**Condições de otimalidade, qualificação e métodos tipo Lagrangiano
Aumentado para Problemas de Equilíbrio de Nash Generalizados**

Frank Navarro Rojas

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Gabriel Heaser
Coorientador: Prof. Dr. Luís Felipe Bueno

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES/CNPq

São Paulo, 14 de Março de 2018

Condições de otimalidade, qualificação e métodos tipo Lagrangiano Aumentado para Problemas de Equilíbrio de Nash Generalizados

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 14/03/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Gabriel Haeser (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Ernesto G. Birgin - IME-USP
- Prof. Dr. Antoine Laurain - IME-USP
- Prof. Dr. José Mario Martínez - Unicamp
- Prof. Dr. Jefferson D. G. Melo - UFG

Agradecimentos

Toda mi gratitud a mi familia que siempre me apoyo en este proyecto, especialmente a mi madre Victoria, mi tia katy, mi tio Henry, mi tia Mary, Joseph, Alison a mis primos y a parte de mi familia que esta Huancayo. Toda mi educación es fruto del apoyo de mi familia, todo mi reconocimiento y respeto a ellos.

Também quero agradecer a meus amigos Alexander, Marlon, Mario, Helder , Melba, Mery, a Fabiana , a meu orientador da licenciatura o professor Efrain carbajal, a meu orientador do mestrado o professor Tomas Nuñez e a professora Roxana Lopez.

Agradeço a meu orientador o professor Gabriel pela confiança de poder me deixar escolher e desenvolver o tema que chamou minha curiosidade, por sua disposição para discutir os temas da pesquisa, pelo incentivo para participar dos seminários de otimização, minha admiração por ser um brilhante matemático, a meu coorientador Felipe, pelos seus conselhos e pela a sua disposição de tempo para discutir minhas ideias por sua amabilidade e gentileza em todo momento.

Minha gratidão aos amigos da UNMSM desde os tempos de estudante da graduação em matemática e do mestrado em matemática aplicada.

Agradeço ao programa de pós-graduação em Matemática Aplicada do IME-USP, por ter me oferecido a oportunidade de realizar este doutorado. Agradeço também à CNPQ e CAPES pelo auxílio financeiro.

Muito obrigado Brasil !

Resumo

Navarro, F. **Condições de otimalidade, qualificação e métodos tipo Lagrangiano Aumentado para Problemas de Equilíbrio de Nash Generalizados**. 2017. 120 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Esta tese é um estudo acerca do Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado (GNEP). Na primeira parte, faremos um resumo dos principais conceitos sobre GNEPs, a relação com outros problemas já conhecidos e comentaremos brevemente os principais métodos já feitos até esta data para resolver numericamente este tipo de problema. Na segunda parte, estudamos condições de otimalidade e condições de qualificação (CQ) para GNEPs, fazendo uma analogia como em otimização. Estendemos os conceitos de cone tangente, normal, gerado pelas restrições ativas, linearizado e polar para a estrutura dos GNEPs. Cada CQ de otimização gera dois tipos de CQ para GNEPs, sendo que a denotada por CQ-GNEP é mais forte e útil para a análise de algoritmos para GNEPs. Mostramos que as condições de qualificação para GNEPs deste tipo em alguns casos não guardam a mesma relação que em otimização. Estendemos também o conceito de Aproximadamente Karush-Kuhn-Tucker (AKKT) de otimização para GNEPs, o AKKT-GNEP. É bem conhecido que AKKT é uma genuína condição de otimalidade em otimização, mas para o caso dos GNEPs mostramos que isto não ocorre em geral. Por outro lado, AKKT-GNEP é satisfeito, por exemplo, em qualquer solução de um GNEP conjuntamente convexo, desde que seja um equilíbrio b -variacional.

Com isso em mente, definimos um método do tipo Lagrangiano Aumentado para o GNEP usando penalidades quadráticas e exponenciais e estudamos as propriedades de otimalidade e viabilidade dos pontos limites de sequências geradas pelo algoritmo. Finalmente alguns critérios para resolver os subproblemas e resultados numéricos são apresentados.

Palavras-chave: Condições de otimalidade, Condições de qualificação, Método Lagrangiano Aumentado, Problemas de Equilíbrio de Nash Generalizados.

Abstract

Navarro, F. **Optimality conditions, constraint qualifications and Augmented Lagrangian-type methods for Generalized Nash Equilibrium Problems** . 2017. 120 f. Thesis (Ph.D) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

This thesis is a study about the generalized Nash equilibrium problem (GNEP). In the first part we will summarize the main concepts about GNEPs, the relationship with other known problems and we will briefly comment on the main methods already done in order to solve these problems numerically. In the second part we study optimality conditions and constraint qualification (CQ) for GNEPs making an analogy with the optimization case. We extend the concepts of the tangent, normal and generated by the active cones, linear and polar cone to the structure of the GNEPs. Each optimization CQ generates two types of CQs for GNEPs, with the one called CQ-GNEP being the strongest and most useful for analyzing the algorithms for GNEPs. We show that the qualification conditions for GNEPs of this type in some cases do not have the same relation as in optimization. We also extend the Approximate Karush- Kuhn-Tucker (AKKT) concept used in optimization for GNEPs to AKKT-GNEP. It is well known that AKKT is a genuine optimality condition in optimization but for GNEPs we show that this does not occur in general. On the other hand, AKKT-GNEP is satisfied, for example, in any solution of a jointly convex GNEP, provided that it is a b-variational equilibrium.

With this in mind, we define Augmented Lagrangian methods for the GNEP, using the quadratic and the exponential penalties, and we study the optimality and feasibility properties of the sequence of points generated by the algorithms. Finally some criteria to solve the subproblems and numerical results are presented.

Keywords: Optimality conditions, Constraint qualifications, Augmented Lagrangian methods, Generalized Nash Equilibrium Problem.

Sumário

Lista de Abreviaturas	ix
Lista de Símbolos	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Contribuições	2
1.3 Organização do Trabalho	2
2 Preliminares sobre problemas de otimização	5
2.1 Problema de otimização	5
2.1.1 Condições de otimalidade de primeira ordem	6
2.1.2 Condições de qualificação	8
2.1.3 Condições sequenciais de primeira ordem e CQs associadas	10
2.2 Métodos de Penalidades e Lagrangiano Aumentado para problemas de otimização . .	12
2.2.1 Métodos de penalidades	12
2.2.2 Método de Lagrangiano Aumentado	14
3 Problemas de Equilíbrio de Nash Generalizados	19
3.1 Jogos de Estratégia e Equilíbrio de Nash	19
3.2 Equilíbrio de Nash Generalizado	22
3.2.1 Reformulações de GNEPs	26
3.2.2 Sistema KKT para GNEPs	34
3.2.3 Algumas aplicações do GNEP	38
4 Condições de otimalidade e condições de qualificação para GNEPs	41
4.1 Condições de otimalidade de primeira ordem	41
4.2 Condições de qualificação para GNEPs	44
4.3 Condições sequenciais para GNEPs	51
5 Métodos tipo Lagrangiano aumentado para resolver GNEPs	59
5.1 Método de Lagrangiano aumentado com solução global para NEPs	59
5.2 Método de Lagrangiano aumentado para GNEPs	62

5.3	Lagrangiano aumentado usando penalidade exponencial.	73
6	Resolvendo os subproblemas e Testes numéricos	77
6.1	Resolvendo os subproblemas	77
6.1.1	Penalização total	77
6.1.2	Penalização parcial	85
6.1.3	Testes numéricos	87
7	Conclusões	93
7.1	Sugestões para Pesquisas Futuras	93
	Referências Bibliográficas	95

Lista de Abreviaturas

AKKT	Condição aproximadamente KKT (<i>Approximate KKT</i>)
AKKT-GNEP	Condição aproximadamente KKT para GNEPs (<i>Approximate KKT for GNEP</i>)
CCP	Propriedade da Continuidade do Cone (<i>Cone-Continuity Property</i>)
CCP-GNEP	Propriedade da Continuidade do Cone para GNEP (<i>Cone-Continuity Property for GNEP</i>)
CPLD	Condição de Dependência Linear Positiva Constante (<i>Constant positive linear dependence</i>)
CPLD-GNEP	Condição de Dependência Linear Positiva Constante para GNEP (<i>Constant positive linear dependence for GNEP</i>)
CQ	Condições de Qualificação (<i>Constraint Qualification</i>)
CQ-GNEP	Condições de Qualificação para GNEP (<i>Constraint Qualification for GNEP</i>)
GNEP	Problema de equilíbrio de Nash Generalizado (<i>Generalized Nash Equilibrium Problem</i>)
MFCQ	Condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz
NEP	Problema de equilíbrio de Nash (<i>Nash Equilibrium Problem</i>)
QVI	Desigualdade Quase-Variacional (<i>Quasi-Variational Inequality</i>)
VI	Desigualdade Variacional (<i>Variational Inequality</i>)

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de dimensão n .
$\mathbb{R}_+^n$	Subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado pelos vetores cujos componentes são números não negativos.
$\mathbb{R}_{++}^n$	Subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado pelos vetores cujos componentes são números são positivos.
$\mathbb{B}(x, \delta)$	Bola fechada de centro x e raio δ .
$\langle x, y \rangle$	Produto interno dos vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$.
$\ x\ $	Norma euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$, $\ x\ := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
$P(C)$	Cone polar associado ao conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$.
$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} F(x)$	Limite exterior da multifunção F em $\bar{x}$.
$\max\{x, y\}$	O máximo entre x e y , componente a componente.
$T_X(x)$	Cone tangente de X em x .
$N_X(x)$	Cone normal de X em x .
$L_X(x)$	Cone tangente linearizado de X em x .
$K_X(x)$	Cone gerado pelos gradientes das restrições ativas em x .
$\alpha(x)$	Subconjunto de índices das restrições ativas de desigualdades em x .

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

6.1	Penalidade quadrática.	87
6.2	Penalidade exponencial.	88
6.3	Penalidade quadrática.	88
6.4	Penalidade exponencial.	88
6.5	Penalidade exponencial.	89
6.6	Penalidade quadrática.	89
6.7	Penalidade quadrática.	89
6.8	Penalidade exponencial.	90
6.9	Penalidade quadrática.	90
6.10	Penalidade exponencial.	90

Capítulo 1

Introdução

John Forbes Nash (1928-2015) ampliou a teoria de Von Neumann e Morgenstern, desenvolvida no clássico “Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico” em 1944 [VNM07]. Nash provou a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não-cooperativos denominado Equilíbrio de Nash e sugeriu uma abordagem de estudo de jogos cooperativos, a partir de sua redução para a forma não cooperativa [N⁺50]. Desde o começo, os problemas de Equilíbrio de Nash (NEP) foram amplamente usados para modelar situações e fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais “agentes de decisão” (jogadores) interagem entre si buscando otimizar seus ganhos.

O conceito de Equilíbrio de Nash como solução de um NEP foi provado ser eficiente, aplicável e rico de consequências teóricas e práticas. A teoria do Equilíbrio de Nash foi generalizada por Debreu e formalmente abordada em seu trabalho “Um teorema de existência social de equilíbrio”, em 1952, quando foi introduzido o termo equilíbrio social [Deb52]. Esta generalização leva à interação dos jogadores, não só nas funções objetivas, mas também aos conjuntos viáveis de cada jogador. Esse trabalho serviu de base matemática para Arrow e Debreu escreverem o artigo, “Existência de um Equilíbrio para Economia Competitiva”, em 1954 [AD54], onde se estabelece a existência de um equilíbrio geral em uma economia competitiva.

Após o trabalho de Arrow e Debreu, pesquisadores em diferentes áreas usaram o equilíbrio social para modelar diferentes situações, principalmente em economia. Durante esses anos posteriores o equilíbrio social também recebeu os nomes de pseudo-jogos, programa de equilíbrio, economia abstrata e problemas de equilíbrio com restrições acopladas. Atualmente, todos esses nomes foram unificados em: Problemas de Equilíbrio de Nash Generalizados (GNEP). A partir da década de 90, o GNEP passou a ser aplicado fora do âmbito econômico, como em ciências da computação, pesquisa operacional, engenharia das telecomunicações, problemas de transporte, análise de mercados, geração de eletricidade e em cenários de poluição entre outros. Desta forma, surgiu a necessidade de desenvolvimento de algoritmos para o cálculo de pontos de equilíbrio. Em [FK10a] e [FHS14], muitas referências de aplicações dos GNEPs podem ser encontradas, assim como um resumo dos principais algoritmos até o ano de 2013 para os GNEPs.

Neste trabalho, primeiramente definimos e estudamos condições de otimalidade e de qualificação para GNEPs fazendo uma analogia com problemas de otimização. Conceitos como cone tangente, normal e linearizado são definidos e relações similares com otimização são apresentadas. Uma condição tipo Guignard é apresentada e provamos que esta é a condição mínima que garante a validade das condições Karush-Kuhn-Tucker para GNEPs (KKT-GNEP) em um ponto de equilíbrio.

Condições de qualificação (CQ) em otimização são condições que, satisfeitas em uma solução, garantem KKT. Aqui estendemos algumas CQ importantes considerando a natureza dos GNEP e discutimos a relação entre estas. O conceito de Aproximadamente KKT (AKKT) dado para problemas de otimização será estendido para GNEPs e provamos que neste caso, em geral, não é uma condição de otimalidade. Definimos a noção de Propriedade Contínua do Cone (CCP) para GNEPs e estabelecemos sua relação com AKKT para GNEPs.

Por fim, apresentamos um algoritmo tipo Lagrangiano Aumentado (LAM-GNEP) para achar um ponto KKT de um GNEP. Este algoritmo foi motivado por um algoritmo tipo penalidade para

desigualdades quase variacionais (QVI) estudado em [Kan16]. Nós desenvolvemos o método usando funções de penalidade quadrática e exponencial e provamos convergência global a um ponto KKT do GNEP usando a condição de qualificação CCP para o GNEP. Semelhante ao caso de otimização, o algoritmo resolve GNEPs nos subproblemas que são, em geral, mais fáceis de resolver que o GNEP original. Um algoritmo similar usando a função de penalidade quadrática, mas com resultados de convergência usando CQs mais fortes, foram desenvolvidos independentemente em [KS16].

1.1 Objetivos

O objetivo da tese é o estudo acerca do Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado.

Principalmente dois aspectos são abordados. O primeiro é de tipo qualitativo, na qual estudamos condições de otimalidade e qualificação para GNEPs fazendo uma analogia com o caso de otimização. O segundo é de tipo algorítmico, onde definimos métodos tipo Lagrangiano Aumentado usando tanto uma função de penalidade quadrática quanto de exponencial para achar um ponto KKT de um GNEP. Vantagens e desvantagens são analisadas e a implementação numérica de alguns exemplos da literatura são usados para fazer uma breve comparação do método em ambos os casos.

1.2 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

- Fornecemos um resumo dos principais métodos desenvolvidos até agora para resolver numericamente um GNEP. Analisamos a relação dos GNEPs com outros tipos de problemas bem conhecidos de otimização que podem ser úteis para estudos futuros de propriedades qualitativas, assim como para o desenvolvimento de novos tipos de algoritmos para GNEPs,
- Apresentamos um estudo sobre condições de otimalidade para GNEPs análogas as em otimização. Conceitos como AKKT são estendidos para GNEPs e mostramos que esta condição é uma condição de otimalidade para alguns tipo de GNEPs, mas não no geral, ao contrário do que ocorre em otimização. Condições de qualificação para GNEPs são definidas no mesmo sentido que em otimização e pode-se dizer que, quando satisfeitas em uma solução, garantem AKKT para GNEP. Nós vimos que para o caso dos GNEPs, para cada CQ fixada de otimização, duas condições de qualificação para GNEPs podem ser definidas, mas só uma delas é usada para poder ter resultados análogos como em otimização e podem ser usadas para provar convergência de algoritmos.
- Apresentamos o método Lagrangiano Aumentado usando tanto uma função quadrática como uma função exponencial. Estudamos resultados de otimalidade e viabilidade do algoritmo, assim como apresentamos critérios úteis para poder resolver os subproblemas que o algoritmo gera em cada iteração.

1.3 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 faremos uma revisão das condições de otimalidade, das principais condições de qualificação, assim como também de condições sequenciais de otimalidade de primeira ordem para otimização encontradas na literatura como, por exemplo, AKKT. Finalmente, lembramos dos métodos de penalidade externa e interna, assim como do método de Lagrangiano Aumentado para otimização.

No Capítulo 3 faremos uma revisão sobre os conceitos mais importantes para GNEPs, dos principais algoritmos para a resolução numérica desses tipos de problema, assim como a sua conexão com outros problemas em otimização e finalmente damos algumas aplicações de GNEPs.

No Capítulo 4 estudaremos condições de otimalidade, condições de qualificação e estendemos o conceito de AKKT para GNEPs. Mostraremos que AKKT, diferente do que acontece em otimização, não resulta ser uma condição sequencial de otimalidade para um GNEP em geral. Este fato nos permite tirar algumas conclusões sobre o desempenho do método de Lagrangiano Aumentado aplicado ao GNEP.

No Capítulo 5 apresentaremos o método do Lagrangiano Aumentado para GNEPs como uma extensão do clássico e importante método de Lagrangiano aumentado em otimização. Usamos primeiro uma penalidade de tipo quadrático e no segundo caso uma função de penalidade exponencial. Estudaremos propriedades de otimalidade e viabilidade dos pontos limites de sequências geradas pelo algoritmo e analisaremos a aplicação do método em alguns casos importantes, mostramos que assim como acontece em otimização o método também gera sequências AKKT, mas como AKKT para GNEPs não é uma condição de otimalidade, o método aplicado para um GNEP geral, resulta ter certas diferenças com o caso de otimização.

No Capítulo 6 daremos alguns critérios para a resolução dos subproblemas, principalmente discutimos os subproblemas quando é feita uma penalização total nos subproblemas do método, i.e, quando temos nos subproblemas NEPs irrestritas. Analisamos a aplicação do método de Newton semi diferenciável, e suavizamos por meio de uma aproximação cúbica o sistema KKT não diferenciável dos subproblemas. Também damos alguns critérios quando os subproblemas são NEPs irrestritas ou GNEPs simples. Por último, implementaremos o método em Matlab e testaremos alguns exemplos conhecidos da literatura de GNEPs.

Finalmente, no Capítulo 7 discutiremos algumas conclusões obtidas neste trabalho. Analisamos as vantagens e desvantagens do método proposto e propomos novos temas de pesquisa para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares sobre problemas de otimização

Este capítulo está dedicado a apresentar um resumo sobre alguns conceitos fundamentais e atuais da teoria de otimização. Conceitos como condições de otimalidade, condições de qualificação e condições sequenciais de otimalidade são apresentados. Estes conceitos são relevantes porque além de proporcionar uma base teórica com respeito às propriedades de soluções e pontos estacionários do problema de otimização (2.1.1), também podem ser aplicados com sucesso no estudo da convergência de algoritmos iterativos em otimização. Alguns destes conceitos já foram estendidos a outras áreas de otimização como desigualdades variacionais, desigualdades quase variacionais, problemas complementários, problemas de otimização com restrições de cardinalidade e outros. No Capítulo 3 nós estendemos os conceitos mais importantes desde capítulo para a estrutura de um GNEP.

2.1 Problema de otimização

Consideremos o problema de otimização não linear

$$\min_x f(x) \quad \text{sujeito a} \quad g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (2.1.1)$$

onde $f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções continuamente diferenciáveis, f é chamada função objetivo e as g_i são as funções de restrição. Por simplicidade não consideraremos restrições de igualdade, mas todos os resultados dados aqui são estabelecidos também quando restrições de igualdade são consideradas. O problema (2.1.1) fornece um modelo matemático usado em diversas áreas da ciências e da engenharia para modelar diversos fenômenos nessas áreas. Uma ampla teoria já foi desenvolvida tanto do ponto de vista analítico quanto algorítmico e constantes trabalhos são apresentados a cada ano que contribuem para enriquecer a teoria já feita.

Alguns casos particulares importantes de (2.1.1) já foram estudados em detalhe, como os problemas de programação linear, onde a função objetivo assim com as funções restrição são lineares, assim como os problemas de programação convexa onde a função objetivo assim como as restrições são funções convexas.

O conjunto viável para o problema (2.1.1) é o conjunto formado por todos os pontos que satisfazem as restrições de desigualdade e é dado por

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Se $x \in W$, dizemos que x é um ponto viável para o problema (2.1.1). Seja x um ponto viável, denotamos e definimos por $\alpha(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} : g_i(x) = 0\}$ o conjunto de índices das restrições ativas em x . Uns dos objetivos principais da teoria de otimização é achar e caracterizar as soluções do problema (2.1.1). A seguir definimos as noções de solução para este problema.

Definição 2.1.1. (*Mínimo local e mínimo global*) Seja $x^* \in W$,

- x^* é chamado um ponto de mínimo local de (2.1.1) se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in W \cap B(x^*, \epsilon)$$

- x^* é chamado de mínimo global se:

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in W$$

- x^* é chamado um ponto de mínimo local estrito se

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \neq x^*, \quad x \in W \cap B(x^*, \epsilon).$$

Analogamente para um mínimo global estrito.

2.1.1 Condições de otimalidade de primeira ordem

Condição de otimalidade é qualquer condição satisfeita por todas soluções do problema (2.1.1). Por exemplo, a viabilidade e a otimalidade local são condições de otimalidade. Entretanto, a primeira é muito fraca e a segunda de difícil verificação, e então, pouco auxiliam na busca de candidatos à soluções. Apresentamos condições de otimalidade razoavelmente fortes para mínimos locais. Algumas dessas condições de otimalidade podem ser usadas para desenvolver algoritmos cujos pontos limites satisfazem tal condição, e também como critérios de parada aceitáveis em um processo iterativo.

Uma condição de otimalidade importante no desenvolvimento de condições de qualificação para o problema (2.1.1) é a condição geométrica. Para poder estabelecer esta condição, define-se o cone tangente que considera-se os vetores que tangenciam ou “penetram” em W .

Definição 2.1.2. (Cone tangente)

Seja $\bar{x} \in W$, o cone tangente a W em $\bar{x}$ é denotado por $T_W(\bar{x})$ e definido por:

$$T_W(\bar{x}) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \exists \{x^k\} \subseteq X, \{t_k\} \downarrow 0 : x^k \rightarrow \bar{x} \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k - \bar{x}}{t_k} = d \right\}.$$

O cone tangente é um cone fechado não-vazio, não necessariamente convexo. O cone tangente permite estabelecer uma condição de otimalidade de primeira ordem dada no seguinte lema:

Lema 2.1.1. *Seja $x^* \in W$ um minimizador local do problema (2.1.1), então*

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0, \quad \forall d \in T_W(x^*)$$

.

Demonstração. Ver [Ber99]. □

Definição 2.1.3. *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$, o cone polar de C é definido e denotado por:*

$$P(C) := \{v \in \mathbb{R}^n | v^T d \leq 0, \quad \forall d \in C\}.$$

Da definição de cone polar e do lema anterior temos que se x^* é uma solução então $-\nabla f(x^*) \in P(T_W(x^*))$. Este resultado tem um interesse teórico, pois é usado para provar o teorema sobre as condições denominadas KKT. Do ponto de vista prático, a verificação da condição geométrica é difícil, pela estrutura complexa do cone tangente. Pela definição, o cone tangente depende mais do conjunto viável do que das restrições que a definem. É claro que um conjunto W pode ter várias representações analíticas.

Do ponto de vista prático, condições que dependem explicitamente das restrições que definem o conjunto viável são mais úteis e de mais fácil verificação. Uma condição de otimalidade do tipo analítico que usa as restrições que definem o conjunto viável é a condição de Fritz John.

Teorema 2.1.1. (*Condição de Fritz John*) Seja $x^* \in W$ um minimizador local de (2.1.1), então existem $\lambda_0 \geq 0$ e multiplicadores $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ com $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$ tais que:

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0, \quad \lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.1.2)$$

Os vetores λ_0, λ são chamados os multiplicadores de Fritz-John. As condições $\lambda_i g_i(x^*) = 0$, $\forall i = 1, \dots, m$ são chamadas restrições de complementariedade. Da definição, o escalar λ_0 poderia ser 0, nesse caso a condição de Fritz John não dependeria da função objetivo. Isso tornaria o resultado pouco útil pois a condição não levaria informação de todo o problema. Com a finalidade de estudar a otimalidade do ponto viável, Kuhn e Tucker estudaram condições sobre as funções que definem o conjunto viável sob a qual a condição de Fritz John é satisfeita com $\lambda_0 \neq 0$. Essas condições são chamadas condições de qualificação. Quando $\lambda_0 \neq 0$ a condição de Fritz John é chamada condição de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Como foi mencionado, a condição KKT não é puramente uma condição de otimalidade. Um exemplo clássico para ver isto é $\min x$ sujeito a $x^2 = 0$. O ponto $x^* = 0$ é uma solução que não é um ponto KKT. Embora a condição KKT não seja uma condição de otimalidade, ela é usada como um condição a ser satisfeita por pontos de acumulação da maioria de algoritmos iterativos desenvolvidos para o problema (2.1.1). Além disso, esta condição também já foi estendida para muitos outros problemas como desigualdades variacionais, desigualdades quase variacionais, problemas de otimização multiobjetivo, problemas de equilíbrio de Nash generalizado, entre outros.

Como foi dito, uma condição de qualificação é uma condição que ao ser satisfeita em uma solução, faz que o ponto seja KKT. Vamos agora estabelecer uma condição deste tipo que terá a propriedade de ser a condição mais fraca possível à garantir KKT. Para isto, vamos definir um cone que usa aproximações de primeira ordem das restrições e captura a informação até de primeira ordem contida no cone tangente. Uma vantagem desse conjunto com respeito ao cone tangente, é o fato de seu polar ser fácil de computar.

Definição 2.1.4. (*Cone linearizado*) Seja $\bar{x} \in W$, o cone linearizado de W em $\bar{x}$ é denotado e definido por:

$$L_W(\bar{x}) := \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0, i \in \alpha(\bar{x})\}.$$

O cone linearizado é um cone convexo, fechado e não vazio. A seguinte proposição estabelece a relação entre os cones tangente e linearizado.

Proposição 2.1.1. Se $x \in W$, então $T_W(\bar{x}) \subseteq L_W(\bar{x})$.

Demonstração. Ver [BSS13]. □

Em geral, a inclusão $T_W(\bar{x}) \subseteq L_W(\bar{x})$ pode ser estrita. Da definição do cone polar temos que $P(L_W(\bar{x})) \subseteq P(T_W(\bar{x}))$, e nesse caso também a inclusão pode ser estrita.

Uma condição que estabelece que toda solução local de (2.1.1) é um ponto KKT, é a chamada condição de Guignard, que é $P(T_W(x^*)) = P(L_W(x^*))$. Esse resultado é uma consequência da condição geométrica e do cálculo do $P(L_X(x^*))$ por meio do lema de Farkas. Para formalizar estas ideias define-se o seguinte cone.

Definição 2.1.5. (*Cone gerado pelos gradientes das restrições ativas*) Seja $\bar{x} \in W$ o cone gerado pelos gradientes das restrições ativas de W em $\bar{x}$ é denotado e definido por:

$$K_W(\bar{x}) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n : d = \sum_{i \in \alpha(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}), \quad 0 \leq \lambda_i, i \in \alpha(\bar{x}) \right\}.$$

Usando o Lema de Farkas prova-se que $P(L_W(\bar{x})) = K_W(\bar{x})$. Esses conceitos permitem estabelecer o seguinte fundamental resultado.

Teorema 2.1.2. (*Karush-Kuhn-Tucker*) *Seja x^* uma solução de (2.1.1) e suponha que a condição de Guignard é satisfeita, isto é, $P(T_W(x^*)) = P(L_W(x^*))$, então existem multiplicadores $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ com $\lambda_i = 0$ para $i \notin \alpha(x^*)$ tal que*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in \alpha(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0. \quad (2.1.3)$$

Demonstração. Ver [Gui69]. □

Quando um ponto viável de (2.1.1) satisfaz (2.1.3), o ponto é chamado um ponto estacionário ou ponto KKT. Como foi já mencionado, a condição KKT é amplamente usada por ser facilmente verificada e implementada em algoritmos.

A condição de Guignard $P(L_W(\bar{x})) = K_W(\bar{x})$ foi introduzida por Guignard [Gui69] para dimensão infinita e reformulada para o caso finito por Gould e Tolle [GT71], onde se estabelece que além de suficiente, também é necessária para que tenhamos as condições KKT, como mostraremos mais adiante no Corolário 2.1.1.

2.1.2 Condições de qualificação

Sob a condição de Guignard, toda solução local (mínimo ou máximo) satisfaz KKT. Muitos algoritmos em otimização geram uma sequência que converge a um ponto KKT. Uma hipótese para que isso aconteça é que no ponto limite da sequência gerada seja satisfeita uma condição de qualificação. Como já foi mencionado, a condição de Guignard é uma condição de qualificação, mas não existem algoritmos que a usem para garantir que um ponto de acumulação de um processo iterativo seja um ponto KKT. Isso ocorre, em parte, pela falta de regularidade e a difícil verificação da condição de Guignard na prática. Por essa razão, a construção de condições de qualificação mais fortes que as de Guignard e associadas a condição KKT, de fácil verificação, e que possam ajudar a guiar um algoritmo iterativo para achar pontos KKT, são importantes. Salientamos que se não for verificada nenhuma hipótese à respeito das restrições, podemos ter minimizadores que não cumprem KKT dificultando assim a caracterização de tais pontos. Formalmente definimos:

Definição 2.1.6. (*Condições de qualificação*) *Uma condição de qualificação (CQ) é uma proposição sobre as funções que descrevem o conjunto viável de (2.1.1) que quando satisfeitas em um minimizador local fazem que o ponto seja um ponto KKT.*

A condição de qualificação de Guignard tem a interessante propriedade de ser a CQ mais fraca associada com KKT no sentido que, para qualquer função objetivo f que tem um minimizador local em $x^* \in W$ que satisfaz KKT, então satisfaz a condição de Guignard. Para mostrar este resultado definimos o cone normal.

Definição 2.1.7. (*Cone normal*) *Seja $\bar{x} \in W$, denotamos e definimos o cone normal de W em $\bar{x}$ por*

$$N_W(\bar{x}) = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, x - \bar{x} \rangle \leq o(\|x - \bar{x}\|) \quad \forall x \in W\}.$$

Em [RW09], Teorema 6.11, se prova que $N_W(\bar{x}) = P(T_W(\bar{x}))$.

O seguinte teorema fornece uma outra caracterização dos vetores normais.

Teorema 2.1.3. *Temos que $v \in N_W(\bar{x})$ se, e somente se, existe uma função f diferenciável em $\bar{x}$ com $\nabla f(\bar{x}) = -v$ e que alcança seu mínimo local em $\bar{x}$ sobre o conjunto W . Mais ainda, f pode ser tomada diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e tal que o mínimo global sobre o conjunto W é alcançado em $\bar{x}$.*

Demonstração. Ver [RW09]. □

Deste teorema obtém-se o seguinte importante resultado.

Corolário 2.1.1. *Seja $x^* \in W$. $P(L_X(x^*)) = P(T_X(x^*))$ é equivalente ao fato de que para qualquer função objetivo diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o problema (2.1.1) possui em x^* um mínimo local, então x^* é um ponto KKT.*

Demonstração. É uma consequência dos resultados anteriores. $\square$

A igualdade dos cones $L_W(x^*) = T_W(x^*)$ é chamada condição de Abadie e é claro que esta condição implica a condição de Guignard, portanto, a condição de Abadie é também uma condição de qualificação.

Embora Abadie seja mais restritiva que Guignard, esta condição tampouco é usada em algoritmos para provar convergência global. Brevemente apresentamos algumas condições de qualificação mais restritivas que Abadie, mas que são usadas para provar convergência global de algoritmos para o problema (2.1.1). Daremos mais ênfase nas condições clássicas e nas condições de qualificação mais recentes, que serão estendidas para GNEPs.

Definição 2.1.8. *(Condição de independência linear) Seja $\bar{x} \in W$, a condição de independência linear (LICQ) ocorre em $\bar{x}$ se o conjunto $\{\nabla g_i(\bar{x}) : i \in \alpha(\bar{x})\}$ é linearmente independente.*

Sob LICQ, se $\bar{x} \in W$ e $(\bar{x}, \lambda)$ é um ponto KKT então λ é único. Da definição, é claro que se o gradiente de duas restrições ativas em $\bar{x}$ são iguais, então LICQ não é satisfeito. LICQ pode ser enfraquecido por meio das condições MFCQ [MF67] e CRCQ [Jan84], as quais são independentes.

Definição 2.1.9. *Seja $\bar{x} \in W$, a condição de Posto Constante (CRCQ) ocorre em $\bar{x}$ se para cada $I \subseteq \alpha(\bar{x})$ o conjunto*

$$\{\nabla g_i(x) : i \in I\}$$

tem posto constante para todo x em uma vizinhança de $\bar{x}$.

Definição 2.1.10. *Seja $\bar{x} \in W$, a condição de Mangasarian Fromovits (MFCQ) ocorre em $\bar{x}$ se o conjunto*

$$\{\nabla g_i(\bar{x}) : i \in \alpha(\bar{x})\}$$

é positivo-linearmente independente, isto é, se:

$$\sum_{i \in \alpha(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0, \quad \lambda_i \geq 0$$

implica que $\lambda_i = 0$ para $i \in \alpha(\bar{x})$.

Da mesma forma como MFCQ enfraquece LICQ olhando o sinal dos multiplicadores, no mesmo sentido a condição de dependência linear positiva constante CPLD enfraquece CRCQ, além de também enfraquecer MFCQ. Essa condição foi introduzida por Qi e Wei [QW00] para provar a convergência de um método de programação quadrática sequencial. Os autores em [AMS05b] provaram que a condição de dependência linear positiva constante, é uma condição de qualificação e em [BM14] os autores usaram a CPLD para provar a convergência global do método Lagrangiano Aumentado.

Definição 2.1.11. *Seja $\bar{x} \in W$, a condição de dependência linear positiva constante CPLD ocorre em $\bar{x}$ se existe uma vizinhança aberta B de $\bar{x}$ tal que para todo $I \subseteq \alpha(\bar{x})$ tal que $\{\nabla g_i(\bar{x}) : i \in I\}$ é positivo-linearmente dependente, então $\{\nabla g_i(y) : i \in I\}$ é positivo-linearmente dependente $\forall y \in B$*

As condições Relaxed-CRCQ (RCRCQ, [MS11]) e Relaxed-CPLD (RCPLD, [AHSS12a]) enfraquecem CRCQ e CPLD respectivamente, sendo RCPLD mais fraca que RCRCQ. A condição CRSC (Constant Rank of the Subspace Component, [AHSS12b]) é outra condição mais fraca que LICQ, MFCQ, CRCQ, CPLD, (R)CRCQ e (R)CPLD. Outra condição mais fraca que CPLD é a condição de qualificação de quase normalidade [Ber99].

Definição 2.1.12. *Seja $\bar{x} \in W$, a condição de quase normalidade ocorre em $\bar{x}$ se sempre que $\sum_{i \in \alpha(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$ com $\lambda_i \geq 0$, então não existe sequência $x^k \rightarrow \bar{x}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que $g_i(x^k) > 0$ sempre que $\lambda_i > 0$.*

Todas as condições até aqui apresentadas, satisfazem a condição de error bound [Sol10], que é uma condição que estima a distância de um ponto dado em uma vizinhança de um ponto viável $\bar{x}$, ao conjunto viável em termos de quantidades computáveis que medem a violação das restrições.

Definição 2.1.13. (Error bound) *Seja $\bar{x} \in W$. Dizemos que a condição de error bound ocorre em $\bar{x}$, se existe uma vizinhança B de $\bar{x}$ e $\gamma > 0$ tal que para todo $y \in B$*

$$\min_{z \in W} \|z - y\| \leq \gamma \max\{\max\{0, g_i(y)\}, i = 1, \dots, m\}.$$

Em [Sol10], prova-se que a condição de error bound, é uma condição de qualificação.

Uma propriedade importante da condição de error bound é que é a condição mais fraca que garante que toda solução do problema (2.1.1) com função objetivo da forma $f = f_s + f_c$ com f_s suficientemente diferenciável e f_c convexa (não necessariamente diferenciável) é um ponto KKT [Hae16].

A condição Geradores Positivos Constantes (CPG, [AHSS12b]) é uma condição de qualificação estritamente mais fraca que CRSC, mais forte que Abadie, que não implica a condição de error bound.

Uma recente condição de qualificação é a Propriedade da Continuidade do Cone (CCP, [AMRS16]) que é estritamente mais fraca que CPG, mas que implica Abadie.

Definição 2.1.14. *Seja $\bar{x} \in W$, dizemos que ocorre a Propriedade da Continuidade do Cone (CCP) em $\bar{x}$ se a multifunção $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é semicontínua exteriormente em $\bar{x}$, isto é $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x) \subseteq K(\bar{x})$, onde*

$$K(x) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : w = \sum_{i \in \alpha(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(x), \quad \lambda_i \geq 0 \right\}$$

e

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : \exists x^k \rightarrow \bar{x}, \exists w^k \rightarrow w, w^k \in K(x^k) \right\}.$$

2.1.3 Condições sequenciais de primeira ordem e CQs associadas

Em alguns algoritmos importantes desenvolvidos para problemas de otimização, o algoritmo gera sequências que no limite devem satisfazer uma CQ a fim de que o ponto seja KKT.

Na prática o algoritmo efetua só uma quantidade finita de passos, que é determinada pelo comprimento de uma condição de parada, que em geral depende de alguma tolerância $\epsilon > 0$. O algoritmo dá como saída um ponto x^k próximo a x^* , mas para se aceitar x^k como um bom candidato, x^k deveria satisfazer aproximadamente as condições KKT. Condições sequenciais de otimalidade fornecem a ferramenta teórica para justificar essa prática.

As condições sequenciais mais conhecidas são AKKT [AHM11] e AGP [MS03]. Dessas duas, a mais usada é AKKT, sendo AGP estritamente mais forte que AKKT. Aqui definimos e enunciamos as propriedades de AKKT sua conexão com CCP e com critérios de paradas de algoritmos. Um estudo detalhado de AGP pode ser encontrado em [MS03].

Definição 2.1.15. (AKKT) *Dizemos que $\bar{x} \in W$ satisfaz AKKT se existem sequências $\{x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{\lambda^k\} \subseteq \mathbb{R}_+^m$, tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) \right\| = 0,$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\{ \lambda_i^k, -g_i(x^k) \right\} = 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m.$$

Neste caso dizemos que $\{x^k\}$ é uma sequência AKKT.

O seguinte teorema prova que AKKT é uma condição de otimalidade e satisfeita independente do cumprimento de uma condição de qualificação.

Teorema 2.1.4. *Se x^* é uma solução local de (2.1.1), então x^* é um ponto AKKT.*

Demonstração. Ver [AHM11]. □

Uma forma equivalente para AKKT é:

Definição 2.1.16. *O ponto $\bar{x} \in W$ satisfaz AKKT se, e somente se, existe uma sequência $\{x^k\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$ e multiplicadores $\{\lambda^k\} \subseteq \mathbb{R}_+^r$ onde $r = |\alpha(\bar{x})|$ tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i \in \alpha(\bar{x})} \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) \right\| = 0. \quad (2.1.4)$$

O seguinte teorema justifica o uso de AKKT como um critério de parada.

Teorema 2.1.5. *O ponto $\bar{x} \in W$ satisfaz AKKT se, e só se, existem sequências $\{x^k\}$, $\{\lambda^k\} \subseteq \mathbb{R}_+^m$ e $\{\epsilon_k\} \subseteq \mathbb{R}_+$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$, $\epsilon_k \rightarrow 0$ e*

$$\begin{aligned} \left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) \right\| &\leq \epsilon_k \\ \|(\max\{0, g_i(x^k)\})_{i=1}^m\| &\leq \epsilon_k \\ \text{se } g_i(x^k) &< -\epsilon_k \quad \text{então } \lambda_i^k = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [Hae16]. □

Observação 2.1.1. *Se um algoritmo gera sequências AKKT que tem como ponto de acumulação x^* que é viável, então o teorema anterior pode ser usado para definir um critério de parada. Como é comum um $\epsilon > 0$ controla a tolerância de aceitação da aproximação, como $\epsilon_k \rightarrow 0$, então o algoritmo para quando achamos um k tal que $\epsilon_k \leq \epsilon$. Esta aproximação x^k tem a chance de ser um ponto próximo a uma solução do problema e ao mesmo tempo satisfaz as condições KKT de forma aproximada, então x^k pode ser considerada como uma aproximação razoável.*

Pode-se provar a condição de Fritz John a partir da condição AKKT. Condições de qualificação mais fracas geram condições de otimalidade fortes da forma KKT ou não CQ, que são mais úteis na prática. De todas as condições mencionadas anteriormente, a CCP é uma das mais fracas. As condições de qualificação mencionadas que estão relacionadas a convergência de algoritmos satisfazem a propriedade P , tal que

$$AKKT + P \Rightarrow KKT.$$

Em geral, como AKKT é uma condição de otimalidade, qualquer condição P que satisfaz a propriedade anterior é uma condição de qualificação. Como foi dito, a AKKT é uma propriedade com implicações algorítmicas e existem alguns algoritmos clássicos que geram sequências cujos pontos limites são pontos AKKT. Se esses pontos satisfazem a propriedade P , então estes pontos serão estacionários. Assim, CQs que satisfaçam essa propriedade são importantes do ponto de vista prático.

O seguinte resultado estabelece a relação de AKKT com a condição CCP. No Corolário 2.1.1 observamos que a condição de Guignard é a condição mais fraca que garante que todo minimizador local de (2.1.1) é um ponto KKT. O seguinte teorema estabelece que a condição CCP é a condição mais fraca que garante que todo ponto AKKT é um ponto KKT.

Teorema 2.1.6. *Seja $\bar{x} \in W$, $\bar{x}$ satisfaz CCP se, e somente se, para qualquer função objetivo f tal que $\bar{x}$ é AKKT para o problema (2.1.1), então $\bar{x}$ é KKT.*

Demonstração. Ver [AMRS16]. □

Das observações anteriores, o teorema anterior permite provar diretamente que CCP é uma condição de qualificação.

Uma consequência importante do Teorema 2.1.6 é que a condição de otimalidade KKT ou não-CCP fornece a maior medida de força da condição AKKT, em comparação com KKT ou não-CQ para uma CQ mais forte que CCP.

2.2 Métodos de Penalidades e Lagrangiano Aumentado para problemas de otimização

Os métodos de penalidade e Lagrangiano Aumentado seguem uma ideia clássica usada em várias áreas da matemática que consiste em resolver um problema difícil, através da resolução de subproblemas mais simples. Aplicar esta ideia no problema de programação não linear (2.1.1) consiste, por exemplo, em ter subproblemas onde a minimização seja feita de forma irrestrita, em caixas ou em politopos. Embora os métodos de penalidade na forma pura não sejam muito usados, pela dificuldade para lidar com a resolução dos subproblemas, eles servem de ajuda para provar resultados fortes de otimalidade. Em geral os métodos de penalidades utilizados para resolver o problema (2.1.1) são métodos iterativos onde em cada iteração transformam o problema original em outro que supomos ser de mais fácil resolução.

2.2.1 Métodos de penalidades

Apresentamos brevemente os métodos de penalidade interna (conhecidos também como métodos de barreira) e métodos de penalidade externa (as vezes simplesmente chamados de penalidade).

