hat{\beta} \bar{R}_t^{em}, \quad (4.18)$$

$$\hat{\beta}^{MV} = \frac{\sum_{t=1}^T (R_t^e - \bar{R}_t^e)(R_t^{em} - \bar{R}_t^{em})}{\sum_{t=1}^T (R_t^{em} - \bar{R}_t^{em})^2}, \quad (4.19)$$

$$\hat{\Sigma}^{MV} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t^e - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \bar{R}_t^{em})(R_t^e - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \bar{R}_t^{em})', \quad (4.20)$$

em que $\bar{R}_t^e = \sum_{t=1}^T \frac{R_t^e}{T}$ e $\bar{R}_t^{em} = \sum_{t=1}^T \frac{R_t^{em}}{T}$. Podemos observar, desta forma, que os estimadores de máxima verossimilhança são idênticos aos estimadores de mínimos quadrados ordinários em (4.5), (4.6) e (4.7).

4.2. Método Generalizado dos Momentos

Dentre as formas de estimação de modelos de apreçamento, o Método Generalizado dos Momentos é o mais popular. Uma das razões é que este método segue naturalmente do formato em fator estocástico de desconto $p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1})$, uma vez que esta expressão por si só já é uma condição de momentos (Cochrane, 2001).

Proposto por Hansen (1982), o Método Generalizado dos Momentos (GMM, *Generalized Method of Moments*) estima os parâmetros de um modelo aproximando ao máximo os momentos amostrais dos momentos populacionais. Seguiremos a notação presente em Cochrane (2001) e Campbell et. al. (1997), utilizaremos os modelos de apreçamento baseados no consumo para expor esse método.

Sabemos do capítulo 3 que todo modelo de apreçamento implica

$$E(\mathbf{p}_t) = E(m_{t+1}(\mathbf{b})\mathbf{x}_{t+1}), \quad (4.21)$$

em que $\mathbf{b}$ é o vetor de parâmetros do fator estocástico de desconto, que queremos estimar, $\mathbf{p}_t$ é o vetor de preços dos ativos e m_{t+1} e $\mathbf{x}_{t+1}$ são, respectivamente, o fator estocástico de desconto e o conjunto de *payoffs* dos portfólios. Escrevendo a equação (4.21) na forma $E(.) = 0$ temos

$$E(m_{t+1}(\mathbf{b})\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{p}_t) = 0. \quad (4.22)$$

O conjunto de equações (4.22) é chamado de condições de momentos ou condições de ortogonalidade. Definamos os *erros de apreçamento* $u_t(\mathbf{b})$ como

$$u_{t+1}(\mathbf{b}) = m_{t+1}(\mathbf{b})\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{p}_t \quad (4.23)$$

e a função $\mathbf{g}_T(\mathbf{b})$ como a média amostral dos erros de apreçamento u_t ,

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{b}) \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t(\mathbf{b}). \quad (4.24)$$

Adaptando a notação para o contexto de modelos de apreçamento, o método de estimação GMM estabelece o seguinte conjunto de suposições (Greene, 2003):

- $E_t[\mathbf{g}_T(\mathbf{b})] < \infty$. Essa suposição estabelece que a esperança da média amostral dos erros de apreçamento $u_t(\mathbf{b})$ existe e é finita.
- $\mathbf{g}_T(\mathbf{b}) \xrightarrow{p} \mathbf{0}$, ou seja, os erros de apreçamento convergem, em probabilidade, para o vetor nulo.
- Para qualquer $t \geq K$, em que K é o número de parâmetros a serem estimados, se $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ são dois vetores de parâmetros diferentes, então $\mathbf{g}_T(\mathbf{b}_1) \neq \mathbf{g}_T(\mathbf{b}_2)$. Essa é a conhecida condição de *identificação*, em que Greene (2003) argumenta que ela é necessária para garantir que o limite de probabilidade da função critério do método GMM seja unicamente minimizada no vetor de parâmetros populacionais, $\mathbf{b}_0$.
- Seja $(1/T)\boldsymbol{\phi}$ a matriz de covariância assintótica de $\mathbf{g}_T(\mathbf{b})$. Assume-se que $(1/T)\boldsymbol{\phi}$ é finita, de forma que $\sqrt{T}\mathbf{g}_T(\mathbf{b}) \xrightarrow{d} N[\mathbf{0}, \boldsymbol{\phi}]$.

Greene (2003) expõe ainda que o método GMM é uma forma de estimação mais geral que o método OLS, no sentido de que, em contraste às suposições usuais de OLS, o método GMM não faz suposições acerca de ausência de autocorrelação dos erros de apreçamento, ausência de multicolinearidade ou ausência de heterocedasticidade.

A conhecida *estimativa de primeiro estágio* (*first-stage estimate*) do método GMM estima o vetor de parâmetros $\mathbf{b}$ minimizando a seguinte Forma quadrática:

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{W}) = \underset{\{\mathbf{b}\}}{\operatorname{argmin}} \mathbf{g}_T(\mathbf{b})' \mathbf{W} \mathbf{g}_T(\mathbf{b}) \quad (4.25)$$

para uma matriz simétrica e positiva definida $\mathbf{W}$, também conhecida como matriz de pesos, tal que $\mathbf{W} \xrightarrow{p} \mathbf{W}$. Essa matriz indica o quanto de atenção prestamos a cada momento, ou como alternar entre precificar um certo ativo (ou uma combinação de ativos) com mais precisão em detrimento de outro ativo ou combinação de ativos. Muitas vezes, denota-se $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, a matriz identidade. Quando $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, o procedimento GMM trata todos os ativos simetricamente, de forma que o objetivo é minimizar a soma dos quadrados dos erros de apreçamento, ou seja, quando $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ e não adicionamos variáveis instrumentais no processo de estimação, o estimador obtido através do método generalizado dos momentos é idêntico ao obtido pelo método dos mínimos quadrados

ordinários. Sob condições de regularidade (ver Hayashi, 2000, para mais detalhes), pode-se demonstrar que

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{W}) \xrightarrow{p} \mathbf{b} \quad (4.26)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{W}) - \mathbf{b}) \xrightarrow{d} N\left(0, \text{avar}(\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{W}))\right) \quad (4.27)$$

em que $\text{avar}(\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{W}))$ refere-se à variância assintótica de $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{W})$. Notemos que podemos expressar as condições de momentos $\mathbf{g}_T(\mathbf{b})$ como

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{b}) = E_T[m_{t+1}(\mathbf{b})\mathbf{x}_{t+1}] - E_T[\mathbf{p}_t]. \quad (4.28)$$

Assim, cada momento é a diferença entre o preço efetivo ($E_T(\mathbf{p})$) e o preço predito ($E_T(m\mathbf{x})$), ou seja, os *erros de apreçamento*, de forma que o método GMM procura estimar os parâmetros do modelo tal que o preço efetivo seja o mais próximo possível do preço predito pelo modelo.

A *estimativa de segundo estágio (second-stage estimate)* escolhe uma matriz de pesos $\mathbf{W}$ baseando-se em considerações estatísticas. Hansen (1982) mostra que a matriz de pesos ótima é dada por

$$\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1}, \quad (4.29)$$

em que

$$\mathbf{S} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}'_{t-j}), \quad (4.30)$$

no sentido de que essa matriz produz estimativas com a menor variância assintótica possível. Assim, o *estimador GMM eficiente a dois passos* é dado por

$$\hat{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{S}}^{-1}(\hat{\mathbf{W}})) = \text{argmin}_{\{\mathbf{b}\}} T \mathbf{g}_T(\mathbf{b}) \hat{\mathbf{S}}^{-1}(\hat{\mathbf{W}}) \mathbf{g}_T(\mathbf{b}), \quad (4.31)$$

em que $\hat{\mathbf{S}}^{-1}(\hat{\mathbf{W}})$ é uma estimativa consistente de $\mathbf{S}$. Para detalhes acerca do processo de estimação de $\mathbf{S}$, consultar Zivot e Wang (2006).

O *estimador GMM iterativo*, que é o estimador que iremos utilizar neste trabalho, utiliza o estimador $\hat{\mathbf{S}}^{-1}(\hat{\mathbf{W}})$ para atualizar a estimação de $\mathbf{S}$ e, então, reestima

(4.31). Esse processo é repetido até que as estimativas de $\mathbf{b}$ não mudam significativamente entre uma iteração e outra. Em geral, apenas algumas iterações são necessárias. De acordo com Hamilton (1994), a grande vantagem em utilizar o método GMM iterativo é que ele é invariante em relação à escala dos dados utilizados e à matriz de pesos inicial $\mathbf{W}$. Para uma discussão detalhada do estimador GMM iterativo, consultar Hamilton (1994) e Greene (2003).

Um procedimento bastante comum no método de estimação por GMM é a adição de *instrumentos*. Usualmente, adicionam-se instrumentos quando um modelo é não identificado, ou seja, quando o número de parâmetros a serem estimados é menor que o número de condições de momentos. As variáveis instrumentais, digamos $\mathbf{I}_t$, pode conter alguns ou todos os elementos do vetor de variáveis dependentes, digamos $\mathbf{z}_t$. As variáveis instrumentais devem satisfazer as K condições de ortogonalidade

$$E[\mathbf{g}_T(\mathbf{I}_t, \mathbf{z}_t)] = E[\mathbf{I}_t u_t] = E[\mathbf{I}_t(\mathbf{p}_t - m_{t+1}(\mathbf{b})\mathbf{x}_{t+1})] = \mathbf{0}, \quad (4.32)$$

em que $\mathbf{g}_T(\mathbf{I}_t, \mathbf{z}_t) = \mathbf{I}_t u_t = \mathbf{I}_t(\mathbf{p}_t - m_{t+1}(\mathbf{b})\mathbf{x}_{t+1})$, no caso dos modelos de apreçamento expressos no formato de fator estocástico de desconto.

Ao contrário das suposições do método de mínimos quadrados ordinários, o método GMM não supõe ausência de autocorrelação nem heterocedasticidade, ou seja, quando da aplicação do método GMM, pode-se assumir que

$$\text{cov}(u_t u_{t-1}) \neq 0, \quad (4.33)$$

$$\text{var}(u_t) = \sigma_t^2. \quad (4.34)$$

Analogamente ao caso do teste F para o método *OLS*, um teste de sobreidentificação de restrições pode ser realizado de forma a testar a adequabilidade do modelo estimado por GMM. Um teste bastante popular é o teste J_T , cuja estatística de teste é dada por

$$TJ_T = T[\mathbf{g}_T(\hat{\mathbf{b}})' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{g}_T(\hat{\mathbf{b}})]. \quad (4.35)$$

Pode-se demonstrar (ver Greene, 2003) que $TJ_T \sim \chi^2(K - L)$, ou seja, a estatística TJ_T segue uma distribuição qui-quadrado com o número de graus de liberdade dado pelo número de momentos (L) subtraído do número de parâmetros (K). Logo, se o modelo não está bem especificado e/ou algumas de suas condições de momentos não são válidas (por exemplo, se $E[\mathbf{I}_t u_t] = E[\mathbf{I}_t(\mathbf{p}_t - m_{t+1}(\mathbf{b})\mathbf{x}_{t+1})] \neq \mathbf{0}$

para algum i), então a estatística TJ_T apresentará um valor numérico relativamente grande em comparação a uma variável aleatória qui-quadrado com $K - L$ graus de liberdade.

Capítulo 5. Análise *Rolling* de Séries Temporais

De acordo com Zivot e Wang (2006), a análise *rolling* de séries temporais financeiras possui uma variedade de aplicações, incluindo: verificação de estabilidade de parâmetros, *backtesting* de modelos e verificação da qualidade de ajuste e de previsões. Neste trabalho, conforme será explicado no Capítulo 6, o método *rolling* será utilizado como uma forma alternativa para estimar os parâmetros dos modelos de apreçamento. A qualidade do ajuste proporcionado por esse método será, então, comparada à qualidade do ajuste das abordagens tradicionais.

De forma geral, a estimação pelo método *rolling* funciona da seguinte forma: suponhamos que temos T observações de uma série temporal. Uma janela de tamanho fixo n é escolhida. A partir daí, os parâmetros do modelo, digamos γ , são estimados utilizando os dados dessa sub-amostra, ou seja, é tomada como amostras as observações dos tempos 1 a n . Em seguida, move-se a janela em uma observação e o modelo é novamente estimado, sendo que agora utilizando as observações de 2 a $n + 1$. Esse processo é repetido até que a última observação seja incluída. As propriedades estatísticas dessa coleção de $T - n + 1$ estimativas são, então, utilizadas para verificar a adequabilidade do modelo, a estabilidade dos parâmetros, etc.

5.1. Estatísticas Univariadas

De forma a apresentar as estatísticas univariadas no método *rolling*, utilizaremos a notação presente em Zivot e Wang (2006). Consideremos uma série temporal univariada y_t numa amostra $t = 1, \dots, T$. Seja n o tamanho adotado para a janela de tamanho fixo. A média amostral, a variância e o desvio-padrão *rolling* são definidos como:

$$\hat{\mu}_t(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_{t-i} \quad (5.1)$$

$$\hat{\sigma}_t^2(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{t-i} - \hat{\mu}_t(n))^2 \quad (5.2)$$

$$\hat{\sigma}_t(n) = \sqrt{\hat{\sigma}_t^2(n)} \quad (5.3)$$

para $t = n, \dots, T$.

As Figuras 5.1 e 5.2 mostram os retornos mensais do Ibovespa e da Petrobras PN e suas respectivas médias e desvios-padrão *rolling* com janela de comprimento de 24 meses, no período de Agosto de 1994 a maio de 2012. Nota-se claramente que as médias e os desvios-padrão desses dois conjuntos de dados variam ao longo do tempo. Na Figura 5.1, nota-se que o desvio-padrão *rolling* da Petrobras PN cresce no início da amostra, até o ano 2000, em que a partir daí decresce lentamente até o ano de 2009, onde novamente volta a subir e então decresce mais uma vez no final da amostra.

Figura 5. 1 - Retornos mensais da Petrobras PN com a média e o desvio-padrão *rolling*.

Para a série do Ibovespa (Figura 5.2), percebe-se que a média e o desvio-padrão *rolling* apresentam um comportamento alternado de crescimento e decrescimento.

Figura 5.2 - Retornos Mensais do Ibovespa com a Média *Rolling* (em Verde) e o Desvio-padrão *Rolling* (em Laranja).

Os desvios-padrão assintóticos para as estimativas *rolling* de μ e σ , são

$$SE(\hat{\mu}_t(n)) = \frac{\hat{\sigma}_t(n)}{\sqrt{n}}, \quad (5.4)$$

$$SE(\hat{\sigma}_t(n)) = \frac{\hat{\sigma}_t(n)}{\sqrt{2n}}. \quad p_t = E_t(m_{t+1}x_{t+1}) \quad (5.5)$$

Para exemplificar, as Figuras 5.3 e 5.4 mostram as estimativas das médias e variâncias acompanhadas de seus intervalos de confiança com coeficiente de confiança de 95%, baseados em estimativas *rolling* com janela de comprimento de $n = 24$ meses.

Figura 5. 3 – Estimativas da Média e Desvio-padrão *Rolling* com Intervalos de Confiança 95% para Petrobras PN.

Figura 5. 4 - Estimativas da Média e Desvio-padrão *Rolling* com Intervalos de Confiança 95% para Ibovespa.

