**As coordenadas de
Fenchel-Nielsen**

Angélica Turaça

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. André Salles de Carvalho

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, Junho de 2015

As coordenadas de Fenchel-Nielsen

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 09/06/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. André Salles de Carvalho (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Fábio Armando Tal - IME-USP
- Prof. Dr. Philip Lewis Boyland - University of Florida at Gainesville

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela presença constante em minha vida, por ter me iluminado e dado saúde e força para chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais, Luiz Carlos e Márcia por serem meu porto seguro e meu exemplo; por não medirem esforços durante a vida para que eu pudesse me tornar uma pessoa melhor a cada dia.

Agradeço à minha irmã Karina por estar sempre ao meu lado e ser minha inspiração de persistência.

Agradeço àquele que desde o começo foi muito mais do que meu melhor amigo, que me encanta a cada dia, Fernando Dallapé Madeira, por toda compreensão, amizade, companheirismo e amor. Ao seu lado tudo se torna muito melhor.

Agradeço ao meu orientador, André, pelos valiosos ensinamentos que fizeram com que eu me encantasse ainda mais pela Geometria e por todo apoio durante o trabalho.

Agradeço aos professores do IME, pela amizade e por serem responsáveis pelo meu crescimento acadêmico, em particular, agradeço à Ana Catarina Hellmeister, Bárbara Valério, Iole Druck, Zara Abud, ao Sérgio Alves, Rosa Chaves, Roseli Fernandes e Jorge Sottomayor.

Agradeço aos amigos - Anderson Pompeu, Artur Gaban, Belmiro, Jéferson Alves, Renan Marcel, Renan Sanchez, Romenig, Sheldon e Thiago - pelos momentos de descontração, aprendizagem e conversas.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Agradeço ao Prof. Dr. Fábio Armando Tal e ao Prof. Dr. Philip Lewis Boyland por participarem da Comissão Julgadora.

Resumo

TURAÇA, A. **As coordenadas de Fenchel-Nielsen.** 2015. 74 f. Dissertação (Mestrado)
- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Nesta dissertação, definimos a geometria hiperbólica usando o disco de Poincaré ($\mathbb{D}^2$) e o semiplano superior ($\mathbb{H}^2$) com as respectivas propriedades. Além disso, apresentamos algumas funções e relações importantes da geometria hiperbólica; conceituamos as superfícies de Riemann, analisando suas propriedades e representações; estudamos o espaço de Teichmüller com a devida decomposição em calças. Esses temas são ferramentas necessárias para atingir o objetivo da dissertação: definir as coordenadas de Fenchel Nielsen como um sistema de coordenadas locais do espaço de Teichmüller T_g .

Palavras-chave: Geometria hiperbólica, Superfície de Riemann, Espaço de Teichmüller, Coordenadas de Fenchel-Nielsen.

Abstract

TURAÇA, A. **Fenchel-Nielsen Coordinate.** 2015. 74 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

In this dissertation, we defined the hyperbolic geometry using the Poincaré's disk ($\mathbb{D}^2$) and upper half-plane ($\mathbb{H}^2$) with its properties. Besides, we presented some functions and important relations of the hyperbolic geometry; we conceptualize the Riemann surfaces, analyzing its properties and representations; we studied the Teichmüller Space with proper decomposition pants. These themes are essential tools to reach the goal of the work: The definition of the Fenchel Nielsen coordinates as local coordinate system of the Teichmüller space T_g .

Keywords: Hyperbolic Geometry, Riemann Surface, Teichmüller Space, Fenchel-Nielsen Coordinate.

Sumário

Introdução	viii
1 Conceitos Básicos da Teoria de Funções Analíticas	1
1.1 Definições	1
1.2 Modelos Fuchsianos	3
2 Espaço Hiperbólico	9
2.1 A Geometria Não-Euclidiana	9
2.2 Disco de Poincaré e Semiplano Superior $\mathbb{H}^2$	10
2.2.1 Comprimento Hiperbólico	11
2.2.2 Isometrias	13
2.2.3 Retas Hiperbólicas	14
2.2.4 Área Hiperbólica	16
2.3 Outros Modelos	20
2.3.1 Hemisfério	20
2.3.2 Hiperbolóide	20
2.3.3 Klein	21
3 Funções Hiperbólicas e o Hexágono Reto	23
4 Superfícies de Riemann	33
4.1 Superfície de Riemann	33
4.2 Teorema de Uniformização	35
4.3 Representação da Superfície de Riemann como espaço Quociente	37
4.4 Métrica Hiperbólica na Superfície de Riemann	39
5 Espaço de Teichmüller	43
5.1 Espaços de Teichmüller e de Fricke	43
5.2 Existência e Unicidade de Calças	46
6 Coordenadas de Fenchel-Nielsen	51
6.1 Torção de Dehn	51
6.2 Decomposição em Calças	52
6.3 Funções do comprimento das Geodésicas	54
6.4 Parâmetros de Torção	55

6.5	Coordenadas de Fenchel-Nielsen	58
	Referências Bibliográficas	60

Lista de Figuras

1.1	Projeção estereográfica	1
1.2	Pontos fixos de uma TLF.	7
2.1	Retas Hiperbólicas no Disco de Poincaré.	12
2.2	Modelo de Retas no Semiespaço Superior.	14
2.3	Tipos de retas paralelas no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$	15
2.4	Pelo ponto P passam infinitas retas paralelas à reta l.	15
2.5	Região B onde as retas perpendiculares à L e L' possuem o mesmo comprimento.	15
2.6	Demonstração da função área $A(\theta)$ ser aditiva.	18
2.7	Área de um triângulo $\triangle ABC$, $1/3$ ideal.	19
2.8	Área de um triângulo $\triangle ABC$, sem vértices no infinito.	19
2.9	Projeção estereográfica do Disco $\mathbb{D}^2$ no pólo norte da Esfera unitária.	20
2.10	Modelo do Hiperbolóide.	21
2.11	Modelo de Klein - Projeção $\pi_k(p)$	22
3.1	Triângulo Hiperbólico	25
3.2	Quadrilátero	27
3.3	Pentágono hiperbólico	28
3.4	Única geodésica ortogonal a duas geodésicas dadas.	29
3.5	Hexágono com todos os ângulos retos.	30
3.6	Construção do hexágono com todos os ângulos retos.	32
4.1	Cartas Coordenadas	34
4.2	Alças anexadas à uma esfera.	35
4.3	Superfície de Recobrimento	36
4.4	$\{A_j, B_j\}_{j=1}^g$ é um sistema canônico de geradores de $\pi_1(R, p_0)$, tal que todo A_j e B_j são curvas suaves, simples com ponto base p_0 . Cortando R ao longo de todos os A_j e B_j , pbtemos R_0 um domínio simplesmente conexo. A componente conexa F de $\pi^{-1}(R_0)$ é o domínio fundamental para Γ	40
4.5	Curva γ_0 em $\mathbb{H}^2$	41
5.1	A figura da esquerda mostra uma calça com métrica hiperbólica. A do meio, métrica euclidiana. E na figura da direita vemos um componente de fronteira e dois cúspides, ou seja, a fronteira se afasta para o infinito.	47
5.2	Hexágono com todos seus ângulos internos retos.	47

5.3	Hexágono Hiperbólico fechado	48
5.4	Extensão de Nielsen	48
5.5	J_p é uma reflexão de P.	49
6.1	Torção de Dehn	52
6.2	Decomposição em Calças	53
6.3	Calça $P_{j,k}$ com sua reflexão.	55
6.4	Comprimento de arco	56
6.5	$\tilde{c}_{j,k}$ se move de maneira real analítica.	57
6.6	Elementos de Fronteira	60

Introdução

O espaço de Teichmüller foi introduzido por volta de 1930, por Oswald Teichmüller e estudado por vários matemáticos, como Lars Valerian Ahlfors, Lipman Bers e Harry Ernest Rauch. Tal espaço é denotado por T_g e parametriza estruturas complexas em uma certa superfície topológica S , sob a ação de homeomorfismos que são isotópicos a homeomorfismos identidade. Cada ponto em T_g pode ser considerado como uma classe de isomorfismo de marcações de uma superfície de Riemann, sendo uma marcação a classe de isotopia de homeomorfismos de S em S .

William P. Thurston foi o matemático que desenvolveu pesquisas relacionando a geometria hiperbólica com T_g . A partir disso, foi possível fazer um estudo minucioso afim de compreender as coordenadas de Fenchel - Nielsen - o tema desse trabalho - as quais definem um sistema de coordenadas locais do espaço de Teichmüller. Tais coordenadas foram introduzidas por Werner Fenchel (1905 - 1988) e Jakob Nielsen (1890 - 1959).

Em cada um dos seis capítulos desse trabalho é apresentada uma ferramenta para chegar ao objetivo.

No capítulo 1, foram apresentados alguns conceitos básicos sobre a teoria das funções analíticas, uma vez que estas são fundamentais para a compreensão dos cálculos e conceitos utilizados ao longo da dissertação.

No segundo capítulo, o tema foi o espaço hiperbólico, representado pelo disco de Poincaré e pelo semiplano superior, com suas respectivas propriedades e definições de reta, métrica, comprimento, área e isometria. Além disso, apresentou-se outros modelos para a representação desse espaço.

Uma das construções mais importantes para esse trabalho é o hexágono hiperbólico reto (ele é a peça base para decomposição da superfície de Riemann). Por isso, no capítulo 3, além de desenvolver conceitos sobre as funções hiperbólicas necessárias, foi construído tal hexágono.

Em seguida, no capítulo 4, apresentou-se a superfície de Riemann: a definição, sua representação como espaço quociente e a utilização da métrica hiperbólica em tal superfície.

O capítulo 5 foi dedicado ao espaço de Teichmüller. Foi definido o espaço de Fricke e suas coordenadas, bem como sua relação com o tema do capítulo. Além disso, usando o hexágono hiperbólico reto, pode-se definir e representar as calças, ou seja, as peças que decompõem a superfície de Riemann.

Por fim, no capítulo 6, apareceu a definição da última ferramenta necessária para determinar as coordenadas de Fenchel-Nielsen - a torção de Dehn. Com todos os conceitos definidos, foi possível comprovar o desejado: as coordenadas de Fenchel Nielsen determinam um sistema de coordenadas locais em T_g .

Vale ressaltar que as figuras foram tomadas de:

- [3] (Figuras: 3.1, 3.2, 3.3, 3.5)
- [8] (Figura 1.2)
- [9] (Figura 6.1)
- [11] (Figuras 3.6, 5.1)
- [12] (Figuras 4.2, 4.4, 5.2, 5.2, 5.4, 5.5, 6.2, 6.5, 6.6)
- [21] (Figuras 1.1, 2.1, 2.9, 2.11)

Capítulo 1

Conceitos Básicos da Teoria de Funções Analíticas

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos que são base para o texto. A seção 1.1 apresenta definições e conceitos de funções analíticas e a 1.2 será dedicada aos principais conceitos de Modelos Fuchsianos. A teoria vista neste capítulo será essencial para o bom acompanhamento do texto. Os temas estudados podem ser encontrados em [2], [8], [14], [16], [17], [20] e [22].

1.1 Definições

Definição 1. O *plano complexo* é um plano cartesiano utilizado para representar números complexos geometricamente. Nele, a parte real do número é representada pela abscissa e a parte imaginária pela ordenada. Desta forma, um número complexo z pode ser representado através de um ponto no plano.

Definição 2. *Projeção Estereográfica:* É um tipo de projeção em que a superfície da esfera é representada sobre um plano tangente à ela. A origem é o ponto diametralmente oposto ao ponto de tangência do plano tangente considerado.

As principais propriedades dessa projeção são: leva círculos da esfera em círculos no plano; preserva as formas de pequenas áreas. Veja Figura 1.1

Figura 1.1: Projeção estereográfica

Note que a origem não é levada em ponto nenhum do plano, podemos então dizer que todas as retas tangentes à origem se encontram em um ponto no infinito que corresponde à projeção da origem.

Definição 3. A *esfera de Riemann* amplia o plano dos números complexos com um ponto no ∞ . É o plano projetivo complexo, denotado por $\mathbb{CP}^1$ ou por $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Esta técnica consiste em transformar um espaço de Hausdorff não-compacto globalmente em um espaço globalmente compacto, através da inclusão de um único ponto. É conhecida como compactificação de ponto único.

Definição 4. Métrica Riemanniana: Uma métrica riemanniana associa a cada ponto p de uma superfície R um produto interno, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente desse ponto, denominado por $T_p R$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, definida positiva no espaço tangente) e que varia continuamente e diferencialmente com os pontos. Prova-se que se $\mathbb{R}^n$ é uma variedade C^k , com $k \geq 1$, Hausdorff e separável, então existe uma métrica Riemanniana C^{k-1} em R . Mais sobre o assunto pode ser encontrado em [16].

Definição 5. Isometria é uma transformação geométrica que quando aplicada em uma figura, mantém as distâncias entre os pontos, ou seja, o comprimento dos segmentos não se altera, apenas o sentido e a direção podem ser diferentes. Os ângulos também se mantêm. Matematicamente, sendo X e Y dois espaços métricos, definimos isometria como sendo a aplicação $f: X \rightarrow Y$ tal que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in X$.

Definição 6. Uma aplicação $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é conforme se ϕ preserva ângulo entre curvas continuamente diferenciáveis.

Definição 7. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto. Se $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função diferenciável complexa em cada ponto de U , dizemos que f é uma função holomorfa em U (outro nome dado para tal função é **função analítica**). Se f for holomorfa em todo $\mathbb{C}$, então f será uma *função inteira*. Uma função f é dita **biholomorfa** se existe a inversa f^{-1} e também é holomorfa.

Definição 8. Equações de Cauchy-Riemann: Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ funções reais. As equações de Cauchy-Riemann são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função analítica, então valem as equações de Cauchy-Riemann. A recíproca não é verdadeira. Para que seja, deve-se acrescentar uma condição: as derivadas de primeira ordem de $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ devem ser contínuas numa região D , a qual é um domínio em $\mathbb{C}$.

Dessa forma, sendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ com $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ funções reais, f será analítica em um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, se e somente se, $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ possuírem derivadas de primeira ordem contínuas em (x_0, y_0) e, além disso, forem válidas as Equações de Cauchy-Riemann.

O teorema a seguir, apresenta uma importante propriedade sobre as funções estudadas, ele não será demonstrado, mas a demonstração pode ser encontrada em livros de funções analíticas, em particular, na referência [1].

Teorema 9. *Uma função analítica $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é conforme em todos os pontos de D , exceto nos pontos críticos, ou seja, onde a derivada se anula.*

1.2 Modelos Fuchsianos

Antes de definirmos o que são os modelos fuchsianos, vamos começar com o conceito de transformações lineares fracionárias, ou ainda, Transformações de Möbius. As referências para o assunto são [2], [8] e [22].

Definimos uma transformação linear fracionária como sendo

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Lema 10. *As transformações linear fracionárias são exatamente as transformações biholomorfas de $\hat{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Se ∞ é ponto fixo, ou seja, $\gamma(\infty) = \infty$, podemos usar a expansão de Laurent para escrever uma vizinhança de ∞ , já que esta generaliza as séries de Taylor para o tratamento de funções que possuem pontos de não analiticidade. Podemos dizer que a função γ será analítica em $z = \infty$ se $\gamma(\frac{1}{w})$ for analítica em $w = 0$. Portanto, vale a expansão

$$\gamma(z) = az + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$

com $a \neq 0$. Então, $\gamma(\infty) - az$ é holomorfo em $\hat{\mathbb{C}}^2$ e deve ser uma constante, digamos b , dessa forma, $\gamma(z) = az + b, a \neq 0$. Se $z_0 \neq \infty$ também é ponto fixo, consideremos $\gamma_1(z) = \frac{1}{z - z_0}$, podemos notar que tanto γ_1 como $\gamma_1 \circ \gamma$ serão elementos de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ e $\gamma_1 \circ \gamma(\infty) = \infty$ e $\gamma_1 \circ \gamma(z) = \frac{1}{\gamma(z) - z_0} = a_1 z + b_1$, com $a_1, b_1 \in \mathbb{C}$ e $a_1 \neq 0$. $\square$

Note que tais transformações não possuem pontos críticos, logo são conformes em todos os pontos.

Se a transformação possuir coeficientes complexos, denotaremos por $\text{TLF}(\mathbb{C})$, se os coeficientes forem reais, será denotado por $\text{TLF}(\mathbb{R})$.

Podemos representar as transformações lineares fracionárias com o grupo de matrizes quadradas de ordem 2, em particular com as matrizes $A_{2 \times 2}$ que satisfazem $\det(A) = 1$. Dessa forma, a aplicação $T = \frac{az+b}{cz+d}$ pode ser representada pelo grupo

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}$$

cujas entradas da matriz são os coeficientes da transformação T . Observe que o grupo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ difere do apresentado apenas por possuir coeficientes em $\mathbb{C}$.

Para comprovar que tal associação é válida, considere $T \in \text{TLF}(\mathbb{C})$, dada por $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ satisfazendo $ad - bc = 1$ e com a operação usual de composição de grupos. Tal relação com $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ será dada da seguinte forma: a composição de duas transformações de $\text{TLF}(\mathbb{C})$ resultará nos coeficientes do produto das matrizes associada a cada transformação.

Sendo $T_1 = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ e $T_2 = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} \in \text{TLF}(2, \mathbb{C})$, então

$$T_1 \circ T_2 = \frac{a_1 \left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} \right) + d_1} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + a_1b_2 + b_1d_2}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + c_1b_2 + d_1d_2}$$

Por outro lado, veja que ao multiplicar as matrizes A_1 e A_2 cujos coeficientes vieram de T_1 e T_2 , respectivamente, obtemos uma matriz $A_{2 \times 2}$ cujos coeficientes são iguais ao da composição $T_1 \circ T_2$:

$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}$$

Reciprocamente, existe um homomorfismo Ψ que leva uma matriz $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ em uma transformação linear fracionária do tipo $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ com $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, cujos coeficientes são as entradas de A . Observe que dada matriz $B \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, esta pertencerá ao núcleo de Ψ se, e somente se, $\Psi(B) = \text{Id}$, isso ocorrerá quando $B = \text{Id}$ ou $B = -\text{Id}$. Logo núcleo de Ψ é dado por $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$, por Ψ estar bem definido, temos que Ψ induz o isomorfismo

$$\text{TLF}(\mathbb{C}) \approx \frac{\text{SL}(2, \mathbb{C})}{\{\pm \text{Id}\}}.$$

Mais especificamente, definimos $\frac{\text{SL}(2, \mathbb{C})}{\{\pm \text{Id}\}} = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, dessa forma, podemos concluir o seguinte teorema:

Teorema 11. *O grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo das transformações lineares fracionárias que preservam a orientação.*

Vale ressaltar que se A induz tal transformação, então para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, a matriz λA também induz.

Definição 12. Um subgrupo $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ discreto ¹ é chamado **grupo Kleiniano**. O subgrupo $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ discreto é chamado **grupo Fuchsiano**.

As transformações $\text{TLF}(\mathbb{R})$ e $\text{TLF}(\mathbb{C})$ consistem na composição de transformações dos seguintes tipos: inversões em número par ($T(z) = \frac{1}{\bar{z}}$), homotetias ($T(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$), rotações ($T(z) = e^{i\theta}z$) e reflexões em número par ($T(z) = -\bar{z}$) mantendo a orientação. Observe que podemos escrever uma transformação $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ como sendo

$$\frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c}, \quad c \neq 0,$$

ou seja, como a composição das transformações citadas. De fato:

$$\frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c} = \frac{-1}{c(cz + d)} + \frac{a}{c} = \frac{-1 + ad + acz}{c(cz + d)} = \frac{bc + acz}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Tais funções foram inicialmente introduzidas no estudo de análise complexa e superfícies de Riemann como transformações que preservam o conjunto $\{\text{círculos e retas}\}$.