O método de barreira é usado para a resolução de problemas com restrições de desigualdade com interior não vazio. Em cada iteração se resolve um problema irrestrito onde a função objetivo é a função objetivo do problema original agregando um termo que depende das restrições e de um parâmetro de penalidade que em geral decresce em cada iteração e que tentam impedir a aproximação de um ponto viável à fronteira do conjunto viável.

Os métodos de barreira também podem ser aplicados a problemas com restrições gerais de igualdade, no entanto, é necessária uma transformação apropriada do problema. Em um método de barreira, presumimos que recebemos um ponto x^0 no interior do conjunto viável e impomos um custo muito grande em pontos viáveis cada vez mais próximos da fronteira do conjunto viável, criando assim uma “barreira” para sair da região viável.

A função de penalidade em relação ao problema (2.1.1) é definida como:

$$B(x, \rho) = f(x) + \rho b(x)$$

onde b é chamada de função de barreira, onde b é qualquer função contínua definida no interior do conjunto viável, e tal que $b(x) \rightarrow \infty$ quando $\max\{g_i(x) : i = 1, \dots, m\} \rightarrow 0^-$.

Os dois tipos mais usados de funções barreiras são:

$$b(x) = -\sum_{i=1}^m \log(-g_i(x)) \quad \text{e} \quad b(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)},$$

a barreira logarítmica e a barreira inversa, respectivamente.

O algoritmo de barreira básico para o problema (2.1.1) é:

Algoritmo 2.2.1. *Algoritmo de Barreira.*

P0) Escolher $\rho^0 > 0$ e $x^0 \in \text{int}(W)$, fazer $k = 0$

- P1) Se x^k satisfaz algum critério de parada, parar.
P2) Achar uma solução x^{k+1} do problema $P(\rho^k)$ dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & B(x, \rho^k) \\ \text{sujeito a} \quad & g_i(x) < 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

P3) Escolher $\rho^{k+1} > \rho^k$ (por exemplo $\rho^{k+1} = \frac{1}{2}\rho^k$) e ir ao passo 1.

O seguinte teorema é sobre a convergência do método.

Teorema 2.2.1. *Suponha que f , g_i e $b(x)$ são contínuas. Suponha também que o problema $P(\rho)$ possui solução para qualquer $\rho > 0$ e que a sequência $\{\rho^k\}$ satisfaz $\rho^{k+1} \rightarrow 0$. Se o problema tem uma solução x^* tal que $B(x^*, \delta) \cap \{x : g(x) < 0\} \neq \emptyset$ para todo $\delta > 0$ então qualquer ponto limite de $\{x^k\}$ é solução de (2.1.1).*

Demonstração. Ver [IS14a]. □

A penalização externa pode ser usada, em geral, quando o conjunto de restrições de (2.1.1) é da forma

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, g(x) \leq 0\}.$$

Nesse caso usamos uma função de penalidade $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ contínua cujo objetivo será penalizar a violação das restrições do conjunto viável, i.e, tal que:

$$b(x) = \begin{cases} = 0 & \forall x \in W \\ > 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n - W \end{cases}$$

Uma escolha bastante comum para b pode-se fazer da seguinte maneira, defina a função $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ definida por:

$$\psi(x) = (h(x), \max\{0, g_1(x)\}, \dots, \max\{0, g_m(x)\})$$

e seja $b(x) = \|\psi(x)\|^p$ onde $p > 0$. Além da norma euclidiana, outras normas como a norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$ e a norma $\|\cdot\|_p$ para $p > 0$ podem ser usadas (embora para $p \in (0, 1)$ não seja uma norma). Assim obtemos respectivamente:

$$b(x) = (\max\{\|h(x)\|_\infty, 0, g_1(x), \dots, g_m(x)\})^p \quad (2.2.2)$$

e

$$b(x) = \|h(x)\|_p^p + \sum_{i=1}^m (\max\{0, g_i(x)\})^p. \quad (2.2.3)$$

Propriedades de diferenciabilidade do penalizador b são importantes no estudo dos algoritmos. Por exemplo, quando h e g são diferenciáveis, então b definida em (2.2.3) é diferenciável sempre que $p > 1$ e não diferenciável para $0 < p \leq 1$. Entretanto, b definida em (2.2.2) é não diferenciável ainda com h e g diferenciáveis. Definindo $B(x, \rho) = f(x) + \rho b(x)$, em cada iteração o método de penalidade externa resolve um problema da forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & B(x, \rho) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

A ideia é que na medida em que o valor de ρ aumenta a violação das restrições torna-se cada vez mais cara. As soluções desses problemas penalizados estão geralmente fora do conjunto viável mas

se aproximam dele, quando o parâmetro de penalidade aumenta, e assim podemos esperar que seus pontos de acumulação resolvam o problema original. O algoritmo de penalização externa básico para o problema (2.1.1) é:

Algoritmo 2.2.2. *Algoritmo de penalização externa.*

- P0) Escolher $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $\rho^0 > 0$, fazer $k = 0$.
- P1) Se x^k satisfaz algum critério de parada, parar.
- P2) Achar uma solução x^{k+1} do problema $P(\rho^k)$:

$$\begin{aligned} \min \quad & B(x, \rho^k) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

- P3) Escolher $\rho^k < \rho^{k+1}$, fazer $k = k + 1$ e ir ao passo 1.

O seguinte teorema estabelece a convergência do método.

Teorema 2.2.2. *Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo. Se $\rho^k \rightarrow \infty$, então todo ponto de acumulação de $\{x^k\}$ é uma solução global de (2.1.1). Além disso, $x^k \in W$ para algum k se, e somente se, x^k é solução global do problema (2.1.1).*

Demonstração. Ver [Ber99]. □

Um dos pontos negativos dos métodos de penalidades é que os subproblemas gerados em cada iteração tornam-se mal condicionados ao uso de valores extremos (muito grandes ou muito pequenos) do parâmetro penalizador. Ver exemplos em [MS95] e [IS14a]. Resultados sobre taxa de convergência e variantes do método de penalidade externa, assim como o estudo de penalidade externa exata podem ser achado em [IS14a].

2.2.2 Método de Lagrangiano Aumentado

Os métodos de Lagrangiano Aumentado, também conhecidos como método de multiplicadores, foram inicialmente propostos em [Pow67] e [Hes69] para problemas de otimização com restrições de igualdade e mais tarde foram generalizados para problemas com restrições mistas por Rockafellar [Roc74]. Embora os métodos tipo Lagrangiano Aumentado herdem propriedades parecidas dos métodos de penalidades, uma diferença substancial é a introdução dos multiplicadores de Lagrange (variáveis duais) que evitam o mal condicionamento dos subproblemas que surgem em cada iteração. Por exemplo, no caso só com restrições de desigualdade o método gera duas sequências, uma primal $\{x^k\}$, que não necessariamente tem termos viáveis, e uma sequência dual $\{\lambda^k\}$ com $\lambda^k \geq 0$.

Nesse trabalho, comentaremos brevemente o método de Lagrangiano Aumentado, assim como os resultados de convergências recentes. O algoritmo de Lagrangiano Aumentado considerado nesta parte do trabalho usa a função de Powell-Hestenes-Rockafellar [Roc74].

Vamos considerar o método de Lagrangiano Aumentado em sua forma mais geral, isto é, usando uma penalização parcial. Para isso consideremos o problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad , i = 1, \dots, m. \\ & h_j(x) \leq 0 \quad , j = 1, \dots, l. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Onde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são as restrições de nível superior e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ as restrições de nível inferior, essa forma de apresentar em duas partes as restrições foi desenvolvida em [ABMS07]. As funções g e h são tratadas de forma diferente, g descreve o conjunto de funções que serão penalizadas, enquanto h é uma restrição (opcional) que será as restrições dos problemas penalizados, e que é escolhida de tal forma que os subproblemas possam ter solução ou tenham uma estrutura mais simples e possam

ser resolvidos com facilidade, por exemplo se h define um conjunto compacto ou se são restrições lineares, ver [ABMS07].

A função Lagrangiana é definida como:

$$\ell(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

para $x \in \Omega = \{x : h_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, l\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$. Já a função Lagrangiano Aumentado é definida por:

$$L(x, u, \rho) = f(x) + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^m \left[\max \left\{ 0, g_i(x) + \frac{u_i}{\rho} \right\} \right]^2$$

para $\rho > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}_+^m$.

O método básico do Lagrangiano Aumentado é definido da seguinte maneira:

Algoritmo 2.2.3. (*Lagrangiano Aumentado*)

Passo 0. Seja $u^{max} \in \mathbb{R}_+^m$, $\gamma > 1$ e $0 < \tau < 1$, $u^0 \in [0, u^{max}]$ e $\rho^0 > 0$. Fazer $k = 0$.

Passo 1. Achar x^k solução aproximada do problema P^k :

$$\begin{aligned} \min \quad & L(x, u^k, \rho^k) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \Omega \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Passo 2. Definimos novas aproximações para os multiplicadores de Lagrange

$$\lambda^k = \max\{0, u^k + \rho^k g(x^k)\}.$$

Passo 3. Definir

$$V^k = \min\{-g(x^k), \lambda^k\}. \tag{2.2.8}$$

Se $k = 1$ ou

$$\|V^k\| \leq \tau \|V^{k-1}\|$$

escolher $\rho^{k+1} = \rho^k$ caso contrario $\rho^{k+1} = \gamma \rho^k$.

Passo 4. Escolher $u^k \in [0, u^{max}]$. Fazer $k = k + 1$ ir ao Passo 1.

Em alguns artigos que tratam com o método Lagrangiano costumam se usar no Passo 3 a seguinte escolha: $V^k = \min\{-g(x^k), \frac{u^k}{\rho^k}\}$. Em qualquer caso, os resultados sobre convergência se mantêm. Nós usamos (2.2.8), pois permite ver uma melhor conexão do algoritmo como o conceito de AKKT.

Na sequência comentamos as principais características do método e os resultados de convergência.

O método Lagrangiano Aumentado, tem a flexibilidade de poder ser usado tanto para poder achar soluções globais como também pontos KKT do problema (2.2.6), mudando o Passo 2 do algoritmo. Primeiro usaremos o algoritmo para encontrar um mínimo global de (2.2.6). Para isso, no Passo 2 calculamos um mínimo global aproximado do problema P^k .

Hipótese 2.2.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos obter um ponto $x^k \in \Omega$ tal que:

$$L(x^k, u^k, \rho^k) \leq L(x, u^k, \rho^k) + \epsilon_k, \quad \forall x \in \Omega$$

e a sequência de tolerância $\{\epsilon_k\}$ é limitada.

O seguinte resultado trata sobre a viabilidade do ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo sob a Hipótese 2.2.1.

Teorema 2.2.3. *Seja x^* um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo 2.2.3 com a Hipótese 2.2.1. Então, x^* é solução de:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \|g_+(x)\|^2 \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \Omega \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Demonstração. Ver [BM14]. □

Imediatamente podemos ver, do teorema anterior que se o conjunto viável de (2.2.6) não é vazio, então todo ponto limite do algoritmo é viável.

Para provar um resultado da otimalidade do ponto limite, nós assumiremos na hipótese 2.2.1 que a sequência $\{\epsilon_k\}$ converge a zero.

Teorema 2.2.4. *Seja x^* um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo 2.2.3 com a Hipótese 2.2.1 e com $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$. Então, se o problema (2.2.6) é viável, então x^* é solução global.*

Demonstração. Ver [BM14]. □

Entretanto, calcular soluções globais nos subproblemas (ou mesmo aproximadas com uma tolerância muito pequena) é na prática muito difícil. Assim, implementar algoritmos para obter convergência a um minimizador global resulta em uma tarefa muito ambiciosa. Podemos, então, ser menos exigentes e nos contentar calculando pontos estacionários do problema (2.2.6). O algoritmo 2.2.3 também pode ser usado para esta tarefa trocando o cálculo de soluções globais aproximadas por pontos estacionários aproximados.

No Passo 2 do algoritmo assumiremos a seguinte hipótese.

Hipótese 2.2.2. *É possível achar $x^k \in \mathbb{R}^n$, $w^k \in \mathbb{R}_+^m$ tal que*

$$\|\nabla L(x^k, u^k, \rho^k) + \nabla h(x)w^k\| \leq \epsilon_k \quad (2.2.10)$$

$$\|\min\{-h(x^k), w^k\}\| \leq \epsilon'_k \quad (2.2.11)$$

onde a sequência $\{\epsilon_k\}$ é limitada e $\{\epsilon'_k\}$ tende a zero.

O seguinte teorema estabelece que se a sequência gerada pelo algoritmo tem um ponto de acumulação viável, então este ponto é um ponto AKKT para o problema (2.2.6).

Teorema 2.2.5. *Seja x^* um ponto de acumulação viável da sequência gerada pelo algoritmo, suponha que a Hipótese 2.2.2 é satisfeita com $\{\epsilon_k\}$ convergindo a zero, então x^* é um ponto AKKT para o problema (2.2.6).*

Demonstração. Ver [BM14]. □

Corolário 2.2.1. *Suponha que as hipóteses do teorema anterior são satisfeitas. Se x^* satisfaz CCP, então x^* é um ponto KKT do problema (2.2.6).*

O seguinte teorema prova que o ponto limite da sequência gerado pelo algoritmo é um ponto AKKT das somas de quadrados das inviabilidades das restrições de nível superior.

Teorema 2.2.6. *Seja x^* um ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo sob a Hipótese 2.2.2, então x^* é um ponto AKKT do problema:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \|g_+(x)\|^2 \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Demonstração. Ver [BM14]. □

Corolário 2.2.2. *Seja x^* um ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo sob a hipótese 2.2.2. Se x^* satisfaz CCP com respeito ao conjunto Ω , então x^* é um ponto AKKT do problema (2.2.12).*

Capítulo 3

Problemas de Equilíbrio de Nash Generalizados

Nesta seção, apresentaremos o Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado. Comentaremos a relação deste tipo de problema com outros problemas na área de otimização e faremos um breve resumo sobre os métodos que já foram desenvolvidos para resolver numericamente este tipo de problema. Finalmente apresentamos algumas aplicações deste tipo de problema.

Problemas de otimização modelam situações onde se deseja determinar a melhor escolha de um conjunto de opções ou alternativas. Nesses tipos de problemas, o decisor, ao escolher a alternativa certa, influencia unicamente o resultado e a satisfação que ele ou ela recebe. Em outras situações isto não é sempre verdade, em muitos casos, o bem-estar de um indivíduo depende não apenas do que ele ou ela faz, mas também do resultado das escolhas de outros indivíduos. Em alguns casos, esse elemento de interdependência mútua é tão grande que deve ser explicitamente levado em consideração, ao descrever ou modelar a situação. Começaremos definindo um jogo de estratégias e o equilíbrio clássico de Nash para descrever estas situações.

3.1 Jogos de Estratégia e Equilíbrio de Nash

Definição 3.1.1. *Jogos de estratégia.*

Um jogo de estratégia é um modelo para jogos estáticos que consiste de N -jogadores $N \geq 2$ denotados por $v = 1, \dots, N$ tal que cada jogador v têm:

1. Um conjunto de estratégias (puras) X^v (também conhecido como o conjunto de alternativas), onde os elementos desse conjunto são as estratégias do jogador v .
2. Uma função objetivo $f^v : X = X^1 \times \dots \times X^N \rightarrow \mathbb{R}$.

Um jogo com essas características é denotado como uma $2N$ -dupla $G = (X^1, \dots, X^N, f^1, \dots, f^N)$.

Jogando um jogo de estratégia não cooperativo.

Nesta situação todos os jogadores escolhem simultaneamente e independente dos outros jogadores uma estratégia de seu conjunto de estratégias, assim, se o jogador v escolhe a estratégia $x^v \in X^v$, então ele recebe o pagamento $f^v(x^1, \dots, x^v, \dots, x^N)$ e o jogo acaba.

Assumindo que todos os jogadores são racionais, cada jogador tentará escolher a estratégia, que lhe proporcione o melhor retorno possível. Note-se que esse retorno está sujeito também às escolhas dos outros jogadores, portanto, gera-se uma interdependência entre os jogadores.

O objetivo em um jogo de estratégia não cooperativo é encontrar uma "solução", uma estratégia conjunta $(x^1, \dots, x^v, \dots, x^N) \in X$, que dê uma "satisfação" (em algum sentido) a todos os jogadores, em ausência de cooperação entre eles.

A natureza dos conjuntos de estratégias X^v na prática é muito variada. Neste trabalho consideramos $X^v \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$, assim, cada jogador $v \in \{1, \dots, N\}$ controla a variável $x^v \in X^v \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$.

Seja $n = n_1 + \dots + n_N$ o número total de variáveis, um vetor $x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^n$ em notação da teoria de jogos pode ser representado por $x = (x^v, x^{-v})$, onde $x^{-v} = (x^i)_{i=1, i \neq v}^N$ para qualquer $v \in \{1, \dots, N\}$.

Um tipo de solução para jogos de estratégia não cooperativos foi dado por John Nash [N⁺50] e [Nas51].

Definição 3.1.2. (*Equilíbrio de Nash em estratégias puras*)

Seja $G = (X^1, \dots, X^N, f^1, \dots, f^N)$ um jogo de estratégia. Um Equilíbrio de Nash (EN) é um tipo de estratégia $x^* = (x^{*,1}, \dots, x^{*,N}) \in X$ tal que para cada jogador v temos:

$$f^v(x^{*,v}, x^{*, -v}) \leq f^v(x^v, x^{*, -v}), \quad \forall x^v \in X^v.$$

Equivalentemente, para cada $v = 1, \dots, N$ o bloco $x^{*,v}$ resolve o problema de otimização

$$\min_{x^v \in X^v} f^v(x^v, x^{*, -v}). \quad (3.1.1)$$

Um jogo de estratégia como na Definição 3.1.1 onde se deseja calcular um EN é chamado um Problema de Equilíbrio de Nash (NEP).

Além de ser definido como a solução de um conjunto de problemas de otimização paramétrica, um EN também pode ser formulado como a solução de um problema de ponto fixo, esta reformulação é útil não só na construção de algoritmos para resolver o NEP, como também para poder obter resultados de existência de soluções.

Seja $X = X^1 \times \dots \times X^N$ e definimos a multifunção da melhor resposta para o jogo $B : X \rightrightarrows X$ como:

$$B(x) = \prod_{v=1}^N B^v(x^{-v}), \quad (3.1.2)$$

onde

$$B^v(x^{-v}) = \left\{ y^v \in X^v : y^v \in \operatorname{argmin}_{z^v \in X^v} f^v(z^v, x^{-v}) \right\}.$$

Aqui, $B^v(x^{-v})$ é o conjunto de melhor resposta do jogador v quando os demais jogadores escolhem a estratégia x^{-v} , então a Definição 3.1.2 é equivalente a:

Definição 3.1.3. Um NEP é o problema de encontrar $x^* = (x^{*,1}, \dots, x^{*,N}) \in X$ (ponto de Equilíbrio de Nash) tal que:

$$x^* \in B(x^*),$$

isto é, x^* é um ponto fixo da função $B : X \rightrightarrows X$.

Observação 3.1.1. O Equilíbrio de Nash como uma solução para jogos não cooperativos tem sido aceitado amplamente e é considerado como uma "boa solução", sendo aplicado com sucesso em diversas áreas do saber humano. Este conceito pode ser considerado como uma boa solução mais em um sentido coletivo do que em um sentido individual.

Uma característica importante da definição do EN é que se todos os jogadores jogam seu Equilíbrio de Nash nenhum jogador vai desejar mudar de estratégia quando o resto de jogadores mantém sua estratégia (dada pelo Equilíbrio de Nash), pois, caso faça isso ele vai ter um pagamento maior ou igual (no caso de minimização) que o dado pelo Equilíbrio de Nash.

Nash introduziu este conceito em seus artigos [N⁺50] e [Nas51]. Por suas contribuições à teoria dos jogos, John Nash, John Harsanyi e Reinhard Selten receberam o prêmio Nobel de economia em 1994.

Consideremos o seguinte jogo com estratégias finitas maximizando em cada problema de cada jogador.

Exemplo 3.1.1. *Suponha que duas linhas aéreas A e B estão pensando em fixar o preço para a rota São Paulo-Rio de Janeiro. Se ambas linhas aéreas cobram um preço de 800 dólares cada, a utilidade de A será de 60 milhões e a de B será de 90 milhões. Se A irá cobrar 800 e B irá cobrar 500, então A teria uma perda de 30 milhões e B uma utilidade de 150 milhões. Se, porém, A cobrar 500 dólares e B cobrar 800 dólares, então, a utilidade de A seria de 90 milhões e B perderia 30 milhões e, se ambas cobraram 500 dólares, então ambos teriam perdidos 20 milhões.*

		B	
A	preços	800	500
	800	60, 90	-30, 150
	500	90, -30	-20, -20

Para este exemplo, (500, 500) é o único Equilíbrio de Nash do jogo.

O exemplo mostra que a solução dada pelo Equilíbrio de Nash pode não ser a melhor solução do ponto de vista individual, mas é uma boa solução do ponto de vista coletivo em jogos onde não existe cooperação entre os jogadores. Em um jogo em geral, podem não existir equilíbrios, podem existir infinitos ou só uma quantidade finita.

Exemplo 3.1.2. *As seguintes situações ilustram os casos de quantidades diferentes de soluções em um NEP.*

- *Seja o seguinte jogo com 2 jogadores com conjuntos de estratégias $X^1 = X^2 = \mathbb{R}$ e funções objetivo: $f^1(x, y) = -xy^2 + x^2$ e $f^2(x, y) = -8y + xy^2$, este problema tem um único ponto de Equilíbrio de Nash $x^* = (2, 2)$.*
- *O jogo de estratégias de 3 jogadores com conjuntos de estratégias dados por $X_1 = X_2 = X_3 = [0, 1]$ e funções objetivos dados por $f^1(x, y, z) = -x - y + z$, $f^2(x, y, z) = -x + yz$ e $f^3(x, y, z) = -xy + z$, tem os pontos $(1, \alpha, 0)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, como os únicos pontos de Equilíbrio de Nash do jogo.*
- *O jogo com 2 jogadores com conjunto de estratégias $X_1 = X_2 = (-\infty, 0)$ e funções objetivos $f^1(x, y) = e^x + y$ e $f^2(x, y) = e^y + x$, não tem pontos de Equilíbrio de Nash.*

O seguinte teorema é um resultado de existência de EN em jogos não cooperativos e é uma versão mais geral para jogos em estratégias puras do que aquele dado pelo Teorema de Nash para existência de equilíbrios em jogos finitos (os conjuntos de estratégias finitos) com estratégias mistas [Nas51].

Teorema 3.1.1. *(Debreu, Glicksberg, Fan) Considere um jogo de estratégias $G = (X^1, \dots, X^N, f^1, \dots, f^N)$ tal que para cada $v = 1, \dots, N$:*

1. X^v é compacto, convexo e não-vazio,
2. $f^v(x^v, x^{-v})$ é contínua em x^{-v} ,
3. $f^v(x^v, x^{-v})$ é contínua e convexa em x^v para cada x^{-v} fixado (quase-convexidade é suficiente).

Então existe um Equilíbrio de Nash do jogo.

Demonstração. Seja $X = X^1 \times \dots \times X^N$, das hipóteses temos que X é convexo e compacto. Vamos provar que a multifunção da melhor resposta $B : X \rightrightarrows X$ satisfaz as condições do teorema do ponto fixo de Kakutani [Gli52].

i) $B(x)$ não é vazio. De fato, como a função $z^v \rightarrow f^v(z^v, x^{-v})$ é contínua sobre o compacto X^v , então $B^v(x^{-v})$ não é vazio para cada $v = 1, \dots, N$, então $B(x)$ não é vazio.

ii) $B(x)$ é convexo; para isso será suficiente provar que $B^v(x^{-v})$ é convexo para cada $v = 1, \dots, N$. Seja $y^v, w^v \in B^v(x^{-v})$ e $t \in [0, 1]$ temos que:

$$f^v(y^v, x^{-v}) \leq f^v(z^v, x^{-v}), \quad \forall z^v \in X^v$$

$$f^v(w^v, x^{-v}) \leq f^v(z^v, x^{-v}), \quad \forall z^v \in X^v,$$

então usando a convexidade de $f^v(\cdot, x^{-v})$ obtemos:

$$f^v(ty^v + (1-t)w^v, x^{-v}) \leq tf^v(y^v, x^{-v}) + (1-t)f^v(w^v, x^{-v}) \leq f^v(z^v, x^{-v}), \quad \forall z^v \in X^v,$$

então $ty^v + (1-t)w^v \in B^v(x^{-v})$, assim $B(x)$ é convexo. Facilmente podemos ver que $B(x)$ também é fechado.

iii) Vamos agora provar que B é semi-continua superiormente. Suponha por contradição que isto não ocorre, então existe uma sequência $(x^n, y^n) \rightarrow (x, y)$ com $y^n \in B(x^n)$, $x^n \rightarrow x$ e $y^n \rightarrow y$, mas $y \notin B(x)$. Desta forma existe um $v \in \{1, \dots, N\}$ tal que $y^v \notin B^v(x^{-v})$, portanto existe $z^v \in X^v$ e $\epsilon > 0$ tal que:

$$f^v(z^v, x^{-v}) + 2\epsilon < f^v(y^v, x^{-v}).$$

Como $x^{n,-v} \rightarrow x^{-v}$, então por continuidade e para n suficientemente grande,

$$f^v(z^v, x^{n,-v}) < f^v(z^v, x^{-v}) + \epsilon.$$

Dessas últimas duas desigualdades e usando outra vez a continuidade para n suficientemente grande, temos que:

$$f^v(z^v, x^{n,-v}) < f^v(y^v, x^{-v}) - \epsilon \leq f^v(y^{n,v}, x^{n,-v}).$$

Entretanto isso é uma contradição com $y^n \in B(x^n)$. Logo, pelo teorema de Kakutani [Gli52], existe em $x^* \in X$ tal que $x^* \in B(x^*)$, então x^* é um Equilíbrio de Nash. $\square$

Salientamos que a hipótese de convexidade para as funções objetivos não pode ser tirada no resultado anterior.

Exemplo 3.1.3. Consideremos o NEP com dois jogadores, onde cada jogador controla uma única variável, $n_1 = n_2 = 1$:

$$\begin{aligned} \text{Jogador 1} \quad & \min_{x^1} \quad -(x^1 - x^2)^2 \quad \text{s.t.} \quad x^1 \in [0, 1], \\ \text{Jogador 2} \quad & \min_{x^2} \quad (x^1 - x^2)^2 \quad \text{s.t.} \quad x^2 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

O conjunto solução deste NEP é vazio.

O exemplo mostra que um teorema tipo o teorema de Weierstrass não ocorre para NEPs e, portanto, para GNEPs. Assim, por exemplo, adaptar as provas sobre condições de otimalidade sequencial de otimização para GNEPs baseadas em métodos de penalidade torna-se geralmente difícil.

3.2 Equilíbrio de Nash Generalizado

Consideremos o jogo de estratégias 3.1.1 com N jogadores com conjuntos de estratégias $K^v \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ para cada $v = 1, \dots, N$ e seja $K = \prod_{v=1}^N K^v$ e $K^{-v} = \prod_{i=1, i \neq v}^N K^i$.

Em um jogo de estratégias generalizado, adicionalmente cada jogador tem uma função ponto conjunto $X^v : K^{-v} \rightrightarrows K^v$ que representa a influência de todos os jogadores $i \neq v$ sobre o conjunto de estratégias do jogador v , assim $X^v(z) \subseteq K^v$ para todo $z \in K^{-v}$ e para todo $v = 1, \dots, N$.

O objetivo de cada jogador v , dadas as estratégias x^{-v} dos demais jogadores, é resolver o problema de minimização (ou maximização de acordo com a aplicação):

$$P^v(x^{-v}) : \min f^v(x^v, x^{-v}) \quad \text{sujeito} \quad x^v \in X^v(x^{-v}). \quad (3.2.1)$$

Assim, como acontece em um jogo de estratégias puras, as escolhas de cada jogador devem ser de forma simultânea e independentes, portanto, é preciso de um conceito de solução em um jogo de estratégia generalizado. Para isso, definamos a multifunção $X : K \rightrightarrows K$ tal que para todo $x \in K$:

$$X(x) = \prod_{v=1}^N X^v(x^{-v}) = \{y \in \mathbb{R}^n : y^v \in X^v(x^{-v}), \quad \forall v = 1, \dots, N\}. \quad (3.2.2)$$

Definição 3.2.1. *Um problema de Equilíbrio de Nash generalizado (GNEP) é o problema de encontrar $x^* = (x^{*,1}, \dots, x^{*,N}) \in X(x^*)$ tal que para cada $v = 1, \dots, N$ o bloco $x^{*,v}$ seja solução do problema.*

$$P^v(x^{*,-v}) : \min f^v(x^v, x^{*,-v}) \quad \text{sujeito} \quad x^v \in X^v(x^{*,-v}). \quad (3.2.3)$$

O ponto x^* é chamado de Equilíbrio de Nash generalizado (ENG).

Podemos definir também um ENG como a solução de um problema de ponto fixo, como o caso de um NEP. Para isso, consideramos o conjunto de melhor resposta para cada jogador $v = 1, \dots, N$:

$$B^v(x^{-v}) = \{x^v \in \mathbb{R}^{n_v} : f^v(x^v, x^{-v}) \leq f^v(y^v, x^{-v}), \quad \forall y^v \in X^v(x^{-v})\}$$

e definimos $B : K \rightrightarrows K$ como:

$$B(x) = \prod_{v=1}^N B^v(x^{-v}). \quad (3.2.4)$$

Definição 3.2.2. *O GNEP é o problema de encontrar $x^* = (x^{*,1}, \dots, x^{*,N}) \in X(x^*)$ (ENG) tal que*

$$x^* \in B(x^*).$$

Note que nessa definição está também implícito o fato que x^* seja um ponto fixo da multifunção $X : K \rightrightarrows K$.

Em um NEP para todo $v = 1, \dots, N$ tem-se que $X^v(x^{-v}) = K^v$ para toda $x^{-v} \in K^{-v}$, isto é, o conjunto de estratégias do jogador v não está influenciado pelas escolhas dos outros jogadores. Assim, os GNEPs generalizam os NEPs no sentido que o conjunto de estratégias do jogador v , X^v , depende das escolhas dos outros jogadores x^{-v} , desta forma, o conjunto de estratégias do jogador v é representado por $X^v(x^{-v})$.

Exemplo 3.2.1. *Considere o GNEP dado pelo exemplo 3.1.1 e as funções ponto conjunto $X^v : \{500, 800\} \rightrightarrows \{500, 800\}$ para $v = 1, 2$ definidas por $X^1(500) = \{500\}$, $X^1(800) = \{800\}$, $X^2(800) = \{800\}$ e $X^2(500) = \{500, 800\}$. Neste caso, os pontos $(500, 500)$ e $(800, 800)$ são os únicos ENG do jogo.*

A maioria dos artigos sobre GNEPs consideram $K^v = \mathbb{R}^{n_v}$ e

$$X^v(x^{-v}) = \{x^v \in \mathbb{R}^{n_v} : g^v(x^v, x^{-v}) \leq 0\}, \quad (3.2.5)$$

onde $g^v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_v}$, assim o GNEP é determinado com os problemas para o jogador v dados por:

$$\begin{aligned} P^v(x^{-v}) : \quad & \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) \\ & g_i^v(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_v. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Em alguns casos, K^v é tomado como $K^v = \{x^v \in \mathbb{R}^{n_v} : h^v(x^v) \leq 0\}$, onde $h^v : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{l_v}$. Nesse caso, o problema para o jogador v é dado por:

$$\begin{aligned} P^v(x^{-v}) : \quad & \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) \\ & g_i^v(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_v \\ & h_j^v(x^v) \leq 0 \quad j = 1, \dots, l_v. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Note que em (3.2.7) as restrições h^v podem ser consideradas como parte de g^v , e então (3.2.7) se reduz a (3.2.6). A representação (3.2.7) é usada geralmente quando se estuda métodos de penalidades para GNEP.

Classes de GNEPs

Nesta parte apresentaremos os tipos de GNEPs mais comuns na literatura e que servem como modelos em muitas aplicações. A classe de GNEPs de jogadores convexos é a classe de GNEPs que tem sido mais estudada.

GNEPs de jogadores convexos

Um GNEP se diz GNEP de jogadores convexos se, para cada v e x^{-v} , os conjuntos $X^v(x^{-v})$ são convexos e fechados e as funções $f^v(\cdot, x^{-v})$ são convexas. Quando $X^v(x^{-v})$ é definida como em (3.2.5), a convexidade de $X^v(x^{-v})$ é equivalente a convexidade de $g^v(\cdot, x^{-v})$ para cada x^{-v} fixado.

GNEPs Lineares

Uma subclasse importante de GNEPs de jogadores convexos são os Problemas de Equilíbrio de Nash Generalizados Lineares (LGNEP), isto é, GNEPs em que as funções objetivo e as restrições de cada jogador são lineares da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P^v(x^{-v}) : \quad & \min_{x^v} \langle c^v, x^v \rangle \\ & A^v x^v + B^v x^{-v} \leq b^v, \end{aligned}$$

onde $A^v \in \mathbb{R}^{m_v \times n_v}$, $B^v \in \mathbb{R}^{m_v \times (n - n_v)}$, $c^v \in \mathbb{R}^{n_v}$ e $b^v \in \mathbb{R}^{m_v}$.

Esta classe de problemas modela, por exemplo, problemas de transporte e alguns problemas de mercado simples. Ademais alguns métodos desenvolvidos para GNEPs exigem como hipóteses a não singularidade de algumas segundas derivadas e, portanto, não são aplicáveis para os LGNEPs. Por outro lado, aproveitando a estrutura de um LGNEP, podem se obter resultados mais fortes em alguns algoritmos já feitos para um GNEP geral. Os LGNEPs foram estudados, por exemplo, em [DSM16], [SSM16] e [Dre17].

GNEPs com restrições conjuntas

Um GNEP se diz GNEP com restrições conjuntas se para algum conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tem-se:

$$X^v(x^{-v}) = \{x^v : (x^v, x^{-v}) \in C\}, \quad (3.2.8)$$

para cada $v = 1, \dots, N$ e cada x^{-v} .

Uma classe importante desse tipo de GNEP são os GNEPs conjuntamente convexos que são também GNEPs de jogadores convexos, onde para cada $v = 1, \dots, N$ ocorre (3.2.8) com um conjunto não vazio, convexo e fechado $C \subseteq \mathbb{R}^n$.

É comum na literatura de GNEPs que o conjunto C tenha a forma:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) \leq 0\}, \quad (3.2.9)$$

onde $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e tem componentes convexas. Nesse caso, (3.2.8) pode-se expressar como:

$$X^v(x^{-v}) = \{x^v \in \mathbb{R}^{n_v} : G(x^v, x^{-v}) \leq 0\}, \quad (3.2.10)$$

que são conjuntos fechados e convexas. Note-se que um GNEP conjuntamente convexo é um GNEP de jogadores convexos com $G = g^1 = \dots = g^N$.

GNEP: Jogos potenciais generalizados

Um GNEP é chamado de jogo potencial generalizado se é um GNEP com restrições conjuntas tal que:

1. Os conjuntos viáveis de cada jogador $X^v(x^{-v})$ é dado por (3.2.8) com um conjunto não vazio e fechado $C \subseteq \mathbb{R}^n$.
2. Existe uma função contínua $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada x^{-v} e $z^v, y^v \in X^v(x^{-v})$ se

$$f^v(y^v, x^{-v}) - f^v(z^v, x^{-v}) > 0$$

implica

$$Q(y^v, x^{-v}) - Q(z^v, x^{-v}) \geq \sigma(f^v(y^v, x^{-v}) - f^v(z^v, x^{-v}))$$

para alguma função de força $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Uma função $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é chamada função de força se $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(t_k) = 0$ implica $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$.

Entre os GNEPs potenciais temos, por exemplo, GNEPs onde para cada $v = 1, \dots, N$ as funções objetivo de cada jogador f^v dependem unicamente da variável x^v e também os GNEPs onde $f^v(x) = c(x) + d^v(x^v)$, em que a função c é a mesma para todo jogador. Estes tipos de GNEPs foram estudados em [FPS11], onde algoritmos de decomposição para a resolução deste tipo de problemas para o caso convexo e não convexo, são propostos.

Para o caso dos GNEPs com restrições conjuntas, uma relação útil existe entre os conjuntos C e $X(x)$.

Proposição 3.2.1. *Para qualquer GNEP com restrições conjuntas dado por (3.2.8), ocorre que:*

$$x \in X(x) \Leftrightarrow x^v \in X^v(x^{-v}), \quad \forall v = 1, \dots, N \Leftrightarrow x \in C.$$

Demonstração. É imediato da definição 3.2.8. □

Este simples resultado permite que certas soluções de um GNEP conjuntamente convexo possam ser calculadas por meio de um problema de otimização como veremos mais adiante.

Assim, os pontos fixos da multifunção $x \rightarrow X(x)$ coincidem com os elementos do conjunto C . Em geral, não ocorre que $C \subseteq X(x)$ ou que $X(x) \subseteq C$.

Exemplo 3.2.2. Considere um GNEP com dois jogadores e $C = \{(x^1, x^2) : x^1 + x^2 \leq 1, -x^1 \leq 0, -x^2 \leq 0\}$, para o ponto $x = (\frac{1}{2}, 0) \in C$ temos que $X(x) = X^1(0) \times X^2\left(\frac{1}{2}\right) = [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Para um GNEP qualquer, definimos o conjunto viável para o GNEP como:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : x^v \in X^v(x^{-v}), \quad \forall v = 1, \dots, N\}. \quad (3.2.11)$$

No caso de um GNEP com restrições compartilhadas tem-se $W = C$.

Se este conjunto W coincide com o conjunto de pontos fixos de $x \rightarrow X(x)$, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.2. Para qualquer GNEP com W definido em (3.2.11), temos que:

$$x \in X(x) \Leftrightarrow x^v \in X^v(x^{-v}), \quad v = 1, \dots, N \Leftrightarrow x \in W.$$

Demonstração. É imediato de (3.2.11). □

Normalmente, para GNEPs onde os jogadores compartilham pelo menos uma restrição em comum, não existe um único ENG e as soluções não são isoladas. Ainda para GNEPs bem comportadas como GNEPs lineares, o conjunto de ENG não possui propriedades topológicas específicas como conexão ou convexidade.

Exemplo 3.2.3. Considere o seguinte GNEP linear com dois jogadores ($N = 2$).

$$\begin{array}{ll} \text{Jogador 1} & \min_{x^1} -x^1 \quad \text{s.t.} \quad \frac{x^1}{2} - x^2 \leq 0; x^2 - 2x^1 \leq 0, x^1 + x^2 - 1 \leq 0. \\ \text{Jogador 2} & \min_{x^2} -x^2 \quad \text{s.t.} \quad \frac{x^1}{2} - x^2 \leq 0; x^2 - 2x^1 \leq 0, x^1 + x^2 - 1 \leq 0. \end{array}$$

O conjunto solução deste GNEP é $SOL(GNEP) = \{(t, 1-t) : \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\} \cup \{(0, 0)\}$ que não é conexo, portanto, não convexo.

Outros exemplos onde o conjunto solução é conexo mas não convexo, podem ser construídos de forma análoga. O GNEP do Exemplo 3.2.4 descrito mais adiante, tem como conjunto solução um conjunto convexo, portanto, conexo.

3.2.1 Reformulações de GNEPs

Alguns GNEPs podem ser reformuladas em outros bem conhecidos tipos de problemas. Aqui é importante salientar que podemos ter dois tipos de reformulações: totais e parciais. Geralmente para poder ter reformulações totais e, portanto, equivalências nas soluções, hipóteses de convexidade sobre o GNEP são necessárias. Um GNEP pode ser reformulado (total ou parcialmente), por exemplo, como um sistema de equações, um problema de desigualdade variacional, problemas de desigualdade quase-variacional, um problema de otimização, um problema de equilíbrio, problema de ponto fixo e como problema de quase-equilíbrio entre as mais conhecidas. Conhecer estas reformulações são úteis, pois permitem estudar propriedades das soluções, assim como permitem construir algoritmos para calcular pontos de equilíbrio.

Reformulações Variacionais

Existe uma conexão entre algumas soluções de GNEPs conjuntamente convexos e desigualdades variacionais e também existe relação entre as soluções de GNEPs de jogadores convexos e de desigualdades quase variacionais. Aqui apresentamos estas conexões.

Desigualdades quase variacionais

Definição 3.2.3. *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma multifunção onde $K(x)$ é convexo e fechado para todo $x \in \mathbb{R}^n$. O problema de achar um $x = x^*$ que satisfaz*

$$x \in K(x), \quad F(x)^T(y - x) \geq 0, \quad \forall y \in K(x),$$

é chamado um problema de desigualdade quase variacional e denotado por $QVI(K, F)$. Se, para algum subconjunto convexo e fechado $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ocorre que $K(x) = K$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então a $QVI(K, F)$ é chamado de desigualdade variacional e denotado por $VI(K, F)$.

Para mostrar a conexão entre GNEPs e QVIs consideremos o GNEP onde o problema para o v -ésimo jogador é dado por (3.2.6) e definamos $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:

$$F(x) = \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} f^1(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} f^N(x) \end{pmatrix}, \quad (3.2.12)$$

onde as funções $f^1, \dots, f^N$ são C^1 . Se a multifunção $X : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ definida em (3.2.2) é fechada e convexa, então a $QVI(X, F)$ é bem definida.

O teorema seguinte mostra a relação entre o GNEP (3.2.6) e o $QVI(X, F)$.

Teorema 3.2.1. *Se as funções $f^1, \dots, f^N$ são C^1 e o GNEP (3.2.6) é de jogadores convexos, então qualquer solução x^* do GNEP é solução do $QVI(X, F)$ e vice-versa.*

Demonstração. De fato, x^* é uma solução do GNEP se, e somente se, para cada $v = 1, \dots, N$ tem-se que $x^{*,v}$ é solução do problema:

$$\min_{x^v} f^v(x^v, x^{*, -v}) \quad \text{sujeito} \quad x^v \in X^v(x^{*, -v}).$$

Pelas hipóteses de convexidade, isto é, equivalente a para todo $v = 1, \dots, N$, $x^{*,v}$ seja solução do problema:

$$x^v \in X^v(x^{*, -v}) \quad \text{e} \quad \nabla_{x^v} f^v(x^v, x^{*, -v})(y^v - x^v) \geq 0, \quad \forall y^v \in X^v(x^{*, -v}), \quad (3.2.13)$$

Isso implica que:

$$x^* \in X(x^*), \quad F(x^*)^T(y - x^*) \geq 0, \quad \forall y \in X(x^*), \quad (3.2.14)$$

e portanto, x^* é solução do $QVI(X, F)$.

Por outro lado, seja $v = 1, \dots, N$, fixo e arbitrário, seja $x^v \in X^v(x^{*, -v})$ e consideremos o vetor $\bar{y} = (x^v, x^{*, -v})$, então $\bar{y} \in X(x^*)$. Usando (3.2.14) temos que $x^{*,v}$ satisfaz (3.2.13), então x^* é solução do GNEP. $\square$

Salientamos que se unicamente assumimos convexidade para os conjuntos $X^v(x^{-v})$, então somente a inclusão $SOL(GNEP) \subseteq SOL(QVI(X, F))$ é verdade.

No caso de um NEP, i.e, para cada $v = 1, \dots, N$, $X^v(x^{-v}) = X^v$ para qualquer x^{-v} com $X^v \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ fixo, com as hipóteses do teorema anterior tem-se que: x^* é solução do NEP se, e somente se, é solução da desigualdade variacional $VI(\prod_{i=1}^N X^i, F)$.

