**O uso do estimador residual no refinamento
adaptativo de malhas em elementos finitos**

Marco Alexandre Claudino

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, Março de 2015

O uso do estimador residual no refinamento adaptativo de malhas em elementos finitos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 26/03/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos - IME-USP
- Prof. Dr. Ernani Vitillo Volpe - EP-USP

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela saúde, pela coragem e pela fé que sempre me guiou frente aos momentos mais complicados da vida.

A minha esposa, Stéfany, pelo carinho, atenção e paciência tidos comigo desde o início. Seu apoio e incentivo nos momentos mais difíceis desta jornada foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

Aos meus pais, Marco e Oneide, e minha irmã, Cristiane, pelo apoio e incentivo constantes.

Ao professor Nelson Kuhl por toda paciência e atenção, além dos valorosos conselhos dados durante as reuniões de iniciação científica que se tornaram um trabalho de conclusão de curso e posteriormente evoluíram para o mestrado que se encerra com a conclusão desta dissertação.

Aos amigos Willian Hans Corrêa (79), Lucas Reis e Eli Enrico pela companhia e apoio durante a jornada acadêmica. Em especial, ao *brother* Guilherme Salomão pela amizade e companheirismo, além do auxílio nas disciplinas de análise.

Aos professores Alexandre Roma e Pedro Peixoto pelos valorosos conselhos, sugestões e orientações durante o período em que fui estagiário PAE.

Aos professores Luis Carlos de Castro Santos e Ernani Vitillo Volpe por aceitarem participar da comissão avaliadora e pelas valorosas sugestões dadas para a melhoria deste trabalho.

Aos professores Claudio Possani, Pierluigi Benevieri, Ricardo Freire, Salvador Zanata e Saulo Maciel, cujos conhecimentos transmitidos em aula foram muito importantes para o meu desenvolvimento acadêmico e me ajudaram a entender um pouco mais do vasto universo que consiste a matemática (e suas aplicações).

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

"If something is obviously not impossible
Then must be a way to doing it".

Sir Nicholas Winton

Resumo

Claudino, M.A. **O uso do estimador residual no refinamento adaptativo de malhas em elementos finitos**. 2015. 82 f. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Na obtenção de aproximações numéricas para Equações Diferenciais Parciais Elípticas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) alguns problemas apresentam valores maiores para o erro somente em algumas determinadas regiões do domínio como, por exemplo, regiões onde existam singularidades na solução contínua do problema. Uma possível alternativa para reduzir o erro cometido nestas regiões é aumentar o número de elementos nos trechos onde o erro cometido foi considerado grande. A questão principal é como identificar essas regiões, dado que a solução do problema contínuo é desconhecida.

Neste trabalho iremos apresentar a chamada estimativa residual, que fornece um estimador do erro cometido na aproximação utilizando apenas os valores conhecidos dos contornos e a aproximação obtida sobre uma dada partição de elementos. Vamos discutir a relação entre a estimativa residual e o erro cometido na aproximação, além de utilizar as estimativas na construção de um algoritmo adaptativo para as malhas em estudo.

Utilizando o *software* FreeFem++ serão obtidas aproximações para a Equação de Poisson e para o sistema de equações associado à Elasticidade Linear e por meio do estimador residual será analisado o erro cometido nas aproximações e a necessidade do refinamento adaptativo das malhas.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Estimativas residuais, Refinamento adaptativo de malhas.

Abstract

Claudino, M.A. **The use of the residual estimation in adaptive mesh refinement of finite element**. 2015. 82 f. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

In obtaining numerical approximations for solutions to Elliptic Partial Differential Equations using the Finite Element Method (FEM) one sees that some problems have higher values for the error only in certain domain regions such as, for example, regions where the solution of the continuous problem is singular. A possible alternative to reduce the error in these regions is to increase the number of elements in the partitions where the error was considered large. The main issue is how to identify these regions, since the solution of the continuous problem is unknown.

In this work we present the so-called residual estimate, which provides an error estimation approach which uses only the known values on the contours and the obtained approximation on a given discretization. We will discuss the relationship between the residual estimate and the error, and how to use the estimate for adaptively refining the mesh.

Solutions for the Poisson equation and the Linear elasticity system of equations, and the residual estimates for the analysis of mesh refinement will be computed using the FreeFem++ software.

Keywords: Finite Element Method, Residual estimates, adaptive mesh refinement.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Organização do Trabalho	2
2 Conceitos, resultados preliminares e obtenção das aproximações	5
2.1 Ferramentas de análise funcional	5
2.2 Formulação Equivalente	9
2.3 Problemas de valor de contorno	9
2.4 Método de Ritz-Galerkin	10
2.4.1 Partições do domínio	11
2.4.2 Funções de forma e funções teste	13
2.4.3 Operador de quasi-interpolação	14
2.4.4 Função de salto (<i>jump</i>)	14
2.4.5 Construção das aproximações	15
2.4.6 Estimativas na aproximação	17
2.5 FreeFem++	18
2.5.1 Como funciona	18
2.5.2 Outros comandos	19
2.6 Refinamento das malhas de estudo	19
2.6.1 Particionamento uniforme	19
2.6.2 Particionamento orientado por funções indicadoras	20
3 Problema de Poisson	23
3.1 Formulação fraca	23
3.2 Estimativa residual	25
3.3 Simulações Numéricas	29
3.3.1 Problema com solução conhecida	29
3.3.2 Problema com singularidade	34
4 Elasticidade Linear	39
4.1 As equações da elasticidade linear	39
4.2 Formulação variacional (fraca) do problema: Minimizando a energia associada	40

4.3	Resultados auxiliares	41
4.4	Estimativa residual	41
4.5	Simulações Numéricas	43
5	Conclusões	47
A	Construção do estimador residual para o problema de Elasticidade Linear	49
A.1	Construção do estimador	49
B	Códigos utilizados	51
C	Figuras	63
C.1	Problema de Poisson	63
C.1.1	Problema 3.16	63
C.1.2	Problema 3.17	71
C.2	Elasticidade Linear	75

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de malhas de um domínio Ω . A figura a) mostra uma malha admissível enquanto que a figura b) mostra uma malha não admissível, pois possui um elemento cujos vértices estão situados nos pontos médios das arestas de outros elementos. . . .	11
2.2	Exemplos dos conjuntos apresentados na definição (2.4.5).	12
2.3	As figuras (a) e (b) mostram elementos lineares em $\mathbb{R}^2$ e a figura (c) apresenta o elemento linear em $\mathbb{R}^3$	13
2.4	Elemento triangular de três nós	15
2.5	Montagem da matriz global de rigidez e do vetor global de forças. [22]	16
2.6	Aplicações do refinamento por <i>splitting</i>	20
2.7	Malha inicial e estimativa do erro cometido. As cores mais escuras indicam um maior erro cometido nestas regiões.	20
2.8	Malha obtida pelo refinamento indicado pelo estimador de erro	21
3.1	Solução exata do problema (3.16).	30
3.2	Resultados obtidos sobre os elementos triangulares.	30
3.3	Resultados obtidos na primeira iteração do refinamento uniforme.	31
3.4	Resultados obtidos na primeira iteração do refinamento adaptativo.	31
3.5	Resultados obtidos na quarta iteração do refinamento uniforme.	32
3.6	Resultados obtidos na quarta iteração do refinamento adaptativo.	32
3.7	Comportamento do estimador de erro nas iterações de refinamento adaptativo. . . .	33
3.8	Dominio do problema	34
3.9	Resultados obtidos sobre os elementos triangulares no problema 3.17.	35
3.10	Resultados da primeira iteração do refinamento uniforme.	36
3.11	Resultados da primeira iteração do refinamento adaptativo.	36
3.12	Relação entre o erro cometido e o número de nós da malha.	37
3.13	Comparativo das aproximações obtidas na quarta iteração de refinamento.	38
4.1	Malha inicial.	43
4.2	Resultados obtidos na malha inicial.	43
4.3	Deformação sofrida pela chapa (fator de escala 10^6).	44
4.4	Aproximação obtida na terceira iteração do refinamento uniforme.	44
4.5	Aproximação obtida na terceira iteração do refinamento adaptativo.	45
4.6	Relação entre o erro cometido e o número de nós da malha.	45
4.7	Comparação dos resíduos obtidos na terceira iteração de refinamento.	46

C.1	Aproximação obtida com elementos lineares - Fig (3.2a)	63
C.2	Residuo obtido na aproximação - Fig (3.2b)	64
C.3	Aproximação obtida na primeira iteração do refinamento uniforme - Fig (3.3a)	64
C.4	Residuo obtido na aproximação da malha gerada pela primeira iteração do refina- mento uniforme - Fig (3.3b)	65
C.5	Aproximação obtida na primeira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.4a) . . .	65
C.6	Residuo obtido na aproximação da malha gerada pela primeira iteração do refina- mento adaptativo - Fig (3.4b)	66
C.7	Aproximação obtida na quarta iteração do refinamento uniforme - Fig (3.5a)	66
C.8	Residuo obtido na aproximação da malha gerada pela quarta iteração do refinamento uniforme - Fig (3.5b)	67
C.9	Aproximação obtida na quarta iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.6a)	67
C.10	Residuo obtido na aproximação da malha gerada pela quarta iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.6b)	68
C.11	Estimador residual obtido na primeira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.7a)	68
C.12	Estimador residual obtido na segunda iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.7b)	69
C.13	Estimador residual obtido na terceira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.7c)	69
C.14	Estimador residual obtido na quarta iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.7d)	70
C.15	Aproximação inicial para o problema 3.17 - Fig (3.9a)	71
C.16	Estimador residual obtido para a aproximação inicial - Fig (3.9b)	71
C.17	Aproximação obtida na primeira iteração do refinamento uniforme - Fig (3.10a) . . .	72
C.18	Estimador residual obtido na primeira iteração do refinamento uniforme - Fig (3.10b)	72
C.19	Aproximação obtida na primeira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.11a) . .	73
C.20	Estimador residual obtido na primeira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.11b)	73
C.21	Aproximação obtida na quarta iteração do refinamento uniforme - Fig (3.12a)	74
C.22	Estimador residual obtido na quarta iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.12b)	74
C.23	Aproximação inicial para o problema da placa com furo - Fig (4.2a)	75
C.24	Estimador residual obtido na aproximação inicial - Fig (4.2b)	76
C.25	Deslocamento obtido na terceira iteração de refinamento uniforme - Fig (4.4a)	77
C.26	Estimador residual obtido na terceira iteração de refinamento uniforme - Fig (4.6a) .	78
C.27	Estimador residual obtido na terceira iteração de refinamento adaptativo - Fig (4.6b)	79

Lista de Tabelas

- 3.1 Comparação entre o refinamento uniforme e o refinamento adaptativo. 32
- 3.2 Comparação entre o refinamento uniforme e o refinamento adaptativo na quarta
iteração de refinamento. 33
- 3.3 Comparação entre o número de nós de cada um dos refinamentos para obter um erro
L2 de mesma ordem. 34
- 3.4 Comparação entre o refinamento uniforme e o refinamento adaptativo na primeira
iteração de refinamento. 36
- 3.5 Erro obtido avaliado pelo estimador residual 37
- 4.1 Erro estimado pelo estimador residual em cada uma das iterações de refinamento. . . 44

Capítulo 1

Introdução

Na simulação numérica de problemas físicos, como dinâmica dos fluidos ou elasticidade, é comum observarmos que a qualidade das aproximações numéricas diminui de forma considerável em regiões contendo singularidades locais ou cuja solução varia de maneira brusca. Para aumentar a qualidade da aproximação nestas regiões é necessário inserir um maior número de pontos na malha de estudo ao redor destas regiões, com o objetivo de reduzir o erro cometido pela aproximação. A principal questão é saber quais trechos do domínio possuem um erro maior, dado que a solução exata é desconhecida.

Inspirado nesta questão, nosso objetivo será construir um estimador de erro utilizando somente a aproximação obtida pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e as informações do contorno. De posse deste estimador, vamos utilizar um algoritmo para particionar o domínio do problema de acordo com os valores fornecidos pelo estimador, ou seja, quanto maior a estimativa do erro cometido numa certa região, maior a quantidade de pontos a serem distribuídos (e consequentemente, maior o número de elementos) nesta região.

Utilizando um estimador de erro *a posteriori* e um algoritmo de refinamento de malha, a discretização por meio do refinamento adaptativo possui a seguinte estrutura:

- Dada uma discretização inicial e uma tolerância ε :
 - I) Obtenha a aproximação pelo MEF;
 - II) Estime o erro cometido na aproximação;
 - III) Em cada um dos elementos:
 - a) Se o erro for maior que a tolerância ε , refine o elemento;
 - b) Se o erro estimado em todos os elementos for menor que a tolerância ε , encerre.
 - IV) Se algum elemento foi refinado volte para o item [I].

O enfoque deste trabalho será a construção de um estimador para o erro cometido na aproximação que seja computacionalmente barato em relação ao custo da obtenção de uma nova aproximação e ao mesmo tempo suficientemente robusto para identificar as regiões onde o erro foi maior. Para isto utilizamos o chamado estimador residual, desenvolvido inicialmente nos trabalhos [1] e [2], de L. Demkowicz, J.T. Oden, e T. Strouboulis e nos trabalhos [3] e [4], de R.E. Bank e A. Weiser. Como este estimador é construído de maneira simples a partir das aproximações obtidas e das informações do problema, muitas vezes ele é utilizado como parâmetro de referência para a validação de outros estimadores de erro.

O estudo de estimativas de erro *a posteriori* aplicadas ao MEF iniciou-se com a construção de estimativas para problemas de valor de contorno unidimensionais, a partir do trabalho [5], de 1978. Em seguida diversas técnicas foram desenvolvidas com a finalidade de estimar o erro cometido na aproximação utilizando a norma induzida pela própria formulação fraca¹. O desenvolvimento dessas

¹A norma associada a forma bilinear da formulação fraca do problema é chamada norma da energia. O assunto será apresentado em detalhes no Capítulo (2).

técnicas serviu como base para a construção dos métodos de medida e controle dos erros obtidos nas aproximações. Durante o período de 1978 até 1984 foram publicados diversos trabalhos importantes na área, dentre os quais os trabalhos [6] e [7] destacam-se por serem obras de referência no estudo de técnicas de estimativa de erro a posteriori.

Outra ideia bastante utilizada na obtenção de estimadores a posteriori é por meio da resolução de sistemas auxiliares em cada uma das partições do domínio, apresentada inicialmente no trabalho [8], de P. Ladevèze and D. Leguillon.

Existem ainda diversos métodos envolvendo extrapolação que podem ser utilizados para obter estimativas globais para o erro, tanto com o refinamento da malha de elementos (*h-extrapolation*) como com o aumento na ordem das aproximações construídas sobre os elementos (*p-extrapolation*). No trabalho [10] é construído um estimador bastante eficiente para problemas envolvendo elasticidade linear utilizando sequências de aproximações obtidas por meio de *p*-extrapolações.

Para um estudo mais aprofundado sobre as estimativas de erro *a posteriori*, a obra [11] é uma referência clássica no assunto e condensa as diversas técnicas que podem ser utilizadas na estimação do erro, assim como a obra [13]. O trabalho [12] apresenta também testes comparativos e diferentes aplicações.

Neste trabalho buscamos condensar as principais ideias das obras [13], [14], [15] e [16]. A obra [17], apesar de ser voltada para escoamentos compressíveis em dinâmica dos fluidos, apresenta de forma bastante direta a construção do estimador residual para alguns problemas modelos, dentre eles a Equação de Poisson. As simulações computacionais foram realizadas utilizando o *software* FreeFem++, que tem como objetivo a construção de aproximações numéricas para a solução de equações diferenciais através do MEF. A referência [18] apresenta diversos modelos de códigos, alguns deles aos quais utilizamos como base para a construção das simulações apresentadas aqui.

1.1 Objetivos

O presente trabalho possui como objetivos principais

- Construir o estimador de erro a residual desenvolvido em [1], [2], [3] e [4], baseado no resíduo entre a aproximação pelo Método dos Elementos Finitos e o problema contínuo;
- Discutir a relação do estimador obtido com o erro cometido na aproximação;
- Apresentar uma possível estratégia para o uso de malhas adaptativas para a redução do erro cometido na aproximação utilizando o estimador residual como função indicadora para o refinamento da malha de elementos utilizada;
- Análise e comparação dos resultados obtidos na aplicação dos refinamentos uniforme e adaptativo em problemas elípticos como a Equação de Poisson e o modelo de Elasticidade Linear

1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo (2) apresentamos alguns dos conceitos associados ao MEF e, em particular, iremos considerar o método de Ritz-Galerkin. Serão abordadas também as ideias principais de duas estratégias para refinamento das malhas: o refinamento uniforme e o refinamento orientado, além da apresentação do funcionamento do *software* FreeFEM++, utilizado na construção das aproximações utilizadas nos capítulos seguintes.

O Capítulo (3) apresenta a formulação do método para o Problema de Poisson, a construção do estimador residual para este problema e a implementação do estimador e do esquema adaptativo aplicado à um problema cuja solução exata é conhecida e um problema contendo uma singularidade no contorno.

No capítulo (4) generalizamos a teoria aplicada para a solução numérica de problemas envolvendo elasticidade linear e aplicamos o esquema adaptativo utilizando a estimativa residual no problema da placa com furo.

Por fim, o Capítulo (5) encerra o trabalho apresentando um resumo das conclusões obtidas. No Apêndice (A) apresentamos a demonstração da construção do estimador residual para o problema de elasticidade linear, tratado no Capítulo (4) e no Apêndice (B) encontram-se os códigos utilizados nas simulações. Para facilitar a interpretação dos resultados gráficos optamos por utilizar as figuras do texto em escala reduzida e fornecer no Apêndice (C) as figuras em sua escala original.