¹Ser discreto na topologia de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ é ser isomorfo ao quociente de $\mathbb{C}^4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Proposição 13. *Uma transformação linear fracionária $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ leva $\{\text{círculos e retas}\}$ em $\{\text{círculos e retas}\}$.*

Demonstração. Como T é uma transformação linear fracionária, T é a composição de translações, inversões, homotetias e rotações. Veja que se transladarmos o círculo, ele continua sendo círculo, o mesmo acontece com a homotetia e a rotação, na primeira o raio aumenta ou diminui e na segunda o círculo gira. Sendo assim, devemos verificar se a proposição vale para inversão no círculo unitário.

Usaremos coordenadas polares (r, θ) . Seja C o círculo de raio R e centro em $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, a equação de C é dada por

$$C : (r \cos(\theta) - r_0 \cos(\theta_0))^2 + (r \sin(\theta) - r_0 \sin(\theta_0))^2 = R^2$$

$$C : r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 - R^2 = 0$$

A inversão ψ leva o ponto (r, θ) para o ponto $(\frac{1}{r}, \theta)$, então

$$\psi(C) : \frac{1}{r^2} - \frac{2r_0}{r} \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 - R^2 = 0$$

Suponha que C não contém a origem, nesse caso $\psi(C)$ será um círculo de raio $\frac{R}{|r_0^2 - R^2|}$ com centro em $\frac{z_0}{r_0^2 - R^2}$. Mas se C contém a origem temos $|z_0| = R$ assim a equação polar será dada por $r = \frac{1}{2r_0 \cos(\theta - \theta_0)}$ que é uma reta. Último caso a ser considerado é quando C for uma reta, nesse caso em coordenadas polares a equação será da forma $r = \frac{1}{2r_0 \cos(\theta - \theta_0)}$ e $\psi(C) = 2r_0 \cos(\theta - \theta_0)$ é um círculo passando pela origem. $\square$

Definimos o traço de uma matriz como sendo: $\text{Tr}(A) = a + d$. Para o grupo $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ teremos $\text{Tr}^2(T) = \text{Tr}^2(A)$. Uma aplicação $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ possui pontos fixos quando $\Leftrightarrow T(z) = z$.

Lema 14. 1. *O número de pontos fixos de T é igual ao número de autovalores distintos de A .*

2. *Se T tem um ponto fixo $\Rightarrow T(z) = z + 1$, a menos de conjugação.*

3. *Se T tem dois pontos fixos $\Rightarrow T(z) = \lambda z$, a menos de conjugação.*

Para demonstrar tal resultado, iremos, antes, apresentar outro lema importante. A transformação T possui um ou dois pontos fixos, o lema a seguir classificará as transformações de acordo com a quantidade de pontos fixos.

Lema 15. *Tome $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Todo $T(z)$ possui pontos fixos, estes podem ser classificados da seguinte forma:*

- i) $T(z)$ possui apenas um ponto fixo $\Leftrightarrow \text{Tr}^2(T) = 4 \Leftrightarrow T$ é **Parabólica**.
- ii) $T(z)$ possui dois pontos fixos complexos e conjugados $\Leftrightarrow \text{Tr}^2(T) \in [0, 4[\Leftrightarrow T$ é **Elíptico**.
- iii) $T(z)$ possui dois pontos fixos reais e distintos $\Leftrightarrow \text{Tr}^2(T) \in]4, \infty[\Leftrightarrow T$ é **Hiperbólico**.

Demonstração. Demonstraremos que em cada caso, o traço é, de fato, o que foi citado: Como $T(z)$ possui pontos fixos, então existe z que satisfaz

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow -cz^2 + (a-d)z + b = 0$$

Numa equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, usamos a fórmula de Bháskara para determinar as raízes e o $\Delta = b^2 - 4ac$ define quantas serão essas raízes: **i)** $\Delta = 0 \Rightarrow$ Duas raízes reais e iguais; **ii)** $\Delta < 0 \Rightarrow$ Duas raízes complexas e conjugadas e **iii)** $\Delta > 0 \Rightarrow$ Duas raízes reais e distintas.

Usaremos tal conceito para determinar quantas são as raízes da equação

$$-cz^2 + (a-d)z + b = 0,$$

ou seja, quantos pontos fixos $T(z)$ possui.

$$\begin{aligned}\Delta &= a^2 - 2ad + d^2 + 4bc \\ \Delta &= a^2 + d^2 - 2(ad - bc) + 2bc \\ \Delta &= a^2 + d^2 - 2 + 2(ad - 1) \\ \Delta &= (a + d)^2 - 4\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\text{i) } T(z) \text{ terá um ponto fixo} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (a + d)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (a + d)^2 = 4.$$

$$\text{ii) } T(z) \text{ terá dois pontos fixos complexos e conjugados} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (a + d)^2 - 4 < 0 \Rightarrow (a + d)^2 < 4.$$

$$\text{iii) } T(z) \text{ terá dois pontos fixos reais e distintos} \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (a + d)^2 - 4 > 0 \Rightarrow (a + d)^2 > 4.$$

□

Demonstração do Lema 14. Primeiramente, sendo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, temos a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ associada a T , cujo os autovalores λ são dados pela fórmula $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$, e calculando o Δ da equação de 2º grau, obtemos $\Delta = (a - d)^2 - 4$ que coincide com o que foi visto na demonstração do Lema 15, dessa forma fica provado que o número de pontos fixo é igual ao número de autovalores distintos de A .

Ainda da demonstração do Lema 15, é possível observar que os pontos fixos serão da forma

$$\frac{d-a}{2c} \pm \frac{\sqrt{(a-d)^2 - 4}}{2c}, \quad \text{quando } c \neq 0.$$

Se $(a - d)^2 = \pm 2$, então teremos um único ponto fixo dado por $\frac{d-a}{2c}$.

Devemos estudar o que acontece quando $c = 0$:

Suponha que a transformação $T(z)$ possua dois pontos fixos z_1 e z_2 , dessa forma $T(z_1) = z_1$ e $T(z_2) = z_2$. Considere S outra TLF tal que $S(z_1) = 0$ e $S(z_2) = \infty$.

Tomando a TLF $L(z) = S \circ T \circ S^{-1}$ temos:

$$L(0) = S \circ T \circ S^{-1}(0) = S \circ T(z_1) = S(z_1) = 0$$

$$L(\infty) = S \circ T \circ S^{-1}(\infty) = S \circ T(z_2) = S(z_2) = \infty$$

Ou seja, L fixa 0 e ∞ . Como podemos escrever $L(z) = \frac{az+b}{d}$, temos $L(0) = \frac{b}{d} \Rightarrow b = 0$, logo $L(z) = \frac{az}{d} = \lambda z$.

Agora, quando a transformação $T = \frac{az+b}{d}$ possui um único ponto fixo, este será o ∞ , pois note que podemos escrever

$$T(z) = Az + B \Rightarrow T(\infty) = \infty,$$

mais do que isso, devemos ter $A = 1$, caso contrário teríamos $z = \frac{B}{A-1}$ outro ponto fixo.

Dessa forma, temos que a transformação T que possui um único ponto fixo tem a forma $T(z) = z + B$. Falta mostrar que essa forma é conjugada àquela que foi apresentada no enunciado do Lema 14: $T_1(z) = z + 1$. Para tanto, considere o homeomorfismo $C(z) = Bz$, com isso temos $T \circ C = C \circ T_1$. De fato:

$$T \circ C(z) = T(Bz) = Bz + B = B(z + 1) = C(z + 1) = C \circ T_1(z).$$

Provando assim, que se T possui um ponto fixo, teremos $T(z) = z + 1$, a menos de conjugação. $\square$

Ainda sobre os pontos fixos de uma TLF, podemos fazer uma discussão dando condições para os coeficientes e analisando na esfera o que acontece. Partiremos do caso onde $c = 0$, neste caso, temos que $T(z) = \frac{az}{d} + \frac{b}{d} = Az + B$, vimos que toda TLF é uma composição de outras transformações, dessa forma, podemos considerar $A = \rho e^{i\alpha}$. Vejamos alguns casos: Se $\alpha > 0$,

Figura 1.2: Pontos fixos de uma TLF.

a Figura 1.2(a) nos mostra uma rotação $z \mapsto e^{i\alpha}z$ em $\mathbb{C}$ induzida na esfera, por um ângulo

α , ao redor do eixo vertical que passa na origem da esfera, aqui, as circunferências horizontais são aplicadas nelas mesmas, ou seja, são invariantes sob a ação de $T(z)$, porém não possuem pontos fixos. Neste caso, os únicos pontos que permanecem fixos são 0 e ∞ . As circunferências tracejadas trocam de lugar entre si. Resaltamos ainda que se $\alpha < 0$, então a rotação será no sentido contrário ao que aparece na figura.

O caso $\rho \neq 1$ é ilustrado na Figura 1.2(b). Neste caso, a transformação induzida na esfera é a homotetia $z \mapsto \rho z$. Se $\rho > 1$ (como na Figura 1.2(b)), temos uma expansão, se $\rho < 1$, uma contração e os pontos se movem para o sul. Novamente, os únicos pontos que permanecem fixos são 0 e ∞ . Aqui, as circunferências horizontais trocam de lugar entre si, enquanto as verticais são invariantes.

Na Figura 1.2(c) estamos compondo uma rotação ($\alpha > 0$) e uma homotetia ($\rho > 0$). As curvas invariantes são espirais que saem de 0 e vão para ∞ .

E por último, na Figura 1.2(d) é apresentada uma translação. Como as curvas invariantes em $\mathbb{C}$ formam uma família de retas paralelas à direção da translação, as curvas invariantes na esfera formam uma família de circunferências cuja reta tangente em comum no ∞ é paralela às retas invariantes de $\mathbb{C}$, sendo o ∞ o único ponto fixo.

Outro fato importante sobre as $\text{TLF}(\mathbb{C})$ ou $\text{TLF}(\mathbb{R})$ é que agem transitivamente em três pontos distintos.

$$T: z_0, z_1, z \rightarrow 0, 1, \infty \quad \text{com } z_0, z_1, z_\infty \in \mathbb{C} \text{ e distintos}$$

$$T(z) = \frac{z - z_0}{z - z_\infty} \cdot \frac{z_1 - z_\infty}{z_1 - z_0}$$

Isso significa dizer que dados três pontos distintos em $\mathbb{C}$, existe uma transformação que os leva em 0, 1, ∞ e, portanto, podemos considerar esses últimos para demonstrações.

Transformações lineares fracionárias em $\mathbb{R}$ também agem transitivamente em três pontos distintos, pois se z_0, z_1, z forem reais, a expressão de $T(z)$ acima será real.

Se estivermos trabalhando em $\text{TLF}(\mathbb{C})$ obtemos a transitividade tripla em $\text{TLF}(\hat{\mathbb{C}})$, se for em $\text{TLF}(\mathbb{R})$, então ela será em $\text{TLF}(\hat{\mathbb{R}})$.

Capítulo 2

Espaço Hiperbólico

No plano Euclidiano existem cinco axiomas que são base para a Geometria Euclidiana, são eles:

1. Dados pontos $A \neq B$, existe um único segmento de reta que os une.
2. Um segmento de reta pode ser prolongado infinitamente para construir uma reta.
3. Dados A um ponto e $r > 0$, com $r \in \mathbb{R}$, pode-se construir uma circunferência de centro A e raio r .
4. Todos os ângulos retos são congruentes.
5. Axioma das Paralelas: Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos. Equivalememente, por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.

Por volta de 1830, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Nicolai Lobatchevsky (1793-1856) e János Bolyai (1802-1860), independentemente mostraram a existência de uma geometria satisfazendo apenas os quatro primeiros axiomas acima. Essa foi chamada de Geometria Não-Euclidiana.

Esse capítulo será dedicado à apresentação dessa nova geometria, em particular, a geometria hiperbólica. A seção 2.1 define a geometria não-euclidiana, já a 2.2 apresenta os dois principais modos de representar o plano hiperbólico: o Disco de Poincaré e o semiplano superior. E, por fim, na seção 2.3 apresentamos outros modelos usados para representar o plano hiperbólico. As principais referências são [2], [4], [5], [6], [11], [19] e [21].

2.1 A Geometria Não-Euclidiana

Definição 16. Podemos representar uma superfície localmente como o gráfico de uma função f de duas variáveis. Tome p o ponto crítico dessa função, ou seja, $\text{grad}(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle_p = 0$. A **Curvatura Gaussiana** da superfície em p é o determinante da matriz $A_{2 \times 2}$ das segundas derivadas, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{bmatrix}.$$

Formalmente, podemos dizer que a curvatura gaussiana de um ponto sobre a superfície é o produto das curvatura principais ¹ no ponto dado. O valor depende apenas de como as distâncias são medidas na superfície, não como estão imersas no espaço. Este resultado chama-se Teorema Egrégio de Gauss. Mais referências em [5].

Uma das geometrias onde não vale o 5º axioma é a geometria no espaço esférico,

$$\mathbb{S}_r^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2\},$$

o qual possui curvatura gaussiana $\frac{1}{r^2}$; e o espaço hiperbólico, base desse texto.

No Espaço hiperbólico a curvatura Gaussiana vale -1 , a ideia é como se fosse uma “esfera” de raio r satisfazendo $\frac{1}{r^2} = -1$, ou seja, $r = \sqrt{-1}$. Isso será formalizado mais adiante. Há vários modelos para representá-lo.

2.2 Disco de Poincaré e Semiplano Superior $\mathbb{H}^2$

Os modelos mais usuais para representar o plano hiperbólico são o Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ e o semiplano superior $\mathbb{H}^2$. Dedicaremos essa seção a comparar ambos e apresentar seus principais teoremas e propriedades.

O Disco de Poincaré, o qual denotamos por $\mathbb{D}^2$, foi introduzido por Henri Poincaré (1854-1912) e consiste no disco unitário aberto do plano euclidiano.

Matematicamente, podemos escrever $\mathbb{D}^2$ como sendo:

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\},$$

com a fronteira no infinito, ou seja, $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.

Uma curva $\gamma \in \mathbb{D}$ deve ter comprimento infinito para que chegue no bordo. Define-se a métrica riemanniana em $\mathbb{D}^2$ por

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Já o semiplano superior, o qual denotamos por $\mathbb{H}^2$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ e ao modelo do Disco de Poincaré. Além disso, deriva de uma projeção estereográfica e é definido por:

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}.$$

Nesse modelo, $\mathbb{H}^2$ herda de $\mathbb{C}$ as noções de pontos e de ângulos.

A partir de uma transformação linear fracionária podemos levar o $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{D}^2$. Essa transformação é obtida fazendo translações, homotetias e inversões no plano considerado. A função apresentada abaixo é bijetora e tal que $\varphi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ é dada por

$$\varphi(z) = \frac{-z + i}{z + i} \tag{2.1}$$

¹são as curvas determinadas pela intersecção da superfície com planos perpendiculares ao plano tangente a esse ponto. Os valores máximo e mínimo das curvaturas destas curvas são as curvaturas principais

Além disso, sua inversa será $\varphi^{-1}: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, a qual é dada por

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{i(1-z)}{z+1}. \quad (2.2)$$

Com a transformação φ^{-1} de (2.2) mostraremos que a métrica em $\mathbb{H}^2$ é dada por

$$ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}.$$

Para tal demonstração, precisamos da derivada da função φ , por isso, primeiramente vamos determinar qual é a derivada de uma transformação linear fracionária.

Considere $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, dessa forma temos:

$$\begin{aligned} T'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(z+h) - T(z)}{h} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{a(z+h)+b}{c(z+h)+d} - \frac{az+b}{cz+d} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{h(ad-bc)}{(cz+ch+d)(cz+d)} \right] \Rightarrow T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dessa forma, considere o vetor $\|\varphi'(z)\|_{w,hip}$, onde $\varphi'(z)$ é a derivada da função $\varphi(z)$ de (2.1) e $\varphi'(z) = -\frac{2i}{(z+i)^2}$, pois decorre de (2.3).

Assim, da métrica de $\mathbb{D}^2$ e sendo $z = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned} \|\varphi'(z)\|_{w,hip} &= \frac{2\|T'(z)v\|}{1-|Tz|^2} = \frac{4|v|}{|z+i|^2 - |z-i|^2} \\ &= \frac{4|v|}{[x^2 + (y+1)^2] - [x^2 + (y-1)^2]} = \frac{|v|}{y} = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)} \end{aligned}$$

Note que φ e φ^{-1} são transformações lineares fracionárias, logo levam o conjunto {círculos e retas} nele próprio.

2.2.1 Comprimento Hiperbólico

Nesta seção, mostraremos que as retas euclidianas perpendiculares à $\partial\mathbb{H}^2$ minimizam a distância hiperbólica entre quaisquer dois pontos.

Para isso, considere todas as curvas $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ contínuas tal que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ com $\gamma(a) = iy_1$ e $\gamma(b) = iy_2$.

O comprimento de γ é dado por $\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{\text{Im } z}$ e como, por definição, dado $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(a) = z_1$ e $\gamma(b) = z_2$, temos $d_{\mathbb{H}^2} := \inf_{\gamma=\gamma(t)} \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$, segue que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(iy_1, iy_2) &= \inf_{\gamma=\gamma(t)} \int_{\gamma=\gamma(t)} \frac{|dz|}{\text{Im } z} = \inf_{\gamma=\gamma(t)} \int_a^b \frac{|d(\gamma(t))|}{\text{Im } \gamma(t)} = \inf_{\gamma=\gamma(t)} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)| dt}{y(t)} = \\ &= \inf_{\gamma=\gamma(t)} \int_a^b \frac{|(x'(t), y'(t))| dt}{y(t)} = \inf_{\gamma=\gamma(t)} \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|y'(t)| dt}{y} \geq \ln \left(\frac{y(b)}{y(a)} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Podemos garantir a última desigualdade pois o caminho $(0, y(t))$ também é contínuo e começa

em iy_1 e termina em iy_2 . Note que se $y' \geq 0$, então $\int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \left(\frac{y(b)}{y(a)} \right)$. O segmento vertical de $z_1 = iy_1$ até $z_2 = iy_2$ é o segmento de menor comprimento de z_1 a z_2 , nesse caso, $d(z_1, z_2) = |y_2 - y_1|$.

Agora, observe que $\mathbb{H}^2$ é invariante por uma transformação linear fracionária $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. De fato, tomado um ponto $z = x + iy$ um ponto de $\mathbb{H}^2$, ou seja, com $y > 0$, obtemos $T(x + iy)$ cuja parte imaginária é

$$\frac{y}{|c(x + iy) + d|^2} > 0.$$

Logo, $T(x + iy) \in \mathbb{H}^2$. Além do que, se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ então $T(x) \in \mathbb{R}$, se $x \in \mathbb{R}$.

Lema 17. *A transformação $T(z)$, com coeficientes reais, preserva a métrica de $\mathbb{H}^2$ (isto é, são isometrias do semiplano superior).*

Demonstração. Devemos mostrar que $\frac{|dT(z)|}{\text{Im } T(z)} = \frac{|dz|}{\text{Im } z}$. De fato, como segue:

$$\frac{|dT(z)|}{\text{Im } T(z)} = \frac{\left| \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \right| |dz|}{\text{Im} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right)} = \frac{\frac{1}{|cz+d|^2} |dz|}{\frac{y}{|(cz+d)|^2}} = \frac{|dz|}{|cz+d|^2} \cdot \frac{|cz+d|^2}{y} = \frac{|dz|}{y} = \frac{|dz|}{\text{Im } z}.$$

□

Definição 18. Uma curva diferenciável γ é uma **Geodésica** se ela realiza a distância entre quaisquer dois de seus pontos, isto é, se $z_1 = \gamma(a)$ e $z_2 = \gamma(b)$ então $d_{\mathbb{H}^2}(z_1, z_2) = \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma|_{[a,b]})$.²

No plano $\mathbb{H}^2$, as retas euclidianas perpendiculares ao bordo $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}$ são geodésicas. Como vimos, as transformações lineares fracionárias são conformes, já que não possuem pontos críticos, então o conjunto dos semicírculos e semirretas euclidianos perpendiculares à $\mathbb{R}$ são as geodésicas hiperbólicas em $\mathbb{H}^2$.