Para o caso de um GNEP conjuntamente convexo temos uma reformulação parcial usando uma VI.

Teorema 3.2.2. *Se as funções $f^1, \dots, f^N$ são C^1 e o GNEP é conjuntamente convexo, então $SOL(VI(C, F)) \subseteq SOL(GNEP)$.*

Demonstração. De fato, seja x^* uma solução do $VI(C, F)$, desejamos provar que para cada $v = 1, \dots, N$, $x^{*,v}$ é solução do problema:

$$\min_{x^v} f^v(x^v, x^{*, -v}) \quad \text{sujeito} \quad x^v \in X^v(x^{*, -v}). \quad (3.2.15)$$

Seja $x^v \in X^v(x^{*, -v})$ fixo e arbitrário, seja $y = (x^v, x^{*, -v})$, então $y \in C$, como x^* é solução da $VI(C, F)$, então

$$0 \leq F(x^*)^T(y - x^*) = \nabla_{x^v} f^v(x^*)^T(x^v - x^{*,v}),$$

pelas hipóteses de convexidade, isto implica que $x^{*,v}$ seja solução de (3.2.15) para cada $v = 1, \dots, N$, então x^* é solução do GNEP. $\square$

Temos a seguinte definição.

Definição 3.2.4. *Qualquer solução de $VI(C, F)$ é chamado um equilíbrio variacional ou equilíbrio normalizado de Nash (ENN) do GNEP.*

O resultado anterior não garante a existência de soluções do $VI(C, F)$. Uma hipóteses adicional seria, por exemplo, exigir a compacidade de C . No teorema anterior, pseudo-convexidade é suficiente para obter o mesmo resultado. Por outra parte, a inclusão no teorema anterior pode ser estrita, consideremos o seguinte exemplo de [FFP07].

Exemplo 3.2.4. *Seja o GNEP conjuntamente convexo dado por:*

$$\begin{aligned} \text{Jogador 1} \quad & \min_{x^1} (x^1 - 1)^2 \quad \text{s.t.} \quad x^1 + x^2 \leq 1. \\ \text{Jogador 2} \quad & \min_{x^2} (x^2 - \frac{1}{2})^2 \quad \text{s.t.} \quad x^1 + x^2 \leq 1. \end{aligned}$$

O conjunto viável é $C = \{(x^1, x^2) : x^1 + x^2 \leq 1\}$, o conjunto solução deste GNEP é

$$SOL(GNEP) = \left\{ (\alpha, 1 - \alpha) : \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}$$

e $F(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 2(x^1 - 1) \\ 2x^2 - 1 \end{pmatrix}$ é um operador fortemente convexo. Desta forma a $VI(X, F)$ possui uma única solução. Temos que $SOL(VI(X, F)) = \{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\}$ pode ser computado facilmente usando a definição de VI, assim $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ é o único equilíbrio variacional do GNEP.

Trabalhos sobre GNEPs usando estas reformulações variacionais podem ser achados por exemplo em [HZQX12] e [HWW12]. Em geral, algoritmos para QVIs ou VIs podem ser usados para calcular soluções de GNEPs de jogadores convexos e conjuntamente convexos, respectivamente.

Reformulações como Problemas de Equilíbrio

Seja C um conjunto convexo, fechado e não vazio e $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ uma bi função com $f(x, x) = 0$. O problema de equilíbrio associado a f e C é denotado por $PE(f, C)$ e definido como:

$$PE(f, C) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que} \\ f(x^*, y) \geq 0, \quad \text{para todo, } y \in C \end{array} \right\}.$$

É bem conhecido que uma VI pode ser reformulada como um problema de equilíbrio. Portanto, podemos calcular os equilíbrios normalizados de um GNEP conjuntamente convexo com conjunto de restrições conjuntas C , através de um problema de equilíbrio. Basta tomar $f(x, y) = F(x)^T(y - x)$, então temos $SOL(PE(f, C)) \subseteq SOL(GNEP)$. Em [MSY12] e [Kon16] algoritmos para GNEPs conjuntamente convexas são definidos usando este enfoque.

Uma reformulação total para um GNEP geral pode ser obtida usando problemas de quase-equilíbrio.

Reformulações como problemas de quase equilíbrio

Seja $C : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma multifunção e $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ uma bi função com $f(x, x) = 0$. O problema quase equilíbrio (QEP), associado a f e C e denotado por $QEP(f, C)$ é definido como:

$$QEP(f, C) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } x^* \in C(x^*) \text{ tal que} \\ f(x^*, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in C(x^*) \end{array} \right\}.$$

É conhecido que um problema de quase equilíbrio tem como caso particular uma QVI, portanto, toda GNEP de jogadores convexas pode ser reformulado como um QEP. Mais ainda, qualquer GNEP pode ser reformulado como um QEP. Portanto, de todos os diferentes tipos de problemas que reformulam um GNEP, a única que reformula um GNEP geral totalmente é um QEP. Consideramos o GNEP (3.2.6) e definimos a função de Nikaido-Isoda [NI55].

Definição 3.2.5. (*Função de Nikaido-Isoda*)

$$\Psi(x, y) = \sum_{v=1}^N [f^v(x^v, x^{-v}) - f^v(y^v, x^{-v})] \quad (3.2.16)$$

Essa função representa a soma dos melhoramentos unilaterais entre as ações x e y .

Usando a função de Nikaido Isoda e tomando $C : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ como $C(x) = X(x)$, onde $X : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ foi definido em (3.2.2), definimos o $QEP(f, X)$ com $f = -\Psi$. Para este QEP temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3. *Consideremos o GNEP (3.2.6) e o problema de quase-equilíbrio $QEP(f, X)$, então $SOL(GNEP) = SOL(QEP(f, X))$.*

Demonstração. Seja x^* uma solução do GNEP (3.2.6), então para cada $v = 1, \dots, N$ temos que

$$f^v(x^*) \leq f^v(y^v, x^{*, -v}), \quad \forall y^v \in X^v(x^{*, -v}),$$

então

$$x^* \in X(x^*), \quad f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in X(x^*).$$

Reciprocamente, suponha que x^* é uma solução do $QEP(f, X)$, então $x^* \in X(x^*)$ e

$$f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in X(x^*).$$

Seja $y^v \in X^v(x^{*, -v})$, então $y = (y^v, x^{*, -v}) \in X(x^*)$, então

$$f^v(y^v, x^{*, -v}) - f^v(x^*) = f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y^v \in X^v(x^{*, -v}),$$

portanto, x^* é um ponto de Equilíbrio de Nash Generalizado. $\square$

Algoritmos para resolver numericamente QEPs são escassos. Segundo nosso conhecimento, os seguintes trabalhos foram desenvolvidos para este tipo de problemas [SVN⁺13], [BP16] e recentemente [VSNV17].

Reformulação como um problema de otimização

Um GNEP conjuntamente convexo pode ser reformulado parcialmente como um problema de otimização restrito e irrestrito. Essa reformulação permite obter os equilíbrios normalizados de um GNEP conjuntamente convexo. Para ver isto, para cada $x \in X(x)$ definimos:

$$V(x) = \max_{y \in X(x)} \Psi(x, y) \quad (3.2.17)$$

e

$$Y(x) = \{y \in X(x) : V(x) = \Psi(x, y)\}. \quad (3.2.18)$$

Supondo que em (3.2.17) o máximo esteja bem definido, pode-se mostrar que $V(x)$ é não negativa para todo $x \in X(x)$ e que x é uma solução do GNEP se, e somente se, $x \in X(x)$ e $V(x) = 0$. Também temos que x é solução do GNEP se, e somente se, x é um ponto fixo da multifunção $x \rightarrow Y(x)$.

Em geral, em (3.2.17) o máximo pode não existir. Além disso, ainda que V esteja bem definida esta pode não ser diferenciável, mesmo que as funções f^v possam ser suaves (ver exemplo em [vHK09]).

Em [vHK09], define-se uma versão regularizada da função de Nikaido-Isoda que mantém as propriedades da função de Nikaido-Isoda original, mas que garantem a boa definição de V sob hipóteses de convexidade.

Definição 3.2.6. (*Função regularizada de Nikaido-Isoda*) Para $\alpha \geq 0$ (parâmetro de regularização) definimos

$$\Psi_\alpha(x, y) = \sum_{v=1}^N [f^v(x^v, x^{-v}) - f^v(y^v, x^{-v})] - \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2 \quad (3.2.19)$$

e define-se:

$$V_\alpha(x) = \max_{y \in X(x)} \Psi_\alpha(x, y) \quad (3.2.20)$$

e

$$Y_\alpha(x) = \{y \in X(x) : V_\alpha(x) = \Psi_\alpha(x, y)\}. \quad (3.2.21)$$

As funções anteriores tem as seguintes propriedades:

Teorema 3.2.4. Para o caso de um GNEP de jogadores convexos e para $\alpha \geq 0$, a função regularizadora V_α tem as seguintes propriedades:

1. $V_\alpha(x) \geq 0$ para todo $x \in X(x)$,
2. x^* é um ENG se, e somente se, $V_\alpha(x^*) = 0$ e $x^* \in X(x^*)$,
3. x^* é um ENG se, e somente se, x^* é um ponto fixo da multifunção $x \rightarrow Y_\alpha(x)$,
4. Se $\alpha > 0$, então para cada $x \in X(x)$ existe um único vetor $y_\alpha(x) = (y_\alpha^1(x), \dots, y_\alpha^N(x)) \in X(x)$ tal que $Y_\alpha(x) = \{y_\alpha(x)\}$ e para cada $v = 1, \dots, N$

$$y_\alpha^v(x) = \operatorname{argmin}_{y^v \in X^v(x^{-v})} \left\{ f^v(y^v, x^{-v}) + \frac{\alpha}{2} \|x^v - y^v\|^2 \right\}.$$

Demonstração. Ver [vHK09]. □

Note-se que as partes 1-3 ocorrem para $\alpha = 0$ sem hipóteses de convexidade. Pelas partes 1 e 2 temos que x^* é um Equilíbrio de Nash se, e somente se, é solução de:

$$\min_{x \in X(x)} V_\alpha(x). \quad (3.2.22)$$

Quando temos um GNEP de jogadores convexos, pela parte 4 do teorema anterior, temos que (3.2.22) está bem definido se $\alpha > 0$. Assim, obtemos um problema de quase-otimização. O termo quase é pelo fato que o conjunto viável $X(x)$ depende de x . Entretanto, não existe (até hoje) um algoritmo que permita resolver este tipo de problemas para um conjunto de restrições, em geral, $X(x)$. Pelo teorema anterior, reformulações para GNEP como problemas de quase-otimização e pontos fixos podem ser construídos, mas, em geral, não são diferenciáveis e difíceis de se resolver.

Para um GNEP com restrições conjuntas, pela Proposição 3.2.1, o problema de quase-otimização vira um problema clássico de otimização da forma

$$\min_{x \in C} V_\alpha(x). \quad (3.2.23)$$

Mas, ainda neste caso, a função $V_\alpha(x)$ pode permanecer não diferenciável. Para poder obter reformulações diferenciáveis vamos considerar o caso de um GNEP conjuntamente convexo e vamos modificar o conjunto viável na definição de $\hat{V}_\alpha$.

Substituindo na definição dada por (3.2.20) o conjunto C por $X(x)$, obtemos:

$$\hat{V}_\alpha(x) = \max_{y \in C} \Psi_\alpha(x, y) \quad (3.2.24)$$

e

$$\hat{Y}_\alpha(x) = \left\{ y \in C : \hat{V}_\alpha(x) = \Psi_\alpha(x, y) \right\}.$$

O teorema seguinte estabelece as conexões entre os ENN e as funções definidas.

Teorema 3.2.5. *Para um GNEP conjuntamente convexo e $\alpha \geq 0$, a função regularizadora $\hat{V}_\alpha$ tem as seguintes propriedades:*

1. $\hat{V}_\alpha(x) \geq 0$, para todo $x \in C$,
2. x^* é um ENN se, e somente se, $x^* \in C$ e $\hat{V}_\alpha(x^*) = 0$,
3. x^* é um ENN se, e somente se, x^* é um ponto fixo da função $x \rightarrow \hat{Y}_\alpha(x)$,
4. Se $\alpha > 0$, então para cada $x \in C$ existe um único maximizador $\hat{y}_\alpha(x) \in C$ tal que

$$\hat{y}_\alpha(x) = \operatorname{argmax}_{y \in C} \Psi_\alpha(x, y)$$

e $\hat{y}_\alpha(x)$ é contínua em x ,

5. Se $\alpha > 0$ e $f^1, \dots, f^N$ são C^1 , então $\hat{V}_\alpha$ é C^1 .

Demonstração. Ver [vHK09]. □

Em particular, x^* é um equilíbrio normalizado de Nash se, e somente se, $\hat{V}_\alpha(x^*) = 0$ e x^* é uma solução de:

$$\min_{x \in C} \hat{V}_\alpha(x). \quad (3.2.25)$$

Note-se que da parte 4, x^* é um ENN se, e somente se, é solução da equação $x = y_\alpha(x)$. Assim, o teorema anterior permite obter reformulações parciais de GNEPs conjuntamente convexos (para calcular só ENN) tanto como um problema de otimização com restrições e como de um sistema de equações. Estes resultados tem servido para adaptar diversos métodos de otimização para o cálculo de ENN resolvendo o Problema 3.2.25.

O seguinte teorema permite obter a expressão para $\nabla \hat{V}_\alpha(x)$.

Teorema 3.2.6. *Suponha que a condição 4 do teorema anterior é satisfeita, então, a função regularizadora $\hat{V}_\alpha$ é continuamente diferenciável para toda $x \in C$ e seu gradiente é dado por:*

$$\begin{aligned} \nabla \hat{V}_\alpha(x) &= \sum_{i=1}^N [\nabla f^i(x) - \nabla f^i(\hat{y}_\alpha(x), x^{-i})] + (\nabla_{x^1} f^1(\hat{y}_\alpha^1(x), x^{-1}), \dots, \nabla_{x^N} f^N(\hat{y}_\alpha^N(x), x^{-N})) \\ &\quad - \alpha(x - \hat{y}_\alpha(x)), \end{aligned}$$

onde $\hat{y}_\alpha(x)$ denota o único maximizador da parte 4 do Teorema 3.2.5.

Demonstração. Ver [vHK09]. □

Usando a função $\hat{V}_\alpha$, podemos reformular parcialmente um GNEP conjuntamente convexo como um problema de otimização sem restrições para encontrar pontos ENN. Para isso, define-se para $0 < \alpha < \beta$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{V}_{\beta\alpha}(x) = \hat{V}_\beta(x) - \hat{V}_\alpha(x).$$

O seguinte teorema estabelece a conexão entre os ENN e a função $\hat{V}_{\beta\alpha}$.

Teorema 3.2.7. *Para um GNEP de jogadores convexos, as seguintes propriedades para a função $\hat{V}_{\beta\alpha}$ ocorrem:*

1. $\hat{V}_{\beta\alpha}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$,
2. x^* é um ENN do GNEP se, e somente se, x^* é o mínimo global de $\hat{V}_{\beta\alpha}$ com $\hat{V}_{\beta\alpha}(x^*) = 0$,
3. Se as funções $f^1, \dots, f^N$ são C^1 , então $\hat{V}_{\beta\alpha}$ é C^1 .

Demonstração. Ver [vHK09]. □

Do teorema anterior, o conjunto de pontos de ENN de um GNEP conjuntamente convexo coincide com o conjunto de minimizadores globais do problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{V}_{\beta\alpha}(x). \tag{3.2.26}$$

Usando a reformulação (3.2.26), alguns outros trabalhos usando técnicas de otimização foram desenvolvidos para calcular equilíbrios normalizados. Ver, por exemplo, [QLZ07], [QZ13] e [DvHKF13].

Em [Dre12], estende-se as ideias anteriores para a classe de GNEP de jogadores convexos reformulando o GNEP tanto como um problema de otimização restrito e como um problema de otimização irrestrito cujos conjuntos soluções coincidem com o conjunto de ENG do GNEP.

Métodos de penalidade

Como foi visto na seção anterior, os métodos tipo penalidade para problemas de otimização encontram uma solução como limite de uma sequência de soluções de problemas penalizados que na prática são mais fáceis de resolver que o problema original. Essa ideia foi aplicada para GNEPs nos artigos, [PF05], [FP06], [FK10b], [FL11], [Fuk11] e [YZZ11]. Estes tipos de métodos foram aplicados para GNEPs da forma (3.2.7) e (3.2.6).

Em todos esses artigos, para cada problema de cada jogador, se penalizam as restrições compartilhadas, mantendo as restrições individuais (caso houvessem), assim em cada iteração os métodos de penalidade para GNEPs resolvem NEPs (que na prática parecem ser mais simples que os GNEPs).

Em [KF10], se estuda um método tipo barreira para o GNEP com restrições compartilhadas de igualdade lineares e restrições de desigualdade individuais. Diferentemente dos outros artigos, os autores penalizam as restrições individuais mantendo fixas as restrições compartilhadas, assim em cada iteração, um GNEP é resolvido.

Nesta seção vamos comentar brevemente os resultados dados nestes artigos. Salientamos que em todos esses casos se consideram GNEPs de jogadores convexos.

Em [FP06], o método de penalidade exata de otimização é adaptado para resolver um GNEP da forma (3.2.7). Mediante este enfoque, é possível reduzir a solução de um GNEP resolvendo um único NEP com a desvantagem de que as funções objetivos do NEP, em geral, não são diferenciáveis.

Em [YZZ11], se adapta o algoritmo de penalidade interna (2.2.1) para um GNEP de jogadores convexos da forma (3.2.7). Em cada iteração do algoritmo se resolve um NEP com restrições que se obtém penalizando as funções objetivo de cada jogador, usando uma função de barreira logarítmica.

Para a convergência do método, a condição de qualificação EMFCQ-GNEP (que será apresentada mais adiante na Definição 4.2.3) é usada. Condições suficientes para convergência super linear de um método de Newton semi-diferenciável usado para resolver os sistemas KKT dos NEPs em cada iteração são dados.

Em [PF05], o clássico método do Lagrangiano Aumentado é adaptado em sua forma básica, isto é, com os parâmetros de penalidade convergindo ao infinito, para resolver um QVI. A hipótese principal para provar convergência é a condição estendida de Mangasarian-Fromovitz (EMFCQ-GNEP), que também apresentaremos mais adiante. O algoritmo é particularizado para resolver um GNEP de jogadores convexos da forma (3.2.7).

Em [Fuk11], se apresenta um método de penalidade incremental para resolver o GNEP (3.2.7) penalizando as restrições compartilhadas. Desta forma, em cada iteração se resolve um NEP com restrições. Define-se os ENG restritos, que generalizam os equilíbrios variacionais, e se define um algoritmo que calcula esses pontos tendo o algoritmo de penalidade incremental como um sub-procedimento.

Em [FK10b], se usa uma penalidade externa para resolver o GNEP (3.2.6) de jogadores convexos, onde a função penalizadora é diferente das clássicas dadas em otimização e onde os parâmetros de penalidade ρ^v são atualizados de uma forma particular. Nesse caso, os subproblemas são NEPs irrestritos, onde o problema para o v -ésimo jogador é:

$$NEP_\rho : \quad Q^v(x^{-v}) : \quad \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) + \rho^v \|g_+^v(x)\|_\gamma, \quad (3.2.27)$$

onde $\rho = (\rho^v)_{v=1}^N > 0$ é o termo penalizador para o v -ésimo jogador. Definimos $\Psi(x) = \|g_+^v(x)\|_\gamma$ para $\gamma > 1$.

Das hipóteses de convexidade, a NEP_ρ é um NEP de jogadores convexos não diferenciável. Note-se que o termo penalizador é diferenciável em qualquer ponto não viável, esta característica é usada fortemente na prova de convergência do algoritmo. Para tratar com a não diferenciabilidade da função penalizada, definimos para $x \in \mathbb{R}^n$ o conjunto das restrições não viáveis em x :

$$P(x) = \{v \in \{1, \dots, N\} : \exists i \in \{1, \dots, m_v\} : g_i^v(x) > 0\}.$$

O seguinte algoritmo é definido em [FK10b].

Algoritmo 3.2.1. Algoritmo de Penalidade para GNEPs

P0) Escolhemos $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 1$; $\rho^0 \in \mathbb{R}_+^N$ e $c^v \in (0, 1)$. Fazer $k = 0$.

P1) Se x^k é solução do GNEP, parar.

P2) Para cada $v = 1, \dots, N$, se $v \in P(x^k)$ e

$$\|\nabla_{x^v} f^v(x^k)\| > c^v \rho^{k,v} \|\nabla_{x^v} (\|g^v(x^k)_+\|_\gamma)\|,$$

fazer $\rho^{k+1,v} = 2\rho^{k,v}$, caso contrário $\rho^{k+1,v} = \rho^{k,v}$.

P3) Achar $x^{k+1} = \mathbb{A}(x^k)$. Fazer $k = k + 1$ e ir ao passo P1.

Alguns comentários à respeito do algoritmo são necessários. A ideia para atualizar os parâmetros de penalidade ρ^v é que se x^k é uma solução do NEP_ρ , então para cada $v \in P(x^k)$ a função objetivo

de $Q^v(x^{-v})$: $P^v(x, \rho^v)$ é diferenciável em x^k , então $\nabla_{x^v} P^v(x^k, \rho^v) = 0$. Logo o passo P2 é satisfeito. Assim, P2 é usado para forçar a viabilidade para as restrições $v \in P(x^k)$.

No passo P3, $\mathbb{A}$ é um algoritmo com a propriedade que dado um ponto inicial x^0 e um parâmetro $\rho > 0$, gera uma sequência $\{x^k\}$ cujos pontos de acumulação são soluções do NEP_ρ . É interessante notar que em cada iteração do algoritmo principal só se calcula uma iteração do algoritmo $\mathbb{A}$ e não uma solução do NEP_ρ .

Teorema 3.2.8. *Seja $\{x^k, \rho^{k,1}, \dots, \rho^{k,N}\}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 3.2.1 e seja*

$$\mathbb{I}_\infty = \{v \in \{1, \dots, N\} : \rho^{k,v} \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty\}.$$

Se $\mathbb{I}_\infty = \emptyset$, então qualquer ponto de acumulação x^ de $\{x^k\}$ é uma solução do GNEP.*

Se $\mathbb{I}_\infty \neq \emptyset$ e se a sequência $\{x^k\}$ é limitada, então para cada $v \in \mathbb{I}_\infty$ existe um ponto de acumulação x^ de $\{x^k\}$ tal que uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- a) $\|g^v(x^{*,v}, x^{*, -v})_+\|_\gamma = \min_{x^v} \|g^v(x^v, x^{*, -v})_+\|_\gamma > 0$;*
- b) $x^{*,v}$ é um ponto de Fritz John do problema $P^v(x^{*, -v})$, mas não é um minimizador global;*
- c) $x^{*,v}$ é um minimizador global de $P^v(x^{*, -v})$.*

Demonstração. Ver [FK10b]. □

É fácil ver que se um ponto x^k é solução do NEP_ρ e x^k é viável, então x^k é solução do GNEP.

O seguinte teorema dá condições suficientes para que os parâmetros de penalidade sejam limitados e, portanto, todo ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo seja uma solução do GNEP.

Teorema 3.2.9. *Suponha que a sequência gerada pelo algoritmo 3.2.1 é limitada. Considere as seguintes asserções.*

- a) A EMFCQ-GNEP (Definição 4.2.3) ocorre em um ponto de acumulação x .*
 - b) A CQ_γ (ver [FK10b]) ocorre em x .*
 - c) Os parâmetros de penalidade são atualizados em um número finito de passos, i.e., $\mathbb{I}_\infty = \emptyset$.*
- Então ocorre que:*

$$a \Rightarrow b \Rightarrow c.$$

Demonstração. Ver [FK10b]. □

No mesmo artigo, o algoritmo é aplicado também ao caso de GNEPs conjuntamente convexos obtendo resultados mais fortes. Além disso, os autores tratam também da resolução dos NEP_ρ nos subproblemas que não são diferenciáveis.

Finalmente em [FL11], se faz um estudo do Algoritmo 3.2.1 para um GNEP tipo (3.2.7), onde unicamente as restrições compartilhadas são penalizadas, assim, em cada iteração se resolve um NEP_ρ com restrições.

3.2.2 Sistema KKT para GNEPs

Uma forma de reformular parcialmente um GNEP de jogadores convexos é através de um sistema de equações que está associado com seu sistema KKT, que definimos a seguir. Note que, em geral, como veremos depois, assim como em otimização, pontos KKT para GNEPs podem não ser soluções.

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Consideremos o GNEP (3.2.6) e assumamos que f^v e g^v são C^1 para cada $v = 1, \dots, N$. Se x^* é uma solução do GNEP, então cada bloco $x^{*,v} \in \mathbb{R}^{n_v}$ é uma solução do problema de otimização $P^v(x^{*, -v})$. Então, se uma condição de qualificação é satisfeita em $x^{*,v}$ com respeito ao conjunto $X^v(x^{*, -v})$, existem vetores $\lambda^{*,v} \in \mathbb{R}^{m_v}$ tal que $(x^{*,v}, \lambda^{*,v})$ satisfaz as clássicas condições de Karush-Kuhn-Tucker para o v -ésimo jogador:

$$\begin{aligned} KKT_v : \quad & \nabla_{x^v} L_v(x^v, x^{*, -v}, \lambda^v) = 0 \\ & \lambda_i^v \geq 0, \quad g_i^v(x^v, x^{*, -v}) \leq 0, \quad \lambda_i^v g_i^v(x^v, x^{*, -v}) = 0, \forall i = 1, \dots, m_v, \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

onde $L^v : \mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{m_v} \rightarrow \mathbb{R}$ é o Lagrangiano do problema $P^v(x^{*, -v})$ definido como:

$$L^v(x^v, x^{*, -v}, \lambda^v) = f^v(x^v, x^{*, -v}) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^v g_i^v(x^v, x^{*, -v}).$$

Para poder estabelecer uma condição tipo de primeira ordem para GNEPs, como as condições KKT em otimização, concatenamos estes N sistemas KKT_v .

Definição 3.2.7. (*KKT-GNEP*) O sistema KKT para uma GNEP obtém-se concatenado os N sistemas KKT_v para cada $v = 1, \dots, N$, assim obtemos:

$$F(x, \lambda) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad g(x) \leq 0, \quad \lambda^T g(x) = 0, \quad (3.2.29)$$

onde $F(x, \lambda) = (\nabla_{x^v} L^v(x, \lambda^v))_{v=1}^N$ e $g(x) = (g^v(x))_{v=1}^N \in \mathbb{R}^m$, $\lambda = (\lambda^v)_{v=1}^N \in \mathbb{R}^m$.

De maneira recíproca em um GNEP de jogadores convexos, se x^* e $\lambda^* = (\lambda^{*,1}, \dots, \lambda^{*,N})$ são tais que (x^*, λ^*) satisfaz as condições KKT – GNEP de (3.2.29), então x^* é uma solução do GNEP.

Assim, parece ser natural para um GNEP de jogadores convexos achar uma solução resolvendo seu sistema KKT-GNEP. Das observações anteriores, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.10. Consideremos o GNEP (3.2.6) com $g^v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_v}$ e $f^v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções C^1 para todo $v = 1, \dots, N$, então as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Se x^* é solução do GNEP e, para cada $v = 1, \dots, N$, uma certa condição de qualificação ocorre em $x^{*,v}$ com respeito ao conjunto $X^v(x^{*, -v})$, então existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que (x^*, λ^*) resolve o sistema KKT-GNEP (3.2.29),
2. Se o GNEP é de jogadores convexos e se (x^*, λ^*) resolve o sistema KKT-GNEP, então x^* é uma solução do GNEP.

Demonstração. É uma consequência das observações anteriores e de resultados análogos em otimização. $\square$

De forma análoga ao caso de otimização, a parte 1 do teorema anterior, mostra que o sistema KKT-GNEP pode ser considerado como uma condição necessária de primeira ordem para uma solução de um GNEP desde que alguma CQ ocorra para cada jogador. Note que a CQ pode ser diferente para cada jogador.

Consideremos agora um GNEP conjuntamente convexo com $m = m_1 = \dots = m_N$ e os conjuntos de restrições dados por $X^v(x^{-v}) = \{x^v \in \mathbb{R}^{n_v} : G(x^v, x^{-v}) \leq 0\}$ para cada $v = 1, \dots, N$ e $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Pelo Teorema 3.2.2, toda solução da desigualdade variacional $VI(X, F)$ é uma solução do GNEP.

Lembremos que um ponto (x, Λ) com $\Lambda \in \mathbb{R}^m$ é um ponto KKT para o problema de desigualdade variacional $VI(X, F)$ com $X = \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) \leq 0\}$ se satisfaz:

$$\begin{aligned} F(x) + JG(x)^T \Lambda &= 0 \\ 0 &\leq \Lambda \perp -G(x) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

A relação entre as soluções de um GNEP conjuntamente convexo com seu sistema KKT-GNEP (3.2.29) associado, com a desigualdade variacional $VI(X, F)$ associada ao GNEP e com sistema KKT (3.2.30) são dados no seguinte teorema.

Teorema 3.2.11. *Seja o GNEP conjuntamente convexo com $f^1, \dots, f^N$ funções C^1 , as seguintes asserções ocorrem.*

- *Seja x^* uma solução do $VI(X, F)$ e $\Lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que (x^*, Λ^*) resolve as condições de KKT (3.2.30), então x^* é uma solução do GNEP e (x^*, λ^*) é uma solução de (3.2.29) com $\lambda^{*,1} = \dots = \lambda^{*,N} = \Lambda^*$,*
- *Seja x^* uma solução do GNEP tal que as condições KKT-GNEP são satisfeitas com $\lambda^{*,1} = \dots = \lambda^{*,N}$, então x^* é uma solução da $VI(X, F)$ e (x^*, Λ^*) satisfaz o sistema KKT (3.2.30) com $\Lambda^* = \lambda^{*,1}$.*

Demonstração. A prova pode ser deduzida facilmente dos resultados anteriores. $\square$

Aqui comentaremos brevemente os trabalhos [DFKS11], [DFFH14], [FFP09] e [IS14b] que usam o sistema KKT-GNEP (3.2.29) para resolver um GNEP. Recentemente em [Dre16a] obteve-se novos resultados que melhoram o algoritmo proposto em [DFFH14]. Outros trabalhos que usam este enfoque podem ser encontrados nas referências desses artigos.

Em [DFKS11], se considera um GNEP de jogadores convexos da forma (3.2.3). Esse trabalho segue a mesma ideia que em otimização, formulando o sistema KKT como um sistema de equações através do uso de uma função complementar. Lembremos que uma função complementar é uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(a, b) = 0$ se, e somente se, $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $ab = 0$. Assim, o sistema KKT-GNEP (3.2.29) pode ser reescrito como:

$$F(x, \lambda) = 0, \quad \Phi(x, \lambda) = 0, \quad (3.2.31)$$

onde

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi(\lambda_1^1, -g_1^1(x)) \\ \vdots \\ \phi(\lambda_{m_1}^1, -g_{m_1}^1(x)) \\ \phi(\lambda_1^2, -g_1^2(x)) \\ \vdots \\ \phi(\lambda_{m_N}^N, -g_{m_N}^N(x)) \end{pmatrix}_{m \times 1}. \quad (3.2.32)$$

Nesse artigo, se usa a função complementar de Fischer Burmeister definida como $\phi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - (a + b)$. Esta função permite que a função de mérito natural de (3.2.31) seja continuamente diferenciável. A função de mérito natural vem dado por:

$$\Theta(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} F(x, \lambda) \\ \Phi(x, \lambda) \end{pmatrix} \right\|^2. \quad (3.2.33)$$

Assim, podemos achar um ENG minimizando globalmente a função Θ . Os autores calculam a expressão para o gradiente de (3.2.33) e dão condições para que todo ponto estacionário dessa função seja uma solução, assim como condições para que esta função seja coerciva. Também são definidos e provados resultados de convergência para um algoritmo de pontos interiores aplicado para o sistema (3.2.31).

Em [FFP09] se aplica métodos tipo Newton para resolver o sistema (3.2.31) usando a função complementar $\phi(a, b) = \min\{a, b\}$. Nesse caso, o sistema gerado é, em geral, não diferenciável. Condições suficientes para a convergência local dos métodos tipo Newton são estudados. Essas condições, em geral, são diferentes daquelas dadas para otimização e desigualdades variacionais. Por exemplo, em GNEPs bem simples e bem comportadas, unicidade local das soluções pode não ser encontrada. Portanto, condições e técnicas clássicas do método de Newton aplicadas em outros

problemas são substituídas por outras que vão de acordo com a estrutura do mesmo problema e de seu conjunto solução.

Em [DFFH14], sobre hipóteses de diferenciabilidade das funções objetivo e das restrições, o sistema KKT-GNEP (3.2.29) é reformulado como um sistema de equações definidas por funções diferenciáveis com restrições. Introduzindo variáveis artificiais $w \in \mathbb{R}^m$ obtemos:

$$\Psi(z) = \Psi(x, \lambda, w) = \begin{pmatrix} F(x, \lambda) \\ g(x) + w \\ \lambda \circ w \end{pmatrix} = 0, \text{ sujeito } z = (x, \lambda, w) \in \Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m, \quad (3.2.34)$$

onde $\lambda \circ w = (\lambda_i w_i)_{i=1}^m$. Então, (x, λ) é solução de (3.2.29) se, e somente se, $(x, \lambda, -g(x))$ é solução de (3.2.34).

O algoritmo proposto em [DFFH14] é um algoritmo híbrido que combina a robustez do algoritmo de redução de potencial para GNEPs proposto em [DFKS11] com a convergência local quadrática do método LP-Newton [FFH14].

Como é conhecido, uma hipótese para a convergência do método LP-Newton é a de cumprimento de um error bound local. Para o sistema (3.2.34) em [DFFH14], se dá uma condição para que um error bound seja satisfeito. Seja $\mathbb{S}$ o conjunto solução de (3.2.34), então dizemos que ocorre um error bound em $\bar{z} \in \mathbb{S}$ se existem $\delta, c > 0$ tal que:

$$\text{dist}[z, \mathbb{S}] \leq c \|\Theta(z)\|, \quad \forall z \in B(\bar{z}, \delta). \quad (3.2.35)$$

Um error bound deste tipo também foi apresentado para o sistema (3.2.31) usando a função complementar $\phi(a, b) = \min\{a, b\}$, mas para o cumprimento desta condição a hipótese de complementaridade estrita é necessária, o que restringe muito a classe de GNEPs que satisfazem esta condição. Ver [FFP09].

Um error bound para (3.2.34) que não precisa de complementaridade estrita foi proposto em [DFFH14]. Para enunciar esse resultado, definimos os seguintes conjuntos. Seja $I = \{1, \dots, m\}$, para $x \in W = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ e sejam

$$I_=(x) = \{i \in I : g_i(x) = 0\} \quad e \quad I_<(x) = \{i \in I : g_i(x) < 0\} \quad (3.2.36)$$

os conjuntos de restrições ativas e inativas respectivamente. Seja $Q(x) \leq m$ o número máximo de restrições ativas diferentes, isto é:

$$Q(x) = \max\{|\alpha| : \alpha \subseteq I_=(x), \quad g_i \neq g_j \quad \text{para todo } i, j \in \alpha, \quad i \neq j\}.$$

Assim, pode-se definir o conjunto dos subconjuntos de $I_=(x)$ com o maior número de restrições ativas diferentes, $\mathbb{I}_=(x) = \{\alpha \subseteq I_=(x) : |\alpha| = Q(x), g_i \neq g_j \quad \text{para todo } i, j \in \alpha, i \neq j\}$, e o conjunto de multiplicadores positivos associados a x por $\Lambda_+ = \{i \in I : \lambda_i > 0\}$.

Teorema 3.2.12. *Seja $z^* = (x^*, \lambda^*)$ uma solução de (3.2.34) e suponhamos que para algum $\alpha \in \mathbb{I}_=(x)$, $\lambda_i^* > 0$ para todo $i \in \alpha$ e a matriz*

$$\begin{pmatrix} J_x F(x^*, \lambda^*) & E_\alpha(x^*) \\ J_g \alpha(x^*) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+|\Lambda_+|) \times (n+|\alpha|)}$$

é não singular, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que:

$$\text{dist}[z, Z \cap \Omega] \leq c \|\Psi(z)\| \quad \forall z \in B(z^*, \delta) \cap \Omega,$$

onde $E(x^) = \text{blockdiag}(\nabla_{x^1} g^1(x^*), \dots, \nabla_{x^N} g^N(x^*))$ e $E_\alpha(x^*)$ contém todas as colunas de $E(x^*)$ com os índices que pertencem a α .*

Em [IS14b], de forma paralela obtém-se um error bound para uma reformulação não diferenciável

com restrições de (3.2.29) dada por:

$$\Psi(z) = \Psi(x, \lambda, w) = \begin{pmatrix} F(x, \lambda) \\ g(x) + w \\ \min\{w, \lambda\} \end{pmatrix} = 0 \text{ sujeito } z = (x, \lambda, w) \in \Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m. \quad (3.2.37)$$

Um dos resultados principais do trabalho é:

Teorema 3.2.13. *Seja $z^* = (x^*, \lambda^*)$ uma solução de (3.2.37) e assumamos que para algum $\alpha \in \mathbb{I}_=(x)$ a matriz*

$$\begin{pmatrix} J_x F(x^*, \lambda^*) & E_{\Lambda_+}(x^*) \\ Jg_\alpha(x^*) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+|\Lambda_+|) \times (n+|\alpha|)}$$

tem posto completo, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tal que:

$$\text{dist}[z, Z] \leq c \|\Psi(z)\|, \quad \forall z \in B(z^*, \delta).$$

Finalmente, o trabalho discute a aplicabilidade deste error bound para métodos tipo Newton.

Por fim, mencionamos que resultados de existência para GNEPs podem ser encontrados em [Par15], [Dut13], [Dre16b] e suas referências. Geralmente, resultados de existência para GNEPs podem ser obtidos de duas formas: através de forma direta usando os teorema de pontos fixos como o de Kakutani [K+41] e Begle [Beg50] ou através de uma reformulação como uma QVI. Geralmente hipóteses de convexidade e compacidade sobre os conjuntos K^v e de convexidade sobre as funções objetivos f^v são necessárias, assim como a semi continuidade superior e inferior das funções ponto conjunto $X^v : \mathbb{R}^{n-n_v} \rightrightarrows \mathbb{R}^{n_v}$ e outras que, na prática, até em um GNEP bem simples podem não ser satisfeitas.

3.2.3 Algumas aplicações do GNEP

Finalizamos este capítulo mostrando alguns casos econômicos e políticos-econômicos simples que podem ser modelados por GNEPs.

Aplicações de GNEPs em outras áreas podem ser encontrados em [FFP07], [FPS11], [LL13], [DSM16], [SM16] e nas referências de [FHS14]. Recentemente em [NFS16] se modela por meio de um GNEP o apoio humanitário dado por organizações não governamentais (ONGs) para regiões que são afetadas após um desastre natural. As ONGs competem para receber as doações que serão distribuídas para as zonas afetadas. Um estudo teórico do caso do furacão Katrina é apresentado. Em [DG17], modela-se cenários de tráfego com veículos autônomos usando GNEPs, equações diferenciais ordinárias e controle ótimo.

Um simples mercado econômico

O seguinte exemplo foi tomado de [SM16] e consiste em um mercado econômico simples que pode ser modelado por um LGNEP.

Assumamos que temos N firmas oferecendo o mesmo produto em um mercado comum. A firma $v \in \{1, \dots, N\}$ produz C^v produtos no total para a venda, que estão divididos em K diferentes categorias, cada categoria com um preço dado fixado, $\rho_1^v, \dots, \rho_K^v$. Para cada categoria do produto $j = 1, \dots, K$ existe uma demanda total $D_j \geq 0$ e o problema da firma v é poder achar as quantidades x_j^v para $j = 1, \dots, K$ de venda de cada categoria a fim de maximizar sua utilidade. Assim, o problema para a v -ésima firma é:

$$\max_{x^v \in \mathbb{R}^K} \langle \rho^v, x^v \rangle, \quad \text{sujeito a } x^v \geq 0, \quad \sum_{j=1}^K x_j^v \leq C^v, \quad \sum_{v=1}^N x_j^v \leq D_j, \quad \forall j = 1, \dots, K.$$

A primeira restrição, é claro, o fato que as quantidades à vender não são negativas. A segunda garante que as quantidades totais ofertadas de cada categoria não superem a respectiva capacidade de produção. Essas são restrições individuais para o jogador v . As últimas K restrições correspondem às restrições compartilhadas que garantem que a quantidade total de cada categoria produzida por todas as firmas no mercado não exceda a demanda de tal categoria. Podemos sem perder generalidade, colocar em cada jogador v as restrições individuais dos jogadores restantes, assim temos um GNEP de jogadores convexos.

O conjunto viável para o GNEP é dado por:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^{NK} : Ax \leq b, 0 \leq x, \}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e \\ I_K & \cdots & \cdots & I_K \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} C^1 \\ \vdots \\ C^K \\ D_1 \\ \vdots \\ D_K \end{bmatrix},$$

e $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^K$ é um vetor fila e I_K é a matriz identidade de ordem K .

Esse modelo pode ser usado, por exemplo, para modelar a venda de passagens em cruzeiros por N agências de viagens. É conhecido que os preços das passagens variam de acordo com o conforto oferecido.

Controle da poluição e o Protocolo de Quioto

O próximo exemplo é tomado de [FHS14]. O Protocolo de Quioto é um tratado internacional sobre as alterações climáticas. Seu principal objetivo é estabilizar a emissão de gases de efeito estufa (GEE) na atmosfera e assim frear o aquecimento global e seus possíveis impactos. Ao todo, 184 países ratificaram o tratado até o momento.

Os países signatários foram divididos em dois grupos de acordo com seu nível de industrialização. Cada grupo tem obrigações distintas em relação ao Protocolo. O Anexo I reúne os países desenvolvidos enquanto o grupo formado pelos países em desenvolvimento, entre eles o Brasil, é denotado por “Não Anexo I”.

A ideia do acordo é que os países desenvolvidos são os principais culpados pelos altos níveis de emissões de GEE na atmosfera. O acordo coloca uma carga mais pesada em nações desenvolvidas, mas com responsabilidades diferenciadas. Países em franco desenvolvimento (como Brasil, México, Argentina e Índia) não receberam metas de redução, pelo menos momentaneamente, mas devem auxiliar na redução de emissão desses gases por meio de ações nacionais.

O Protocolo de Quioto foi adotado em Quioto, Japão, em 11 de Dezembro de 1997 e entrou em vigor em 16 de Fevereiro de 2005. As partes incluídas no Anexo I deveriam, individualmente ou em conjunto, assegurar que as suas emissões de dióxido de carbono sejam reduzidas, pelo menos, em 5 por cento abaixo dos níveis de 1990 no período de compromisso de 2008 a 2012. Para alcançar esses objetivos, vários mecanismos foram propostos. Entre eles o mecanismo de Implementação Conjunta, que diz:

“Com a finalidade de cumprir os compromissos assumidos, qualquer parte incluída no Anexo I pode transferir para, ou adquirir de, quaisquer outras unidades de redução de emissões resultantes de projetos destinados a reduzir as emissões antrópicas por fontes ou a aumentar as remoções antrópicas por sumidouros de gases de efeito estufa em qualquer setor da economia ...”