Pela análise dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança nas figuras 5.3 e 5.4, percebe-se que as estimativas do desvio-padrão $\hat{\sigma}_t(24)$ são mais precisas que as da média $\hat{\mu}_t(24)$, uma vez que as amplitudes dos intervalos de confiança da primeira são visivelmente menores que as desta última. Ainda, vemos que, dada a alta amplitude para os intervalos de confiança de $\hat{\mu}_t(24)$, não há evidência de que a média dos retornos do Ibovespa e Petrobras PN se alterem ao longo do tempo.

5.2. Estatísticas Bivariadas

Uma segunda importante aplicação da análise *rolling* em séries temporais é a análise da covariância entre duas séries ao longo do tempo $t = 1, \dots, T$. Sejam y_{1t} e y_{2t} duas séries univariadas. Através da análise *rolling*, pode-se investigar se a covariância e correlação entre y_{1t} e y_{2t} são constantes ao longo do tempo. A covariância e correlação *rolling* entre as duas séries são dadas como:

$$\hat{\sigma}_{12,t}(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{1t-i} - \hat{\mu}_{1t}(n))(y_{2t-i} - \hat{\mu}_{2t}(n)), \quad (5.6)$$

$$\hat{\rho}_{12,t}(n) = \frac{\hat{\sigma}_{12,t}(n)}{\hat{\sigma}_{1,t}(n)\hat{\sigma}_{2,t}(n)}, \quad (5.7)$$

em que $\hat{\sigma}_{12,t}(n)$ e $\hat{\rho}_{12,t}(n)$ referem-se à covariância e a correlação *rolling* entre y_{1t} e y_{2t} numa janela fixa de tamanho n , respectivamente.

A título de exemplo, a Figura 5.5 mostra a correlação *rolling* entre o Ibovespa e Petrobras PN, no período pós-real, de Agosto de 1994 a maio de 2012, para dados mensais e com janela de tamanho $n = 24$ meses.

Figura 5. 5 – Retornos da Petrobras PN e Ibovespa (acima) e Correlações *Rolling*.

Através da análise do gráfico acima, vemos que a correlação entre Petrobras PN e Ibovespa mantém-se acima de 0.7 em quase todo o período entre 1994 e 2001. A partir daí, ocorre uma queda considerável nessa correlação, subindo novamente a partir de 2002. De 2004 em diante, há um movimento alternado de altas e baixas na correlação entre os dois retornos.

5.3. Regressão *Rolling*

Em modelos de regressão linear, Zivot e Wang (2006) argumentam que a análise *rolling* tem quatro grandes propósitos: avaliar a estabilidade dos parâmetros do modelo, testar a qualidade das previsões e do ajuste do modelo (pelo que se conhece por *backtesting*), comparar a qualidade de previsão e ajuste entre modelos e, por fim, fornecer um modelo simples com parâmetros variando no tempo. Para uma sub-amostra de tamanho $n < T$, o modelo de regressão *rolling* é dado por:

$$\mathbf{y}_t(n) = \mathbf{X}_t(n)\boldsymbol{\beta}_t(n) + \boldsymbol{\varepsilon}_t(n), t = n, \dots, T \quad (5.8)$$

em que $\mathbf{y}_t(n)$ é o vetor de $(m \times 1)$ da variável de interesse, $\mathbf{X}_t(n)$ é uma matriz $(m \times k)$ das variáveis explanatórias, $\boldsymbol{\beta}_t(n)$ é um vetor $(k \times 1)$ de parâmetros de regressão e $\boldsymbol{\varepsilon}_t(n)$ é um vetor de ordem $(m \times 1)$ de termos de erro. Vale salientar que as n observações em $\mathbf{y}_t(n)$ e $\mathbf{X}_t(n)$ referem-se às n observações mais recentes do tempo $t - n + 1$ a t , para $n > k$.

As estimativas de mínimos quadrados na versão *rolling* são:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t(n) = [\mathbf{X}_t(n)' \mathbf{X}_t(n)]^{-1} \mathbf{X}_t(n)' \mathbf{y}_t(n) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_t^2(n) &= \frac{1}{n - k} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t(n)' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t(n) = \\ &= \frac{1}{n - k} [\mathbf{y}_t(n) - \mathbf{X}_t(n) \hat{\boldsymbol{\beta}}_t(n)]' [\mathbf{y}_t(n) - \mathbf{X}_t(n) \hat{\boldsymbol{\beta}}_t(n)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\widehat{avar}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_t(n)) = \hat{\sigma}_t^2(n) [\mathbf{X}_t(n)' \mathbf{X}_t(n)]^{-1} \quad (5.11)$$

em que *avar* se refere à variância assintótica do estimador de $\boldsymbol{\beta}_t(n)$.

Para fins de exemplo, consideremos a estimação do seguinte modelo CAPM de Sharpe-Lintner:

$$R_t^{PETR4} - R_t^f = \alpha + \beta(R_t^{IBOV} - R_t^f) + \varepsilon_t^{PETR4}, t = 1, \dots, T \quad (5.12)$$

em que $R_t^{PETR4} - R_t^f$ é o excesso de retorno da Petrobras PN em relação à taxa livre de risco (aqui adotada como *proxy* a taxa mensal do CDI, a taxa de depósito de interbancário) e $R_t^{IBOV} - R_t^f$ é o excesso de retorno do ativo de mercado (aqui tomado como *proxy* o retorno mensal do IBOVESPA).

Ajustando um modelo para a série completa por mínimos quadrados ordinários, utilizando o período de 01 de Agosto de 1994 a 01 de Maio de 2012, foi obtido um valor de 1,08 para β , indicando que as ações preferenciais da Petrobras são mais

arriscadas que o portfólio da Bovespa. A estimativa obtida para α não foi significativamente diferente de zero.

Considerando agora uma regressão *rolling* com janela de tamanho $n = 24$, foram obtidas 191 estimativas para cada parâmetro. Na Figura 5.6, são apresentados os gráficos das estimativas dos parâmetros α e β , com seus respectivos intervalos de confiança.

Figura 5. 6 – Estimativas dos parâmetros $\alpha_t(n)$ e $\beta_t(n)$ do CAPM para as ações da Petrobras PN pela Regressão *Rolling* com $n = 24$ meses.

Pela Figura 5.6, vemos que, assim como a estimativa do CAPM utilizando toda a amostra, a estimativa do intercepto α parece não ser significativamente diferente de zero, uma vez que seus valores, assim como seus limites superior e inferior de confiança, oscilam ao redor de zero. Para o parâmetro β , percebe-se que no meio da amostra há uma redução dos valores estimados, voltando a crescer no final da amostra, tal como visto na análise da covariância *rolling*. A Figura 5.7 mostra os resíduos estimados $\hat{\sigma}$ do modelo. Entre os anos de 2000 e 2003 e entre 2009 e 2010, os resíduos estimados apresentam valores elevados. Isso indica, conforme a interpretação do CAPM, que nesse período a magnitude do risco não diversificável das ações preferenciais da Petrobras foi maior do que nos outros períodos considerados. Esse fato

poderia indicar alguma mudança no cenário econômico que tenha afetado as ações da Petrobras. Como fica claro, a estimação estática do CAPM não consegue captar esses movimentos.

Figura 5. 7 – Estimativa dos resíduos estimados $\hat{\sigma}$ do CAPM para as ações da Petrobras PN.

5.4. Previsão *Rolling* e *Backtesting*

A técnica de regressão *rolling* pode ser utilizada para avaliar o desempenho preditivo de modelos com base em dados históricos através da técnica de *backtesting*. Para ilustrar esta técnica, consideremos novamente o modelo de regressão em (5.1). O desempenho preditivo fora da amostra (*out-of-sample*) desse modelo é baseado nas previsões *rolling* (*rolling predictions*) e erros de previsão:

$$\hat{y}_{t+h|t} = \mathbf{x}'_{t+h} \hat{\boldsymbol{\beta}}_t(n), \quad (5.13)$$

$$\hat{\varepsilon}_{t+h|t} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t} = y_{t+h} - \mathbf{x}'_{t+h} \hat{\boldsymbol{\beta}}_t(n) \quad (5.14)$$

Essas previsões são consideradas como fora da amostra porque $\hat{\beta}_t(n)$ utiliza apenas dados até o tempo t , ao passo que as previsões são feitas para observações no tempo $t + h$, com $h > 0$. Essas previsões são atualizadas quando t aumenta, uma vez que o valor de $\hat{\beta}_t(n)$ é alterado. Quando $h = 1$ há $T - n$ previsões *rolling*, quando $h = 2$ há $T - n - 1$ previsões *rolling* dois passos à frente $\{y_{n+2|n}, y_{n+3|n+1}, \dots, y_{T|T-2}\}$ e assim por diante.

As previsões $\hat{y}_{t+h|t}$ podem ser avaliadas examinando algumas propriedades dos erros de previsão (*rolling forecast errors*). As estatísticas comumente utilizadas para esse propósito são o Erro Quadrático Médio (MSE) e o Erro Quadráticos Absoluto (MAE) dados, respectivamente, por:

$$MSE(h) = \frac{1}{T - n - h + 1} \sum_{t=n}^{T-h} \hat{\varepsilon}_{t+h|t}^2, \quad (5.15)$$

$$MAE(h) = \frac{1}{T - n - h + 1} \sum_{t=n}^{T-h} |\hat{\varepsilon}_{t+h|t}|. \quad (5.16)$$

Para ilustrar a técnica de avaliação da previsão utilizando análise *rolling*, voltemos ao exemplo do CAPM estimado para as ações preferenciais da Petrobras em (5.12). Os retornos mensais da Petrobras PN, as previsões 1 passo à frente e seus respectivos erros de previsão encontram-se na Figura 5.8.

5.4.1. Comparação de Acurácia Preditiva

A técnica de *backtesting* é comumente utilizada para comparar a qualidade de previsão de dois ou mais modelos. Em geral, as estatísticas utilizadas para avaliar a previsão (5.13) são calculadas para cada modelo, e o modelo cujo conjunto de medidas for o menor é considerado o melhor modelo. Um método bastante simples de comparação foi proposto por Diebold e Mariano (1995). Nesse método, utiliza-se os erros de previsão

Figura 5.8 – Retornos mensais da Petrobras PN (linha cheia acima), previsões rolling 1 passo à frente (linha tracejada acima) e erros de previsão (abaixo).

rolling h passos à frente para determinar se a previsão de um modelo é estatisticamente mais precisa que a de outro. Sejam $\hat{\varepsilon}_{t+h|t}^i$ ($i = 1, 2$) os erros de previsão *rolling* h passos à frente de dois modelos propostos e N o número de previsões *rolling* h passos à frente. A acurácia de cada previsão é medida por uma função perda:

$$L(\hat{\varepsilon}_{t+h|t}^i), i = 1, 2. \quad (5.17)$$

Os dois tipos de função perda mais utilizados são a função perda quadrática (*squared error loss*) e a função perda absoluta (*absolute error loss*). São elas:

$$L(\hat{\varepsilon}_{t+h|t}^i) = (\hat{\varepsilon}_{t+h|t}^i)^2 \quad (5.18)$$

$$L(\hat{\varepsilon}_{t+h|t}^i) = |\hat{\varepsilon}_{t+h|t}^i|. \quad (5.19)$$

No intuito de determinar se um modelo possui uma qualidade de previsão superior a de outro, Diebold e Mariano (1995) sugerem calcular a diferença entre as funções perda dos dois modelos

$$d_t = L(\hat{\varepsilon}_{t+h|t}^1) - L(\hat{\varepsilon}_{t+h|t}^2) \quad (5.20)$$

e testar a hipótese nula de igual acurácia de previsão:

$$H_0: E[d_t] = 0. \quad (5.21)$$

A estatística de teste Diebold-Mariano é dada por

$$DM = \frac{\bar{d}}{\widehat{lr\hat{v}}(\bar{d})^{1/2}} \quad (5.22)$$

em que

$$\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N d_t \quad (5.23)$$

é a média da função d_t , e $\widehat{lr\hat{v}}(\bar{d})$ é uma estimativa consistente da variância assintótica de longo prazo ($lr\hat{v}$, long-run variance) de $\bar{d}$. Ainda, Diebold e Mariano (1995) sugeriram calcular $\widehat{lr\hat{v}}(\bar{d})$ usando o estimador não paramétrico de Newey-West com uma função de peso retangular e um parâmetro de truncamento igual a $(h - 1)$. Eles também mostraram que, sob a hipótese nula, a estatística DM é assintoticamente $N(0,1)$.

Capítulo 6. Metodologia Proposta

Conforme foi mencionado no capítulo introdutório, o objetivo deste trabalho é estimar modelos de apreçamento de ativos utilizando diferentes métodos de estimação e, então, comparar a qualidade de ajuste de cada um desses métodos através da técnica de *backtesting*. Ainda, através da utilização do método *rolling* de estimação, pretende-se verificar se esse método fornece um ganho na qualidade de ajuste dos modelos. No capítulo 5, fica claro que o método de estimação utilizando janelas móveis de tamanho fixo permite identificar certos comportamentos na série temporal que o método tradicional não permite. Ferreira (2009) argumenta que a grande vantagem em se empregar o método *rolling* é que ele permite que o comportamento de variação dos parâmetros ao longo do tempo seja capturado, sem que sejam utilizados modelos muito complexos ou métodos de estimação difíceis de serem implementados. No caso do modelo CAPM, por exemplo, diversos modelos alternativos à versão estática de Sharpe-Lintner já foram propostos no intuito de captar variações nos parâmetros desse modelo. Um dos trabalhos mais recentes nesse intuito foi o de Korkas (2010), que propôs que os betas dos ativos (conforme definido na seção 2.5) seguissem um processo auto regressivo de ordem 1 ($AR(1)$) ou um passeio aleatório. Estimaremos os modelos de apreçamento em suas duas abordagens: a de excesso de retornos e a de fator estocástico de desconto. Para esta última abordagem, um problema surge naturalmente: uma vez que o fator estocástico de desconto m_t não é diretamente observado, teremos que estimá-lo. Para tal, utilizaremos a metodologia proposta por Araujo e Issler (2004) para obtê-lo.

Na seção 6.1 a metodologia de obtenção do fator estocástico de desconto m_t será desenvolvida. Na seção 6.2 será apresentado o processo de estimação e comparação dos métodos de estimação e na seção 6.3 dois testes de estabilidade de parâmetros serão expostos

6.1. Obtenção do Fator Estocástico de Desconto

O fator estocástico de desconto, de acordo com a equação (3.6), associa o *payoff* x_{t+1} ao preço do ativo p_t , de forma que todo modelo de apreçamento pode ser visto

como formas diferentes de conectar essas duas variáveis. Infelizmente, apesar de seu papel central em modelos de apreçamento, o fator estocástico de desconto não é diretamente observável, ao contrário dos retornos R_t e dos preços p_t dos ativos, em que grande parte é publicamente disponibilizada.

Em seu artigo, Araujo e Issler (2004) estimam o fator de desconto estocástico para dados de preços e retornos de ativos do Brasil e Estados Unidos utilizando dois tipos de estimadores: o estimador baseado em teoria de finanças e o estimador baseado em componentes comuns. Uma vez que o primeiro tipo de estimador, de acordo com os autores, apresentou uma alta instabilidade numérica nos resultados obtidos em diferentes conjuntos de dados, eles optaram por utilizar o estimador baseado em componentes comuns. Desta forma, utilizaremos o estimador baseado em componentes comuns neste trabalho, que será detalhado nesta seção. Para detalhes sobre o estimador baseado em teoria de finanças, consultar Araujo e Issler (2004).