No disco de Poincaré, $\mathbb{D}^2$, as geodésicas são os diâmetros do disco e os arcos de círculo ortogonais à $\partial\mathbb{D}^2$. Isso segue do fato que a transformação φ de 2.1 que leva $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{D}^2$ é uma isometria, preserva a orientação, é conforme e pela proposição 13 leva círculos em círculos. Dessa forma, φ leva o eixo real de $\mathbb{H}^2$ na fronteira de $\mathbb{D}^2$, assim as curvas de comprimento mínimo de $\mathbb{H}^2$ são levadas em curvas de comprimento mínimo em $\mathbb{D}^2$ ortogonais à $\partial\mathbb{D}^2$ e no diâmetro. Veja na figura (2.1) exemplos de retas no disco. E, dado γ em $\mathbb{D}^2$ de modo que $\gamma(0) = z_1$ e $\gamma(1) = z_2$

Figura 2.1: Retas Hiperbólicas no Disco de Poincaré.

²A distância hiperbólica também poderia ter sido calculada, da mesma maneira, sobre o disco $\mathbb{D}^2$.

temos a distância hiperbólica dada por

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2) &= \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{2ds}{1-s^2} = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} \right) ds = \\ &= -\ln|1-s| + \ln|1+s| \stackrel{s \leq 1}{=} \ln \left(\frac{1+s}{1-s} \right) \Big|_{z_1}^{z_2} = \ln \left(\frac{(1+z_2)(1-z_1)}{(1-z_2)(1+z_1)} \right) \quad (2.5) \end{aligned}$$

Usando o fato que afirma que o plano $\mathbb{H}^2$ é invariante por transformação linear fracionária, é possível mostrar que os pontos $z = i$ e $w = ki \in \mathbb{H}^2$ com $k > 1$ satisfazem a fórmula

$$d_{\mathbb{H}^2}(z, w) = \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right). \quad (2.6)$$

A demonstração da validade dessa fórmula pode ser encontrada no teorema 1.37 de [22].

2.2.2 Isometrias

Sejam z, w e ξ pontos distintos de $\mathbb{H}^2$ com ξ entre z e w . Sendo ϕ uma isometria qualquer de modo que $\phi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, temos, por consequência, que $\phi(\xi)$ está entre $\phi(z)$ e $\phi(w)$. Dessa forma, ϕ leva o intervalo (z, w) no intervalo $(\phi(z), \phi(w))$. Assim, dada qualquer isometria ϕ existe uma isometria

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad ad - bc > 0$$

tal que $g \circ \phi$ leva o eixo imaginário L nele próprio (basta escolher $g(L) = L$). Aplicando, se necessário, as isometrias $z: kz (k > 0)$ e $z: -\frac{1}{z}$, podemos dizer que $g \circ \phi(i) = i$ e que $g \circ \phi(i)$ mantém invariante os intervalos (i, ∞) e $(0, i)$, logo $g \circ \phi(i)$ fixa cada ponto de L .

Escolhendo qualquer ponto z de $\mathbb{H}^2$, escrevemos

$$z = x + iy \quad \text{e} \quad g \circ \phi(z) = u + iv.$$

Sabendo que g e ϕ são isometrias e tomando $t > 0$ qualquer, temos

$$d_{\mathbb{H}^2}(z, it) = d_{\mathbb{H}^2}(g \circ \phi(z), g \circ \phi(it)).$$

Por 2.6, garantimos

$$[x^2 + (y - t)^2]v = [u + (v - t)^2]y$$

logo para $t > 0$, $y = v$ e $x^2 = u^2 \Rightarrow g \circ \phi(z) = z$ ou $g \circ \phi(z) = -\bar{z}$, provando assim o teorema a seguir:

Teorema 19. *As isometrias do plano Hiperbólico são transformações lineares fracionárias, satisfazendo um das duas aplicações:*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

ou

$$z \mapsto \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$$

onde a, b, c e d são reais e satisfazem $ad - bc > 0$

As isometrias de $\mathbb{D}^2$ são as transformações lineares fracionárias. Seja φ de (2.1) e ψ uma isometria de $\mathbb{H}^2$, assim, as isometrias de $\mathbb{D}^2$ serão dadas pela composição $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ que é uma transformação linear fracionária.

Além disso, dados $z_0 \in \mathbb{D}^2$ e uma direção tangente em z_0 existe uma transformação linear fracionária que leva $z_0 \mapsto 0$ e a direção na direção real positiva. Isso segue de que as transformações lineares fracionárias que preservam $\mathbb{D}^2$ são da forma

$$\left\{ z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}, \text{ com } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

2.2.3 Retas Hiperbólicas

A partir da seção anterior, observamos que as retas hiperbólicas em $\mathbb{H}^2$ serão de dois tipos: semirretas perpendiculares ao eixo real ou semicircunferências centradas no eixo real. Alguns exemplos de retas podem ser vistos na figura 2.2.

Figura 2.2: Modelo de Retas no Semiespaço Superior.

Proposição 20. *Dados p e $q \in \mathbb{H}^2$ existe uma única reta hiperbólica passando por p e q .*

Demonstração. Existência: 1º Caso: $\text{Re}(p) = \text{Re}(q)$. Considere a reta Euclidiana L tal que $L = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = \text{Re}(p)\}$, tal reta é perpendicular ao eixo real e passa tanto por p como por q . Dessa forma, a reta $l = L \cap \mathbb{H}^2$ é a reta hiperbólica desejada.

2º caso: $\text{Re}(p) \neq \text{Re}(q)$. Nesse caso precisamos construir uma semicircunferência euclidiana centrada no eixo real e que passa por p e q . Para isso basta tomar a reta euclidiana s mediatriz dos pontos p e q . Considere O o ponto de intersecção entre a reta s e o eixo real. A semicircunferência procurada será a de centro O que passa por p e q .

Unicidade: Decorre dos axiomas da Geometria Euclidiana citados no início do capítulo, os quais usamos para fazer as construções. $\square$

Definição 21. Duas retas hiperbólicas são paralelas se elas são disjuntas em $\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{D}^2$.

Note que há dois tipos de retas paralelas: (i) disjuntas em $\mathbb{H}^2$, mas com um ponto em comum em $\partial\mathbb{H}^2$ (Figura 2.3(a)) ou (ii) disjuntas em $\bar{\mathbb{H}}^2$ (Figura 2.3(b)).

Mostramos graficamente que a geometria hiperbólica não satisfaz o 5º axioma da geometria Euclidiana. Veja na figura 2.4 um ponto P fora de uma reta l , por P passam infinitas retas disjuntas à l , ou seja existem infinitas retas paralelas.

Outro fato que podemos observar na representação das retas hiperbólicas: Se $L \subset \mathbb{D}^2$ é uma geodésica, podemos determinar o lugar dos pontos cuja distância a L é constante. Essa região

Figura 2.3: Tipos de retas paralelas no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$. Figura 2.4: Pelo ponto P passam infinitas retas paralelas à reta l .

pode ser determinada da seguinte forma: considere as geodésicas L como sendo o diâmetro do disco e M qualquer arco de circunferência perpendicular a $\partial\mathbb{D}^2$. Veja na figura 2.5. Seja L' um arco de circunferência passando por $(-1,0)$ e $(1,0)$, não necessariamente perpendicular a $\partial\mathbb{D}^2$. Veja que ao fazer a inversão em relação a M , denotada por i_M , temos:

$$i_M(L) = L \text{ pois } L \text{ passa no centro de } M$$

$$i_M(\partial\mathbb{D}^2) = \partial\mathbb{D}^2.$$

Como L e $\partial\mathbb{D}^2$ são preservados, então $L \cap \partial\mathbb{D}^2$ é preservado, segue que $i_M(\pm 1) = \pm 1$. Inversões trocam interior e exterior, logo $i_M(-1) = 1$ e $i_M(1) = -1$.

Além disso, temos ainda que L' é perpendicular a M , portanto $i_M(L') = L'$.

Figura 2.5: Região B onde as retas perpendiculares a L e L' possuem o mesmo comprimento.

Como i_M é uma inversão que preserva $\mathbb{D}^2$, então i_M é uma isometria de $\mathbb{D}^2$. Escolhendo M apropriadamente, podemos levar qualquer arco perpendicular a ambos L e L' em qualquer outro (do mesmo tipo). Portanto, todos esses arcos tem o mesmo comprimento.

2.2.4 Área Hiperbólica

Definição 22. Seja $U \subset \mathbb{H}^2$. Diremos que a área hiperbólica de U é definida por

$$A_{\mathbb{H}^2}(U) = \iint_U \frac{dx dy}{y^2},$$

se a integral existir.

Teorema 23. A área hiperbólica é invariante pela ação das isometrias, ou seja, $A_{\mathbb{H}^2}(T(U)) = A_{\mathbb{H}^2}(U)$, para todo $T \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Demonstração. Sejam $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $z = x + iy$ e $w = T(z) = u + iv$. Usando as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left| \frac{dT}{dz} \right|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{H}^2}(T(U)) &= \iint_{T(U)} \frac{du dv}{v^2} = \iint_U \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{dx dy}{v^2} \\ &= \iint_U \frac{1}{|cz + d|^4} \frac{|cz + d|^4 dx dy}{y^2} = \iint_U \frac{dx dy}{y^2} = A_{\mathbb{H}^2}(U). \end{aligned}$$

□

Em particular, calcularemos a área hiperbólica do círculo e do triângulo hiperbólico.

Círculo

Dado um círculo em $\mathbb{H}^2$ sabemos calcular a distância entre dois pontos, dessa forma é possível determinar o comprimento hiperbólico do raio.

Suponha, sem perda de generalidade, que o círculo tenha raio euclidiano r e centro na origem. Pela equação (2.5) sabemos que

$$d_{\mathbb{D}^2}(0, r) = \int_0^r \frac{2dx}{1-x^2} = \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right).$$

Portanto, o raio hiperbólico do círculo centrado em O e passando por $z = r$ é $R = \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$. Assim :

$$R = \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \Leftrightarrow e^R = \frac{1+r}{1-r} \Rightarrow e^R = 1 + \frac{2r}{1-r} \Leftrightarrow e^R - 1 = \frac{2r}{1-r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e^R - 1)(1 - r) = 2r \Rightarrow e^R - e^R r - 1 + r = 2r \Rightarrow r = \frac{e^R - 1}{e^R + 1}. \quad (2.7)$$

Podemos reescrever 2.7 usando trigonometria hiperbólica, a qual será estudada no capítulo seguinte.

$$\frac{e^{\frac{R}{2}} - e^{-\frac{R}{2}}}{e^{\frac{R}{2}} + e^{-\frac{R}{2}}} = \operatorname{tgh}\left(\frac{R}{2}\right) = r.$$

Parametrizando o círculo por $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, temos, pela métrica, que o comprimento do círculo é

$$\int_{\gamma} \frac{2 \|\gamma'(t)\| dt}{1 - \|\gamma(t)\|^2} = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1 - r^2} dt = \frac{2rt}{1 - r^2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4r\pi}{1 - r^2}.$$

Assim, o comprimento hiperbólico C do círculo será

$$\begin{aligned} C &= \frac{4\pi \operatorname{tgh}(\frac{R}{2})}{1 - \operatorname{tgh}^2(\frac{R}{2})} = \frac{4\pi \operatorname{tgh}(\frac{R}{2})}{\operatorname{sech}^2(\frac{R}{2})} = \frac{4\pi \sinh(\frac{R}{2})}{\cosh(\frac{R}{2})} \cosh^2\left(\frac{R}{2}\right) = \\ &= 4\pi \sinh\left(\frac{R}{2}\right) \cosh\left(\frac{R}{2}\right) = 2\pi \sinh(R). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Lembrando que a área pode ser obtida calculando a integral do comprimento, temos que a área hiperbólica do círculo é dada por:

$$\begin{aligned} \int_0^R C(S) dS &= \int_0^R 2\pi \sinh(S) dS = 2\pi \int_0^R \sinh(S) dS = 2\pi (\cosh(S)) \Big|_0^R \\ &= 2\pi [\cosh(R) - \cosh(0)] = -2\pi (\cosh(R) - 1) = \\ &= 2\pi (2 \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right)) = 4\pi \sinh^2\left(\frac{R}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Triângulos Hiperbólicos

Diferentemente do que acontece na Geometria Euclidiana, na Geometria Hiperbólica se dobrarmos o tamanho dos lados de um triângulo, os ângulos internos dele irão mudar. Isso pode ser observado em termos de áreas. Temos aqui um caso especial do Teorema de Gauss-Bonnet.

Definição 24. Triângulo ideal é aquele que possui todos os vértices no infinito.

Proposição 25. Todos os triângulos ideais são congruentes e têm área igual a π .

Demonstração. Usando isometrias podemos transformar qualquer triângulo ideal do $\mathbb{H}^2$ no triângulo ideal modelo de vértices $-1, 1$ e ∞ , isto é consequência do fato de que as transformações lineares fracionárias agem transitivamente em triplas de pontos distintos em $\mathbb{R}$

Sendo o eixo real a fronteira de $\mathbb{H}^2$, e Oy o eixo imaginário, a região do triângulo ideal modelo fica determinada por $-1 < x < 1$ e $y \geq \sqrt{1 - x^2}$ com elemento de área hiperbólica dada

na definição 22. Assim:

$$\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dydx}{y^2} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(\theta)} \cos(\theta) d\theta = \pi.$$

□

Observação 26. Quando um vértice está no infinito, seu ângulo interno é igual a 0.

Proposição 27. A área do triângulo hiperbólico cujos ângulos internos são α, β e γ , é dada por

$$A_{\mathbb{H}^2} = \pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

Demonstração. Considere o triângulo 2/3 ideais, ou seja, com 2 vértices no infinito.

Seja $A(\theta)$ a área de um triângulo 2/3 ideais, onde o ângulo do vértice finito vale $\pi - \theta$ ($A(\theta)$ é uma função bem definida pois quaisquer dois triângulos com um único vértice finito e ângulo igual a $\pi - \theta$ são congruentes, pois como vimos, no disco de Poincaré existe uma isometria que leva qualquer vértice finito z_0 com ângulo interno θ no ponto 0 com mesmo ângulo).

A é uma função aditiva, ou seja $A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_1) + A(\theta_2)$, quando $\theta_1, \theta_2, (\theta_1 + \theta_2) \in]0, \pi[$. Isso será mostrado pela figura 2.6.

Figura 2.6: Demonstração da função área $A(\theta)$ ser aditiva.

Note que $\triangle ABQ$ é congruente ao $\triangle A'B'Q$ por reflexão no centro $\Rightarrow A_{\triangle ABQ} = A_{\triangle A'B'Q}$. Além disso, pela Figura 2.6, temos os seguintes fatos:

1. $A_{\triangle APB} = A(\theta_1)$
2. $A_{\triangle BPB'} = A(\theta_2)$;
3. $A_{\triangle A'PB'} = A(\theta_1 + \theta_2)$,

Ainda

$$\begin{aligned} A_{\triangle AQB} &= A_{\triangle A'B'Q} \text{ (por reflexão em } Q); \\ A_{\triangle APB} + A_{\triangle BPB'} - A_{\triangle PQB'} &= A_{\triangle A'PB'} - A_{\triangle PQB'}; \\ A(\theta_1) + A(\theta_2) &= A(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Note que $A(\theta)$ é uma função crescente, pois $A_{\triangle QA'B'} = A_{\triangle BQA} > A_{\triangle PQB'}$ dessa forma, $A(\theta)$ é linear e contínua de $]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$. Como $A(0) = 0 \Rightarrow A(\theta) = \theta$.

Assim, $A(\pi) = \pi$ e portanto a área de um triângulo 2/3 ideais é o complemento do ângulo do vértice finito.

Figura 2.7: Área de um triângulo $\triangle ABC$, 1/3 ideal.

Se o triângulo for 1/3 ideal (apenas um vértice no infinito), como na figura 2.7 prolongue um dos lados obtendo um triângulo 2/3 ideais. Assim

$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle AA'C} - A_{\triangle BA'C}$$

$$A_{\triangle ABC} = \pi - \alpha - (\pi - \pi + \beta) = \pi - \alpha - \beta$$

E por último, no caso onde o triângulo hiperbólico não possui vértices ideais (figura 2.8), basta prolongar um dos lados e obter um triângulo 1/3 ideal:

$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle AB'B} - A_{\triangle BB'C}$$

$$A_{\triangle ABC} = \pi - \alpha - (\gamma + \theta) - (\pi - \theta - \pi + \beta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

Figura 2.8: Área de um triângulo $\triangle ABC$, sem vértices no infinito.

E assim, fica demonstrada a proposição.

□

2.3 Outros Modelos

Na seção anterior, apresentamos os modelos mais usuais para representar o plano hiperbólico. Nesta seção, mostraremos outros três modelos que representam o plano hiperbólico. São eles: Hemisfério (2.3.1), Hiperbolóide (2.3.2) e Klein (2.3.3).

2.3.1 Hemisfério

O modelo do Hemisfério é derivado da bola de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Para construímos o modelo do Hemisfério, colocamos a bola de Poincaré $\mathbb{D}^2$ em $x_0 = 0$ de $\mathbb{E}^{2+1}$, e a cobrimos com a esfera unitária $\mathbb{S}^2(\subset \mathbb{E}^{2+1})$ como na figura 2.9.

Figura 2.9: Projeção estereográfica do Disco $\mathbb{D}^2$ no pólo norte da Esfera unitária.

Agora, tomando o pólo sul, ou seja o ponto $(-1, 0, 0)$, façamos a projeção estereográfica do disco $\mathbb{D}^2$ no hemisfério norte de $\mathbb{S}^2$, com isso transferimos a geometria do disco equatorial para o hemisfério norte, obtendo assim o modelo do Hemisfério. O mesmo pode ser feito para dimensão n .

Como a projeção estereográfica é conforme e leva círculos em círculos, este modelo é conforme e suas geodésicas são semicírculos ortogonais ao equador $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$.

2.3.2 Hiperbolóide

No começo da seção 2, falamos que o espaço hiperbólico é como se fosse uma esfera de raio $i = \sqrt{-1}$. Isso pode parecer estranho, mas daremos uma interpretação razoável.

Para obter uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos tomar a forma quadrática definida positiva $Q^+(x) = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$, onde $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, isso nos dá a métrica euclidiana $dx^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$. Restringindo para a esfera unitária $\mathbb{S}^n$, ou seja, quando $Q^+ = 1$, obtemos uma métrica Riemanniana de curvatura $= 1$.

Consideremos agora a seguinte métrica indefinida:

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \quad (2.10)$$

associado com a forma quadrática $Q^-(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. Definiremos que com essa métrica o $\mathbb{R}^{n+1}$ fica denotado por $\mathbb{E}^{n,1}$.

Sendo assim, a esfera de raio $= i$ na origem de $\mathbb{E}^{n,1}$ é o hiperbolóide $H = \{Q^- = -1\}$

Figura 2.10: Modelo do Hiperbolóide.

Quando restringimos a métrica 2.10 para o hiperbolóide H , obtemos uma métrica Riemanniana definida positiva. Uma vez que qualquer vetor tangente ao hiperbolóide tem comprimento real. Topologicamente, H é a união de dois discos abertos. Ao identificar dois pontos antipodais, obtemos o espaço projetivo $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$. Então queremos identificar os pontos antipodais de H , aqui estão em componentes disjuntas de H , dessa forma o subconjunto de $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ pode ser representado por uma componente do hiperbolóide, por exemplo, a folha superior. Por causa disso, o modelo do Hiperbolóide acaba sendo um dos mais naturais, ele “imita” a definição da esfera unitária. As retas e as geodésicas são as intersecções dos planos com o hiperbolóide.