Em outras palavras, os países estão autorizados a investir em projetos no estrangeiro a fim de receber unidades de redução de emissões (UREs). O mecanismo de Implementação Conjunta deve, portanto, (ou se espera pelo menos) impulsionar o desenvolvimento de tecnologias que suportam a sustentabilidade ambiental, apoiando estados envolvidos para investir em tais projetos no exterior.

Por exemplo, ao investir em países que são menos desenvolvidos, assim, tais subsídios irão ajudá-los no progresso econômico.

A situação descrita com as propriedades específicas pode ser modelada por meio de um GNEP. A abordagem apresentada foi abreviada do modelo de M. Breton [BZZ06] que é mais detalhado. O mecanismo de Implementação Conjunta consiste em N jogadores (países). Cada jogador v tem sua própria produção industrial, o que causa alguma saída de emissões denotado como e^v . A produção industrial mencionada gera os ingressos R^v . Suponhamos que estas emissões sejam proporcionais à produção industrial do país, isto permite expressar R^v como uma função de e^v . O total de emissões do jogador v poderia ser reduzido, investindo em desenvolver projetos que ajudariam ao meio ambiente, tanto no mesmo país, como no exterior (por exemplo, para construir estações de águas residuais, para reduzir e reciclar lixeiras existentes, etc.).

Tais investimentos ambientais são indicados por I_j^v , que será entendida como o investimento de jogador v no país j , o que será assumido proporcionalmente ao investimento, ou seja, $\gamma_{vj}I_j^v$. Ao investir, o jogador está ganhando as unidades de redução de emissões. É importante mencionar que o coeficiente $\gamma_{v,j}$ depende tanto do jogador v e j , dado o fato de que a quantidade de investimento do jogador v é regulado pelo país j (por exemplo: oportunidades suficientes para investir no país j , leis do país j que restringem os investimentos específicos, etc.).

A saída de emissões líquidas no país v será $e_v - \sum_{j=1}^N \gamma_{vj}I_j^v$. Logicamente podemos supor que, esta quantidade não é negativa. Para denotar a saída de emissões contabilizadas para jogador v , a ordem dos índices da fórmula deve ser invertida, i.e, $e_v - \sum_{j=1}^N \gamma_{vj}I_j^v$. A fórmula expressa as próprias emissões de jogador v menos as unidades de redução de emissões adquiridas através do investimento em países $j = 1, \dots, N$. Essa quantidade de emissão deve ser menor do que uma quantidade imposta E_v , dada pelo Protocolo de Quioto.

Há uma última condição no modelo apresentado, com base no fato de que, muitos tipos de poluição são compartilhados entre os países, devido a atmosfera comum e o mesmo meio ambiente (chuvas fortes, poluição do solo nas fronteiras, a poluição dos rios e lagos que são compartilhados por mais países, etc). Portanto, alguma saída de emissão líquida é de alguma forma compartilhada entre todos os países, que deve ser considerada na definição final. Vamos apresentar isso com a função:

$$D_v \left(e^1 - \sum_{j=1}^N \gamma_{j1}I_1^j, \dots, e^N - \sum_{j=1}^N \gamma_{jN}I_N^j \right).$$

Finalmente é possível construir o GNEP, com problema para o jogador v dado por:

$$\max_{e^v, I_1^v, \dots, I_N^v} R^v(e^v) - \sum_{j=1}^N I_j^v - D_v \left(e^1 - \sum_{j=1}^N \gamma_{j1}I_1^j, \dots, e^N - \sum_{j=1}^N \gamma_{jN}I_N^j \right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} e^v, I_1^v, \dots, I_N^v &\geq 0 \\ e^v - \sum_{j=1}^N \gamma_{vj}I_j^v &\leq E_v \\ e^v - \sum_{j=1}^N \gamma_{vj}I_j^v &\geq 0, \quad v = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

As restrições estão levando em conta as variáveis de todos os N jogadores e as restrições são semelhantes para cada jogador, assim, o GNEP está seguindo a ideia desejada nesse mecanismo de Implementação Conjunta para o qual foi destinado.

Capítulo 4

Condições de otimalidade e condições de qualificação para GNEPs

Assim como em otimização, uma condição de otimalidade para GNEPs é qualquer condição satisfeita por uma solução. Condições muito simples como a mera viabilidade ou de difícil verificação como a própria otimalidade são condições de otimalidade, mas estas condições pouco auxiliam na tarefa de encontrar pontos de equilíbrio.

Tal como ocorre em otimização, as condições KKT para GNEPs (KKT-GNEP) tampouco são condições de otimalidade. A importância das condições KKT no desenvolvimento de algoritmos em otimização motiva estudar condições sobre as quais todo ponto de equilíbrio é um ponto KKT-GNEP, essas condições serão chamadas condições de qualificação para GNEPs. Veremos que para a estrutura dos GNEPs, CQs podem ser definidas de duas formas (o que chamamos de CQ-Parcial e CQ-GNEP) e estudamos as relações dessas CQs em cada caso.

4.1 Condições de otimalidade de primeira ordem

Começamos estabelecendo alguns resultados análogos à otimização que servirão para mostrar um teorema tipo KKT para GNEPs, para isto definimos os seguintes cones.

Definição 4.1.1. *Dados $x \in W$ definimos:*

O cone N -tangente do GNEP em x é definido por:

$$T_N(x) := \prod_{v=1}^N T_{X^v(x^{-v})}(x^v).$$

O cone N -linearizado do GNEP em x é definido por:

$$L_N(x) := \prod_{v=1}^N L_{X^v(x^{-v})}(x^v).$$

O cone gerado pelas restrições ativas dos jogadores em x é definido por:

$$K_N(x) := \prod_{v=1}^N K^v(x^v),$$

onde $K^v(x^v) = K_{X^v(x^{-v})}(x^v)$.

O cone N -normal do GNEP em x é definido por:

$$N_N(x) := \prod_{v=1}^N N_{X^v(x^{-v})}(x^v).$$

Da definição anterior, é claro que os cones $T_N(x)$, $L_N(x)$, $K_N(x)$ e $N_N(x)$ herdam as mesmas propriedades de seus análogos em otimização.

A seguinte definição é uma extensão do cone polar.

Definição 4.1.2. (*Cone N-polar*) Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio. Denotemos por $P_N(C)$ o cone N-polar de C definido por:

$$P_N(C) = \{w \in \mathbb{R}^n : w^v d^v \leq 0, v = 1, \dots, N, \quad \forall d \in C\}.$$

Da definição, é claro que $P_N(C)$ é de fato um cone. Temos que $P_N(C) \subseteq P(C)$ e que se $A \subseteq B$, então $P_N(B) \subseteq P_N(A)$, onde $P(C)$ é o cone polar de C .

Uma relação de igualdade útil entre o cone N-polar e o cone polar pode ser obtida da seguinte forma:

Seja $C^v = \text{proj}_{\mathbb{R}^{n_v}}(C) = \{x^v \in \mathbb{R}^{n_v} : \exists x^{-v} \in \mathbb{R}^{n-n_v} \text{ tal que } (x^v, x^{-v}) \in C\}$ a projeção de C sobre $\mathbb{R}^{n_v}$, então pode se ver facilmente que:

$$P_N(C) = \prod_{v=1}^N P(C^v). \quad (4.1.1)$$

Como para cada $v = 1, \dots, N$ os conjuntos $P(C^v)$ são cones fechados e convexos, o mesmo ocorre para $P_N(C)$.

No seguinte teorema resumimos algumas propriedades dos cones definidos anteriormente.

Teorema 4.1.1. *Seja $x \in W$, então*

- a) $T_N(x) \subseteq L_N(x)$.
- b) $P_N(K_N(x)) = L_N(x)$, $K_N(x) = P_N(L_N(x))$ e $P_N(T_N(x)) = N_N(x)$.

Demonstração. A parte a é consequência das definições dos cones $T_N(x)$, $L_N(x)$ e da proposição 2.1.1.

De resultados análogos de otimização e da definição 4.1.1, temos:

$$P_N(K_N(x)) = \prod_{v=1}^N P(K^v(x^v)) = \prod_{v=1}^N L_{X^v(x^{-v})}(x^v) = L_N(x).$$

Por outro lado,

$$P_N(L_N(x)) = \prod_{v=1}^N P(L_{X^v(x^{-v})}(x^v)) = \prod_{v=1}^N K^v(x^v) = K_N(x)$$

e por último

$$P_N(T_N(x)) = \prod_{v=1}^N P(T_{X^v(x^{-v})}(x^v)) = \prod_{v=1}^N N_{X^v(x^{-v})}(x^v) = N_N(x).$$

□

Seja $F(x) := (\nabla_{x^v} f^v(x))_{v=1}^N$ o vetor formado pelos gradientes parciais das funções objetivo de cada jogador, um resultado análogo à condição de otimalidade geométrica para otimização pode ser dado para GNEPs.

Teorema 4.1.2. (*Condição de otimalidade geométrica*) *Seja x^* uma solução do GNEP, então:*

$$-F(x^*) \in P_N(T_N(x^*)).$$

Demonstração. De 4.1.1 e da definição 4.1.1, temos que:

$$P_N(T_N(x^*)) = \prod_{v=1}^N P(T_{X^v(x^*, -v)}(x^{*,v})).$$

Portanto, é suficiente provar que $-\nabla_{x^v} f^v(x^*) \in P(T_{X^v(x^*, -v)}(x^{*,v}))$ para cada $v = 1, \dots, N$. Como x^* é uma solução do GNEP, então para cada $v = 1, \dots, N$ o bloco $x^{*,v}$ é solução do problema $P^v(x^{*, -v})$, então, pela condição geométrica 2.1.1, temos que $-\nabla_{x^v} f^v(x^*) \in P(T_{X^v(x^*, -v)}(x^{*,v}))$ para cada $v = 1, \dots, N$. Portanto $-F(x^*) \in P_N(T_N(x^*))$. $\square$

Note-se que também $-F(x^*) \in P(T_N(x))$.

O seguinte resultado dá uma condição suficiente para que em uma solução, KKT-GNEP seja satisfeita.

Teorema 4.1.3. (*KKT-GNEP*) *Seja $x^* \in W$ uma solução do GNEP e suponha que $P_N(T_N(x^*)) = P_N(L_N(x^*))$, então existem para cada $v = 1, \dots, N$ vetores $\lambda^v \in \mathbb{R}^{m_v}$ com $\lambda_i^v = 0$ para $i \notin \alpha^v(x^*)$, tal que:*

$$-\nabla_{x^v} f^v(x^*) = \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(x^*), \quad \lambda_i^v \geq 0.$$

Demonstração. Como x^* é solução, pelo Teorema 4.1.2 temos que $-F(x^*) \in P_N(T_N(x^*))$, pela hipótese e pelo Teorema 4.1.1 temos que $-F(x^*) \in P_N(L_N(x^*)) = K_N(x^*)$, então para cada $v = 1, \dots, N$ existe $\lambda^v \in \mathbb{R}_+^{m_v}$ com $\lambda_i^v = 0$ para $i \notin \alpha^v(x^*)$, tal que:

$$-\nabla_{x^v} f^v(x^*) = \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(x^*).$$

Assim, KKT-GNEP é satisfeito. $\square$

A condição $P_N(T_N(x^*)) = P_N(L_N(x^*))$ é chamada condição de Guignard-GNEP. Iremos provar que essa condição tipo Guignard é a condição mais fraca possível que garante KKT-GNEP em uma solução. Esse resultado será uma consequência do seguinte teorema.

Teorema 4.1.4. *Sejam $x^* \in W$ e $g^v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_v}$ funções diferenciáveis para todo $v = 1, \dots, N$.*

$w \in N_N(x^)$ se, e somente se, existem funções $f^v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis tais que $\nabla_{x^v} f^v(x^*) = -w^v$, para todo $v = 1, \dots, N$ e x^* é solução do GNEP com problema para o v -ésimo jogador dado por:*

$$\begin{aligned} P^v(x^{-v}) : \quad & \min f^v(x^v, x^{-v}) \\ & g_i^v(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m_v \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Demonstração. (Necessidade) Como x^* é solução, então pelos Teoremas 4.1.2 e 4.1.1 tem-se que $-F(x^*) = w \in P_N(T_N(x^*)) = N_N(x^*)$.

(Suficiência) Seja $w \in N_N(x^*)$, então para cada $v = 1, \dots, N$ temos que $w^v \in N_{X^{-v}(x^*, -v)}(x^{*,v})$ e pelo Teorema 6.11 em [RW09], existe uma função $\tilde{f}^v : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\nabla_{x^v} \tilde{f}^v(x^{*,v}) = -w^v$ e o mínimo de $\tilde{f}^v$ no conjunto $X^v(x^{*, -v})$ é atingido em $x^{*,v}$, para todo $v = 1, \dots, N$. Para cada $v = 1, \dots, N$ podemos definir $f^v(x) = \tilde{f}^v(x^v)$. Seja $x^v \in X^v(x^{*,v})$, temos que:

$$f^v(x^*) = \tilde{f}^v(x^{*,v}) \leq \tilde{f}^v(x^v) = f^v(x^v, x^{*, -v}).$$

Assim, x^* é solução do GNEP 4.1.2. $\square$

Corolário 4.1.1. *Seja $x^* \in W$, então $P_N(T_N(x^*)) = P_N(L_N(x^*))$ é equivalente ao fato que para quaisquer funções objetivo $f^v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o GNEP com problema para o v -ésimo jogador dado por 4.1.2 que possui em x^* um ponto de equilíbrio é tal que x^* é um ponto KKT-GNEP.*

Demonstração. Suficiência: o fato de que a condição de Guinard-GNEP em uma solução implica KKT-GNEP foi provado no Teorema 4.1.3.

Necessidade: pelo Teorema 4.1.1 é suficiente provar que $P_N(T_N(x^*)) \subseteq P_N(L_N(x^*))$. Seja $w \in P_N(T_N(x^*)) = N_N(x^*)$, então pelo teorema anterior, existem para cada $v = 1, \dots, N$ funções diferenciáveis $f^v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla_{x^v} f^v(x^*) = -w^v$ e x^* é solução do GNEP com problema para o v -ésimo jogador dado por 4.1.2. Então, pela hipótese x^* é um ponto KKT-GNEP, portanto para cada $v = 1, \dots, N$ existem $\lambda^v \in \mathbb{R}_+^{m_v}$ com $\lambda_i^v = 0$ para $i \notin \alpha^v(x^*)$ tal que:

$$w^v = -\nabla_{x^v} f^v(x^*) = \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(x^*),$$

então $w \in K_N(x^*) = P_N(L_N(x^*))$. Isso acaba a demonstração. $\square$

Como foi mencionado no Capítulo 2, a condição de Fritz John é uma condição de otimalidade em um problema de otimização. De forma análoga, pode-se definir a condição de Fritz-John-GNEP e ver que também é uma condição de otimalidade.

Definição 4.1.3. (*Fritz-John-GNEP*) Consideremos o GNEP 3.2.6, dizemos que $\bar{x} \in W$ é um ponto Fritz John-GNEP se existem para cada $v = 1, \dots, N$ vetores $(\lambda_0^v, \lambda^v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{m_v}$ não nulos tal que:

$$\lambda_0^v \nabla_{x^v} f^v(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x}) = 0, \quad \lambda_i^v g_i^v(\bar{x}) = 0, \forall i = 1, \dots, m_v.$$

Em [DJS13], um método tipo Newton foi desenvolvido para o cálculo de pontos Fritz-John-GNEP que podem ser obtidos resolvendo um sistema de equações não diferenciáveis. Assim como no caso de otimização, temos que a condição Fritz-John-GNEP é uma condição de otimalidade para GNEPs.

Teorema 4.1.5. *Seja x^* uma solução do GNEP, então x^* é um ponto Fritz-John-GNEP.*

Demonstração. É imediato da definição anterior, da definição de solução para um GNEP e do Teorema 2.1.1. $\square$

Como foi dito no Capítulo 2, em otimização, condições de qualificação são hipóteses feitas sobre as funções que definem o conjunto viável, que quando satisfeitas por um minimizador local de um problema de otimização fazem que ele seja um ponto estacionário.

4.2 Condições de qualificação para GNEPs

Assim como ocorre em otimização, a condição KKT puramente não é uma condição de otimalidade e para o caso dos GNEPs isso também ocorre, considere, por exemplo, o GNEP seguinte.

Exemplo 4.2.1. *Consideremos o GNEP com 2 jogadores:*

$$\begin{aligned} \text{jogador 1 : } \min_{x^1} x^1 \quad & \text{s.t.} \quad (x^1)^2 \leq 0, \\ \text{jogador 2 : } \min_{x^2} (x^2)^2 \quad & \text{s.t.} \quad x^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

O único ENG do jogo é $(0, 0)$. O sistema KKT para o primeiro jogador é:

$$\begin{aligned} KKT_1 : \quad & 1 + \lambda^1 2x^1 = 0 \\ & \lambda^1 \geq 0, \quad (x^1)^2 \leq 0, \quad \lambda^1 (x^1)^2 = 0, \end{aligned}$$

e $(0, 0)$ não é um ponto KKT para o primeiro jogador, então não é um ponto KKT para o GNEP.

Portanto, de forma análoga como ocorre em otimização, uma condição adicional em uma solução é necessária para que as condições KKT-GNEP sejam satisfeitas. Estas condições serão chamadas também condições de qualificação para GNEPs.

Como ocorre em otimização, uma propriedade P será uma condição de qualificação para GNEPs quando a seguinte implicação é verificada:

$$\text{SOLUÇÃO} + P \Rightarrow \text{KKT-GNEP}.$$

Uma primeira forma natural de definir condições de qualificação para GNEPs seria:

Definição 4.2.1. (*CQ-Parcial*) Seja CQ uma condição de qualificação qualquer (de otimização), seja $\bar{x} \in W$ um ponto viável, dizemos que $\bar{x}$ satisfaz a CQ-Parcial se:

$$\bar{x}^v \text{ satisfaz CQ no conjunto } X^v(\bar{x}^{-v}), \quad \forall v = 1, \dots, N.$$

Então, é fácil ver a partir da definição de solução para o GNEP que se x^* é uma solução e satisfaz CQ-Parcial (para qualquer CQ), então é um ponto KKT-GNEP. Portanto, CQ-Parcial é de fato, uma condição de qualificação para GNEPs.

Da definição de CQ-Parcial, pode-se ver facilmente que a condição Guignard-GNEP é na verdade Guignard-Parcial e, portanto, é uma condição de qualificação para GNEPs.

Note-se que a fim de garantir que toda solução satisfaz a condição KKT-GNEP não é necessário que se satisfaça a mesma condição de qualificação CQ para cada jogador.

Mostramos alguns exemplos de CQ-Parcias.

Definição 4.2.2. Um ponto $\bar{x} \in W$ satisfaz MFCQ-Parcial se, para cada $v = 1, \dots, N$, o conjunto

$$\{\nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x})\}_{i \in \alpha^v(\bar{x})}$$

é positivamente linearmente independente em $\mathbb{R}^{n_v}$, onde $\alpha^v(\bar{x}) = \{i : g_i^v(\bar{x}) = 0\} \subseteq \{1, \dots, m_v\}$, i.e., se

$$\sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x}) = 0, \quad \lambda_i^v \geq 0, \quad \text{implica} \quad \lambda_i^v = 0, i \in \alpha^v(\bar{x}).$$

Uma condição relacionada com MFCQ-Parcial, a EMFCQ-Parcial, foi primeiramente introduzida para QVIs em [PF05] para provar convergência de um método de multiplicadores para QVIs que tinha como um caso particular os GNEP (de jogadores convexos). Essa condição também foi usada em [Fuk11], [FK10b], [Kan16] e [KS16] para provar convergência de métodos de penalidade para GNEPs.

Definição 4.2.3. Consideremos o GNEP 3.2.7. Um ponto $\bar{x} \in W$ satisfaz EMFCQ-Parcial se, para cada $v = 1, \dots, N$, o conjunto:

$$\{\nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x})\}_{i \in \bar{\alpha}^v(\bar{x})} \cup \{\nabla_{x^v} h_j^v(\bar{x})\}_{j \in \gamma^v(\bar{x})}$$

é positivamente linearmente independente, onde $\bar{\alpha}^v(\bar{x}) = \{i : g_i^v(\bar{x}) \geq 0\} \subseteq \{1, \dots, m_v\}$ e $\gamma^v(\bar{x}) = \{j : h_j^v(\bar{x}) = 0\} \subseteq \{1, \dots, l_v\}$, i.e., se

$$\sum_{i \in \bar{\alpha}^v(\bar{x})} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x}) + \sum_{j \in \gamma^v(\bar{x})} \mu_j^v \nabla_{x^v} h_j^v(\bar{x}) = 0, \quad \lambda_i^v, \mu_j^v \geq 0$$

implica:

$$\begin{aligned} \lambda_i^v &= 0, \quad i \in \bar{\alpha}^v(\bar{x}) \\ \mu_j^v &= 0, \quad j \in \gamma^v(\bar{x}) \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.2. Consideremos um GNEP com 2 jogadores da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Jogador 1:} \quad & f^1(x^1, x^2) \quad \text{s.t.} \quad x^1 + x^2 \leq 1 \\ \text{Jogador 2:} \quad & f^2(x^1, x^2) \quad \text{s.t.} \quad -x^1 - x^2 \leq 1. \end{aligned}$$

O conjunto viável para o GNEP é dado por $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^1 + x^2 \leq 1, -x^1 - x^2 \leq 1\}$, então MFCQ-Parcial ocorre em todo ponto de W e a condição EMFCQ-Parcial ocorre em todo $\mathbb{R}^2$.

Analogamente podemos definir CPLD-Parcial e CCP-Parcial.

Definição 4.2.4. (CPLD-Parcial) Dizemos que ocorre CPLD-Parcial em um ponto $\bar{x} \in W$ se CPLD ocorre em $\bar{x}^v$ com respeito ao conjunto $X^v(\bar{x}^v)$, para todo $v = 1, \dots, N$, i.e., se existe uma vizinhança $U^v \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ de $\bar{x}^v$ tal que para todo $I^v \subseteq \alpha^v(\bar{x})$ se $\{\nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x})\}_{i \in I^v}$ é positivamente linearmente dependente, então $\{\nabla_{x^v} g_i^v(x^v, \bar{x}^{-v})\}_{i \in I^v}$ é positivamente linearmente dependente para todo $x^v \in U^v$,

e CCP-Parcial da seguinte forma:

Definição 4.2.5. (CCP-Parcial) Dizemos que ocorre CCP-Parcial em um ponto $\bar{x} \in W$ quando, para cada $v = 1, \dots, N$, a multifunção $K_{\bar{x}}^v(y)$ é semicontínua exteriormente em $\bar{x}^v$, isto é, $\limsup_{y \rightarrow \bar{x}^v} K_{\bar{x}}^v(y) \subset K_{\bar{x}}^v(\bar{x}^v)$, onde

$$K_{\bar{x}}^v(y) = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n_v} : v = \sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(y, \bar{x}^{-v}), \quad \lambda_i^v \geq 0 \right\}$$

e

$$\limsup_{y \rightarrow \bar{x}^v} K_{\bar{x}}^v(y) = \left\{ w \in \mathbb{R}^{n_v} : \exists y^k \rightarrow \bar{x}^v, \exists w^k \rightarrow w, w^k \in K_{\bar{x}}^v(y^k) \right\}.$$

Da definição de CQ-Parcial, segue que se CQ_1 é mais fraca que CQ_2 , então CQ_1 -Parcial é mais fraca que CQ_2 -Parcial.

Por último, de forma análoga pode se definir CQ-Parcial para outras CQs de otimização e as relações que existe entre elas se mantem. Veja, por exemplo, [Hae16].

No método de Lagrangiano aumentado para problemas de otimização, uma condição de qualificação é necessária a satisfazer-se no ponto limite a fim de poder obter convergência a um ponto KKT.

No seguinte Capítulo, apresentamos o método de Lagrangiano aumentado para GNEPs a fim de poder manter a analogia com o caso de otimização, condições de qualificação mais fortes que as mencionadas anteriormente e mais parecidas com as clássicas CQ de otimização são definidas, além de que essas condições preservam melhor a estrutura conjunta dos GNEPs. Usando estas condições, podemos provar a convergência global do método de Lagrangiano para GNEPs no próximo Capítulo.

Definiremos para cada CQ de otimização, uma análoga CQ-GNEP (mais forte, em geral, do que a definição de CQ-Parcial). Faremos a definição caso a caso. Para o caso do MFCQ, a MFCQ-GNEP e a MFCQ-Parcial coincidem. Aqui vamos considerar a extensão das CQ: CPLD, CCP, QN e error bound, definições análogas podem ser feitas para outras CQs.

Definição 4.2.6. (CPLD-GNEP) Dizemos que ocorre CPLD-GNEP em um ponto $\bar{x} \in W$, se existe uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ tal que, para todo $v = 1, \dots, N$, se para $I^v \subseteq \alpha^v(\bar{x})$ tem-se que $\{\nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x})\}_{i \in I^v}$ é positivamente linearmente dependente, então $\{\nabla_{x^v} g_i^v(x)\}_{i \in I^v}$ é positivamente linearmente dependente, para todo $x \in U$.

Definição 4.2.7. (QN-GNEP) Dizemos que ocorre QN-GNEP no ponto $\bar{x} \in W$, quando, para cada $v = 1, \dots, N$, se $\sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x}) = 0$, $\lambda_i^v \geq 0$, então $\nexists x^k \rightarrow \bar{x}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $g_i^v(x^k) > 0$ se $\lambda_i^v > 0$.

Definição 4.2.8. (error bound-GNEP) Dizemos que ocorre error bound-GNEP no ponto $\bar{x} \in W$ quando existe uma vizinhança U de $\bar{x}$ e $C > 0$ tal que, para todo $v = 1, \dots, N$, temos que:

- $\forall y \in U$ temos que $X^v(y^{-v}) \neq \emptyset$,
- $\text{dist}(y^v, X^v(y^{-v})) \leq C\|g_+^v(y)\|$, para todo $y \in U$.

Note-se que essa definição é substancialmente diferente da definição de error bound para otimização. A Condição 1 estabelece que primeiro o conjunto onde se mede a distância não deve ser vazio numa vizinhança do ponto viável.

E para o caso de CCP temos.

Definição 4.2.9. (CCP-GNEP) Dizemos que ocorre CCP-GNEP no ponto $\bar{x} \in W$, quando, para cada $v = 1, \dots, N$, a multifunção $K^v(\cdot)$ é semicontínua exteriormente em $\bar{x}$, isto é, $\limsup_{y \rightarrow \bar{x}} K^v(y) \subseteq K^v(\bar{x})$, onde

$$K^v(y) = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n_v} : v = \sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(y), \quad \lambda_i^v \geq 0 \right\}$$

e

$$\limsup_{y \rightarrow \bar{x}} K^v(y) = \left\{ w \in \mathbb{R}^{n_v} : \exists y^k \rightarrow \bar{x}, \exists w^k \rightarrow w, w^k \in K^v(y^k) \right\}.$$

Note que dizemos que ocorre CQ-GNEP em $\bar{x} \in W$ se, para todo $v = 1, \dots, N$, $\bar{x}$ satisfaz CQ no conjunto W^v com respeito a x^v (i.e., todas as derivadas são calculadas unicamente com respeito a $x^v \in \mathbb{R}^{n_v}$).

Uma forma equivalente para CCP-GNEP e mais parecida ao caso de otimização é dada no seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. CCP-GNEP ocorre em $\bar{x} \in W$ se e somente se a multifunção $K(\cdot)$ é semicontínua exterior em $\bar{x}$, isto é:

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x) \subseteq K(\bar{x})$$

onde

$$K(x) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : w^v = \sum_{i \in A^v(\bar{x})} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(x), \quad \lambda_i^v \geq 0, \quad v = 1, \dots, N \right\} = \prod_{v=1}^N K^v(x) \quad (4.2.1)$$

e

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : \exists x^k \rightarrow \bar{x}, w^k \rightarrow w \quad e \quad w^k \in K(x^k) \right\}$$

Demonstração. O resultado é uma consequência direta das seguintes inclusões:

$$0^{-u} \times \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^u(x) \subseteq \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x) \subseteq \prod_{v=1}^N \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^v(x), \quad \text{para qualquer } u = 1, \dots, N.$$

Para provar a primeira inclusão, seja $u \in \{1, \dots, N\}$ fixo e arbitrário e $w \in 0^{-u} \times \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^u(x) = \{(0^{-u}, w^u) \in \mathbb{R}^n : w^u \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^u(x)\}$, então $w^{-u} = 0$ e existem seqüências $x^k \rightarrow \bar{x}$, $w^{k,u} \rightarrow w^u$ com $w^{k,u} \in K^u(x^k)$, seja $w^k = (0^{-u}, w^{k,u})$, então $w^k \rightarrow w$ e $w^k \in K(x^k)$, portanto, $w \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x)$.

Para provar a segunda inclusão, seja $w \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x)$, então existem seqüências $x^k \rightarrow \bar{x}$, $w^k \rightarrow w$ com $w^k \in K(x^k)$. Para cada $v \in \{1, \dots, N\}$ fixo e arbitrário, temos $w^{k,v} \rightarrow w^v$ e $w^{k,v} \in K^v(x^k)$, então $w^v \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^v(x)$, para cada $v = 1, \dots, N$, portanto, $w \in \prod_{v=1}^N \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^v(x)$.

Suponhamos primeiro que CCP-GNEP ocorre em $\bar{x}$, então $\prod_{v=1}^N \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^v(x) \subseteq \prod_{v=1}^N K^v(\bar{x}) = K(\bar{x})$ e o resultado é obtido da segunda inclusão.

Para provar a condição necessária, seja $v \in \{1, \dots, N\}$ fixo e arbitrário, seja $w^v \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^v(x)$, então $(0^{-v}, w^v) \in 0^{-v} \times \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^v(x)$. Usando a primeira inclusão e as hipóteses $(0^{-v}, w^v) \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x) \subseteq K(\bar{x})$, portanto, $w^v \in K^v(\bar{x})$, para qualquer $v = 1, \dots, N$, então CCP-GNEP ocorre. $\square$

Para todas as condições de qualificação (CQ) usadas neste trabalho, CQ-GNEP é mais forte que CQ-Parcial, isso prova que as CQ-GNEP são também condições de qualificação para GNEPs. Por simplicidade provaremos esse resultado unicamente para CPLD e CCP, para outras CQs, a prova é análoga.

Teorema 4.2.2. *CPLD-Parcial é mais fraco que CPLD-GNEP e CCP-Parcial é mais fraco que CCP-GNEP.*

Demonstração. Suponha que CPLD-GNEP ocorre em $\bar{x} \in W$, então existe um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ com $\bar{x} \in U$ tal que, para cada $v = 1, \dots, N$, se $I^v \subseteq A^v(\bar{x})$ é tal que $\{\nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x})\}_{i \in I^v}$ é positivo linearmente dependente, então $\{\nabla_{x^v} g_i^v(x)\}_{i \in I^v}$ é positivo linearmente dependente para todo $x \in U$. Como U é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\bar{x}, \epsilon) \subseteq U$. Afirmamos que, para todo $x^v \in B(\bar{x}^v, \epsilon)$, nós temos $(x^v, \bar{x}^{-v}) \in U$. De fato, temos que $\|(x^v, \bar{x}^{-v}) - \bar{x}\| = \|x^v - \bar{x}^v\| < \epsilon$, portanto, existe um conjunto aberto $U^v = B(\bar{x}^v, \epsilon)$ na vizinhança de $\bar{x}^v$ tal que, para todo $x^v \in U^v$, temos $(x^v, \bar{x}^{-v}) \in U$. O resultado segue da definição de CPLD-Parcial.

Suponha agora que CCP-GNEP ocorre em $\bar{x} \in W$. Vamos provar que, para cada $v = 1, \dots, N$,

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}^v} K_{\bar{x}}^v(x) \subseteq \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^v(x).$$

Seja $v \in \{1, \dots, N\}$ fixo e arbitrário e seja $w^v \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}^v} K_{\bar{x}}^v(x)$, então existe $x^{k,v} \rightarrow \bar{x}^v$ e $w^{k,v} \rightarrow w^v$ com $w^{k,v} \in K_{\bar{x}}^v(x^{k,v}) = \left\{ w \in \mathbb{R}^{n_v} : w = \sum_{i \in A^v(\bar{x})} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}, \bar{x}^{-v}), \lambda_i^v \geq 0 \right\}$. Seja $x^k = (x^{k,v}, \bar{x}^{-v})$, então $x^k \rightarrow \bar{x}$ e $w^{k,v} \in K^v(x^k)$, então $w^v \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^v(x)$. Portanto, da hipótese $w^v \in K^v(\bar{x}) = K_{\bar{x}}^v(\bar{x}^v)$, então CCP-Parcial é satisfeito. Isso acaba a demonstração. $\square$

Diferentemente do que acontece com as CQ-Parciais que guardam as mesmas relações que suas análogas CQs de otimização, para as CQ-GNEPs, isto não ocorre sempre. Por exemplo, em [KS16] prova-se que MFCQ-GNEP implica CPLD-GNEP, mas à diferença do que acontece em otimização, CPLD-GNEP não implica o error bound-GNEP. Vamos provar que CCP-GNEP e CPLD-GNEP guardam a mesma relação que de seus análogos de otimização.

Teorema 4.2.3. *CCP-GNEP é mais fraco que CPLD-GNEP.*

Demonstração. Suponha que CPLD-GNEP ocorre e fixemos $v \in \{1, \dots, N\}$. Seja $w \in \limsup_{y \rightarrow \bar{x}} K^v(y)$, então existem sequências $\{x^k\}$ e $\{w^k\}$ tal que $x^k \rightarrow \bar{x}$, $w^k \rightarrow w$ e $w^k \in K^v(x^k)$, então $w^k = \sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k)$ com $\lambda_i^{k,v} \geq 0$. Pelo Lema de Carathéodory, existe um conjunto $J_v^k \subseteq \alpha^v(\bar{x})$ e escalares $\tilde{\lambda}_i^{k,v} \geq 0$ com $i \in J_v^k$ tal que $w^k = \sum_{i \in J_v^k} \tilde{\lambda}_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k)$ e $\{\nabla_{x^v} g_i^v(x^k)\}_{i \in J_v^k}$ é l.i. Como $\alpha^v(\bar{x})$ é finito, podemos assumir que $J_v^k = J^v$, então

$$w^k = \sum_{i \in J^v} \tilde{\lambda}_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k). \quad (4.2.2)$$

Agora suponha que a sequência $\{\tilde{\lambda}_i^{k,v}\}_{i \in J^v}$ é ilimitada, então sem perda de generalidade podemos assumir que $\frac{\tilde{\lambda}_i^{k,v}}{\|\tilde{\lambda}^{k,v}\|} \rightarrow \lambda^{*,v} \in \mathbb{R}^{|J^v|}$, dividindo em 4.2.2 por $\|\tilde{\lambda}^{k,v}\|$ e tomando limite temos que $0 = \sum_{i \in J^v} \lambda_i^{*,v} \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x})$, então $\{\nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x})\}_{i \in J^v}$ é positivamente linearmente dependente. Como $x^k \rightarrow \bar{x}$, então para k suficientemente grande, temos que da condição CPLD-GNEP que $\{\nabla_{x^v} g_i^v(x^k)\}_{i \in J^v}$ é positivamente linearmente dependente, e isso é uma contradição, então $\{\tilde{\lambda}_i^{k,v}\}_{i \in J^v}$ é limitada. Assim tomando limite em 4.2.2 obtemos que $w = \sum_{i \in J^v} \tilde{\lambda}_i^{*,v} \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x}) \in K^v(\bar{x})$, então temos que $\limsup_{y \rightarrow \bar{x}} K^v(y) \subseteq K^v(\bar{x})$ e como v é arbitrário temos que CCP-GNEP ocorre. $\square$

Exemplo 4.2.3. *(CPLD-Parcial não implica CPLD-GNEP e CCP-Parcial não implica CCP-*

GNEP) Consideremos o seguinte GNEP com 2 jogadores.

$$\text{Player 1: } \min_{x^1} f^1(x^1, x^2) \quad \text{s.t.} \quad x^1 x^2 \leq 0.$$

$$\text{Player 2: } \min_{x^2} f^2(x^1, x^2) \quad \text{s.t.} \quad x^2 - 1 \leq 0.$$

O conjunto viável é $W = \{(x^1, x^2) : x^1 x^2 \leq 0, x^2 - 1 \leq 0\}$ e consideremos $\bar{x} = (1, 0) \in W$. É claro que 1 satisfaz CPLD sobre o conjunto $X^1(0) = \mathbb{R}$ e que 0 satisfaz CPLD sobre o conjunto $X^2(1) = \{x^2 \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \leq 0\}$, portanto, $(1, 0)$ satisfaz CPLD-Parcial, então satisfaz também CCP-Parcial.

Vamos provar que CCP-GNEP não é satisfeito. Temos que $K^1(\bar{x}) = \{0\}$, por outra parte temos que $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^1(x) = \mathbb{R}$ de fato seja $w \in \mathbb{R}$. Consideremos a sequência $x^k = (1, \frac{w}{k})$, então $x^k \rightarrow \bar{x}$ e $w^k = w$, então $w^k \rightarrow w$ e $w^k = w = k \cdot \frac{w}{k} \in K^1(x^k)$, então $w \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^1(x)$, portanto, CCP-GNEP não é satisfeito. Pelo Teorema 4.2.3, CPLD-GNEP tampouco ocorre.

Observação 4.2.1. Exemplos de otimização sobre relações entre CQs podem ser usados como exemplos de relações para CQ-GNEPs. Considere, por exemplo, o problema de otimização

$$\min_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) \leq 0,$$

então, por exemplo, ocorre CQ no ponto viável $\bar{x}$ se, e somente se, ocorre CQ-GNEP no ponto $(\bar{x}, 0)$, com respeito ao GNEP:

$$\text{Player 1: } \min_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) \leq 0,$$

$$\text{Player 2: } \min_y 0 \quad \text{s.t.} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Assim, por exemplo, CCP-GNEP não implica CPLD-GNEP, CCP-GNEP não implica QN-GNEP, QN-GNEP não implica CCP-GNEP e QN-GNEP não implica CPLD-GNEP, entre outros.

À diferença do que acontece em otimização onde CPLD implica QN, ver [AMS05a], o seguinte exemplo mostra que CPLD-GNEP não implica QN-GNEP.

Exemplo 4.2.4. Consideremos o GNEP com $N = 2$ jogadores, cada jogador controlando uma única variável.

$$\text{Player 1: } \min_{x^1} f^1(x) \quad \text{s.t.} \quad x^1 \leq 0, \quad -x^1 + x^2 \leq 0$$

$$\text{Player 2: } \min_{x^2} f^2(x) \quad \text{s.t.} \quad x^2 \in \mathbb{R}$$

Para $g_1^1(x) = x^1$ e $g_2^1 = -x^1 + x^2$ temos que $\nabla_{x^1} g_1^1(x) = 1$ e $\nabla_{x^1} g_2^1(x) = -1$, portanto, CPLD-GNEP ocorre em todo ponto viável.

Consideremos agora $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = 1 > 0$ e o ponto viável $\bar{x} = (0, 0)$, então temos que $\lambda_1^1 \nabla_{x^1} g_1^1(\bar{x}) + \lambda_2^1 \nabla_{x^1} g_2^1(\bar{x}) = 0$, mas existe $x^k = (\frac{1}{k}, \frac{2}{k})$ que converge a $\bar{x}$ com $g_1^1(x^k) = g_2^1(x^k) = \frac{1}{k} > 0$, portanto, QN-GNEP não ocorre.

Em [KS16], mostra-se que não existe relação de inclusão entre MFCQ e CPLD em W e MFCQ-GNEP e CPLD-GNEP, respetivamente. Os seguintes exemplos mostram que não existe tampouco relação de inclusão entre CCP em W , CCP-GNEP e CCP-Parcial. Acreditamos que para outras CQ resultados análogos podem ser encontrados.

Exemplo 4.2.5. (CCP em W não implica CCP-Parcial) Consideremos um jogo com $N = 2$ jogadores:

$$\begin{aligned} \text{Player 1: } & \min_{x^1} f^1(x) \quad \text{s.t.} \quad (x^1)^3 \leq 0, \\ \text{Player 2: } & \min_{x^2} f^2(x) \quad \text{s.t.} \quad x^1 \exp(x^2) \leq 0. \end{aligned}$$

O conjunto viável é $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x^1)^3 \leq 0, \quad x^1 \exp(x^2) \leq 0\}$ e consideremos o ponto $\bar{x} = (0, 0) \in W$, em [AMRS16], mostra-se que CCP ocorre em $\bar{x} \in W$.

Vamos provar que CCP-Parcial não ocorre. Para o primeiro jogador temos que $X^1(0) = \{x^1 : (x^1)^3 \leq 0\}$, $K_{\bar{x}}^1(0) = \{0\}$ vamos provar que se $w > 0$, então $w \in \limsup_{x \rightarrow 0} K_{\bar{x}}^1(x)$ de fato seja $x^k = \sqrt{\frac{w}{3k}}$ e $w^k = w$, então $x^k \rightarrow 0$, $w^k \rightarrow w$ e $w^k = k \nabla_{x^1} g^1(x^k) \in K_{\bar{x}}^1(x^k)$, então CCP-Parcial não ocorre.

Exemplo 4.2.6. (CCP-GNEP não implica CCP em W) Consideremos um jogo com $N = 2$ jogadores:

$$\begin{aligned} \text{Player 1: } & \min_{x^1} f^1(x) \quad \text{s.t.} \quad 2x^1 - (x^2)^2 - 1 \leq 0, \\ \text{Player 2: } & \min_{x^2} f^2(x) \quad \text{s.t.} \quad 2x^2 - (x^1)^2 - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

O conjunto viável é $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x^1 - (x^2)^2 - 1 \leq 0, \quad 2x^2 - (x^1)^2 - 1 \leq 0\}$ e consideremos o ponto $\bar{x} = (1, 1) \in W$ no Exemplo 2.3 em [KS16], mostra-se que MFCQ-GNEP ocorre em $\bar{x}$, então CCP-GNEP é satisfeito.

Vamos provar que CCP não ocorre em $\bar{x} \in W$. Temos que $\alpha(\bar{x}) = \{1, 2\}$ e $K(\bar{x}) = \{w = (a, -a), \quad a \in \mathbb{R}\}$. Vamos provar que o ponto $w = (0, -2) \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x)$ de fato seja $x^k = (1, \frac{k+1}{k})$ e $w^k = (0, -2)$, então $x^k \rightarrow \bar{x}$, $w^k \rightarrow w$ e $w^k = k \nabla g^1(x^k) + k \nabla g^2(x^k) \in K(x^k)$, então CCP em $\bar{x} \in W$ não ocorre.

Para o caso de um NEP, em [KS16] foi provado que MFCQ-GNEP e CPLD-GNEP são equivalentes a MFCQ e CPLD, com respeito ao conjunto viável $W = \{x \in \mathbb{R}^n : g^v(x^v) \leq 0 \quad v = 1, \dots, N\}$.

Em geral para um NEP, se CQ é uma condição de qualificação e $\bar{x} \in W$ é viável, então CQ ocorre em $\bar{x}$, CQ-GNEP ocorre em $\bar{x}$ e CQ-Parcial ocorre em $\bar{x}$, coincidem. Vamos provar, em particular para CCP, para outra CQ podemos obter um resultado análogo. Uma observação importante para a prova esta baseada no fato de que se $g(x) = (g^1(x^1), \dots, g^N(x^N))$, então

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{x^1} g^1(x^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nabla_{x^2} g^2(x^2) & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \nabla_{x^N} g^N(x^N) \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad \nabla_{x^v} g^v(x) \in \mathbb{R}^{n_v \times m_v} \quad (4.2.3)$$

e que $\alpha(x^*) = \cup_{v=1}^N \alpha^v(x^{*,v})$.