Baseado em trabalhos de Croux et. al. (2001) e Forni et. al. (2000), Araujo e Issler (2004), esta metodologia de estimação do fator estocástico de desconto decorre da observação de que a Equação de Apreçamento (3.6) implica, sob hipóteses adequadas, que o fator estocástico de desconto é um componente comum ao processo de retorno de todos os ativos. Uma das hipóteses dessa metodologia é que o conjunto de *payoffs* x segue uma distribuição lognormal. Dada essa hipótese vale o seguinte resultado para x :

$$\ln E_t(x) = E_t(\ln x) + \frac{1}{2} E_t\{[\ln x - E_t(\ln x)]^2\}. \quad (6.1)$$

Da equação de apreçamento (3.6) e sob a hipótese adicional de que m_{t+1} e R_{t+1}^i para todo i são lognormais, o logaritmo natural dessa equação fica:

$$\begin{aligned} 0 = E_t(\ln m_{t+1} + \ln R_{t+1}^i) + \\ + \frac{1}{2} E_t\{[\ln m_{t+1} - E_t(\ln m_{t+1}) + \ln R_{t+1}^i \\ - E_t(\ln R_{t+1}^i)]^2\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Definamos:

$$\delta_{m,t}^2 \equiv E_t\{[\ln m_{t+1} - E_t(\ln m_{t+1})]^2\},$$

$$\delta_{i,t}^2 \equiv E_t \left\{ \left[\ln R_{t+1}^i - E_t(\ln R_{t+1}^i) \right]^2 \right\} e$$

$$\delta_{im,t} \equiv E_t \left\{ \left[\ln m_{t+1} - E_t(\ln m_{t+1}) \right] \left[\ln R_{t+1}^i - E_t(\ln R_{t+1}^i) \right] \right\}.$$

De (6.2) resulta:

$$E_t(\ln m_{t+1} + \ln R_{t+1}^i) = -\frac{1}{2}(\delta_{m,t}^2 + 2\delta_{im,t} + \delta_{i,t}^2). \quad (6.3)$$

Definindo ainda $\ln \chi_{m,t}^i = \frac{1}{2}(\delta_{m,t}^2 + 2\delta_{im,t} + \delta_{i,t}^2)$ e substituindo em (6.2) temos:

$$\ln R_{t+1}^i = -\ln m_{t+1} - \ln \chi_{m,t}^i + \varepsilon_{t+1}^i \quad (6.4)$$

em que $E_t(\varepsilon_{t+1}^i) = 0$. A equação (6.4), desta forma, mostra que o fator estocástico de desconto m_{t+1} é um componente comum ao processo de retorno de cada ativo.

De acordo com Araujo e Issler (2004), manipulando a equação (6.1) pode-se chegar a estimadores consistentes para o fator de descontos baseando-se exclusivamente em informações sobre os retornos da economia. As proposições 1 e 2 a seguir descrevem as hipóteses sob as quais o fator estocástico de descontos pode ser consistentemente estimado, apresentando ainda uma forma de se obter tal estimativa.

Proposição 1: Para um conjunto de processos de retorno bruto $\{R_t^i\}$ com $(i, t) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, T\}$ condicionalmente homocedásticos para todo i e lognormais para todo t , o fator estocástico de descontos m_t pode ser consistentemente estimado para todo t , à medida que N e T vão para infinito à mesma taxa, através da expressão:

$$\hat{m}_t = \frac{\bar{R}_t^G}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\bar{R}_t^G \bar{R}_t^A)} \quad (6.5)$$

em que $\bar{R}_t^G = \prod_{i=1}^N \left[(R_t^i)^{-\frac{1}{N}} \right]$ e $\bar{R}_t^A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_t^i$. ■

Demonstração: Consultar Araujo e Issler (2004). ■

Proposição 2: Se processos de retorno bruto $\{R_t^i\}$ com $(i, t) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, T\}$ lognormais para todo t são condicionalmente homocedásticos a menos de um subconjunto de índices i , cujo número de elementos é limitado por $N^{1-\delta}$, com $\delta > 0$, e têm variância uniformemente limitada em T , então o fator estocástico de desconto m_t pode ser consistentemente estimado para todo t através da mesma expressão dada na **Proposição 1**, à medida que N e T vão à mesma taxa para infinito. ■

Demonstração: Consultar Araujo e Issler (2004). ■

Desta forma, as Proposições 1 e 2 fornecem um método simples para a estimação do fator estocástico de desconto. Entretanto, a despeito de sua simplicidade, Araujo e Issler (2004) mencionam duas fraquezas dessa metodologia. Primeiro, uma vez que as duas hipóteses tratam de momentos condicionais, o conjunto de informação considerado para sua validação exerce grande influência. Segundo, a hipótese presente na Proposição 2 não é passível de teste, uma vez que para tanto seria necessário a utilização de uma amostra de tamanho infinito.

6.2. Estimação e Avaliação dos Modelos de Apreçamento

Neste trabalho, iremos utilizar duas formas de estimação para cada método empregado. Os métodos de estimação a serem empregados são: Mínimos Quadrados Ordinários (*OLS*) e Método dos Momentos Generalizados (*GMM*). Para cada um desses dois métodos, serão empregados o método tradicional, utilizando os dados de toda a amostra, e o método *rolling*, utilizando uma janela móvel de tamanho fixo. Ainda, um teste de estabilidade de parâmetros será utilizado.

Ao todo, iremos estimar cinco modelos de apreçamento, sendo três no formato de fator estocástico de desconto e dois no formato de excesso de retorno: o CAPM Sharpe-Lintner em seu formato tradicional de retorno e no formato de fator estocástico de desconto, o CAPM dinâmico e os modelos baseados no consumo com funções utilidade Potência e Hábitos Externos, estes dois últimos em seus formatos log-linearizados.

No intuito de ilustrar o procedimento adotado, dividiremos o procedimento do trabalho em 3 etapas e utilizaremos o modelo CAPM Sharpe-Lintner no seu formato de excesso de retorno e fator estocástico de desconto, assim como o modelo de consumo com função utilidade potência (*CRRA*) para apresentar o procedimento.

1ª Etapa: Para cada abordagem de modelos de apreçamento, quais sejam, no formato de excesso de retorno e no formato de fator estocástico de desconto, as estimações via Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) e Método dos Momentos Generalizados (GMM) serão realizadas utilizando toda a amostra disponível. Assim, para o caso do modelo CAPM Sharpe-Lintner no formato de excesso de retornos, dado por

$$R_t^i - R_t^f = \alpha_i + \beta_i(R_t^m - R_t^f) + \varepsilon_t^i, \quad (6.6)$$

$$i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T,$$

obtemos as estimativas de Mínimos Quadrados $\hat{\alpha}_i^{OLS}$ e $\hat{\beta}_i^{OLS}$ (que, conforme mencionado no capítulo 4, são equivalentes às estimativas obtidas pelo método GMM), para cada $i = 1, \dots, N$ dos portfólios considerados.

Para o caso do CAPM Sharpe-Lintner no formato de fator estocástico de desconto, dado por

$$m_{t+1} = a + b(R_t^m - R_t^f), \quad (6.7)$$

em que as variáveis acima são conforme definidas na subseção 3.6.1, antes de realizar a estimação por OLS (que, similarmente ao formato em excesso de retorno, traz estimativas equivalentes às obtidas por GMM), devemos estimar m_{t+1} utilizando a metodologia de componentes comuns descrita na seção 6.1. Seja m_t^* ($t = 1, \dots, T$) as estimativas obtidas do fator estocástico de desconto utilizando essa metodologia. As estimativas de m_t^* ($t = 1, \dots, T$), desta forma, serão tratadas como variável dependente no processo de estimação. A partir daí, aplicamos o método OLS e obtemos as estimativas $\hat{a}^{OLS}$, $\hat{b}^{OLS}$. Notemos que, para o caso do formato em fator estocástico de desconto, obtemos uma única estimativa para os parâmetros, e não uma estimativa para cada portfólio, uma vez que sua expressão tem como variável independente apenas o excesso de retorno do portfólio de mercado.

Analogamente, para os modelos de apreçamento baseados no consumo, iremos estimar os parâmetros do modelo tomando como variável dependente o fator estocástico de desconto estimado m_t^* . No caso da função utilidade *CRRA*, por exemplo, cuja forma log-linearizada é dada por

$$\ln m_{t+1}^* = \ln \beta - \gamma \Delta \ln c_{t+1}, \quad (6.8)$$

obteremos as estimativas dos parâmetros β e γ via *OLS* e via *GMM*. Quando da estimação por *GMM*, iremos utilizar os conjuntos de instrumentos propostos por Araujo e Issler (2004).

2ª Etapa: Nesta segunda etapa do trabalho, a estimação pelo método *rolling* é realizada. Foi definida uma janela móvel de tamanho fixo $n < T$ (também conhecida como janela *rolling*), em que T é o tamanho da série considerada. Dada essa janela móvel de tamanho fixo n , é possível obter $T - n + 1$ sub-amostras e, em cada uma delas, os parâmetros dos modelos de apreçamento são estimados utilizando os métodos *OLS* e *GMM*. A Figura 6.1, adaptada de Ferreira (2009), ilustra esse processo.

Figura 6.1 – Ilustração do Processo de Seleção das Janelas Móveis pelo Método *Rolling*.

Desta forma, para o modelo CAPM no formato de excesso de retornos, por exemplo, obteremos estimativas para α_i e β_i ($i = 1, \dots, N$), ou seja, formaremos o seguinte

conjunto de estimativas: $\hat{\alpha}_i^{(j)}$ e $\hat{\beta}_i^{(j)}$ ($i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, T - n + 1$), em que o índice i refere-se a cada um dos portfólios considerados e j refere-se a cada uma das estimações utilizando as janelas móveis. Para cada uma dessas janelas móveis, estimaremos via OLS e GMM (para aqueles modelos em que os dois métodos não retornarem estimativas iguais).

3ª Etapa: A terceira etapa consiste no objetivo final do presente trabalho, qual seja, avaliar qual desses quatro tipos de estimação (OLS, GMM e suas respectivas versões *rolling*) fornece a melhor qualidade de ajuste para cada um dos cinco modelos. Ainda, para o caso do CAPM Sharpe-Lintner no formato de excesso de retorno, em que há a agregação dos ativos em portfólios setoriais, o melhor método será apresentado para cada setor. Utilizaremos a técnica de *backtesting* para realizar as comparações entre os métodos de estimação. Por esse procedimento, os valores observados da variável independente são utilizados para prever o valor da variável dependente utilizando os parâmetros estimados do modelo. Recorrendo mais uma vez ao modelo CAPM Sharpe-Lintner para ilustrar esse procedimento, o modelo estimado utilizando toda a amostra é dado por

$$\begin{aligned} \hat{R}_t^{ie} &= \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i R_t^{me}, \\ i &= 1, \dots, N; t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (6.9)$$

em que $R_t^{ie} = (R_t^{ie} - R_t^f)$ e $R_t^{me} = (R_t^{me} - R_t^f)$.

Para todo $t = 1, \dots, T$ iremos reproduzir os valores observados de R_t^{ie} utilizando o modelo estimado $\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \hat{R}_t^{me}$ para cada um dos métodos utilizados. Em seguida, obteremos, para todo $t = n, \dots, T$, o erro de apreçamento do modelo, dado por

$$u_t^i = R_t^{ie} - \hat{R}_t^{ie} \quad (6.10)$$

Teremos, então, $T - n + 1$ estimativas para R_t^{ie} para cada um dos i portfólios setoriais, considerando o caso do CAPM Sharpe-Lintner em sua versão de excesso de retornos. Para a versão *rolling* com janela de tamanho n , os coeficientes estimados agora dependem do tempo t :

$$\begin{aligned} \hat{R}_t^{ie} &= \hat{\alpha}_i^{(j)} + \hat{\beta}_i^{(j)} R_t^{me}, \\ i &= 1, \dots, N; t = 1, \dots, T; j = 1, \dots, T - n + 1. \end{aligned} \quad (6.11)$$

O Erro Quadrático Médio (MSE) associado a cada forma de estimação, dados por

$$MSE(OLS) = \frac{1}{T - n + 1} \sum_{t=n}^T u_t^{2(OLS)}, \quad (6.12)$$

$$MSE(OLSr) = \frac{1}{T - n + 1} \sum_{t=n}^T u_t^{2(OLSr)}, \quad (6.13)$$

$$MSE(GMM) = \frac{1}{T - n + 1} \sum_{t=n}^T u_t^{2(GMM)}, \quad (6.14)$$

$$MSE(GMMr) = \frac{1}{T - n + 1} \sum_{t=n}^T u_t^{2(GMMr)}, \quad (6.15)$$

são obtidos, em que os sobrescritos em parênteses OLS, OLSr, GMM e GMMr indicam os erros de apreçamento associados às estimativas *backtesting*, respectivamente, dos métodos OLS, OLS *Rolling*, GMM e GMM *Rolling*. Similarmente, o Erro Quadrático Absoluto (MAE) associado a cada forma de estimação são dados por

$$MAE(OLS) = \frac{1}{T - n + 1} \sum_{t=n}^T |u_t^{(OLS)}|, \quad (6.16)$$

$$MAE(OLSr) = \frac{1}{T - n + 1} \sum_{t=n}^T |u_t^{(OLSr)}|, \quad (6.17)$$

$$MAE(GMM) = \frac{1}{T - n + 1} \sum_{t=n}^T |u_t^{(GMM)}|, \quad (6.18)$$

$$MAE(GMMr) = \frac{1}{T - n + 1} \sum_{t=n}^T |u_t^{(GMMr)}|. \quad (6.19)$$

Portanto, o método de estimação cujos MSE e MAE associados às suas estimativas *backtesting* forem os menores é considerado o melhor método, de acordo com esse critério.

6.3. Testes de Estabilidade de Parâmetros

De acordo com Zivot e Wang (2006), uma das vantagens no emprego do método *rolling* na estimação de modelos é que este consegue captar instabilidades nos

parâmetros dos modelos. Dois testes simples que verificam eventual instabilidade nos parâmetros do modelo ao longo do tempo são os testes *CUSUM* e *CUSUMSQ*, que se baseiam nos erros de previsão 1 passo à frente do método de Mínimos Quadrados Recursivos⁴, dado por

$$\hat{w}_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{f}_t}, \quad (6.20)$$

em que $\hat{f}_t^2$ é uma estimativa da variância residual do erro de previsão. O teste *CUSUM* é baseado na soma acumulada dos resíduos recursivos, cuja estatística de teste é dada por

$$CUSUM_t = \sum_{j=k+1}^t \frac{\hat{w}_j}{\hat{\sigma}_w}, \quad (6.21)$$

em que $\hat{\sigma}_w$ é o desvio padrão amostral de $\hat{w}_j$. Sob a hipótese nula de que o vetor de parâmetros, digamos β , é constante, a estatística de teste $CUSUM_t$ possui média zero e variância proporcional a $t - k - 1$, em que k é o número de estimativas para o vetor de parâmetros β obtidas por *RLS*. Os limites inferior e superior do intervalo de confiança com coeficiente de confiança 0,95 para a estatística $CUSUM_t$ são dados por duas retas que conectam os pontos $(k, \pm 0,948\sqrt{T - k - 1})$ e $(T, \pm 0,948 * 3\sqrt{T - k - 1})$. Se um ou mais valores de $CUSUM_t$ estiver fora desse intervalo, então se rejeita a hipótese de que o parâmetro é estável ao longo do tempo (Zivot e Wang, 2006).