Capítulo 2

Conceitos, resultados preliminares e obtenção das aproximações

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados teóricos associados à formulação variacional (formulação fraca) das EDP's elípticas e a construção do método de Ritz-Galerkin para a obtenção das aproximações pelo Método dos Elementos Finitos. Numa abordagem mais abstrata, a solução da formulação variacional é vista como a minimização de um dado funcional em um determinado espaço de funções. Desta forma, utilizando técnicas de análise funcional, é possível concluir a existência e a unicidade de soluções em problemas de valor de contorno para equações diferenciais.

Iniciaremos o capítulo apresentando alguns resultados de análise funcional que irão garantir a existência e a unicidade de soluções para os problemas em estudo. Em seguida apresentamos o método de Ritz-Galerkin e discutiremos algumas condições e propriedades das malhas utilizadas e das aproximações obtidas, além de demonstrar o resultado que garante a convergência do método. Apresentaremos uma pequena introdução ao software livre *FreeFem++*, utilizado para obter as aproximações que serão apresentadas nos capítulos seguintes. Encerramos o capítulo apresentando duas possíveis estratégias para o refinamento da malha em estudo: o refinamento uniforme e o refinamento orientado pelo estimador de erro.

As referências [15], [16] e [19] apresentam em detalhes a parte teórica do Método dos Elementos Finitos. Já a referência [18] apresenta o funcionamento completo do *FreeFem++* e discute ambas as técnicas de refinamento da malha de elementos.

2.1 Ferramentas de análise funcional

Nesta seção apresentaremos uma série de definições e resultados que serão utilizados com frequência durante o texto.

Definição 2.1.1. Dado $1 \leq p < \infty$, uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é dita localmente p -integrável, $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se, para cada $x \in \Omega$ existe uma vizinhança aberta Ω' de x tal que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ e $f \in L^p(\Omega')$.

Definição 2.1.2 (Notação multi-índice). Dados $m \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, denotamos a derivada parcial de ordem α como

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.1)$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m$

Definição 2.1.3. Dada $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, dizemos que $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ quando v se anula na fronteira de Ω e é uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ no interior de Ω .

Como exemplo, considere $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ e a função $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Pode-se mostrar que esta função é de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ em todo o espaço¹ e, pela definição da função, temos que $v|_{\partial\Omega} = 0$. Logo $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Para motivarmos a definição a seguir, considere a função real $f(x) = |x|$ definida no intervalo $[-1, 1]$. Apesar da função f não ser diferenciável no ponto $x = 0$ gostaríamos de construir um operador semelhante a derivação, no sentido que se a função for de classe $\mathcal{C}^1$ a aplicação do operador obtido seja equivalente ao cálculo da derivada da função. Considerando uma função $v \in \mathcal{C}_0^\infty([-1, 1])$ arbitrária, podemos multiplicar f por v' e integrar sobre o domínio de definição, de modo que

$$\int_{-1}^1 f(x)v'(x)dx = \underbrace{f(x)v(x)\Big|_{-1}^1}_{=0} - \int_{-1}^1 f'(x)v(x)dx = - \int_{-1}^1 f'(x)v(x)dx$$

Apesar da função f não ser derivável em todo ponto do intervalo, sua derivada está bem definida para todo ponto diferente da origem. Considerando a função

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

temos que

$$\int_{\Omega} f(x)v'(x)dx = - \int_{\Omega} g(x)v(x)dx$$

e g é dita uma **derivada fraca** da função f . Uma vez que a fórmula de Green funciona de forma análoga à integração por partes, a definição a seguir pode ser vista como uma generalização deste resultado para funções em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1.4 (Derivadas fracas). Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, não vazio, $f, g \in L_{loc}^1(\Omega)$. Se

$$\int_{\Omega} f(x)D^\alpha v(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x)v(x)dx \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty \quad (2.2)$$

então g é chamada de *derivada fraca de ordem α* da função f .

A definição da derivada fraca de uma função pode ser vista como uma generalização da integral por partes para equações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: dado um intervalo real $[a, b]$ e $v \in \mathcal{C}_0^\infty([a, b])$, se existe uma função g tal que $g = f'$ em quase todo ponto do intervalo $[a, b]$ (ou seja, $g(x) \neq f'(x)$ somente em um conjunto enumerável de pontos) temos que

$$\int_{\Omega} f(x)v'(x)dx = \underbrace{f(x)v(x)\Big|_a^b}_{=0} - \int_{\Omega} f'(x)v(x)dx = - \int_{\Omega} g(x)v(x)dx$$

Logo, dizemos que g é uma derivada fraca da função f .

Um questionamento natural neste ponto é sobre a unicidade da derivada fraca de uma função. Para demonstrarmos este resultado, considere o seguinte Lema:

Lema 2.1.5. Sejam Ω um aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Se

$$\int_{\Omega} uv = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \quad (2.3)$$

então $u = 0$ em Ω , a menos de um conjunto de medida nula.

De posse deste resultado, vamos a seguinte proposição

Proposição 2.1.6 (Unicidade da derivada fraca). Sejam Ω um conjunto aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$ e $f \in L_{loc}^1(\Omega)$. Se f possui derivada fraca então a derivada fraca é única, a menos de um conjunto de medida nula.

¹Veja em [15], exemplo 1.2.2 - pág 27

Demonstração. Por absurdo, suponha que f admita duas derivadas fracas de uma certa ordem α , digamos g_1 e g_2 . Pela definição das derivadas fracas

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x) D^{\alpha} v(x) dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_1(x) v(x) dx \\ \int_{\Omega} f(x) D^{\alpha} v(x) dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_2(x) v(x) dx\end{aligned}$$

Subtraindo as equações, temos que

$$\int_{\Omega} (g_1(x) - g_2(x)) v(x) dx = 0$$

onde, pelo Lema (2.1.5), temos que $g_1 = g_2$ a menos de um conjunto de medida nula. $\square$

Apresentaremos a seguir um espaço de funções muito importante que será utilizado com frequência na construção das aproximações pelo Método dos Elementos Finitos:

Definição 2.1.7 (Espaços H^k). Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \forall \alpha : |\alpha| \leq k, \|D^{\alpha} f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} (D^{\alpha} f)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \quad (2.4)$$

ou seja, o espaço das funções $L^2(\Omega)$ tal que todas as derivadas fracas até a ordem k estão em $L^2(\Omega)$.

Considerando o produto interno em H^k dado por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| < k} \langle D^{\alpha} u \cdot D^{\alpha} v \rangle_{L^2} = \sum_{|\alpha| < k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u \cdot D^{\alpha} v \quad (2.5)$$

podemos definir a norma neste espaço como

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \left(\sum_{|\alpha| < k} \|D^{\alpha} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

Quando não houver risco de ambiguidade em relação ao domínio Ω , vamos considerar $\|u\|_{H^k(\Omega)} = \|u\|_k$.

Proposição 2.1.8. *Nas condições da definição anterior, temos que o espaço $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.*

Teorema 2.1.9 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com fronteira seccionalmente diferenciável e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então, vale a desigualdade*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.7)$$

onde a constante C depende apenas do domínio Ω .

Teorema 2.1.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com fronteira seccionalmente diferenciável e $k \in \mathbb{N}$. Então $C^\infty(\Omega) \cap H^k(\Omega)$ é denso em $H^k(\Omega)$.*

A demonstração destes resultados utiliza algumas definições que não serão apresentadas aqui, mas podem ser encontradas em [15], [16], [19], [20] ou diversas outras referências sobre espaços de Sobolev.

Definição 2.1.11 (Forma bilinear). Dado V um espaço vetorial, dizemos que um operador a é uma **forma bilinear** se, fixado $u \in V$, temos que $v \mapsto a(u, v)$ e $v \mapsto a(v, u)$ são operadores lineares em V . Além disso, se $a(u, v) = a(v, u)$, a forma bilinear é dita **simétrica**.

Definição 2.1.12 (Continuidade e coercividade). Uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ num espaço normado V é dita **limitada** ou **continua** se $\exists C < \infty$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V \quad (2.8)$$

e é dita **coerciva** em $W \subset V$ se $\exists \alpha > 0$ tal que

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|^2 \quad \forall w \in W \quad (2.9)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma de V .

Proposição 2.1.13. *Seja H um espaço de Hilbert, W um subespaço fechado de H e $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear simétrica contínua em H e coerciva em W . Então, $(W, a(\cdot, \cdot))$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Da coercividade da forma bilinear a temos que se $w \in W$ e $a(w, w) = 0$, então $w = 0$. Logo, $a(\cdot, \cdot)$ define um produto interno em W . Seja $\|w\|_E = \sqrt{a(w, w)}$ e considere w_n uma sequência de Cauchy em $(W, \|\cdot\|_E)$. Pela coercividade w_n é uma sequência de Cauchy em $(H, \|\cdot\|_H)$. Como H é completo, $\exists w \in H : w_n \rightarrow w$. Sendo W fechado em H , temos que $w \in W$. Mas

$$\|w - w_n\|_E \leq \sqrt{C} \|w - w_n\|_H$$

pois $a(\cdot, \cdot)$ é contínua. Logo, $w_n \rightarrow w$ na norma $\|\cdot\|_E$ e, portanto $(W, \|\cdot\|_E)$ é completo. $\square$

Teorema 2.1.14. *Suponha que sejam válidas as seguintes condições*

1. $(H, (\cdot, \cdot))$ é um espaço de Hilbert
2. V é um subespaço fechado de H
3. $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear simétrica, contínua em H e coerciva em V .

Então, dado um funcional linear $f \in V'$, existe uma única $u \in V$ tal que:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (2.10)$$

Demonstração. Como $a(\cdot, \cdot)$ é um produto interno em V e $(V, a(\cdot, \cdot))$ é um espaço de Hilbert, o resultado segue da aplicação do Teorema da Representação de Riesz². $\square$

Os problemas apresentados neste trabalho apresentam suas formas bilineares todas simétricas porém, os resultados podem ser aplicados aos casos em que a forma bilinear a não é simétrica por meio do seguinte resultado:

Teorema 2.1.15 (Lax-Milgram). *Dados um espaço de Hilbert $(V, (\cdot, \cdot))$, uma forma bilinear contínua e coerciva $a(\cdot, \cdot)$ e $f \in V'$, existe um único $u \in V$ satisfazendo a relação (2.10).*

A demonstração deste resultado é feita reescrevendo-se o problema como um problema de ponto fixo e aplicando-se o teorema do ponto fixo de Banach. Para o leitor interessado, a demonstração encontra-se completa em [15].

²O teorema da representação de Riesz afirma que, dado um espaço de Hilbert V e um funcional $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, existe um único $u \in V$ tal que para todo $v \in V$ temos que $f(v) = \langle u, v \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em V . A demonstração deste resultado pode ser obtida em [19] ou outras referências de análise funcional.

2.2 Formulação Equivalente

O problema anterior pode ser analisado numa formulação equivalente, através do estudo do ponto de mínimo do funcional associado ao problema, como mostra o teorema a seguir:

Teorema 2.2.1 (Formulação Equivalente). *Seja V um espaço vetorial normado, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica positiva (isto é, $a(v, v) > 0, \forall v \in V, v \neq 0$), limitada e coerciva. Considere ainda $f \in V'$. Então, o funcional dado por*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle \quad (2.11)$$

atinge seu mínimo em $u \in V$ se, e somente se

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V \quad (2.12)$$

Demonstração. Para todo $u, v \in V$ e $t \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - \langle f, u + tv \rangle \\ &= J(u) + t[a(u, v) - \langle f, v \rangle] + \frac{t^2}{2}a(v, v) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Se $u \in V$ satisfaz (2.12), então para $t = 1$ temos que

$$J(u + tv) = J(u) + \underbrace{\frac{1}{2}a(v, v)}_{>0} > J(u), \quad \forall v \in V : v \neq 0 \quad (2.14)$$

concluindo assim que u é ponto de mínimo. Por outro lado, se J admite valor mínimo em u , para cada $v \in V$, a derivada do operador $t \mapsto J(u + tv)$ deve ser nula em $t = 0$. Por (2.13), a derivada deste operador ser nula equivale a condição (2.12), concluindo assim o resultado desejado. $\square$

2.3 Problemas de valor de contorno

Dado um domínio Ω , para que uma EDP elíptica possua solução única é necessária a prescrição de informações sobre a solução no contorno do domínio. A definição a seguir apresenta duas possíveis condições³ e apresenta a notação que será utilizada em cada um destes trechos.

Definição 2.3.1 (Condições de Fronteira). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e Γ a sua fronteira. Denotaremos o trecho da fronteira onde é conhecida a solução do problema de valor de contorno por Γ_D e o trecho da fronteira onde é conhecida a derivada normal da solução por Γ_N .*

A nomenclatura destes conjuntos está diretamente ligada com a descrição utilizada nos problemas de valor de contorno: o conjunto Γ_D remete as condições de Dirichlet enquanto o conjunto Γ_N refere-se as condições de Neumann associada ao problema.

Para os trechos onde são conhecidas as condições de Neumann do problema será necessário o uso de uma função capaz de restringir a solução na fronteira de maneira limitada. O resultado a seguir garante a existência de um operador com esta propriedade.

Teorema 2.3.2 (Teorema do traço). *Seja Ω um conjunto poligonal limitado. Então, existe um operador linear limitado*

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) : \|\gamma(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|u\|_1$$

tal que $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$ para toda $u \in C^1(\bar{\Omega})$

³Neste trabalho não iremos trabalhar com as chamadas condições de Robin, que consistem em um trecho da fronteira onde é conhecida uma combinação da solução e da derivada normal.

Este resultado garante dada uma função $u \in H^1$, sua restrição a fronteira será pelo menos uma função contida em $L^2(\Gamma)$. A demonstração deste resultado é bastante técnica e encontra-se em [16].

Encerramos esta seção definindo os espaços de funções sobre os quais serão construídos os espaços de dimensão finita para a construção das aproximações:

Definição 2.3.3. Nas condições das definições (2.1.7) e (2.3.1), denotaremos por $H_0^1(\Omega)$ e $H_D^1(\Omega)$ as funções em $H^1(\Omega)$ que se anulam em Γ e em Γ_D , respectivamente. Denotamos também o conjunto $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ composto pelas funções ψ em $L^2(\Gamma)$ tais que $\psi = \phi|_\Gamma$ para alguma $\phi \in H^1(\Omega)$.

2.4 Método de Ritz-Galerkin

A idéia do método de Ritz-Galerkin é substituir o espaço $H_D^1(\Omega)$ por um espaço de dimensão finita $V_h \subset H_D^1(\Omega)$ associado a um determinado conjunto de pontos do domínio, de forma a obter uma aproximação $u_h \in V_h$ tal que:

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v \in V_h \quad (2.15)$$

onde o subscrito h remete ao espaçamento que da malha que será relacionada com o espaço de dimensão finita.

Uma importante propriedade do Método de Ritz-Galerkin é o resultado a seguir:

Lema 2.4.1 (Ortogonalidade de Galerkin). *Sejam $u \in H_D^1(\Omega)$ e $u_h \in V_h$ as soluções de (2.10) e (2.15), respectivamente. Então:*

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad (2.16)$$

para toda função $v_h \in V_h$.

Demonstração. Como $V_h \subset H_D^1(\Omega)$ podemos escolher $v = v_h$ em (2.10) e subtrair (2.15), de forma que

$$\begin{aligned} a(u, v_h) - a(u_h, v_h) &= \langle f, v_h \rangle - \langle f, v_h \rangle = 0 \\ \Rightarrow a(u - u_h, v_h) &= 0 \end{aligned}$$

□

Este resultado indica que o erro cometido na aproximação pelo método de Galerkin é ortogonal ao subespaço V_h em relação ao produto interno induzido pelo operador a . Ou seja, a solução obtida pela método de Galerkin é exatamente a projeção ortogonal da solução exata no subespaço V_h .

O espaço de dimensão finita $V_h \subset H_D^1(\Omega)$ é obtido através do particionamento do domínio em um número finito de elementos que apresentam as mesmas propriedades do domínio completo. Pela definição de Ciarlet [21]:

Definição 2.4.2 (Elemento Finito). Seja

- i) $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e limitado, com interior não vazio e fronteira suave por partes (chamado *elemento*).
- ii) $\mathcal{P}$ um espaço de dimensão finita de funções definidas sobre K (*espaço das funções de forma ou shape-functions*).
- iii) $\mathfrak{N}_K$ uma base para $\mathcal{P}$ (chamado *conjunto das variáveis nodais*).

Então $(K, \mathcal{P}, \mathfrak{N}_K)$ é chamado um elemento finito.

Em geral, utilizam-se triângulos e quadriláteros para problemas em $\mathbb{R}^2$ e tetraedros e paralelepípedos para problemas em $\mathbb{R}^3$. Já as funções de forma podem ser definidas por polinômios ou funções trigonométricas e relacionam-se com o conjunto de variáveis nodais pela propriedade de que cada função de forma é não nula em apenas um dos nós.

2.4.1 Partições do domínio

Considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto poligonal e uma discretização de Ω composta por triângulos, vamos a seguinte definição:

Definição 2.4.3 (Partição admissível). Uma partição (ou discretização) $\mathcal{T}$ do domínio Ω é dita *admissível* se

- i) $\bigcup_{K \in \mathcal{T}} K = \Omega \cup \Gamma$.
- ii) Se $K, K' \in \mathcal{T} : K \cap K' = x, x \in \bar{\Omega}$, então x é um vértice de K e de K'
- iii) Dados dois elementos K_1 e K_2 se a intersecção entre eles for maior que um ponto, então $K_1 \cap K_2$ é uma aresta (ou uma face) em comum entre K_1 e K_2

As condições acima garantem que todos os pontos da malha sejam nós dos elementos, de forma que nenhuma aresta possui um nó que não esteja em seus extremos. A Figura (2.1) contém exemplos de malhas admissíveis e malhas não-admissíveis.