2.3.3 Klein

Chamaremos de $\mathbb{K}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a região do hiperplano $x_0 = 1$, ou seja $x_1^2 + \dots x_n^2 < 1$. Neste modelo projetamos o hiperbolóide no plano $x_0 = 1$, veja figura 2.11. Ou seja, ao tomar $p \in H$ (H é o hiperbolóide do modelo anterior) e a origem do espaço, seja R_p a linha que une p até a origem. Tal reta irá intersectar o plano $\mathbb{K}^n$ uma única vez em $\pi_k(p)$. A aplicação $\pi: H \rightarrow \mathbb{K}^n$ é um difeomorfismo que leva as linhas hiperbólicas e os planos hiperbólicos para segmentos de reta e planos no disco, respectivamente. Porém, esse não é um modelo conforme, então os ângulos e os comprimentos não são preservados, distorcendo as figuras.

A Tabela 2.1 representa uma comparação entre os modelos apresentados.

Figura 2.11: Modelo de Klein - Projeção $\pi_K(p)$

Modelo	Construção	Características
Disco de Poincaré - $\mathbb{D}^2$	Disco Unitário do plano Euclidiano.	Conforme - boa para cálculos envolvendo ângulos e para visualizar pontos e suas vizinhanças; Linhas são arcos de circunferência.
Hemisfério - $\mathbb{S}^n$	Projeção do disco de Poincaré no hemisfério norte.	Intermediário entre o Hiperbolóide e Semiespaço Superior.
Semiplano Superior - $\mathbb{H}^2$	Projeção estereográfica do Hemisfério.	Fácil para cálculos; A fronteira é $\mathbb{C} \cup \infty$.
Hiperbolóide - H	Folha superior do Hiperbolóide.	Natural; Similar à esfera; Bom para cálculos; Díficil visualização.
Klein - $\mathbb{K}^n$	Projeção do Hiperbolóide em $x_0 = 1$.	Leva linhas em linhas, planos em planos; Não conforme - Distorce figuras.

Tabela 2.1: Tabela comparativa dos modelos do plano hiperbólico.

Capítulo 3

Funções Hiperbólicas e o Hexágono Reto

Ao estudar trigonometria, trabalhamos sobre o círculo unitário, porém, nesse texto, nosso plano de estudo será o plano hiperbólico, ou seja, uma hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$, por isso, essa seção será destinada a apresentação de algumas funções hiperbólicas. Boas referências para o estudo do tema são [17] e [20].

Primeiramente, as funções cosseno hiperbólico ($\cosh(t)$) e seno hiperbólico ($\sinh(t)$) são definidas por:

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Consequentemente, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(t) &= \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}; \\ \operatorname{cotgh}(t) &= \frac{1}{\operatorname{tgh}(t)} = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1}; \\ \operatorname{sech}(t) &= \frac{1}{\cosh(t)} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}; \\ \operatorname{cossesch}(t) &= \frac{1}{\sinh(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}}. \end{aligned}$$

Cada uma dessas expressões podem ser escritas como séries de potência, em particular

$$\begin{aligned} \cosh(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n!}; \\ \sinh(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}. \end{aligned}$$

Existem muitas relações no estudo de funções hiperbólicas, algumas delas serão muito importantes para o desenvolvimento desse trabalho. As principais serão demonstradas, outras apenas citadas.

- $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, de fato:

$$\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

- $\sinh^2(t) = \frac{\cosh(2t) - 1}{2}$, de fato:

$$\frac{\cosh(2t) - 1}{2} = \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4} = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \sinh^2(t).$$

- $\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \sinh(b) \cosh(a)$, de fato:

$$\begin{aligned} \sinh(a) \cosh(b) + \sinh(b) \cosh(a) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^b - e^{-b}}{2} \cdot \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b}}{4} \cdot \frac{e^{a+b} + e^{b-a} - e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} = \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} = \sinh(a + b). \end{aligned}$$

- $\cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b)$, de fato:

$$\begin{aligned} \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b) &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b}}{4} \cdot \frac{e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}}{4} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \cosh(a + b). \end{aligned}$$

- $2\sinh(t) \cosh(t) = \sinh(2t)$, de fato:

$$2 \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t} + 1 - 1 - e^{-2t}}{2} = \sinh(2t).$$

- $\sinh'(t) = \cosh(t)$ e $\cosh'(t) = \sinh(t)$. Seguem das regras usuais de derivação.

Nosso principal objetivo é construir hexágonos retos, ou seja, hexágonos no plano hiperbólico com todos os ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$. Para tanto, apresentaremos várias construções e relações.

A partir daqui, as relações apresentadas serão sobre triângulos hiperbólicos em $\mathbb{H}^2$, considere-o com vértices $v_a = s + ti$, com $s^2 + t^2 = 1$, $v_b = ki$ e $v_c = i$, além disso, os seus ângulos internos devem ser iguais a α, β e $\frac{\pi}{2}$, como mostra a figura 3.1. Como as isometrias preservam

comprimentos e ângulos, as fórmulas trigonométricas são invariantes sob as isometrias, por isso, trabalharemos tanto no semiplano superior $\mathbb{H}^2$, como no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$.

Figura 3.1: Triângulo Hiperbólico

O primeiro resultado que nos será necessário utiliza o conceito de distância hiperbólica vista em 2.2.1. Usaremos também a fórmula 2.6. Com isso, segue o teorema a seguir:

Teorema 28. Sendo $d_{\mathbb{H}^2}(z, w) = \ln \left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|} \right)$, com $z, w \in \mathbb{H}^2$ são válidas:

- $\cosh(d_{\mathbb{H}^2}(z, w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$
- $\sinh \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^2}(z, w) \right) = \frac{|z-w|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{\frac{1}{2}}}$
- $\cosh \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^2}(z, w) \right) = \frac{|z-\bar{w}|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{\frac{1}{2}}}$
- $\operatorname{tgh} 2 \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^2}(z, w) \right) = \frac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}$

Demonstração. A demonstração será feita para $\cosh(d_{\mathbb{H}^2}(z, w))$, as outras seguem de maneira análoga.

Lembrando que $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, temos que:

$$\cosh(d_{\mathbb{H}^2}(z, w)) = \cosh \left(\ln \left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|} \right) \right) = \frac{(|z-\bar{w}|+|z-w|)^2 + (|z-\bar{w}|-|z-w|)^2}{2(|z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2)}$$

Considerando $z = x + yi$ e $w = a + bi$, temos:

- $|z-\bar{w}|^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2$
- $|z-w|^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2$

Dessa forma, temos

$$\cosh(d_{\mathbb{H}^2}(z, w)) = \frac{4(x-a)^2 + 4(y-b)^2 + 8yb}{8yb} = \frac{4((x-a)^2 + (y-b)^2)}{8yb} + \frac{8yb}{8yb} = \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w} + 1$$

□

Outras relações são apresentadas no teorema a seguir.

Teorema 29. *Considerando o triângulo hiperbólico apresentado na figura 3.1, com ângulos internos α, β e $\frac{\pi}{2}$ e lados a, b e c , respectivamente opostos aos ângulos dados, temos as seguintes relações:*

- **Relacionando os três lados** (Teorema de Pitágoras no plano hiperbólico)

$$(i) \cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b)$$

- **Relacionando dois lados e um ângulo**

$$(ii) \operatorname{tgh}(b) = \sinh(a) \operatorname{tg} \beta$$

$$(iii) \sinh(b) = \sinh(c) \operatorname{sen} \beta$$

$$(iv) \operatorname{tgh}(a) = \operatorname{tgh}(c) \cos \beta$$

- **Relacionando um lado e dois ângulos**

$$(v) \cosh(a) \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha$$

$$(vi) \cosh(c) = \cotg \alpha \cotg \beta$$

Demonstração. Para a prova desse teorema, usaremos as relações apresentadas no Teorema 28. Aqui faremos a demonstração para a relação (i), a qual é equivalente ao Teorema de Pitágoras no plano hiperbólico, as outras não serão apresentadas.

Para tanto, veja que

$$\cosh(a) = \cosh(d_{\mathbb{H}^2}(i, ki)) = 1 + \frac{|i-ki|^2}{2k} = \frac{2k+1-2k+k^2}{2k} \Rightarrow \cosh(a) = \frac{1+k^2}{2k}$$

$$\cosh(b) = \cosh(d_{\mathbb{H}^2}(i, s+it)) = 1 + \frac{|i-(s+it)|^2}{2t} = \frac{2t+2-2t}{2t} \Rightarrow \cosh(b) = \frac{1}{t}$$

$$\cosh(c) = \cosh(d_{\mathbb{H}^2}(ki, s+it)) = 1 + \frac{|ki-(s+it)|^2}{2kt} = \frac{2kt+1-2kt+k^2}{2kt} 1 \Rightarrow \cosh(c) = \frac{1+k^2}{2kt}$$

Dessa forma,

$$\cosh(a) \cosh(b) = \frac{1+k^2}{2k} \frac{1}{t} = \frac{1+k^2}{2kt} = \cosh(c).$$

□

O Teorema a seguir garante a existência de polígono de n lados, se forem satisfeitas condições para os ângulos internos.

Teorema 30. *Considere $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ qualquer n -upla ordenada com $0 \leq \theta_j \leq \pi$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Existe um polígono P com ângulos internos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, nessa ordem na fronteira de P se, e somente se,*

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n < (n-2)\pi.$$

Figura 3.2: Quadrilátero

Demonstração. Dados $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ com cada $\theta_j \in [0, \pi)$, podemos construir quadriláteros $Q_1, Q_2 \dots Q_n$, cada um com um vértice na origem de $\mathbb{D}^2$, assim como na figura 3.2. O comprimento d é qualquer valor positivo que determinaremos mais a frente. A menos de uma rotação na origem, o quadrilátero Q_j será determinado por d e por θ_j . Unindo os quadriláteros Q_j , sem sobreposição, podemos construir o polígono P que desejamos, desde que $\sum_{j=1}^n \alpha_j = \pi$.

De fato, se considerarmos a fórmula $[(v)]$ do teorema 29 temos

$$\text{sen } \alpha_j = \frac{\cos(\frac{\theta_j}{2})}{\cosh(d)}.$$

Com isso, temos que $\alpha_j = \arcsen\left(\frac{\cos(\frac{\theta_j}{2})}{\cosh(d)}\right)$, podemos então considerar a função

$$g(t) = \sum_{j=1}^n \arcsen \frac{\cos(\frac{\theta_j}{2})}{\cosh(t)}, \quad t \geq 0 \text{ e } \arcsen \text{ com valores em } [0, \frac{\pi}{2}].$$

Note que a função g é contínua, pois ela é formada por funções contínuas (o arcsen, o cos e o cosh), além disso $g(t)$ é decrescente pois se $t \rightarrow \infty$, teremos o $\cosh(t) \rightarrow \infty$; como $0 \leq \theta_j < \pi \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \cos \frac{\theta_j}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ então $\frac{\cos \frac{\theta_j}{2}}{\cosh(t)} \rightarrow 0$ e, portanto, $g(t) \rightarrow 0$.

Devemos observar também o valor de $g(0)$:

$$g(0) = \sum_{j=1}^n \arcsen \left(\frac{\cos \frac{\theta_j}{2}}{\cosh(0)} \right) = \sum_{j=1}^n \arcsen \left(\cos \frac{\theta_j}{2} \right)$$

Lembre que se $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ então $\cos \alpha = \text{sen } \beta$, assim

$$g(0) = \sum_{j=1}^n \arcsen \left(\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_j}{2} \right) \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\pi - \theta_j}{2} \right) = \frac{1}{2} [n\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)].$$

Como, por hipótese, $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n < (n-2)\pi$, temos

$$g(0) > \frac{1}{2}[n\pi - (n-2)\pi] \Rightarrow g(0) > \pi.$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um $d > 0$ tal que $g(d) = \pi$ e $\alpha_j = \arcsen\left(\frac{\cos\frac{\theta_j}{2}}{\cosh(d)}\right)$.

□

Uma consequência do teorema anterior é a existência de um polígono P com n lados e todos os ângulos retos se, e somente se, $n \geq 5$. De fato, se todos $\theta_j = \frac{\pi}{2}$, $j = 1, 2, \dots, n$ então temos $n\frac{\pi}{2} < (n-2)\pi \Rightarrow \frac{n\pi}{2} < n\pi - 2\pi \Rightarrow 2\pi < \frac{n\pi}{2} \Rightarrow n > 4$.

A partir dessa consequência, vamos estudar algumas relações no pentágono hiperbólico. Observe a Figura 3.3, a qual representa um pentágono com quatro ângulos de medida $\frac{\pi}{2}$ e um ângulo de medida ϕ , de modo que $0 \leq \phi < \pi$.

Figura 3.3: Pentágono hiperbólico

Teorema 31. *Dado um pentágono hiperbólico, como na Figura 3.3, são válidas:*

(1) $\cosh(a) \cosh(c) + \cos \phi = \sinh(a) \cosh(b) \sinh(c)$

(2) Se $\phi = \frac{\pi}{2}$ então

(i) $\tanh(a) \cosh(b) \tanh(c) = 1$

(ii) $\sinh(a) \sinh(b) = \cosh(d)$

Demonstração. Estamos interessados no caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$, por isso iremos assumir que vale a relação (1) e provar a (2).

Para mostrar a relação (i) de (2), basta substituir ϕ por $\frac{\pi}{2}$ na relação (1), dessa forma, como $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, obtemos:

$$\cosh(a) \cosh(c) + 0 = \sinh(a) \cosh(b) \sinh(c).$$

Dividindo ambos os lados por $\cosh(a) \cosh(c)$,

$$1 = \frac{\sinh(a) \cosh(b) \sinh(c)}{\cosh(a) \cosh(c)} = \tanh(a) \cosh(b) \tanh(c).$$

Para mostrar a relação (ii) de (2), aplicamos em (i) os lados e, a, b , depois os lados c, d, e , dessa forma temos:

$$1 = \operatorname{tgh}(e) \cosh(a) \operatorname{tgh}(b) \Rightarrow \operatorname{tgh}(e) = \frac{1}{\cosh(a) \operatorname{tgh}(b)}$$

$$1 = \operatorname{tgh}(c) \cosh(d) \operatorname{tgh}(e) \Rightarrow 1 = \operatorname{tgh}(c) \cosh(d) \frac{1}{\cosh(a) \operatorname{tgh}(b)} \Rightarrow \operatorname{tgh}(c) = \frac{\cosh(a) \operatorname{tgh}(b)}{\cosh(d)}$$

Sendo assim, podemos substituir $\operatorname{tgh}(c)$ na relação (i) de (2), obtendo dessa forma

$$1 = \operatorname{tgh}(a) \cosh(b) \frac{\cosh(a) \operatorname{tgh}(b)}{\cosh(d)} \Rightarrow 1 = \frac{\sinh(a) \sinh(b)}{\cosh(d)} \Rightarrow \cosh(d) = \sinh(a) \sinh(b).$$

□

Outro resultado que precisaremos para contruir nosso hexágono está apresentado no teorema seguinte:

Teorema 32. *Sejam L_1 e L_2 duas geodésicas disjuntas em $\mathbb{H}^2$, então existe uma única geodésica a qual é ortogonal tanto a L_1 como a L_2 .*

Demonstração. Como a afirmação permanece invariante sob a ação de isometrias, podemos considerar, em $\mathbb{H}^2$, L_1 com equação $x = 0$ e L_2 com equação $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, com $a > r > 0$.

Figura 3.4: Única geodésica ortogonal a duas geodésicas dadas.

Note, na Figura 3.4, que as geodésicas ortogonais a L_1 são aquelas centradas na origem, ou seja, com equação $x^2 + y^2 = t^2$. Por outro lado, tal geodésica será ortogonal a L_2 se satisfizer $a^2 = r^2 + t^2$ (Teorema de Pitágoras do plano euclidiano), como só existe um único $t > 0$ que satisfaz a equação, a geodésica ortogonal a L_1 e L_2 é única. □

A partir dos resultados e teoremas apresentados, podemos, enfim, construir o hexágono com todos os ângulos iguais a $\frac{\pi}{2}$, como o da Figura 3.5.

Figura 3.5: Hexágono com todos os ângulos retos.

Note que se juntarmos os lados a_1 e b_1 a fim de construir um quadrilátero Q , então todos os ângulos internos de Q serão menores do que $\frac{\pi}{2}$, com isso garantimos que as geodésicas a_1 e b_1 possuem uma única perpendicular em comum de comprimento t . Dessa forma, obtemos dois pentágonos com todos os ângulos retos, podemos então, usar o teorema 31 para enunciar o seguinte resultado:

Teorema 33. *Dados três valores positivos a_1, a_2 e a_3 é verdadeira a relação*

$$\cosh(b_1) \sinh(a_2) \sinh(a_3) = \cosh(a_1) + \cosh(a_2) \cosh(a_3).$$

Demonstração. O resultado desejado segue de manipulações com as funções trigonométricas hiperbólicas. As relações apresentadas inicialmente servirão para obter o resultado final. As relações (I), (II) e (III) já foram apresentadas ao longo do capítulo, as relações (IV), (V) e (VI) estão basedas nos pentágonos da figura 3.5:

$$(I) \quad \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

$$(II) \quad \sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \sinh(b) \cosh(a)$$

$$(III) \quad \cosh(a + b) = \cosh(a) \cosh(b) + \sinh(a) \sinh(b)$$

(IV) Das relações do pentágono, dadas no Teorema 31, obtemos:

$$- \sinh(x) \sinh(a_2) = \cosh(u)$$

$$- \sinh(y) \sinh(a_3) = \cosh(v)$$

$$- \sinh(u) \sinh(t) = \cosh(a_2)$$

$$- \sinh(v) \sinh(t) = \cosh(a_3)$$

$$(V) \quad (\cosh^2(a_2) + \sinh^2(u))(\cosh^2(a_3) + \sinh^2(v)) = (\cosh(a_2) \cosh(a_3) + \sinh(u) \sinh(v))^2$$

Para demonstrar a veracidade dessa relações usaremos as quatro relações apresentadas no item anterior. Começamos substituindo $\cosh^2(a_2)$ e $\cosh^2(a_3)$:

$$\begin{aligned}
& (\sinh^2(u) \sinh^2(t) + \sinh^2(u))(\sinh^2(v) \sinh^2(t) + \sinh^2(v)) = \\
& (\sinh^2(u)(\sinh^2(t) + 1))(\sinh^2(v)(\sinh^2(t) + 1)) = \\
& \sinh^2(u) \sinh^2(v)(\sinh^2(t) + 1)^2 = \\
& \sinh^2(u) \sinh^2(v) \sinh^4(t) + 2 \sinh^2(u) \sinh^2(v) \sinh^2(t) + \sinh^2(u) \sinh^2(v).
\end{aligned}$$

Como $\sinh^2(t)$ pode ser substituído tanto por $\frac{\cosh^2(a_2)}{\sinh^2(u)}$ como por $\frac{\cosh^2(a_3)}{\sinh^2(v)}$, teremos o seguinte:

$$\begin{aligned}
& \sinh^2(u) \sinh^2(v) \frac{\cosh^2(a_2)}{\sinh^2(u)} \frac{\cosh^2(a_3)}{\sinh^2(v)} + 2 \sinh^2(u) \sinh^2(v) \frac{\cosh(a_2)}{\sinh(u)} \frac{\cosh(a_3)}{\sinh(v)} + \sinh^2(u) \sinh^2(v) = \\
& \cosh^2(a_2) \cosh^2(a_3) + 2 \sinh(u) \sinh(v) \cosh(a_2) \cosh(a_3) + \sinh^2(u) \sinh^2(v) = \\
& (\cosh(a_2) \cosh(a_3) + \sinh(u) \sinh(v))^2.
\end{aligned}$$

Como desejado.

$$(VI) \quad \sinh(a_2) \cosh(x) = (\sinh^2(a_2) + \cosh^2(u))^{\frac{1}{2}}$$

Para esse resultado, usaremos as relações do primeiro e do quarto item. Começamos calculando o $(\sinh(a_2) \cosh(x))^2$.

$$\begin{aligned}
& (\sinh(a_2) \cosh(x))^2 = \sinh^2(a_2) \cosh^2(x) = \sinh^2(a_2)(1 + \sinh^2(x)) = \\
& \sinh^2(a_2) + \sinh^2(a_2) \sinh^2(x) = \sinh^2(a_2) + \cosh^2(u).
\end{aligned}$$

E, como calculamos o quadrado de $\sinh(a_2) \cosh(x)$, temos que

$$\sinh(a_2) \cosh(x) = (\sinh^2(a_2) + \cosh^2(u))^{\frac{1}{2}}.$$

De maneira análoga, temos que é válida também

$$\sinh(a_3) \cosh(y) = (\sinh^2(a_3) + \cosh^2(v))^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que essas são equivalentes a $(\cosh^2(a_2) + \sinh^2(u))^{\frac{1}{2}}$ e a $(\cosh^2(a_3) + \sinh^2(v))^{\frac{1}{2}}$, respectivamente e obtidas da relação (I).