Teorema 4.2.4. Consideremos um NEP e seja $\bar{x} \in W$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) CCP-GNEP ocorre em $\bar{x} \in W$.
- b) CCP ocorre em $\bar{x} \in W$.
- c) CPP-Parcial ocorre em $\bar{x} \in W$.

Demonstração. Vamos provar primeiro que $a \leftrightarrow b$. Seja $g(x) = (g^1(x^1), \dots, g^N(x^N))$, então usando a representação de $\nabla g(x)$ em 4.2.3, temos que:

$$K(x) = \{w \in \mathbb{R}^n : w^v = \sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(x^v), \lambda_i^v \geq 0, v = 1, \dots, N\} = \prod_{v=1}^N K^v(x)$$

e essa expressão coincide com a definida em 4.2.1, então usando o Teorema 4.2.1 obtém-se $a \leftrightarrow b$.

Basta provar que $c \rightarrow a$. Seja $v \in \{1, \dots, N\}$ fixo e arbitrário e seja $w^v \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K^v(x)$, então existem seqüências $\{x^k\}$ e $\{\tilde{w}^k\}$ tal que $x^k \rightarrow \bar{x}$, $\tilde{w}^k \rightarrow w^v$ e $\tilde{w}^k \in K^v(x^k)$, então $\tilde{w}^k = \sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^{v,k} \nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}) \in \mathbb{R}^{n_v}$. Seja $\tilde{x}^k = x^{k,v}$, então $\tilde{x}^k \rightarrow \bar{x}^v$ e como g^v é independente de x^{-v} temos que $\tilde{w}^k \in K_{\tilde{x}^k}^v(\tilde{x}^k)$, então $w^v \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}^v} K_{\tilde{x}^k}^v(x)$ e como $K_{\tilde{x}^k}^v(\bar{x}^v) = K^v(\bar{x})$, então CCP-GNEP ocorre. $\square$

4.3 Condições sequenciais para GNEPs

Definimos agora o conceito de AKKT-GNEP como uma extensão da Definição 2.1.4 e estudamos as propriedades e consequências deste conceito.

Definição 4.3.1. (AKKT-GNEP) Dizemos que $\bar{x} \in W$ satisfaz AKKT-GNEP se existe uma seqüência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\{\lambda^{k,v}\} \subset \mathbb{R}_+^{m_v}$, para cada $v = 1, \dots, N$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) \right\| = 0 \quad (4.3.1)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\{ \lambda_i^{k,v}, -g_i^v(x^k) \right\} = 0, \quad (4.3.2)$$

para todo $i = 1, \dots, m_v$, $v = 1, \dots, N$.

Usando argumentos de continuidade, a definição anterior é equivalente a: $\bar{x} \in W$ satisfaz a condição AKKT-GNEP se existe uma seqüência $\{x^k\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$ e, para cada $v = 1, \dots, N$, existem multiplicadores $\{\lambda^{k,v}\} \subseteq \mathbb{R}_+^{r_v}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) \right\| = 0$$

$$\lambda_i^{k,v} \geq 0 (i \in \alpha^v(\bar{x})).$$

Para um problema de otimização, pelo Teorema 2.1.4, AKKT é uma genuína condição de otimalidade no sentido que ela é satisfeita em uma solução independente do cumprimento de alguma condição de qualificação.

O seguinte exemplo mostra que AKKT-GNEP não é uma condição de otimalidade para GNEPs. E que tal condição não poderia ser satisfeita em qualquer ponto do conjunto solução.

Exemplo 4.3.1. (AKKT-GNEP não é uma condição de otimalidade) Considere o GNEP conjuntamente convexo:

$$\begin{aligned} \text{Player 1: } \quad & \min_{x^1} x^1 \quad \text{s.t.} \quad \frac{(x^1)^2}{2} - x^1 x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} \leq 0, \\ \text{Player 2: } \quad & \min_{x^2} x^2 \quad \text{s.t.} \quad \frac{(x^1)^2}{2} - x^1 x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} \leq 0. \end{aligned}$$

O conjunto solução deste GNEP é $\text{sol}(\text{GNEP}) = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x^1 = x^2\}$. Seja $x^* \in \text{sol}(\text{GNEP})$ vamos provar que AKKT-GNEP não ocorre em x^* . Por contradição, suponha que AKKT-GNEP ocorre em x^* , então existem seqüências $\{x^k\} \subseteq \mathbb{R}^2$ com $x^k = (x_1^k, x_2^k) \rightarrow x^*$ e $\{l^k\} \subseteq \mathbb{R}_+^2$ tal que

$$\begin{aligned} |1 + l_1^k(x_1^k - x_2^k)| &\rightarrow 0, \\ |1 + l_2^k(x_2^k - x_1^k)| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Seja $z^k = x_1^k - x_2^k$, então $z^k \rightarrow 0$ e $l_1^k z^k \rightarrow -1$, $l_2^k z^k \rightarrow 1$, para k suficientemente grande temos $\frac{l_1^k z^k}{l_2^k z^k} \rightarrow -1$, então $\frac{l_1^k}{l_2^k} \rightarrow -1$ e isto é uma contradição. Portanto, x^* não satisfaz AKKT-GNEP.

Assim como definimos CQ-Parcial para um GNEP, podemos definir também AKKT-Parcial da seguinte maneira.

Definição 4.3.2. (AKKT-Parcial) Dizemos que $\bar{x} \in W$ satisfaz AKKT-Parcial se existe uma sequência $\{x^k\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x} \quad (4.3.3)$$

e, para cada $v = 1, \dots, N$, existem multiplicadores $(\lambda^{k,v}) \subseteq \mathbb{R}_+^{m_v}$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, \bar{x}^{-v}) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}, \bar{x}^{-v}) \right\| = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\{ -g_i^v(x^{k,v}, \bar{x}^{-v}), \lambda_i^{k,v} \right\} = 0 \quad i = 1, \dots, m_v.$$

Observação 4.3.1. Da definição de AKKT-Parcial, da definição de solução de um GNEP e do Teorema 2.1.4, é fácil mostrar que AKKT-Parcial é uma condição de otimalidade para GNEPs. É claro também que, do exemplo 4.3.1 e da observação anterior, a AKKT-Parcial não implica AKKT-GNEP.

À diferença do que acontece com as CQs, onde CQ-GNEP implica CQ-Parcial, AKKT-GNEP, como mostra o seguinte exemplo, não implica AKKT-Parcial.

Exemplo 4.3.2. Consideremos o GNEP com $N = 2$ jogadores:

$$\begin{aligned} \text{Jogador 1 : } & \min_{x^1} \frac{(x^1)^2}{2} \quad \text{s.t.} \quad x^1 x^2 \leq 0, \\ \text{Jogador 2 : } & \min_{x^2} \frac{(x^2)^2}{2} \quad \text{s.t.} \quad x^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A única solução deste GNEP é $(0, 0)$. Consideremos o ponto viável $\bar{x} := (-1, 0)$ e seja $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $x^k \rightarrow (-1, 0)$ e $\{\lambda^{k,1}\} \subset \mathbb{R}_+$. Para k suficientemente grande, temos que $x^{k,1} + \lambda^{k,1} 0 \rightarrow -1$, portanto, AKKT-Parcial não pode ocorrer em $\bar{x}$.

Para ver que AKKT-GNEP ocorre, consideremos as sequências $x^k = (-1, \frac{1}{k})$ e $\lambda^{k,1} = k$, então é claro que:

$$\left| x^{k,1} + \lambda^{k,1} x^{k,2} \right| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \left| x^{k,2} \right| \rightarrow 0,$$

portanto, AKKT-GNEP é satisfeito em $\bar{x}$.

Nosso interesse principal ao estudar AKKT-GNEP é motivado pelo fato de que o algoritmo de Lagrangiano aumentado apresentado no seguinte Capítulo gera pontos limites que cumprem esta condição e também porque este conceito leva em conta a natureza conjunta dos GNEPs. Assim como existem alguns algoritmos em otimização que geram sequências AKKT, acreditamos que a extensão desses algoritmos para GNEPs gerarão também sequências AKKT-GNEP.

Para o caso de um NEP temos uma resposta afirmativa, a condição AKKT-GNEP é uma condição de otimalidade.

Teorema 4.3.1. Seja x^* uma solução da NEP, então x^* é um ponto AKKT-GNEP.

Demonstração. Para cada $v = 1, \dots, N$, $x^{*,v}$ é uma solução do problema $P^v(x^{*,-v})$:

$$\begin{aligned} \min f^v(x^v, x^{*, -v}) \\ g_i^v(x^v) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m_v. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Pelo Teorema 2.1.4, existem sequências $\{x^{k,v}\} \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ e $\{\lambda^{k,v}\} \subseteq \mathbb{R}_+^{r_v}$ tal que $x^{k,v} \rightarrow x^{*,v}$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*, -v}) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}) \right\| = 0. \quad (4.3.5)$$

Definamos $x^k = (x^{k,v})_{v=1}^N$, então $x^k \rightarrow x^*$ e, para cada $v = 1, \dots, N$, usando a desigualdade triangular temos que:

$$\begin{aligned} \left\| \nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{k, -v}) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}) \right\| &\leq \left\| \nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{k, -v}) - \nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*, -v}) \right\| + \\ &\quad \left\| \nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*, -v}) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}) \right\| \end{aligned}$$

por continuidade e de 4.3.5 temos que o lado direito converge a zero, então x^* satisfaz AKKT-GNEP. $\square$

O exemplo 2.1.4 mostrou que, em geral, AKKT-GNEP não é uma condição de otimalidade para um GNEP geral. Vamos provar que AKKT-GNEP é satisfeito para uma ampla classe de soluções de GNEPs conjuntamente convexos que contem, como caso particular, os equilíbrios variacionais. Consideremos o GNEP conjuntamente convexo:

$$\begin{aligned} \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Observação 4.3.2. *Os resultados seguintes podem ser facilmente adaptados para o GNEP:*

$$\begin{aligned} \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ h_j^v(x^v) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l_v. \end{aligned}$$

Já que este GNEP é equivalente a:

$$\begin{aligned} \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j^v(x^v) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l_v \\ h^u(x^u) \leq 0, \quad u \neq v, u \in \{1, \dots, N, \} \end{aligned}$$

que é da forma 4.3.8.

Consideremos $b = (b^1, \dots, b^N) \in \mathbb{R}_{++}^N$ e a função $F_b(x) = (b^1 \nabla_{x^1} f^1(x), \dots, b^N \nabla_{x^N} f^N(x))$ e consideremos a desigualdade variacional $VI(C, F_b)$, onde $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$.

Teorema 4.3.2. *Consideremos o GNEP conjuntamente convexo 4.3.6, se as funções objetivos $f^1, \dots, f^N$ são C^1 , então $SOL(VI(C, F_b)) \subseteq sol(GNEP)$, para qualquer $b = (b^1, \dots, b^N) \in \mathbb{R}_{++}^N$.*

Demonstração. A prova é análoga ao Teorema 3.2.2. $\square$

Definição 4.3.3. *Qualquer solução de $VI(C, F_b)$ é chamada um b -equilíbrio variacional do GNEP.*

Se $b^1 = \dots = b^N$, então as soluções de $VI(C, F_b)$ são os equilíbrios variacionais do GNEP.

Exemplo 4.3.3. *Consideremos o GNEP do exemplo 3.2.4. O único equilíbrio variacional deste GNEP é $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. Seja $b = (b^1, b^2) \in \mathbb{R}_{++}^2$ e $F_b(x^1, x^2) = (2b^1(x^1 - 1), b^2(2x^2 - 1))$, o problema $VI(C, F_b)$ tem única solução, para cada b , pois F_b é fortemente monótona. Pode-se calcular pela definição que $SOL(VI(C, F_b)) = \{(\frac{2b^1 + b^2}{2b^1 + 2b^2}, \frac{b^2}{2b^1 + 2b^2})\}$. Neste caso, para ser mais exato temos:*

$$SOL(GNEP) = \sqcup_{b \in \mathbb{R}_{++}^2} SOL(VI(C, F_b)) \cup \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 0)\}.$$

Teorema 4.3.3. *Qualquer b -equilíbrio variacional de um GNEP conjuntamente convexo é um ponto AKKT-GNEP.*

Demonstração. Seja x^* uma solução de $VI(C, F_b)$ se, e somente se, x^* é uma solução do problema de programação não linear:

$$\min \langle F_b(x^*), x \rangle \quad s.t. \quad x \in C,$$

então pelo Teorema 2.1.4, existem seqüências $x^k \rightarrow x^*$ e $\{\lambda^k\} \subset \mathbb{R}^{|\alpha(x^*)|}$ tal que

$$F_b(x^*) + \sum_{i \in \alpha(x^*)} \lambda_i^k \nabla g_i(x^k) \rightarrow 0, \quad (4.3.7)$$

onde $\alpha(x^*) = \{i \in \{1, \dots, m\} : g_i(x^*) = 0\}$. É bom notar que $\alpha(x^*) = \alpha^v(x^*)$, para todo $v = 1, \dots, N$. De (4.3.7), obtemos que, para cada $v = 1, \dots, N$,

$$b^v \nabla_{x^v} f^v(x^*) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^k \nabla_{x^v} g_i(x^k) \rightarrow 0.$$

Como, para cada $v = 1, \dots, N$, temos que $\nabla_{x^v} f^v(x^k) \rightarrow \nabla_{x^v} f^v(x^*)$, concluímos que

$$\nabla_{x^v} f^v(x^*) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \frac{\lambda_i^k}{b^v} \nabla_{x^v} g_i(x^k) \rightarrow 0,$$

portanto, x^* é um ponto AKKT-GNEP. $\square$

No exemplo 4.3.3, as soluções $(1, 0)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ não são b -equilíbrios, mas também são pontos AKKT-GNEP.

No seguinte resultado, provamos que AKKT-GNEP ocorre para a classe de GNEPs, onde as restrições para cada jogador são da forma $g_i^v(x^v, x^{-v}) = g_i^{v,1}(x^v)g_i^{v,2}(x^{-v}) + g_i^{v,3}(x^{-v})$, para cada $v = 1, \dots, N$.

Essa classe de GNEPs contém como caso particular GNEPs com restrições separáveis, que ao mesmo tempo contém os GNEPs com restrições lineares e os NEPs, portanto, o seguinte resultado generaliza o Teorema 4.3.1.

Teorema 4.3.4. *Consideremos um GNEP da forma:*

$$\begin{aligned} \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}), \\ g_i^{v,1}(x^v)g_i^{v,2}(x^{-v}) + g_i^{v,3}(x^{-v}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m_v, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

se x^* é uma solução do GNEP, então x^* é um ponto AKKT-GNEP.

Demonstração. Seja x^* uma solução do GNEP, por definição, para cada $v = 1, \dots, N$, $x^{*,v}$ resolve o problema de otimização:

$$P^v(x^{*,-v}) : \min_{x^v} f^v(x^v, x^{*,-v}) \text{ s.t. } g_i^{v,1}(x^v)g_i^{v,2}(x^{*,-v}) + g_i^{v,3}(x^{*,-v}) \leq 0, i = 1, \dots, m_v.$$

Pelo Teorema 2.1.4, existem $\{x^{k,v}\} \subset \mathbb{R}^{n_v}$ e $\{\lambda^{k,v}\} \subset \mathbb{R}_+^{|\alpha^v(x^*)|}$ tal que $x^{k,v} \rightarrow x^{*,v}$ e

$$\|\nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*,-v}) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} g_i^{v,2}(x^{*,-v}) \nabla_{x^v} g_i^{v,1}(x^{k,v})\| \rightarrow 0. \quad (4.3.9)$$

Seja $x^k := (x^{k,v})_{v=1}^N$ e definamos

$$\bar{\lambda}_i^{k,v} := \begin{cases} 0, & \text{se } g_i^{v,2}(x^{*,-v})g_i^{v,2}(x^{k,-v}) = 0 \\ \lambda_i^{k,v} \frac{g_i^{v,2}(x^{*,-v})}{g_i^{v,2}(x^{k,-v})}, & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Como $x^k \rightarrow x^*$, então para k suficientemente grande $\bar{\lambda}_i^{k,v}$ e $\lambda_i^{k,v}$ tem o mesmo sinal. Temos que

$$\nabla_{x^v} g_i^v(x) = g_i^{v,2}(x^{-v}) \nabla_{x^v} g_i^{v,1}(x^v)$$

e da definição de $\bar{\lambda}_i^{k,v}$, temos que:

$$\bar{\lambda}_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) = \lambda_i^{k,v} g_i^{v,2}(x^{*,-v}) \nabla_{x^v} g_i^{v,1}(x^{k,v}).$$

Portanto, pela equação (4.3.9) e usando a desigualdade triangular, temos que:

$$\|\nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \bar{\lambda}_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k)\| \leq \|\nabla_{x^v} f^v(x^k) - \nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*,-v})\| +$$

$$\|\nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*,-v}) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} g_i^{v,2}(x^{*,-v}) \nabla_{x^v} g_i^{v,1}(x^{k,v})\| \rightarrow 0,$$

portanto, x^* é um ponto AKKT-GNEP. $\square$

Outro caso onde podemos garantir que AKKT-GNEP é uma condição de otimalidade, é para um GNEP com restrições dadas por:

$$(x^{-v})^T A_i^v x^v \leq \gamma_i^v, \quad i = 1, \dots, m_v \quad (4.3.10)$$

onde $A_i^v \in \mathbb{R}^{n-v \times n_v}$.

Teorema 4.3.5. *Consideremos um GNEP com as restrições dadas anteriormente, se x^* é uma solução do GNEP e os $\gamma_i^v \neq 0$ tem o mesmo sinal para todo $i \in \alpha^v(x^*)$ então x^* é um ponto AKKT-GNEP.*

Demonstração. Consideremos o caso $\gamma_i^v > 0$ para $i \in \alpha^v(x^*)$. Para cada $v \in \{1, \dots, N\}$ temos que $x^{*,v}$ é solução do problema:

$$P(x^{*,-v}) : \min_{x^v} f^v(x^v, x^{*,-v}) \text{ s.t. } (x^{*,-v})^T Q_i^v x^v \leq \gamma_i^v, i = 1, \dots, m_v.$$

por o Teorema 2.1.4, existem $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\{\lambda^{k,v}\} \subset \mathbb{R}_+^{|\alpha^v(x^*)|}$ para cada $v = 1, \dots, N$, tal que $x^k \rightarrow x^*$ e

$$\|\nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*,-v}) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} (x^{*,-v})^T Q_i^v\| \rightarrow 0. \quad (4.3.11)$$

multiplicando por $x^{*,v}$, e como $i \in \alpha^v(x^*)$ temos que:

$$\|\nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*, -v})x^{*,v} + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} \gamma_i^v\| \rightarrow 0. \quad (4.3.12)$$

de onde podemos deduzir que $\{\lambda_i^{k,v}\}$ é limitada para cada $i \in \alpha^v(x^*)$, e usando a desigualdade triangular temos:

$$\begin{aligned} \|\nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} (x^{k,-v})^T Q_i^v\| &\leq \|\nabla_{x^v} f^v(x^k) - \nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*, -v})\| \\ &+ \|\nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*, -v}) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} (x^{*, -v})^T Q_i^v\| + \|\sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} (x^{k,-v} - x^{*, -v})^T Q_i^v\| \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

como para algum $M > 0$ temos $\|\lambda_i^{k,v}\| \leq M$ para cada $i \in \alpha^v(x^*)$, então o lado direito de 4.3.13 converge a zero, e portanto a condição AKKT-GNEP ocorre em x^* . $\square$

Finalmente, para ver um caso a mais onde AKKT-GNEP ocorre, estendemos a definição de ponto viável não degenerado de otimização para GENPs.

Definição 4.3.4. *Seja $\bar{x} \in W$ um ponto viável. Dizemos que $\bar{x}$ é um ponto não degenerado do GNEP se, para cada $v = 1, \dots, N$, temos que:*

$$i \in \alpha^v(\bar{x}) \Rightarrow \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x}) \neq 0. \quad (4.3.14)$$

Para um GNEP onde cada jogador controla uma única variável, $x^v \in \mathbb{R}$, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.6. *Consideremos o GNEP 3.2.6, onde cada jogador controla uma única variável, $x^v \in \mathbb{R}$, se x^* é uma solução não degenerada, então é um ponto AKKT-GNEP.*

Demonstração. Seja x^* uma solução não degenerada do GNEP, para cada $v = 1, \dots, N$, por definição $x^{*,v}$ resolve o problema de otimização:

$$P^v(x^{*, -v}) : \min_{x^v} f^v(x^v, x^{*, -v}) \text{ s.t. } g_i^v(x^v, x^{*, -v}) \leq 0, i = 1, \dots, m_v.$$

Pelo Teorema 2.1.4, existem $\{x^{k,v}\} \subset \mathbb{R}$ e $\{\lambda^{k,v}\} \subset \mathbb{R}_+^{|\alpha^v(x^*)|}$ tal que $x^{k,v} \rightarrow x^{*,v}$ e

$$\|\nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*, -v}) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}, x^{*, -v})\| \rightarrow 0. \quad (4.3.15)$$

Seja $x^k := (x^{k,v})_{v=1}^N$ e definimos para k suficientemente grande

$$\bar{\lambda}_i^{k,v} := \lambda_i^{k,v} \frac{\nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}, x^{*, -v})}{\nabla_{x^v} g_i^v(x^k)}.$$

Como x^* é não degenerado, então $\bar{\lambda}_i^{k,v}$ está bem definida e $\bar{\lambda}_i^{k,v}$ e $\lambda_i^{k,v}$ tem o mesmo sinal, temos que:

$$\bar{\lambda}_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) = \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}, x^{*, -v}).$$

Portanto, por (4.3.15) e usando a desigualdade triangular, temos que:

$$\|\nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \bar{\lambda}_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k)\| \leq \|\nabla_{x^v} f^v(x^k) - \nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*, -v})\| +$$

$$\|\nabla_{x^v} f^v(x^{k,v}, x^{*, -v}) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^{k,v}, x^{*, -v})\| \rightarrow 0,$$

portanto, x^* é um ponto AKKT-GNEP. $\square$

Exemplo 4.3.4. Considere o seguinte GNEP de jogadores convexos:

$$\begin{aligned} \text{Jogador 1:} \quad & \min_{x^1} x^1 \quad \text{s.t.} \quad (x^1)^2 - x^1 x^2 \leq 0, \\ \text{Jogador 2:} \quad & \min_{x^2} x^2 \quad \text{s.t.} \quad (x^2)^2 - x^1 x^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Note-se que este GNEP não é conjuntamente convexo e nem é da forma do Teorema 4.3.4. O conjunto solução deste GNEP é $\text{sol}(\text{GNEP}) = \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 : a \leq 0\}$. Para cada $x^* \in \text{sol}(\text{GNEP})$, temos que $\alpha^1(x^*) = \{1\}$ e $\alpha^2(x^*) = \{1\}$ para $x^* \neq 0$, temos que $\nabla_{x^1} g^1(x^*) \neq 0$ e $\nabla_{x^2} g^2(x^*) \neq 0$, portanto, pelo Teorema anterior, x^* é AKKT-GNEP. A solução $x^* = 0$ é degenerada, mas ainda assim é também um ponto AKKT-GNEP.

O seguinte resultado mostra a relação entre CCP-GNEP e AKKT-GNEP. Este resultado estabelece que CCP-GNEP é a condição mais fraca que garante que todo ponto AKKT-GNEP é um ponto KKT-GNEP.

Teorema 4.3.7. Consideremos o GNEP 3.2.6. $\bar{x} \in W$ satisfaz CCP-GNEP se, e somente se, para quaisquer funções objetivo $f^1, \dots, f^N$ tal que $\bar{x}$ é um ponto AKKT-GNEP, então $\bar{x}$ é KKT-GNEP.

Demonstração. Seja $\bar{x} \in W$ tal que vale CCP-GNEP, como vale AKKT-GNEP em $\bar{x}$, então, para cada $v = 1, \dots, N$, existem sequências $\{x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ com $x^k \rightarrow \bar{x}$ e $\{\lambda^{k,v}\} \subseteq \mathbb{R}_+^{r_v}$ tal que:

$$\left\| \nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) \right\| \rightarrow 0.$$

Seja $w^{k,v} = \sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) \in K^v(x^k)$ e $w^k = (w^{k,v})_{v=1}^N$, então $w^k \in K(x^k)$ temos que $w^{k,v} \rightarrow -\nabla_{x^v} f^v(\bar{x})$, então $w^k \rightarrow -F(\bar{x})$. Assim, $-F(\bar{x}) \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x)$, da condição CCP-GNEP, temos que $-F(\bar{x}) \in K(\bar{x})$, então $\bar{x}$ é KKT-GNEP.

Reciprocamente, seja $w \in \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} K(x)$, vamos provar que $w \in K(\bar{x})$. Assim, existem sequências $x^k \rightarrow \bar{x}$ e $w^k \rightarrow w$ com $w^k \in K(x^k)$. Definimos, para cada jogador $v = 1, \dots, N$, a função objetivo $f^v(x) = -\langle x^v, w^v \rangle$, então $\nabla_{x^v} f^v(x) = -w^v \in \mathbb{R}^{n_v}$. Como $w^k \in K(x^k)$, existem, para cada $v = 1, \dots, N$, $\{\lambda^{k,v}\} \subseteq \mathbb{R}_+^{r_v}$ tal que:

$$w^{k,v} = \sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k),$$

como $\nabla_{x^v} f^v(x^k) \rightarrow -w^v$ e $w^k \rightarrow w$, então $w^{k,v} \rightarrow w^v$ e assim

$$\nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i \in \alpha^v(x^*)} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) \rightarrow 0.$$

Como isso ocorre para cada $v = 1, \dots, N$, então $\bar{x}$ é um ponto AKKT-GNEP e então $\bar{x}$ é KKT-GNEP, ou seja, $-F(\bar{x}) = w \in K(\bar{x})$ e então $\bar{x}$ satisfaz CCP-GNEP. $\square$

Observação 4.3.3. Usando o Teorema 4.3.7, podemos mostrar de forma análoga ao Teorema anterior, que CCP-Parcial é a condição mais fraca que garante que AKKT-Parcial e implica KKT-GNEP.

Capítulo 5

Métodos tipo Lagrangiano aumentado para resolver GNEPs

Neste Capítulo apresentamos o método de Lagrangiano aumentado para resolver GNEPs. Para o termo penalizador usamos tanto a função máximo ao quadrado quanto uma função exponencial. Propriedades de convergência são estudados em cada caso, mas principalmente iremos enfatizar no caso quadrático já que foi testado na prática a ter um melhor desempenho em otimização em relação a outras funções de penalização e porque tem maiores resultados de convergência e de viabilidade.

O método Lagrangiano aumentado para otimização pode ser usado tanto para achar soluções globais como para achar pontos KKT. No primeiro caso, nos subproblemas soluções aproximadas são necessárias, no entanto, no segundo caso pontos, KKT aproximados são necessários. Para o caso dos NEPs podemos adaptar ambos os casos.

5.1 Método de Lagrangiano aumentado com solução global para NEPs

Nesta seção, desenvolvemos o método tipo Lagrangiano aumentado para o NEP com restrições de nível inferior.

$$\begin{aligned} P^v(x^{-v}) : \quad & \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) \\ \text{s.t} \quad & g_i^v(x^v) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m_v, \\ & h_j^v(x^v) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l_v, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

onde $f^v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g^v : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{m_v}$ e $h^v : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{l_v}$ são funções contínuas. Não assumiremos nenhuma hipótese de convexidade sobre as funções que definem o problema.

De forma análoga como em otimização, para o v -ésimo jogador, definimos a função Lagrangiano aumentado penalizando as restrições de nível superior g^v e mantendo as restrições de nível inferior h^v :

$$L_{\rho^v}^v(x, u^v) = f^v(x) + \frac{1}{2\rho} \sum_{i=1}^{m_v} \max\{0, u^v + \rho^v g^v(x^v)\}^2.$$

Para $\rho = (\rho^v)_{v=1}^N > 0$, $u = (u^v)_{v=1}^N \in \mathbb{R}_+^m$ e $x \in \underline{W}$ para $\underline{W} = \prod_{v=1}^N \underline{W}^v$, onde $\underline{W}^v = \{x^v : h^v(x^v) \leq 0\}$, para cada $v = 1, \dots, N$. Estas funções Lagrangiano aumentado, para cada jogador $v = 1, \dots, N$, definem um novo NEP denotado por $NEP(u, \rho)$, onde o problema para o v -ésimo jogador é:

$$\begin{aligned} \min_{x^v} L_{\rho^v}^v(x, u^v), \\ h_j^v(x^v) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l_v. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

No seguinte algoritmo apresentamos o método Lagrangiano aumentado para NEPs com convergência para uma solução global. Em cada iteração, o método resolve aproximadamente um $NEP(u, \rho)$. Para ser mais exato, acharemos um ϵ -equilíbrio do $NEP(u, \rho)$ segundo a seguinte definição.

Definição 5.1.1. (ϵ -equilíbrio) *Seja $\epsilon \geq 0$ e consideremos o NEP dado por:*

$$\begin{aligned} P^v(x^{-v}) : \quad \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}), \\ s.t \quad x^v \in X^v. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Um ponto viável $\bar{x} \in \prod_{v=1}^N X^v$ é um ϵ -equilíbrio se, para cada $v = 1, \dots, N$,

$$f^v(\bar{x}) \leq f^v(x^v, \bar{x}^{-v}) + \epsilon \quad \forall x^v \in X^v.$$

É claro que todo ponto de equilíbrio é um ϵ -equilíbrio, para todo $\epsilon \geq 0$. O seguinte algoritmo é uma adaptação para NEPs do método de Lagrangiano aumentado de otimização para calcular pontos de equilíbrio.

Algoritmo 5.1.1. (*LAM-NEP*) *P0) Seja $u^{max} \in \mathbb{R}_+^m$, $\tau \in (0, 1)$, $\gamma > 1$. Escolhemos $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $u^0 \in [0, u^{max}]$, $\rho^0 \in \mathbb{R}_{++}^N$, $\epsilon_0 > 0$ e fazemos $k = 0$. P1) Se (x^k, λ^k) satisfaz algum critério de parada, parar. P2) Calcular um ponto x^{k+1} , ϵ_k -equilíbrio do $NEP(u^k, \rho^k)$, i.e., um ponto tal que para cada $v = 1, \dots, N$.*

$$L_{\rho^{k,v}}^v(x^{k+1}, u^{k,v}) \leq L_{\rho^{k,v}}^v((x^v, x^{k+1,-v}), u^{k,v}) + \epsilon_k, \quad \forall x^v \in \underline{W}^v. \quad (5.1.4)$$

P3) Definimos para cada $v = 1, \dots, N$: $\lambda^{k+1,v} = \max \{0, u^{k,v} + \rho^{k,v} g^v(x^{k+1,v})\}$. P4) Para cada $v = 1, \dots, N$, se

$$\left\| \max \left\{ g^v(x^{k+1,v}), -\lambda^{k+1,v} \right\} \right\| \leq \tau \left\| \max \left\{ g^v(x^{k,v}), -\lambda^{k,v} \right\} \right\|,$$

então fazemos $\rho^{k+1,v} = \rho^{k,v}$, caso contrário, $\rho^{k+1,v} = \gamma \rho^{k,v}$. P5) Escolhemos $u^{k+1} = \min \{\lambda^{k+1}, u^{max}\}$. Fazer $k \rightarrow k + 1$. Ir ao Passo P1.

Os parâmetros τ e γ podem ser escolhidos de forma diferente para cada jogador, mas isso não altera os resultados de convergência. Dividimos o análise da convergência estudando a viabilidade e a otimalidade do ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo. Para o estudo da viabilidade, definimos um novo NEP onde o problema para cada jogador $v = 1, \dots, N$ é:

$$Q^v : \quad \min_{x^v} \|g^v(x^v)_+\|^2, \quad s.t. \quad x^v \in \underline{W}^v. \quad (5.1.5)$$

Como as funções objetivos de cada jogador são independentes das variáveis dos outros jogadores, temos N problemas de otimização independentes.

O seguinte teorema prova que se x^* é um ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo, então, para cada $v = 1, \dots, N$, $x^{*,v}$ é solução do problema Q^v .

Teorema 5.1.1. *Seja x^* um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo e suponha que a sequência $\{\epsilon_k\}$ é limitada, então $x^{*,v}$ é solução do problema Q^v para cada $v = 1, \dots, N$.*

Demonstração. Seja $v \in \{1, \dots, N\}$ fixo e arbitrário. Seja $K \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \in K} x^k = x^*$. Como $\underline{W}$ é fechado e $x^k \in \underline{W}$, então $x^* \in \underline{W}$. Consideremos dois casos $\{\rho^{k,v}\}$ limitado e $\rho^{k,v} \rightarrow \infty$. Se $\{\rho^{k,v}\}$ é limitado, então existe $k_0(v)$ tal que $\rho^{k,v} = \rho^{k_0,v}$, para todo $k \geq k_0$, então pelo Passo P4 temos

que $\max\{g^v(x^{k,v}), -\lambda^{k,v}\} \rightarrow 0$. Do fato que $\lambda^{k,v} \geq 0$, obtemos que $g^v(x^{*,v}) \leq 0$, portanto, $x^{*,v}$ é solução de Q^v .

Consideremos agora o caso que $\rho^{k,v} \rightarrow \infty$. Suponha que existe um $x^v \in \underline{W}^v$ tal que:

$$\|g^v(x^{*,v})_+\|^2 > \|g^v(x^v)_+\|^2.$$

Pela continuidade de g^v , a limitação de $\{u^{k,v}\}$ e o fato que $\rho^{k,v} \rightarrow \infty$, existe $c^v > 0$ e $k_0(v)$ tal que, para todo $k \geq k_0$, temos que:

$$\|(g^v(x^{k,v}) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 > \|(g^v(x^v) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 + c^v,$$

portanto, para todo $k \in K$ e $k \geq k_0$ temos

$$f^v(x^k) + \frac{\rho^{k,v}}{2} \|(g^v(x^{k,v}) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 > f^v(x^v, x^{k,-v}) + \frac{\rho^{k,v}}{2} \|(g^v(x^v) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 + \frac{\rho^{k,v}}{2} c^v + f^v(x^k) - f^v(x^v, x^{k,-v}).$$

Como $\{\epsilon_k\}$ é limitada, existe $k^1(v) > k_0$ tal que, para $k \in K$ e $k \geq k^1$,

$$\frac{\rho^{k,v}}{2} c^v + f^v(x^k) - f^v(x^v, x^{k,-v}) > \epsilon_k.$$

Portanto,

$$f^v(x^k) + \frac{\rho^{k,v}}{2} \|(g^v(x^{k,v}) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 > f^v(x^v, x^{k,-v}) + \frac{\rho^{k,v}}{2} \|(g^v(x^v) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 + \epsilon_k,$$

para $k \in K$ e $k \geq k^1$. E isso contradiz a definição de x^k . $\square$

Do Teorema anterior, pode-se concluir que se o NEP é viável, então x^* é viável. A respeito da viabilidade, o próximo Teorema mostra que no caso de $\epsilon_k \rightarrow 0$ o algoritmo acha no limite um ponto de equilíbrio.

Teorema 5.1.2. *Seja x^* um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo, suponha que a sequência $\{\epsilon_k\}$ converge a 0 e que o NEP é viável, então x^* é um ponto de equilíbrio.*

Demonstração. Seja $K \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \in K} x^k = x^*$. Como o NEP é viável, então pelo Teorema anterior x^* viável. Consideremos dois casos $\{\rho^{k,v}\}$ limitado e $\rho^{k,v} \rightarrow \infty$. Suponha primeiro que $\rho^{k,v} \rightarrow \infty$. Pela definição de x^k , temos que para todo $x^v \in \underline{W}^v$.

$$f^v(x^k) + \frac{\rho^{k,v}}{2} \|(g^v(x^{k,v}) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 \leq f^v(x^v, x^{k,-v}) + \frac{\rho^{k,v}}{2} \|(g^v(x^v) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 + \epsilon_k. \quad (5.1.6)$$

Seja agora $x^v \in W^v$, então:

$$\|(g^v(x^v) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 \leq \|\frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}}\|^2,$$

portanto, de (5.1.6) temos:

$$f^v(x^k) \leq f^v(x^k) + \frac{\rho^{k,v}}{2} \|(g^v(x^{k,v}) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k,v}})_+\|^2 \leq f^v(x^v, x^{k,-v}) + \frac{\|u^{k,v}\|^2}{2\rho^{k,v}} + \epsilon_k,$$

tomando limite para $k \in K$ e da limitação de $\{u^{k,v}\}$, concluímos que $f^v(x^*) \leq f^v(x^v, x^{*, -v})$, para todo $x^v \in W^v$, como v é arbitrário, então x^* é um ponto de equilíbrio.

Suponha agora que $\{\rho^{k,v}\}$ é limitado, então existe $k_0(v)$ tal que $\rho^{k,v} = \rho^{k_0,v}$, para todo $k \geq k_0$, da definição de x^k obtemos, para todo $x^v \in \underline{W}^v$.

$$f^v(x^k) + \frac{\rho^{k_0,v}}{2} \left\| (g^v(x^{k,v}) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k_0,v}})_+ \right\|^2 \leq f^v(x^v, x^{k,-v}) + \frac{\rho^{k_0,v}}{2} \left\| (g^v(x^v) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k_0,v}})_+ \right\|^2 + \epsilon_k. \quad (5.1.7)$$

Seja agora $x^v \in W^v$, então:

$$\left\| (g^v(x^v) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k_0,v}})_+ \right\|^2 \leq \left\| \frac{u^{k,v}}{\rho^{k_0,v}} \right\|^2,$$

portanto, de (5.1.7) obtemos:

$$f^v(x^k) + \frac{\rho^{k_0,v}}{2} \left\| (g^v(x^{k,v}) + \frac{u^{k,v}}{\rho^{k_0,v}})_+ \right\|^2 \leq f^v(x^v, x^{k,-v}) + \frac{\|u^{k,v}\|^2}{2\rho^{k_0,v}} + \epsilon_k.$$

Seja $K_1 \subseteq K$ tal que $\lim_{k \in K_1} u^{k,v} = u^{*,v}$. Tomando limite para $k \in K_1$, temos

$$f^v(x^*) + \frac{\rho^{k_0,v}}{2} \left\| (g^v(x^{*,v}) + \frac{u^{*,v}}{\rho^{k_0,v}})_+ \right\|^2 \leq f^v(x^v, x^{*, -v}) + \frac{\|u^{*,v}\|^2}{2\rho^{k_0,v}},$$

que é equivalente a:

$$f^v(x^*) + \frac{\rho^{k_0,v}}{2} \sum_{i=1}^{m_v} (g_i^v(x^{*,v}) + \frac{u_i^{*,v}}{\rho^{k_0,v}})_+^2 \leq f^v(x^v, x^{*, -v}) + \frac{\rho^{k_0,v}}{2} \sum_{i=1}^{m_v} (\frac{u_i^{*,v}}{\rho^{k_0,v}})^2. \quad (5.1.8)$$

Se $i \in \alpha^v(x^*)$, então $g_i^v(x^{*,v}) = 0$ e como $\frac{u_i^{*,v}}{\rho^{k_0,v}} \geq 0$, temos que $(g_i^v(x^{*,v}) + \frac{u_i^{*,v}}{\rho^{k_0,v}})_+ = \frac{u_i^{*,v}}{\rho^{k_0,v}}$ e, portanto, de (5.1.8), obtemos:

$$f^v(x^*) + \frac{\rho^{k_0,v}}{2} \sum_{g_i^v(x^{*,v}) < 0} (g_i^v(x^{*,v}) + \frac{u_i^{*,v}}{\rho^{k_0,v}})_+^2 \leq f^v(x^v, x^{*, -v}) + \frac{\rho^{k_0,v}}{2} \sum_{g_i^v(x^{*,v}) < 0} (\frac{u_i^{*,v}}{\rho^{k_0,v}})^2. \quad (5.1.9)$$

Pelo Passo P4, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \max\{g^v(x^{k,v}), -\lambda^{k,v}\} = 0$ e da escolha $u^{k+1} = \min\{\lambda^{k+1}, u^{max}\}$ temos que se $g_i^v(x^{*,v}) < 0$, então $u_i^{*,v} = 0$, então de (5.1.9), obtemos que $f^v(x^*) \leq f^v(x^v, x^{*, -v})$, para todo $x^v \in W^v$, como v é arbitrário, então x^* é um ponto de equilíbrio. $\square$

5.2 Método de Lagrangiano aumentado para GNEPs

A extensão da convergência global do método Lagrangiano para um GNEP geral tem certas dificuldades. Essas dificuldades estão associadas ao fato que os conjuntos viáveis de cada jogador não são fixos.

Para o caso de um GNEP geral, usaremos o método de Lagrangiano aumentado para calcular pontos KKT-GNEP. Assumiremos durante todo o Capítulo (a menos que se mencione outra coisa) que o problema para o v -ésimo jogador é dado por:

$$\begin{aligned} P_v(x^{-v}) : & \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i^v(x^v, x^{-v}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m_v, \\ & h_j^v(x^v, x^{-v}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l_v, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

onde, para cada $v = 1, \dots, N$, as restrições g^v são chamadas de restrições de nível superior e h^v as restrições de nível inferior. Essas restrições são escolhidas cuidadosamente de acordo com alguns critérios que geralmente estão associados com a facilidade para poder resolver os subproblemas.

Adaptamos o algoritmo de Lagrangiano aumentado de [BM14] usado para encontrar pontos KKT de um problema de programação não linear para o cálculo de pontos KKT-GNEP de GNEPs com restrições de nível inferior da forma (5.2.1).

À diferença do algoritmo apresentado em [KS16], nós estendemos a prova de convergência usando condições de qualificação mais fracas como QN-GNEP e CCP-GNEP e associamos estas propriedades de convergência com o conceito de AKKT-GNEP no caso de CCP-GNEP.

Analogamente ao método de Lagrangiano aumentado para problemas de otimização, penalizamos as restrições de nível superior (aquelas de estrutura mais complexa) e mantemos as restrições de nível inferior fixas. Neste trabalho consideraremos duas funções para a penalização, primeiro usaremos a clássica função de Lagrangiano aumentado de Powell-Hestenes-Rockafellar e no segundo caso uma função de penalidade exponencial.

Começamos considerando o primeiro caso. Temos que a função Lagrangiano para o v -ésimo jogador é dado por:

$$L^v(x, u^v) = f^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{i=1}^{m_v} u_i^v g_i^v(x^v, x^{-v}), \quad (5.2.2)$$

para $x \in \underline{W}^v$ e $u^v \in \mathbb{R}^{m_v}$. E a função Lagrangiano aumentado como:

$$L_{\rho^v}^v(x, u^v) = f^v(x^v, x^{-v}) + \frac{1}{2\rho^v} \sum_{i=1}^{m_v} \max\{0, u_i^v + \rho^v g_i^v(x^v, x^{-v})\}^2. \quad (5.2.3)$$

Para $x \in \underline{W}^v$, $u^v \in \mathbb{R}_+^{m_v}$ e $\rho^v > 0$.