Figura 2.1: Exemplos de malhas de um domínio Ω . A figura a) mostra uma malha admissível enquanto que a figura b) mostra uma malha não admissível, pois possui um elemento cujos vértices estão situados nos pontos médios das arestas de outros elementos.

Definição 2.4.4. Para cada partição admissível $\mathcal{T}$, definimos os seguintes conjuntos

- $N_{\mathcal{T}}$: Conjunto dos vértices de todos os elementos da partição.
- $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$: Conjunto das arestas (ou faces) de todos os elementos da partição.
- $N_{\mathcal{T}, \Gamma_D}$: Vértices contidos no contorno Γ_D .
- $N_{\mathcal{T}, \Gamma_N}$: Vértices contidos no contorno Γ_N .
- $N_{\mathcal{T}, \Omega}$: Vértices contidos no interior do domínio.
- $\mathcal{E}_{\mathcal{T}, \Gamma_D}$: Arestas (ou faces) contidas no contorno Γ_D .
- $\mathcal{E}_{\mathcal{T}, \Gamma_N}$: Arestas (ou faces) contidas no contorno Γ_N .
- $\mathcal{E}_{\mathcal{T}, \Omega}$: Arestas (ou faces) contidas no interior do domínio.

Definição 2.4.5. Dada uma partição $\mathcal{T}$, sejam K , E e x um elemento, uma aresta e um ponto da partição, respectivamente. Definimos então os conjuntos

- $\omega_K = \bigcup_{\mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'} \neq \emptyset} K'$: Conjunto dos elementos que são vizinhos de K .
- $\tilde{\omega}_K = \bigcup_{N_K \cap N_{K'} \neq \emptyset} K'$: Conjunto dos elementos que possuem pontos em comum com o elemento K .
- $\omega_E = \bigcup_{E \in E_{K'}} K'$: Conjunto dos elementos que possuem a aresta E .
- $\tilde{\omega}_E = \bigcup_{N_E \cap N_{K'} \neq \emptyset} K'$: Conjunto dos elementos que são vizinhos aos elementos que possuem a aresta E .
- $\omega_x = \bigcup_{x \in N_{K'}} K'$: Conjunto dos elementos que possuem o ponto x como vértice.

Figura 2.2: Exemplos dos conjuntos apresentados na definição (2.4.5).

Considerando uma partição admissível do domínio, gostaríamos de definir uma medida para a malha utilizada através de algum parâmetro relacionado a discretização.

Definição 2.4.6 (Partição *shape-regular*). Considere $\mathcal{T}$ uma partição do domínio, K um elemento da partição, h_K o diâmetro do elemento e ρ_K o diâmetro da maior bola contida em K . Dado $\delta \in \mathbb{R}$, dizemos que uma partição é *de forma regular* (*shape-regular*) se

$$C_K = \frac{h_K}{\rho_K} < \delta$$

para todo $K \in \mathcal{T}$. Definimos o *parâmetro de refinamento da partição* $\mathcal{T}$ como

$$C_{\mathcal{T}} = \max_{K \in \mathcal{T}} \frac{h_K}{\rho_K}$$

2.4.2 Funções de forma e funções teste

Definição 2.4.7 (Conjunto $\mathbb{P}^k$). Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos $\mathbb{P}^k$ como o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a k .

Definição 2.4.8 (Conjunto $S_D^{k,0}(\mathcal{T})$). Seja $\mathcal{T}$ uma partição por elementos do domínio. Associamos à essa partição o espaço $S^k(\mathcal{T})$, composto pelas funções polinomiais de ordem menor ou igual a k no interior de cada um dos elementos da partição e contínua no bordo dos elementos, isto é

$$\psi \in S^k(\mathcal{T}) \Rightarrow \psi|_K \in \mathbb{P}^k, \text{ para todo } K \in \mathcal{T} \text{ e } \psi \in \mathcal{C}(\bar{K})$$

Para obtermos as aproximações do método de Ritz-Galerkin, consideramos o espaço

$$S_D^{k,0}(\mathcal{T}) = S^k(\mathcal{T}) \cap H_D^1(\Omega) = \left\{ \psi \in S^k(\mathcal{T}) : \psi = 0 \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (2.17)$$

Desta forma, substituindo V_h por $S_D^{1,0}(\mathcal{T})$ em (2.15) obtemos como aproximação a projeção da solução $u \in H_D^1(\Omega)$ sobre o espaço de dimensão finita dado pela partição $\mathcal{T}$ do domínio Ω .

Para cada um dos elementos $K \in \mathcal{T}$, a restrição da solução sobre K será feita utilizando a chamada *Base de Lagrange* em cada um dos pontos que compõem o elemento. Dado $x \in N_{\mathcal{T}}$, a *função de forma nodal* associada a este ponto consiste em um determinado polinômio λ_x , definido sobre os elementos $K : x \in N_K$ e tal que $\lambda_x = 1$ no vértice x e $\lambda_x = 0$ nos outros vértices. Desta forma, dada uma função $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, a interpolação de f sobre os vértices de K pode ser escrita como uma combinação linear das funções de forma:

$$J_{\mathcal{T}}f = \sum_{i=0}^{N-1} f(n_i) \lambda_{n_i}(x)$$

onde N é a quantidade de vértices do elemento K . Na literatura de elementos finitos, a aproximação obtida sobre o domínio Ω é chamada de *função teste*.

Figura 2.3: As figuras (a) e (b) mostram elementos lineares em $\mathbb{R}^2$ e a figura (c) apresenta o elemento linear em $\mathbb{R}^3$.

Vamos apresentar a construção das funções de forma para alguns elementos:

- a) Considere um triângulo K com vértices n_0, n_1 e n_2 numerados no sentido anti-horário, como descrito na Figura (2.3a). Para cada um dos vértices $n_i, i = 0, 1, 2$ a função de forma associada ao vértice é dada por

$$\lambda_{n_i}(x) = \frac{\det(x - n_{i+1}, n_{i+2} - n_{i+1})}{\det(n_i - n_{i+1}, n_{i+2} - n_{i+1})}, \quad i = 0, 1, 2$$

onde os índices utilizados em λ_{n_i} são considerados em módulo 3.

- b) Utilizando um paralelogramo K com vértices n_0, n_1, n_2 e n_3 numerados no sentido anti-horário, como descrito na Figura (2.3b), a função de forma associada a cada um dos vértices é dada

por

$$\lambda_{n_i}(x) = \frac{\det(x - n_{i+2}, n_{i+3} - n_{i+2})}{\det(n_i - n_{i+2}, n_{i+3} - n_{i+2})} \cdot \frac{\det(x - n_{i+2}, n_{i+1} - n_{i+2})}{\det(n_i - n_{i+2}, n_{i+1} - n_{i+2})}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

onde os índices utilizados em λ_{n_i} são considerados em módulo 4.

- c) No caso do tetrahedro K com vértices n_0, n_1, n_2 e n_3 enumerados como na Figura (2.3c) a função de forma associada a cada um dos vértices é dada por

$$\lambda_{n_i}(x) = \frac{\det(x - n_{i+1}, n_{i+2} - n_{i+1}, n_{i+3} - n_{i+1})}{\det(n_i - n_{i+1}, n_{i+2} - n_{i+1}, n_{i+3} - n_{i+1})}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

onde os índices utilizados em λ_{n_i} são de módulo 4.

2.4.3 Operador de quasi-interpolação

Dado que o operador padrão de interpolação $J_{\mathcal{T}}$ apresentado na seção anterior só faz sentido quando aplicado em funções contínuas e o espaço H^1 admite funções descontínuas, será necessário a utilização de um operador de interpolação mais fraco para a construção do estimador, conhecido como *operador de quasi-interpolação* ou operador de Clément.

Definição 2.4.9 (Operador de Clément). Considere o operador $I_{\mathcal{T}} : L^1(\Omega) \rightarrow S_D^{1,0}(\mathcal{T})$ definido por

$$I_{\mathcal{T}}v = \sum_{x \in N_{\mathcal{T}, \Omega} \cup N_{\mathcal{T}, \Gamma_N}} \lambda_x \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} v \quad (2.18)$$

onde $|\omega_x|$ representa a área (em $\mathbb{R}^2$) ou o volume (em $\mathbb{R}^3$) do conjunto ω_x .

Apesar deste operador não interpolar de fato a função $v \in L^1(\Omega)$ nos pontos $x \in N_{\mathcal{T}}$, sua principal característica é que o erro cometido na interpolação depende somente da malha utilizada na região onde o operador foi aplicado, como mostra o resultado a seguir:

Proposição 2.4.10. *Dada $\mathcal{T}$ uma partição admissível do domínio, o operador de Clément satisfaz as estimativas*

$$\begin{aligned} \|v - I_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(K)} &\leq \alpha h_K \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \\ \|v - I_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(\partial K)} &\leq \beta \sqrt{h_E} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

para toda $v \in H_D^1$ e para todos os elementos $K \in \mathcal{T}$, onde h_K representa o diâmetro do elemento K , h_E representa o diâmetro da aresta (ou face) E e as constantes α e β dependem apenas do parâmetro de refinamento de malha $C_{\mathcal{T}}$.

Apesar de ser bastante simples, a demonstração deste resultado envolve alguns resultados que não serão apresentados aqui, como o Lema de Bramble-Hilbert. A demonstração deste resultado encontra-se em [16], pág 84.

2.4.4 Função de salto (*jump*)

Na avaliação da estimativa residual sobre cada um dos elementos do domínio será necessário avaliar a diferença que ocorre entre os gradientes de dois elementos adjacentes. Para isto, vamos a seguinte definição:

Definição 2.4.11 (Função de Salto). Dados dois elementos adjacentes K e K' conectados pela aresta $E \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}, \Omega}$, consideramos o salto ocorrido em E como:

$$\mathbb{J}_E(\vec{n}_E \cdot \nabla u_{\mathcal{T}})(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\nabla u_{\mathcal{T}} \Big|_K (x + \epsilon \vec{n}_E) - \nabla u_{\mathcal{T}} \Big|_{K'} (x - \epsilon \vec{n}_E) \right] \quad (2.20)$$

onde $\epsilon \in \mathbb{R}$, $x \in E$ e $\vec{n}_E$ é o vetor normal exterior a aresta E . Como todos os elementos possuem os vértices enumerados no sentido anti-horário, a normal exterior ao elemento K' na aresta E equivale a normal exterior ao elemento K na aresta E com o sinal negativo.

No caso onde forem utilizados elementos triangulares e as funções de forma forem polinômios de primeiro grau, o gradiente em cada um dos elementos adjacentes será constante sobre cada um dos elementos. Neste caso, a função de salto é simplificada como

$$\mathbb{J}_E(\vec{n}_E \cdot \nabla u_\tau)(x) = \frac{1}{2} \left(\nabla u_\tau^K - \nabla u_\tau^{K'} \right) \cdot \vec{n}_E \quad (2.21)$$

onde ∇u_τ^K e $\nabla u_\tau^{K'}$ são os gradientes nos elementos K e K' que possuem a aresta E em comum.

2.4.5 Construção das aproximações

Considerando o elemento triangular com três nós apresentado na Figura (2.4), observamos que em cada um dos elementos os nós do elemento são posicionados nas extremidades do triângulo e denotados por (x_i^e, y_i^e) , com $i = 1, 2, 3$.

Figura 2.4: Elemento triangular de três nós

Para um dado elemento, a aproximação no interior deste elemento é da forma

$$u^e(x, y) = \alpha_0^e + \alpha_1^e x + \alpha_2^e y = \mathbf{N}^e(x, y) \alpha^e \quad (2.22)$$

onde α^e é o vetor com as aproximações nodais e

$$\mathbf{N}^e(x, y) = \frac{1}{2A^e} \underbrace{\begin{bmatrix} (x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e) & (y_{23}^e) & (x_{32}^e) \\ (x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e) & (y_{31}^e) & (x_{13}^e) \\ (x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e) & (y_{12}^e) & (x_{21}^e) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^e} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

são as funções de forma para cada um dos nós dos elementos (ou seja, são as funções de interpolação definidas sobre o elemento e) e A^e representa a área do elemento em estudo.

Considerando as aproximações no interior do elemento escritas como

$$u^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) (\alpha^e)^T \Rightarrow \nabla u^e(x, y) = \mathbf{B}^e(x, y) (\alpha^e)^T$$

$$w^e(x, y) = \mathbf{N}^e(x, y) (\mathbf{w}^e)^T \Rightarrow \nabla w^e(x, y) = \mathbf{B}^e(x, y) (\mathbf{w}^e)^T$$

onde o gradiente das funções teste é dado por:

$$\nabla u^e(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^e(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u^e(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} \alpha_1^e + \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \alpha_2^e + \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \alpha_3^e \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \alpha_1^e + \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \alpha_2^e + \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \alpha_3^e \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$= \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_{23}^e & y_{31}^e & y_{12}^e \\ x_{32}^e & x_{13}^e & x_{21}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \\ \alpha_3^e \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

com $x_{i,j}^e = x_i^e - x_j^e$ e $y_{i,j}^e = y_i^e - y_j^e$, da continuidade entre dois elementos adjacentes temos que

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{w}^e)^T [\mathbf{K}^e \alpha^e - \mathbf{f}^e] = 0$$

onde

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e & \mathbf{K}_{13}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e & \mathbf{K}_{23}^e \\ \mathbf{K}_{31}^e & \mathbf{K}_{32}^e & \mathbf{K}_{33}^e \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{f}^e = \underbrace{\int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T f}_{f_{\Omega}} - \underbrace{\int_{\Gamma_N^e} (\mathbf{N}^e)^T g}_{f_{\Gamma_N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \\ \mathbf{f}_3^e \end{bmatrix}$$

Como cada nó pode pertencer a mais de um elemento é necessário que as matrizes locais sejam reunidas num sistema global, somando as contribuições nodais em cada um dos elementos. Isto é feito somando-se as entradas associadas a cada um dos elementos, como observamos na Figura (2.5).

Figura 2.5: Montagem da matriz global de rigidez e do vetor global de forças. [22]

2.4.6 Estimativas na aproximação

Sendo u a solução do problema variacional e u_h a solução do problema aproximado, o resultado a seguir fornece uma estimativa do erro cometido nesta aproximação.⁴

Teorema 2.4.12 (Teorema de Céa). *Seja u solução de (2.10) e suponha que sejam válidas as condições do teorema (2.1.15). Temos então que a solução u_h do problema discreto satisfaz a seguinte relação:*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \quad (2.27)$$

onde C é a constante de continuidade e α a constante de coercividade do operador bilinear em V .

Demonstração. Utilizando a relação (2.16), a coercividade e a continuidade do operador $a(\cdot, \cdot)$, temos que para todo $v \in V_h$

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \quad (\text{Coercividade}) \\ &= a(u - u_h, u - v) + \underbrace{a(u - u_h, v - u_h)}_{=0} \quad (\text{como } v \in V_h, \text{ então } v - u_h \in V_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) \\ &\leq C \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V \quad (\text{Continuidade}) \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - v\|_V$$

e, pela arbitrariedade de v em V_h concluímos a demonstração. $\square$

No caso em que o operador $a(\cdot, \cdot)$ é simétrico temos que o erro cometido na aproximação pelo método de Galerkin é ortogonal ao subespaço V_h em relação ao produto interno induzido pelo operador a . Ou seja, a solução obtida pelo método de Galerkin é a projeção ortogonal da solução exata no subespaço V_h . Neste caso, a desigualdade de Céa (2.27) pode ser substituída por

$$\|u - u_h\|_E = \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_E$$

e a aproximação u_h é a aproximação ótima de u no subespaço V_h , com a norma $\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}$.

Utilizando a desigualdade de Céa, temos o seguinte resultado de convergência:

Corolário 2.4.13 (Convergência do Método de Galerkin). *Suponha que sejam válidas as condições do teorema (2.4.12). Considere então $V_{h_1} \subset V_{h_2} \subset V_{h_3} \subset \dots$ uma sequência de subespaços de V com a propriedade:*

$$\overline{\bigcup_{i \geq 1} V_{h_i}} = V \quad (2.28)$$

Então o Método de Galerkin converge

$$\|u - u_{h_i}\|_V \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty \quad (2.29)$$

Demonstração. Pelo argumento de densidade (2.28), podemos encontrar uma sequência $v_i \in V_{h_i}$, $i \geq 1$ tal que

$$\|u - v_i\|_V \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty$$

Aplicando (2.27) temos que

$$\|u - u_{h_i}\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - v_i\|_V$$

e, portanto, concluímos a convergência do método. $\square$

⁴Apesar de algumas referências apresentarem esse resultado como Lema de Céa preferimos apresentá-lo como um teorema pela sua importância no contexto deste trabalho.

2.5 FreeFem++

Nesta seção iremos realizar uma breve apresentação do *software* FreeFem++ utilizado para obter as aproximações apresentadas neste trabalho, de modo que o leitor seja capaz de compreender os códigos utilizados nas simulações (que se encontram no Apêndice (B)). A referência [18] apresenta a descrição de todas as funcionalidades do programa de maneira muito mais completa, inclusive contendo diversos códigos modelos que serviram como base para os resultados deste trabalho.

O FreeFem++ é um *software* livre utilizado para resolver EDPs utilizando o Método dos Elementos Finitos (FEM, em inglês) com o uso de diversos tipos de elementos e malhas para problemas em 2D ou em 3D.

Podemos destacar como principais características do programa a simplicidade do gerador de malhas incluso no programa, a facilidade na construção do espaço de funções (é feita com apenas um comando), a grande variedade de espaços de funções disponíveis (como polinômios lineares, quadráticos, Raviart-Thomas, etc) e a maneira eficiente e direta com que são feitas a implementação da formulação fraca associada ao MEF e a resolução do sistema linear associado (que permite utilizar diversos *solvers*: Gradientes Conjugados, GMRes, etc). Além disso, o programa dispõe de um visualizador gráfico bastante simples, que auxilia na visualização dos resultados obtidos.