Agora, usando tais relações, mais as relações do pentágono, somos capazes de provar a igualdade

$$\cosh(b_1) \sinh(a_2) \sinh(a_3) = \cosh(a_1) + \cosh(a_2) \cosh(a_3).$$

Observe, primeiramente, que $b_1 = x + y$ e que $a_1 + u + v$ logo

$$\begin{aligned}
& \cosh(b_1) \sinh(a_2) \sinh(a_3) = (\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)) \sinh(a_2) \sinh(a_3) = \\
& \cosh(x) \cosh(y) \sinh(a_2) \sinh(a_3) + \sinh(x) \sinh(y) \sinh(a_2) \sinh(a_3) = \\
& (\cosh(x) \sinh(a_2))(\cosh(y) \sinh(a_3)) + (\sinh(x) \sinh(a_2))(\sinh(y) \sinh(a_3)) = \\
& (\sinh^2(a_2) + \cosh^2(u))^{\frac{1}{2}} (\sinh^2(a_3) + \cosh^2(v))^{\frac{1}{2}} + (\cosh(u))(\cosh(v)) = \\
& (\cosh^2(a_2) + \sinh^2(u))^{\frac{1}{2}} (\cosh^2(a_3) + \sinh^2(v))^{\frac{1}{2}} + \cosh(u) \cosh(v) =
\end{aligned}$$

$$\cosh(a_2) \cosh(a_3) + \sinh(u) \sinh(v) + \cosh(u) \cosh(v) =$$

$$\cosh(a_2) \cosh(a_3) + \cosh(a_1)$$

□

Dessa forma, temos que b_1 é unicamente determinado por a_1, a_2 e a_3 . Do mesmo modo, obtemos tanto b_2 como b_3 também em função dos três valores positivos dados a_1, a_2 e a_3 .

Com isso, podemos enunciar o teorema a seguir:

Teorema 34. *No plano hiperbólico, um hexágono com todos os ângulos retos é unicamente determinado, a menos de isometria, pelo comprimento de três lados alternados, os quais podem ser quaisquer três números positivos.*

Demonstração. Como visto no teorema anterior, dados a_1, a_2 e a_3 quaisquer três números maiores que 0, é possível determinar b_1, b_2 e b_3 unicamente. Falta provar que com os seis valores para os lados do hexágono é mesmo possível construí-lo como na figura 3.5. Para isso, note que escolhendo quaisquer $a_2, a_3 > 0$, temos que se b_1 é grande o bastante existe um hexágono e este é unicamente determinado por b_1, a_2 e a_3 . Observe a construção na Figura 3.6, β_1 e β_2 são ortogonais a a_2 e a_3 . Note que $a_1 = d(\beta_1, \beta_2)$ é uma função contínua de b_1 , a qual varia de 0 a ∞ quando b_1 varia também de 0 a ∞ . Portanto, para qualquer $a_1 > 0$, existe b_1 tal que um hexágono com todos os ângulos retos existe e é unicamente determinado pela tripla (a_1, a_2, a_3) a qual representa lados alternados. □

Figura 3.6: Construção do hexágono com todos os ângulos retos.

Capítulo 4

Superfícies de Riemann

Há dois séculos, entre 1851 e 1865, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) deu origem a seus trabalhos sobre superfícies. A princípio ele tomou uma superfície que recobria uma parte do plano complexo com diferentes folhas, como um possível campo de definições para funções analíticas. Sua motivação para essas ideias iniciais foi o estudo de funções algébricas ($P(x, y) = 0$, com P um polinômio nas variáveis x e y) e de integrais da forma $\int_{\gamma} R(x, y)$ chamadas de *integrais abelianas* (com γ um caminho no plano complexo, R uma função racional em x e y e além disso, y função algébrica de x).

As integrais abelianas foram muito estudadas no século XIX. Depois dos trabalhos de Niels Henrik Abel, Carl Gustav Jakob Jacobi e Karl Weierstrass, foi Riemann quem apresentou uma exposição global e sistemática sobre o tema.

Graças a Klein, Poincaré e Köbe, a teoria das superfícies de Riemann desenvolveu-se em outras direções que complementaram a Teoria da Uniformização. Em 1913, Hermann Weyl, apresentou a teoria da uniformização e de superfícies compactas com o rigor de natureza topológica, essas são as definições estudadas atualmente.

Neste capítulo, estudaremos as superfícies de Riemann e suas propriedades. Começaremos, em 4.1 com as principais definições, na seção 4.2 apresentaremos o Teorema da Uniformização, porém sem demonstrá-lo, o usaremos como base para outros resultados importantes. Já na seção 4.3, veremos métodos para representar a superfície de Riemann como espaço quociente. Para concluir, em 4.4, colocaremos uma métrica hiperbólica na superfície estudada. As referências para esse capítulo são [7], [12], [13], [15], [18] e [22].

4.1 Superfície de Riemann

Definição 35. Cartas coordenadas Sejam S um espaço topológico Hausdorff, U e V abertos de S , com $U \cap V \neq \emptyset$, existem $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ e $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas, de modo que $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ é uma troca de coordenadas. Chamamos φ e ψ de cartas coordenadas. Veja a Figura 4.1.

Definição 36. Atlas analítico: Conjunto de cartas coordenadas, o qual cobre toda a superfície, de modo que as trocas de coordenadas da definição 35 são analíticas. Chamamos de **atlas maximal** o conjunto de todos os atlas possíveis.

Figura 4.1: Cartas Coordenadas

Definição 37. Se R é um espaço topológico Hausdorff com um atlas analítico, então definimos tal superfície como **Superfície de Riemann**.

Uma Superfície de Riemann R tem dimensão complexa um e é orientável (pelas equações de Cauchy-Riemann). A superfície R é um espaço conexo com a família $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in I}$, a qual é um sistema fundamental de vizinhança em R e define uma estrutura complexa de dimensão 1, satisfazendo:

- i) Todo U_j é um aberto de R e $R = \bigcup_{j \in I} U_j$
- ii) Todo φ_j é um homeomorfismo tal que $\varphi_j: U_j \rightarrow V_j$, com V_j um aberto de $\mathbb{C}$
- iii) Se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ a aplicação $\varphi_{kj} = \varphi_k \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_k(U_j \cap U_k)$ é biholomorfa.

Veja que o plano complexo $\mathbb{C}$ é uma superfície de Riemann, cuja única carta é a $\text{Id}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Como $\mathbb{H}^2$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, então $\mathbb{H}^2$ é uma superfície de Riemann.

Teorema 38. Toda superfície S orientável sem bordo, compacta e conexa é homeomorfa a uma superfície S_g obtida por g -alças anexas à uma esfera. Dizemos que g é o gênero da superfície. Veja a Figura 4.2.

Definição 39. Uma superfície de Riemann R homeomorfa a um dos S_g é chamada uma superfície de Riemann fechada de gênero g . Se a superfície de Riemann for compacta, ela possui gênero finito.

Definição 40. Sejam R e S duas superfícies de Riemann e $f: R \rightarrow S$ uma aplicação. Diremos que f é holomorfa se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: R \rightarrow S$ é holomorfa, para toda carta (U, φ) de R e (V, ψ) de S com $f(U) \subset V$. A função f será **biholomorfa** se f for holomorfa com inversa f^{-1} holomorfa. Denotaremos por $\text{Aut}(R)$ o grupo de biholomorfismos de R .

Figura 4.2: Alças anexadas à uma esfera.

4.2 Teorema de Uniformização

O Teorema de Uniformização classifica as superfícies de Riemann simplesmente conexas a menos de biholomorfismo. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [15].

Teorema 41 (Teorema de Uniformização). *Toda superfície de Riemann simplesmente conexa é biolomrficamente equivalente a uma, e somente uma, das seguintes três superfícies de Riemann: $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}^2$.*

Esse último, $\mathbb{H}^2$, é equivalente ao disco unitário $\mathbb{D}^2$, então algumas vezes iremos considerar o disco ao invés do semiplano superior.

Veja que o teorema de uniformização só se aplica às superfícies de Riemann simplesmente conexas. O ideal seria se pudéssemos usá-lo em qualquer superfície de Riemann R . Para isso, devemos definir uma superfície de recobrimento para R , de modo que essa cobertura seja simplesmente conexa.

Definição 42. Sejam R e $\tilde{R}$ duas superfícies topológicas. Considere a aplicação contínua e sobrejetora $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$. Suponha que para todo ponto $p \in R$ existe U uma vizinhança de p tal que para toda componente conexa V de $\pi^{-1}(U)$ a restrição $\pi|_V: V \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Dizemos que $\tilde{R}$ é uma superfície de recobrimento de R . Denotaremos por $(\tilde{R}, \pi, R)$ o recobrimento de R , a aplicação de recobrimento π é a projeção de $\tilde{R}$ para R . Quando $\tilde{R}$ é simplesmente conexo, $(\tilde{R}, \pi, R)$ é um **recobrimento universal** de R . Ser um recobrimento universal é ser a “maior” superfície de recobrimento de R . Veja na figura 4.3 a definição gráfica de espaço de recobrimento.

O teorema a seguir garante que toda superfície possui um recobrimento simplesmente conexo. Por ser um resultado de topologia, não iremos apresentar a demonstração, porém esta pode ser encontrada em [12] e [15].

Teorema 43. *Toda superfície R possui um recobrimento universal.*

Teorema 44. *Se $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$ é um recobrimento e R uma superfície de Riemann, então podemos fazer $\tilde{R}$ uma superfície de Riemann de forma que $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$ seja holomorfa.*

Figura 4.3: Superfície de Recobrimento

Demonstração. Pela definição de recobrimento, conseguimos cobrir R por uma família de abertos $\{U_\alpha\}$ tais que

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup V_\alpha^i$$

e

$$\pi|_{V_\alpha^i}: V_\alpha^i \rightarrow U_\alpha$$

são homeomorfismos. Pela definição 36, existem cartas coordenadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tais que $\varphi_\alpha: U_\alpha \subset R \rightarrow \mathbb{C}$, para cada aberto da família $\{U_\alpha\}$. Definimos cartas coordenadas em $\{V_\alpha^i\}_{i,\alpha}$ por

$$\varphi_\alpha^i: V_\alpha^i \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$$

de modo que $\varphi_\alpha^i = \varphi_\alpha \circ \pi|_{V_\alpha^i}$ e $\varphi_\alpha^i \circ (\varphi_\beta^j)^{-1}$ é holomorfa. $\square$

Veja que ao tomarmos uma superfície de Riemann R , o Teorema 43 garante que existe $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$ um recobrimento de modo que $\tilde{R}$ é simplesmente conexo; em seguida, usando o Teorema 44, $\tilde{R}$ se torna uma superfície de Riemann, dessa forma temos que $\tilde{R}$ é uma superfície de Riemann e simplesmente conexa; logo, pelo Teorema de Uniformização (41), $\tilde{R}$ é biholomorficamente equivalente a $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}^2$, apenas.

4.3 Representação da Superfície de Riemann como espaço Quociente

Nesta seção, escreveremos uma superfície como um espaço quociente. Para isso, começaremos com alguns definições fundamentais.

Definição 45. Seja R uma superfície compacta e sem bordo de gênero g . Considere $p_0 \in R$. Corte R ao longo das curvas fechadas simples $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ com ponto base p_0 , conforme figura 4.2, apresentada anteriormente. O grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$ de R com ponto base p_0 é gerado pelas classes de homotopia $[A_1], [B_1], \dots, [A_g], [B_g]$ induzidos por $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ e satisfazem a relação fundamental

$$\prod_{j=1}^g [A_j][B_j][A_j]^{-1}[B_j]^{-1} = 1.$$

Dizemos que $\{[A_j], [B_j]\}_{j=1}^g$ é um sistema canônico de geradores de $\pi_1(R, p_0)$.

Definição 46. Toda aplicação $\gamma: \tilde{R} \rightarrow R$ com $\pi \circ \gamma = \pi$ é chamada de **transformação de recobrimento da cobertura** $(\tilde{R}, \pi, R)$, chamamos de Γ o conjunto de todas suas transformações de recobrimento. Pela composição de aplicações, Γ forma um grupo, o qual chamamos de **grupo de transformações de recobrimento de $(\tilde{R}, \pi, R)$** . Se $\tilde{R}$ for um recobrimento universal, então Γ será chamado de grupo de transformações de recobrimento universal.

Conhecendo o grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$ e o grupo de transformações de recobrimento Γ , podemos verificar que dada a superfície de recobrimento universal $(\tilde{R}, \pi, R)$, então $\pi_1(R, p_0)$ são isomorfos. De fato, se tomarmos $[C_0] \in \pi_1(R, p_0)$ e definirmos a ação $[C_0]_*$ em $\tilde{R}$ como sendo

$$[C_0]_* \left(\underbrace{[C, p]}_{\in \tilde{R}} \right) = \underbrace{[C_0 \cdot C, p]}_{\in \tilde{R}}$$

podemos ver que, pela definição 46, $[C_0]_* \in \Gamma$, ou seja, é uma transformação de recobrimento de $(\tilde{R}, \pi, R)$.

O Teorema a seguir é um teorema de topologia, ele engloba todas as superfícies.

Teorema 47. Se $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$ é um recobrimento universal, então existe um grupo G de homeomorfismos de $\tilde{R}$ tal que $\tilde{R}/G$ ¹ é homeomorfo a R . Além disso, o grupo G age em $\tilde{R}$

(a) propriamente descontinuamente

(b) sem pontos fixos.

Reciprocamente, se $\tilde{R}$ é uma superfície simplesmente conexa e G é um grupo de homeomorfismos de $\tilde{R}$ tal que (a) e (b) são satisfeitos, então $\tilde{R}/G := R$ é uma superfície e a projeção

$$\begin{aligned} \pi: \tilde{R} &\rightarrow \tilde{R}/G \\ p &\mapsto [\tilde{p}] \end{aligned}$$

é um recobrimento.

¹Aqui, estamos considerando $\tilde{R}/G = \{[\tilde{r}]; \tilde{r} \in \tilde{R}\}$, onde $\tilde{r}_1 \sim \tilde{r}_2$ se existe $g \in G$ tal que $g(\tilde{r}_1) = \tilde{r}_2$.

Voltando às superfícies de Riemann, temos o seguinte teorema:

Teorema 48. *Seja $(\tilde{R}, \pi, R)$ um recobrimento universal da superfície de Riemann R com grupo de transformação de recobrimento universal G . Então o quociente $\tilde{R}/G$ é uma superfície de Riemann biholomorficamente equivalente a R sob a correspondência $[\tilde{p}] \mapsto \pi(\tilde{p})$. Isto é, G é um grupo biholomorfo.*

Pelo Teorema da Uniformização e suas consequências, sabemos que toda superfície de Riemann simplesmente conexa R é biholomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, mas esse último teorema nos mostrou que R pode ser o espaço quociente $\tilde{R}/G$, ou seja, se unirmos os dois resultados, podemos escrever as superfícies de Riemann como espaços quocientes de $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ por Γ , onde Γ são os respectivos grupos de transformação. Então determinemos tais grupos. Lembre que $G \subset \text{Aut}(\tilde{R})$. Segue o Lema:

Lema 49. *Os grupos de biholomorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ são dados por:*

$$i) \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = PSL(2, \mathbb{C})$$

$$ii) \text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}.$$

$$iii) \text{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R}).$$

Demonstração. i) Demonstração apresentada na seção 1.2.

(ii) Todo elemento $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, podemos estender a um elemento de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ fazendo $\gamma(\infty) = \infty$. Daí o resultado decorre de (i).

(iii) Sabendo que $\mathbb{D}^2$ e $\mathbb{H}^2$ são biholomorfos e que a transformação de $\mathbb{H}^2$ para $\mathbb{D}^2$ dada por $T(z) = \frac{-z+i}{z+i}$ (Equação 2.1) é o biholomorfismo.

Se $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{D}^2)$, considere $\gamma(0) = \beta$ e $\gamma_1 = \frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z} \in \text{Aut}(\mathbb{D}^2)$. Seja $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \gamma \in \mathbb{D}^2$ tal que $\gamma_2(0) = 0$. O Lema de Schwarz² implica que $\gamma_2 = e^{i\theta}z$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Então se $\gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2) \Rightarrow \gamma_1 = T \circ \gamma \circ T^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D}^2)$ é transformação linear fracionária da forma $\frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc = 1$. Porém como $\gamma: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, podemos assumir que $a, b, c, d \in \mathbb{R} \rightarrow \gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$.

□

Existem três teoremas que determinam quais superfícies de Riemann possuem recobrimento universal biholomorfos a $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}^2$.

Teorema 50. *Uma superfície de Riemann R possui recobrimento universal $\tilde{R}$ biholomorfo a $\mathbb{C}$ se, e somente se, R é biholomorfo a $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} - \{0\}$ ou ao toro.*

Note que para $a \neq 1$, a aplicação $z \mapsto az + b$ tem ponto fixo em $\mathbb{C} \Rightarrow G$ só pode usar transformação do tipo $z \mapsto z + b$ (sem pontos fixos) e os subgrupos do grupo linear em $\mathbb{C}$ que agem propriamente descontinuamente são do seguinte tipo:

²Tal lema afirma o seguinte: Sendo $f: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ mapa holomorfo tal que $f(0) = 0$ então $|f(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}^2$ e $|f'(0)| \leq 1$. Além do mais, se $|f(z)| = |z|$ para $z \neq 0$ ou $|f'(0)| = 1$ então $f(z) = az$ para algum $a \in \mathbb{C}$ com $|a| = 1$.

- (i) Id;
 - (ii) $\{z \mapsto z + nb | n \in \mathbb{Z}\}$, b fixo;
 - (iii) $\{z \mapsto z + mb_1 + nb_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ fixos e linearmente independentes sobre os reais.
- Dessa forma, os possíveis quociente de $\mathbb{C}$ são, respectivamente:
- (i) o próprio $\mathbb{C}$;
 - (ii) Cilindro bi-infinito $\cong \mathbb{C}/\{z \mapsto z + nb\}$;
 - (iii) Toros.

Teorema 51. *Uma superfície de Riemann R possui recobrimento universal $\tilde{R}$ biholomorfo a $\hat{\mathbb{C}}$ se, e somente se, o próprio R é biholomorfo a $\hat{\mathbb{C}}$.*

Esse teorema é consequência do fato que $\hat{\mathbb{C}}$ só recobre ele próprio, pois toda transformação biholomorfa de $\hat{\mathbb{C}}$ tem pontos fixos e isso implica que $G \sim \text{Id} \Rightarrow \hat{\mathbb{C}}/G = \hat{\mathbb{C}}$.