Analogamente, a estatística de teste $CUSUMSQ_t$ é baseada na soma cumulativa dos resíduos recursivos *ao quadrado*. Sob a hipótese nula de que os parâmetros são estáveis ao longo do tempo, os limites inferior e superior do intervalo de confiança com coeficiente de confiança 0,95 possuem a forma $CUSUMSQ_t \pm t/\sqrt{T - k - 1}$. Desta forma, se um ou mais valores de $CUSUMSQ_t$ não estiver dentro do intervalo acima, então se rejeita a hipótese nula de estabilidade dos parâmetros do modelo.

O módulo `S+FinMetrics` do software `S-Plus`, através do comando `RLS`, permite uma visualização gráfica dos intervalos das duas estatísticas de teste acima, fornecendo, desta forma, um método bastante simples de verificar se há instabilidade nos parâmetros dos modelos de apreçamento em estudo.

---

⁴ Para detalhes acerca do método de Mínimos Quadrados Recursivos, consultar Zivot e Wang (2006), capítulo 6.

Capítulo 7. Aplicações

Neste capítulo, vamos estimar os cinco modelos de apreçamento estudados no capítulo 3 com o intuito de verificar qual dos quatro métodos a serem empregados na estimação (quais sejam, Mínimos Quadrados Ordinários, Mínimos Quadrados Ordinários *Rolling*, Método Generalizado dos Momentos e Método Generalizado dos Momentos *Rolling*) produz os menores erros quadrático médio e absoluto, através da utilização da técnica de *backtesting*. Para tal, utilizaremos o módulo `S+FinMetrics` do software `S-Plus`.

Vale ressaltar que, como os modelos de consumo com funções utilidade potência (CRRA) e Hábitos Externos permitem uma especificação log-linear, essa especificação foi utilizada no procedimento de estimação. A Tabela 7.1 lista os modelos a serem estimados, com suas respectivas formas funcionais e parâmetros.

Tabela 7.1 : Modelos de Apreçamento a Serem Estimados.

Modelo	Expressão	Parâmetros a Serem Estimados
CAPM Sharpe-Lintner	$R_t^i - R_t^f = \alpha_i + \beta_i(R_t^m - R_t^f)$	α_i e β_i
CAPM Dinâmico	$R_t^i - R_t^f = \alpha + \phi(R_{t-1}^i - R_{t-1}^f) + \beta_0(R_t^m - R_t^f) + \beta_1(R_{t-1}^m - R_{t-1}^f)$	α, ϕ, β_0 e β_1
CAPM Sharpe-Lintner – Fator Estocástico de Desconto	$m_{t+1} = a + b(R_t^m - R_t^f)$	a e b
Modelo de Consumo - CRRA	$\ln m_{t+1}^* = \ln \beta - \gamma \Delta \ln c_{t+1}$	β e γ
Modelo de Consumo – Hábitos Externos	$\ln m_{t+1}^* = \ln \beta - \gamma \Delta \ln c_{t+1} + \kappa(\gamma - 1) \Delta \ln c_{t+1}$	β, γ e κ

O objetivo desta aplicação é avaliar a qualidade de ajuste dos modelos de apreçamento através de *backtesting*, tanto para modelos de apreçamento baseados no consumo quanto para os modelos de fatores. Os dados desta aplicação referem-se aos retornos de ativos e consumo real, que serão aplicados nos cinco modelos de apreçamento especificados na Tabela 7.1 através de quatro métodos de estimação: Mínimos Quadrados Ordinários (OLS), Método Generalizado dos Momentos (GMM),

Mínimos Quadrados Ordinários *rolling* e Método Generalizado dos Momentos *rolling*. Esses dados serão estudados em duas frequências: um conjunto com frequência mensal e outro com frequência trimestral. A razão para isso é que, como na estimação dos modelos de consumo é necessário o uso de dados sobre consumo, e no Brasil a instituição responsável pela divulgação desse tipo de informação (o IPEA, Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas) só disponibiliza dados na frequência trimestral, quando da estimação desse tipo de modelo, todos os dados tiveram de ser convertidos para a frequência trimestral. Como estamos tratando de consumo *per capita*, a série de consumo foi dividida pela série de população residente, também obtida no IPEA. A série resultante foi, então, ajustada sazonalmente utilizando o método de médias móveis aditivo. Para detalhes, ver Morettin e Tolo (2006). A razão exposta por Araujo e Issler (2004) para a importância do ajustamento sazonal da série de consumo é que as componentes sazonais de tais séries provavelmente se devam a características particulares de preferências, não contempladas nos modelos de consumo. Na estimação dos modelos de fatores, utilizamos dados na frequência mensal, uma vez que somente dados de retornos são necessários, os quais estão disponíveis nessa frequência.

Em relação aos dados dos retornos de ativos, consideraremos neste trabalho os ativos agregados em portfólios, ao invés de individualmente. De acordo com Cochrane (2001), quando se agrega os dados de ativos em portfólios baseados em características comuns, tais como os betas (ou seja, o grau de exposição dos ativos ao risco de mercado), tamanho das empresas, razão preço/dividendos, setores etc., os parâmetros são estimados com mais precisão, uma vez que portfólios possuem variância residual menor que a de ativos individualmente. Ainda, os betas dos portfólios são mais estáveis ao longo do tempo e, portanto, são mais fáceis de serem medidos. O modelo CAPM, por exemplo, a despeito do fracasso que foi nos primeiros testes empíricos, mostrou-se bastante satisfatório quando os ativos foram agrupados por características comuns (Cochrane, 2001). Por essas razões, neste trabalho utilizaremos os dados de ativos agregados em portfólios, ao invés de ativos individualmente.

Para a formação dos portfólios, utilizaremos a metodologia adotada por Araujo e Issler (2004), que foi a seguinte: para os dados de retornos, foram selecionadas informações de 90 ações continuamente negociadas na Bovespa (Bolsa de Valores de São Paulo) a partir de setembro de 1994 (período pós plano real) até dezembro de 2010. Para a construção dos retornos reais as informações relativas a preço de negociação e

dividendos pagos foram deflacionadas utilizando o índice de preços IGP-DI. No tocante a agregação em setores, os mesmos foram construídos considerando os setores listados na classificação de indústria feita pela Bovespa. As 90 ações selecionadas por Araujo e Issler (2004) foram, então, agrupadas em 16 setores. Neste trabalho, após realizar a seleção de ações conforme esse critério, terminamos com 15 setores, que estão listados no Apêndice 2, e cujos gráficos de retornos líquidos estão listados no Apêndice 1. O retorno de um dado setor foi considerado como a média geométrica dos retornos dos ativos nele classificados.

Nas seções 7.1 e 7.2, a estimação e avaliação, respectivamente, dos modelos de fatores e de consumo são apresentadas.

7.1. Estimação e Avaliação dos Modelos de Fatores

Para os modelos de fatores CAPM Sharpe-Lintner e CAPM Dinâmico, iremos estimá-los para cada um dos 15 portfólios setoriais. Para o CAPM no formato de fator estocástico de desconto, uma vez que esse modelo tem como variável independente o fator estocástico de desconto, e não os retornos de cada um dos portfólios, teremos somente uma estimação, ao invés de 15. A lista com os papéis que compõem cada um dos portfólios setoriais está presente no Apêndice 2. A série utilizada para o ativo livre de risco é a taxa mensal do CDI (Certificado de Depósito Interbancário). Para o portfólio de mercado, foi utilizado o índice Bovespa (IBOVESPA). Os dados possuem frequência mensal e abrangem o período de setembro de 1994 a dezembro de 2010, e foram coletados no programa Economatica. As duas subseções seguintes mostram os resultados obtidos para dois dos portfólios setoriais, quais sejam, o portfólio setorial Alimentos e Bebidas e Finanças e Seguros. Os resultados para os 13 portfólios restantes encontram-se resumidos na subseção 7.1.3.

7.1.1. Setor Alimentos e Bebidas

- **Modelo CAPM Sharpe-Lintner**

Os gráficos com os retornos brutos do setor alimentos e bebidas encontram-se no Apêndice 1. Conforme mencionamos no capítulo 4, os métodos de estimação OLS e GMM retornam estimativas idênticas, de forma que, para o caso do CAPM Sharpe-Lintner, iremos avaliar e comparar dois métodos de estimação, quais sejam, OLS (ou GMM) e sua versão *rolling*. Primeiramente o método tradicional utilizando todas as observações será empregado para estimar o modelo. Depois, o método *rolling* será utilizado na estimação. Utilizando a técnica de *backtesting*, iremos então verificar se o método *rolling* promove um ganho na qualidade de ajuste do modelo utilizando as observações anteriores, ou seja, iremos verificar qual dos dois métodos de estimação proporciona os menores erros de apreçamento. A Figura 7.1 mostra a série de excesso de retornos do portfólio setorial de alimentos e bebidas juntamente com os valores estimados do CAPM pelo método OLS tradicional. Por esse gráfico, podemos notar a influência de algumas crises da década de 90 no excesso de retorno no setor de alimentos e bebidas da Bovespa, tais como a crise asiática (final de 1997), e a moratória da Rússia (final de 1998), através dos dois valores atipicamente baixos do excesso de retorno. De fato, não somente os retornos desse setor, que apresentaram valores baixos nesses períodos (conforme podemos constatar pela figura no Apêndice 1), como também os retornos associados à taxa CDI foram elevados (decorrentes da política monetária restritiva adotada à época), o que puxou ainda mais para baixo o excesso de retorno do setor alimentos e bebidas. A Figura 7.2, que relaciona os erros de apreçamento aos quantis da distribuição normal, mostra que os erros de apreçamento foram mais destoantes da distribuição normal em meses afetados por crises, tais como julho de 2000 (queda das ações da NASDAQ), dezembro de 1999 (crise argentina) e setembro de 1998 (moratória da Rússia).

Figura 7.1 - Excesso de Retorno do Setor Alimentos e Bebidas (linha cheia, em azul) e valores estimados pelo CAPM Sharpe-Lintner por OLS (linha tracejada, em vermelho).

A despeito desses valores atípicos, a versão Sharpe-Lintner do CAPM consegue captar 77% da variabilidade total dos excessos de retorno do portfólio, como podemos visualizar na saída do S-Plus, presente no Quadro 7.1, através do coeficiente de determinação da regressão.

```
Call:
OLS(formula = erALIMEBEBm ~ erIBOVESPA, data = ALIMEBEBm)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.2647 -0.0459 -0.0030  0.0465  0.2180

Coefficients:
              Value Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.0105   0.0057    1.8598  0.0644
erIBOVESPA   0.8816   0.0348   25.2980  0.0000

Regression Diagnostics:
      R-Squared 0.7674
Adjusted R-Squared 0.7662
```

```

Durbin-Watson Stat 1.8325

Residual Diagnostics:

                Stat P-Value
Jarque-Bera    4.6357  0.0985
Ljung-Box     17.3412  0.7443

Residual standard error: 0.07874 on 194 degrees of freedom

Time period: from Sep 1994 to Dec 2010

F-statistic: 640 on 1 and 194 degrees of freedom, the p-value is 0

```

Quadro 7.1: Saída do programa S-Plus para o modelo CAPM Sharpe-Lintner para o portfólio setorial Bebidas e Alimentos.

Figura 7.2 – Erros de Apreçamento (eixo vertical) versus quantis da distribuição normal padrão (eixo horizontal).

Desta forma, de acordo com a interpretação do modelo CAPM Sharpe-Lintner exposta na subseção 3.6.1, 77% do risco do portfólio alimentos e bebidas não é diversificável, ou seja, é devido ao risco inerente ao mercado. O restante, 23% do risco total, é o risco idiossincrático, ou seja, o risco que pode ser eliminado através de uma estratégia adequada de diversificação ou, ainda, o risco relacionado às características

específicas das empresas que compõem o portfólio. A estimativa da magnitude do risco diversificável é dada por $\hat{\sigma} = 0,0787$, ou 7,87% ao mês.

O modelo CAPM Sharpe-Lintner estimado pelo método OLS tradicional é dado por

$$\widehat{R_t^{AB}} - R_t^f = 0.0105 + 0.8816(R_t^m - R_t^f). \quad (7.1)$$

em que o sobrescrito AB em R_t^{AB} é uma abreviação para indicar o portfólio setorial de alimentos e bebidas.

Figura 7.3 – Função de Autocorrelação (ACF) para os resíduos do modelo CAPM Sharpe-Lintner ajustado por OLS.

Conforme foi exposto no Capítulo 6, uma das vantagens no emprego do método de estimação *rolling* é captar variações nos parâmetros ao longo do tempo sem demais complicações no formato funcional dos modelos. Ou seja, para o caso do CAPM Sharpe-Lintner, passamos de sua forma estática para um modelo da forma

$$R_t^{AB} - R_t^f = \alpha_t^{AB} + \beta_t^{AB}(R_t^m - R_t^f), \quad (7.2)$$

em que os parâmetros α_t^{AB} e β_t^{AB} podem variar ao longo do tempo. Uma forma de verificar se há indício de instabilidade nos parâmetros, conforme apresentado na seção 6.3, é a realização dos testes CUSUM e CUSUMSQ para os erros de apreçamento obtidos do método recursivo de mínimos quadrados. O módulo `S+FinMetrics`, através da função `RLS`, permite uma visualização gráfica das estatísticas CUSUM e CUSUMSQ, com seus respectivos intervalos de confiança com coeficiente de confiança de 95%. Assim, pela análise dos seus respectivos gráficos, podemos verificar se há indícios de instabilidade nos parâmetros do modelo CAPM para o período em estudo. As figuras 7.4 e 7.5 mostram, respectivamente, as estatísticas CUSUM e CUSUMSQ para o modelo CAPM Sharpe-Lintner.

Figura 7.4 – Estatística $CUSUM_t$ para os resíduos do CAPM Sharpe-Lintner ajustado por RLS (linha cheia) com intervalos de confiança (linha tracejada).

Analisando o gráfico das estatísticas $CUSUM_t$ e $CUSUMSQ_t$, observa-se que esta última estatística assume valores que estão fora do intervalo de confiança entre os anos de 2000 e 2002, e portanto há indício de instabilidade nos parâmetros do CAPM Sharpe-Lintner para o portfólio setorial de alimentos e bebidas.

Figura 7.5 - Estatística $CUSUMSQ_t$ para os resíduos do CAPM Sharpe-Lintner ajustado por RLS (linha cheia) com intervalos de confiança (linha tracejada).

Utilizando uma janela móvel de tamanho fixo de 24 meses, iremos estimar o mesmo modelo CAPM. Esse modelo será estimado em cada uma dessas janelas, totalizando 172 estimações ao longo do período em estudo. A Figura 7.3 mostra as estimativas *rolling* para o intercepto do modelo, assim como para o seu beta, com seus respectivos intervalos de confiança com coeficiente de confiança de 95%. Pode-se notar que, para o parâmetro α , os valores estimados não são significativamente diferentes de zero ao longo de todo o período em estudo, exceto para os primeiros meses da amostra e para alguns meses dos anos de 2001 e 2002. Logo, para esses períodos, a restrição imposta pelo CAPM de que $\alpha = 0$ não é atendida neste caso e, portanto, os excessos de retorno do setor de alimentos e bebidas são mais elevados do que os preditos pelo CAPM para esses períodos. A Tabela 7.3 lista as janelas em que os parâmetros α estimados foram significativamente diferentes de zero, juntamente com seu valor estimado e o p-valor.