A escolha do FreeFem++ para a implementação das simulações contidas neste trabalho ocorreu devido a facilidade na construção e obtenção das aproximações por elementos finitos para os problemas aqui apresentados. No entanto, o programa mostrou-se capaz de analisar problemas bastante complexos.

2.5.1 Como funciona

Dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) e uma EDP em sua formulação integral, o esquema geral para o funcionamento do programa utiliza os seguintes componentes:

1. Descrição da(s) fronteira(s) do domínio Ω

O comando `border` Fronteira (t=a,b){ $x = x(t), y = y(t)$ } define a curva (x,y) parametrizada pelo parâmetro t variando de a até b , com $a, b \in \mathbb{R}$. Por exemplo, considerando Ω sendo o círculo unitário temos que a fronteira do círculo é obtida por

```
border F(t=0,2*pi){x = cos(t); y = sin(t); }
```

2. Discretização do domínio Ω em um conjunto de elementos triangulares $\mathcal{T}$

O comando `mesh` cria uma variável que as informações de uma determinada discretização do domínio por elementos finitos. A construção da discretização é feita pelo comando `buildmesh` (Fronteira(n)), onde n indica a quantidade de nós que estarão na fronteira. Por exemplo, para construirmos uma malha $\mathcal{T}_h$ contendo 60 pontos na fronteira utilizamos o comando

```
mesh Th = buildmesh (F(50));
```

3. Geração do espaço de funções de forma definida sobre os elementos triangulares:

Para a geração do espaço de funções é utilizado o comando `fespace`(Th,Tipo), onde $\mathcal{T}_h$ é a discretização do domínio em elementos triangulares e Tipo indica o tipo de elemento que será utilizado. Por exemplo, para aproximações lineares (polinômios de primeira ordem), utilizamos o comando

```
fespace Vh = (Th,P1);
```

4. Definição das funções do problema

No FreeFem++ funções são definidas utilizando o comando `func`. Para definirmos a função $f(x, y) = xy$ utilizamos


```
func f = x*y;
```

5. Implementação da formulação variacional e dos respectivos valores de contorno

Neste ponto serão necessárias três etapas:

- Integração numérica: A integração bidimensional sobre cada um dos elementos da discretização Th é feita utiliza-se o comando `int2d(Th)`. As derivadas de u em relação a x e em relação a y são descritas por `dx(u)` e `dy(u)`, respectivamente.
- Atribuição das condições de contorno: As condições de contorno são impostas por meio do comando `on(Fronteira,u=...)`.
- Solução do sistema linear: É obtida por meio do comando `solve(u,v)`.

Tomando como exemplo o problema de Poisson com $f(x, y) = xy$ e condições de contorno nulas, utilizaremos que a formulação fraca para este problema é dada por (3.3) e a resolução do problema é obtida com o comando

```
solve Poisson (u,v) = int2d(Th)dx(u)dx(v) + dy(u)dy(v) - int2d fv + on(F,u=0);
```

6. Visualização dos resultados obtidos

As aproximações obtidas são visualizadas por meio do comando `plot(Aprox, wait=1)`. O parâmetro `wait=1` é utilizado para que a aproximação se mantenha na tela até que seja pressionada alguma tecla. O capítulo 7 da referência [18] apresenta em detalhes todos os parâmetros que podem ser utilizados nesta função (alguns deles facilitam bastante a geração das imagens).

2.5.2 Outros comandos

Nas simulações realizadas foram utilizados também os comandos auxiliares

- `varf`: Funciona como uma função global do programa
- `intalldges(Th)`: Avalia um determinado operador em todas as arestas internas dos elementos da discretização Th .
- `adaptmesh(Th,h,...)`: Dada uma malha inicial Th , este comando faz o refinamento adaptativo da malha de acordo com uma função h previamente definida. Os parâmetros auxiliares são encontrados na seção 5.5 da referência [18], pág 115.

2.6 Refinamento das malhas de estudo

Nesta seção vamos analisar duas possíveis estratégias para o refinamento da malha utilizada na construção das aproximações por elementos finitos: as malhas obtidas por particionamento uniforme dos elementos (*splitting*) e as malhas refinadas por funções indicadoras de erro.

2.6.1 Particionamento uniforme

O refinamento uniforme (ou refinamento por *splitting*) é feito por meio da subdivisão de cada um dos elementos triangulares⁵ que compõem o domínio, de modo a gerar elementos menores com as mesmas propriedades geométricas do elemento original.

A principal vantagem deste refinamento é a simplicidade: cada triângulo pode ser dividido em outros 4 com a inserção dos novos nós nos pontos médios de cada aresta que compõem o elemento. Desta forma, todos os elementos serão admissíveis e as aproximações podem ser obtidas sobre a nova malha de elementos.

⁵A ideia é análoga para elementos quadriláteros ou, no caso no $\mathbb{R}^3$, prismas e tetraedros.

Figura 2.6: Aplicações do refinamento por *splitting*

A principal desvantagem deste esquema deve-se ao fato de que o refinamento uniforme insere novos nós em todo o domínio, inclusive em regiões onde o erro cometido na aproximação era suficientemente pequeno. Com isto, temos um aumento considerável no número de incógnitas do sistema linear a ser resolvido, de modo que o algoritmo irá utilizar um maior tempo computacional para obter as aproximações desejadas.

2.6.2 Particionamento orientado por funções indicadoras

Como alternativa ao particionamento uniforme, vamos construir uma estratégia de refinamento cujo objetivo é inserir novos nós somente nas regiões onde o erro cometido na aproximação foi considerado grande.

O primeiro desafio reside em como obter os erros cometidos nas aproximações, levando-se em conta que para problemas reais a solução exata do problema é desconhecida. A construção deste estimador será feita em detalhes mais adiante e, como exemplo, considere que utilizemos a malha descrita na Figura (2.2a) para a obtenção das aproximações pelo MEF. Utilizando os resultados obtidos, estimamos o erro cometido na aproximação conforme apresentado na Figura (2.2b).

Figura 2.7: Malha inicial e estimativa do erro cometido. As cores mais escuras indicam um maior erro cometido nestas regiões.

Observamos que a estimativa de erro não é uniforme em todo o domínio: as regiões onde o indicador apresentou valores maiores (cores entre azul escuro e vermelho) estão concentradas no centro e na região superior esquerda enquanto que o restante do domínio apresentou valores menores na estimativa do erro cometido. Ao invés de refinarmos todo o domínio por igual vamos reduzir

a área dos elementos conforme o valor obtido pelo estimador do erro: quanto maior a estimativa, maior a quantidade de partições a serem construídas na região em estudo.

Existem diversas técnicas de geração e refinamento de malha, cujos objetivos vão além do escopo deste trabalho. Em nossas simulações vamos considerar a estratégia sugerida em [18]: dado $x \in \Omega$ e uma discretização $\mathcal{T}_n$, seja $\eta_n(x)$ é o valor do indicador para o erro no ponto $x \in \mathcal{T}_n$, h_n o diâmetro do elemento ao qual o ponto x esteja contido, η^* é o produto da média dos erros cometidos nos elementos por uma constante⁶ e $f_n = \min(3, \max(1/3, \eta_n/\eta_n^*))$. Nestas condições, definimos o diâmetro do elemento onde esteja o ponto x na nova discretização $\mathcal{T}_{n+1}$, como

$$h_{n+1}(x) = \frac{h_n(x)}{f_n(\eta_K(x))} \quad (2.30)$$

A função f_n é utilizada para certificar-se de que a nova malha será de forma regular, evitando assim o surgimento de erros causados por problemas na geometria do domínio.

Utilizando a estratégia (2.30) na malha contida na Figura(2.2a), obtivemos a malha contida na Figura (2.3a).

Figura 2.8: Malha obtida pelo refinamento indicado pelo estimador de erro

Conforme esperado, podemos observar que a nova discretização apresentou um número maior de elementos nas regiões onde o estimador apontou valores maiores para os erros cometidos na aproximação. A nova estimativa de erro, apresentada na Figura (2.3b), mostra como as regiões de maior erro variam entre as discretizações.

⁶Em geral, a constante utilizada é suficientemente próxima de 1.0 [18], pág 238.

Capítulo 3

Problema de Poisson

Vamos introduzir o estudo da estimativa residual a partir do Problema de Poisson. Iniciamos o capítulo com a apresentação do problema, sua formulação fraca e a obtenção das aproximações pelo método de Ritz-Galerkin. Em seguida, construiremos a estimativa residual associada ao problema e apresentamos o resultado que relaciona a estimativa residual com o erro cometido pela aproximação. Por fim, vamos comparar as aproximações obtidas nas discretizações construídas por meio do refinamento uniforme e do refinamento adaptativo, ambos aplicados à um problema com solução conhecida e um problema que apresenta uma singularidade em seu contorno.

3.1 Formulação fraca

Considere o problema de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (3.1)$$

Vamos então introduzir a formulação fraca deste problema e discutir suas relações entre si.

Uma solução clássica de (3.1) é uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ que satisfaz a equação diferencial para todo ponto no interior do domínio e satisfaz a condição de contorno para todo ponto na fronteira do domínio. Vamos supor que $f \in L^2(\Omega)$, apesar de que esta condição não é suficiente para garantir a existência de uma solução clássica para o problema.

Para obtermos a formulação fraca associada ao problema, suponha que exista uma solução $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ do problema (3.1). Multiplicamos a equação diferencial do problema por uma função $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, a qual denominamos função de ponderação (ou função peso) e integramos o produto obtido sobre o domínio do problema, obtendo que

$$-\int_{\Omega} v \Delta u = -\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\nabla u) = \int_{\Omega} v f$$

Utilizando integração por partes na integral do lado esquerdo da equação acima, como $v = 0$ em Γ , temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} v f \quad (3.2)$$

Observe que a relação acima não utiliza o fato de que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ mas sim que $u \in H_0^1(\Omega)$. Desta forma, o problema de valor de contorno (3.1) é equivalente à:

Definição 3.1.1 (Formulação fraca do problema de Poisson homogêneo). Obter $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que¹:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad (3.3)$$

¹Pelo Teorema (2.1.10), temos que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ de modo que a relação 3.2 é válida para qualquer $v \in H_0^1$

para toda função $v \in H_0^1(\Omega)$.

Observe que a condição $f \in L^2(\Omega)$ é mais forte do que o necessário neste caso: é suficiente que f esteja no conjunto dual de $H_0^1(\Omega)$ dado que podemos interpretar a integral $\int_{\Omega} f(x)v(x)dx$ como o operador dual $\langle f, v \rangle$ entre $(H_0^1(\Omega))'$ e $H_0^1(\Omega)$.

Vamos mostrar agora que se u é solução da formulação fraca (3.6), então u é uma solução clássica do problema (3.1). Supondo $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ e que u tenha a condição adicional de regularidade $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, temos que

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)v = 0$$

para toda $v \in \mathcal{C}_0^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$. Portanto, pelo Lema (2.1.5) temos que $-\Delta u = f$ em Ω , ou seja, a equação diferencial (3.1) será satisfeita. Concluimos então que o problema de contorno (3.1) é formalmente equivalente a formulação fraca (3.3).

Considere $V = H_0^1(\Omega)$, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear definida por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

e $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional definido por

$$l(v) = \int_{\Omega} f v$$

Para a aplicação do Lema de Lax-Milgram é necessário que a forma bilinear seja contínua e coerciva, dado que a linearidade e a continuidade do funcional são imediatas. A continuidade da forma bilinear é obtida utilizando-se da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Por outro lado, a demonstração da coercividade é feita utilizando a desigualdade de Poincaré:

$$\begin{aligned} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (1 + C) \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (\text{Desig. Poincaré}) \\ &= (1 + C) a(w, w) \end{aligned}$$

Logo, a formulação variacional do problema (3.1) consiste em obter $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \quad (3.4)$$

e, pelo Lema de Lax-Milgram, temos que o problema possui uma única solução.

No caso mais geral, consideramos o problema onde são prescritas diferentes tipos de condições no contorno:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ \nabla u \cdot \vec{n} = g, & (x, y) \in \Gamma_N \\ u = 0, & (x, y) \in \Gamma_D \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário exterior a Γ_N . Neste caso, da integração por partes, temos que

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\nabla u) = \int_{\Gamma_N} g v - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

e a formulação fraca do problema é dada pelo seguinte problema:

Definição 3.1.2 (Formulação fraca do problema de Poisson com condições mistas.). Obter $u \in H_D^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v \quad (3.6)$$

para toda função $v \in H_D^1(\Omega)$.

Assim, considerando $V = H_D^1(\Omega)$, o problema é escrito na forma (2.10) com

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

e

$$l(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v$$

onde, sob as condições de que $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Gamma_N)$, temos que

$$\begin{aligned} l(v_1 + v_2) &= \int_{\Omega} f(v_1 + v_2) + \int_{\Gamma_N} g(v_1 + v_2) \\ &= \int_{\Omega} f v_1 + \int_{\Gamma_N} g v_1 + \int_{\Omega} f v_2 + \int_{\Gamma_N} g v_2 \\ &= l(v_1) + l(v_2) \text{ (Linearidade)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v \right| \leq \int_{\Omega} |f v| + \int_{\Gamma_N} |g v| \\ &\leq \|f\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \\ &\leq (\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}) \|v\|_{L^2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2} \leq C \|v\|_{H_D^1} \text{ (Continuidade)} \end{aligned}$$

podemos aplicar novamente o Lema de Lax-Milgram e concluir a existência e unicidade de solução do problema.

Dado que a forma bilinear associada ao problema satisfaz as hipóteses para existência e unicidade de solução do problema contínuo, vamos aplicar o Método de Ritz-Galerkin para obter uma solução aproximada para o problema. Considere $\mathcal{T}$ uma partição admissível do domínio contendo um conjunto $N_{\mathcal{T}}$ de vértices dos elementos e um conjunto de funções de forma definidas sobre as variáveis nodais.

Nestas condições, a formulação fraca do problema definido sobre esta partição é descrita como:

Definição 3.1.3 (Formulação Fraca para a partição $\mathcal{T}$). Obter $u_{\tau} \in S_D^{1,0}(\mathcal{T})$ é tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\tau} \cdot \nabla v_{\tau} = \int_{\Omega} f v_{\tau} + \int_{\Gamma_N} g v_{\tau} \quad (3.7)$$

para toda função $v_{\tau} \in S_D^{1,0}(\mathcal{T})$.

3.2 Estimativa residual

Dado que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ define um produto interno e uma norma em $H_D^1(\Omega)$, nosso objetivo será construir um estimador de erro η para a forma bilinear tal que

$$a(u - u_{\tau}, u - u_{\tau}) \leq \eta \|u - u_{\tau}\|_1$$

Utilizando a coercividade do operador $a(\cdot, \cdot)$ obtemos que

$$\|u - u_\tau\|_1^2 \leq Ca(u - u_\tau, u - u_\tau) \leq C\eta \|u - u_\tau\|_1$$

e, portanto

$$\|u - u_\tau\|_1 \leq C\eta$$

onde C é uma constante que depende apenas da partição $\mathcal{T}$.

Sendo u e u_τ as soluções dos problemas (3.6) e (3.7), respectivamente, observe que u e u_τ satisfazem a seguinte relação

$$a(u - u_\tau, v) = \int_{\Omega} \nabla(u - u_\tau) \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v - \int_{\Omega} \nabla u_\tau \cdot \nabla v \quad (3.8)$$

para toda $v \in H_D^1(\Omega)$. Desta forma, podemos definir o *resíduo obtido de u_τ* como

$$\mathcal{R}(u_\tau, v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v - \int_{\Omega} \nabla u_\tau \cdot \nabla v \quad (3.9)$$

O resultado a seguir relaciona o resíduo com o erro cometido pela aproximação, utilizando a norma de $H_D^1(\Omega)$:

Teorema 3.2.1 (Relação entre o resíduo e o erro). *O erro cometido na aproximação u_τ é limitado pela norma do resíduo no espaço dual de $H_D^1(\Omega)$.*

Demonstração. Inicialmente, observe que o resíduo $\mathcal{R}(u_\tau, v)$ é um elemento contido no espaço dual do conjunto $H_D^1(\Omega)$. Além disso, utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, temos que

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \|u\|_1 \leq \sup_{\substack{w \in H_D^1(\Omega) \\ \|w\|_1=1}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \leq \|u\|_1$$

para toda função $v \in H_D^1(\Omega)$. Isto implica que a forma bilinear

$$H_D^1(\Omega) \ni u, w \mapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w$$

define um isomorfismo de $H_D^1(\Omega)$ no seu espaço dual. As constantes multiplicativas dos termos a direita e a esquerda da desigualdade são relacionadas pela norma do isomorfismo e da sua inversa.

Da definição do resíduo e da desigualdade anterior, segue que

$$\sup_{\substack{w \in H_D^1(\Omega) \\ \|w\|_1=1}} \mathcal{R}(u_\tau, w) \leq \|u - u_\tau\|_1 \leq \sqrt{1+c^2} \sup_{\substack{w \in H_D^1(\Omega) \\ \|w\|_1=1}} \mathcal{R}(u_\tau, w)$$

Como o termo

$$\sup_{\substack{w \in H_D^1(\Omega) \\ \|w\|_1=1}} \left\{ \int_{\Omega} f w + \int_{\Gamma_N} g w - \int_{\Omega} \nabla u_\tau \cdot \nabla w \right\}$$

é equivalente a norma do resíduo no espaço dual, concluímos o resultado. $\square$

Nosso objetivo será construir uma estimativa para a norma do resíduo no espaço dual utilizando os dados da partição $\mathcal{T}$, as aproximações u_τ obtidas e as funções f e g .