As demonstrações dos teoremas (50) e (51) podem ser encontradas na seção 2.4 de [12]. O teorema seguinte será importante para os próximos capítulos e ele é consequência desses dois anteriores.

Teorema 52. *Uma superfície de Riemann R possui recobrimento universal $\tilde{R}$ biholomorfo a $\mathbb{H}^2$ se, e somente se, R não é biholomorfo a $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$ ou a um toro.*

Definição 53. Um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ que age propriamente descontinuamente e sem pontos fixos é chamado de **Grupo Fuchisiano**.

Assim, as superfície de Riemann que não são biholomorfas a $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}$ ou a um toro pode ser obtida como quociente de $\mathbb{H}^2$ por um grupo fuchisiano Γ .

Porém, existe uma ambiguidade na escolha de Γ , uma vez que podemos tomar $\alpha \circ \Gamma \circ \alpha^{-1}$, onde $\alpha \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Por isso, escolheremos α apropriadamente a seguir.

Definição 54. Um conjunto aberto F de $\mathbb{H}^2$ é um domínio fundamental de Γ se F satisfaz:

- i) $\gamma(F) \cap F = \emptyset$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \text{Id}$;
- ii) Se $\bar{F}$ é o fecho de F em $\mathbb{H}^2$, então $\mathbb{H}^2 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{F})$;
- iii) A fronteira relativa ∂F de F em $\mathbb{H}^2$ tem medida zero em relação à medida de Lebesgue de dimensão 2.

Nosso modelo geométrico usará o domínio fundamental cujas propriedades nos garantem que a superfície de Riemann $R = \mathbb{H}^2/\Gamma$ é considerada como $\bar{F}$ com pontos na ∂F identificados sobre o grupo de recobrimento Γ .

Uma maneira de construir canonicamente um domínio fundamental para Γ de R é cortar R ao longo de caminhos suaves adequados em R para obter domínios simplesmente conexos R_0 . Veja na Figura 4.4 um exemplo de uma superfície de Riemann R de gênero g , ($g \geq 2$).

4.4 Métrica Hiperbólica na Superfície de Riemann

Graças ao Teorema da Uniformização (41), toda Superfície de Riemann é biholomorfa à $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}^2$. Consideremos R uma superfície de Riemann com recobrimento universal biholomorfo à $\mathbb{D}^2$ (equivalente à $\mathbb{H}^2$) e o modelo Fuchsiano Γ de R agindo em $\mathbb{D}^2$.

Figura 4.4: $\{A_j, B_j\}_{j=1}^g$ é um sistema canônico de geradores de $\pi_1(R, p_0)$, tal que todo A_j e B_j são curvas suaves, simples com ponto base p_0 . Cortando R ao longo de todos os A_j e B_j , obtemos R_0 um domínio simplesmente conexo. A componente conexa F de $\pi^{-1}(R_0)$ é o domínio fundamental para Γ .

Tome $\pi: \mathbb{D}^2 \rightarrow R$ como sendo a projeção do disco em $R = \mathbb{D}^2/\Gamma$. Lembre que a métrica ds^2 é invariante sob a ação das isometrias e sob a ação de Γ , dessa forma, conseguimos uma métrica Riemanniana ds_R^2 em R , satisfazendo $\pi^*(ds_R^2) = ds^2$, onde π^* é o pull-back da projeção. Diremos que ds_R^2 é a métrica hiperbólica em R .

Como cada elemento $\gamma \in \Gamma$ corresponde a um elemento $[C_\gamma]$ do grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$. Então, em particular, γ determina a classe de homotopia livre de C_γ , um representante da classe $[C_\gamma]$, nesse caso, γ cobre a curva fechada C_γ . Quando γ for hiperbólico, será a projeção de uma curva L_γ em R do seu eixo A_γ .

Teorema 55. *Todo elemento de um Modelo Fuchsiano de uma superfície de Riemann fechada de gênero g ($g \geq 2$) consiste ou na identidade e em elementos hiperbólicos, apenas.*

Demonstração. Será dada a ideia da demonstração usando a geometria hiperbólica vista no capítulo 2. Se $\gamma \in \{\Gamma - Id\}$ e não tem pontos fixos, então ou γ é parabólico ou γ é hiperbólico. Lembre que $ds^2 = \frac{|dz|^2}{\text{Im}(z)^2}$ é a métrica de Poincaré em $\mathbb{H}^2$, a qual induz uma métrica hiperbólica em $R = \mathbb{H}^2/\Gamma$, onde R é a superfície de Riemann. Assumiremos que existe $\gamma_0 \in \Gamma$ de modo que $\gamma_0(z) = z + 1$, ou seja é uma translação e, portanto, um elemento parabólico.

Sejam a um número positivo e $\pi: \mathbb{H}^2 \rightarrow R$ a projeção de $\mathbb{H}^2$ em R . Em $\mathbb{H}^2$ denotamos L_a o segmento que une ia a $\gamma_0(ia)$, sendo assim, teremos o caminho fechado C_a sendo a imagem de L_a em R . Diremos que $\ell(C_a)$ é o comprimento hiperbólico de C_a .

Temos dois fatos: R é compacto, então existe uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ de números positivos tal que $a_n \rightarrow \infty$ e $\pi(ia_n) \rightarrow p_0$ quando $n \rightarrow \infty$, com $p_0 \in R$. Por outro lado, $C_{a_n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, isso decorre de

$$d_{\mathbb{H}^2}(ai, ai + 1) = \int_\gamma \frac{\|dz\|}{\text{Im } z} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{a} dt = \frac{1}{a} \ell_{euc}(\gamma)$$

onde $\ell_{euc}(\gamma) = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi R$ é o comprimento euclidiano da curva γ dado por $\left(\frac{4a}{4a^2-1}\right) \pi \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}$. Veja Figura 4.5.

Temos, portanto, $\frac{1}{a} \ell_{euc}(\gamma) \leq \frac{1}{a} \pi$, se fizermos $a \rightarrow \infty$, teremos $\frac{1}{a} \pi \rightarrow 0$. Isso mostra que se houver um elemento parabólico num grupo Fuchisiano, então existem curvas fechadas simples satisfazendo:

Figura 4.5: Curva γ_0 em $\mathbb{H}^2$

- (i) não são homotopicamente triviais e
- (ii) comprimento tende a 0.

Tomando U , um domínio simplesmente conexo que contém p_0 , então para n suficientemente grande, teremos o caminho fechado $C_{a_n} \subset U$, o que implicaria $\gamma_0 = Id$. O que é uma contradição.

Logo, $\gamma_0 \in \Gamma$ ou é a identidade ou é hiperbólico. $\square$

Proposição 56. *Seja R a superfície de Riemann com recobrimento universal $\mathbb{H}^2$ e Γ modelo Fuchsiano de R agindo em $\mathbb{H}^2$. Seja $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, um elemento hiperbólico de Γ . Denote por L_γ a geodésica fechada de R correspondente à γ . Então o comprimento de L_γ , $\ell(L_\gamma)$, satisfaz:*

$$Tr^2(\gamma) = (a + d)^2 = 4 \cosh^2 \left(\frac{\ell(L_\gamma)}{2} \right).$$

Demonstração. Lembre que $Tr^2(\gamma)$ e $\ell(L_\gamma)$ são invariantes sob a conjugação de γ por um elemento de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$. Como γ é um elemento hiperbólico, significa que a matriz associada à γ possui dois autovalores distintos, então, a menos de conjugação, podemos escrevê-la como $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, essa matriz tem $\det = 1$, ou seja, $d = 1/a, b = c = 0$. Além disso, por ser elemento hiperbólico tem a forma $\gamma(z) = \lambda z$, com $\lambda > 1$. sendo assim, tomemos $a = \sqrt{\lambda}$, $b = c = 0$ e $d = 1/\sqrt{\lambda}$.

Com a métrica do semiplano superior, temos:

$$\ell(L_\gamma) = \int_1^\lambda \frac{dy}{y} = \ln |y|_1^\lambda = \ln |\lambda| - \ln |1| = \ln(\lambda) = \ln(a^2) = 2 \ln(a).$$

Então

$$\cosh^2 \left(\frac{\ell(L_\gamma)}{2} \right) = \cosh^2(\ln(a))$$

Lembre que

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Rightarrow \cosh^2(t) = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}$$

Dessa forma, temos:

$$\cosh(\ln(a)) = \frac{e^{\ln(a^2)} + 2 + e^{-\ln(a^2)}}{4} = \frac{a^2 + 2 + 1/a^2}{4} = \frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4a^2} \Rightarrow$$

$$4 \cosh^2(\ln(a)) = \frac{(a^2 + 1)^2}{a^2} = \frac{((\sqrt{\lambda})^2 + 1)^2}{(\sqrt{\lambda})^2} = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda}.$$

Por outro lado,

$$Tr^2(\gamma) = (a + d)^2 = \left(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 = \lambda + 2 + \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda} = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda}.$$

Assim, fica comprovada a igualdade.

□

Capítulo 5

Espaço de Teichmüller

O Espaço de Teichmüller T_g da superfície de Riemann fechada de gênero g (≥ 2) R , foi introduzido por volta de 1930 por Oswald Teichmüller. Durante seis anos (1935-1941), Teichmüller escreveu trinta artigos sobre os fundamentos de sua teoria. Porém, em 1943, aos 30 anos, ele foi morto em combate. Lars Valerian Ahlfors, Lipman Bers, Harry Ernest Rauch e vários outros estudiosos iniciaram um projeto para dar continuidade às ideias de Teichmüller. Foi por volta de 1970 que William P. Thurston desenvolveu uma nova área que colocava as técnicas da geometria hiperbólica no Espaço de Teichmüller. Novos estudos envolvem o espaço de Teichmüller em diversas áreas da matemática e da física. Nesse capítulo serão apresentadas as principais ideias desse espaço. Começaremos definindo o que é o espaço de Teichmüller T_g de gênero g (≥ 2) baseado nos conceitos das superfícies de Riemann. Na seção 5.1 será estudado o Espaço de Fricke, bem como suas coordenadas. Já na seção 5.2 será possível entender a definição de calças, bem como sua existência e unicidade. Ao final queremos escrever T_g como subconjunto do Espaço de Fricke. O tema pode ser estudado em [3], [11], [12], [21] e [22].

5.1 Espaços de Teichmüller e de Fricke

Definição 57. Espaço de Teichmüller: Sejam S uma superfície compacta topológica e R uma superfície homeomorfa a S . O homeomorfismo $\varphi: S \rightarrow R$ é uma **Marcação** de R e o par (R, φ) é uma **superfície marcada**. Diremos que duas superfícies marcadas $(R_1, \varphi_1), (R_2, \varphi_2)$ são equivalentes se existe um homeomorfismo conforme $f: R_1 \rightarrow R_2$ tal que $f \circ \varphi_1 \cong \varphi_2$. O conjunto dessas superfícies marcadas será o espaço de Teichmüller, o qual denotaremos por T_g .

Definiremos as coordenadas de Fricke no Espaço de Teichmüller T_g , com $g \geq 2$ da superfície de Riemann fechada R . Lembre que existe um isomorfismo entre o grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$ e o modelo fuchsiano Γ . Denotamos por α_j e β_j os elementos de Γ correspondentes a $[A_j]$ e $[B_j]$, respectivamente, de $\pi_1(R, p_0)$, para cada $j = 1, 2, \dots, g$. Note que para qualquer $\delta \in PSL(2, \mathbb{R})$, verifica-se se $\Gamma' = \delta\Gamma\delta^{-1}$ também será modelo Fuchsiano de R . Para determinar as coordenadas de Fricke, devemos associar unicamente o modelo Fuchsiano Γ a uma marcação Σ de R , para isso devemos impor duas condições de normalização:

(i) β_g tem seu ponto fixo repulsor em 0 e seu ponto fixo atrator em ∞ , isto é $\beta_g(z) = \lambda z$ com $\lambda > 1$.

(ii) α_g tem seu ponto fixo atrator em 1.

A proposição seguinte nos garante que se os elementos α_j e β_j satisfizerem as condições (i) e (ii), então teremos uma única associação entre a marcação Σ e o modelo fuchsiano Γ .

Proposição 58. *Dada uma marcação Σ de uma superfície R de gênero g ($g \geq 2$), um sistema de geradores $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ de um modelo Fuchsiano Γ de R , o qual satisfaz as condições de normalização (i) e (ii) é unicamente determinado pelo ponto $[R, \Sigma]$ em T_g .*

Demonstração. Considere outra superfície de Riemann fechada R' com marcação Σ' e com sistema de geradores do modelo fuchsiano $\{\alpha'_j, \beta'_j\}_{j=1}^g$ que satisfazem as condições de normalização (i) e (ii). Além disso, suponha que em T_g , $[R, \Sigma] = [R', \Sigma']$. Então, como são equivalentes, existe $f: R \rightarrow R'$ uma aplicação biholomorfa tal que $f_*(\Sigma) = \Sigma'$. Seja $\tilde{f} \in PSL(2, \mathbb{R})$ um levantamento¹ de R para $\mathbb{H}^2$ (seu recobrimento) que satisfaça

$$\alpha'_j = \tilde{f} \circ \alpha_j \circ \tilde{f}^{-1} \quad \beta'_j = \tilde{f} \circ \beta_j \circ \tilde{f}^{-1}.$$

De (i), devemos ter $\tilde{f}(z) = \mu z$, $\mu > 0$ (e, portanto, $\tilde{f}^{-1}(z) = \frac{1}{\mu}z$) e de (ii) temos que α_g e α'_g possuem o mesmo ponto fixo 1. Então:

$$\alpha'_g(1) = \tilde{f} \circ \alpha_g \circ \tilde{f}^{-1}(1) = 1 \Rightarrow \tilde{f}\left(\alpha_g\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) = 1 \Rightarrow \mu \alpha_g\left(\frac{1}{\mu}\right) = 1 \Rightarrow \alpha_g\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}$$

Isso nos mostra que $\frac{1}{\mu}$ é ponto fixo de α_g e, portanto, $\mu = 1$.

Logo, $\tilde{f}(z) = Id$.

Sendo assim, $\alpha'_j = \tilde{f} \circ \alpha_j \circ \tilde{f}^{-1} = \alpha_j$ e $\beta'_j = \tilde{f} \circ \beta_j \circ \tilde{f}^{-1} = \beta_j$. Ou seja, a marcação $[R, \Sigma]$ determina um único modelo fuchsiano. $\square$

O sistema de geradores $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ que satisfaz as condições (i) e (ii) será chamado de **sistema canônico de geradores** e o grupo Fuchsiano Γ , será denominado **modelo Fuchsiano normalizado** de $[R, \Sigma]$.

O sistema canônico de geradores satisfaz:

$$\prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] = Id,$$

onde

$$[\alpha_j, \beta_j] = \alpha_j \circ \beta_j \circ \alpha_j^{-1} \circ \beta_j^{-1} \quad (5.1)$$

O sistema canônico de geradores $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ do modelo Fuchsiano normalizado Γ para um ponto $[R, \Sigma]$ em T_g é escrito de forma única como sendo:

$$\alpha_j = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}, \quad a_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}, \quad c_j > 0, \quad a_j d_j - b_j c_j = 1,$$

$$\beta_j = \frac{a'_j z + b'_j}{c'_j z + d'_j}, \quad a'_j, c'_j, d'_j \in \mathbb{R}, \quad c'_j > 0, \quad a'_j d'_j - b'_j c'_j = 1,$$

¹Um levantamento de um caminho C em R é um caminho $\tilde{C}$ em $\tilde{R}$ com $\pi \circ \tilde{C} = C$.

para cada $j = 1, 2, \dots, g - 1$.

Definição 59. Definimos as coordenadas de Fricke $\mathcal{F}_g: T_g \rightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$ por

$$\mathcal{F}_g([R, \Sigma]) = (a_1, c_1, d_1, a'_1, c'_1, d'_1, \dots, a_{g-1}, c_{g-1}, d_{g-1}, a'_{g-1}, c'_{g-1}, d'_{g-1}).$$

A imagem $F_g = \mathcal{F}_g(T_g)$ é o espaço de Fricke das superfícies fechadas de Riemann de gênero g .

Teorema 60. A aplicação das coordenadas de Fricke $\mathcal{F}_g: T_g \rightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$ é injetora.

Demonstração. Primeiramente, observe que para α_j vale $a_j d_j - b_j c_j = 1$, do mesmo modo, para β_j vale $a'_j d'_j - b'_j c'_j = 1$ para $j = 1, 2, \dots, g - 1$. Com isso, b_j e b'_j ficam unicamente determinados $\Rightarrow \alpha_j$ e β_j , para $j = 1, 2, \dots, g - 1$ são únicos.

Devemos mostrar que α_g e β_g também são unicamente determinados. Para isso utilizaremos as condições de normalização (i) e (ii) apresentadas acima.

Note que para β_g satisfazer a condição de normalização (i) devemos ter

$$\beta_g = \lambda z \tag{5.2}$$

com $\lambda > 1$, pois assim, fazendo $z = 0$ e $z = \infty$ teremos que 0 e ∞ serão pontos fixos:

$$z = 0 \rightarrow \beta_g z = 0, \quad e \quad (\beta_g)^{-n} = (\lambda z)^{-n} = \frac{1}{\lambda^n} z^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$z = \infty, \rightarrow \beta_g z = \infty \quad e \quad (\beta_g)^n = (\lambda z)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Agora, usando a condição de normalização (ii), temos:

$$\alpha_g(z) = \frac{a_g z + b_g}{c_g z + d_g} \Rightarrow \alpha_g(1) = \frac{a_g + b_g}{c_g + d_g} = 1 \Rightarrow a_g + b_g = c_g + d_g \tag{5.3}$$

Considere

$$\gamma = \prod_{j=1}^{g-1} [\alpha_j, \beta_j],$$

onde γ é elemento do modelo Fuchisiano. Lembre, de 5.1, que $\prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] = Id$.

Com isso, obtemos $\gamma \circ \alpha_g = \beta_g \circ \alpha_g \circ \beta_g^{-1}$. De fato, de (5.1), temos

$$\underbrace{\alpha_1 \circ \beta_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \beta_1^{-1} \circ \dots \circ \alpha_{g-1}^{-1} \circ \beta_{g-1}^{-1} \circ \alpha_g \circ \beta_g \circ \alpha_g^{-1} \circ \beta_g^{-1}}_{\gamma \circ \alpha_g} = Id. \Rightarrow \gamma \circ \alpha_g = \beta_g \circ \alpha_g \circ \beta_g^{-1}.$$

Por γ ser elemento do modelo Fuchisiano ele é da forma $\gamma = \frac{az+b}{cz+d}$, então

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_g & b_g \\ c_g & d_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_g & b_g \lambda \\ \frac{c_g}{\lambda} & d_g \end{bmatrix}$$

Note que a matriz do segundo membro veio da composição $\beta_g \circ \alpha_g \circ \beta_g^{-1}$, onde β_g e α_g foram definidos em (5.2) e (5.3), respectivamente e $\beta_g^{-1} = \frac{1}{\lambda} z$.