Figura 7.6 – Estimativas *Rolling* para o intercepto (acima) e o beta do portfólio (abaixo).

Para os períodos listados na Tabela 7.2, o método *rolling* permite identificar que o modelo CAPM Sharpe-Lintner tende a subestimar os valores dos excessos de retorno da previsão dos excessos de retorno do portfólio setorial. Este fato, como vimos, não pôde ser identificado através do método OLS tradicional.

Tabela 7.2: Janelas e α Significativos pela Estimação OLS *Rolling*.

Janela	$\hat{\alpha}$	p-valor
Set/94 – Ago/96	0,0394	0,0193
Out/94 – Set/96	0,0399	0,0166
Nov/94 – Out/96	0,0295	0,0397
Dez/94 – Nov/96	0,0300	0,0446
Abr/95 – Mar/97	0,0427	0,0217
Mai/95 – Abr/97	0,0377	0,0498
Abr/99 – Mar/01	0,0582	0,0269
Jun/99 – Mai/01	0,0503	0,0452
Jan/00 – Dez/01	0,0429	0,0366
Fev/00 – Jan/02	0,0412	0,0452
Mar/00 – Fev/02	0,0467	0,0126
Abr/00 – Mar/02	0,0390	0,0247
Mai/00 – Abr/02	0,0357	0,0331
Jun/00 – Mai/02	0,0348	0,0376
Jul/00 – Jun/02	0,0325	0,0484

A Figura 7.7 mostra as estimativas *rolling* para o erro-padrão residual do CAPM para o portfólio em questão.

Figura 7.7 – Estimativas *Rolling* para o Erro-padrão Residual do Modelo CAPM Sharpe-Lintner para o setor Alimentos e Bebidas.

Percebe-se que o erro-padrão residual $\hat{\sigma}$, que representa a magnitude do risco diversificável predita pelo CAPM, no ano 2001 é duas vezes maior que o obtido no ano de 1998, mostrando a instabilidade do modelo ajustado para esse setor.

Avaliação dos Métodos de Estimação

Conforme foi exposto no capítulo introdutório, o objetivo deste trabalho é comparar formas alternativas de estimação de modelos de apreçamento de ativos. Para tal, iremos utilizar a técnica de *backtesting*, que se refere à obtenção das estimativas para os excessos de retorno setoriais através do modelo ajustado utilizando as observações passadas e avaliar essas estimativas comparando com os valores reais dos excessos de retorno. Utilizaram-se os dados de excessos de retorno do portfólio de mercado de agosto de 1996 a dezembro de 2010 para obter os valores estimados pelo

modelo para os excessos de retorno do portfólio setorial. Utilizaremos as medidas de avaliação Erro Quadrático Médio (MSE) e Erro Absoluto Médio (MAE), cujas expressões estão na seção 6.3, para realizar a avaliação das duas formas de estimação. A Tabela 7.3 mostra os valores obtidos para cada estatística em cada uma das formas de estimação.

Tabela 7.3: MSE e MAE para o Modelo CAPM Sharpe-Lintner.

Método	Erro Quadrático Médio	Erro Absoluto Médio
OLS	0,0062	0,0590
OLS <i>Rolling</i>	0,0056	0,0577

Conforme podemos visualizar na Tabela 7.3, o método *rolling* proporcionou uma redução no Erro Quadrático Médio e no Erro Absoluto Médio. Calculando a razão dessas medidas entre os dois métodos, obtemos:

$$Razão (MSE) = \frac{0,0056}{0,0062} = 0,9085,$$

$$Razão (MAE) = \frac{0,0590}{0,0577} = 0,9776.$$

Assim, pode-se constatar que o método *rolling* proporcionou uma redução de 9,15% no Erro Quadrático Médio e de 2,24% no Erro Absoluto Médio em relação ao método tradicional de estimação do modelo CAPM Sharpe-Lintner.

- **Modelo CAPM Dinâmico**

Similarmente ao modelo CAPM Sharpe-Lintner, os métodos de estimação OLS e GMM retornam estimativas idênticas, de forma que iremos estimar esta versão do CAPM Dinâmico utilizando dois procedimentos: o método tradicional de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) e sua versão *rolling*. Relembrando a expressão desse modelo de apreçamento, iremos estimar o seguinte modelo:

$$R_t^{AB} - R_t^f = \alpha^{AB} + \phi^{AB} (R_{t-1}^{AB} - R_{t-1}^f) + \beta_0^{AB} (R_t^m - R_t^f) + \beta_1^{AB} (R_{t-1}^m - R_{t-1}^f), \quad (7.3)$$

em que o excesso de retorno do setor alimentos e bebidas depende não somente do excesso de retorno do portfólio de mercado, como também do seu excesso de retorno do período anterior e do excesso de retorno do portfólio de mercado do período anterior.

Como podemos visualizar no Quadro 7.2, o modelo estimado é dado por:

$$R_t^{AB} - R_t^f = 0,0091 - 0,03(R_{t-1}^{AB} - R_{t-1}^f) + 0,89(R_t^m - R_t^f) + 0,08(R_{t-1}^m - R_{t-1}^f). \quad (7.4)$$

O beta de curto prazo estimado, $\hat{\beta}_0^{AB}$, é 0,89, e a estimativa do beta de longo prazo, dado por $(\beta_0^{AB} + \beta_1^{AB})/(1 - \phi^{AB})$, é 0,94. Percebe-se, desta forma, que o beta de longo prazo estimado para o setor de alimentos e bebidas é maior que o beta de curto prazo. Entretanto, a não significância individual dos parâmetros estimados do CAPM dinâmico mostra que os dados desse portfólio parecem não suportar essa versão do CAPM.

Call:

OLS(formula = erALIMEBEBm ~ erIBOVESPAm + ar(1) + tslag(erIBOVESPAm), data =ALIMEBEBm)

Residuals: Min   1Q   Median   3Q   Max

-0.2544 -0.0457 -0.0006   0.0550   0.2063

Coefficients: Value Std. Error   t value Pr(>|t|)

(Intercept)   0.0091   0.0058   1.5751   0.1169

erIBOVESPAm   0.8902   0.0352   25.3014   0.0000

tslag(erIBOVESPAm) -0.0300   0.0727   -0.4126   0.6804

lag1   0.0829   0.0724   1.1442   0.2540

Regression Diagnostics:

R-Squared 0.7715

Adjusted R-Squared 0.7679

Durbin-Watson Stat 1.9118

Residual Diagnostics:

Stat P-Value

Jarque-Bera   2.5357   0.2814

Ljung-Box 20.5057   0.5514

Residual standard error: 0.07865 on 191 degrees of freedom

Time period: from Oct 1994 to Dec 2010

F-statistic: 215 on 3 and 191 degrees of freedom, the p-value is 0

Quadro 7.2: Saída do programa S-Plus para o modelo CAPM Dinâmico para o portfólio setorial Alimentos e Bebidas.

A não significância das estimativas para os parâmetros ϕ^{AB} e β_1^{AB} , que medem a dependência dos excessos de retorno no tempo t com excessos de retorno no tempo $t - 1$, sugerem que os excessos de retorno tanto do setor alimentos e bebidas quanto do portfólio de mercado no tempo $t - 1$ parecem não exercer influência sobre os excessos de retorno desse setor no tempo t .

As estimativas utilizando o método *rolling*, com janela móvel de tamanho fixo de 24 meses, estão na Figura 7.8.

Figura 7.8 – Estimativas *Rolling* para o intercepto (acima, lado esquerdo), β_0^{AB} (acima, lado direito), β_1^{AB} (abaixo, lado esquerdo) e ϕ (abaixo, lado direito).

Pela Figura 7.8, notamos que o método de estimação *rolling* mostra que o modelo CAPM dinâmico não é sustentado pelos dados para a maioria das janelas. Entretanto, é possível identificar que em alguns períodos há indícios de dependência entre o excesso de retorno do setor alimentos e bebidas no tempo t e seu excesso de retorno em $t - 1$, assim como do excesso de retorno do portfólio de mercado em $t - 1$. A Tabela 7.4 mostra as janelas cujos parâmetros ϕ^{AB} e β_1^{AB} foram estatisticamente diferentes de zero, ao nível de significância de 10%.

Tabela 7.4: Janelas e $\hat{\phi}^{AB}$ e $\hat{\beta}_1^{AB}$ Significativos ao Nível de 10% pela Estimação OLS *Rolling*.

Janela	$\hat{\beta}_1^{AB}$	p-valor	$\hat{\phi}$	p-valor
Set/00–Ago/02	-0,3346	0,0768	0,3957	0,0631
Out/00–Set/02	-0,4070	0,0098	0,5057	0,0053
Nov/00–Out/02	-0,2832	0,0582	0,3332	0,0633
Nov/06–Out/08	-0,4235	0,0285	0,3618	0,0791
Dez/06–Nov/08	-0,5038	0,0076	0,4377	0,0358
Jan/07–Dez/08	-0,4965	0,0078	0,4101	0,0420
Fev/07–Jan/09	-0,4902	0,0111	0,4073	0,0520

Uma vez que os dados não suportam o CAPM dinâmico para o método OLS tradicional nem para a maioria das janelas pelo método *rolling*, o método de *backtesting* não foi aplicado.

7.1.2. Setor Finanças e Seguros

Similarmente ao exposto na subseção 7.1.1, iremos estimar os modelos de fatores CAPM Sharpe-Linter e CAPM dinâmico através do método OLS tradicional e do método *rolling*. Utilizando *backtesting*, iremos verificar se o método *rolling* consegue reduzir o Erro Quadrático Médio (MSE) e Erro Absoluto Médio (MAE) do ajuste do modelo. As ações que compõem esse portfólio encontram-se listadas no Apêndice 2.

- **Modelo CAPM Sharpe-Lintner**

O gráfico com os retornos brutos do setor finanças e seguros encontra-se no Apêndice 1. A Figura 7.9 mostra a série de excesso de retornos do portfólio setorial de finanças e seguros juntamente com os valores estimados do CAPM pelo método OLS tradicional. Podemos notar, similarmente ao portfólio de alimentos e bebidas, a influência negativa que a crise asiática (final de 1997) e a moratória da Rússia (final de 1998) exerceram sobre os excessos de retorno do portfólio de finanças e seguros. A Figura 7.2, que relaciona os erros de apreçamento aos quantis da distribuição normal, mostra que os erros de apreçamento foram mais destoantes da distribuição normal nos meses afetados por essas crises. A estatística R^2 indica que a versão Sharpe-Lintner do CAPM

consegue captar 84% da variabilidade total dos excessos de retorno do portfólio, como podemos visualizar na saída do S-Plus, presente no Quadro 7.3. Assim, de acordo com o CAPM Sharpe-Lintner, 84% do risco do portfólio finanças e seguros não é passível de diversificação, ou seja, é devido ao risco inerente ao mercado. O restante, 16% do risco total, é o risco idiossincrático ou, alternativamente, o risco que não é apreçado e pode ser reduzido através de uma estratégia adequada de diversificação.

Figura 7.9 - Excesso de Retorno do Setor Finanças e Seguros (linha cheia em azul) e valores estimados pelo CAPM Sharpe-Lintner por OLS (linha tracejada em vermelho).

O p-valor do teste de Ljung-Box para os erros de apreçamento indica que a hipótese de que os mesmos são não correlacionados não é rejeitada, o que é confirmada pela análise gráfica da função de autocorrelação (ACF), na Figura 7.10. A estatística Jarque-Bera, ainda, indica que os erros de apreçamento não são normalmente distribuídos. O teste F retorna um p-valor que nos permite concluir que o modelo de apreçamento ajustado é adequado. Notemos ainda que a restrição do CAPM de que $\alpha^{FS} = 0$ é atendida para esse portfólio, uma vez que sua estimativa não é significativamente diferente de zero.

```

Call:
OLS(formula = erFS ~ erIBOVESPAm, data = FS)

Residuals:      Min        1Q    Median        3Q        Max
               -0.2456 -0.0351  0.0017  0.0371  0.1821

Coefficients:
              Value Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.0049  0.0045      1.0832  0.2801
erIBOVESPAm  0.8954  0.0279     32.0750  0.0000

Regression Diagnostics:

R-Squared 0.8413
Adjusted R-Squared 0.8405
Durbin-Watson Stat 2.2626

Residual Diagnostics:  Stat    P-Value
Jarque-Bera 40.8803  0.0000
Ljung-Box   22.2110  0.4474

Residual standard error: 0.06308 on 194 degrees of freedom

Time period: from Sep 1994 to Dec 2010

F-statistic: 1029 on 1 and 194 degrees of freedom, the p-value is 0

```

Quadro 7.3: Saída do programa S-Plus para o modelo CAPM Sharpe-Lintner para o portfólio setorial Finanças e Seguros.

Figura 7.10 – Erros de Apreçamento (eixo vertical) versus quantis da distribuição normal padrão (eixo horizontal).

Figura 7.11 – Função de Autocorrelação (ACF) para os erros de apreçamento do modelo CAPM Sharpe-Lintner ajustado por OLS.

O modelo CAPM Sharpe-Lintner estimado para esse portfólio é dado por:

$$\widehat{R_t^{FS}} - R_t^f = 0,0049 + 0,8954 (R_t^m - R_t^f), \quad (7.5)$$

em que o parâmetro estimado $\hat{\alpha}^{FS}$ não é significativo ao nível de 10% satisfazendo, desta forma, a restrição imposta pelo CAPM Sharpe-Lintner. Analisando os gráficos das estatísticas $CUSUM_t$ e $CUSUMSQ_t$ para os erros de apreçamento do modelo estimado por RLS, nas figuras 7.12 e 7.13, podemos notar que há evidência de instabilidade nos parâmetros do modelo para o portfólio finanças e seguros, uma vez que a estatística $CUSUMSQ_t$ assume valores fora do intervalo de confiança durante o período de 1999 a 2005.

Figura 7.12 – Estatística **CUSUM**_t para os erros de apreçamento do CAPM Sharpe-Lintner ajustado por RLS (linha cheia) com intervalos de confiança (linha tracejada) para o portfólio Finanças e Seguros.

Seguindo a metodologia proposta, iremos utilizar o método *rolling* de estimação, em que iremos utilizar uma janela móvel de tamanho 24 meses, em incrementos de um mês, de forma que agora teremos 172 estimativas para os para os parâmetros. O modelo proposto, então, é dado por

$$R_t^{FS} - R_t^f = \alpha_t^{FS} + \beta_t^{FS}(R_t^m - R_t^f), \quad (7.6)$$

em que agora os parâmetros α_t^{FS} e β_t^{FS} podem variar ao longo do tempo, devido às sucessivas estimações do método *rolling*. A Figura 7.14 mostra as estimativas *rolling* para o intercepto do modelo, assim como para o seu beta, com seus respectivos intervalos de confiança com coeficiente de confiança de 95%.

Figura 7.13 - Estatística $CUSUMSQ_t$ para os erros de apreçamento do CAPM Sharpe-Lintner ajustado por RLS (linha cheia) com intervalos de confiança (linha tracejada) para o portfólio Finanças e Seguros.