Dado que a aproximação obtida é de classe $\mathcal{C}^2$ no interior dos elementos é possível aplicar o operador laplaciano sobre a aproximação u_τ e aplicar a integração por partes no último termo a direita do resíduo, de forma que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_\tau \cdot \nabla v &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \nabla u_\tau \cdot \nabla v \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \left(\int_K \Delta u_\tau v - \int_{\partial K} \vec{n}_K \cdot \nabla u_\tau v \right) \end{aligned}$$

Substituindo no resíduo, obtemos que

$$\mathcal{R}(u_\tau, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (f + \Delta u_\tau) v + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N}} \int_E (g - \vec{n}_E \cdot \nabla u_\tau) v - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tau, \Omega}} \int_E \mathbb{J}(\vec{n}_E \cdot \nabla u_\tau) v \quad (3.10)$$

onde $\mathbb{J}$ é a função de salto descrita em (2.20). Definimos o *resíduo interior* e o *resíduo do bordo* associado a cada elemento $K \in \mathcal{T}$ como

$$R_K(u_\tau) = f + \Delta u_\tau \quad (3.11)$$

e

$$R_E(u_\tau) = \begin{cases} -\mathbb{J}_E(\vec{n}_E \cdot \nabla u_\tau), & \text{se } E \in \mathcal{E}_{\tau, \Omega} \\ g - \vec{n}_E \cdot \nabla u_\tau, & \text{se } E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N} \\ 0, & \text{se } E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_D} \end{cases} \quad (3.12)$$

respectivamente. Desta forma, temos a chamada **representação L^2 do resíduo**:

$$\mathcal{R}(u_\tau, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R_K(u_\tau) v + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \int_E R_E(u_\tau) v \quad (3.13)$$

Pela definição do resíduo e pela ortogonalidade de Galerkin (2.16) temos que

$$\mathcal{R}(u_\tau, v_\tau) = \underbrace{a(u - u_\tau, v_\tau)}_{=0} = 0$$

de modo que podemos escrever

$$\mathcal{R}(u_\tau, v) = \mathcal{R}(u_\tau, v) - \underbrace{\mathcal{R}(u_\tau, v_\tau)}_{=0} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R_K(u_\tau)(v - v_\tau) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \int_E R_E(u_\tau)(v - v_\tau) \quad (3.14)$$

Fixada uma função $v \in H_D^1(\Omega)$, considere $v_\tau = I_\tau v$ a projeção de v pelo operador de *quasi*-interpolação (2.18). Da desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais e das estimativas do operador (2.19), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u_\tau, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R_K(u_\tau)(v - I_\tau v) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \int_E R_E(u_\tau)(v - I_\tau v) \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|R_K(u_\tau)\|_K \underbrace{\|v - I_\tau v\|_K}_{\leq \alpha h_K \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|R_E(u_\tau)\|_E \underbrace{\|v - I_\tau v\|_E}_{\leq \beta \sqrt{h_E} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)}} \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|R_K(u_\tau)\|_K \cdot \alpha h_K \|v\|_{1, \tilde{\omega}_K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|R_E(u_\tau)\|_E \cdot \beta \sqrt{h_E} \|v\|_{1, \tilde{\omega}_E} \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz para as somas, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u_\tau, v) \leq \max_{\alpha, \beta} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|R_K(u_\tau)\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} h_E \|R_E(u_\tau)\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} \|v\|_{1, \tilde{v}_K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|v\|_{1, \tilde{v}_E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da regularidade da malha $\mathcal{T}$, temos que

$$\left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} \|v\|_{1, \tilde{v}_K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|v\|_{1, \tilde{v}_E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq c \|v\|_1$$

onde c é uma constante que depende apenas da malha utilizada. Da coercividade da forma bilinear, concluímos que

$$\|u - u_\tau\|_1 \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|R_K(u_\tau)\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} h_E \|R_E(u_\tau)\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde C é uma constante que depende somente da malha em estudo. Logo, provamos o seguinte teorema:

Teorema 3.2.2 (Estimador de Erro Residual a Posteriori). *Sejam $u \in H_D^1(\Omega)$ e $u_\tau \in S_D^{1,0}(\mathcal{T})$ as soluções dos problemas (3.6) e (3.7), respectivamente. Para cada elemento $K \in \mathcal{T}$, definimos o estimador de erro residual a posteriori η_K como:*

$$\begin{aligned} \eta_K^2 = h_K^2 \|f + \Delta u_\tau\|_K^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\tau, \Omega}} h_E \|\mathbb{J}(\vec{n}_E \cdot \nabla u_\tau)\|_E^2 \\ + \sum_{E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N}} h_E \|g - \vec{n}_E \cdot \nabla u_\tau\|_E^2 \end{aligned}$$

Sob estas condições, temos que

$$\|u - u_\tau\|_1 \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

onde C é uma constante que depende apenas da malha utilizada.

O primeiro termo do estimador η_K está relacionado ao resíduo da aproximação u_τ com respeito a EDP em sua formulação forte. Já os outros termos estão associados as condições de contorno do problema e são particularmente importantes devido ao fato que, se $u_\tau \notin H^2(\Omega)$, então u_τ não necessariamente satisfaz exatamente a condição de Neumann na fronteira. Logo, para aproximações de baixa ordem os termos associados as fronteiras são de fundamental importância para o estimador residual.

A implementação computacional do estimador residual descrito no Teorema(3.2.2) encontra-se descrita no Algoritmo 1.

Algorithm 1 Construção do estimador residual

Entrada: Informações da partição $\mathcal{T}$, funções f , g e a aproximação u_τ
para $(K \in \mathcal{T})$ **faça**
 h_K = diâmetro do elemento K ;
 $RK_1 = h_K^2 \int_K (f + \Delta u_\tau)^2$;
 para $(E \in \mathcal{E}_K)$ **faça**
 $RK_2 = 0$;
 h_E = Comprimento do segmento E ;
 $\vec{n}_E$ = Componente normal ao segmento E ;
 se $(E \in \mathcal{E}_{\tau, \Omega})$ **então**
 $RK_2 = R_2(K) + \frac{h_E}{2} \int_E (\mathbb{J}(\vec{n}_E \cdot \nabla u_\tau))^2$;
 fim se
 se $(E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N})$ **então**
 $RK_2 = R_2(K) + h_E \int_E (g - \vec{n}_E \cdot \nabla u_\tau)^2$;
 fim se
 fim para
 $\eta_R(K) = RK_1 + RK_2$;
fim para
Saída: Vetor com os estimadores $\eta_R(K)$ para cada $K \in \mathcal{T}$.

3.3 Simulações Numéricas

Para analisarmos os erros obtidos pelo estimador residual e as vantagens da aplicação do refinamento adaptativo das malhas, consideramos as seguintes quantidades:

Quantidade de nós da malha

Quantidade de elementos triangulares

Erro calculado pela norma L2

Erro obtido pelo estimador residual

$\varepsilon(\%)$: Erro relativo estimado, calculado por $\frac{\eta}{\|u_\tau\|_1}$

Tempo computacional, calculado em *ms*.

Nossos objetivos serão comparar as soluções obtidas com os refinamentos uniforme e adaptativo, além de analisar o comportamento das aproximações obtidas e os erros cometidos. As figuras utilizadas neste capítulo encontram-se em escala reduzida para facilitar a visualização e a comparação dos resultados e apresentam em suas legendas o intervalo de variação dos resultados. As figuras encontram-se em seus tamanhos originais no Apêndice (C).

3.3.1 Problema com solução conhecida

Vamos iniciar nossas simulações analisando os resultados obtidos na solução numérica do seguinte problema de Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (3.16)$$

onde Ω é o quadrado unitário. A solução deste problema é dada por $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Figura 3.1: *Solução exata do problema (3.16).*

Utilizando elementos triangulares e funções de forma lineares sobre cada um dos elementos, obtivemos as aproximações e os estimadores residuais contidos nas Figuras (3.2(a)) e (3.2(b)).

(a) Aproximação obtida = $\{0.0251389:0.93014\}$

(b) Estimativa residual = $\{0.0158325:0.710884\}$

Figura 3.2: *Resultados obtidos sobre os elementos triangulares.*

É possível observar que existe uma maior variação na região central e ao redor dos pontos $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$. Nas extremidades do domínio, o erro observado deve-se ao fato de que os três pontos dos elementos estão no bordo e, como a condição de contorno é nula, a aproximação obtida é nula em todo ponto contido nestes elementos. Como a solução exata é suave e apresenta o seu ponto de máximo no centro do quadrado, dado que o ponto de máximo não é um dos nós da partição e a aproximação gerada consiste de planos triangulares entre três nós contidos no domínio, temos que o ponto de máximo do domínio não faz parte dos valores nodais e é obtido por aproximação, acarretando assim em um maior valor de erro no elemento onde o máximo da função esta contido.

Para aumentar a precisão das aproximações realizamos uma iteração de refinamento uniforme, particionando cada um dos elementos triangulares em quatro novos elementos. A aproximação obtida e o estimador residual obtido encontram-se na Figura (3.3):

Figura 3.3: Resultados obtidos na primeira iteração do refinamento uniforme.

Utilizando a mesma malha inicial, realizamos uma iteração do refinamento adaptativo, obtendo a aproximação e o estimador contidos na Figura (3.4):

Figura 3.4: Resultados obtidos na primeira iteração do refinamento adaptativo.

	Uniforme	Adaptativo
Quantidade de Nós	137	73
Quantidade de Triângulos	232	120
Erro na norma L2	0.01143	0.01646
Erro Residual	1.98439	2.40086
$\varepsilon(\%)$	0.88055	1.07
Tempo computacional (ms)	$<< 1$	$<< 1$

Tabela 3.1: Comparação entre o refinamento uniforme e o refinamento adaptativo.

A comparação entre a primeira iteração de ambos os refinamentos mostrou que o refinamento adaptativo foi capaz de obter uma aproximação com o erro na norma L2 da mesma ordem de grandeza (10^{-2}) utilizando uma quantidade de nós muito menor do que aquela utilizada no refinamento uniforme (redução de aproximadamente 46% do número de nós).

Para reduzirmos ainda mais o erro cometido realizamos mais três iterações de refinamento, obtendo as aproximações e os estimadores residuais contidos nas Figuras (3.5) e (3.6).

Figura 3.5: Resultados obtidos na quarta iteração do refinamento uniforme.

Figura 3.6: Resultados obtidos na quarta iteração do refinamento adaptativo.

	Uniforme	Adaptativo
Quantidade de Nós	7585	573
Quantidade de Triângulos	14848	1062
Erro na norma L2	0.000182	0.001692
Erro Residual	0.259999	0.817044
$\varepsilon(\%)$	0.114203	0.359378
Tempo computacional(ms)	210	10

Tabela 3.2: Comparação entre o refinamento uniforme e o refinamento adaptativo na quarta iteração de refinamento.

Comparando os estimadores residuais obtidos no refinamento uniforme (Figuras (3.2(b)), (3.4(b)) e (3.6(b))), observamos que as regiões onde o estimador indica valores maiores para o erro não variam entre as iterações de refinamento, ou seja, as regiões onde o estimador indica um valor maior de erro permanecem constantes mesmo após o refinamento. Por outro lado, o erro residual apresentado na malha gerada pelo refinamento adaptativo apresenta uma variação das regiões onde o erro é maior, como podemos observar na Figura (3.7).

Figura 3.7: Comportamento do estimador de erro nas iterações de refinamento adaptativo.

As regiões onde o estimador apresenta valores maiores para o erro mudam de lugar a cada iteração pelo fato do refinamento adaptativo aumentar o número de elementos somente nas regiões onde o indicador fornece valores maiores.

Pelos dados das Tabelas (3.1) e (3.2), observamos que o refinamento uniforme gera uma quantidade consideravelmente maior de nós em cada iteração, fazendo com que o sistema linear associado ao problema possua a dimensão do número de nós da malha. Para reduzir a quantidade de nós utilizamos o refinamento adaptativo para construir uma aproximação cujo erro L2 é mesma ordem de grandeza daquele obtido na quarta iteração do refinamento uniforme, conforme mostra a Tabela (3.3).

	Uniforme (4 iterações)	Adaptativo (6 iterações)
Quantidade de Nós	7585	2351
Quantidade de Triângulos	14848	4352
Erro na norma L2	0.000182	0.000393
Erro Residual	0.259999	0.394425
$\varepsilon(\%)$	0.114203	0.173283
Tempo computacional(ms)	210	60

Tabela 3.3: Comparação entre o número de nós de cada um dos refinamentos para obter um erro L2 de mesma ordem.

Observamos que a malha gerada pelo refinamento adaptativo foi capaz de obter uma aproximação com a mesma ordem de grandeza utilizando aproximadamente 30% da quantidade de nós utilizada pelo refinamento uniforme. Como a quantidade de nós implica diretamente no tempo computacional necessário para a obtenção das aproximações (pois o sistema a ser resolvido depende da quantidade de nós), observamos que o refinamento adaptativo de maneira reduz de forma significativa o esforço computacional utilizado na construção das aproximações.

3.3.2 Problema com singularidade

Consideramos agora o PVC

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (3.17)$$

onde Ω é um conjunto da forma *L-shaped*, conforme descrito na Figura [3.8]:

Figura 3.8: Domínio do problema

É possível mostrar que a solução deste problema ao redor da origem pode ser aproximada pela função

$$\tilde{u}(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{(2\theta + \pi)}{3}\right)$$

onde r representa a distância radial até a origem e θ o ângulo em relação ao eixo vertical (isto é, coordenadas polares). Como as derivadas radiais de $\tilde{u}$ não são limitadas na origem temos uma singularidade neste ponto de modo que é esperado que o erro cometido ao redor da origem seja

maior do que o erro cometido no restante do domínio. A referência [23] faz uma discussão bastante aprofundada sobre problemas desta natureza.

Com o uso de um refinamento simples do domínio Ω , obtivemos as aproximações e os estimadores residuais contidos nas Figuras (3.9(a)) e (3.9(b)).

(a) Aproximação inicial = $\{0.00382968:0.141698\}$

(b) Estimativa residual = $\{0.00137569:0.0800682\}$

Figura 3.9: Resultados obtidos sobre os elementos triangulares no problema 3.17.

Nesta aproximação inicial não foi possível identificar a necessidade de um maior número de elementos ao redor da origem. Porém, como a aproximação inicial é bastante grosseira e a solução exata do problema é considerada suave, vamos realizar algumas iterações de refinamento e analisar o comportamento das aproximações obtidas. As Figuras (3.10) e (3.11) apresentam os resultados obtidos na primeira iteração de refinamento com ambos os algoritmos de refinamento. Os dados comparativos entre as malhas obtidas encontram-se na Tabela (3.4).

Figura 3.10: Resultados da primeira iteração do refinamento uniforme.

Figura 3.11: Resultados da primeira iteração do refinamento adaptativo.

	Uniforme	Adaptativo
Quantidade de Nós	215	148
Quantidade de Triângulos	368	249
Erro Residual	0.544687	0.541737
$\varepsilon(\%)$	1.14936	1.1418
Tempo computacional(ms)	$\ll 1$	$\ll 1$

Tabela 3.4: Comparação entre o refinamento uniforme e o refinamento adaptativo na primeira iteração de refinamento.

Como a solução exata deste problema é desconhecida vamos utilizar a estimativa residual para analisar o comportamento do erro. Na primeira iteração de refinamento observamos novamente que o algoritmo adaptativo fornece uma aproximação com o erro residual bastante próximo da aproximação obtida sobre a malha do refinamento uniforme utilizando uma quantidade de nós consideravelmente menor, reduzindo assim o esforço computacional utilizado na construção das aproximações.

Para avaliar a convergência do método realizamos mais duas iterações de refinamento e analisamos a convergência das aproximações construídas em ambos os refinamentos (uniforme e adaptativo) por meio do erro residual cometido em cada uma das discretizações utilizadas. Pelos resultados contidos na Tabela (3.5) observamos que o erro residual é reduzido em ambos os refinamentos, indicando assim a convergência das aproximações obtidas.

Iteração	Uniforme	Adaptativo
(1)	0.544687	0.541737
(2)	0.298928	0.361026
(3)	0.161553	0.231439
(4)	0.0878034	0.146224

Tabela 3.5: Erro obtido avaliado pelo estimador residual

Apesar de ambas as estratégias serem convergentes, observamos que o refinamento adaptativo reduz de forma significativa a quantidade de nós utilizada na discretização, como podemos observar na Figura (3.12).

Figura 3.12: Relação entre o erro cometido e o número de nós da malha.

Tomando como exemplo a quarta iteração de refinamento, as aproximações contidas na Figura (3.13) mostram que ambos os refinamentos fornecem soluções bem próximas. No entanto, pela análise da Figura (3.12), é possível observar que o refinamento adaptativo apresenta uma redução de aproximadamente 90% no número de nós em relação a malha obtida com refinamento uniforme.

Figura 3.13: Comparativo das aproximações obtidas na quarta iteração de refinamento.

Isto mostra a utilização do refinamento adaptativo de malhas permite reduzir de maneira considerável o tempo computacional utilizado para obter as soluções numéricas do problema sem afetar a convergência do método numérico, gerando assim aproximações bastante precisas utilizando um número consideravelmente baixo de incógnitas no sistema.

Capítulo 4

Elasticidade Linear

Neste capítulo apresentaremos a aplicação das estimativas residuais para estimar o erro cometido na aplicação do MEF em problemas envolvendo elasticidade linear. Visando simplificar a apresentação do modelo e suas respectivas hipóteses, seguiremos o conteúdo apresentado em [14] complementando com a teoria contida em [16] e [15]. O estudo será feito para pequenas deformações, de maneira que as equações envolvidas possam ser consideradas lineares.

A teoria da elasticidade relaciona as deformações sofridas por um determinado corpo com as tensões e trações aplicadas sobre o mesmo. Com isto, para obtermos as equações que regem o modelo é preciso que sejam obtidas as equações associadas a cinemática do corpo em estudo, suas relações constitutivas e as equações de equilíbrio. A partir destes três componentes será obtida a formulação forte do problema de valor de contorno que fornece o deslocamento em cada ponto do domínio.