Note que as funções $L_{\rho^v}^v(x, u^v)$ são continuamente diferenciáveis (mas, em geral, não duas vezes diferenciáveis) com respeito à x e o gradiente parcial com respeito a x^v é dado por:

$$\nabla_{x^v} L_{\rho^v}^v(x, u^v) = \nabla_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{i=1}^{m_v} \max\{0, u_i^{k,v} + \rho^{k,v} g_i^v(x^v, x^{-v})\} \nabla_{x^v} g_i^v(x^v, x^{-v}).$$

Estas funções Lagrangiano aumentado $L_{\rho^v}^v(x, u^v)$ definem junto com as restrições h^v um novo GNEP, que denotaremos por $GNEP(u, \rho)$, onde o problema para o v -ésimo jogador é dado por:

$$\begin{aligned} \min_{x^v} L_{\rho^v}^v(x, u^v), \\ h_j^v(x^v, x^{-v}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l_v, \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

onde $u = (u^v)_{v=1}^N$, $\rho = (\rho^v)_{v=1}^N$ e, para cada $v = 1, \dots, N$, $\rho^v > 0$ é um adequado parâmetro de penalidade e u^v denota a estimativa para o multiplicador λ^v associado à restrição g^v .

Nosso objetivo é achar um ponto KKT-GNEP do GNEP (5.2.1), i.e., achar $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ tal que, para cada $v = 1, \dots, N$, satisfaz:

$$\begin{aligned} KKT_v : \nabla_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^v \nabla_{x^v} h_j^v(x^v, x^{-v}) = 0, \\ \lambda_i^v \geq 0, \quad g_i^v(x^v, x^{-v}) \leq 0, \quad \lambda_i^v g_i^v(x^v, x^{-v}) = 0, \forall i = 1, \dots, m_v, \\ \mu_j^v \geq 0, \quad h_j^v(x^v, x^{-v}) \leq 0, \quad \mu_j^v h_j^v(x^v, x^{-v}) = 0, \forall j = 1, \dots, l_v. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Do ponto de vista computacional, atingir um ponto KKT exato poderia ser difícil de alcançar em um determinado tempo finito, assim poderíamos dar como sucesso o término do algoritmo, se atingimos um ponto KKT-GNEP ϵ -inexato para algum $\epsilon \geq 0$ dado.

Abaixo apresentamos uma extensão das clássicas definições de ponto KKT ϵ -inexato de otimização.

Definição 5.2.1. Consideremos o GNEP (5.2.1) e seja $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}_+$. Um ponto $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ é um ponto KKT-GNEP ϵ_1, ϵ_2 -inexato se as seguintes desigualdades ocorrem, para cada

$v = 1, \dots, N$:

$$\left\| \nabla_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^v \nabla_{x^v} h_j^v(x^v, x^{-v}) \right\| \leq \epsilon_1,$$

$$\left\| \max \{g_i^v(x^v, x^{-v}), -\lambda_i^v\} \right\| \leq \epsilon_2, \quad i = 1, \dots, m_v,$$

$$\left\| \max \{h_j^v(x^v, x^{-v}), -\mu_j^v\} \right\| \leq \epsilon_2, \quad j = 1, \dots, l_v.$$

Quando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ simplesmente dizemos: um ponto KKT-GNEP ϵ -inexato.

Note que para $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, um ponto KKT-GNEP ϵ_1, ϵ_2 -inexato é um ponto KKT-GNEP.

Um ponto KKT-GNEP $\epsilon, \bar{\epsilon}$ -inexato será achado através do cálculo de pontos KKT-GNEP ϵ_1, ϵ_2 -inexatos de GNEPs da forma $GNEP(u, \rho)$.

O seguinte algoritmo é uma extensão direta do Algoritmo 4.1 de [BM14] e também foi motivado pelo Algoritmo 3.1 de [Kan16].

Algoritmo 5.2.1. (*Algoritmo de Lagrangiano aumentado para GNEPs*) *P0)* Seja $u^{max} \in \mathbb{R}_+^m$, $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$, $\gamma > 1$ escolhamos $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, $u^0 \in [0, u^{max}]$, $\rho^0 \in \mathbb{R}_{++}^N$ e $\epsilon \geq 0$. Fazer $k = 0$.

P1) Se (x^k, λ^k, μ^k) é um ponto KKT-GNEP ϵ -inexato, parar.

P2) Calcular um ponto (x^{k+1}, μ^{k+1}) KKT-GNEP aproximado do $GNEP(u^k, \rho^k)$.

P3) Definir $\lambda^{k+1,v} = \max \{0, u^{k,v} + \rho^{k,v} g^v(x^{k+1})\}$, para $v = 1, \dots, N$.

P4) Para $v = 1, \dots, N$, se

$$\left\| \max \{g^v(x^{k+1}), -\lambda^{k+1,v}\} \right\| \leq \tau \left\| \max \{g^v(x^k), -\lambda^{k,v}\} \right\|,$$

então $\rho^{k+1,v} = \rho^{k,v}$. Em outro caso, $\rho^{k+1,v} = \gamma \rho^{k,v}$.

P5) Escolher $u^{k+1} \in [0, u^{max}]$. Fazer $k \rightarrow k + 1$ ir ao Passo 1.

As quantidades $\rho^{k,v}$ são chamadas parâmetros de penalidade, esses parâmetros são atualizados em cada iteração do algoritmo no Passo 4, para cada jogador. Os mesmos parâmetros de penalidade podem ser usados na seguinte iteração se um progresso suficiente é obtido, em termos de melhoras da viabilidade e complementariedade. No entanto, o parâmetro será aumentado se não existir um progresso suficiente.

Por construção, a sequência $\{u^k\}$ não é negativa e limitada. Uma escolha importante é $u^{k+1} := \min \{\lambda^{k+1}, u^{max}\}$, esta escolha faz com que u^k permaneça limitada e permite obter algumas propriedades do ponto limite.

Pode-se considerar diferentes parâmetros γ^v, τ^v para cada jogador, mas por simplicidade consideraremos γ, τ para cada jogador. É claro que o Passo 2 é o passo fundamental do algoritmo, em cada iteração do algoritmo, temos que achar um ponto KKT-GNEP aproximado de um $GNEP(u, \rho)$.

Para poder estudar as propriedades de convergência do algoritmo, precisamos definir formalmente o cálculo dos pontos KKT-GNEP aproximados no Passo 2 do algoritmo. A seguinte hipótese é uma extensão direta das hipóteses 6.1 de [BM14]. Veremos depois que esta hipótese está conectada com o conceito de AKKT-GNEP.

Hipótese 5.2.1. *No Passo 2 do algoritmo, é possível achar, para cada $v = 1, \dots, N$, um ponto $(x^{k+1}, \mu^{k+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$, ponto KKT-GNEP $\epsilon_k, \bar{\epsilon}_k$ -inexato do $GNEP(u^k, \rho^k)$, i.e., um ponto tal que:*

$$\left\| \nabla_{x^v} L_{\rho^{k,v}}(x, u^{k,v}) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^{k,v} \nabla_{x^v} h_j^v(x^v, x^{-v}) \right\| \leq \epsilon_k,$$

$$\left\| \max \{h_j^v(x^v, x^{-v}), -\mu_j^v\} \right\| \leq \bar{\epsilon}_k, \quad j = 1, \dots, l_v,$$

onde a sequência $\{\epsilon_k\}$ é limitada e a sequência $\{\bar{\epsilon}_k\}$ tende a zero.

A hipótese 5.2.1 diz que em cada iteração do algoritmo, podemos calcular um ponto $(x^{k+1}, \mu^{k+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$, ponto KKT-GNEP $\epsilon_k, \bar{\epsilon}_k$ -inexato do $GNEP(u^k, \rho^k)$ de acordo com a definição 5.2.1. O seguinte resultado mostra o comportamento dos multiplicadores associados as restrições g^v no limite.

Teorema 5.2.1. *Seja x^* um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo com $\lim_{k \in K} x^k = x^*$, então para cada $v = 1, \dots, N$ temos que:*

$$\lambda_i^{k+1,v} \rightarrow 0 \quad \text{para todo } i \notin \alpha^v(x^*).$$

Demonstração. Do Passo 3 do algoritmo temos que $\lambda^{k+1,v} \in \mathbb{R}_+^{m_v}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $g_i^v(x^*) < 0$, seja $k^1(v)$ e $c > 0$ tal que

$$g_i^v(x^k) < c < 0 \quad \text{para todo } k \in K, k \geq k^1.$$

Se $\{\rho^{k,v}\}$ tende ao infinito, como $\{u^{k,v}\}$ é limitada, então existe $k^2 \geq k^1$ tal que para todo $k \in K$ com $k \geq k^2$,

$$u^{k,v} + \rho^{k,v} g_i^v(x^k) < 0.$$

Da definição de $\lambda_i^{v,k+1}$ temos que $\lambda_i^{v,k+1} = 0$, para todo $k \in K$, com $k \geq k^2$. Suponha agora que $\{\rho^{k,v}\}$ é limitada, então temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max \{g^v(x^k), -\lambda^{k,v}\} = 0,$$

como $g_i^v(x^k) < c < 0$, para todo $k \in K, k \geq k^1$, então $\lambda_i^{k,v} \rightarrow 0$. $\square$

Dividimos o estudo da convergência do algoritmo 5.2.1 em duas partes. Primeiro vamos estudar as propriedades de otimalidade do ponto limite.

O seguinte teorema garante que todo ponto de acumulação viável da sequência gerada pelo algoritmo é um ponto AKKT-GNEP de 5.2.1.

Teorema 5.2.2. *Seja x^* um ponto de acumulação viável da sequência $\{x^k\}$ gerada pelo algoritmo 5.2.1 e suponha que a hipótese 5.2.1 é satisfeita com $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$, então x^* é um ponto AKKT-GNEP para o GNEP (5.2.1).*

Demonstração. Vamos provar que existem sequências $\{x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{\lambda^{k,v}\} \subseteq \mathbb{R}_+^{m_v}$ e $\{\mu^{k,v}\} \subseteq \mathbb{R}_+^{l_v}$, para cada $v = 1, \dots, N$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^{k,v} \nabla_{x^v} h_j^v(x^k) \right\| = 0 \quad (5.2.6)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min \{ \lambda_i^{k,v}, -g_i^v(x^k) \} = 0, \quad (5.2.7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min \{ \mu_j^{k,v}, -h_j^v(x^k) \} = 0, \quad (5.2.8)$$

para todo $i = 1, \dots, m_v, j = 1, \dots, l_v, v = 1, \dots, N$.

Da hipótese e do Passo 2 do algoritmo, temos que (5.2.6) e (5.2.8) ocorrem, portanto, será suficiente provar (5.2.7).

Seja $v \in \{1, \dots, N\}$ fixo e arbitrário. Se $i \notin \alpha^v(x^*)$, então pelo teorema anterior temos que $\lim_{k \in K} \lambda_i^{k,v} = 0$, portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \min \{ \lambda_i^{k,v}, -g_i^v(x^k) \} = 0$. Agora, seja $i \in \alpha^v(x^*)$, então

$\lim_{k \in K} g_i^v(x^k) = 0$, portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\{ \lambda_i^{k,v}, -g_i^v(x^k) \right\} = 0$, então ocorre (5.2.7) e x^* é um ponto AKKT-GNEP. $\square$

Corolário 5.2.1. *Sob as hipóteses do Teorema anterior, se x^* satisfaz CCP-GNEP, então x^* é um ponto KKT-GNEP do GNEP (5.2.1).*

Demonstração. É uma consequência do teorema anterior e do Teorema 4.3.7. $\square$

O corolário anterior generaliza o resultado dado em [KS16] que usa a EMFCQ-GNEP e CPLD-GNEP.

Analogamente ao caso de otimização, damos alguns resultados referentes à viabilidade do ponto limite. Para o caso dos GNEPs, o estudo da viabilidade depende de outro GNEP, chamado o jogo das inviabilidades.

Definição 5.2.2. *(Jogo das inviabilidades) Referente ao GNEP 5.2.1, definimos o seguinte GNEP, onde o problema para o v -ésimo jogador é:*

$$\begin{aligned} I^v(x^{-v}) : \min_{x^v} \|g_+^v(x)\|^2, \\ h^v(x) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

O sistema KKT-GNEP deste GNEP será útil para verificar casos onde o ponto limite da sequência gerada é viável. O sistema KKT do jogo das inviabilidades para o v -ésimo jogador é:

$$2\nabla_{x^v} g^v(x) g_+^v(x) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^v \nabla_{x^v} h^v(x) = 0, \quad \mu_j^v \geq 0, \quad h_j^v(x) \leq 0, \quad \mu_j^v h_j^v(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l_v.$$

Vamos provar que sob a hipótese 5.2.1, o ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo 5.2.1 é um ponto AKKT-GNEP do jogo das inviabilidades.

Teorema 5.2.3. *Seja x^* um ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo 5.2.1 sob a hipótese 5.2.1, então x^* é um ponto AKKT-GNEP do jogo das inviabilidades.*

Demonstração. Seja $K \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \in K} x^k = x^*$. Pela hipótese 5.2.1, temos que, para todo $v = 1, \dots, N$, $h^v(x^*) \leq 0$, então x^* é viável para o GNEP (5.2.9).

Consideremos primeiro o caso em que $\{\rho^{k,v}\}$ é limitada. Neste caso temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \min\{-g^v(x^k), \lambda^{k,v}\} \rightarrow 0$, portanto, temos que $g^v(x^*) \leq 0$, então o sistema KKT para o jogo de inviabilidades é satisfeito tomando $\mu_j^v = 0$, para todo $j = 1, \dots, l_v$, e x^* é um ponto AKKT-GNEP para (5.2.9).

Consideremos agora o caso quando $\{\rho^{k,v}\}$ tende ao infinito. Definimos

$$\delta^{k,v} = \nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^{k,v} \nabla_{x^v} h_j^v(x^k),$$

pela hipótese 5.2.1, $\{\delta^{k,v}\}$ é limitada, então dividindo por $\rho^{k,v}$ temos que:

$$\frac{\delta^{k,v}}{\rho^{k,v}} = \frac{\nabla_{x^v} f^v(x^k)}{\rho^{k,v}} + \sum_{i=1}^{m_v} \max\{0, \frac{u_i^{k,v}}{\rho^{k,v}} + g_i^v(x^k)\} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) + \sum_{j=1}^{l_v} \frac{\mu_j^{k,v}}{\rho^{k,v}} \nabla_{x^v} h_j^v(x^k) \rightarrow 0.$$

Seja i tal que $g_i(x^*) < 0$, como $\{u_i^{k,v}\}$ é limitada, então $\max\{0, \frac{u_i^{k,v}}{\rho^{k,v}} + g_i^v(x^k)\} = 0$, para todo

$k \in K$, suficientemente grande, então:

$$\sum_{g_i^v(x^*) \geq 0} \max\{0, \frac{u_i^{k,v}}{\rho^{k,v}} + g_i^v(x^k)\} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) + \sum_{j=1}^{l_v} \frac{\mu_j^{k+1,v}}{\rho^{k,v}} \nabla_{x^v} h_j^v(x^k) \rightarrow 0.$$

Se $i \in \alpha^v(x^*)$, então pela limitação de $\{u^{k,v}\}$ e $\{\nabla_{x^v} g^v(x^k)\}$ e como para i tal que $g_i^v(x^*) > 0$ temos que $\max\{0, \frac{u_i^{k,v}}{\rho^{k,v}} + g_i^v(x^k)\} = \frac{u_i^{k,v}}{\rho^{k,v}} + g_i^v(x^k)$, para $k \in K$ suficientemente grande, obtemos:

$$\sum_{g_i^v(x^*) > 0} \left(\frac{u_i^{k,v}}{\rho^{k,v}} + g_i^v(x^k) \right) \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) + \sum_{j=1}^{l_v} \frac{\mu_j^{k+1,v}}{\rho^{k,v}} \nabla_{x^v} h_j^v(x^k) \rightarrow 0$$

e como $\frac{u_i^{k,v}}{\rho^{k,v}} \rightarrow 0$, então temos:

$$\sum_{g_i^v(x^*) > 0} \left(g_i^v(x^k) \right) \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) + \sum_{j=1}^{l_v} \frac{\mu_j^{k+1,v}}{\rho^{k,v}} \nabla_{x^v} h_j^v(x^k) \rightarrow 0.$$

Facilmente podemos ver que isto é equivalente a:

$$\sum_{g_i^v(x^*) \geq 0} \left(g_i^v(x^k)_+ \right) \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) + \sum_{j=1}^{l_v} \frac{\mu_j^{k+1,v}}{\rho^{k,v}} \nabla_{x^v} h_j^v(x^k) \rightarrow 0. \quad (5.2.10)$$

Por outro lado, usando a hipótese 5.2.1 pode-se verificar que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \min\left\{-h^v(x^k), \frac{\mu^{k,v}}{\rho^k}\right\} \right\| \rightarrow 0 \quad (5.2.11)$$

e para $k \in K$ suficientemente grande, temos que:

$$\nabla_{x^v} \|g^v(x^k)_+\|^2 = 2 \sum_{g_i^v(x^*) \geq 0} g_i^v(x^k)_+ \nabla_{x^v} g_i^v(x^k).$$

Assim, de (5.2.10) e (5.2.11) temos que x^* é um ponto AKKT-GNEP para o jogo das inviabilidades. $\square$

Corolário 5.2.2. *Sob as condições do teorema anterior, se x^* é um ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo e satisfaz CCP-GNEP para (5.2.2) (i.e., com respeito as h^v restrições), então é um ponto KKT-GNEP do jogo das inviabilidades.*

Demonstração. É uma consequência do teorema anterior e do Teorema 4.3.7. $\square$

À diferença de como acontece em otimização e NEPs (Teorema 5.1.1), no caso do algoritmo Lagrangiano aumentado para convergência a solução global é suficiente que o conjunto viável não seja vazio para garantir que o ponto limite de uma sequência gerada pelo algoritmo seja viável. Para o caso do método de Lagrangiano aumentado para o cálculo de pontos KKT, o Corolário 5.2.2 só fala que o ponto limite é um ponto KKT-GNEP do jogo das inviabilidades, desde que CCP-GNEP (ou outra mais forte) ocorra referente as h^v restrições, mas ainda nesse caso o ponto limite pode ser inviável para o GNEP original e, portanto, na prática seria pouco útil que o método encontre tais pontos.

É claro que atingir viabilidade do ponto limite é fundamental em todo algoritmo. Logo, perguntamos sob que condições ou em que casos um ponto KKT-GNEP do jogo de inviabilidades é um

ponto viável para o GNEP original, isto é, sob que condições para g^v e/ou h^v nós temos que:

KKT-GNEP do jogo das inviabilidades $\Rightarrow$ viabilidade para o GNEP.

Dois resultados que garantem viabilidade para o ponto limite foram apresentados em [KS16], aqui apresentamos esses resultados adaptados ligeiramente para nosso algoritmo.

Teorema 5.2.4. *Seja $\bar{x}$ um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo e suponha que $\bar{x}$ satisfaz EMFCQ-GNEP referente ao GNEP (5.2.1), então $g^v(\bar{x}) \leq 0$, para todo $v = 1, \dots, N$, i.e., $\bar{x}$ é viável para o GNEP.*

Demonstração. Como $\bar{x}$ satisfaz EMFCQ-GNEP referente as restrições (g, h) , então $\bar{x}$ satisfaz MFCQ-GNEP referente as restrições h , então pelo Corolário 5.2.2, $\bar{x}$ é um ponto KKT-GNEP de (5.2.2) e o resultado segue do Teorema 4.3 em [KS16]. $\square$

Outro caso importante onde o GNEP das inviabilidades pode garantir que todo ponto AKKT-GNEP é viável para o GNEP original é dada quando o GNEP é da forma:

$$\min_{x^v} f^v(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) \leq 0, h^v(x^v) \leq 0, \quad (5.2.12)$$

onde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h^v : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{l_v}$ são convexas, note-se que este GNEP cobre o conjunto dos GNEPs conjuntamente convexas.

Teorema 5.2.5. *Consideremos o GNEP (5.2.12) com g e h^v convexas e assumamos que o conjunto viável do GNEP não é vazio. Se $\bar{x}$ é um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo 5.2.1 e $\bar{x}$ satisfaz CCP-GNEP referente as restrições h , então $\bar{x}$ é viável para o GNEP.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.2, $\bar{x}$ é um ponto KKT-GNEP de 5.2.2 e o resultado segue do Teorema 4.4 em [KS16]. $\square$

Apresentamos agora alguns exemplos importantes dos resultados anteriores e outros novos casos que ampliam o conjunto de GNEPs que tem a propriedade que pontos KKT-GNEPs do jogo das inviabilidades levam a pontos viáveis para o GNEP original.

Consideremos agora o caso de um GNEP da seguinte forma:

$$\min_{x^v} f^v(x) \quad \text{s.t.} \quad q^v(x^v - c^v(x^{-v})) \leq 0, \quad s^v(x^v - c^v(x^{-v})) \leq 0, \quad (5.2.13)$$

onde, para cada $v = 1, \dots, N$, $q^v : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{m_v}$ e $s^v : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{l_v}$ são convexas e diferenciáveis e $c^v : \mathbb{R}^{n-v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_v}$ é diferenciável. E sejam $Q^v = \{x^v \in \mathbb{R}^{n_v} : q^v(x^v) \leq 0\}$ e $S^v = \{x^v \in \mathbb{R}^{n_v} : s^v(x^v) \leq 0\}$.

O seguinte teorema prova que para este tipo de GNEPs é possível atingir viabilidade do ponto limite.

Teorema 5.2.6. *Consideremos o GNEP (5.2.13) e suponha que, para cada $v = 1, \dots, N$, $Q^v \cap S^v \neq \emptyset$ (viabilidade). Se $\bar{x}$ é um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo 5.2.1 que satisfaz CCP-GNEP referente as restrições h com $h^v(x) = s^v(x^v - c^v(x^{-v}))$, então $\bar{x}$ é viável para o GNEP.*

Demonstração. Pelas hipóteses temos que $\bar{x}$ é um ponto KKT do jogo das inviabilidades, então para cada $v = 1, \dots, N$ existem multiplicadores $w^v \in \mathbb{R}^{l_v}$ tal que

$$\nabla q^v(\bar{x}^v - c^v(\bar{x}^{-v}))q_+^v(\bar{x}^v - c^v(\bar{x}^{-v})) + \nabla s^v(\bar{x}^v - c^v(\bar{x}^{-v}))w^v = 0 \quad \text{e} \quad \min\{-h^v(\bar{x}), w^v\} = 0,$$

então $\bar{x}^v - c^v(\bar{x}^{-v})$ é um ponto KKT do problema de otimização

$$\|q_+^v(x^v)\|^2 \quad \text{s.t.} \quad s^v(x^v) \leq 0.$$

Como temos um problema de otimização convexo, então o ponto KKT: $\bar{x}^v - c^v(\bar{x}^{-v})$ é uma solução global e como o GNEP é viável, então se segue que $\bar{x}$ é viável para o GNEP. $\square$

Esse tipo de GENPs pode ser chamado GNEP com restrições em movimento em analogia com as QVIs com restrições em movimento, já que o conjunto viável para o v -ésimo jogador $X^v(x^{-v})$ é dado por $X^v(x^{-v}) = c^v(x^{-v}) + (Q^v \cap S^v)$.

Corolário 5.2.3. *Consideremos o GNEP 5.2.13. Se $\bar{x}$ é um ponto limite gerado pelo algoritmo 5.2.1 e satisfaz CCP-GNEP, então $\bar{x}$ é um ponto KKT-GNEP.*

Demonstração. Pela hipótese, $\bar{x}$ é um ponto KKT-GNEP do jogo das inviabilidades, então pelo teorema anterior $\bar{x}$ é viável. Usando o Teorema 4.3.7 obtemos o resultado. $\square$

Note-se que a importância do teorema anterior é que não pedimos que o ponto limite seja viável. Consideremos o caso de um NEP que cobre os NEPs com restrições convexas da seguinte forma:

$$\min_{x^v} f^v(x) \quad \text{s.t.} \quad g^v(x^v) \leq 0, h^v(x^v) \leq 0, \quad (5.2.14)$$

onde $g^v : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{m_v}$ e $h^v : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{l_v}$ são convexas para cada $v = 1, \dots, N$.

Temos o seguinte resultado:

Corolário 5.2.4. *Consideremos o NEP (5.2.14) com g^v e h^v convexas e assumamos que o conjunto viável do NEP não é vazio. Se $\bar{x}$ é um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo 5.2.1 e $\bar{x}$ satisfaz CCP referente as restrições h , então $\bar{x}$ é viável para o NEP.*

Demonstração. O NEP (5.2.14) é um caso particular de (5.2.13) com $c^{-v} = 0$. $\square$

Consideremos agora o caso de um GNEP com restrições lineares com lado direito variável da seguinte forma:

$$\min_{x^v} f^v(x) \quad \text{s.t.} \quad A^v x^v - b^v - c^v(x^{-v}) \leq 0, \quad (5.2.15)$$

onde para cada $v = 1, \dots, N$, $A^v \in \mathbb{R}^{m_v \times n_v}$, $b^v \in \mathbb{R}^{m_v \times 1}$ e $c^v : \mathbb{R}^{n-v} \rightarrow \mathbb{R}^{m_v}$ são diferenciáveis. Por simplicidade omitimos h^v .

O seguinte é um Corolário do Teorema 5.2.4.

Corolário 5.2.5. *Consideremos o GNEP (5.2.15) com c^v diferenciável, para cada $v = 1, \dots, N$, e assumamos que, para cada $v = 1, \dots, N$, temos $\text{posto}(A^v) = m_v$. Se $\bar{x}$ é um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo 5.2.1, então $\bar{x}$ é viável para o GNEP.*

Demonstração. Como não estamos considerando restrições de nível inferior, temos que $\bar{x}$ é um ponto KKT de (5.2.9), isto é, $\bar{x}$ satisfaz:

$$\nabla_{x^v} \|g_+^v(\bar{x})\|^2 = 2(A^v)^T g_+^v(\bar{x}) = 0.$$

Para cada $v = 1, \dots, N$, as filas de A^v são linearmente independentes, em particular EMFCQ-GNEP ocorre em $\bar{x}$. Pelo Teorema 5.2.4, $\bar{x}$ é viável para o GNEP 5.2.15. $\square$

Consideremos agora um GNEP com restrições de caixas que generaliza em certo sentido o caso de otimização.

$$\min_{x^v} f^v(x) \quad \text{s.t.} \quad l^v(x^{-v}) \leq x^v \leq u^v(x^{-v}), \quad (5.2.16)$$

onde, para cada $v = 1, \dots, N$, as funções $l^v, u^v : \mathbb{R}^{n-v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_v}$ são contínuas, neste caso temos que $g^v(x) = \begin{pmatrix} -x^v + l^v(x^{-v}) \\ x^v - u^v(x^{-v}) \end{pmatrix}$.

Por simplicidade omitimos h^v . Este GNEP é um caso particular do GNEP (5.2.15), com efeito basta considerar $b^v = 0$, a matriz A^v e a função c^v dadas como:

$$A^v = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}_{2n_v \times n_v}, \quad I \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v} \quad \text{e} \quad c^v(x^{-v}) = \begin{pmatrix} l^v(x^{-v}) \\ -u^v(x^{-v}) \end{pmatrix}.$$

Note-se que para este caso $\text{posto}(A^v) = n_v \neq 2n_v$, então as condições do corolário anterior não são satisfeitas. O seguinte resultado mostra que ainda podemos obter um resultado de viabilidade para este tipo de GNEPs.

Teorema 5.2.7. *Consideremos o GNEP (5.2.16) com $l^v(\bar{x}^{-v}) \leq u^v(\bar{x}^{-v})$, para cada $v = 1, \dots, N$. Se $\bar{x}$ é um ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo 5.2.1, então $\bar{x}$ é viável para o GNEP.*

Demonstração. Temos que $\bar{x}$ é um ponto KKT-GNEP do jogo das inviabilidades, então, para cada $v = 1, \dots, N$ temos:

$$\nabla_{x^v} \|g_+^v(\bar{x})\|^2 = 2 \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (-\bar{x}^v + l^v(\bar{x}^{-v}))_+ \\ (\bar{x}^v - u^v(\bar{x}^{-v}))_+ \end{pmatrix} = 2(-\bar{x}^v + l^v(\bar{x}^{-v}))_+ - 2(\bar{x}^v - u^v(\bar{x}^{-v}))_+ = 0.$$

Usando esta última igualdade e da hipótese, temos que $l^v(\bar{x}^{-v}) \leq u^v(\bar{x}^{-v})$, para cada $v = 1, \dots, N$, o que implica que $l^v(\bar{x}^{-v}) \leq \bar{x}^v \leq u^v(\bar{x}^{-v})$ e, então $\bar{x}$ é viável para o GNEP (5.2.16). $\square$

Finalmente podemos obter um resultado de otimalidade usando QN-GNEP. Para o caso da prova de otimalidade usando CCP-GNEP, a prova estava baseada principalmente na conexão com AKKT-GNEP, para o caso de QN-GNEP a prova é diferente já que não existe relação com CCP-GNEP nem com AKKT-GNEP.

Sob QN-GNEP, provamos que a sequência de multiplicadores $\{\lambda^{k,v}\}$ associada com as restrições penalizadas são limitadas. Para provar convergência global sob a QN-GNEP assumiremos que a sequência de multiplicadores do Passo 2 $\{\mu^{k,v}\}$ é limitada e que ocorre, por exemplo, se não consideramos restrições de nível inferior. Em geral, pode-se escolher de forma adequada (geralmente com uma estrutura simples) as restrições de nível inferior h^v , para que esta hipótese ocorra. Este tipo de hipótese também foi apresentada em alguns artigos de otimização, como por exemplo em [AMS10].

Teorema 5.2.8. *Suponha que $\{x^k\}$ é uma sequência gerada pelo algoritmo 5.2.1 e $K \subset \mathbb{N}$ é tal que $\lim_{k \in K} x^k = \bar{x}$ com $\bar{x}$ viável. Suponha, ademais, que existe $\bar{\mu} \geq 0$ tal que $\|\mu^k\| \leq \bar{\mu}$, para todo $k \in K$, e que $\lim_{k \in K} \varepsilon_k = 0$. Então, se $\bar{x}$ satisfaz QN-GNEP com respeito ao GNEP (5.2.1), então $\bar{x}$ é um ponto KKT-GNEP, a sequência dual $\{\lambda^k\}$ é limitada em K e seus pontos limites são multiplicadores associados com $\bar{x}$.*

Demonstração. Do Passo 2 do algoritmo temos, para cada $v = 1, \dots, N$:

$$\left\| \nabla_{x^v} f^v(x^k) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^{k,v} \nabla_{x^v} g_i^v(x^k) + \sum_{i=1}^{l_v} \mu_i^{k,v} \nabla_{x^v} h_i^v(x^k) \right\| \leq \varepsilon_k, \quad (5.2.17)$$

onde $\lambda_i^{k,v} = \max \left\{ 0, u_i^{k-1,v} + \rho^{k-1,v} g_i^v(x^k) \right\}$. Seja

$$\delta^{k,v} := \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m_v} (\lambda_i^{k,v})^2 + \sum_{i=1}^{l_v} (\mu_i^{k,v})^2},$$

vamos provar que a sequência $\{\lambda^{k,v}\}$ é limitada. Suponha por contradição que esta sequência é ilimitada, então existe $K_1 \subset K$ tal que $\delta^{k,v} \rightarrow +\infty$ para $k \in K_1$. Como $\left\| \left(\frac{1}{\delta^{k,v}}, \frac{\lambda^{k,v}}{\delta^{k,v}}, \frac{\mu^{k,v}}{\delta^{k,v}} \right) \right\| = 1$

para cada k , existe $K_2 \subset K_1$ tal que

$$\lim_{k \in K_2} \left(\frac{1}{\delta^{k,v}}, \frac{\lambda^{k,v}}{\delta^{k,v}}, \frac{\mu^{k,v}}{\delta^{k,v}} \right) = (\bar{\nu}^v, \bar{\lambda}^v, \bar{\mu}^v) \neq 0$$

com $\bar{\nu}^v = 0$ e $\bar{\mu}_j^v = 0$, para cada $j = 1, \dots, l_v$, no entanto $\bar{\lambda}_i^v \geq 0$, para todo $i = 1, \dots, m_v$, com $\bar{\lambda}^v \neq 0$.

Dividindo (5.2.17) por $\delta^{k,v}$ e tomando limite sobre K_2 temos que:

$$\sum_{i=1}^{m_v} \bar{\lambda}_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x}) = 0. \quad (5.2.18)$$

Como o ponto limite $\bar{x}$ satisfaz AKKT-GNEP com os multiplicadores $\lambda_i^{k,v}$ e $\lambda_i^{k,v} \rightarrow 0$ se $g_i^v(\bar{x}) < 0$, então (5.2.18) fornece uma combinação linear não negativa e não trivial das restrições ativas de $g^v(x) \leq 0$ em $\bar{x}$.

Se $\bar{\lambda}_i^v > 0$, então existe $a > 0$ e k_0 tal que:

$$\frac{\max\{0, u_i^{k-1,v} + \rho^{k-1,v} g_i^v(x^k)\}}{\delta^{k,v}} \geq a, \quad \forall k \geq k_0, \quad k \in K_2.$$

Como $\{u^{k-1,v}\}$ é limitado e $\bar{x}$ é viável, temos que $\rho^{k-1,v} g_i^v(x^k)$ converge ao infinito e, portanto, $g_i^v(x^k) > 0$ para $k \in K_2$ suficientemente grande. Mas isso é uma contradição com QN-GNEP, portanto, $\{\lambda^{k,v}\}_{k \in K}$ é limitada, assim tomando limite em (5.2.17) e da viabilidade de $\bar{x}$, obtemos que $\bar{x}$ é um ponto KKT-GNEP. $\square$

Observação 5.2.1. *Note-se da prova do teorema anterior que só é necessário que o ponto viável $\bar{x}$ satisfaça QN-GNEP com respeito as restrições definidas por g^v .*

Calculando equilíbrios b -variacionais

Vamos agora considerar o algoritmo 5.2.1 para o cálculo de equilíbrios b -variacionais com $b \in \mathbb{R}_{++}^N$ de GNEPs conjuntamente convexos.

Consideremos o seguinte GNEP conjuntamente convexo:

$$\begin{aligned} P^v(x^{-v}) : \quad & \min_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) \\ \text{s.t} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

onde $f^v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa para cada x^{-v} fixado, $g : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^l$ são funções convexas.

O Teorema 4.3.2 diz que para qualquer $b \in \mathbb{R}_{++}^N$, temos que $SOL(X, F_b) \subseteq SOL(GNEP_b) = SOL(GNEP)$. Da primeira inclusão temos que toda solução de $SOL(X, F_b)$ é um equilíbrio variacional de $SOL(GNEP_b)$ e a condição para que uma solução do GNEP seja um equilíbrio variacional é que os multiplicadores associados a cada jogador sejam iguais. Esta importante observação permite adaptar o algoritmo 5.2.1 para o cálculo de b -equilíbrios. Neste caso, vamos calcular equilíbrios variacionais do $GNEP_b$, onde o problema para cada jogador é:

$$\begin{aligned} P^v(x^{-v}) : \quad & \min_{x^v} b^v f^v(x^v, x^{-v}) \\ \text{s.t} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

isto é, um ponto $(x^*, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ tal que, para cada $v = 1, \dots, N$ satisfaz:

$$\begin{aligned}
KKT_v : b^v \nabla_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i \nabla_{x^v} g_i^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j \nabla_{x^v} h_j^v(x^v, x^{-v}) &= 0, \\
\lambda_i &\geq 0, \quad g_i^v(x^v, x^{-v}) \leq 0, \quad \lambda_i g_i^v(x^v, x^{-v}) = 0, \forall i = 1, \dots, m \\
\mu_j &\geq 0, \quad h_j^v(x^v, x^{-v}) \leq 0, \quad \mu_j h_j^v(x^v, x^{-v}) = 0, \forall j = 1, \dots, l.
\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Para isso, nos subproblemas calcularemos equilíbrios normalizados aproximados de GNEPs da forma: $GNEP_b(u, \rho)$ que são definidas como em 5.2.4, que neste caso também são conjuntamente convexas.

Algoritmo 5.2.2. (*Lagrangiano aumentado para o cálculo de b -equilíbrios variacionais*) *P0)* Seja $b \in \mathbb{R}_{++}^N$, $u^{max} \in \mathbb{R}_+^m$, $\tau \in (0, 1)$, $\gamma > 1$ escolhamos $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, $u^0 \in [0, u^{max}]$, $\rho^0 \in \mathbb{R}_{++}$ e $\epsilon > 0$. Fazer $k = 0$.

P1) Se (x^k, λ^k, μ^k) é um equilíbrio variacional ϵ -inexato do $GNEP_b(u^k, \rho^k)$ (i.e., satisfaz aproximadamente o sistema (5.2.21)), parar.

P2) Calcular um equilíbrio variacional aproximado: (x^{k+1}, μ^{k+1}) , do $GNEP_b(u^k, \rho^k)$.

P3) Definir $\lambda^{k+1} = \max\{0, u^k + \rho^k g(x^{k+1})\}$.

P4) Se

$$\left\| \max\{g(x^{k+1}), -\lambda^{k+1}\} \right\| \leq \tau \left\| \max\{g(x^k), -\lambda^k\} \right\|,$$

então $\rho^{k+1} = \rho^k$. Em outro caso, $\rho^{k+1} = \gamma \rho^k$.

P5) Escolher $u^{k+1} \in [0, u^{max}]$. Fazer $k \rightarrow k + 1$. Ir ao Passo 1.

Como antes, o Passo 2 é o passo fundamental do algoritmo. No Passo 2 assumiremos que é possível achar um equilíbrio variacional inexato do $GNEP_b(u^k, \rho^k)$.

Hipótese 5.2.2. No Passo 2 do algoritmo, é possível achar um equilíbrio variacional $\epsilon_k, \bar{\epsilon}_k$ - aproximado: $(x^{k+1}, \mu^{k+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ do $GNEP_b(u^k, \rho^k)$, i.e., um ponto que satisfaz:

$$\left\| b^v \nabla_{x^v} f(x^{k+1}) + \sum_{i=1}^m \max\{0, u^k + \rho^k g(x^{k+1})\} \nabla_{x^v} g_i(x^{k+1}) + \sum_{j=1}^l \mu_j^{k+1} \nabla_{x^v} h_j(x^{k+1}) \right\| \leq \epsilon_k, \tag{5.2.22}$$

$$\left\| \max\{h_j(x^{k+1}), -\mu_j^{k+1}\} \right\| \leq \bar{\epsilon}_k, \quad j = 1, \dots, l,$$

onde a sequência $\{\epsilon_k\}$ é limitada e a sequência $\{\bar{\epsilon}_k\}$ tende a zero.

Todos os resultados na seção anterior podem ser adaptados para o algoritmo 5.2.2. Mas a estrutura mais simples e as hipóteses de convexidade permitem mostrar resultados mais fortes em viabilidade e otimalidade usando as clássicas CQ de otimização.

Teorema 5.2.9. *Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo 5.2.2, sob a hipótese 5.2.22, se $\bar{x}$ é um ponto limite de $\{x^k\}$ que satisfaz CCP com respeito as h restrições, então $\bar{x}$ é uma solução global de:*

$$\min \|g_+(x)\|^2 \quad \text{s.t.} \quad h(x) \leq 0. \tag{5.2.23}$$

Em particular, se o GNEP é viável, então $\bar{x}$ é viável.

Demonstração. Como g e h são convexas, será suficiente mostrar que $\bar{x}$ é um ponto KKT do problema de programação convexa (5.2.23). Usando os mesmos argumentos que no Teorema 5.2.3, podemos achar uma sequência de multiplicadores $\{\mu^k\}$ não negativos tal que, para cada $v = 1, \dots, N$, temos:

$$\nabla_{x^v} \|g_+(x^k)\|^2 + \nabla_{x^v} h(x^k) \mu^k \rightarrow 0 \quad \min\{-h(x^k), \mu^k\} \rightarrow 0, \tag{5.2.24}$$

isto implica que:

$$\nabla \|g_+(x^k)\|^2 + \nabla h(x^k)\mu^k \rightarrow 0 \quad \min\{-h(x^k), \mu^k\} \rightarrow 0. \quad (5.2.25)$$

Portanto, ocorre AKKT em $\bar{x}$ com respeito ao problema (5.2.23). Pela hipóteses e pelo Teorema 4.3.7, obtemos o resultado. $\square$

Note-se que no caso de não considerar as h restrições todo ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo 5.2.2 é viável desde que o GNEP seja viável.

O seguinte resultado é referente a otimalidade do ponto limite.

Teorema 5.2.10. *Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo 5.2.2 sob a hipótese 5.2.22, suponha que o GNEP é viável e seja $\bar{x}$ um ponto limite de $\{x^k\}$ que satisfaz CCP em W , então $\bar{x}$ é viável e é um b -equilíbrio variacional.*

Demonstração. Da hipótese, é claro que $\bar{x}$ satisfaz CCP referente as h restrições, portanto, pelo teorema anterior $\bar{x}$ é viável, pelo Teorema 5.2.2 a condição AKKT-GNEP é:

$$b^v \nabla_{x^v} f^v(x^k) + \nabla_{x^v} g(x^k)\lambda^k + \nabla_{x^v} h(x^k)\mu^k \rightarrow 0 \quad (5.2.26)$$

$$\min\{-g(x^k), \lambda^k\} \rightarrow 0, \quad \min\{-h(x^k), \mu^k\} \rightarrow 0, \quad (5.2.27)$$

que é equivalente a:

$$\begin{aligned} \nabla F_b(x^k) + \nabla g(x^k)\lambda^k + \nabla h(x^k)\mu^k &\rightarrow 0, \\ \min\{-g(x^k), \lambda^k\} &\rightarrow 0, \quad \min\{-h(x^k), \mu^k\} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

Esse último são as condições AKKT para o $VI(F_b, W)$ em $\bar{x}$ e como CCP ocorre em $\bar{x}$, então $\bar{x}$ é um ponto KKT de $VI(F_b, W)$, portanto, um b -equilíbrio variacional. $\square$

5.3 Lagrangiano aumentado usando penalidade exponencial.

Consideremos o GNEP onde o problema para cada jogador é dado por (5.2.1), analogamente ao método de Lagrangiano aumentado usando a função máximo ao quadrado, penalizamos as restrições “difíceis” g^v usando uma função de penalidade exponencial e mantemos as restrições de nível inferior h^v , assim obtemos em cada iteração um GNEP onde o problema para cada jogador é:

$$\begin{aligned} Q^v(x^{-v}, u^v, p^v) : \quad &\min L_\rho^v(x, u^v), \\ &h_j^v(x^v, x^{-v}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l_v, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

onde $L_\rho^v(x, u^v) = f^v(x^v, x^{-v}) + \frac{1}{\rho^v} \sum_{i=1}^{m_v} u_i^v (e^{\rho^v g_i^v(x^v, x^{-v})} - 1)$.

Denotamos a este GNEP por: $GNEP(u, \rho)$, onde $u = (u^v)_{v=1}^N \in \mathbb{R}_+^m$ e $\rho = (\rho^v)_{v=1}^N \in \mathbb{R}_{++}^N$.

Adaptamos o Algoritmo 2.1 de [ESS16] para o caso dos GNEPs com restrições de nível inferior.

Algoritmo 5.3.1. (LAME-GNEP) *P0) Escolhemos $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, $u^{max} \in \mathbb{R}_+^m$, $\gamma > 1$, $u^0 \in [0, u^{max}]$, $\rho^0 \in \mathbb{R}_{++}^N$, $\tau \in (0, 1)$ e $\epsilon > 0$. Definir $\sigma^{0,v} = \frac{\lambda^{0,v} - u^{0,v}}{\rho^{0,v}} \in \mathbb{R}^{m_v}$ para $v = 1, \dots, N$.*

Fazer $k = 0$.