Pela análise dos 172 valores estimados de α^{FS} e de seus intervalos de confiança, os valores estimados parecem não ser significativamente diferentes de zero ao longo de todo o período em estudo, ao nível de confiança de 0,95. Logo, a restrição imposta pelo CAPM de que $\alpha^{FS} = 0$ é atendida ao longo de todas as 172 janelas do método *rolling*. Para o beta do portfólio, β^{FS} , podemos notar que houve uma elevação do seu valor estimado a partir do final de 1997, período da crise asiática. Desta forma, após a crise asiática, constata-se que o prêmio de risco associado ao portfólio finanças e seguros apresentou uma elevação.

A Figura 7.15 mostra as estimativas *rolling* para o erro-padrão residual do CAPM para o portfólio em questão. Percebe-se que o erro-padrão residual $\hat{\sigma}$, que representa a magnitude do risco diversificável predita pelo CAPM, apresenta uma tendência de alta até o ano 1999, a partir do qual se inicia uma tendência decrescente até o final do período estudado.

Figura 7.14 – Estimativas *Rolling* para o intercepto (acima) e o beta do portfólio (abaixo) para o setor Finanças e Seguros.

Figura 7.15 – Estimativas *Rolling* para o Erro-padrão Residual do Modelo CAPM Sharpe-Lintner para o setor Finanças e Seguros.

Avaliação dos Métodos de Estimação

Utilizando as observações dos excessos de retorno de agosto de 1996 a dezembro de 2010, iremos reproduzir as informações passadas do modelo no intuito de comparar a qualidade de previsão *backtesting* do modelo em cada um dos métodos de estimação. A Tabela 7.5 mostra os valores obtidos para as estatísticas MSE e MAE para os métodos tradicional e *rolling*.

Tabela 7.5: MSE e MAE do Modelo CAPM Sharpe-Lintner para o setor Finanças e Seguros.

Método	Erro Quadrático Médio	Erro Absoluto Médio
OLS	0,0038	0,0454
OLS <i>Rolling</i>	0,0033	0,0420

De acordo com a Tabela 5, o método *rolling* proporcionou tanto uma redução no Erro Quadrático Médio quanto no Erro Absoluto Médio. Calculando a razão dessas medidas entre os dois métodos, obtemos:

$$Razão (MSE) = \frac{0,0033}{0,0038} = 0,8686,$$

$$Razão (MAE) = \frac{0,0454}{0,0420} = 0,9260.$$

Assim, pode-se constatar que o método *rolling* proporcionou uma redução de 13,14% no Erro Quadrático Médio e de 7,40% no Erro Absoluto Médio em relação ao método tradicional.

- **Modelo CAPM Dinâmico**

Analogamente ao modelo CAPM Sharpe-Lintner, iremos estimar o modelo CAPM Dinâmico para o portfólio de finanças e seguros utilizando dois procedimentos: o método tradicional de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) e sua versão *rolling*. Conforme exposto no capítulo 4, as estimativas obtidas por GMM retornam valores

idênticos aos obtidos por OLS. Relembrando a expressão desse modelo de apreçamento, iremos estimar o seguinte modelo:

$$R_t^{FS} - R_t^f = \alpha + \phi(R_{t-1}^{FS} - R_{t-1}^f) + \beta_0(R_t^m - R_t^f) + \beta_1(R_{t-1}^m - R_{t-1}^f), \quad (7.7)$$

em que o excesso de retorno do portfólio de finanças e seguros depende do excesso de retorno do portfólio de mercado, do seu excesso de retorno do período anterior e do excesso de retorno do portfólio de mercado do período anterior.

Como podemos observar do Quadro 7.4, o modelo estimado pelo método OLS tradicional é dado por:

$$R_t^{FS} - R_t^f = 0,0047 - 0,14(R_{t-1}^{FS} - R_{t-1}^f) + 0,89(R_t^m - R_t^f) + 0,17(R_{t-1}^m - R_{t-1}^f). \quad (7.8)$$

Call:

OLS(formula = erFS ~ erIBOVESPA + ar(1) + tslag(erIBOVESPA), data = FS)

Residuals: Min   1Q   Median   3Q   Max

-0.2485 -0.0361 0.0013 0.0365 0.1713

Coefficients: Value Std. Error   t value Pr(>|t|)

(Intercept)   0.0047   0.0045   1.0311   0.3038

erIBOVESPA   0.8887   0.0281   31.6149   0.0000

tslag(erIBOVESPA)   0.1719   0.0700   2.4541   0.0150

lag1   -0.1358   0.0722   -1.8802   0.0616

Regression Diagnostics: R-Squared 0.8467

Adjusted R-Squared 0.8443

Durbin-Watson Stat 1.9976

Residual Diagnostics: Stat P-Value

Jarque-Bera 25.5768 0.0000

Ljung-Box 19.7807 0.5968

Residual standard error: 0.06243 on 191 degrees of freedom

Time period: from Oct 1994 to Dec 2010

F-statistic: 351.6 on 3 and 191 degrees of freedom, the p-value is 0 F-statistic: 215 on 3 and 191 degrees of freedom, the p-value is 0

Quadro 7.4: Saída do programa S-Plus para o modelo CAPM para o portfólio setorial Finanças e Seguros.

O beta de curto prazo estimado, $\hat{\beta}_0$, é de 0,89, e a estimativa do beta de longo prazo, dado por $(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1)/(1 - \hat{\phi})$, é de 0,91, indicando que o beta de longo prazo estimado para o setor de finanças é maior que o beta de curto prazo.

As estatísticas de Ljung-Box e F indicam, respectivamente, que os erros de apreçamento são não correlacionados e que o modelo ajustado é adequado. A Figura 7.18, que mostra o gráfico da função ACF para os erros de apreçamento, confirma que estes são não correlacionados. Notemos que, ao contrário do setor de alimentos e bebidas, os parâmetros dos componentes retroativos são significativamente diferentes de zero. Isso indica que, para esse setor, os excessos de retorno do portfólio setorial e do portfólio de mercado no período $t - 1$ parecem exercer influência sobre o excesso de retorno no período t . A Figura 7.16 mostra o excesso de retorno do portfólio de finanças e seguros e os valores previstos pelo CAPM dinâmico.

Figura 7.16 - Excesso de Retorno do Setor Finanças e Seguros (linha cheia em azul) e valores estimados pelo CAPM Dinâmico por OLS (linha tracejada em vermelho).

Figura 7.17 – Erros de Apreçamento versus quantis da distribuição normal padrão para o modelo CAPM Dinâmico, setor Finanças e Seguros.

Figura 7.18 – Função de Autocorrelação (ACF) para os erros de apreçamento do modelo CAPM Dinâmico ajustado por OLS.

A estatística Jarque-Bera indica que os erros de apreçamento não são normalmente distribuídos. A Figura 7.17, que mostra o Q-Q Plot dos erros de apreçamento em relação aos quantis da distribuição normal, evidencia que, similarmente ao modelo CAPM Sharpe-Lintner, os erros de apreçamento foram mais destoantes da distribuição normal

em períodos afetados por crises, tais como Agosto de 1998 (moratória russa) e Janeiro e Março de 1999 (desvalorização do real).

Analisando os gráficos das estatísticas $CUSUM_t$ e $CUSUMSQ_t$ para os erros de apreçamento do CAPM dinâmico estimado por RLS, nas figuras 7.19 e 7.20, vê-se que há evidência de instabilidade nos parâmetros, uma vez que a estatística $CUSUMSQ_t$ assume valores fora do intervalo de confiança durante o período de 1999 a 2005.

Figura 7.19 – Estatística $CUSUM_t$ para os erros de apreçamento do CAPM Dinâmico ajustado por RLS (linha cheia) com intervalos de confiança (linha tracejada) para o portfólio Finanças e Seguros.

Figura 7.20 – Estatística **CUSUMSQ_t** para os erros de apreçamento do CAPM Dinâmico ajustado por RLS (linha cheia) com intervalos de confiança (linha tracejada) para o portfólio Finanças e Seguros.

Utilizando o método *rolling* de estimação iremos utilizar uma janela móvel de tamanho 24 meses, em incrementos de um mês, formando 172 estimativas para os parâmetros. Com esse método de estimação, o modelo proposto é dado por:

$$R_t^{FS} - R_t^f = \alpha_t^{FS} + \phi_t^{FS}(R_{t-1}^{FS} - R_{t-1}^f) + \beta_{0,t}^{FS}(R_t^m - R_t^f) + \beta_{1,t}^{FS}(R_{t-1}^m - R_{t-1}^f), \quad (7.9)$$

em que os parâmetros α_t^{FS} , ϕ_t^{FS} , $\beta_{0,t}^{FS}$ e $\beta_{1,t}^{FS}$ podem variar ao longo do tempo, devido às sucessivas estimações do método *rolling*. A Figura 7.21 mostra as estimativas *rolling* para os quatro parâmetros do CAPM dinâmico, com seus respectivos intervalos de confiança com coeficiente de confiança de 95%.

Figura 7.21– Estimativas *rolling* para o intercepto (acima, lado esquerdo), β_0 (acima, lado direito), β_1 (abaixo, lado esquerdo) e ϕ (abaixo, lado direito).

A Figura 7.21 mostra o seguinte fato: a despeito de o método OLS tradicional indicar que os parâmetros ϕ^{FS} e β_1^{FS} são significativos (este último ao nível de 10%), o método *rolling* indica que os parâmetros ϕ_t^{FS} e $\beta_{1,t}^{FS}$ são não significativos para uma parte substancial das janelas de estimação, mesmo ao nível de 10%. Isso sugere que a dependência dos excessos de retornos do setor finanças e seguros do seu excesso de retorno e do excesso de retorno do Ibovespa do período anterior parece não ser válido para todo o período em estudo, fato que não poderia ser concluído através da análise somente das estimativas obtidas por OLS tradicional.

Avaliação dos Métodos de Estimação

Utilizando as observações dos excessos de retorno de agosto de 1996 a dezembro de 2010, iremos obter as estimativas do modelo CAPM Dinâmico para os excessos de retorno do portfólio nesse período no intuito de comparar a qualidade de ajuste do modelo para cada um dos métodos de estimação. A Tabela 6 mostra os valores obtidos para as estatísticas MSE e MAE para os métodos tradicional e *rolling*.

Tabela 6: MSE e MAE do Modelo CAPM Dinâmico para o setor Finanças e Seguros.

Método	Erro Quadrático Médio	Erro Absoluto Médio
OLS	0,0505	0,1645
OLS <i>Rolling</i>	0,0028	0,0392

De acordo com a Tabela 6, método *rolling* proporcionou uma redução substancial no Erro Quadrático Médio e no Erro Absoluto Médio. Calculando a razão dessas medidas entre os dois métodos, obtemos:

$$Razão (MSE) = \frac{0,0028}{0,0505} = 0,0569,$$

$$Razão (MAE) = \frac{0,0392}{0,1645} = 0,2387.$$

Assim, o método *rolling* proporcionou uma redução de 94,30% no Erro Quadrático Médio e de 76,13% no Erro Absoluto Médio em relação ao método OLS tradicional. Comparando a magnitude dessa redução com a obtida no modelo CAPM Sharpe-Lintner, vemos que o método *rolling* mostrou-se ainda mais efetivo em melhorar a qualidade do ajuste no modelo CAPM Dinâmico, um vez que os percentuais de redução no MSE e MAE são consideravelmente maiores do que os obtidos do modelo CAPM Sharpe-Lintner para esse setor.

7.1.3. Avaliação para os 13 Setores Restantes

- **Modelo CAPM Sharpe-Lintner**

A Tabela 7.7 resume os resultados obtidos para os 13 portfólios setoriais restantes, assim como para os outros dois setores discutidos na seção anterior.

Percebe-se que, em todos os portfólios setoriais analisados, o método *rolling* proporcionou uma redução tanto no Erro Quadrático Médio quanto no Erro Absoluto Médio.

O setor cujo MSE apresentou a maior redução foi o setor têxtil, com uma redução de 19,53%. A maior redução no MAE foi no setor de papel e celulose, no valor de 9,77%. Dos 15 portfólios setoriais analisados, apenas em dois os testes de estabilidade de parâmetros não indicaram instabilidade, quais sejam, o setor de telecomunicações e o setor têxtil. Para esses dois setores, os percentuais de redução no MSE e MAE situaram-se entre, respectivamente, 14,05% e 19,53% e entre 7,32% e 8,82%. Para os setores cujos parâmetros estimados foram considerados instáveis pelos testes CUSUM e CUSUMSQ, a redução do MAE e MSE situou-se entre, respectivamente, 6,86% e 16,01% e entre 2,23% e 9,77%. Uma vez que, para os setores sem instabilidade verificada, o método *rolling* proporcionou uma redução no MSE numa faixa acima dos outros setores, pode-se concluir que não há evidência de que a instabilidade dos parâmetros ao longo do tempo melhora o desempenho do método *rolling* no modelo CAPM Sharpe-Lintner para o conjunto de portfólios estudados.

Tabela 7.7: Resumo das Estatísticas de Avaliação para o Modelo CAPM Sharpe-Lintner.

Setor	Instabilidade*	Erro Quadrático Médio			Erro Quadrático Absoluto		
		OLS	OLS <i>Rolling</i>	% Redução	OLS	OLS <i>Rolling</i>	% Redução
Alimentos e Bebidas	Sim	0,0062	0,0056	9,15%	0,0590	0,0577	2,23%
Comércio	Sim	0,0239	0,0223	6,86%	0,1054	0,0996	5,45%
Eletroeletrônicos	Sim	0,0228	0,0212	6,91%	0,1000	0,0946	5,32%
Finanças e Seguros	Sim	0,0039	0,0034	13,14%	0,0454	0,0421	7,40%
Máquinas Industriais	Sim	0,0163	0,0143	12,31%	0,0956	0,0927	3,02%
Mineração	Sim	0,0111	0,0098	12,36%	0,0700	0,0666	3,02%
Minerais não Metálicos	Sim	0,0120	0,0104	13,26%	0,0847	0,0784	7,35%
Outros	Sim	0,0053	0,0047	12,05%	0,0524	0,0506	3,35%
Papel e Celulose	Sim	0,0116	0,0099	14,87%	0,0772	0,0697	9,77%
Petróleo e Gás	Sim	0,0081	0,0074	7,97%	0,0614	0,0580	5,50%
Química	Sim	0,0107	0,0091	14,61%	0,0816	0,0767	6,06%
Siderurgia e Metalurgia	Sim	0,0040	0,0034	16,01%	0,0475	0,0436	8,24%
Telecomunicações	Não	0,0051	0,0044	14,05%	0,0541	0,0501	7,32%
Têxtil	Não	0,0070	0,0057	19,53%	0,0651	0,0593	8,82%
Veículos	Sim	0,0102	0,0088	13,57%	0,0718	0,0686	4,41%

* - Instabilidade verificada através das estatísticas CUSUM e CUSUMSQ.

- **Modelo CAPM Dinâmico**

Dos 15 portfólios setoriais estudados, o CAPM Dinâmico apresentou estimativas significativas aos dados de 6 portfólios. A Tabela 8 resume os resultados obtidos para esses portfólios.