Para a aplicação do MEF iremos construir a formulação variacional associada a este método utilizando alguns resultados análogos aqueles utilizados nos problemas abordados até aqui. A grande dificuldade neste ponto reside na obtenção destes resultados análogos para o sistema de equações em estudo. A partir daí, a construção da estimativa é feita exatamente como nos casos anteriores, com a aplicação do teorema da divergência de Gauss sobre cada um dos elementos e a avaliação do residuo cometido sobre cada componente do domínio.

4.1 As equações da elasticidade linear

Considere Ω uma superfície poligonal e $\Gamma = \partial\Omega$ sua fronteira, de forma que Γ é dividida em dois trechos: Γ_D a região onde o deslocamento é conhecido e Γ_N a região onde as tensões são conhecidas.

Considere $\vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ o deslocamento ocorrido em cada ponto e $\varepsilon(\vec{u})$ o tensor de deformação do corpo dado por

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$$

Da relação constitutiva, consideramos que o tensor de tensões é dado por

$$\sigma(\varepsilon) = \lambda \text{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon$$

onde $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é o tensor unitário, $\text{tr}(\varepsilon)$ é o traço de ε e λ, μ são os chamados parâmetros de Lamé e dependem do coeficiente de elasticidade e de Poisson do material. Para garantir a existência e a unicidade de soluções do problema vamos assumir¹ que o trecho do contorno onde o deslocamento é conhecido possui medida positiva em $\mathbb{R}$ (ou seja, o deslocamento não é conhecido somente em um conjunto enumerável de pontos, mas sim em um segmento todo da fronteira).

Denotando por $\vec{f}$ o vetor de forças de volume aplicadas sobre a placa e $\vec{g}$ o vetor de forças de tração aplicadas sobre a placa, os deslocamentos ocorridos em cada ponto da placa são obtidos pela

¹Esta hipótese será utilizada pelo o Teorema (4.3.2) para mostrar que o problema admite solução única

resolução do seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(\varepsilon)) = \vec{f} & \text{em } \Omega \\ \sigma(\varepsilon(\vec{n})) = \vec{g} & \text{em } \Gamma_N \\ \vec{u} = 0 & \text{em } \Gamma_D \end{cases} \quad (4.1)$$

4.2 Formulação variacional (fraca) do problema: Minimizando a energia associada

A formulação fraca deste problema é construída exatamente como nos problemas anteriores: multiplicamos a formulação forte por uma função de ponderação $\vec{v}$ e integramos sobre o domínio da superfície em estudo. Aplicando o teorema da Divergência de Gauss o problema descrito em sua formulação fraca é equivalente a obtermos o valor mínimo do funcional de energia associado ao modelo. Portanto, resolver o problema de valor de contorno (4.1) é equivalente à minimizar o funcional que representa a energia contida no sistema

$$\Pi(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u}) - \vec{f} \cdot \vec{u} \right] + \int_{\Gamma_N} \vec{g} \cdot \vec{u}$$

para $\vec{u} \in H_D^1(\Omega) \times H_D^1(\Omega)$, onde $H_D^1(\Omega)$ é um espaço de Sobolev em Ω que se anula no trecho Γ_D da fronteira e $\varepsilon : \sigma$ é o produto tensorial padrão, isto é

$$\varepsilon : \sigma = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \varepsilon_{i,j} \sigma_{i,j}$$

Observe que as variáveis ε , σ e $\vec{u}$ não são independentes, mas são relacionadas pela relação constitutiva do material e pela cinemática do problema. Além disso, diferente do que ocorria para os problemas anteriores onde apenas uma função incógnita era construída, estamos buscando duas funções para aproximar os deslocamentos nos dois sentidos da superfície em estudo.

Observe que o funcional energia pode ser escrito como a formulação equivalente descrita na Seção (2.2): Sendo $V = H_D^1(\Omega) \times H_D^1(\Omega)$ um espaço normado, $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear dada por

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u})$$

e o funcional linear $\langle f, u \rangle$ é descrito como

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} + \int_{\Gamma_N} \vec{g} \cdot \vec{u}$$

Se a forma bilinear for positiva definida, limitada e coerciva então podemos aplicar o Teorema (2.2.1) e concluir que a energia mínima $\vec{u} \in H_D^1(\Omega) \times H_D^1(\Omega)$ satisfaz a igualdade

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u}) = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{u} + \int_{\Gamma_N} \vec{g} \cdot \vec{u} \quad (4.2)$$

A solução aproximada pelo MEF será construída por meio da discretização do domínio em um conjunto de partições regulares $\mathcal{T}$, onde a aproximação $\vec{u}_{\mathcal{T}} \in S_D^{1,0}(\mathcal{T}) \times S_D^{1,0}(\mathcal{T})$ é obtida de modo que satisfaça a igualdade

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}_{\mathcal{T}}) : \varepsilon(\vec{v}_{\mathcal{T}}) = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v}_{\mathcal{T}} + \int_{\Gamma_N} \vec{g} \cdot \vec{v}_{\mathcal{T}} \quad (4.3)$$

para toda $\vec{v}_{\mathcal{T}} \in S_D^{1,0}(\mathcal{T}) \times S_D^{1,0}(\mathcal{T})$.

4.3 Resultados auxiliares

Apesar da estrutura do problema ser similar aquela utilizada para o problema de Poisson, não sabemos se o problema apresentado possui solução única. Para isto, iremos apresentar agora alguns importantes resultados capazes de mostrar que a forma bilinear associada ao problema é contínua e coerciva e o funcional linear é contínuo. Com isto, pelo Teorema de Lax-Milgram (2.1.15), podemos concluir que o problema possui solução única.

Teorema 4.3.1 (Primeira desigualdade de Korn). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto com fronteira seccionalmente diferenciável. Assim, existe um número $c = c(\Omega) > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(v) \right) + \|v\|_0^2 \geq c \|v\|_1^2$$

para toda função $v \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Sendo $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ o fecho do conjunto $v \in C^\infty(\Omega)^2 : v(x) = 0$ para $x \in \Gamma_D$ na norma $\|\cdot\|_1$, o resultado a seguir mostra que a forma bilinear associada é coerciva.

Teorema 4.3.2 (Segunda desigualdade de Korn). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto com fronteira seccionalmente diferenciável e suponha que Γ_D seja um conjunto de medida positiva em $\mathbb{R}$. Nestas condições, existem um número positivo $c' = c'(\Omega, \Gamma_D)$ tal que*

$$\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(v) \geq c' \|v\|_1^2$$

para toda função $v \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$.

As demonstrações destes resultados vão além dos objetivos deste trabalho. As referências [15] e [16] apresentam ambas as demonstrações em detalhes.

4.4 Estimativa residual

Assim como fizemos na estimativa residual para o problema de Poisson iremos avaliar a diferença entre a solução exata (inicialmente desconhecida) e a aproximação obtida sobre a formulação diferencial, utilizando que para cada um dos elementos $K \in \mathcal{T}$ temos que:

$$\int_K \sigma(\vec{u} - \vec{u}_\tau) : \varepsilon(\vec{v}) = \int_K \vec{f} \cdot \vec{v} + \int_E \vec{g} \cdot \vec{v} - \int_K \sigma(\vec{u}_\tau) : \varepsilon(\vec{v})$$

Definimos implicitamente o resíduo cometido na aproximação como o lado direito da equação anterior, isto é

$$\mathcal{R}(\vec{u}_\tau, \vec{v}_\tau) = \int_K \vec{f} \cdot \vec{v} + \int_E \vec{g} \cdot \vec{v} - \int_K \sigma(\vec{u}_\tau) : \varepsilon(\vec{v}) \quad (4.4)$$

Sendo as aproximações são de classe $\mathcal{C}^2$ no interior dos elementos podemos desfazer as integrais por partes e reorganizar os termos, de modo que

$$\mathcal{R}(\vec{u}_\tau, \vec{v}) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (\vec{f} + \sigma(\vec{u}_\tau)) \vec{v} + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N}} \int_E (g - \vec{n}_E \sigma) \vec{v} - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tau, \Omega}} \int_E \mathbb{J}(\vec{n}_E \cdot \sigma) \vec{v}$$

onde, sendo K um elemento da partição $\mathcal{T}$, E_K é o conjunto dos segmentos que compõem o elemento K , $\vec{n}_E$ o vetor normal associado ao segmento E , $\mathcal{E}_{\tau, \Omega}$ e $\mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N}$ os segmentos que compõem os elementos e estão contidos no interior do domínio e na fronteira Γ_N , respectivamente e $\mathbb{J}$ representa o salto cometido pela solução através das bordas de dois elementos adjacentes.

Observe que a forma bilinear $\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u})$ possui as mesmas características da forma $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w$ utilizada na formulação do resíduo para o problema de Poisson. Desta forma, é possível mostrar

que o Teorema (3.2.1) pode ser generalizado para o problema em estudo e que o erro cometido na aproximação $\vec{u}_\tau$ é limitado pela norma do resíduo no espaço dual de $H_D^1(\Omega) \times H_D^1(\Omega)$.

Assim seguimos os mesmos passos utilizados na construção do estimador residual para o problema de Poisson definindo o *resíduo interior* e o *resíduo do bordo* associado a cada elemento $K \in \mathcal{T}$ como

$$R_K(u_\tau) = \vec{f} + \text{div}(\sigma(\vec{u}_\tau)) \quad (4.5)$$

e

$$R_E(u_\tau) = \begin{cases} -\mathbb{J}_E(\vec{n}_E \cdot \sigma(\vec{u}_\tau)), & \text{se } E \in \mathcal{E}_{\tau,\Omega} \\ \vec{g} - \vec{n}_E \cdot \sigma(\vec{u}_\tau), & \text{se } E \in \mathcal{E}_{\tau,\Gamma_N} \\ 0, & \text{se } E \in \mathcal{E}_{\tau,\Gamma_D} \end{cases} \quad (4.6)$$

respectivamente. Com isto o resíduo pode ser reescrito como

$$\mathcal{R}(u_\tau, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R_K(u_\tau) v + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \int_E R_E(u_\tau) v$$

e, de maneira análoga ao que fizemos no problema de Poisson², podemos estimar o resíduo em cada elemento $K \in \mathcal{T}$ como:

$$\eta_{R,K} = \left\{ h_K^2 \|f_\tau + \text{div}(\sigma(u_\tau))\|_K^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in E_K \cap \mathcal{E}_{\tau,\Omega}} h_E \|J_E(\vec{n} \cdot \sigma(u_\tau))\|_E^2 + \sum_{E \in E_K \cap \mathcal{E}_{\tau,\Gamma_N}} h_E \|g - \vec{n} \cdot \sigma(u_\tau)\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

onde $\|\cdot\|_K$ e $\|\cdot\|_E$ representam a norma L^2 nos elementos $K \in \mathcal{T}$ e nas arestas $E \in \mathcal{E}_\tau$, respectivamente.

A implementação computacional do estimador residual possui estrutura muito semelhante aquela utilizada no problema de Poisson, modificando apenas o operador a ser integrado em cada uma das componentes da estimativa.

Algorithm 2 Estimador residual: elasticidade linear

Entrada: Informações da partição $\mathcal{T}$, funções f , g e a aproximação u_τ

para $(K \in \mathcal{T})$ **faça**

h_K = diâmetro do elemento K ;

$RK_1 = h_K^2 \int_K (f + \text{div}(\sigma(u_\tau)))^2$;

para $(E \in \mathcal{E}_K)$ **faça**

$RK_2 = 0$;

h_E = Comprimento do segmento E ;

$\vec{n}_E$ = Componente normal ao segmento E ;

se $(E \in \mathcal{E}_{\tau,\Omega})$ **então**

$RK_2 = R_2(K) + \frac{h_E}{2} \int_E (J_E(\vec{n} \cdot \sigma(u_\tau)))^2$;

fim se

se $(E \in \mathcal{E}_{\tau,\Gamma_N})$ **então**

$RK_2 = R_2(K) + h_E \int_E (g - \vec{n} \cdot \sigma(u_\tau))^2$;

fim se

fim para

$\eta_R(K) = RK_1 + RK_2$;

fim para

Saída: Vetor com os estimadores $\eta_R(K)$ para cada $K \in \mathcal{T}$.

²A demonstração completa encontra-se no Apêndice A.

4.5 Simulações Numéricas

Considere uma fina placa de alumínio com um furo circular em seu centro³ e sua extremidade inferior fixa e que sofre a ação de uma força constante de 5kN sobre a extremidade superior da placa. Sendo o módulo de Young $E = 70GPa$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0.28$, vamos analisar a deformação sofrida pela placa.

Vamos utilizar inicialmente uma malha contendo 10 pontos em cada um dos trechos que compõem o contorno externo e 30 pontos no contorno que representa o furo central, conforme descrito na Figura (4.1):

Figura 4.1: *Malha inicial.*

Utilizando funções interpoladoras de segunda ordem obtivemos as aproximações e o estimador residual descritos nas Figuras (4.2(a)) e (4.2(b)).

(a) Aproximações obtidas = $\{0:1.63299e-07\}$

(b) Estimador residual = $\{14443.4:534591\}$

Figura 4.2: *Resultados obtidos na malha inicial.*

Os resultados obtidos condizem com o comportamento físico esperado: a placa deslocou-se na direção da força constante, de modo a deformar a circunferência contida em seu interior. Para visualizar a deformação ocorrida na chapa iremos aplicar os deslocamentos nodais obtidos em cada um dos pontos da malha de estudo, obtendo os resultados da Figura (4.3).

³O furo central será aproximado por um polígono, de modo que toda a teoria desenvolvida até aqui poderá ser aplicada ao problema.

Figura 4.3: Deformação sofrida pela chapa (fator de escala 10^6).

Para aumentar a qualidade das aproximações obtidas realizamos mais três iterações de refinamento de malha e apresentamos os resultados obtidos na terceira iteração nas Figuras (4.4) e (4.5). Como a solução exata do problema é desconhecida, utilizamos o erro estimado pelo resíduo para avaliar a convergência das aproximações, conforme mostra a Tabela (4.1).

	Uniforme		Adaptativo	
Iteração	Erro estimado	Tempo (s)	Erro estimado	Tempo (s)
(1)	795.331	0.37	714.263	0.24
(2)	460.898	2.12	385.689	0.45
(3)	272.076	10.06	218.838	1.06

Tabela 4.1: Erro estimado pelo estimador residual em cada uma das iterações de refinamento.

Como era esperado, observa-se que o estimador residual indica que o erro é reduzido a cada iteração do refinamento de malhas, indicando assim que as aproximações obtidas convergem para a solução do problema contínuo.

(a) Deslocamento obtido = $\{0.1.63455e-07\}$

(b) Deformação na placa

Figura 4.4: Aproximação obtida na terceira iteração do refinamento uniforme.

(a) Deslocamento obtido = $\{0:1.63455e-07\}$

(b) Deformação na placa

Figura 4.5: Aproximação obtida na terceira iteração do refinamento adaptativo.

Observe que a quantidade de nós do terceiro refinamento uniforme é tão grande que a imagem fica bastante escura com a visualização dos elementos triangulares, enquanto que o refinamento adaptativo apresenta somente algumas regiões com um maior número de elementos. A Figura (4.6) relaciona o erro cometido nas aproximações com a quantidade de nós utilizados.

Figura 4.6: Relação entre o erro cometido e o número de nós da malha.

Assim como no problema de Poisson, observa-se que o uso do refinamento adaptativo é capaz de reduzir de maneira considerável o número de incógnitas do sistema, diminuindo assim o esforço computacional necessário para a construção das aproximações.

Por fim, analisando o comportamento do estimador do erro na terceira iteração de refinamento, cujos resíduos encontram-se na Figura (4.7), observamos as estimativas locais obtidas na malha gerada pelo refinamento uniforme encontram-se numa faixa de valores muito maior do que aqueles obtidos na malha gerada pelo refinamento adaptativo. Isto mostra que o erro cometido no interior do domínio varia de uma maneira mais uniforme na malha gerada pelo refinamento adaptativo, impedindo assim que determinadas regiões possuam o erro muito maior em relação ao restante do domínio.

Figura 4.7: Comparação dos resíduos obtidos na terceira iteração de refinamento.

Capítulo 5

Conclusões

Nosso objetivo neste trabalho foi apresentar em detalhes a construção da estimativa de erro baseada no resíduo entre o problema contínuo e o problema discreto resolvido pelo MEF proposta nos trabalhos [1], [2], [3] e [4] e, por meio deste estimador, construir e analisar o comportamento de um algoritmo adaptativo para a construção das discretizações do domínio, de maneira a distribuir um maior número de elementos nas regiões onde o erro cometido foi maior. A escolha deste estimador deve-se à sua fácil implementação e robustez, características que fazem com que ele seja utilizado muitas vezes como parâmetro para a avaliação de outros estimadores.

Partindo da formulação variacional dos problemas em estudo, construímos o estimador residual associado a cada um dos problemas e observamos que o estimador apresentou todas as características esperadas: fácil implementação (utiliza somente os dados da discretização do domínio, as informações do contorno e as aproximações obtidas) e eficácia na identificação das regiões do domínio onde o erro cometido era maior com relação ao restante do domínio. Além disso, com o uso dos estimadores locais foi possível avaliar o erro total cometido na aproximação, o que nos permite validar também a convergência do método numérico utilizando apenas os dados do problema e as aproximações obtidas.

Com a aplicação do algoritmo adaptativo para a construção das malhas foi possível observar que a quantidade de nós da malha pode ser reduzida de maneira expressiva sem afetar a convergência do método numérico. Ou seja, o erro cometido pode ser reduzido sem a necessidade de um aumento expressivo do número de incógnitas do problema, equilibrando assim a redução no erro cometido pelo aumento no esforço computacional a ser realizado.