Da igualdade das matrizes, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} a_g(a-1) + bc_g = 0 & (I) \\ b_g(a-\lambda) + bd_g = 0 & (II) \\ ca_g + (d - \frac{1}{\lambda})c_g = 0 & (III) \\ cb_g + d_g(d-1) = 0 & (IV) \end{cases}$$

Note que $a_g \neq 0$ ou $c_g \neq 0$. Das equações (I) e (III) (pode ser verificado a partir das equações (II) e (IV) também) do sistema e da relação $ad - bc = 1$, obtemos

$$c_g = -\frac{\lambda ca_g}{\lambda d - 1} \quad \lambda d \neq 1$$

Substituindo em (I)

$$a_g(a-1) - b \left(\frac{\lambda ca_g}{\lambda d - 1} \right) = 0 \Rightarrow a_g \left(a - 1 - \frac{b\lambda c}{\lambda d - 1} \right) = 0$$

$$\frac{a_g}{\lambda d - 1} (a\lambda d - a - \lambda d + 1 - b\lambda c) = 0$$

Como $\frac{a_g}{\lambda d - 1} \neq 0$ então

$$(a\lambda d - a - \lambda d + 1 - b\lambda c) = 0 \Rightarrow \lambda(ad - bc) - a - \lambda d + 1 = 0 \Rightarrow \lambda(1 - d) - a + 1 = 0$$

E, portanto,

$$\lambda(1 - d) = a - 1.$$

Observe que se $a = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow Tr^2(\gamma) = 4 \Rightarrow \gamma$ é parabólica ou a identidade. O que é uma contradição, pois já vimos no teorema 55 que γ é hiperbólica, além disso, se $\gamma = \text{Id} \Rightarrow \gamma[\alpha_g, \beta_g] = 1 \Rightarrow [\alpha_g, \beta_g] = 1$, mas $\beta_g(z) = \lambda z$ e $\alpha_g(z)$ tem 1 como ponto fixo $\Rightarrow \alpha_g, \beta_g$ não comutam pois não tem os mesmos pontos fixos.

Sendo assim, devemos ter

$$a \neq 1 \Rightarrow d \neq 1 \Rightarrow \lambda = \frac{a-1}{1-d}.$$

Dessa forma, temos β_g unicamente determinado: $\beta_g = \lambda z = \frac{a-1}{1-d}z$. Além disso, obtemos

$$a_g = \frac{bc_g}{1-a} \quad e \quad d_g = \frac{bc}{1-d}$$

Dessas equações e de (5.3) concluímos que α_g é unicamente determinado. Assim, mostramos que a aplicação é injetora. $\square$

5.2 Existência e Unicidade de Calças

Nesta seção iremos decompor a superfície de Riemann em pequenos pedaços, chamados de calças. Tal decomposição será feita através de cortes ao longo de geodésicas.

Definição 61. Uma calça é uma superfície de Riemann de gênero 0, com três fronteiras geodésicas.

Em outras palavras, imagine que calças são blocos de construção para construir a superfície de Riemann, dessa forma, localmente, as calças são isométricas ao espaço hiperbólico. Como as fronteiras são geodésicas, a Figura 5.1 representa três modelos de calças.

Figura 5.1: A figura da esquerda mostra uma calça com métrica hiperbólica. A do meio, métrica euclidiana. E na figura da direita vemos um componente de fronteira e dois cúspides, ou seja, a fronteira se afasta para o infinito.

As calças são peças naturais para as superfícies de Riemann, isso quer dizer, são as únicas superfícies hiperbólicas, compactas com fronteira geodésicas que não podem mais ser simplificadas por corte em geodésica.

Elas tem a propriedade de serem determinadas pelo comprimento de suas fronteiras. Uma maneira para entender é pensando, no espaço hiperbólico, na seguinte situação: Note que ao ir num alfaiate pedir uma calça, deve-se informar o comprimento das bocas e da cintura, assim a calça fica determinada. Aqui a ideia é a mesma: dado três valores reais positivos, é possível construir a calça.

Para fazer tal construção, usaremos os hexágonos hiperbólicos com ângulos retos construídos no capítulo 3, esses vão servir como padrão para construção das calças. Pois, a partir daí, conseguimos construir as calças unicamente determinadas. Para isso, considere a Figura 5.2.

Figura 5.2: Hexágono com todos seus ângulos internos retos.

Note que se refletirmos o hexágono obtido na Figura 5.2 em relação ao diâmetro do disco, conseguimos um hexágono hiperbólico fechado. A ideia é que usando elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$,

colamos os pedaços desse hexágono hiperbólico fechado, formando uma superfície Γ_0 como na Figura 5.3, este será o único par de calças obtido a partir dessa colagem. A seguir, provaremos o teorema que nos garante que a calça é unicamente determinada pelos seus comprimentos de fronteira, antes precisamos da seguinte definição:

Figura 5.3: Hexágono Hiperbólico fechado

Definição 62. Sejam P um par de calças fixado da superfície de Riemann R , Γ o modelo Fuchsiano de R agindo em $\mathbb{D}^2$ e $\pi: \mathbb{D}^2 \rightarrow R \equiv \mathbb{D}^2/\Gamma$ sua projeção. Seja $\tilde{P}$ um componente conexo de $\pi^{-1}(P)$. Chamaremos de $\Gamma_{\tilde{P}}$ o subgrupo de Γ , tal que todos os elementos $\gamma_{\tilde{P}}$ de $\Gamma_{\tilde{P}}$ satisfazem $\gamma_{\tilde{P}}(\tilde{P}) = \tilde{P}$. Dessa forma, $\Gamma_{\tilde{P}}$ será um grupo livre gerado por duas transformações hiperbólicas. Como $R = \mathbb{D}^2/\Gamma$, podemos ver que $P = \tilde{P}/\Gamma_{\tilde{P}}$. Considere $\hat{P} = \mathbb{D}^2/\Gamma_{\tilde{P}}$. $\hat{P}$ é uma superfície de P , na qual foram anexadas regiões conexas adequadas em todas as suas fronteiras. P será uma subsuperfície de $\hat{P}$ e, mais do que isso, o único par de calças de $\hat{P}$. Dizemos que $\hat{P}$ é a extensão de Nielsen de P .

A Figura 5.4 ilustra a definição.

Figura 5.4: Extensão de Nielsen

A definição 62 será usada na demonstração do teorema a seguir:

Teorema 63. *A estrutura complexa do par de calças P é unicamente determinada pelo comprimento hiperbólico do seus elementos de fronteira.*

Demonstração. Seja P um par de calças dado arbitrariamente e a_j o comprimento hiperbólico da fronteira L_j , para $j = 1, 2, 3$ de P .

Considere $\hat{P}$ a extensão de Nielsen de P e Γ_0 o modelo Fuchsiano agindo em $\mathbb{H}^2$. Suponha Γ_0 gerado por $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ de modo que γ_k cobre a curva L_k , com $k = 1, 2$ (Na seção 4.4, vimos que o elemento γ_j de Γ cobre a reta L de $\mathbb{H}^2$). Além disso, considere $\gamma_3 = \gamma_2 \circ \gamma_1$ cobrindo L_3 . Se mostrarmos que γ_1 e γ_2 são unicamente determinados por a_j , então γ_3 também será.

Assuma

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \lambda^2 z & 0 < \lambda < 1 \\ \gamma_2 &= \frac{az+b}{cz+d} & ad - bc = 1 \quad c > 0\end{aligned}$$

Vamos representar γ_1, γ_2 e γ_3 como matrizes.

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\lambda & \frac{b}{\lambda} \\ c\lambda & \frac{d}{\lambda} \end{bmatrix}$$

De acordo com a proposição 56, temos:

$$Tr^2(\gamma_1) = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 = 4 \cosh\left(\frac{a_1}{2}\right)$$

$$Tr^2(\gamma_2) = (a + d)^2 = 4 \cosh\left(\frac{a_2}{2}\right)$$

$$Tr^2(\gamma_3) = \left(a\lambda + \frac{d}{\lambda}\right)^2 = 4 \cosh\left(\frac{a_3}{2}\right)$$

Logo, a estrutura complexa fica unicamente determinada. □

Figura 5.5: J_P é uma reflexão de P .

Corolário 64. *Cada par de calças P tem um automorfismo J_p de ordem 2. Além disso, o conjunto $F_{J_p} = \{z \in P | J_p(z) = z\}$ dos pontos fixos de J_p consiste nas três geodésicas $\{D_j\}_{j=1}^3$ em P satisfazendo: Para cada $J = 1, 2, 3$, D_j tem as extremidades e é ortogonal a L_j e a L_{j+1} . Consideramos $L_4 = L_1$. J_p será uma reflexão de P . Veja Figura 5.5.*

Capítulo 6

Coordenadas de Fenchel-Nielsen

Na seção 5.1, escrevemos o espaço de Teichmüller T_g como subconjunto do Espaço de Fricke do Espaço Euclidiano de dimensão $6g - 6$. Agora definiremos novas coordenadas para T_g usando Geometria Hiperbólica. Além disso, na seção 5.2 vimos que podemos decompor a superfícies de Riemann em calças através de cortes em suas geodésicas.

Neste capítulo, queremos fazer o contrário: colar as calças (pelas fronteiras), adequadamente, de modo a reconstruir a superfície. Os parâmetros para esta colagem serão o comprimento de cada fronteira e a torção, já que podemos “girar” a calça para colar. Precisamos formalizar todos esses conceitos e definições, além de verificar que, de fato, formam um sistema de coordenadas em T_g . A seção 6.1 introduzirá um conceito importante para o estudo da colagem das calças: a torção de Dehn. Em 6.2 entenderemos mais profundamente como é feita a decomposição em calças da superfícies de Riemann. As seções seguintes, 6.3 e 6.4 apresentarão os parâmetros citados anteriormente. Encerraremos com a apresentação do sistema de coordenadas de Fenchel-Nielsen. Boas referências para o tema são [9], [10], [12] e [22].

6.1 Torção de Dehn

Em 1938, Max Dehn (1878-1952) um matemático alemão, aluno de David Hilbert introduziu o conceito de “torção de Dehn” (em inglês conhecido como *Dehn’s Twist*). Inicialmente, Dehn apresentou tais ideias usando o termo “*Schraubungen*”, ou seja, aplicação parafuso.

A torção de Dehn é um homeomorfismo em si próprio.

Considere o anel $A = S^1[0, 1]$ com orientação padrão do plano. Seja $T: A \rightarrow A$ uma aplicação de torção dada por

$$T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t) \quad \text{ou} \quad T(\theta, t) = (\theta - 2\pi t, t)$$

No primeiro caso, a rotação é para esquerda, enquanto que no segundo, para direita. Em ambos, T é um homeomorfismo que preserva a orientação.

Ao aplicar essa ideia para uma curva simples e fechada $\alpha \in S$, com S sendo uma superfície orientada e fechada, devemos tomar V uma vizinhança tubular de α e ϕ um homeomorfismo que preserva a orientação tal que $\phi: A \rightarrow V$, dessa forma, $T_\alpha: S \rightarrow S$ é um homeomorfismo

chamado de **Torção de Dehn** sobre a curva α , que satisfaz

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & \text{se } x \in V \\ x & \text{se } x \in S - V \end{cases}$$

Note que a aplicação T_α age apenas em V , mantendo o resto da superfície inalterada.

Dentro da mesma classe de isotopia, T_α não depende da escolha de α , então T_α será bem definido sobre essa classe de equivalência.

A Torção de Dehn se apresenta de várias maneiras: sobre toro, por corte e colagem, pela inclusão de homeomorfismo ou por ação nas curvas fechadas simples.

Focaremos no modo de corte e colagem. Neste caso, considere a curva β fechada e simples em S e uma curva α em S a qual será usada para cortar a superfície, assim como mostra na figura 6.1 na parte superior a esquerda. Dessa forma, ao cortar a superfície S ao longo da curva α , esta se torna fronteira de S . Tomando uma vizinhança de um dos lados da fronteira α , torcemos essa vizinhança através de um ângulo de 2π e então recolamos a superfície S através da fronteira, como pode ser visto na figura 6.1. Veja que é muito importante torcer **apenas** a vizinhança de α , para não recair no homeomorfismo identidade de S .

Figura 6.1: Torção de Dehn

Segue da definição que a Torção de Dehn tem ordem infinita e a conjugação de várias Torções de Dehn, resulta numa Torção de Dehn.

6.2 Decomposição em Calças

Fixe um ponto $[R, \Sigma]$ de T_g , $g \geq 2$. Considere todas as geodésicas simples, fechadas e disjuntas duas a duas, denominadas por L_j . O conjunto $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^N$ será o sistema de decomposição de curvas em R e a família $\mathcal{P} = \{P_k\}_{k=1}^M$ será formada pelas calças resultantes dos cortes ao longo de cada L_j .

Veja que definimos a quantidade de geodésicas como sendo N e a quantidade de calças sendo M . A proposição a seguir definirá o valor de N e de M em função do gênero g da superfície.

Proposição 65. *Seja $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^N$ um sistema de curvas de decomposição numa superfície R fechada de Riemann de gênero g ($g \geq 2$) e seja $\mathcal{P} = \{P_k\}_{k=1}^M$ a decomposição em calças de R correspondente a $\mathcal{L}$. Então N (número máximo de geodésicas possíveis) e M (quantidade de*

calças) satisfazem:

$$N = 3g - 3 \qquad M = 2g - 2$$

Demonstração. Demonstraremos usando indução finita em M .

Figura 6.2: Decomposição em Calças

Veja que na figura 6.2 que para $g = 2$, temos 2 calças, então $M = 2(2) - 2 = 2$ verifica a afirmação da proposição.

Suponha que vale para uma superfície de gênero g , vamos mostrar que vale para superfície de gênero $(g + 1)$. Para cada gênero a mais, significa que a superfície tem um “furo” a mais (Veja Definição 39), assim, conseguiremos 2 calças a mais. Logo para superfície de gênero $(g + 1)$

$$M = \underbrace{(2g - 2)}_{\substack{\text{Quantidade} \\ \text{de calças na} \\ \text{superfície de} \\ \text{gênero } g}} + 2 = (2g + 2) - 2 = 2(g + 1) - 2.$$

Satisfazendo a proposição.

Sabendo que $M = 2g - 2$ e que cada calça possui 3 fronteiras, temos $(2g - 2) \cdot 3 = 6g - 6$, porém, contamos cada fronteira duas vezes, uma vez que ao cortar ao longo de geodésicas formamos fronteiras para duas calças. Sendo assim,

$$N = \frac{6g - 6}{2} = 3g - 3.$$

Chegando assim no resultado que queríamos. □

Agora, como já sabemos quantas calças e quantas geodésicas temos, vamos estudar os dois parâmetros mencionados no início do capítulo.

6.3 Funções do comprimento das Geodésicas

Lema 66. *Toda função comprimento de geodésica $\ell_j(t)$ é analítica real em F_g .*

Antes da demonstração do Lema 66, seguem alguns conceitos.

Primeiramente, lembre-se que ser função real analítica, de acordo com a definição 7 é uma função em $\mathbb{C}$, diferenciável infinitamente. Ser “Real analítica”, significa que a função retorna valores reais, em outras palavras, a parte imaginária é nula.

Definição 67. Uma função analítica é uma função que pode ser localmente expandida em série de Taylor. Uma função real analítica é dada por $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, com D um conjunto aberto na reta e f uma função infinitamente derivável, tal que para todo $x_0 \in D$, existe V_{x_0} uma vizinhança de $x_0 \subset D$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Da definição 59, F_g é o espaço de Fricke, o qual é a imagem da função $\mathcal{F}_g: T_g \rightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$, então fixe um ponto $[R, \Sigma] \in T_g$ e $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^N$ um sistema de decomposição de curvas de R . Para cada ponto t em F_g denote por $[R_t, \Sigma_t]$ o ponto correspondente em T_g , ou seja, $\mathcal{F}_g([R_t, \Sigma_t]) = t \in F_g \subset \mathbb{R}^{6g-6}$, com isso, obtemos $\mathcal{L}_t = \{L_j(t)\}_{j=1}^N$ o sistema de decomposição de curvas de R_t unicamente determinado.

Podemos considerar $f_t: R \rightarrow R_t$ um homeomorfismo que preserva a marcação, logo, tendo fixado $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^N$ para R , conseguimos determinar $\mathcal{L}_t = \{L_j(t)\}_{j=1}^N$ unicamente para R_t , de modo que para cada L_j em $\mathcal{L}$, $L_j(t)$ seja a única geodésica fechada que satisfaz $f_t(L_j) = L_j(t)$ em R_t . Assim, podemos ver que $L_j(t)$ irá satisfazer as mesmas propriedades de L_j , ou seja, $L_j(t)$ será simples e para $j \neq k$ temos $L_j(t)$ e $L_k(t)$ disjuntas. Portanto, vale o que foi afirmado anteriormente: $\mathcal{L}_t = \{L_j(t)\}_{j=1}^N$ é sistema de decomposição de curvas em R_t .

Sendo Γ_t o modelo Fuchsiano de R_t , veja que $L_j(t)$ é a projeção do eixo de um elemento γ_t de Γ_t , o qual cobre $f_t(L_j)$, já que este se mantém invariante sob γ_t , para todo j .

Denotaremos, para todo $t \in F_g$ e para todo j , o comprimento hiperbólico $\ell(L_j(t))$ de $L_j(t)$ por $\ell_j(t)$.

Note que o que fizemos até aqui foi tomar t em F_g , este estava associado a $[R_t, \Sigma_t] \in T_g$. Existe Γ_t modelo Fuchsiano de R_t , o elemento $\gamma_t \in \Gamma_t$ cobre a geodésica $L_j(t)$ de R_t , assim será possível calcular o comprimento da geodésica $L_j(t)$, a qual está ainda associada à geodésica L_j de uma superfície R fixada.

Então $\ell_j(t)$ será uma função em F_g e chamaremos de função comprimento de geodésica para L_j . Da proposição 56 demonstraremos o lema do início da seção.

Demonstração do Lema 66. Sendo $\gamma(t)$ elemento hiperbólico de Γ_t , $\gamma_t = \frac{az+b}{cz+d}$ então

$$\begin{aligned} Tr^2(\gamma_t) &= 4 \cosh\left(\frac{\ell_j(t)}{2}\right) \Rightarrow \frac{Tr^2(\gamma_t)}{4} = \cosh\left(\frac{\ell_j(t)}{2}\right) \\ &\Rightarrow 2 \operatorname{arccosh}\left(\frac{Tr^2(\gamma_t)}{4}\right) = \ell_j(t) \\ &\Rightarrow \ell_j(t) = 2 \ln\left(\frac{Tr^2(\gamma_t)}{4} + \frac{\sqrt{Tr^2(\gamma_t) - 4}}{2}\right) \end{aligned}$$

Como a função $\ln$ pode ser escrita como série de potência, então $\ell_j(t)$ é real analítica. $\square$

6.4 Parâmetros de Torção

Outro parâmetro para as coordenadas de Fenchel-Nielsen são as torções, ou seja “girar” as calças para colar as fronteiras e reconstruir a superfície. Nesta seção, bem como na anterior, provaremos o seguinte lema:

Lema 68. Para cada j , $e^{i\theta_j(t)}$ é bem definida e real-analítica em F_g .

Para isso, considere $\mathcal{P} = \{P_k\}_{k=1}^M$ a família de calças formadas pelos cortes ao longo de geodésicas.

Tome a geodésica L_j , ao cortar a superfície, L_j se torna a fronteira de duas calças, denotaremos por $P_{j,1}$ e $P_{j,2}$. Serão considerados os casos em que $P_{j,1} = P_{j,2}$ e $P_{j,1} \neq P_{j,2}$.

Pelo Corolário 64, $P_{j,1}$ e $P_{j,2}$ admitem reflexão J_1 e J_2 , respectivamente. Tome c_k um ponto fixo de J_k em L_j para cada calça $P_{j,k}$, com $k = 1, 2$.

Figura 6.3: Calça $P_{j,k}$ com sua reflexão.

De acordo com a Figura 6.3, temos a geodésica $D_{j,k}$ do corolário 64 que possui os pontos fixos, portanto, passa por $c_{j,k}$ e as extremidades em duas geodésicas, as quais serão $L_j(\ni c_{j,k})$ e $L_{j,k}$. $D_{j,k}$ é ortogonal à L_j e à $L_{j,k}$.