P1) Se (x^k, λ^k, μ^k) é um ponto KKT-GNEP ϵ -aproximado do GNEP, parar.

P2) Calcular um ponto (x^{k+1}, μ^{k+1}) KKT-GNEP $\epsilon_k, \bar{\epsilon}_k$ -aproximado do GNEP(u^k, ρ^k).

P3) Para cada $v = 1, \dots, N$, definir:

$$\lambda_i^{k+1,v} = u_i^{k,v} \exp(\rho^{k,v} g_i^v(x^{k+1})), \quad i = 1, \dots, m_v \quad (5.3.2)$$

e

$$\sigma^{k+1,v} = \frac{\lambda^{k+1,v} - u^{k,v}}{\rho^{k,v}} \in \mathbb{R}^{m_v}. \quad (5.3.3)$$

P4) Para $v = 1, \dots, N$, se

$$\|\sigma^{k+1,v}\| \leq \tau \|\sigma^{k,v}\|,$$

fazer $\rho^{k+1,v} = \rho^{k,v}$. Em outro caso, $\rho^{k+1,v} = \gamma \rho^{k,v}$.

P5) Escolher $u^{k+1} = \min \{u^{max}, \lambda^{k+1}\}$. Fazer $k \leftarrow k + 1$. Ir ao Passo 1.

No Passo 2 do algoritmo anterior, assumiremos a seguinte condição, análoga como no algoritmo 5.2.1.

Hipótese 5.3.1. No Passo 2 do algoritmo 5.3.1, podemos obter $(x^{k+1}, \mu^{k+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^l$, que satisfaz para cada $v = 1, \dots, N$,

$$\left\| \nabla_{x^v} L_{\rho^v}(x, u^v) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^v \nabla_{x^v} h_j^v(x^v, x^{-v}) \right\| \leq \epsilon_k, \quad (5.3.4)$$

$$\|\max\{h_j^v(x), -\mu_j^v\}\| \leq \bar{\epsilon}_k, \quad j = 1, \dots, l_v,$$

onde a sequência $\{\epsilon_k\}$ é limitada e a sequência $\{\bar{\epsilon}_k\}$ tende a zero.

O seguinte resultado é análogo ao Teorema 5.2.1.

Proposição 5.3.1. Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo 5.3.1. Assumamos que $\bar{x}$ é um ponto limite viável de $\{x^k\}$ e $K \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \in K} x^k = \bar{x}$, então, para cada $v = 1, \dots, N$, e $i \notin \alpha^v(x^*)$ temos que $\lim_{k \in K} \lambda_i^{k+1,v} = 0$.

Demonstração. Seja $v \in \{1, \dots, N\}$ fixo e arbitrário. E seja $i \notin \alpha^v(\bar{x})$, consideraremos dois casos:

Se $\{\rho^{k,v}\}$ é limitada, então pelo Passo 3 do algoritmo temos que $\lim_{k \in K} \sigma_i^{k+1,v} = 0$, como para $i \notin \alpha^v(\bar{x})$ temos que $g_i^v(\bar{x}) < 0$, então

$$\lim_{k \in K} \frac{e^{\rho^{k,v} g_i^v(x^{k+1})} - 1}{\rho^{k,v}} \neq 0$$

e como

$$\sigma_i^{k+1,v} = u_i^{k,v} \frac{e^{\rho^{k,v} g_i^v(x^{k+1})} - 1}{\rho^{k,v}} \rightarrow 0,$$

então temos $u_i^{k,v} \rightarrow 0$ e do Passo 5 temos $\lambda_i^{k+1,v} \rightarrow 0$, $\forall i \notin \alpha^v(\bar{x})$.

Agora, se $\{\rho^{k,v}\}$ é ilimitada para $i \notin \alpha^v(\bar{x})$ tem-se $g_i^v(\bar{x}) < 0$, então $\lim_{k \in K} \exp(\rho^{k,v} g_i^v(x^{k+1})) = 0$ e como $\{u_i^{k,v}\}$ é limitada, então $\lambda_i^{k+1,v} = u_i^{k,v} \exp(\rho^{k,v} g_i^v(x^{k+1})) \rightarrow 0$. $\square$

Usando a penalidade exponencial, o algoritmo 5.3.1 gera também pontos AKKT-GNEPs. Assim, obtemos o seguinte resultado análogo ao Teorema 5.2.2.

Teorema 5.3.1. Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo 5.3.1 sob a hipótese 5.3.1 com $\epsilon_k \rightarrow 0$, seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação viável de $\{x^k\}$, então $\bar{x}$ é um ponto AKKT-GNEP do GNEP (5.2.1).

Demonstração. Usando a Proposição 5.3.1, a prova é análoga ao Teorema 5.2.2. $\square$

Corolário 5.3.1. Sob as hipóteses do Teorema 5.3.1, se $\bar{x}$ satisfaz CCP-GNEP, então $\bar{x}$ é um ponto KKT-GNEP do GNEP.

Demonstração. É uma consequência do teorema anterior e do Teorema 4.3.7. $\square$

Sob CCP-GNEP pode acontecer que a sequência de multiplicadores $\{(\lambda^{k,v}, \mu^{k,v})\}$ não seja limitada, mas sobre uma condição mais forte como MFCQ-GNEP isto ocorre.

Teorema 5.3.2. *Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo 5.3.1 com $\epsilon_k \rightarrow 0$, seja $\bar{x}$ um ponto de acumulação viável de $\{x_k\}$ tal que a condição MFCQ-GNEP ocorre em $\bar{x}$, então a sequência $\{(\lambda^{k,v}, \mu^{k,v})\}$ é limitada e todo ponto limite $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^l$ é tal que $(\bar{x}, \lambda^*, \mu^*)$ é um ponto KKT do GNEP.*

Demonstração. Seja $v \in \{1, \dots, N\}$ fixo e arbitrário. Pela Proposição 5.3.1, temos que para i tal que $g_i^v(\bar{x}) < 0$, que $\lim_{k \in K} \lambda_i^{k+1,v} = \lambda_i^{*,v} = 0$. Pela hipótese 5.3.1, temos que se $j \notin \gamma^v(\bar{x})$, então $\lim_{k \in K} \mu_j^{k+1,v} = \mu_j^{*,v} = 0$. Afirmamos que o resto de multiplicadores

$$\left\{ ((\lambda_i^{k+1,v})_{i \in \alpha^v(\bar{x})}, (\mu_j^{k+1,v})_{j \in \gamma^v(\bar{x})}) \right\}_{k \in K}$$

é limitado. Suponha o contrário, isto é:

$$\left\| ((\lambda_i^{k+1,v})_{i \in \alpha^v(\bar{x})}, (\mu_j^{k+1,v})_{j \in \gamma^v(\bar{x})}) \right\| \rightarrow_K \infty,$$

então sem perda de generalidade podemos assumir que a sequência normalizada converge.

$$\frac{((\lambda_i^{k+1,v})_{i \in \alpha^v(\bar{x})}, (\mu_j^{k+1,v})_{j \in \gamma^v(\bar{x})})}{\left\| ((\lambda_i^{k+1,v})_{i \in \alpha^v(\bar{x})}, (\mu_j^{k+1,v})_{j \in \gamma^v(\bar{x})}) \right\|} \rightarrow_K ((\bar{\lambda}_i^v)_{i \in \alpha^v(\bar{x})}, (\bar{\mu}_j^v)_{j \in \gamma^v(\bar{x})})$$

como $\lambda_i^{k,v} \geq 0$ e $\mu_j^{k,v} \geq 0$, $((\bar{\lambda}_i^v)_{i \in \alpha^v(\bar{x})}, (\bar{\mu}_j^v)_{j \in \gamma^v(\bar{x})})$ tem componentes não negativos, então dividindo em (5.3.4) por: $\left\| ((\lambda_i^{k+1,v})_{i \in \alpha^v(\bar{x})}, (\mu_j^{k+1,v})_{j \in \gamma^v(\bar{x})}) \right\|$ usando a definição de $\lambda_i^{k,v}$ e tomando limite quando $k \rightarrow_K \infty$, obtém-se:

$$\sum_{i \in \alpha^v(\bar{x})} \bar{\lambda}_i^v \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x}) + \sum_{j \in \gamma^v(\bar{x})} \bar{\mu}_j^v \nabla_{x^v} h_j^v(\bar{x}) = 0.$$

Como $\bar{\lambda}_i^v \geq 0$ ($i \in \alpha^v(\bar{x})$) e $\bar{\mu}_j^v \geq 0$, ($j \in \gamma^v(\bar{x})$) usando a hipótese de MFCQ-GNEP em $\bar{x}$, obtém-se $\bar{\lambda}_i^v = 0$, ($i \in \alpha^v(\bar{x})$) e $\bar{\mu}_j^v = 0$ ($j \in \gamma^v(\bar{x})$). E isto é uma contradição com $\left\| ((\bar{\lambda}_i^v)_{i \in \alpha^v(\bar{x})}, (\bar{\mu}_j^v)_{j \in \gamma^v(\bar{x})}) \right\| = 1$, então as sequências $(\lambda_i^{k+1,v})_{i \in \alpha^v(\bar{x})}$ e $(\mu_j^{k+1,v})_{j \in \gamma^v(\bar{x})}$ são limitadas. Sem perda de generalidade pode-se assumir que:

$$\lambda_i^{k+1,v} \rightarrow_K \lambda_i^{*,v} (i \in \alpha^v(\bar{x})), \quad \mu_j^{k+1,v} \rightarrow_K \mu_j^{*,v} (j \in \gamma^v(\bar{x})).$$

Assim, tomando limite em (5.3.4), quando $k \rightarrow_K \infty$ obtém-se:

$$\nabla_{x^v} f^v(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_i^{*,v} \nabla_{x^v} g_i^v(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^{*,v} \nabla_{x^v} h_j^v(\bar{x}) = 0.$$

Da hipótese 5.3.1 e da viabilidade de $\bar{x}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \mu_j^{*,v} &\geq 0, \quad h_j^v(\bar{x}) \leq 0, \quad \mu_j^{*,v} h_j^v(\bar{x}) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, l_v, \\ \lambda_i^{*,v} &\geq 0, \quad g_i^v(\bar{x}) \leq 0, \quad \lambda_i^{*,v} g_i^v(\bar{x}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m_v. \end{aligned}$$

Assim, (x^*, λ^*, μ^*) é um ponto KKT-GNEP. □

Finalmente obtemos um resultado análogo ao Teorema 5.2.8, que resulta ser novo, ainda para o caso de otimização.

Teorema 5.3.3. *Suponha que $\{x^k\}$ é uma sequência gerada pelo algoritmo 5.3.1 e $K \subset \mathbb{N}$ é tal que $\lim_{k \in K} x^k = \bar{x}$ com $\bar{x}$ viável. Suponha ademais que existe $\bar{\mu} \geq 0$ tal que $\|\mu^k\| \leq \bar{\mu}$, para todo $k \in K$ e que $\lim_{k \in K} \varepsilon_k = 0$. Então, se $\bar{x}$ satisfaz QN-GNEP referente ao GNEP (5.2.1), então $\bar{x}$ é um ponto KKT-GNEP, a sequência dual $\{\lambda^k\}$ é limitada em K e seus pontos limites são multiplicadores associados com $\bar{x}$.*

Demonstração. Usando a definição $\lambda_i^{k,v} = u_i^{k,v} \exp(\rho^{k,v} g_i^v(x^{k+1}))$, a prova segue de forma análoga ao Teorema 5.2.8. $\square$

Observação 5.3.1. *Note-se novamente que da prova do teorema anterior só é necessário que o ponto viável $\bar{x}$ satisfaça QN-GNEP referente às restrições definidas por g^v . Por outro lado, embora exista certa vantagem usando uma função exponencial referente à resolução dos subproblemas que resultam ser sistemas diferenciáveis, usar a função quadrática proporciona maior análise teórica, como, por exemplo, enfraquecer o Teorema 5.3.2 usando a EMFCQ-GNEP e obter um resultado de viabilidade tipo o Teorema 5.2.3. E ainda para otimização estes resultados não foram estabelecidos.*

Capítulo 6

Resolvendo os subproblemas e Testes numéricos

6.1 Resolvendo os subproblemas

Em cada iteração, o método de Lagrangiano aumentado resolve um sistema KKT-GNEP aproximado de um GNEP. Na prática, sistemas KKT-GNEP exatos são resolvidos usando tanto a função de penalidade quadrática como a penalidade exponencial; em geral, obtemos sistemas não diferenciáveis. Na literatura, existem alguns artigos que resolvem diretamente o sistema KKT-GNEP, mas exigem que as funções objetivo, assim como as restrições de cada jogador, sejam em geral de classe C^2 ; hipóteses que até GNEPs de uma estrutura bem simples podem não satisfazer.

Na prática, um fato fundamental ao usar o método Lagrangiano aumentado para resolver o sistema KKT-GNEP de um GNEP radica em que os sistemas KKT-GNEP nos subproblemas sejam mais fáceis de serem resolvidos que o sistema KKT-GNEP do GNEP original.

O Teorema 4.3.4 fornece um critério para escolher as restrições h , já que se em cada iteração do algoritmo podemos garantir, por exemplo, que o $GNEP(u, \rho)$ tenha solução, então pelo Teorema 4.3.4, essa solução é um ponto AKKT-GNEP e, portanto, o Passo 2 do algoritmo está bem definido.

Baseado nessas observações, nesta seção apresentamos alguns critérios para resolver os subproblemas. Consideramos principalmente o caso quando uma penalização total é feita, nesse caso, sistemas KKT-GNEP de NEPs irrestritas são resolvidas em cada iteração; na prática, esse tipo de penalização parece ser a mais usada.

Do ponto de vista prático, resolver os subproblemas usando uma penalização total é mais fácil para implementar, entretanto a busca de um ponto KKT-GNEP demora mais tempo. Isto parece acontecer pelo fato que o método demora em satisfazer as condições de complementariedade do GNEP.

No entanto, a implementação com uma penalidade parcial pode resultar em algo trabalhoso, neste caso, o tempo para encontrar um ponto KKT-GNEP é menor, isto parece acontecer porque o método já tem certa complementariedade em cada iteração.

6.1.1 Penalização total

Usando a função de penalidade quadrática

Consideremos o algoritmo 5.2.1 quando todas as restrições são penalizadas. Na prática, em cada iteração o método calcula um ponto KKT-GNEP $x \in \mathbb{R}^n$ do $NEP(u, \rho)$, isto é, um ponto que satisfaz:

$$\Theta(x) = \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} L_{\rho^1}^1(x, u^1), \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} L_{\rho^N}^N(x, u^N), \end{pmatrix}_{n \times 1} = 0. \quad (6.1.1)$$

Essa equação corresponde ao sistema KKT-GNEP do $NEP(u, \rho)$ que tem como funções objetivo:

$$L_{\rho^v}^v(x, u^v) = f^v(x^v, x^{-v}) + \frac{1}{2\rho^v} \sum_{i=1}^{m_v} \max \{0, u_i^v + \rho^v g_i^v(x^v, x^{-v})\}^2. \quad (6.1.2)$$

Que são funções de classe C^1 , mas em geral não de classe C^2 ; então os métodos conhecidos para resolver diretamente o sistema KKT-GNEP 6.1.1 são, em geral, não aplicáveis.

Note-se que cada bloco do sistema 6.1.1 não é diferenciável, então, em geral, $\Theta(x)$ não é diferenciável. Em geral, os métodos que resolvem um sistema de equações não diferenciável precisam do cálculo do jacobiano generalizado em cada ponto de seu domínio. No formato do sistema 6.1.1, calcular o jacobiano generalizado em um ponto arbitrário x tem resultado pouco claro.

Portanto, apresentar o sistema 6.1.1 em um formato diferente, na qual permita calcular o jacobiano generalizado ou usar algum outro tipo de abordagem, assim como estudar as propriedades do sistema, é importante.

Primeiramente temos que:

$$\Theta(x) = F(x) + L(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{x^1} f^1(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} f^N(x) \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m_1} \max \{0, u_i^1 + \rho^1 g_i^1(x)\} \nabla_{x^1} g_i^1(x) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m_N} \max \{0, u_i^N + \rho^N g_i^N(x)\} \nabla_{x^N} g_i^N(x) \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (6.1.3)$$

O objetivo é agora expressar de forma mais compacta o termo $L(x)$.

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m_1} \max \{0, u_i^1 + \rho^1 g_i^1(x)\} \begin{bmatrix} \nabla_{x^1} g_i^1(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1} + \dots + \sum_{i=1}^{m_N} \max \{0, u_i^N + \rho^N g_i^N(x)\} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \nabla_{x^N} g_i^N(x) \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

Agora definimos a função $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por:

$$G(x, y) = (g^1(y^1, x^{-1}), \dots, g^N(y^N, x^{-N})) \in \mathbb{R}^m,$$

então

$$\nabla_y G(x, x) = \begin{bmatrix} \nabla_{x^1} g^1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nabla_{x^2} g^2(x) & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \nabla_{x^N} g^N(x) \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad (6.1.4)$$

fazendo $u = (u^1, \dots, u^N) \in \mathbb{R}^m$ e $\rho = (\rho^1, \dots, \rho^1, \dots, \rho^N, \dots, \rho^N) \in \mathbb{R}^m$ tem-se:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \max \{0, u_i + \rho_i G_i(x, x)\} \nabla_y G_i(x, x), \quad (6.1.5)$$

onde $\nabla_y G_i(x, x)$ é a i -ésima coluna de $\nabla_y G(x, x)$.

Assim, o sistema 6.1.5 é análogo ao sistema 24 de [Kan16], pela presença do termo $\max$, L é não diferenciável, mas é Lipschitz contínua. Em [Kan16], foi calculado o jacobiano generalizado no sentido de Clarke (sobre-estimação) para um operador da forma 6.1.5 com uma função geral, $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Assim, usando as regras da análise não diferenciável, pelo Proposição 4.2 de [Kan16], temos:

$$\begin{aligned} \partial L(x) \subseteq & \sum_{i=1}^m \max \{0, u_i + \rho_i G_i(x, x)\} [\nabla_{yy}^2 G_i(x, x) + \nabla_{yx}^2 G_i(x, x)] + \\ & \sum_{i=1}^m \rho_i s_i \nabla_y G_i(x, x) [\nabla_y G_i(x, x) + \nabla_x G_i(x, x)]^T, \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

onde

$$s_i = \begin{cases} 1 & u_i + \rho_i G_i(x, x) > 0 \\ \in [0, 1] & u_i + \rho_i G_i(x, x) = 0 \\ 0 & u_i + \rho_i G_i(x, x) < 0 \end{cases}.$$

Como Θ é localmente Lipschitz, métodos de Newton semi-diferenciáveis podem ser usados para resolver 6.1.1. Por exemplo, podemos implementar o seguinte algoritmo que é globalmente convergente, que calcula um ponto estacionário da função $\Psi(x) = \frac{1}{2} \|\Theta(x)\|^2$.

Algoritmo 6.1.1. (*Método de Newton amortecido semi-diferenciável*) *Passo 0)* Escolher $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta > 0$, $p > 2$, $\rho, \sigma \in (0, \frac{1}{2})$. Fazer $k = 0$.

Passo 1) Se $\nabla \Psi(x^k) = 0$, parar.

Passo 2) Escolher um $V^k \in \partial_B \Theta(x^k)$ e resolver:

$$\Theta(x^k) + V^k d = 0.$$

Seja d^k a solução (caso exista). Se não tem solução ou se a condição

$$\nabla \Psi(x^k)^T d^k \leq -\beta \|d^k\|^p$$

não é satisfeita, fazer $d^k = -\nabla \Psi(x^k)$.

Passo 3) Seja m_k o menor inteiro não negativo m tal que

$$\Psi(x^k + \rho^m d^k) - \Psi(x^k) \leq 2\sigma \rho^m \nabla \Psi(x^k) d^k,$$

seja $t^k = \rho^{m_k}$ e $x^{k+1} = x^k + t^k d^k$.

Passo 4) Substituir k por $k + 1$. Ir ao Passo 1.

Observação 6.1.1. É conhecido que se Ψ é continuamente diferenciável, Θ é semi-diferenciável, então todo ponto de acumulação x^* gerado pelo algoritmo é um ponto estacionário de Ψ e se $\Theta(x^*) = 0$ com todos os elementos do $\partial_B \Theta(x^*)$ não singulares, então toda a sequência $\{x^k\}$ converge a x^* super linearmente e quadraticamente se Θ é fortemente semi-diferenciável em x^* .

Se usamos o método de Newton generalizado para resolver $\Theta(x) = 0$ com a hipótese que os elementos do $\partial_B \Psi(x^*)$ sejam não singulares e Θ é semi-diferenciável em x^* , temos convergência Q -super linear localmente.

Como toda matriz definida positiva é não singular, usando o resultado do Teorema 4.3 de [Kan16] dado para provar a monotonicidade de um operador tipo Θ , obtemos assim uma condição suficiente para ter os jacobianos de $\partial_B \Theta(x)$ não singulares.

Seja $h_i(x) = G_i(x, x)$, $i = 1, \dots, m$, então $Jh_i(x) = (\nabla_y G_i(x, x) + \nabla_x G_i(x, x))^T$ e por outra parte temos que $J_x(\nabla_y G_i(x, x)) = \nabla_{yy}^2 G_i(x, x) + \nabla_{yx}^2 G_i(x, x)$.

Assim, uma condição suficiente para que os elementos de $\partial \Theta(x)$ sejam não singulares é dado no seguinte resultado que esta baseado em 6.1.6.

Teorema 6.1.1. *Suponha que $JF(x)$ é definido positivo e que as matrizes*

$$\nabla_y G_i(x, x) J h_i(x), \quad \forall i \text{ tal que } u_i + \rho_i G_i(x, x) \geq 0, \quad (6.1.7)$$

$$J_x(\nabla_y G_i(x, x)), \quad \forall i \text{ tal que } u_i + \rho_i G_i(x, x) > 0, \quad (6.1.8)$$

sejam semi-definidas positivas, então os elementos de $\partial\Theta(x)$ são definidas positivas.

Demonstração. A prova é análoga ao Teorema 4.3 de [Kan16]. $\square$

Uma questão interessante para uma futura pesquisa é achar classes de GNEPs tal que os elementos de $\partial\Theta(x)$ sejam definidos positivos.

Consideremos agora o algoritmo 5.3.1 para o cálculo de equilíbrios b-variacionais. Usando uma penalização total e a notação anterior, temos que o algoritmo resolve em cada iteração um sistema KKT-GNEP da forma:

$$\Theta_b(x) = F_b(x) + \sum_{i=1}^m \max\{0, u_i + \rho_i g(x)\} \nabla g_i(x). \quad (6.1.9)$$

Em [Kan16] foi provado que um operador tipo $L(x) = \sum_{i=1}^m \max\{0, u_i + \rho_i g(x)\} \nabla g_i(x)$ é monótono, portanto, seus jacobianos generalizados são semi-definidos positivos, temos o seguinte resultado.

Teorema 6.1.2. *Suponha que $JF_b(x)$ é definido positivo, então os elementos de $\partial\Theta(x)$ são não singulares.*

Demonstração. A prova é uma consequência do Proposição 4.4 de [Kan16]. $\square$

No Passo 2 do algoritmo 6.1.1, um elemento arbitrário $V \in \partial_B \Theta(x)$ é escolhido. Sem nenhum tipo de critério para uma escolha adequada para V o algoritmo pode se tornar lento em geral.

Outro tipo de abordagem para resolver o sistema 6.1.1 é suavizar os termos não diferenciáveis, assim obter um novo sistema diferenciável $\Theta_t(x) = 0$ que, por meio do parâmetro $t > 0$, a aproximação de $\Theta_t(x)$ a $\Theta(x)$ possa ser controlada. Assim, com um sistema diferenciável podemos dispor de métodos mais eficientes para resolver os subproblemas. Uma ideia desse tipo foi usada em [NMFDS16] para implementar um algoritmo tipo Lagrangiano aumentado para problemas de equilíbrio, onde em cada iteração um sistema de equações não diferenciável tem que ser resolvido. Esses sistemas são não diferenciáveis também, pela presença do termo max. A ideia principal do enfoque em [NMFDS16] é de aproximar a função:

$$\phi(x) = \max\{0, x\} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (6.1.10)$$

por uma função diferenciável, que é próxima a ϕ em $\mathbb{R}$, onde a aproximação é controlada por um parâmetro $t > 0$. É claro que esta função ϕ é não diferenciável unicamente na origem. A função aproximação em [NMFDS16] é construída tomando um $t > 0$ e definindo uma função quadrática $p(s)$ no intervalo $[-t, t]$ e fora do intervalo é igual a ϕ , assim a função considerada é:

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < -t \\ \frac{1}{4t}s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{t}{4} & \text{se } -t \leq s \leq t \\ s & \text{se } s > t \end{cases}. \quad (6.1.11)$$

Esta função de aproximação não passa pelo origem para qualquer $t > 0$. A fim de ter um melhor comportamento da função de aproximação, aqui nós construímos uma função que aproxima ϕ , mas que leve em conta a origem, que é onde a função ϕ não tem um comportamento suave. Para isto, consideremos um intervalo da forma $[0, t]$ para t pequeno e definimos uma função de aproximação

$\bar{\phi}_t(s)$, que coincida com $\phi(s)$ fora do intervalo e no intervalo $[0, t]$ aproxime a $\phi(s)$ por meio de uma função cúbica da forma $p(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$, assim $\bar{\phi}_t(s)$ será da forma:

$$\bar{\phi}_t(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0 \\ p(s) & \text{se } 0 \leq s \leq t \\ s & \text{se } t \leq s \end{cases} \quad (6.1.12)$$

e a derivada é dada por:

$$\bar{\phi}_t'(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0 \\ p'(s) & \text{se } 0 \leq s \leq t \\ 1 & \text{se } t \leq s \end{cases}. \quad (6.1.13)$$

Para que esta função $\bar{\phi}_t(s)$ seja de fato diferenciável, deve-se satisfazer as seguintes condições:

$$p(0) = 0, \quad p(t) = t, \quad p'(0) = 0, \quad p'(t) = 1.$$

Pode-se ver facilmente que, para todo $t > 0$, o sistema de equações gerado pelas condições anteriores tem solução única que é: $a = -\frac{1}{t^2}$ e $b = \frac{2}{t}$, $c = d = 0$. Desta forma tem-se que $p(s)$ e $p'(s)$ são dadas, respectivamente, por:

$$p(s) = -\frac{s^3}{t^2} + \frac{2s^2}{t}, \quad p'(s) = -\frac{3s^2}{t^2} + \frac{4s}{t}.$$

A seguinte proposição mostra que realmente a função $\bar{\phi}_t(s)$ aproxima a $\phi(s)$ para t pequeno e a parte (b) é uma propriedade que será útil para poder garantir a não singularidade dos jacobianos, sob algumas hipóteses.

Proposição 6.1.1. *Considere as funções $\bar{\phi}_t(s)$ e $\phi(s)$ definidas anteriormente, então:*

- a) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \bar{\phi}_t(s) = \phi(s)$,
- b) $\bar{\phi}_t(s) \geq 0$ e $\bar{\phi}_t'(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pela definição de $\bar{\phi}_t(s)$ e $\phi(s)$, será suficiente provar que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \bar{\phi}_t(s) = \phi(s)$, para $s \in [0, t]$.

Como $s \leq t$, então $-2 \leq -\frac{s^2}{t^2} + \frac{2s}{t} - 1 \leq 1$, portanto:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \bar{\phi}_t(s) - s = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{s^3}{t^2} + \frac{2s^2}{t} - s = \lim_{t \rightarrow 0^+} s \left(-\frac{s^2}{t^2} + \frac{2s}{t} - 1 \right) = 0.$$

Para a parte b, temos que $\bar{\phi}_t(s) \geq 0$ é equivalente a $(-\frac{s}{t^2} + \frac{2}{t}) \geq 0$, que ao mesmo tempo é equivalente a $s \leq 2t$. Analogamente $\bar{\phi}_t'(s) \geq 0$. □

Com a notação anterior de $h_i(x) = G_i(x, x)$, em cada termo de 6.1.5 podemos substituir a função $\max\{0, u_i + \rho_i h_i(x)\}$ pela função $q_{t,i}(x) = \bar{\phi}_t(u_i + \rho_i h_i(x))$ dada por:

$$q_{t,i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } u_i + \rho_i h_i(x) \leq 0 \\ -\frac{1}{t^2}(u_i + \rho_i h_i(x))^3 + \frac{2}{t}(u_i + \rho_i h_i(x))^2 & \text{se } 0 \leq u_i + \rho_i h_i(x) \leq t \\ u_i + \rho_i h_i(x) & \text{se } t \leq u_i + \rho_i h_i(x) \end{cases}, \quad (6.1.14)$$

que é uma função diferenciável e seu gradiente vem dado por:

$$\nabla q_{t,i}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{se } u_i + \rho_i h_i(x) \leq 0 \\ \left[-\frac{3}{t^2}(u_i + \rho_i h_i(x))^2 + \frac{4}{t}(u_i + \rho_i h_i(x)) \right] \rho_i J h_i(x) & \text{se } 0 \leq u_i + \rho_i h_i(x) \leq t \\ \rho_i J h_i(x) & \text{se } t \leq u_i + \rho_i h_i(x) \end{array} \right\}. \quad (6.1.15)$$

Assim, na prática, no Passo 2 do algoritmo podemos resolver o sistema diferenciável.

$$\bar{\Theta}_t(x) = F(x) + \sum_{i=1}^m q_{t,i}(x) \nabla_y G_i(x, x) \quad (6.1.16)$$

e os zeros de $\bar{\Theta}_t(x)$ serão próximos aos zeros de $\Theta(x)$, para t suficientemente pequeno. Como $\bar{\Theta}_t$ é diferenciável, podemos calcular seu jacobiano.

Lema 6.1.1. *Suponha que as funções f^v e g^v são C^2 , para cada $v = 1, \dots, N$, então o jacobiano de $\bar{\Theta}_t(x)$ é dado por:*

$$J\bar{\Theta}_t(x) = JF(x) + \sum_{i=1}^m \nabla q_{t,i}(x) \nabla_y^T G_i(x, x) + \sum_{i=1}^m q_{t,i}(x) J_x (\nabla_y^T G_i(x, x)), \quad (6.1.17)$$

com $J_x (\nabla_y^T G_i(x, x)) = (\nabla_{yy}^2 G_i(x, x) + \nabla_{yx}^2 G_i(x, x))$.

Demonstração. A demonstração é elementar. $\square$

Em [FFH14], o método LP-Newton foi desenvolvido para poder resolver sistemas de equações não necessariamente diferenciáveis com possíveis soluções não isoladas, assim, este tipo de método resulta ser mais apropriado para resolver sistemas KKT-GNEP. Lembremos brevemente o método LP-Newton com convergência global de [FHIS16]. Consideremos o problema:

$$H(z) = 0, \quad z \in \Omega,$$

onde $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua e Ω é um conjunto não vazio e fechado.

No caso do método LP-Newton global [FHIS16], o método calcula um ponto estacionário do problema:

$$\min_{z \in \Omega} f(z), \quad (6.1.18)$$

onde $f(z) = \|H(z)\|$, no entanto o método LP-newton original [FFH14] é um método iterativo tal que se a iteração atual é $z \in \Omega$, então a seguinte iteração é $z + \varsigma$, onde ς é uma das partes da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\varsigma, \gamma} \quad & \gamma \\ & \|H(z) + G(z)\varsigma\| \leq \gamma \|H(z)\|^2 \\ & \|\varsigma\| \leq \gamma \|H(z)\| \\ & z + \varsigma \in \Omega, \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

onde $G(z)$ é uma matriz substituta (no caso não diferenciável) do jacobiano de H em z . No caso que Ω é um poliedro e a norma $\|\cdot\|_\infty$ é usada, então 6.1.19 é um problema de programação linear.

Definamos $\Delta(z) = -f(z)(1 - \gamma(z)f(z))$, o seguinte algoritmo pode ser usado para resolver o sistema 6.1.16.

Algoritmo 6.1.2. Algoritmo LP-Newton global, para H diferenciável

Passo 0) Escolher um ponto $z^0 \in \Omega$, $\sigma \in (0, 1)$ e $\theta \in (0, 1)$. Fazer $k = 0$.

Passo 1) Se $H(z^k) = 0$ parar.

Passo 2) Calcular um ponto (ζ^k, γ^k) solução de 6.1.19, com $z = z^k$ e com $G(z) = H'(z)$. Se $\Delta(z^k) = 0$, parar.

Passo 3) Seja $\alpha = 1$, se a desigualdade

$$f(z^k + \alpha \zeta^k) \leq f(z^k) + \sigma \alpha \Delta(z^k)$$

é satisfeita, fazer $\alpha_k = \alpha$. Caso contrário, trocar α por $\alpha\theta$ e ver se a desigualdade é satisfeita. Continuar assim até que a desigualdade seja verdadeira.

Passo 4) Fazer $z^{k+1} = z^k + \alpha_k \zeta^k$, $k = k + 1$. Ir ao Passo 1.

Para propriedades de convergência do algoritmo, ver [FHIS16].

Um resultado análogo ao Teorema 6.1.1 pode ser mostrado para $\bar{\Theta}_t$. O seguinte teorema mostra que sob condições análogas às condições do Teorema 6.1.1 o jacobiano $J\bar{\Theta}_t(x)$ é não singular, isso permite poder-se usar um método tipo Newton diferenciável para resolver os subproblemas.

Teorema 6.1.3. *Suponha que $JF(x)$ é definido positivo e que as matrizes*

$$\nabla_y G_i(x, x) J h_i(x), \quad \forall i \quad \text{tal que} \quad u_i + \rho_i G_i(x, x) \geq 0, \quad (6.1.20)$$

$$J_x(\nabla_y G_i(x, x)), \quad \forall i \quad \text{tal que} \quad u_i + \rho_i G_i(x, x) > 0 \quad (6.1.21)$$

sejam semi-definidas positivas, então $J\bar{\Theta}_t$ é definida positivo.

Demonstração. Será suficiente provar que:

$$\sum_{i=1}^m \nabla q_{t,i}(x) \nabla_y^T G_i(x, x) + \sum_{i=1}^m q_{t,i}(x) J_x(\nabla_y^T G_i(x, x)) \quad (6.1.22)$$

é semi-definida positiva. Pela proposição 6.1.1, temos que $q_{t,i}(x) \geq 0$ e pela hipótese, temos que o segundo termo de 6.1.22 é semi-definido positivo. Pela expressão para o $\nabla q_{t,i}(x)$ e do fato que $\bar{\phi}'_t(s) \geq 0$, então o primeiro termo de 6.1.22 é semi-definido positivo, portanto, $J\bar{\Theta}_t(x)$ é definido positivo. $\square$

Uma vantagem da função φ usada em [NMFDS16] é que ela é convexa, no entanto, nossa função $\bar{\phi}_t$ não é. Usando a função φ vamos provar o seguinte resultado para o cálculo de equilíbrios b -variacionais.

Consideremos agora o Algoritmo 5.2.1 para o cálculo de equilíbrios b -variacionais usando uma penalização total. Usando a função φ para suavizar os termos não diferenciáveis, temos que o algoritmo resolve em cada iteração um sistema KKT-GNEP da forma:

$$\Theta_t^b(x) = F_b(x) + \sum_{i=1}^m \bar{\varphi}_{t,i}(x) \nabla g_i(x), \quad (6.1.23)$$

onde $\bar{\varphi}_{t,i}(x) = \varphi(u_i + \rho_i g_i(x))$.

Temos o seguinte resultado.

Teorema 6.1.4. *Suponha que $JF_b(x)$ é definida positiva, então $J\Theta_t^b(x)$ é definida positiva.*

Demonstração. Usando a proposição 2.3 de [JQ95] será suficiente provar que:

$$L_t(x) = \sum_{i=1}^m \bar{\varphi}_{t,i}(x) \nabla g_i(x) \quad (6.1.24)$$

é monótona. Sejam $y, z \in \mathbb{R}^n$ temos:

$$\begin{aligned} (L_t(y) - L_t(z))^T(y - z) &= \left(\sum_{i=1}^m \bar{\varphi}_{t,i}(y) \nabla g_i(y) - \sum_{i=1}^m \bar{\varphi}_{t,i}(z) \nabla g_i(z) \right)^T (y - z), \\ \sum_{i=1}^m (\bar{\varphi}_{t,i}(y) \nabla g_i(y) - \bar{\varphi}_{t,i}(z) \nabla g_i(z))^T (y - z) &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

A última desigualdade é pelo fato de que como φ é convexa não negativa e g_i é convexa, para cada $i = 1, \dots, m$, então a função $\frac{1}{2\rho_i} \bar{\varphi}_{t,i}(x)^2$ é convexa e diferenciável, então o gradiente desta função é um operador monótono, mas o gradiente é dado por:

$$\nabla \frac{1}{2\rho_i} \bar{\varphi}_{t,i}(x)^2 = \bar{\varphi}_{t,i}(x) \nabla g_i(x), \quad (6.1.26)$$

portanto, $J\Theta_t^b(x)$ é definida positiva. $\square$

Usando penalidade exponencial

Consideremos agora o algoritmo 5.3.1 com penalização total nos subproblemas. Os subproblemas a resolver em cada iteração do algoritmo 5.3.1 são sistemas KKT-GNEPs de NEPs, usando a notação do caso quadrático fazemos $u = (u^1, \dots, u^N) \in \mathbb{R}^m$ e $\rho = (\rho^1, \dots, \rho^1, \dots, \rho^N, \dots, \rho^N) \in \mathbb{R}^m$, assim os subproblemas a resolver em cada iteração são da forma:

$$\Theta(x) = F(x) + \sum_{i=1}^m u_i e^{\rho_i G_i(x,x)} \nabla_y G_i(x,x). \quad (6.1.27)$$

Neste caso, $\Theta(x)$ é uma função diferenciável. Resultados análogos ao caso quadrático são dados no seguinte lema.

Lema 6.1.2. *Suponha que as funções f^v e g^v são de classe C^2 , para cada $v = 1, \dots, N$, então o jacobiano de $\Theta(x)$ é dado por*

$$J\Theta(x) = JF(x) + \sum_{i=1}^m u_i e^{\rho_i G_i(x,x)} \rho_i \nabla_x G_i(x,x) \nabla_y^T G_i(x,x) + \sum_{i=1}^m u_i e^{\rho_i G_i(x,x)} J_x (\nabla_y^T G_i(x,x))$$

com $J_x (\nabla_y^T G_i(x,x)) = (\nabla_{yy}^2 G_i(x,x) + \nabla_{yx}^2 G_i(x,x))$.

Se $JF(x)$ é definido positivo e as matrizes $\rho_i \nabla_x G_i(x,x) \nabla_y^T G_i(x,x) + J_x (\nabla_y^T G_i(x,x))$ são semi-definidas positivas, para cada $i = 1, \dots, m$, então $J\Theta(x)$ é definido positivo.

Demonstração. A prova é elementar. $\square$

Consideremos agora o algoritmo 5.3.1 para o cálculo de equilíbrios b -variacionais usando penalização total. Temos que o algoritmo resolve em cada iteração um sistema KKT-GNEP da forma:

$$\Theta^b(x) = F_b(x) + \sum_{i=1}^m u_i e^{\rho_i g_i(x)} \nabla g_i(x). \quad (6.1.28)$$

Temos o seguinte resultado.

Teorema 6.1.5. *Suponha que $JF_b(x)$ é definida positiva, então $J\Theta^b(x)$ é definida positiva.*

Demonstração. Usando a proposição 2.3 de [JQ95] será suficiente provar que:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m u_i e^{\rho_i g_i(x)} \nabla g_i(x) \quad (6.1.29)$$

é monótona. Sejam $y, z \in \mathbb{R}^n$ temos:

$$\begin{aligned} (L(y) - L(z))^T(y - z) &= \left(\sum_{i=1}^m u_i e^{\rho_i g_i(y)} \nabla g_i(y) - \sum_{i=1}^m u_i e^{\rho_i g_i(z)} \nabla g_i(z) \right)^T (y - z) = \\ &= \sum_{i=1}^m u_i \left(e^{\rho_i g_i(y)} \nabla g_i(y) - e^{\rho_i g_i(z)} \nabla g_i(z) \right)^T (y - z) \geq 0. \end{aligned} \quad (6.1.30)$$

A última desigualdade é pelo fato que a função $\frac{1}{\rho_i} u_i e^{\rho_i g_i(x)}$ é convexa e diferenciável, portanto, o gradiente desta função é um operador monótono, mas o gradiente é dado por:

$$\nabla \frac{1}{\rho_i} u_i e^{\rho_i g_i(x)} = u_i e^{\rho_i g_i(x)} \nabla g_i(x), \quad (6.1.31)$$

portanto, $J\Theta^b(x)$ é definida positiva. $\square$

6.1.2 Penalização parcial

Para o caso de penalidade parcial, os métodos para resolver o sistema KKT-GNEP mencionados no Capítulo 3 podem ser usados. Esses métodos podem ser usados tanto se considerarmos uma função de penalidade exponencial ou se considerarmos a função de penalidade quadrática suavizada, já que esses métodos exigem que as funções objetivo e as restrições sejam de classe C^2 . Aqui, comentamos mais uma alternativa de resolução quando os subproblemas são NEPs com restrições. Observamos que no caso de ter NEPs com restrições nos subproblemas, seus sistemas KKT-GNEP tem a mesma forma dos sistemas KKT de VIs, então usando os resultados dados em [FFK98] para VIs, podemos aplicá-los para resolver os subproblemas.

Consideremos por simplicidade o caso da penalidade exponencial, o caso quadrático pode ser considerado, mas antes precisa ser suavizado.

Para cada $v = 1, \dots, N$, os subproblemas a resolver em cada iteração são da forma:

$$\begin{aligned} \nabla_{x^v} f^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{i=1}^{m_v} u_i^v \exp(\rho^v g_i^v(x^v, x^{-v})) \nabla_{x^v} g_i^v(x^v, x^{-v}) + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^v \nabla h_j^v(x^v) &= 0, \\ \mu_j^v &\geq 0, \quad h_j^v(x^v) \leq 0, \quad \mu_j^v h_j^v(x^v) = 0, \quad j = 1, \dots, l_v. \end{aligned} \quad (6.1.32)$$

Como antes, seja $L^v(x, \mu^v) = f^v(x^v, x^{-v}) + \frac{1}{\rho^v} \sum_{i=1}^{m_v} u_i^v [\exp(\rho^v g_i^v(x^v, x^{-v})) - 1]$ e

$$F^v(x, \mu^v) = f^v(x^v, x^{-v}) + \frac{1}{\rho^v} \sum_{i=1}^{m_v} u_i^v [\exp(\rho^v g_i^v(x^v, x^{-v})) - 1] + \sum_{j=1}^{l_v} \mu_j^v h_j^v(x^v),$$

então o sistema anterior é equivalente a:

$$\begin{aligned} \nabla_{x^v} F^v(x, \mu^v) &= 0, \\ 0 &\leq \mu^v \perp h^v(x^v) \leq 0. \end{aligned} \quad (6.1.33)$$

Fazendo $F(x, \mu) = (\nabla_{x^v} F^v(x, \mu^v))_{v=1}^N$, $\mu = (\mu^v)_{v=1}^N$ e $h(x) = (h^v(x^v))_{v=1}^N$ e usando a função de Fischer-Burmeister, $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(a, b) = \sqrt{a + b} - (a + b)$, os sistemas KKT-GNEP em cada iteração do algoritmo podem ser reformulados como:

$$\Theta(z) = \Theta(x, \mu) = \begin{pmatrix} F(x, \mu) \\ \varphi(\mu, -h(x)) \end{pmatrix} = 0, \quad (6.1.34)$$

onde $\varphi(\mu, -h(x)) = (\phi(\mu_1, -h_1(x)), \dots, \phi(\mu_l, -h_l(x)))$.