O estudo da aplicação da estimativa residual e do algoritmo adaptativo nos problemas envolvendo elasticidade linear mostram que a teoria pode ser aplicada de forma análoga à problemas elípticos mais gerais. Isto reforça o fato do estimador residual ser uma boa ferramenta no estudo do comportamento do erro cometido nas aproximações pelo MEF.

Apêndice A

Construção do estimador residual para o problema de Elasticidade Linear

Neste apêndice apresentaremos a construção do estimador residual para o problema de Elasticidade Linear apresentado na Seção 4.4.

A.1 Construção do estimador

Partindo da equação que representa o resíduo utilizando o fato que as aproximações são de classe $\mathcal{C}^2$ no interior de cada um dos elementos (Equação 4.4):

$$\mathcal{R}(\vec{u}_\tau, \vec{v}) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (\vec{f} + \sigma(u_\tau)) \vec{v} + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N}} \int_E (g - \vec{n}_E \sigma) \vec{v} - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tau, \Omega}} \int_E \mathbb{J}(\vec{n}_E \cdot \sigma) \vec{v} \quad (\text{A.1})$$

e das definições do *resíduo interior* e o *resíduo do bordo* associado a cada elemento $K \in \mathcal{T}$ como

$$R_K(u_\tau) = \vec{f} + \text{div}(\sigma(\vec{u}_\tau)) \quad (\text{A.2})$$

e

$$R_E(u_\tau) = \begin{cases} -\mathbb{J}_E(\vec{n}_E \cdot \sigma(\vec{u}_\tau)), & \text{se } E \in \mathcal{E}_{\tau, \Omega} \\ \vec{g} - \vec{n}_E \cdot \sigma(\vec{u}_\tau), & \text{se } E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N} \\ 0, & \text{se } E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_D} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

podemos substituir (A.2) e (A.3) em (A.1), de forma a obter que:

$$\mathcal{R}(u_\tau, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R_K(u_\tau) v + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \int_E R_E(u_\tau) v \quad (\text{A.4})$$

Note que a equação (A.4) possui as mesmas propriedades da equação (3.13), pois a forma bilinear $\int_\Omega \sigma(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u})$ possui as mesmas características da forma $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w$ utilizada na resolução do problema de Poisson. Isto permite que sigamos os mesmos passos da demonstração, isto é, utilizando a ortogonalidade de Galerkin podemos escrever que:

$$\mathcal{R}(u_\tau, v) = \mathcal{R}(u_\tau, v) - \underbrace{\mathcal{R}(u_\tau, v_\tau)}_{=0} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R_K(u_\tau)(v - v_\tau) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \int_E R_E(u_\tau)(v - v_\tau) \quad (\text{A.5})$$

Considerando uma função arbitrária $v \in H_D^1(\Omega) \times H_D^1(\Omega)$, seja $v_\tau = I_\tau v$ sua projeção pelo operador de *quasi*-interpolação (2.18). Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais e as

estimativas do operador podemos estimar o residuo como

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(u_\tau, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R_K(u_\tau)(v - I_\tau v) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \int_E R_E(u_\tau)(v - I_\tau v) \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|R_K(u_\tau)\|_K \underbrace{\|v - I_\tau v\|_K}_{\leq \alpha h_K \|v\|_{H_K^1}} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|R_E(u_\tau)\|_E \underbrace{\|v - I_\tau v\|_E}_{\leq \beta \sqrt{h_E} \|v\|_{H_E^1}} \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|R_K(u_\tau)\|_K \cdot \alpha h_K \|v\|_{1, \tilde{v}_K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|R_E(u_\tau)\|_E \cdot \beta \sqrt{h_E} \|v\|_{1, \tilde{v}_E}
\end{aligned}$$

onde, apenas para simplificar a notação, escrevemos $H_K^1 = H^1(\tilde{\omega}_K) \times H^1(\tilde{\omega}_K)$ e $H_E^1 = H^1(\tilde{\omega}_E) \times H^1(\tilde{\omega}_E)$. Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para soma, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(u_\tau, v) &\leq \max_{\alpha, \beta} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|R_K(u_\tau)\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} h_E \|R_E(u_\tau)\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} \|v\|_{1, \tilde{v}_K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|v\|_{1, \tilde{v}_E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

e, por fim, utilizando o fato que a malha $\mathcal{T}$ é regular, podemos escrever que

$$\left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} \|v\|_{1, \tilde{v}_K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|v\|_{1, \tilde{v}_E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq c \|v\|_1$$

onde c é uma constante que depende apenas da malha utilizada. Assim, sendo a forma bilinear coerciva, concluímos que

$$\|u - u_\tau\|_1 \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} h_K^2 \|R_K(u_\tau)\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} h_E \|R_E(u_\tau)\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde C depende somente da malha de elementos em estudo. Desta forma, concluímos o seguinte resultado:

Teorema A.1.1 (Estimador de Erro Residual a Posteriori para Elasticidade Linear). *Sejam $u \in H_D^1(\Omega) \times H_D^1(\Omega)$ e $u_\tau \in S_D^{1,0}(\mathcal{T}) \times S_D^{1,0}(\mathcal{T})$ as soluções dos problemas (4.2) e (4.3), respectivamente. Para cada elemento $K \in \mathcal{T}$, definimos o estimador de erro residual a posteriori η_K como:*

$$\begin{aligned}
\eta_K^2 &= h_K^2 \|\vec{f} + \sigma(u_\tau) \vec{v}\|_K^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\tau, \Omega}} h_E \|\mathbb{J}_E(\vec{n}_E \cdot \sigma(\vec{u}_\tau))\|_E^2 \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N}} h_E \|\vec{g} - \vec{n}_E \cdot \sigma(\vec{u}_\tau)\|_E^2
\end{aligned}$$

Sob estas condições, temos que

$$\|u - u_\tau\|_1 \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.6}$$

onde C é uma constante que depende apenas da malha utilizada.

Apêndice B

Códigos utilizados

Apresentamos a seguir os códigos utilizados nas simulações nos capítulos 3 e 4.

Listing B.1: *testes_cap3/teste1.edp*

```
1  /*-----Problema modelo 1: Problema com solucao conhecida -----*/
2  /*-----Refinamento uniforme-----*/
3  //Comando para imprimir somente o que foi pedido
4  verbosity=0;
5
6  //Definindo o contorno
7  border ba(t=0,1){x=t; y=0; label=1;};
8  border bb(t=0,1){x=1; y=t; label=2;};
9  border bc(t=0,1){x=1-t; y=1; label=3;};
10 border bd(t=0,1){x=0; y=1-t; label=4;};
11
12 //Gerando a malha
13 mesh Th = buildmesh (ba(5) + bb(5) + bc(5) +bd(5));
14
15 //Gera os espacos de funcoes
16 fespace Vh(Th,P1);
17 fespace Nh(Th,P0);
18 Vh phi,w;
19 Nh rho;
20
21 //Funcoes do problema
22 func f=2*pi*pi*sin(pi*x)*sin(pi*y);
23 func phiexact=sin(pi*x)*sin(pi*y);
24
25 //Calculo do estimador residual
26 varf estimador(uu,chiK) =
27 intalledges(Th)(chiK*lenEdge*square(jump(N.x*dx(phi)+N.y*dy(phi)))+int2d(Th)(chiK*
    square(hTriangle*(f+dxx(phi)+dyy(phi))));
28
29 real[int] L2error(5);
30 real[int] normaH1(5);
31 real[int] erroRes(5);
32 real cpu;
33 real[int] time(5);
34
35 for(int n=0;n<5;n++){
36
37   cpu = clock();
38   //Obtem as aproximacoes pelo MEF
39   solve poisson(phi,w)=int2d(Th)(dx(phi)*dx(w) + dy(phi)*dy(w))- int2d(Th)(f*w) + on
    (1,2,3,4, phi = 0);
40   time[n] = 1000*(clock()-cpu);
41
42   //Plotando a malha
43   plot(Th,wait=1);
```

```

44
45 //Plotando a aproximacao obtida
46 plot(phi, wait=1, value=1, fill=1, cmm="Aproximacao obtida");
47
48 //Calculo do estimador residual
49 Nh etak;
50 etak[] = estimador(0, Nh);
51
52 //Calculo da norma L2 do erro
53 L2error[n] = sqrt(int2d(Th)((phi - phiexact)^2));
54
55 //Calculando a norma H1 da solucao
56 normaH1[n] = sqrt(int2d(Th)((phi)^2) + int2d(Th)((dx(phi))^2) + int2d(Th)((dy(phi))^2));
57
58 //Calculo do erro do estimador
59 erroRes[n] = sqrt(etak[] . sum);
60
61 //Imprime os dados
62 cout << " NV = " << Th.nv << " NT = " << Th.nt << " ErroL2 = " << L2error[n] << " Erro
    estimado: " << erroRes[n] << " E = " << erroRes[n]/normaH1[n] << " Tempo
    Computacional = " << time(n) << endl;
63 plot(Th, etak, wait=1, value=1, fill=1, cmm="Estimativa residual");
64
65 //Refinamento da malha
66 Th = trunc(Th, 1, split=2);
67 phi = phi;
68 rho = rho;
69 }
70 //Imprimindo a convergencia
71 for(int n=0; n<4; n++)
72     cout << "convergence rate = " << log(L2error[n]/L2error[n+1])/log(2.) << " " << log(
        erroRes[n]/erroRes[n+1])/log(2.) << endl;

```

Listing B.2: *testes_cap3/teste1_adapt.edp*

```

1 /*-----Problema modelo 1: Problema com solucao conhecida -----*/
2 /*-----Refinamento adaptativo-----*/
3
4 //Comando para imprimir somente o que foi pedido
5 verbosity=0;
6
7 /*-----Refinamento adaptativo.-----*/
8 /*Codigo disponivel em freefem++/examples++-tutorial/AdaptResidualErrorIndicator.
    edp */
9
10 // macro the get the current mesh size
11 // parameter
12 // in: Th the mesh
13 // Vh P1 fespace on Th
14 // out :
15 // h: the Vh finite element finite set to the current mesh size
16 macro MeshSizecomputation(Th, Vh, h)
17 { /* Th mesh
18    Vh P1 finite element space
19    h the P1 mesh size value */
20    real[int] count(Th.nv);
21    /* mesh size (lenEdge = $\int_e 1$) */
22    varf vmeshsize(u, v) = intalldges(Th, qfnbpE=1)(v);
23    /* number of edge / par vertex */
24    varf vedgecount(u, v) = intalldges(Th, qfnbpE=1)(v/lenEdge);
25    /*
26    computation of the mesh size
27    ----- */
28    count = vedgecount(0, Vh);

```

```

29 | h[] = 0.;
30 | h[] = vmeshsize(0, Vh);
31 | h[] = h[] ./ count;
32 | } // end of macro MeshSizecomputation
33 |
34 | // macro to remesh according the de residual indicator
35 | // in:
36 | //     Th the mesh
37 | //     Nh P0 fespace on Th
38 | //     Vh P1 fespace on Th
39 | //     vindicator the varf of to evaluate the indicator to ^2
40 | //     coef on etameam ..
41 | // -----
42 | macro ReMeshIndicator(Th, Nh, Vh, vindicator, coef)
43 | {
44 |     Vh h=0;
45 |     /* Avalia o tamanho da malha */
46 |     MeshSizecomputation(Th, Vh, h);
47 |     Nh etak;
48 |     etak[] = vindicator(0, Nh);
49 |     etak[] = sqrt(etak[]);
50 |     plot(etak, wait=1, fill=1, value=1, cmm="Estimador Residual");
51 |     real etastar = coef * (etak[] .sum / etak[] .n);
52 |
53 |     /* Calcula o novo espacamento */
54 |
55 |     Vh fn, sigma;
56 |     varf veta(unused, v) = int2d(Th)(etak * v);
57 |     varf vun(unused, v) = int2d(Th)(1 * v);
58 |     fn[] = veta(0, Vh);
59 |     sigma[] = vun(0, Vh);
60 |     fn[] = fn[] ./ sigma[];
61 |     fn = max(min(fn / etastar, 3.), 0.3333);
62 |
63 |     /* new mesh size */
64 |     h = h / fn;
65 |     /* plot(h, wait=1); */
66 |     Th = adaptmesh(Th, IsMetric=1, h, splitpbedge=1, nbvx=10000);
67 | }
68 |
69 | // Problema modelo 1
70 |
71 | // mesh definition
72 | border ba(t=0,1){x=t; y=0; label=1;};
73 | border bb(t=0,1){x=1; y=t; label=2;};
74 | border bc(t=0,1){x=1-t; y=1; label=3;};
75 | border bd(t=0,1){x=0; y=1-t; label=4;};
76 |
77 | // Gerando a malha e os espacos de funcoes
78 | mesh Th = buildmesh (ba(5) + bb(5) + bc(5) + bd(5));
79 |
80 | fespace Vh(Th, P1);
81 | fespace Nh(Th, P0);
82 |
83 | Vh u, v;
84 | real cc=0.7;
85 | func f=2*pi*pi*sin(pi*x)*sin(pi*y);
86 | func uexata=sin(pi*x)*sin(pi*y);
87 |
88 | problem Poisson(u, v) =
89 |     int2d(Th, qforder=5)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v))
90 | - int2d(Th, qforder=5)( f*v) + on(1,2,3,4, u = 0);
91 |
92 | varf estimador(unused, chiK) =
93 |     intalldges(Th)(chiK*lenEdge*square(jump(N.x*dx(u)+N.y*dy(u))))

```

```

94     +int2d(Th)(chiK*square(hTriangle*(f+dx(u)+dy(u))) );
95
96     real[int] L2error(7);
97     real[int] normaH1(7);
98     real[int] erroRes(7);
99     real cpu;
100    real[int] time(7);
101
102    for (int n=0;n< 7;n++){
103
104        //Obtem as aproximacoes
105        u=u;
106        cpu = clock();
107        Poisson;
108        time[n]=1000*(clock()-cpu);
109
110        //Calculando a norma H1 da solucao
111        normaH1[n] = sqrt(int2d(Th)((u)^2) + int2d(Th)((dx(u))^2) + int2d(Th)((dy(u))^2));
112
113        //Calculo da norma L2 do erro
114        L2error[n]= sqrt(int2d(Th)((u-uexata)^2));
115
116        //Calculo do estimador residual
117        Nh etak;
118        etak[]=estimador(0,Nh);
119
120        //Calculo do erro do estimador
121        erroRes[n]= sqrt(etak[].sum);
122
123        //Imprime os dados
124        cout << " NV = " << Th.nv << " NT = " << Th.nt << " ErroL2 = " << L2error[n] << " Erro
            estimado: " << erroRes[n] << " E = " << erroRes[n]/normaH1[n] << " Tempo
            Computacional = " << time(n) << endl;
125        plot(u,wait=1,value=1,fill=1,cmm="Aproximacao Obtida");
126
127        //Refina a malha
128        ReMeshIndicator(Th,Nh,Vh,estimador,cc);
129    }

```

Listing B.3: testes_cap3/teste2.edp

```

1  /*-----Problema modelo 2: Problema com singularidade -----*/
2  /*-----Refinamento uniforme-----*/
3
4  //Comando para imprimir somente o que foi pedido
5  verbosity=0;
6
7  //Definindo o contorno
8  border ba(t=-1.0,0.0){x=t; y=-1; label=1;}; // see Fig,5.15
9  border bb(t=0,1){x=0; y=-1+t; label=2;};
10 border bc(t=0,1){x=t; y=0; label=3;};
11 border bd(t=0,1){x=1; y=t; label=4;};
12 border be(t=0,1){x=1-2*t; y=1; label=5;};
13 border bf(t=0,1){x=-1; y=1-2*t; label=6;};
14
15 //Gera a malha
16 mesh Th = buildmesh (ba(5) + bb(5) + bc(5) +bd(5) + be(5) + bf(5));
17
18 //Gera os espacos de funcoes
19 fespace Vh(Th,P1);
20 fespace Nh(Th,P0);
21 Vh phi,w;
22 Nh rho;
23
24 //Funcao f

```

```

25 func f=1;
26
27 //Calculo do estimador residual
28 varf estimador(uu,chiK) =
29 intalldges(Th)(chiK*lenEdge*square(jump(N.x*dx(phi)+N.y*dy(phi)))+int2d(Th)(chiK*
    square(hTriangle*(f+dxx(phi)+dyy(phi))));
30
31 real[int] normaH1(5);
32 real[int] erroRes(5);
33 real cpu;
34 real[int] time(5);
35
36 //Gera as aproximacoes com refinamento uniforme
37 for(int n=0;n<5;n++){
38
39     cpu = clock();
40
41     //Obtem as aproximacoes pelo MEF
42     solve laplace(phi,w)=int2d(Th)(dx(phi)*dx(w) + dy(phi)*dy(w))- int2d(Th)(f*w) + on
        (1,2,3,4,5,6, phi = 0);
43
44     time[n]=1000*(clock()-cpu);
45
46     //Plotando a malha
47     plot(Th, wait=1);
48
49     //Plotando a aproximacao obtida
50     plot(phi, wait=1, value=1, fill=1, cmm="Aproximacao obtida");
51
52     //Calculo do estimador residual
53     Nh etak;
54     etak[]=estimador(0,Nh);
55
56     //Calculando a norma H1 da solucao
57     normaH1[n] = sqrt(int2d(Th)((phi)^2) + int2d(Th)((dx(phi))^2) + int2d(Th)((dy(phi)
        )^2));
58
59     //Calculo do erro do estimador
60     erroRes[n]= sqrt(etak[].sum);
61
62     //Imprime os dados
63     cout << " NV = " << Th.nv << " NT = " << Th.nt << " Erro estimado: " << erroRes[n]
        << " E = " << erroRes[n]/normaH1[n] << " Tempo Computacional = " << time(n) <<
        endl;
64     plot(Th, etak, wait=1, value=1, fill=1, cmm="Estimativa residual");
65
66     //Refinamento da malha
67     Th=trunc(Th,1, split=2);
68     phi=phi;
69     rho=rho;
70 }