Do mesmo modo que fizemos para a *Função Comprimento de Geodésica*, podemos considerar t um ponto de F_g e seu correspondente $[R_t, \Sigma_t]$ de T_g , a superfície R_t e as calças $P_{j,1}(t)$ e $P_{j,2}(t)$ são unicamente determinadas por $P_{j,1}$ e $P_{j,2}$. Segue que é possível indicar unicamente $L_j(t)$, $c_{j,k}(t)$, $L_{j,k}(t)$ e $D_{j,k}(t)$ de R_t correspondentes à L_j , $c_{j,k}$, $L_{j,k}$ e $D_{j,k}$ de R , respectivamente para cada $k = 1, 2$.

Em $L_j(t)$, chame $T_j(t)$ o arco orientado de $c_{j,1}(t)$ para $c_{j,2}(t)$. Há duas observações:

- i) $\tau_j(t)$ será o comprimento hiperbólico de $T_j(t)$.
- ii) $L_j(t)$ tem sua própria orientação vinda de L_j , então, $\tau_j(t)$ será positivo se a orientação de $T_j(t)$ for a mesma que de $L_j(t)$, ou será negativa, caso as orientações de $T_j(t)$ e $L_j(t)$ sejam contrárias.

Sendo $\tau_j(t)$ o comprimento hiperbólico de um arco de $L_j(t)$ e $\ell_j(t)$ o comprimento hiperbólico total de $L_j(t)$, temos

$$\tau_j(t) = \frac{\theta_j(t)}{2\pi} \ell_j(t),$$

onde $\theta_j(t)$ é o ângulo central do arco de comprimento hiperbólico $\tau_j(t)$, conforme Figura 6.4.

Figura 6.4: Comprimento de arco

Assim,

$$\theta_j(t) = 2\pi \cdot \frac{\tau_j(t)}{\ell_j(t)}$$

será o parâmetro de torção em relação à L_j .

Com o parâmetro de torção definido, podemos demonstrar o Lema 68 do início da seção.

Demonstração do Lema 68. A demonstração será feita para um j fixo,

Para cada t de F_g , considere Γ_t o modelo Fuchsiano associado. Sejam $\gamma_j(t)$ e $\gamma_{j,k}(t)$ elementos de Γ_t que cobrem $L_j(t)$ e $L_{j,k}(t)$, respectivamente, para $k = 1, 2$.

Além disso, sejam $A_j(t)$ e $A_{j,k}(t)$ os eixos de $\gamma_j(t)$ e $\gamma_{j,k}(t)$, respectivamente.

A escolha de $\gamma_{j,k}(t)$ deve satisfazer também o fato de que a geodésica $\tilde{D}_{j,k}$ unindo $A_j(t)$ e $A_{j,k}(t)$ com comprimento mínimo seja a projeção de $D_{j,k}(t)$.

Os pontos fixos de $\gamma_j(t)$ são dados por

$$\gamma_j(t)(z) = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j} = z \Rightarrow a_j z + b_j = c_j z^2 + d_j z$$

$$c_j z^2 - (a_j - d_j)z - b_j = 0$$

Por Bháskara, temos:

$$\Delta = (a_j - d_j)^2 - 4c_j(-b_j)$$

$$\Delta = a_j^2 - 2a_j d_j + d_j^2 + 2b_j c_j + 2b_j c_j$$

$$\Delta = a_j^2 + d_j^2 - 2 \underbrace{(a_j d_j - b_j c_j)}_{=1} + 2 \underbrace{(a_j d_j - 1)}_{=b_j c_j}$$

$$\Delta = (a_j + d_j)^2 - 4$$

$$z = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a_j + d_j)^2 - 4}}{2c_j}$$

$$z = \frac{a_j - d_j}{2c_j} \pm \frac{\sqrt{(a_j + d_j)^2 - 4}}{2c_j}$$

Como o elemento é hiperbólico, $(a_j d_j)^2 > 4$ e, portanto, $\sqrt{(a_j + d_j)^2 - 4}$ é bem definida. Dessa forma o ponto fixo de $\gamma_j(t)$ é real-analítico em F_g . (Veja que só depende de a, c e d).

Ao tomarmos uma conjugação que leva $\gamma_j(t)$ em $\tilde{\gamma}_j(t)(z) = \lambda_j(t)z$, os pontos fixos de $\tilde{\gamma}_{j,k}(z)$ também irão se deslocar de maneira real analítica.

Depois dessas considerações, queremos mostrar que $e^{i\theta_j(t)}$ é real analítica em F_g . A função e^x é real analítica e na função $\theta_j(t) = 2\pi \frac{\tau_j(t)}{\ell_j(t)}$, temos 2π é constante e $\ell_j(t)$ é real analítica (Lema 66). Então, queremos que $\tau_j(t)$ também seja. Para tal, basta verificar se $\tilde{c}_{j,k}(t)$ se movem de maneira real analítica em F_g .

Fixe k e seja p_1 e p_2 os pontos fixos de $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ (Não se esqueça que vimos que os pontos fixos de $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ se movem de maneira real analítica em F_g). Considere $\tilde{c}_{j,k} = iy_k, (y_k > 0)$, como na Figura 6.5.

Figura 6.5: $\tilde{c}_{j,k}$ se move de maneira real analítica.

Na Figura 6.5, destacamos o triângulo $\triangle OMB$:

- $\angle B$ é, por definição, reto. ($\tilde{D}_{j,2} \perp A_{j,2}(t)$);
- $\overline{BO} = y_k$;
- $\overline{OM} = \frac{p_1 + p_2}{2}$ (já que M é o centro da reta $A_{j,2}(t)$ e tem como extremidade os pontos fixos p_1 e p_2);
- $\overline{MB} = \frac{p_2 - p_1}{2}$ (raio da reta $A_{j,2}(t)$).

Aplicando o Teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2 = y_k^2 + \left(\frac{p_2 - p_1}{2}\right)^2$$

$$y_k = \sqrt{p_1 p_2}$$

Como p_1 e p_2 se movem real analiticamente, $\tilde{c}_{j,k} = iy_k$ também ira se mover dessa forma. Fazendo isso para cada k , então $\tau_j(t)$ (Lembre: $\tau_j(t)$ = distância hiperbólica de $\tilde{c}_{j,1}$ a $\tilde{c}_{j,2}$) será real analítica. Com isso, concluímos que $e^{i\theta(t)}$ é real analítica, uma vez que foi provado que $\theta_j(t)$ é real analítica. $\square$

6.5 Coordenadas de Fenchel-Nielsen

Considerando $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ e $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} | \|z\| = 1\}$, já foi possível definir uma aplicação

$$\begin{aligned} \Psi: F_g &\rightarrow (\mathbb{R}^+)^{3g-3} \times (\mathbb{S}^1)^{3g-3} \\ t &\mapsto (\ell_1(t), \dots, \ell_{3g-3}(t), e^{i\theta_1(t)}, \dots, e^{i\theta_{3g-3}(t)}) \end{aligned}$$

que é real analítica.

Considere a aplicação $\tilde{\Psi}(t) = (\ell_1(t), \dots, \ell_{3g-3}(t), \theta_1(t), \dots, \theta_{3g-3}(t))$, a qual também será real-analítica em F_g .

Chamaremos essas coordenadas de $\tilde{\Psi}$ de **Coordenadas de Fenchel-Nielsen** de T_g associadas à decomposição de calças $\mathcal{P}$ (Vale dizer, também, que as coordenadas estão associadas ao sistema de decomposição de curvas $\mathcal{L}$).

O objetivo da dissertação era juntar ferramentas e conceitos para demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 69. *A aplicação $\tilde{\Psi}$ é um homeomorfismo de F_g para $(\mathbb{R}^+)^{3g-3} \times (\mathbb{S}^1)^{3g-3}$. Em particular, $\tilde{\Psi}$ é um sistema de coordenadas locais em F_g , e portanto, em T_g .*

Na demonstração usaremos o conceito de **Torção de Dehn**, cuja definição foi apresentada na seção 6.1

Demonstração do teorema 69: Primeiramente mostraremos que $\tilde{\Psi}$ é injetora:

Para isso, suponha $\tilde{\Psi}(t_1) = \tilde{\Psi}(t_2)$ para t_1 e t_2 em F_g . Queremos mostrar que t_1 será igual a t_2 .

Pelo Teorema 60, temos que para cada $t \in F_g$, temos uma superfície de Riemann $R_t \in T_g$ com sua devida marcação Σ_t . Portanto, considere R_{t_1} e R_{t_2} as superfícies de Riemann associadas a t_1 e a t_2 , respectivamente (cada uma com sua marcação natural). Consideraremos $\mathcal{P}_1 = \{P_k(1)\}_{k=1}^{3g-3}$ e $\mathcal{P}_2 = \{P_k(2)\}_{k=1}^{3g-3}$ as decomposições em calças de R_{t_1} e R_{t_2} , respectivamente.

Vimos, no teorema 63 que dados três comprimento hiperbólicos da fronteira, a calça será unicamente determinada, além disso, suponha que existe, para todo k , g_k , uma aplicação conforme (ou seja, tal aplicação preserva os ângulos), de modo que $g_k: P_k(1) \rightarrow P_k(2)$. Sendo ds_i^2 a métrica hiperbólica em R_{t_i} , ($i = 1, 2$), temos $ds_1^2 = (g_k) * (ds_2^2)$, ou seja, $ds_1^2 = ds_2^2(g_k)$. Isso quer dizer que a métrica hiperbólica em $z \in P_k(1)$ é igual à métrica hiperbólica em $g(k) \in P_k(2)$.

Em $P_k(1)$, considere $c_{k,1}$ e $c_{k,2}$ dois pontos da mesma componente de fronteira $L_{j,k}(1)$ como no Lema da Torção (68). Analogamente, em $P_k(2)$, tome os pontos $g_k(c_{k,1})$ e $g_k(c_{k,2})$ do mesmo componente de fronteira $L_{j,k}(2)$, sendo $j = 1, \dots, 3g - 3$ para todo k .

A distância hiperbólica $\tau_k(1)$ de $c_{k,1}$ até $c_{k,2}$ com a métrica ds_1^2 será igual a distância hiperbólica $\tau_k(2)$ de $g_k(c_{k,1})$ até $g_k(c_{k,2})$ com a métrica ds_2^2 , dessa forma garantimos que $\tau_k(1) =$

$\tau_k(2)$. Usando a mesma ideia, concluímos que $\ell_{j,k}(1) = \ell_{j,k}(2)$, onde $\ell_{j,k}(i)$ representa o comprimento total da geodésica $L_{j,k}(i)$, para $i = 1, 2$.

Dessa forma,

$$\theta_j(1) = 2\pi \frac{\tau_k(1)}{\ell_{j,k}(1)} = 2\pi \frac{\tau_k(2)}{\ell_{j,k}(2)} = \theta_j(2).$$

Assim, $\theta_j(t_1) = \theta_j(t_2)$. Note que $R_{t_1} = \bigcup P_k(1)$ e $R_{t_2} = \bigcup P_k(2)$ e que todo g_k pode ser colado em um homeomorfismo h que preserva a orientação, tal que $h: R_{t_1} \rightarrow R_{t_2}$, será uma aplicação biholomorfa, resultando que $t_1 = t_2$.

Já sabendo que $\tilde{\Psi}$ é injetora, falta mostrar que ela é sobrejetora. Para isso, começamos fixando um ponto qualquer $(a_1, \dots, a_{3g-3}, \alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) \in (\mathbb{R}^+)^{3g-3} \times (\mathbb{S}^1)^{3g-3}$.

Denotaremos por $\{L_{k,j}\}_{j=1}^3$ as componentes de fronteiras da calça $P_k \in \mathcal{P}$ e por $L_j \in \mathcal{L}$ uma geodésica da superfície de Riemann R .

Conforme visto na Seção 5.2, existe um único par de calças, P'_k tal que a tripla de comprimento hiperbólico dos componentes de fronteira de P'_k é dada por uma tripla $(a_{k,1}, a_{k,2}, a_{k,3})$. Considere a família $\mathcal{P}' = \{P'_k\}_{k=1}^{3g-3}$.

Ao cortar ao longo da geodésica L_j , obtemos duas calças que serão denotadas por $P'_{j,1}$ e $P'_{j,2}$ (note que cada calça possui dois índices: o primeiro (j) indica que ela foi obtida pela geodésica L_j ; o segundo (1 ou 2) identifica as duas calças obtidas). Seja ainda $c'_{j,l}$ um ponto da fronteira de $P'_{j,l}$, para $l = 1, 2$ e para todo j .

Respeitando as fronteiras L_j , colamos $P'_{j,1}$ e $P'_{j,2}$, com isso obtemos R' uma superfície de Riemann. Este é o ponto onde queríamos chegar: A partir de duas calças construir uma superfície de Riemann através da colagem de suas fronteiras.

Mas não podemos fazer uma colagem arbitrária. Devemos nos preocupar em escolher uma marcação de R' e uma colagem adequadas, de modo a fazer com que R' corresponda à t' de F_g , ou seja, $\tilde{\Psi}(t') = (a_1, \dots, a_{3g-3}, \alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3})$. O modo de construir será que ao colar $P'_{j,1}$ e $P'_{j,2}$ os parâmetros de torção sejam os α'_j s dados, para todo j .

Consideraremos $P'_{j,1} \neq P'_{j,2}$ e a construção será feita usando modelos Fuchsianos.

Para começar, fixemos j e seja $\Gamma_{j,k}$ o modelo Fuchsiano da extensão de Nielsen $\hat{P}_{j,k}$ de $P'_{j,k}$. Assumiremos o seguinte:

- i) Todo $\Gamma_{j,k}$ age em $\mathbb{H}^2$;
- ii) A transformação $\gamma(z) = \lambda z$, $\lambda = e^{aj} > 1$ pertence à $\Gamma_{j,1}$ e a $\Gamma_{j,2}$ e γ cobre $L'_{j,k}$ de $P'_{j,k}$, para $k = 1, 2$;
- iii) A orientação do eixo $A = \{z \in \mathbb{H}^2 | z = iy, y > 0\}$ de γ corresponde à orientação de L_j ;
- iv) O ponto $i \in \mathbb{H}^2$ encontra-se sobre $c'_{j,k}$ com respeito à $\Gamma_{j,k}$ para cada k .

Com isso, considere $d_j = e^{\frac{a_j \alpha_j}{2\pi}}$ e o elemento $\delta(z) = d_j z$, $d_j > 0$ do $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$.

Então, identificaremos os elementos da fronteira da seguinte forma:

De acordo com a suposição (ii) acima, γ pertence à $\Gamma_{j,1}$ e a $\Gamma_{j,2}$. Considere o $\gamma \in \Gamma_{j,2}$, identificaremos todo z em seu eixo, com $\delta(z) = d_j z$ no eixo de $\gamma \in \Gamma_{j,1}$, conforme a Figura 6.6.

Dessa forma, temos uma colagem de $P'_{j,1}$ e $P'_{j,2}$ (pelas fronteiras $L'_{j,1}$ e $L'_{j,2}$) tal que o comprimento de translação de $c'_{j,1}$ e $c'_{j,2}$ é a distância hiperbólica, em $\mathbb{H}^2$, de $c'_{j,1} = i$ até

Figura 6.6: Elementos de Fronteira

$c'_{j,2} = \delta(i) = ie^{\frac{\alpha_j a_j}{2\pi}}$, como visto na seção 2.2.1, devemos ter:

$$\tau(t) = d(c'_{j,1}, c'_{j,2}) = \ln \left(\frac{c'_{j,2}}{c'_{j,1}} \right) = \ln \left(\frac{ie^{\frac{\alpha_j a_j}{2\pi}}}{i} \right) = \ln(e^{\frac{\alpha_j a_j}{2\pi}}) = \frac{\alpha_j a_j}{2\pi}.$$

Para provar que $\tilde{\Psi}$ é sobrejetora, fixe um homeomorfismo $h: R \rightarrow R'$ de modo que R é a superfície inicial e R' é a superfície obtida pela colagem e tal que $h(P_k) = P'_k$, para $k = 1, \dots, 2g - 2$.

Dessa forma, $[R', h_*(\Sigma)]$ é um ponto de T_g , o qual denotaremos por t' , assim

$$\ell_j(t') = a_j \quad j = 1, \dots, 3g - 3 \quad \text{e}$$

$$\theta_j(t') = 2\pi \frac{\tau_j(t')}{\ell_j(t')} = \frac{2\pi}{a_j} \frac{\alpha_j a_j}{2\pi} \pmod{2\pi} \quad j = 1, \dots, 3g - 3$$

Como a escolha de $\theta_j(t')$ não é única, ainda não podemos afirmar que $\theta_j(t') = j$.

Considerando $T_j: R' \rightarrow R'$ a torção de Dehn em relação à L'_j , podemos encontrar $n_1, \dots, n_{3g-3}$ inteiros tais que

$$[R', (T_1^{n_1} \circ \dots \circ T_{3g-3}^{n_{3g-3}} \circ h)_*(\Sigma)]$$

correspondentes a um ponto que denotaremos por t'' e satisfaz

$$\tilde{\Psi}(t'') = (a_1, \dots, a_{3g-3}, \alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}).$$

Comprovando que $\tilde{\Psi}$ é sobrejetora.

Como $\tilde{\Psi}$ é injetora, sobrejetora e real analítica (portanto, contínua), concluimos que $\tilde{\Psi}$ é um homeomorfismo

□

Referências Bibliográficas

- [1] L.V AHLFORS. *Complex Analysis*. Harward University, 1979.
- [2] James W. ANDERSON. *Hyperbolic geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.
- [3] Alan F. BEARDON. Springer-Verlag New York Inc, 1983.
- [4] Francis BONAHOE. *Low-dimensional geometry*. Student Mathematical Library. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2009. From Euclidean surfaces to hyperbolic knots, IAS/Park City Mathematical Subseries.
- [5] Manfredo P. CARMO. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, 2012.
- [6] Andrew J. CASSON and Steven A. BLEILER. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [7] Ruel V. CHURCHILL and James Ward BROWN. *Complex variables and applications*. McGraw-Hill Book Co., New York, eighth edition, 2009.
- [8] Franciéli DURAN. Transformações de möbius e inversões., 2013. Orientador: Prof. Dr. Thiago de Melo.
- [9] Benson FARB and Dan MARGALIT. *A primer on mapping class groups*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [10] Bruno Z. FELIPPE. Coordenadas do espaço de teichmüller., 2006. Orientador: Prof. Dr. Francisco Dutenhefner.
- [11] John H. HUBBARD. *Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics*. Matrix Edition, 2006.
- [12] Y. IMAYOSHI and M. TANIGUCHI. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, Tokyo, 1992.
- [13] M. A. LAVRÉNTIEV and B. V. SHABAT. *Métodos de la teoría de las funciones de una variable compleja*. Editorial Mir, Moscow, 1991. Translated from the Russian by Irina A. Stekólnikova.
- [14] E.; ALVAREZ A. LEYS, J.; GHYS. Dimensions. <http://www.dimensions-math.org/>.

- [15] Carlos Matheus. O teorema de ahlfors e bers.
<http://cmssmatheus.wordpress.com/2009/03/06/o-teorema-de-ahlfors-e-bers>.
- [16] S. PLAZA. Notas de aula - topología y geometría (prof. victor guíñez): Cap. 6 - métricas riemannianas, 2010.
- [17] A.M. REFATTI, L. e BELTRAME. Funções hiperbólicas e cabos pendentes, 2012.
- [18] A.A. M. RODRIGUES. *Teoria das Superfícies de Riemann*. 2º colóquio brasileiro de Matemática. Poços de Calda, MG., 1959.
- [19] S. O.; LIMA NETO S. C.; SOARES Carlos Humberto SILVA, A. A. E.; JURIAANS. *Noções básicas de geometria hiperbólica*. 2º colóquio de Matemática da Região Nordeste. UFPI. Piauí, 2012.
- [20] U. SODRÉ. Matemática essencial: Ensino superior.
<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/>.
- [21] William P. THURSTON. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [22] Éber D.C. VIZARRETA. Elementos da teoria de teichmüller, 2012. Orientador: Prof. Dr. Igor Mencattini.