Constata-se que, nos portfólios setoriais em que o CAPM Dinâmico retornou estimativas significativamente diferentes de zero, o método *rolling* proporcionou uma redução expressiva no Erro Quadrático Médio e no Erro Absoluto Médio. Houve uma redução no Erro Quadrático Médio entre 88,21% e 94,30% e uma redução no Erro Absoluto Médio entre 64,51% e 76,13%. O setor cujo MSE apresentou a maior redução foi o setor de finanças e seguros, com uma redução de 94,30%. A maior redução no MAE também foi no setor de finanças e seguros, com uma redução da ordem de 76,13%. Dos 6 portfólios setoriais, em dois deles, quais sejam, o setor têxtil e o setor de veículos os testes de instabilidade de parâmetros não indicaram instabilidade. Para aqueles portfólios cujos parâmetros estimados do CAPM Dinâmico foram consideráveis não instáveis, a redução no situou-se entre 88,21% e 89,99% e no MAE entre 64,51% e 66,77%. Uma vez que para os portfólios cujos parâmetros estimados foram considerados instáveis, as faixas de redução no MSE e MAE foram de, respectivamente, 91,24% a 94,30% e 74,97% a 76,13%, há um indício de que o desempenho do método *rolling* na redução dessas medidas é melhorado na presença de instabilidade de parâmetros.

Tabela 7.8: Resumo das Estatísticas de Avaliação para o Modelo CAPM Dinâmico.

Setor	Instabilidade*	Erro Quadrático Médio			Erro Quadrático Absoluto		
		OLS	OLS <i>Rolling</i>	% Redução	OLS	OLS <i>Rolling</i>	% Redução
Finanças e Seguros	Sim	0,0505	0,0028	94,30%	0,1645	0,0392	76,13%
Outros	Sim	0,0466	0,0040	91,24%	0,1550	0,0476	69,31%
Siderurgia e Metalurgia	Sim	0,0493	0,0028	94,27%	0,1618	0,0405	74,97%
Têxtil	Não	0,0488	0,0048	89,99%	0,1671	0,0555	66,77%
Veículos	Não	0,0621	0,0073	88,21%	0,1778	0,0631	64,51%

* - Instabilidade verificada através das estatísticas CUSUM e CUSUMSQ.

7.1.4. Modelo CAPM – Fator Estocástico de Desconto

De forma análoga aos modelos de fatores em seus formatos de excesso de retornos, estimaremos a versão em fator estocástico de descontos do CAPM utilizando o método OLS tradicional e o método OLS *rolling*. Conforme foi exposto na seção 6.1, um dos problemas que surge na estimação do CAPM nesse formato é a obtenção do fator estocástico de desconto m_t , uma vez que este não é diretamente observável. No intuito de realizar a estimação do CAPM neste formato, utilizaremos a metodologia proposta por Araujo e Issler (2004), que parte de algumas hipóteses simplificadoras, presentes nas Proposições 1 e 2, na seção 6.1. Adicionalmente, uma vez que o fator estocástico de desconto captura todas as fontes de risco existentes na economia, para o subconjunto de dados financeiros, além dos retornos dos 15 portfólios setoriais considerados (cujos gráficos de retornos líquidos encontram-se no Apêndice 1), foram considerados na estimação do fator estocástico de desconto os retornos brutos do ouro, dólar oficial, Selic e os índices agregados FGV-100 e Dow Jones da bolsa de Nova Iorque com valor em reais, cujos gráficos de retornos líquidos encontram-se no Apêndice 4. Os retornos brutos desses ativos foram, então, utilizados para obter o fator estocástico de desconto, calculado através da expressão em A Figura 7.22 mostra o fator estocástico de desconto estimado segundo essa metodologia, para dados de retornos mensais de setembro de 1994 a dezembro de 2010. Como *proxy* para o portfólio de mercado foi utilizada a cotação do Ibovespa, em frequência mensal.

Figura 7.22 – Fator Estocástico de Desconto – frequência mensal.

No método OLS tradicional, iremos estimar o seguinte modelo:

$$m_t = a + b(R_t^m - R_t^f), \quad (7.10)$$

em que $(R_t^m - R_t^f)$ é o excesso de retorno do portfólio de mercado em relação ao retorno do ativo livre de risco. Utilizando a função `OLS` do `S+FinMetrics`, obtemos a seguinte saída:

```
Call: OLS(formula = m ~ erIBOVESPA, data = Mmt)

Residuals:      Min       1Q   Median       3Q      Max
   -0.1674  -0.0332  -0.0014   0.0315   0.2371

Coefficients:
            Value Std. Error  t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.9959    0.0041  242.5895  0.0000
erIBOVESPA  -0.2512    0.0253  -9.9329  0.0000

Regression Diagnostics:
      R-Squared 0.3371
Adjusted R-Squared 0.3337
Durbin-Watson Stat 1.8359

Residual Diagnostics:  Stat P-Value
      Jarque-Bera 49.3845  0.0000
```

Ljung-Box 20.8460 0.5303
Residual standard error: 0.05715 on 194 degrees of freedom
Time period: from Sep 1994 to Dec 2010
F-statistic: 98.66 on 1 and 194 degrees of freedom, the p-value is 0

Quadro 7.5: Saída do programa S-Plus para o modelo CAPM no formato de fator estocástico de desconto.

O valor obtido do R^2 ajustado, 0,33, indica que o excesso de retorno do portfólio de mercado explica 33% da variabilidade no fator estocástico de desconto. Entretanto, o baixo valor obtido dessa estatística indica que o excesso de retorno do portfólio de mercado parece não ser um bom preditor do fator estocástico de desconto. Tanto as estatísticas de Durbin-Watson quanto o teste de Ljung-Box indicam que os erros de apreçamento não são serialmente correlacionados, e são confirmadas pelas Figuras 7.24 e 7.25, que mostram, respectivamente, a função de autocorrelação e o gráfico QQ-Plot para os erros de apreçamento. A estatística Jarque-Bera, entretanto, indica não normalidade dos mesmos. A estatística F indica que o modelo ajustado é adequado. A Figura 7.23 mostra a série do fator estocástico de desconto juntamente com seus valores estimados. O modelo CAPM no formato de fator estocástico de desconto é dado por:

$$\hat{m}_t = 0,9959 - 0,2512(R_t^m - R_t^f). \quad (7.11)$$

Figura 7.23 – Fator Estocástico de Desconto (linha cheia azul) e valores estimados por OLS (linha tracejada vermelha).

No intuito de verificar se há uma possível instabilidade no comportamento dos parâmetros a e b ao longo do tempo, o modelo foi estimado utilizando a técnica de Mínimos Quadrados Recursivos (RLS) e os testes CUSUM e CUSUMSQ foram aplicados. Pela análise gráfica dessas duas estatísticas, presente na Figura 7.26, parece não haver indícios de instabilidade nos parâmetros ao longo do período estudado.

Utilizando a metodologia proposta de utilização do método *rolling* de estimação, através da utilização de uma janela móvel de tamanho fixo de 24 meses, em incrementos de um mês, estimaremos essa versão do modelo CAPM. Os gráficos com os coeficientes estimados encontram-se na Figura 7.27.

Figura 7.24 – Função de Autocorrelação (ACF) para os resíduos do modelo CAPM no formato de fator estocástico de desconto.

Figura 7.25 – Função QQ-Plot para os resíduos do modelo CAPM no formato de fator estocástico de desconto.

Figura 7.26 – Estatísticas $CUSUM_t$ e $CUSUMSQ_t$ para os resíduos do CAPM no formato de fator estocástico ajustado por RLS (linha cheia) com intervalos de confiança (linha tracejada).

Avaliação dos Métodos de Estimação

Aplicando a técnica de *backtesting* e calculando o Erro Quadrático Médio e Absoluto dos erros de apreçamento obtidos, no intuito de comparar as duas formas de estimação, foram obtidos os valores presentes na Tabela 9.

Conforme podemos ver na Tabela 9, o método *rolling* proporcionou tanto uma redução no Erro Quadrático Médio quanto no Erro Absoluto Médio.

Tabela 9: MSE e MAE para o Modelo CAPM Fator Estocástico de Desconto.

Método	Erro Quadrático Médio	Erro Absoluto Médio
OLS	0,0064	0,0606
OLS <i>Rolling</i>	0,0045	0,0538

Calculando a razão dessas medidas entre os dois métodos, obtemos:

$$Razão (MSE) = \frac{0,0045}{0,0064} = 0,7108,$$

$$Razão (MAE) = \frac{0,0538}{0,0606} = 0,8879.$$

Assim, pode-se constatar que o método *rolling* proporcionou uma redução de quase 29% no Erro Quadrático Médio e de 11,21% no Erro Absoluto Médio em relação ao método OLS tradicional. Desta forma, o método *rolling* mostra-se efetivo para a estimação do modelo CAPM também no formato de fator estocástico de desconto.

Figura 7.27 – Estimativas *Rolling* para os parâmetros ***a*** (acima) e ***b*** (abaixo).

7.2. Estimação e Avaliação dos Modelos de Consumo

Para os modelos de apreçamento baseados no consumo, iremos estimar e avaliar dois modelos: o de função utilidade potência (conhecida por CRRA, de *Constant Relative Risk Aversion*) e o de função utilidade Hábitos Externos. Conforme foi mencionado no capítulo introdutório, os modelos de apreçamento baseados no consumo ainda não possuem uma grande quantidade de estudos empíricos, ao contrário dos modelos de fatores. Para estudos utilizando dados brasileiros, essa quantidade é ainda menor. Dois deles são Araujo e Issler (2004) e Issler e Piqueira (2000), que estudam os dois modelos de consumo presentes neste trabalho e um modelo mais geral, conhecido

como modelo de consumo Kreps-Porteus, que não está no escopo deste trabalho. Para cada um dos dois modelos de consumo, iremos estimar utilizando quatro métodos, quais sejam, OLS, OLS *rolling*, GMM e GMM *rolling*. Para esses dois últimos métodos, utilizaremos três conjuntos de instrumentos propostos por Araujo e Issler (2004) para os formatos log-linearizados desses modelos. O objetivo desta seção, similarmente à seção 7.1, é o de verificar qual desses quatro métodos proporciona os menores erros de previsão utilizando a técnica de *backtesting* e avaliando seus MSE e MAE.

No intuito de estimar os modelos de consumo com função utilidade CRRA e Hábitos Externos por GMM, iremos utilizar três especificações, cada uma determinada por um conjunto de instrumentos. As Tabelas 7.10 e 7.11 listam essas especificações e seus respectivos conjuntos de instrumentos para cada um dos modelos.

Tabela 7.10: Instrumentos Utilizados nas Estimações por GMM do Modelo com Função Utilidade CRRA.

Especificação	Instrumentos
I_1	$constante, \ln m_{t-1}, \Delta \ln c_{t-1}, \Delta \ln c_{t-2}, \ln R_{t-1}^m, \ln R_{t-2}^m$
I_2	$constante, \Delta \ln c_{t-1}, \ln R_{t-1}^m, \ln R_{t-2}^m$
I_3	$constante, \ln m_{t-2}, \Delta \ln c_{t-1}, \Delta \ln c_{t-2}, \ln R_{t-2}^m$

Tabela 7.11: Instrumentos Utilizados nas Estimações por GMM do Modelo com Função Utilidade Hábitos Externos.

Especificação	Instrumentos
I_1	$constante, \ln m_{t-2}, \Delta \ln c_{t-2}, \Delta \ln c_{t-3}, \ln R_{t-2}^m$
I_2	$constante, \ln m_{t-2}, \Delta \ln c_{t-1}, \Delta \ln c_{t-2}, \Delta \ln c_{t-3}, \ln R_{t-2}^m$
I_3	$constante, \ln m_{t-2}, \Delta \ln c_{t-2}, \ln R_{t-2}^m, \ln R_{t-3}^m$

No que diz respeito à estimação do modelo de Hábitos Externos, um resultado similar ao encontrado em Araujo e Issler (2004) foi encontrado neste trabalho, qual seja, a rejeição desse modelo para os dados do período em questão (setembro de 1994 a dezembro de 2010) em favor da especificação CRRA. Para os quatro métodos utilizados, as estimativas dos parâmetros individuais não retornaram estimativas

significativamente diferentes de zero, de forma que nos restou apenas o modelo CRRA para comparar os diferentes métodos de estimação empregados. Os resultados das estimações do modelo de Hábitos Externos encontram-se no Apêndice 4. Todas as estimações foram realizadas utilizando o módulo `S+FinMetrics` do software `S-Plus`.

- **Mínimos Quadrados Ordinários**

O Quadro 7.6 mostra a saída do S-Plus para a estimativa via OLS para o modelo de consumo CRRA. Obtém-se um coeficiente de aversão ao risco (γ) de 0,89 e uma taxa de desconto intertemporal (θ) de 0,96.

A despeito de a estatística F indicar a adequabilidade do modelo como um todo, observa-se que a variável explanatória $\Delta \ln c_t$ parece não ser um bom preditor para o logaritmo do fator estocástico de desconto, dado o baixo valor do R^2 ajustado da regressão.

```
Call:
OLS(formula = lnMxt ~ dlnct, data = cl4.ts)

Residuals:      Min       1Q   Median       3Q      Max
      -0.2941 -0.0806 -0.0064   0.0724   0.3763

Coefficients:      Value Std. Error t value Pr(>|t|)
      (Intercept) -0.0406   0.0196   -2.0658  0.0431
              dlnct -0.8900   0.3965   -2.2445  0.0284

Regression Diagnostics:      R-Squared 0.0763
                             Adjusted R-Squared 0.0611
                             Durbin-Watson Stat 1.6487

Residual Diagnostics:      Stat P-Value
      Jarque-Bera  2.5261  0.2828
      Ljung-Box   20.7676  0.2369

Residual standard error: 0.1364 on 61 degrees of freedom

Time period: from 1995:II to 2010:IV

F-statistic: 5.038 on 1 and 61 degrees of freedom, the p-value is 0.02844
```

Quadro 7.6: Saída do programa S-Plus para o modelo de consumo CRRA estimado via OLS.

A Figura 7.28 mostra a série trimestral do fator estocástico de desconto estimado de acordo com a metodologia de Aaujo e Issler (2004) juntamente com os valores previstos do modelo pelo método OLS.

Utilizando uma janela móvel com tamanho de 12 trimestres (2,5 anos), estimamos o modelo de consumo CRRA 52 vezes ao longo do período em estudo. Através da Figura 7.29, que mostra os coeficientes estimados $\ln\theta$ e $-\gamma$, vemos que as estimativas para esses parâmetros não são significativas ao longo de todas as janelas utilizadas. Assim, apenas o método OLS tradicional foi utilizado para aplicar a técnica de *backtesting*.

Figura 7.28 – Fator Estocástico de Desconto (linha cheia azul) e valores estimados por OLS (linha tracejada vermelha) para o modelo de consumo CRRA.

- **Método Generalizado dos Momentos**

O Quadro 7.7 mostra a saída do S-Plus para as estimativas dos parâmetros do modelo de consumo log-linearizado CRRA, utilizando o conjunto de instrumentos da especificação I_3 , conforme descrito na Tabela 10. Os resultados das estimativas para os outros dois conjuntos encontram-se resumidos no Apêndice 4. Pela análise do Quadro 7.7, constata-se que ambos os parâmetros são significativos (sendo que γ ao nível de 10%). A estatística J indica que o modelo ajustado, assim como os instrumentos empregados, são

adequados. As estimativas do método GMM para o coeficiente de aversão ao risco (γ) é de 1,12, e de 0,96 para a taxa de desconto intertemporal (θ).