Assim, o sistema anterior não é diferenciável, mas é Lipschitz contínua. Em [FFK98], os autores formulam o sistema KKT de um problema de desigualdade variacional como um sistema de equações não diferenciável análogo a 6.1.34. Usando essa analogia, usamos um resultado dado em [FFK98] para poder obter a estrutura do jacobiano generalizado de $\partial\Theta$.

Lema 6.1.3. *Suponha que as funções f^v , h^v e g^v são funções C^2 , para cada $v = 1, \dots, N$, então cada elemento $W \in \partial\Theta(z)$ é da forma:*

$$W = \begin{bmatrix} \nabla_x F(x, \mu) & -\nabla h(x) D_a(z), \\ \nabla h(x)^T & D_b(z) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}, \quad (6.1.35)$$

onde $D_a(z) = \text{diag}(a_1(z), \dots, a_l(z))$, $D_b(z) = \text{diag}(b_1(z), \dots, b_l(z)) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ são matrizes diagonais com elementos na diagonal dados por:

$$a_i(z) = \frac{-h_i(x)}{\sqrt{h_i(x)^2 + \mu_i^2}} - 1, \quad b_i(z) = \frac{\mu_i}{\sqrt{h_i(x)^2 + \mu_i^2}} - 1,$$

se $(h_i(x), \mu_i) \neq 0$ e por

$$a_i(z) = \xi_i - 1, \quad b_i(z) = \rho_i - 1,$$

para algum (ξ_i, ν_i) com $\|(\xi_i, \nu_i)\| \leq 1$, se $(h_i(x), \mu_i) = 0$.

Demonstração. Ver [FFK98]. □

Um resultado mais geral do Lema 6.1.3 para GNEPs pode ser encontrado em [Dre12]. Nosso interesse neste caso é porque sob hipóteses aceitáveis, podemos usar um método de Newton semi-diferenciável.

Esta ideia também foi usada em [YZZ11] para resolver os subproblemas de um método de barreira para GNEPs. Seja (x^*, μ^*) uma solução de 6.1.34, $I^v(x^{*,v}) = \{i \in \{1, \dots, l_v\} : h_i^v(x^{*,v}) = 0\}$, $I_+^v(x^*, \mu^{*,v}) = \{i \in I^v(x^*) : \mu_i^{*,0} > 0\}$ e $I_0^v(x^*, \mu^{*,v}) = \{i \in I^v(x^*) : \mu_i^{*,0} = 0\}$.

O cone crítico para o v -ésimo jogador em x^* é denotado e definido por:

$$C^v(x^*) = \{d^v \in \mathbb{R}^{n_v} : \nabla_{x^v} L^v(x^*, \mu^{*,v}) d^v = 0, \nabla_{x^v} h_i^v(x^{*,v}) d^v \leq 0, i \in I^v(x^{*,v})\}, \quad (6.1.36)$$

como (x^*, μ^*) é uma solução de 6.1.34, temos

$$C^v(x^*) = \{d^v \in \mathbb{R}^{n_v} : \nabla_{x^v} h_i^v(x^*) d^v = 0, i \in I_+^v(x^*, \mu^{*,v}), \nabla_{x^v} h_i^v(x^*) d^v \leq 0, i \in I_0^v(x^*, \mu^{*,v})\}$$

e seja $\text{aff}(C^v(x^*))$ o fecho afim de $C^v(x^*)$.

Por outro lado, temos que:

$$\nabla_x F(z) = \begin{bmatrix} \nabla_{x^1 x^1}^2 F^1(x, \mu^1) & \nabla_{x^1 x^2}^2 F^1(x, \mu^1) & \cdots & \nabla_{x^1 x^N}^2 F^1(x, \mu^1) \\ \nabla_{x^2 x^1}^2 F^2(x, \mu^2) & \nabla_{x^2 x^2}^2 F^2(x, \mu^2) & \cdots & \nabla_{x^2 x^N}^2 F^2(x, \mu^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_{x^N x^1}^2 F^N(x, \mu^N) & \nabla_{x^N x^2}^2 F^N(x, \mu^N) & \cdots & \nabla_{x^N x^N}^2 F^N(x, \mu^N) \end{bmatrix}.$$

Definição 6.1.1. *Seja $z^* = (x^*, \mu^*)$ uma solução de 6.1.34, dizemos que a condição suficiente forte de segunda ordem ocorre em (x^*, μ^*) se, para todo $d = (d^v)_{v=1}^N \in \prod_{v=1}^N \text{aff}(C^v(x^*))$, temos*

$$d^T \nabla_x F(z^*) d > 0, \quad d \neq 0.$$

O seguinte resultado é uma adaptação do Teorema 3.4 de [FFK98] dado para VIs.

Teorema 6.1.6. *Seja $z^* = (x^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ uma solução de 6.1.34 e assumamos que:*

- x^* satisfaz LICQ-GNEP (referente as h restrições),
- A condição suficiente forte de segunda ordem ocorre em (x^*, μ^*) ,

então todos os elementos de $\partial\Phi(z^*)$ são não singulares.

Demonstração. Ver Teorema 4.3 de [YZZ11]. □

Finalmente usando este resultado, podemos usar, por exemplo, o algoritmo 6.1.1 para resolver os subproblemas.

6.1.3 Testes numéricos

Para finalizar o trabalho, usando MATLAB implementamos o método de Lagrangiano aumentado usando tanto a penalidade quadrática como a exponencial para alguns GNEPs simples. O objetivo principal dos exemplos numéricos é mostrar que: nossa aproximação cubica é eficiente, que usando a penalidade quadrática em geral se tem convergência mais rápida que usando a penalidade exponencial e que fazendo uma penalização total pode levar a ter mais iterações no algoritmo que fazendo uma penalização parcial, salientamos que estas afirmações são dadas de forma empírica.

Exemplo 6.1.1. *Consideremos o GNEP 3.2.4.*

$$\text{Jogador 1: } \min_{x^1} (x^1 - 1)^2 \quad s.t. \quad x^1 + x^2 \leq 1$$

$$\text{Jogador 2: } \min_{x^2} (x^2 - \frac{1}{2})^2 \quad s.t. \quad x^1 + x^2 \leq 1$$

O conjunto solução do sistema KKT-GNEP é: $CS = \left\{ (\alpha, 1 - \alpha, 2 - 2\alpha, 2\alpha - 1) : \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}$

Para o cálculo de equilíbrios arbitrários, usamos os parâmetros iniciais $u^{max} = u^0 = (8, 9)$, $\rho^0 = (9, 10)$, $\gamma = 10$, $\tau = 0.7$ e uma tolerância de $\epsilon = 0.01$.

a.q significa que foi usada uma aproximação quadrática para suavizar os termos não diferenciáveis, a.c quando é usada uma aproximação cúbica e k representa o número de iterações do algoritmo principal.

x^0	Penalidade quadrática com a.q			Penalidade quadrática com a.c		
	t	k	x^*	t	k	x^*
(1,1,2,2)	0.05	3	(0.7894, 0.2105 , 0.4211, 0.5791)	0.05	3	(0.7894, 0.2105,0.4211,0.5791)
(1,1,2,2)	0.025	3	(0.7894, 0.2105, 0.4211, 0.5791)	0.025	3	(0.7894, 0.2105,0.4211,0.5791)
(5,5,5,5)	0.05	3	(0.7862 ,0.2069,0.4276, 0.5862)	0.05	3	(0.7862, 0.2069,0.4276, 0.5862)
(5,5,5,5)	0.025	3	(0.7862,0.2069,0.4276,0.5862)	0.025	3	(0.7862,0.2069,0.4276, 0.5862)
(-2,1,-2,1)	0.05	3	(0.4996, 0.4997, 1.0008, 0)	0.05	3	(0.4993,0.5000,1.0014,0)
(-2,1,-2,1)	0.025	3	(0.4994, 0.5000, 1.0013, 0)	0.025	3	(0.4994,0.5000 , 1.0013, 0)

Tabela 6.1: Penalidade quadrática.

x^0	Penalidade exponencial	
	k	x^*
(1,1,2,2)	2	(0.7250, 0.2703, 0.5500, 0.4595)
(5,5,5,5)	2	(0.7250, 0.2703, 0.5500, 0.4595)
(-2,1,-2,1)	2	(0.7250, 0.2703, 0.5500, 0.4595)

Tabela 6.2: Penalidade exponencial.

Para o cálculo de equilíbrios variacionais, tomamos os parâmetros iniciais $u^{max} = u^0 = 9$, $\rho^0 = 10$, $\gamma = 10$, $\tau = 0.7$ e uma tolerância de $\epsilon = 0.001$.

x^0	Penalidade quadrática com a.q			Penalidade quadrática com a.c		
	t	k	x^*	t	k	x^*
(1,1,2,2)	0.025	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)	0.025	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)
(1,1,2,2)	0.0125	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)	0.0125	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)
(5,5,5,5)	0.025	4	(0.7497, 0.2497, 0.5006, 0.5006)	0.025	4	(0.7497, 0.2497, 0.5006, 0.5006)
(5,5,5,5)	0.0125	4	(0.7497, 0.2497, 0.5006, 0.5006)	0.0125	4	(0.7497, 0.2497, 0.5006, 0.5006)
(-2,1,-1,-1)	0.025	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)	0.025	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)
(-2,1,-1,-1)	0.0125	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)	0.0125	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)

Tabela 6.3: Penalidade quadrática.

x^0	Penalidade exponencial	
	k	x^*
(1,1,2,2)	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)
(5,5,5,5)	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)
(-2,1,-1,-1)	3	(0.7500, 0.2500, 0.5001, 0.5001)

Tabela 6.4: Penalidade exponencial.

Exemplo 6.1.2. Consideremos o GNEP com $N = 2$ jogadores, e cada jogador controla uma única variável x^v .

$$\text{Jogador 1: } \min_{x^1} (x^1)^2 - x^1 x^2 - x^1 \quad s.t \quad x^1 \geq 0, x^1 + x^2 \leq 1$$

$$\text{Jogador 2: } \min_{x^2} (x^2)^2 - (1/2)x^1 x^2 - 2x^2 \quad s.t \quad x^2 \geq 0, x^1 + x^2 \leq 1$$

O conjunto solução é $CS = \{(\alpha, 1 - \alpha) : \alpha \in [0, \frac{2}{3}]\}$. Para o cálculo de pontos de equilíbrio, usamos os parâmetros iniciais $u^{max} = u^0 = (10, 10, 10, 10)$, $\rho^0 = (1, 1)$, $\gamma = 10$, $\tau = 0.5$ e uma tolerância de $\epsilon = 0.001$.

x^0	Penalidade exponencial	
	k	x^*
(0,0,0,0,0)	60	(0.0009,0.9988,0.8294,2.8264, 0, 0.0028)
(5,5,5,5,5)	60	(0.0009,0.9988, 0.8294, 2.8264, 0, 0.0028)
(-10,10,0,0,0,0)	60	(0.0009, 0.9988, 0.8294, 2.8264, 0, 0.002)

Tabela 6.5: Penalidade exponencial.

Consideremos os seguintes pontos iniciais, $x_1^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $x_2^0 = (5, 5, 5, 5, 5, 5)$ e $x_3^0 = (-10, 10, 0, 0, 0, 0)$

x^0	Penalidade quadrática com a.q			Penalidade quadrática com a.c	
	t	k	x^*	k	x^*
x_1^0	10^{-4}	4	(0.3634,0.6362, 0, 0.9093, 0, 0.9093)	4	(0.3634, 0.6362, 0,0.9093,0, 0.9093)
x_1^0	10^{-5}	4	(0.3634,0.6362, 0, 0.9093, 0, 0.9093)	4	(0.3634,0.6362, 0,0.9093 , 0 , 0.9093)
x_2^0	10^{-4}	5	(0.3634,0.6362, 0, 0.9093, 0, 0.9093)	5	(0.3634,0.6362, 0 , 0.9093, 0,0.9093)
x_2^0	10^{-5}	5	(0.3634,0.6362, 0, 0.9093, 0, 0.9093)	5	(0.3634,0.6362, 0 , 0.9093, 0,0.9093)
x_3^0	10^{-4}	7	(0.0007,0.9993,7.0023,9.0002, 0 ,0.0018)	7	(0.0007,0.9993,7.0023, 9.0002, 0, 0.0018)
x_3^0	10^{-5}	7	(0.0007,0.9993,7.0023,9.0002,0,0.0018)	7	(0.0007,0.9993, 7.0023, 9.0002,0, 0.0018)

Tabela 6.6: Penalidade quadrática.

Exemplo 6.1.3. Considere o seguinte GNEP de jogadores convexos, onde cada jogador controla uma única variável $x^v \in \mathbb{R}$

$$\text{Jogador 1 : } \min_{x^1} (x^1 - 2)^2 \quad \text{s.t.} \quad x^1 + x^2 \leq 1$$

$$\text{Jogador 2: } \min_{x^2} (x^2 - 2)^2 \quad \text{s.t.} \quad x^1 + x^2 \leq 1, x^2 - x^1 \leq 0$$

O conjunto solução é $CS = \{(\alpha, 1 - \alpha) : \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\}$. Para o cálculo de equilíbrios arbitrários, usamos os parâmetros iniciais $u^0 = (10, 10, 10)$, $\rho^0 = (1, 1)$, $\gamma = 10$, $\tau = 0.5$ e uma tolerância de $\epsilon = 0.0001$.

x^0	Penalidade quadrática com a.q			Penalidade quadrática com a.c	
	t	k	x^*	k	x^*
(0,0,0,0,0)	10^{-5}	8	(0.5,0.5,3,3, 0)	8	(0.5, 0.5, 3, 3, 0)
(10,10,10,10,10)	10^{-5}	8	(0.5235, 0.4765, 2.9529,3.0471, 0)	8	(0.5235,0.4765,2.9529, 3.0471, 0)
(10,-10,0,0,0)	10^{-5}	8	(0.5,0.5,3,3, 0)	8	(0.5,0.5,3,3, 0)
(-20,-20,1,1,1)	10^{-5}	8	(0.5,0.5,3,3, 0)	3	(0.5, 0.5, 3, 3, 0)

Tabela 6.7: Penalidade quadrática.

x^0	Penalidade exponencial	
	k	x^*
(0,0,0,0)	5	(0.6188, 0.3812, 2.7624, 3.2375, 0.0000)
(10,10,10,10,10)	5	(0.6188, 0.3812, 2.7624 ,3.2375, 0.0000)
(10,-10,0,0,0)	5	(0.6188, 0.3812, 2.7624 ,3.2375, 0.0000)
(-20,-20,1,1,1)	3	(0.6188, 0.3812, 2.7624 ,3.2375, 0.0000)

Tabela 6.8: Penalidade exponencial.

Exemplo 6.1.4. Consideremos o GNEP com 2 jogadores:

$$\begin{aligned}
\text{Jogador 1 : } & \min_{x^1, x^2} (x^1)^2 + x^1 x^2 + (x^2)^2 + (x^1 + x^2)x^3 - 25x^1 - 38x^2 \\
& s.t \quad x^1 \geq 0; x^2 \geq 0; x^1 + 2x^2 - x^3 \leq 14; 3x^1 + 2x^2 + x^3 \leq 30 \\
\text{Jogador 2 : } & \min_{x^3} (x^3)^2 + (x^1 + x^2)x^3 - 25x^3 \\
& s.t \quad x^3 \geq 0; x^1 + 2x^2 - x^3 \leq 14; 3x^1 + 2x^2 + x^3 \leq 30
\end{aligned}$$

O conjunto solução é $CS(GNEP) = \{(\alpha, 11 - \alpha, 8 - \alpha) : \alpha \in [0, 2]\}$

Para o cálculo de ENG, usamos os parâmetros iniciais $u^0 = (10, 10, 10, 10, 10, 10, 10)$, $\rho^0 = (1, 1)$, $\gamma = 10$, $\tau = 0.5$, tolerância de $\epsilon = 0.001$ e $t = 0.0001$.

E consideremos os seguintes pontos iniciais, $x_1^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $x_2^0 = (10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10)$ e $x_3^0 = (-2, -3, -4, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

x^0	Penalidade quadrática com a.c		
	t	k	x^*
x_1^0	10^{-4}	8	(0.0007, 10.9993, 7.9991, 0.0030, 0, 2.9995, 1.0012, 0, 2.9995, 1.0012)
x_2^0	10^{-4}	7	(1.2815, 9.7185, 6.7185, 0, 0, 4.9222 ,0.3593, 0 ,2.5329, 3.0960)
x_3^0	10^{-4}	8	(0.0007, 10.9993, 7.9991, 0.0030, 0, 2.9995, 1.0012, 0, 2.9995, 1.0012)

Tabela 6.9: Penalidade quadrática.

x^0	Penalidade exponencial		
	t	k	x^*
x_1^0	10^{-4}	112	(0.0008, 10.9992, 7.9992, 0.0027 , 0, 2.9995, 1.0013, 0, 2.9995, 1.0013)
x_2^0	10^{-4}	112	(0.0008, 10.9992, 7.9992, 0.0027 , 0, 2.9995, 1.0013, 0, 2.9995, 1.0013)
x_3^0	10^{-4}	112	(0.0008, 10.9992, 7.9992, 0.0027 , 0, 2.9995, 1.0013, 0, 2.9995, 1.0013)

Tabela 6.10: Penalidade exponencial.

Exemplo 6.1.5. Consideremos o GNEP com 2 jogadores:

$$\begin{aligned}
\text{Jogador 1 : } & \min_{x^1} (x^1 - 10)^2 \quad s.t \quad x^1 + x^2 \leq 1; \quad x^1 \leq 8, \\
\text{Jogador 2 : } & \min_{x^2} (x^2)^2 \quad s.t \quad x^2 + x^1 \leq 10; x^2 \leq 1.
\end{aligned}$$

O sistema KKT é:

$$\begin{aligned}
2(x^1 - 10) + l^1 + \mu^1 &= 0 \\
2x^2 + l^2 + \mu^2 &= 0 \\
\lambda^1 \geq 0, \quad x^1 + x^2 - 1 \leq 0, \quad \lambda^1(x^1 + x^2 - 1) &= 0 \\
\lambda^2 \geq 0, \quad x^1 + x^2 - 10 \leq 0, \quad \lambda^2(x^1 + x^2 - 10) &= 0 \\
\mu^1 \geq 0, \quad x^1 - 8 \leq 0, \quad \mu^1(x^1 - 8) &= 0 \\
\mu^2 \geq 0, \quad x^2 - 1 \leq 0, \quad \mu^2(x^2 - 1) &= 0
\end{aligned}$$

o conjunto solução é $CS = \{(1, 0, 18, 0, 0, 0)\}$.

Para este exemplo vamos a considerar três tipos de penalização, usando a função de penalidade quadrática e com uma aproximação cúbica para resolver os subproblemas.

1. Penalizando todas as restrições

Os NEPs em cada iteração são:

Jogador 1:

$$\min_{x^1} (x^1 - 10)^2 + \frac{1}{2\rho^1} (u_1^1 + \rho^1(x^1 + x^2 - 1))_+ + \frac{1}{2\rho^1} (u_2^1 + \rho^1(x^1 - 8))_+$$

Jogador 2:

$$\min_{x^2} (x^2)^2 + \frac{1}{2\rho^2} (u_1^2 + \rho^2(x^1 + x^2 - 10))_+ + \frac{1}{2\rho^2} (u_2^2 + \rho^2(x^2 - 1))_+$$

o sistema KKT para resolver em cada iteração é:

$$\begin{aligned}
2(x^1 - 10) + (u_1^1 + \rho^1(x(1) + x(2) - 1))_+ + (u_2^1 + \rho^1(x(1) - 8))_+ &= 0 \\
2x^2 + (u_1^2 + \rho^2(x(1) + x(2) - 10))_+ + (u_2^2 + \rho^2(x(2) - 1))_+ &= 0
\end{aligned}$$

Para os parâmetros seguintes $u^0 = (1, 2, 1, 2)$, $\rho^0 = (50, 60)$ $\gamma = 9$ e $\tau = 0.6$ temos:

ϵ	t	x^0	x^*	Iterações
0.01	0.1	(0, 0, 1, 3, 0, 0)	(1.0014, 0, 17.9971, 0, 0, 0)	2
0.001	0.01	(0, 0, 1, 3, 0, 0)	(1, 0, 18, 0, 0, 0)	4
0.01	0.1	(2, 1, 1, 1, 1, 1)	(1.0014, 0, 17.9971, 0, 0, 0)	2
0.001	0.01	(2, 1, 1, 1, 1, 1)	(1, 0, 18, 0, 0, 0)	4

2. Penalizando as restrições compartilhadas

Os NEPs em cada iteração são:

$$\begin{aligned}
\text{Jogador 1} \quad & \min_{x^1} (x^1 - 10)^2 + \frac{1}{2\rho^1} \max \{0, u_1^1 + \rho^1(x^1 + x^2 - 1)\}^2 \\
& x^1 \leq 8 \\
\text{Jogador 2} \quad & \min_{x^2} (x^2)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \max \{0, u_1^2 + \rho^2(x^1 + x^2 - 10)\}^2 \\
& x^2 \leq 1
\end{aligned}$$

o sistema KKT é:

$$\begin{aligned}
2(x^1 - 10) + \max \{0, u^1 + \rho^1(x(1) + x(2) - 1)\} + \mu^1 &= 0 \\
2x^2 + \max \{0, u^2 + \rho^2(x(1) + x(2) - 10)\} + \mu^2 &= 0 \\
\sqrt{(x^1 - 8)^2 + (\mu^1)^2} - (8 - x^1 + \mu^1) &= 0 \\
\sqrt{(x^2 - 1)^2 + (\mu^2)^2} - (1 - x^2 + \mu^2) &= 0
\end{aligned}$$

Para os parâmetros seguintes $u^0 = (1, 2)$, $\rho^0 = (50, 60)$ $\gamma = 9$ e $\tau = 0.6$ temos:

ϵ	t	x^0	x^*	iterações
0.01	0.1	(0 , 0, 1, 3, 0, 0)	(1.0005,0 ,17.9971,0 ,0,0)	3
0.001	0.01	(0, 0 , 1 , 3 ,0 ,0)	(1.0005,0, 17.9991,0,0,0)	3
0.01	0.1	(2, 1, 1, 1 ,1, 1)	(1.0005, 0,17.9971,0,0,0)	3
0.001	0.01	(2, 1, 1, 1 ,1, 1)	(1.0005,0, 17.9991,0,0,0)	3

3. Penalizando as restrições individuais e mantendo as restrições compartilhadas

Os GNEPs em cada iteração são:

$$\begin{aligned}
\text{Jogador 1} \quad & \min_{x^1} (x^1 - 10)^2 + \frac{1}{2\rho^1} \max \{0, u_1^1 + \rho^1(x^1 - 8)\}^2 \\
& x^1 + x^2 \leq 1 \\
\text{Jogador 2} \quad & \min_{x^2} (x^2)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \max \{0, u_1^2 + \rho^2(x^2 - 1)\}^2 \\
& x^1 + x^2 \leq 10
\end{aligned}$$

o sistema KKT para o GNEP é :

$$\begin{aligned}
2(x^1 - 10) + \max \{0, u^1 + \rho^1(x(1) - 8)\} + \mu^1 &= 0 \\
2x^2 + \max \{0, u^2 + \rho^2(x(2) - 1)\} + \mu^2 &= 0 \\
\sqrt{(x^1 + x^2 - 1)^2 + (\mu^1)^2} - (1 - x^1 - x^2 + \mu^1) &= 0 \\
\sqrt{(x^1 + x^2 - 10)^2 + (\mu^2)^2} - (10 - x^2 - x^1 + \mu^2) &= 0
\end{aligned}$$

Para os parâmetros seguintes $u^0 = (1, 2)$, $\rho^0 = (50, 60)$ $\gamma = 9$ e $\tau = 0.6$ temos:

ϵ	t	x^0	x^*	iterações
0.01	0.1	(0 , 0, 1, 3, 0, 0)	(1,0 ,18,0 ,0,0)	1
0.001	0.01	(0, 0 , 1 , 3 ,0 ,0)	(1,0, 18,0,0,0)	1
0.01	0.1	(2, 1, 1, 1 ,1, 1)	(1, 0,18,0,0,0)	1
0.001	0.01	(2, 1, 1, 1 ,1, 1)	(1,0, 18,0,0,0)	1

Capítulo 7

Conclusões

Nesta tese apresentamos uma análise de condições de qualificação, otimalidade e de um algoritmo do tipo Lagrangiano Aumentado para GNEPs.

Os GNEPs possuem uma estrutura complexa que está associada geralmente com o fato dos conjuntos viáveis dos jogadores não serem fixos. Assim, algumas extensões de otimização tem sérias dificuldades. Para outros tipos de problemas como NEPs, desigualdades variacionais, problemas complementários, problemas de equilíbrio, problemas multiobjetivos, entre outros, as extensões de algoritmos e de resultados de tipo teórico de otimização parecem ter maior sucesso, já que em todos estes problemas os conjuntos viáveis são fixos.

Propriedades qualitativas para GNEPs como condições de qualificação ou condições de otimalidade são escassos. Geralmente os resultados de tipo qualitativo estão mais focados em provar existência de soluções. Estudar este tipo de propriedades qualitativas será importante para poder definir algoritmos mais eficientes para GNEPs no futuro.

Nesta tese apresentamos dois tipos de CQ para GNEPs: as CQ-parcial que tem pouco interesse prático, mas guardam as mesmas relações que suas análogas de otimização; e as CQ-GNEPs que são mais fortes que as CQ-Parcial, representam melhor a estrutura conjunta dos GNEPs e estão associados com a convergência de algoritmos. No entanto as CQ-GNEPs não guardam as mesmas relações de seus análogos de otimização, em geral, como foi mostrado na tese e também houveram alguns casos que ainda não foram esclarecidos e serão matéria de estudo em futuros trabalhos.

O fato de que AKKT-GNEP não é uma condição de otimalidade para GNEPs faz, entre outras coisas, que o método Lagrangiano Aumentado para GNEPs possa ter o comportamento de evitar soluções de um GNEP. Isso é diferente do caso de otimização.

Um preliminar estudo computacional foi também considerado para analisar a performance do método, tirando algumas conclusões dos testes numéricos, podemos perceber que nossa aproximação cúbica para suavizar os subproblemas é eficiente, que a penalidade quadrática parece ser mais rápida que a penalidade exponencial, e que fazendo uma penalidade total pode tornar o algoritmo mais lento que se consideramos uma penalidade parcial.

7.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

Durante o desenvolvimento da tese, várias perguntas e sugestões de pesquisa surgiram relacionados tanto com GNEPs como também com outros tipos de problemas relacionados. Entre as principais que merecem investigação temos as seguintes.

1. Esclarecer por completo as relações entre as CQ-GNEPs de forma análoga como em otimização. Alguns resultados deste trabalho mostram que para GNEPs algumas implicações para CQs de otimização não são satisfeitas. Estabelecer quais destas relações se mantêm, por exemplo, ver se QN-GNEP implica error bound-GNEP, é uma boa opção de pesquisa.
2. Procurar condições sequenciais para uma ampla classe de GNEPs seria importante tanto para um estudo teórico como para construir novos algoritmos.

3. Direções de descida em otimização é um conceito útil e importante no desenvolvimento de alguns algoritmos, mas esse conceito não foi ainda estudado para NEPs em geral, poder encontrar algum tipo de direção de descida para NEPs poderia ser útil para poder desenvolver novos algoritmos e ao mesmo tempo possam auxiliar na globalização do métodos com convergência local, além que pode proporcionar ideias para sua extensão para GNEPs.
4. Estender os resultados estudados para uma classe mais ampla de problemas como os Problemas de quase-equilíbrio, que nos últimos anos tem sido bastante estudados, tanto do ponto de vista de existência de soluções como de algoritmos para sua resolução.

Referências Bibliográficas

- [ABMS07] Roberto Andreani, Ernesto G Birgin, José Mario Martínez e María Laura Schuverdt. On augmented lagrangian methods with general lower-level constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 18(4):1286–1309, 2007. [14](#), [15](#)
- [AD54] Kenneth J Arrow e Gerard Debreu. Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, páginas 265–290, 1954. [1](#)
- [AHM11] Roberto Andreani, Gabriel Haeser e José Mario Martínez. On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization. *Optimization*, 60(5):627–641, 2011. [10](#), [11](#)
- [AHSS12a] Roberto Andreani, Gabriel Haeser, María Laura Schuverdt e Paulo JS Silva. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications. *Mathematical Programming*, páginas 1–19, 2012. [9](#)
- [AHSS12b] Roberto Andreani, Gabriel Haeser, María Laura Schuverdt e Paulo JS Silva. Two new weak constraint qualifications and applications. *SIAM Journal on Optimization*, 22(3):1109–1135, 2012. [9](#), [10](#)
- [AMRS16] Roberto Andreani, José Mario Martínez, Alberto Ramos e Paulo JS Silva. A cone-continuity constraint qualification and algorithmic consequences. *SIAM Journal on Optimization*, 26(1):96–110, 2016. [10](#), [12](#), [50](#)
- [AMS05a] R Andreani, JM Martínez e ML Schuverdt. The cpld condition of qi and wei implies the quasinormality qualification. *J. Optim. Theory Appl*, 125:473–485, 2005. [49](#)
- [AMS05b] R Andreani, JM Martínez e ML Schuverdt. On the relation between constant positive linear dependence condition and quasinormality constraint qualification. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 125(2):473–483, 2005. [9](#)
- [AMS10] Roberto Andreani, José Mario Martínez e Benar Fux Svaiter. A new sequential optimality condition for constrained optimization and algorithmic consequences. *SIAM Journal on Optimization*, 20(6):3533–3554, 2010. [70](#)
- [Beg50] Edward G Begle. A fixed point theorem. *Annals of Mathematics*, páginas 544–550, 1950. [38](#)
- [Ber99] Dimitri P Bertsekas. *Nonlinear programming*. Athena scientific Belmont, 1999. [6](#), [9](#), [14](#)
- [BM14] Ernesto G Birgin e José Mario Martínez. *Practical augmented Lagrangian methods for constrained optimization*. SIAM, 2014. [9](#), [16](#), [17](#), [63](#), [64](#)
- [BP16] Giancarlo Bigi e Mauro Passacantando. Gap functions for quasi-equilibria. *Journal of Global Optimization*, 66(4):791–810, 2016. [29](#)

- [BSS13] Mokhtar S Bazaraa, Hanif D Sherali e Chitharanjan M Shetty. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. John Wiley & Sons, 2013. 7
- [BZZ06] Michele Breton, Georges Zaccour e Mehdi Zahaf. A game-theoretic formulation of joint implementation of environmental projects. *European Journal of Operational Research*, 168(1):221–239, 2006. 40
- [Deb52] Gerard Debreu. A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38(10):886–893, 1952. 1
- [DFFH14] Axel Dreves, Francisco Facchinei, Andreas Fischer e Markus Herrich. A new error bound result for generalized nash equilibrium problems and its algorithmic application. *Computational Optimization and Applications*, 59(1-2):63–84, 2014. 36, 37
- [DFKS11] Axel Dreves, Francisco Facchinei, Christian Kanzow e Simone Sagratella. On the solution of the kkt conditions of generalized nash equilibrium problems. *SIAM Journal on Optimization*, 21(3):1082–1108, 2011. 36, 37
- [DG17] Axel Dreves e Matthias Gerds. A generalized nash equilibrium approach for optimal control problems of autonomous cars. 07 2017. 38
- [DJS13] Dominik Dorsch, H Th Jongen e Vladimir Shikhman. On structure and computation of generalized nash equilibria. *SIAM Journal on Optimization*, 23(1):452–474, 2013. 44
- [Dre12] Axel Dreves. Globally convergent algorithms for the solution of generalized nash equilibrium problems. 2012. 32, 86
- [Dre16a] Axel Dreves. Improved error bound and a hybrid method for generalized nash equilibrium problems. *Computational Optimization and Applications*, 65(2):431–448, 2016. 36
- [Dre16b] Axel Dreves. Uniqueness for quasi-variational inequalities. *Set-Valued and Variational Analysis*, 24(2):285–297, 2016. 38
- [Dre17] Axel Dreves. Computing all solutions of linear generalized nash equilibrium problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, 85(2):207–221, 2017. 24
- [DSM16] Axel Dreves e Nathan Sudermann-Merx. Solving linear generalized nash equilibrium problems numerically. *Optimization Methods and Software*, 31(5):1036–1063, 2016. 24, 38
- [Dut13] Christophe Dutang. Existence theorems for generalized nash equilibrium problems: an analysis of assumptions. 2013. 38
- [DvHKF13] Axel Dreves, Anna von Heusinger, Christian Kanzow e Masao Fukushima. A globalized newton method for the computation of normalized nash equilibria. *Journal of Global Optimization*, páginas 1–14, 2013. 32
- [ESS16] Nélide Echebest, María Daniela Sánchez e María Laura Schuverdt. Convergence results of an augmented lagrangian method using the exponential penalty function. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 168(1):92–108, 2016. 73
- [FFH14] Francisco Facchinei, Andreas Fischer e Markus Herrich. An lp-newton method: nonsmooth equations, kkt systems, and nonisolated solutions. *Mathematical Programming*, 146(1-2):1–36, 2014. 37, 82

- [FFK98] Francisco Facchinei, Andreas Fischer e Christian Kanzow. Regularity properties of a semismooth reformulation of variational inequalities. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3):850–869, 1998. [85](#), [86](#), [87](#)
- [FFP07] Francisco Facchinei, Andreas Fischer e Veronica Piccialli. On generalized nash games and variational inequalities. *Operations Research Letters*, 35(2):159–164, 2007. [28](#), [38](#)
- [FFP09] Francisco Facchinei, Andreas Fischer e Veronica Piccialli. Generalized nash equilibrium problems and newton methods. *Mathematical Programming*, 117(1):163–194, 2009. [36](#), [37](#)
- [FHS16] Andreas Fischer, Markus Herrich, Alexey F Izmailov e Mikhail V Solodov. A globally convergent lp-newton method. *SIAM Journal on Optimization*, 26(4):2012–2033, 2016. [82](#), [83](#)
- [FHS14] Andreas Fischer, Markus Herrich e Klaus Schönefeld. Generalized nash equilibrium problems-recent advances and challenges. *Pesquisa Operacional*, 34(3):521–558, 2014. [1](#), [38](#), [39](#)
- [FK10a] Francisco Facchinei e Christian Kanzow. Generalized nash equilibrium problems. *Annals of Operations Research*, 175(1):177–211, 2010. [1](#)
- [FK10b] Francisco Facchinei e Christian Kanzow. Penalty methods for the solution of generalized nash equilibrium problems. *SIAM Journal on Optimization*, 20(5):2228–2253, 2010. [32](#), [33](#), [34](#), [45](#)
- [FL11] Francisco Facchinei e Lorenzo Lampariello. Partial penalization for the solution of generalized nash equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*, 50(1):39–57, 2011. [32](#), [34](#)
- [FP06] Francisco Facchinei e Jong-Shi Pang. Exact penalty functions for generalized nash problems. Em *Large-scale nonlinear optimization*, páginas 115–126. Springer, 2006. [32](#), [33](#)
- [FPS11] Francisco Facchinei, Veronica Piccialli e Marco Sciandrone. Decomposition algorithms for generalized potential games. *Computational Optimization and Applications*, 50(2):237–262, 2011. [25](#), [38](#)
- [Fuk11] Masao Fukushima. Restricted generalized nash equilibria and controlled penalty algorithm. *Computational Management Science*, 8(3):201–218, 2011. [32](#), [33](#), [45](#)
- [Gli52] Irving L Glicksberg. A further generalization of the kakutani fixed theorem, with application to nash equilibrium points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(1):170–174, 1952. [21](#), [22](#)
- [GT71] FJ Gould e Jon W Tolle. A necessary and sufficient qualification for constrained optimization. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 20(2):164–172, 1971. [8](#)
- [Gui69] Monique Guignard. Generalized kuhn–tucker conditions for mathematical programming problems in a banach space. *SIAM Journal on Control*, 7(2):232–241, 1969. [8](#)
- [Hae16] Gabriel Haeser. *Condições de otimalidade de primeira e segunda ordem em otimização não linear*. SBMAC, 2016. [10](#), [11](#), [46](#)
- [Hes69] Magnus R Hestenes. Multiplier and gradient methods. *Journal of optimization theory and applications*, 4(5):303–320, 1969. [14](#)

- [HWW12] Jian Hou, Zong-Chuan Wen e Zhu Wen. A variational inequality method for computing a normalized equilibrium in the generalized nash game. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1):60, 2012. [28](#)
- [HZQX12] Deren Han, Hongchao Zhang, Gang Qian e Lingling Xu. An improved two-step method for solving generalized nash equilibrium problems. *European Journal of Operational Research*, 216(3):613–623, 2012. [28](#)
- [IS14a] A IZMAILOV e M SOLODOV. Otimização vol. 2: Condições de otimizabilidade, métodos computacionais, 2014. [13](#), [14](#)
- [IS14b] Alexey F Izmailov e Mikhail V Solodov. On error bounds and newton-type methods for generalized nash equilibrium problems. *Computational Optimization and Applications*, 59(1-2):201–218, 2014. [36](#), [37](#)
- [Jan84] Robert Janin. Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming. *Sensitivity, Stability and Parametric Analysis*, páginas 110–126, 1984. [9](#)
- [JQ95] HY Jiang e LQ Qi. Local uniqueness and convergence of iterative methods for nonsmooth variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 196(1):314–331, 1995. [83](#), [84](#)
- [K⁺41] Shizuo Kakutani et al. A generalization of brouwer’s fixed point theorem. 1941. [38](#)
- [Kan16] Christian Kanzow. On the multiplier-penalty-approach for quasi-variational inequalities. *Mathematical Programming*, 160(1-2):33–63, 2016. [2](#), [45](#), [64](#), [79](#), [80](#)
- [KF10] Katsunori Kubota e Masao Fukushima. Gap function approach to the generalized nash equilibrium problem. *Journal of optimization theory and applications*, 144(3):511–531, 2010. [32](#)
- [Kon16] IV Konnov. Shares allocation methods for generalized game problems with joint constraints. *Set-Valued and Variational Analysis*, 24(3):499–516, 2016. [29](#)
- [KS16] Christian Kanzow e Daniel Steck. Augmented lagrangian methods for the solution of generalized nash equilibrium problems. *SIAM Journal on Optimization*, 26(4):2034–2058, 2016. [2](#), [45](#), [48](#), [49](#), [50](#), [63](#), [66](#), [68](#)
- [LL13] Peiyu Li e Guihua Lin. Solving a class of generalized nash equilibrium problems. *J. Math. Res. Appl*, 33(3):372–378, 2013. [38](#)
- [MF67] Olvi L Mangasarian e Stanley Fromovitz. The fritz john necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 17(1):37–47, 1967. [9](#)
- [MS95] José Mario Martinez e Sandra Augusta Santos. Métodos computacionais de otimização. *Colóquio Brasileiro de Matemática, Apostilas*, 20, 1995. [14](#)
- [MS03] Joseé Mario Martínez e Benar Fux Svaiter. A practical optimality condition without constraint qualifications for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 118(1):117–133, 2003. [10](#)
- [MS11] Leonid Minchenko e Sergey Stakhovski. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. *Optimization*, 60(4):429–440, 2011. [9](#)
- [MSY12] Luiz Carlos Matioli, Wilfredo Sosa e Jinyun Yuan. A numerical algorithm for finding solutions of a generalized nash equilibrium problem. *Computational Optimization and Applications*, 52(1):281, 2012. [29](#)

- [N⁺50] John F Nash et al. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences*, 36(1):48–49, 1950. 1, 20
- [Nas51] John Nash. Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, páginas 286–295, 1951. 20, 21
- [NFS16] Anna Nagurney, Emilio Alvarez Flores e Ceren Soylu. A generalized nash equilibrium network model for post-disaster humanitarian relief. *Transportation research part E: logistics and transportation review*, 95:1–18, 2016. 38
- [NI55] Hukukane Nikaidô e Kazuo Isoda. Note on non-cooperative convex game. *Pacific Journal of Mathematics*, 5(5):807–815, 1955. 29
- [NMFDS16] Mostafa Nasri, Luiz Carlos Matioli, Euda Mara Da Silva Ferreira e Adilson Da Silveira. Implementation of augmented lagrangian methods for equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 168(3):971–991, 2016. 80, 83
- [Par15] Sehie Park. Existence theorems for generalized nash equilibrium problems. *Bangmod Int. J. Math. Comp. Sci. l (l)*. <http://bangmod-jmcs.kmutt.ac.th>, 2015. 38
- [PF05] Jong-Shi Pang e Masao Fukushima. Quasi-variational inequalities, generalized nash equilibria, and multi-leader-follower games. *Computational Management Science*, 2(1):21–56, 2005. 32, 33, 45
- [Pow67] Michael JD Powell. "A method for non-linear constraints in minimization problems". UKAEA, 1967. 14
- [QLZ07] Biao Qu, Jing Li e Zhifeng Zhao. A hybrid method for the generalized nash equilibria. *International Journal of Nonlinear Science*, 4(2):135–140, 2007. 32
- [QW00] Liqun Qi e Zengxin Wei. On the constant positive linear dependence condition and its application to sqp methods. *SIAM Journal on Optimization*, 10(4):963–981, 2000. 9
- [QZ13] Biao Qu e Jing Zhao. Methods for solving generalized nash equilibrium. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 2013. 32
- [Roc74] R Tyrrell Rockafellar. Augmented lagrange multiplier functions and duality in non-convex programming. *SIAM Journal on Control*, 12(2):268–285, 1974. 14
- [RW09] R Tyrrell Rockafellar e Roger J-B Wets. *Variational analysis*, volume 317. Springer Science & Business Media, 2009. 8, 43
- [SM16] Nathan Georg Sudermann-Merx. Linear generalized nash equilibrium problems. 2016. 38
- [Sol10] Mikhail V Solodov. Constraint qualifications. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, 2010. 10
- [SSM16] Oliver Stein e Nathan Sudermann-Merx. The cone condition and nonsmoothness in linear generalized nash games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 170(2):687–709, 2016. 24
- [SVN⁺13] Jean Jacques Strodiot, Thi Thu Van Nguyen et al. A new class of hybrid extragradient algorithms for solving quasi-equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*, 56(2):373–397, 2013. 29
- [vHK09] Anna von Heusinger e Christian Kanzow. Optimization reformulations of the generalized nash equilibrium problem using nikaido-isoda-type functions. *Computational Optimization and Applications*, 43(3):353–377, 2009. 30, 31, 32

- [VNM07] John Von Neumann e Oskar Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 2007. [1](#)
- [VSNV17] NTT Van, JJ Strodiot, VH Nguyen e PT Vuong. An extragradient-type method for solving nonmonotone quasi-equilibrium problems. *Optimization*, páginas 1–14, 2017. [29](#)
- [YZZ11] Yanhong Yuan, Hongwei Zhang e L.W. Zhang. A penalty method for generalized nash equilibrium problems. 8:51–65, 02 2011. [32](#), [33](#), [86](#), [87](#)