Figura 7.29 – Estimativas OLS *Rolling* para os parâmetros $\ln\theta$ (acima) e $-\gamma$ (abaixo).

```
Call:
GMM(start = start.vals14x, moments = momentos14x, method = "iterative", max.steps =
  100, y = consumo14x[, 1], X = consumo14x[, c(3, 5, 6, 9, 11)], Z =
  consumo14x[, c(4, 11)])

Coefficients:      Value Std.Error t value Pr(>|t|)
      dlncr -1.1278  0.6279  -1.7962  0.0777
      const -0.0436  0.0214  -2.0386  0.0461

Test of Overidentification: J-stat Df P.value
                        2.5258 3  0.4707

Optimization Info:
Number of Iterative Steps: 12
```

Quadro 7.7: Saída do programa S-Plus para o modelo de consumo CRRA estimado por GMM.

Assim, o método GMM (utilizando a especificação de instrumentos I_3) estima um coeficiente de aversão ao risco mais elevado que o do método OLS. O modelo estimado por GMM, então, é dado por:

$$\widehat{\ln m_{t+1}^*} = -0,04 - 1,13\Delta \ln c_{t+1}. \quad (7.12)$$

As estimativas obtidas para ambos os parâmetros estão em linha com os resultados obtidos por Araujo e Issler (2004) e Issler e Piqueira (2000). Similarmente ao método OLS, utilizamos uma janela móvel de tamanho fixo de 12 trimestres para estimar o modelo de consumo CRRA via GMM. Vale ressaltar que se escolheu uma janela móvel de tamanho 2,5 anos, e não de 2 anos, como no caso dos modelos de fatores, porque esse foi o menor tamanho de janela em que o algoritmo GMM obteve convergência. Os gráficos com as 52 estimativas dos coeficientes do modelo log-linearizado ($\ln \theta$ e $-\gamma$) com seus respectivos intervalos de confiança com coeficiente de confiança 10% encontram-se nas Figuras 7.30 e 7.31.

Figura 7.30 – Estimativas GMM *Rolling* para o coeficiente $\ln \theta$ do modelo de consumo CRRA.

A Figura 7.31 mostra os valores das estatísticas CUSUM e CUSUMSQ para os parâmetros do modelo de consumo CRRA estimados por RLS. Nota-se que não ficou evidenciada a instabilidade de parâmetros, indicando que o grau de aversão ao risco e a taxa de substituição intertemporal não mudou significativamente ao longo do período em estudo. A Tabela 7.12 resume os resultados obtidos para os quatro métodos de

estimação empregados. Podemos notar que o método *rolling* reduz o erro quadrático médio (MSE) por *backtesting* para as especificações de instrumentos I_2 e I_3 do método GMM em relação à versão tradicional. O percentual de redução é de, respectivamente, 38,64% e 8,99%. Para o erro absoluto médio, a redução é observada somente para a especificação I_2 , no valor de 22,74%. As células marcadas em cinza na Tabela 7.12 indicam os métodos de estimação que apresentaram os menores MSE e MAE. Pode-se constatar que não há um único método que trouxe os menores MSE e MAE, uma vez que o MSE obtido foi o menor para o método GMM *rolling* com a especificação I_1 de instrumentos, ao passo que o menor valor para o MAE foi obtido através do método OLS tradicional.

Figura 7.31 – Estimativas GMM *Rolling* para o coeficiente $-\gamma$ do modelo de consumo CRRA.

Figura 7.32 – Estatísticas $CUSUM_t$ e $CUSUMSQ_t$ para os resíduos do modelo de consumo CRRA ajustado por RLS (linha cheia) com intervalos de confiança (linha tracejada).

Tabela 7.12: MSE e MAE para os Métodos de Estimação do Modelo de Consumo com Função Utilidade CRRA.

	MSE	% Red.	MAE	% Red.
OLS	0,0191	-	0,1058	-
OLS Rolling	*		*	
GMM I_1	*		*	
GMM I_1 Rolling	0,0188	38,64%	0,1135	22,74%
GMM I_2	0,0308		0,1442	
GMM I_2 Rolling	0,0189		0,1114	
GMM I_3	0,0289	8,99%	0,1371	-
GMM I_3 Rolling	0,0263		0,1397	

* - Parâmetros estimados não significativos ao nível de 10%.

Assim, ao contrário dos modelos de fatores tratados na seção anterior, a vantagem do emprego do método *rolling* não fica tão evidente para esse tipo de modelo, haja vista que o método que retornou o menor MAE é o método tradicional e, ainda, para a especificação I_3 do método GMM, não se observou uma redução no MAE em relação à versão tradicional.

Capítulo 8. Considerações Finais

A abordagem de estimação de modelos de apreçamento de ativos, tanto no seu formato de fatores quanto no formato de fator estocástico de desconto, utilizando janelas móveis de tamanho fixo, mostrou-se útil na análise dos coeficientes dos modelos de apreçamento, uma vez que não somente conseguem evidenciar instabilidade de parâmetros que os métodos estáticos não capturam como também proporcionaram um menor conjunto de erros de apreçamento, de acordo com as medidas MSE e MAE. As evidências de instabilidade, mesmo que passageiras e num intervalo de tempo limitado, podem fornecer um subsídio de informação considerável aos investidores, uma vez que, de posse dessas informações, pode-se associar essas perturbações momentâneas a eventos econômicos e, assim, auxiliar no processo de tomada de decisão no futuro. Para o caso dos modelos no formato de fator estocástico de desconto, a identificação de instabilidade nos parâmetros que determinam o fator estocástico m_t podem fornecer subsídios ao entendimento do grau de aversão ao risco dos investidores.

Para os modelos de consumo, a baixa significância das estimativas obtidas neste trabalho reflete uma questão frequente quando da estimação de modelos econômicos que envolvem dados de consumo, qual seja, o problema da própria série de consumo. As séries de consumo, que são obtidas através das contas nacionais, estão sujeitas a erros de mensuração que os dados financeiros (como, por exemplo, os dados de preço de ativos). Ainda, a chamada “excessiva estabilidade” da série de consumo, ou seja, a característica em que, mesmo durante períodos de recessão econômica, a série de consumo não sofre grandes variações, faz com que essa série não seja uma boa variável explanatória.

Considerou-se, neste trabalho, a taxa mensal do CDI como ativo livre de risco. Estudos futuros poderiam utilizar como *proxy* para o ativo livre de risco, por exemplo, as taxas dos títulos do Tesouro Nacional ou a taxa Selic. No que concerne ao método *rolling*, neste trabalho foi utilizada uma janela de tamanho arbitrário (8 trimestres para modelos de fatores e 12 trimestres para modelos de consumo). Um possível estudo futuro, portanto, seria o de determinar o tamanho ótimo da janela a ser utilizada, de forma a minimizar os erros de previsão ou alguma outra medida. Adicionalmente, um estudo

pautado na estimação dos modelos estudados através do emprego de métodos que minimizem outras métricas que não a soma dos quadrados dos erros de apreçamento também seria válido.

Neste trabalho, o fator estocástico de desconto é estimado segundo a metodologia de Araujo e Issler (2001) utilizando dados de retornos de forma agregada. Esses mesmos autores desenvolveram um método de estimação do fator estocástico de desconto baseado nos dados de retorno considerados de forma desagregada. Assim, um estudo futuro poderia ser feito nos modelos de consumo com o fator estocástico de desconto estimado dessa forma.

Por fim, o objetivo foi comparar a qualidade do ajuste de diferentes formas de estimação de alguns modelos de apreçamento, e verificar se o emprego do método *rolling* fornece algum ganho na qualidade do ajuste. Um passo natural nesse estudo seria o de verificar se o método *rolling* proporciona um ganho na qualidade de *previsão*, considerando-se observações fora da amostra. Para esse estudo, uma questão surge, qual seja, como utilizar as diversas estimativas *rolling* para realizar previsões fora da amostra e comparar com as previsões do método tradicional. Desta forma, um estudo futuro nessa direção seria o de desenvolver métodos de previsão que utilizem as estimativas *rolling* obtidas.

Referências

- [1] Abel, A. (1990). Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses. *American Economic Review* 80(1990), *Papers and Proceedings*, 38-42.
- [2] Araujo, F. e Issler, J. V. (2004). Identificação do Fator Estocástico de Descontos e Algumas Implicações sobre Testes de Modelos de Consumo. *Trabalhos para Discussão Nº 86*. Banco Central do Brasil, Brasília.
- [3] Bonomo, M. (2005). *Finanças – Notas de Aula*. Fundação Getúlio Vargas – Rio de Janeiro. Disponível em:
<http://epge.fgv.br/we/MD/Financas/2007?action=AttachFile&do=get&target=notasbonomo.pdf>
- [4] Campbell, J. Y., Lo, A. W. e MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [5] Cochrane, J.H. (2001). *Asset Pricing*. 1ª Edição, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [6] Croux, C., Forni, M. e Reichlin, L. (2001). A Measure of Comovement for Economic Variables: Theory and Empirics. *The Review of Economics and Statistics*, vol. 83, issue 2, pages 232-241.
- [7] Fama, E. F. e MacBeth, J. D. (1973). Risk Return and Equilibrium: Empirical Tests. *Journal of Political Economy* 71, pages 607-636.
- [8] Ferreira, T. P. (2009). Modelo GARCH com Coeficientes Variando no Tempo. *Dissertação de Mestrado*, São Paulo, IME-USP.
- [9] Forni, M., Hallin, M. e Reichlin, L. (2000). The Generalized Dynamic Factor Model: Identification and Estimation. *The Review of Economics and Statistics*, vol. 82, issue 4, pages 540-554.
- [10] Greene, W. H. (2003). *Econometric Analysis*. 5ª Edição. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- [11] Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [12] Hansen, L.P. (1982). Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, 50, 1029-1054.
- [13] Hayashi, F. (2000). *Econometrics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

- [14] Korkas, K. K. (2010). Asset Pricing with Dynamic CAPM: An Application to 49 US Industry Portfolios. *Doctoral Paper*. London School of Economics, London.
- [15] Lintner, J. (1965). The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Econometrics and Statistics* 47, pagens 13-37.
- [16] Merton, R. C. (1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, vol. 41, pages 867-887.
- [17] Morettin, P. A. (2011). *Econometria Financeira: Um Curso em Séries Temporais Financeiras*. Blucher, São Paulo.
- [18] Pindyck, R. S. e Rubinfeld, D. L. (2002). *Microeconomia*. 5ª Edição. Prentice Hall, São Paulo.
- [19] Piqueira, N. S. (1999). Aversão ao Risco e Substitutibilidade Intertemporal: Estimativas com Dados Agregados Brasileiros para Três Classes de Função Utilidade. *Dissertação de Mestrado*, Rio de Janeiro, FGV-RJ.
- [20] Ross, S. A. (1976). The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory* 13, pages 341-360.
- [21] Sharpe, W. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *Journal of Finance* 19, pages 425-442.
- [22] Varian, H. R. (1987). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. Norton & Company, New York, New York.
- [23] Vinha, L. G. A. (2006). Modelos Fatoriais para Retorno de Ativos. *Dissertação de Mestrado*, São Paulo, IME-USP.
- [24] Zivot, E. e Wang, J. (2006). *Modeling Financial Time Series with S-Plus*. Springer, New York.

Apêndice 1. Retornos Líquidos dos Portfólios Setoriais

Figura A.1 – Retornos dos Portfólios Setoriais

Figura A.2 – Retornos dos Portfólios Setoriais (cont.)

Figura A.3 – Retornos dos Portfólios Setoriais (cont.)

Apêndice 2. Composição dos Portfólios Setoriais

As ações que compõem cada portfólio estão listadas de acordo com seu código de cinco dígitos na Bovespa.

Alimentos e Bebidas

- AMBV3 – AMBEV ON
- AMBV4- AMBEV PN

Comércio

- LAME3 – Lojas Americanas ON
- LAME4 – Lojas Americanas PN

Construção

- SULT4 – Construtora Sulepá PN

Eletroeletrônicos

- BMTO4 – Brasmotor PN
- ITEC3 – Itaútec ON

Finanças e Seguros

- CRIV3 – Financeira Alfa ON
- CRIV4 – Financeira Alfa PN
- BRIV3 – Banco Alfa ON
- BRIV4 – Banco Alfa PN
- BAZA3 – Banco da Amazônia ON
- BBDC3 – Bradesco ON
- BBDC4 - Bradesco ON
- BBAS3 – Banco do Brasil ON
- ITAU3 – Itaú ON
- ITAU4 – Itaú PN

Máquinas Industriais

- BDL4 – Bardella PN

Mineração

- VALE3 – Vale ON
- VALE5 – Vale PNA

Minerais Não Metálicos

- ETER3 – Eternit ON

Outros

- ESTR4 – Estrela PN
- INEP4- INEPAR PN
- RPAD6 – Alfa Holding PNB
- ITSA4 – Itausa PN
- CRUZ3- Souza Cruz ON
- ITSA3- Itausa ON
- BRGE3- Alfa Consorcio ON
- PVLT3 – Souto Vidig ON

Papel e Celulose

- SUZB5- Suzano Papel e Celulose PNA
- KLBN4 – Klabin PN

Petróleo e Gás

- PETR3 – Petrobras ON
- PETR4- Petrobras PN

Química

- UNIP6 – Unipar PNB

Siderurgia e Metalurgia

- MGEL4 – Mangels Industrial PN
- FJTA4 – Forja Taurus PN
- GOAU4 – Gerdau Metalurgia PN
- GGBR4 – Gerdau PN
- MTSA4 – Metisa PN
- CSNA3 – Siderúrgica Nacional ON
- USIM4 – Usiminas PN

Telecomunicações

- OIBR3 – Oi ON
- OIBR4 – Oi PN
- VIVT3 – Telefônica Brasil ON
- VIVT4 - Telefônica Brasil PN

Têxtil

- ALPA3 - Alpargatas ON
- ALPA4 - Alpargatas PN
- CTNM3 - Coteminas ON
- CTNM4 - Coteminas PN
- TEKA4 – Teka PN

Veículos e Peças

- FRAS4 – Fras-Le PN
- POMO4 – Marcopolo PN
- PMET6 – Pro Metalurgia PNB

Apêndice 3. Resumo das Estimativas Obtidas

Especificação	CRRA			Hábitos Externos		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
Cte	-0,0584	-0,0383	-0,0436	-0,0805	-0,0972	-0,0974
Prob	0,0080	0,0876	0,0461	0,0858	0,0093	0,0156
$\Delta \ln c_t$	-0,4881	-1,3404	-1,1278	-0,4367	0,2903	0,9382
Prob	0,3698	0,0198	0,0777	0,7515	0,7612	0,4843
$\Delta \ln c_{t-1}$	-	-	-	0,6521	0,6515	0,7192
Prob	-	-	-	0,3662	0,2067	0,2569
TJ-stat	6,1784	2,064	2,5258	2,3896	2,1617	1,4876
Prob	0,1862	0,3563	0,4707	0,3028	0,5395	0,4753
$\hat{\beta}$	0,943273	0,962424	0,957337	0,922655	0,907375	0,907193
$\hat{\gamma}$	0,4881	1,3404	1,1278	0,4367	-0,2903	-0,9382
$\hat{\kappa}$	-	-	-	-1,15764	-0,50492	-0,37107

Apêndice 4. Retornos Líquidos de Variáveis Financeiras

Figura A.4 – Retornos de Variáveis Financeiras