```

Listing B.4: testes_cap3/teste2_adapt.edp

```

1 /*-----Problema modelo 2: Problema com singularidade -----*/
2 /*-----Refinamento adaptativo-----*/
3
4 //Comando para imprimir somente o que foi pedido
5 verbosity=0;
6
7 /*-----Refinamento adaptativo
    .-----*/
8 /*Codigo disponivel em freefem++/examples++-tutorial/AdaptResidualErrorIndicator.
    edp */
9

```

```

10 // macro the get the current mesh size
11 // parameter
12 // in: Th the mesh
13 //      Vh P1 fespace on Th
14 // out :
15 // h: the Vh finite element finite set to the current mesh size
16 macro MeshSizecomputation(Th,Vh,h)
17 { /* Th mesh
18     Vh P1 finite element space
19     h the P1 mesh size value */
20     real[int] count(Th.nv);
21     /* mesh size (lenEdge = $\int_e 1$) */
22     varf vmeshsizen(u,v)=intalldges(Th,qfnbpE=1)(v);
23     /* number of edge / par vertex */
24     varf vedgecount(u,v)=intalldges(Th,qfnbpE=1)(v/lenEdge);
25     /*
26         computation of the mesh size
27         _____ */
28     count=vedgecount(0,Vh);
29     h[]=0.;
30     h[]=vmeshsizen(0,Vh);
31     h[]=h[]./count;
32 } // end of macro MeshSizecomputation
33
34 // macro to remesh according the de residual indicator
35 // in:
36 //      Th the mesh
37 //      Nh P0 fespace on Th
38 //      Vh P1 fespace on Th
39 //      vindicator the varf of to evaluate the indicator to ^2
40 //      coef on etameam ..
41 // _____
42 macro ReMeshIndicator(Th,Nh,Vh,vindicator,coef)
43 {
44     Vh h=0;
45     /*Avalia o tamanho da malha */
46     MeshSizecomputation(Th,Vh,h);
47     Nh etak;
48     etak[]=vindicator(0,Nh);
49     etak[]=sqrt(etak[]);
50     real etastar=coef*(etak[].sum/etak[].n);
51
52     /* Calcula o novo espacamento */
53
54     Vh fn,sigma;
55     varf veta(used,v)=int2d(Th)(etak*v);
56     varf vun(used,v)=int2d(Th)(1*v);
57     fn[] = veta(0,Vh);
58     sigma[] = vun(0,Vh);
59     fn[]=fn[]./sigma[];
60     fn = max(min(fn/etastar,3.),0.3333);
61
62     /* new mesh size */
63     h = h / fn;
64     /*plot(h,wait=1);*/
65     Th=adaptmesh(Th,IsMetric=1,h,splitpbedge=1,nbv=10000);
66 }
67
68 /*-----Problema modelo 2: Problema com singularidade
69         -----*/
70
71 //Definindo o contorno
72 border ba(t=-1.0,0.0){x=t; y=-1; label=1;};
73 border bb(t=0,1){x=0; y=-1+t; label=2;};
74 border bc(t=0,1){x=t; y=0; label=3;};

```

```

74 | border bd(t=0,1){x=1; y=t; label=4;};
75 | border be(t=0,1){x=1-2*t; y=1; label=5;};
76 | border bf(t=0,1){x=-1; y=1-2*t; label=6;};
77 |
78 | //Geracao da malha
79 | mesh Th = buildmesh (ba(5) + bb(5) + bc(5) +bd(5) + be(5) + bf(5));
80 |
81 | //Definicao dos espacos de elementos finitos
82 | fespace Vh(Th,P1);
83 | fespace Nh(Th,P0); // Armazena o indicador do erro
84 |
85 | Vh u,v; //Espacos de funcoes
86 | real cc=0.65; //Constante para o refinamento adaptativo
87 |
88 | func f=1;
89 |
90 | //Resolve o problema -laplaciano u = f
91 | problem Poisson(u,v) =
92 |   int2d(Th,qforder=5)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v))
93 | - int2d(Th,qforder=5)( f*v)+ on(1,2,3,4,5,6, u = 0);
94 |
95 | //estimador residual
96 | varf estimadorResidual( unused,chiK) =
97 |   intalldges(Th)( chiK*lenEdge*square(jump(N.x*dx(u)+N.y*dy(u)))
98 | +int2d(Th)( chiK*square( hTriangle*(f+dx(x(u))+dy(y(u))) ) );
99 |
100 | real[int] normaH1(5);
101 | real[int] erroRes(5);
102 | real cpu;
103 | real[int] time(5);
104 |
105 | //Gera as aproximacoes com refinamento adaptativo
106 | for (int n=0;n< 5;n++){
107 |   //Obtem as aproximacoes
108 |   u=u;
109 |   cpu = clock();
110 |   Poisson;
111 |   time[n]=1000*( clock()-cpu);
112 |
113 |   //Calculando a norma H1 da solucao
114 |   normaH1[n] = sqrt( int2d(Th)((u)^2) + int2d(Th)((dx(u))^2) + int2d(Th)((dy(u))^2));
115 |
116 |   //Calculo do estimador residual
117 |   Nh etak;
118 |   etak[]= estimadorResidual(0,Nh);
119 |
120 |   //Calculo do erro residual
121 |   erroRes[n]= sqrt( etak[].sum);
122 |
123 |   //Imprime os dados
124 |   cout << " NV = " << Th.nv << " NT = " << Th.nt << " Erro estimado: " << erroRes[n]
125 |     << " E = " << erroRes[n]/normaH1[n] << " Tempo Computacional = " << time(n) <<
126 |     endl;
127 |   plot(u, wait=1, value=1, fill=1, cmm="Aproximacao Obtida");
128 |
129 |   //Refina a malha
130 |   ReMeshIndicator(Th,Nh,Vh, estimadorResidual, cc);
131 | }

```

Listing B.5: testes_cap4/teste3_unif.edp

```

1 | /*----- Problema modelo 3: Elasticidade Linear-----*/
2 | /*-----Refinamento uniforme-----*/
3 | //Imprime somente o que foi pedido
4 | verbosity = 0;

```

```

5  /*----- Analise do problema: placa com furo circular central
6      -----*/
7  // Geometria (fronteira parametrizada por t)
8  border a(t=0,2*pi){x=0.5+0.2*sin(t);y=1.0+0.2*cos(t);label=1;};
9  border b(t=0,1){x=t;y=0;label=2;};
10 border c(t=0,2){x=1;y=t;label=3;};
11 border d(t=0,1){x=1-t;y=2;label=4;};
12 border e(t=0,2){x=0;y=2-t;label=5;};
13
14
15 //Variaveis auxiliares
16 int NITER = 4;          // numero de iteracoes de refinamento
17 real coef = 1e6;        // Coeficiente auxiliar para plotar os resultados
18 real[int] erroRes(NITER); // Armazena o erro residual cometido]
19 real cpu;
20 real[int] time(5);
21
22 //Parametros do problema
23 real E = 7e10;          // Modulo de Elasticidade (Young's modulus)
24 real nu = 0.28;         // Coeficiente de Poisson
25 real Forcex= 0;         // Forca horizontal
26 real Forcey= 5e3;       // Forca vertical
27 real rhsx=0;            // Forca de campo f na direcao x
28 real rhsy=0;            // Forca de campo f na direcao y
29
30 // Variaveis dependentes
31 real mu = E/(2*(1+nu)); // Modulo de rigidez
32 real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)); // Constantes de Lamé
33 real lm=lambda+mu, l2m=lambda+2*mu; // variaveis auxiliares
34
35 cout << "lambda,mu,Force ="<<lambda<< " " << mu << " " << Forcey << endl;
36
37 mesh Th = buildmesh(a(30)+b(10)+c(10)+d(10)+e(10)); // Th: initial mesh with
38     prescribed number of knots on borders
39 plot(Th,wait=1, cmm="Discretizacao inicial");
40
41 //Espacos de funcoes
42 fespace Vh(Th,[P2,P2]);
43 Vh [u1,u2], [v1,v2];
44 fespace zVh(Th,P1);
45 fespace Gh(Th,P1);
46 fespace Nh(Th,P0);
47 //Componentes para o tensor de tracoes
48 zVh s11, s22, s12, DS;
49
50 // macros para a formulacao fraca
51 macro Div(u1,u2) (dx(u1)+dy(u2)) // end of macro
52 macro Strain(u1,u2,v1,v2) (dx(u1)*dx(v1)+0.5*(dy(u1)+dx(u2))*(dy(v1)+dx(v2))+dy(u2)*
53     dy(v2)) // end of macro
54
55 problem Beam([u1,u2],[v1,v2])=
56     int2d(Th) ( lambda*Div(u1,u2)*Div(v1,v2) + 2*mu*Strain(u1,u2,v1,v2) )
57     +int2d(Th) ( rhsy*v2)
58     -int1d(Th,4) ( Forcey*v2)
59     + on(2,u1=0,u2=0);
60
61
62 macro DivStressx(u1,u2) (l2m*dxx(u1)+lm*dxy(u2)+mu*dyy(u1)) // end of macro
63 macro DivStressy(u1,u2) (l2m*dyy(u2)+lm*dxy(u1)+mu*dxx(u2)) // end of macro
64 macro StressNx(u1,u2) ((l2m*dx(u1)+lambda*dy(u2))*N.x + mu*(dx(u2)+dy(u1))*N.y) //
65     end of macro

```



```

65 macro StressNy(u1,u2) (mu*(dx(u2)+dy(u1))*N.x + (l2m*dy(u2)+lambda*dx(u1))*N.y) //
    end of macro
66
67 varf EstimadorResidual(unused,chiK) =
68     int2d(Th)(chiK*square(hTriangle)*(square(rhsx+DivStressx(u1,u2))+square(rhsy+
        DivStressy(u1,u2))))
69     +intalldges(Th)(chiK*lenEdge*(square(jump(StressNx(u1,u2))) + square(jump(
        StressNy(u1,u2))))
70     +int1d(Th,d)(chiK*lenEdge*(square(StressNx(u1,u2)-Forcex)+square(StressNy(u1,u2)
        -Forcey)));
71
72
73 for (int n=0; n < NITER; n++){
74
75     cpu = clock();
76     Beam; // Obtem as aproximacoes
77     time[n]=1000*(clock()-cpu);
78
79     s11= lambda*(dx(u1)+dy(u2))+2*mu*dx(u1); // Tensao na direcao x
80     s22= lambda*(dx(u1)+dy(u2))+2*mu*dy(u1); // Tensao na direcao y
81     s12= mu*(dx(u1)+dy(u2)); // Tensao de cisalhamento
82     DS= (abs(s11+s22)+sqrt((s11-s22)^2+s12^2))/2;
83
84     //Aplica o deslocamento obtido na malha
85     mesh th1 = movemesh(Th, [x+coef*u1, y+coef*u2]);
86
87     //Calculo do estimador residual
88     Nh etak;
89     etak[]= EstimadorResidual(0,Nh);
90
91     //Calculo do erro do estimador
92     erroRes[n]= sqrt(etak[].sum);
93
94     //Imprime os dados
95     cout << "NN = " << Th.nv << " NT = " << Th.nt << " etak = min " << etak[].min << "
        max=" << etak[].max << " Erro estimado: " << erroRes[n] << " Tempo Computacional
        = " << time(n) << endl;
96
97     //Gera as imagens
98     plot(Th,etak,wait=1,value=1,fill=1,cmm="Estimativa residual");
99     plot([u1,u2],value=true,wait=1,cmm="Deslocamentos nodais");
100    plot(th1,wait=1,cmm="Dominio deslocado");
101
102    //Refinamento da malha
103    Th=trunc(Th,1,split=2);
104    [u1,u2]=[u1,u2];
105    plot(Th,wait=1,cmm="Nova Discretizacao");
106 }

```

Listing B.6: testes_cap4/teste3_adapt.edp

```

1  /*----- Problema modelo 3: Elasticidade Linear -----*/
2  /*-----Refinamento adaptativo-----*/
3
4  //Imprime somente o que foi pedido
5  verbosity = 0;
6
7  /*-----Refinamento adaptativo
    .-----*/
8  /*Codigo disponivel em http://www.igpm.rwth-aachen.de/Download/ws0708/NumaIngII/
    elbow.edp */
9
10 // macro to get the current mesh size
11 // parameter
12 // in: Th the mesh

```

```

13 //      Gh  P1 FE-space on Th
14 //  out :
15 //      h: the Gh finite element set to the current mesh size
16 macro MeshSizecomputation(Th,Gh,h)
17 { /* Th mesh
18   Gh  P1 finite element space
19   h   the P1 mesh size value */
20   real[int] count(Th.nv);
21   /* mesh size (lenEdge = $\int_e 1$) */
22   varf vmeshsize(u,v)=intalldges(Th,qfnpE=1)(v);
23   /* number of edge / par vertex */
24   varf vedgecount(u,v)=intalldges(Th,qfnpE=1)(v/lenEdge);
25   /*
26     computation of the mesh size
27     _____ */
28   count=vedgecount(0,Gh);
29   h[]=0.;
30   h[]=vmeshsize(0,Gh);
31
32   h[]=h[]./count;
33 } // end of macro MeshSizecomputation
34
35 // macro to remesh according the de residual indicator
36 // in:
37 //      Th the mesh
38 //      Ph  P0 fespace on Th
39 //      Gh  P1 fespace on Th
40 //      vindicator the varf of to evaluate the indicator to ^2
41 //      coef on etameam ..
42 // _____
43 macro ReMeshIndicator(Th,Ph,Gh,vindicator,coef)
44 {
45   Gh h=0;
46   Ph etak;
47   etak[]=vindicator(0,Ph);
48   etak[]=sqrt(etak[]);
49
50   /*evalutate the mesh size */
51   MeshSizecomputation(Th,Gh,h);
52
53   real etastar= coef*(etak[].sum/etak[].n);
54   /* here etaK is discontinous
55     we use the P1 L2 projection with mass lumping . */
56
57   Gh fn,nu;
58   varf veta(unused,v)=int2d(Th)(etak*v);
59   varf vun(unused,v)=int2d(Th)(1*v);
60   fn[] = veta(0,Gh);
61   nu[]= vun(0,Gh);
62   fn[]= fn[]./ nu[];
63   fn = max(min(fn/etastar,3.),0.3333);
64
65   /* new mesh size */
66   h = h / fn ;
67   Th=adaptmesh(Th,IsMetric=1,h,splitpbedge=1,nbv=10000);
68 } // end of macro ReMeshIndicator
69
70
71 /*_____ Analise do problema: placa com furo circular central
72 _____*/
73
74 // Geometria (fronteira parametrizada por t)
75 border a(t=0,2*pi){x=0.5+0.2*sin(t);y=1.0+0.2*cos(t);label=1;};
76 border b(t=0,1){x=t;y=0;label=2;};
77 border c(t=0,2){x=1;y=t;label=3;};

```

```

77 | border d(t=0,1){x=1-t;y=2;label=4;};
78 | border e(t=0,2){x=0;y=2-t;label=5;};
79 |
80 |
81 | // Variaveis independentes
82 | int NITER = 4; // Numero de iteracoes de refinamento
83 | real[int] erroRes(NITER); // Armazena o erro residual cometido
84 | real cpu;
85 | real[int] time(5);
86 |
87 | real cc = 0.7; // Parametro para refinamento da malha
88 | real E = 7e10; // Modulo de elasticidade
89 | real nu = 0.28; // Coeficiente de Poisson
90 | //Forcas aplicadas
91 | real Forcex= 0; // Forca horizontal
92 | real Forcey= 5e3; // Forca vertical
93 | real rhsx=0; // Forca de campo f na direcao x
94 | real rhsy=0; // Forca de campo f na direcao y
95 |
96 | real coef = 1e6; // Coeficiente auxiliar para plotar os resultados
97 |
98 | // Variaveis dependentes
99 | real mu = E/(2*(1+nu)); // Modulo de rigidez
100 | real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)); // Constantes de Lamé
101 | real lm=lambda+mu, l2m=lambda+2*mu; // variaveis auxiliares
102 |
103 | cout << "lambda,mu,Force ="<<lambda<< " " << mu << " " << Forcey << endl; //Imprime
    | as forcas
104 |
105 | //Gera e plota a malha inicial
106 | mesh Th = buildmesh(a(30)+b(10)+c(10)+d(10)+e(10));
107 | plot(Th, wait=1, cmm="Discretizacao inicial");
108 |
109 | //Espacos de funcoes
110 | fespace Vh(Th,[P2,P2]);
111 | Vh [u1,u2], [v1,v2];
112 | fespace zVh(Th,P1);
113 | fespace Gh(Th,P1);
114 | fespace Nh(Th,P0);
115 | //Componentes para o tensor de tracoes
116 | zVh s11, s22, s12, DS;
117 |
118 | // Macros para a formulacao fraca
119 | macro Div(u1,u2) (dx(u1)+dy(u2)) // end of macro
120 | macro Strain(u1,u2,v1,v2) (dx(u1)*dx(v1)+0.5*(dy(u1)+dx(u2))*(dy(v1)+dx(v2))+dy(u2)*
    | dy(v2)) // end of macro
121 |
122 |
123 | problem Beam([u1,u2],[v1,v2])=
124 |   int2d(Th) ( lambda*Div(u1,u2)*Div(v1,v2) + 2*mu*Strain(u1,u2,v1,v2) )
125 |   +int2d(Th) ( rhsy*v2 )
126 |   -int1d(Th,4) ( Forcey*v2 )
127 |   + on(2,u1=0,u2=0);
128 | ;
129 |
130 |
131 | macro DivStressx(u1,u2) (l2m*dxx(u1)+lm*dxy(u2)+mu*dyy(u1)) // end of macro
132 | macro DivStressy(u1,u2) (l2m*dyy(u2)+lm*dxy(u1)+mu*dxx(u2)) // end of macro
133 | macro StressNx(u1,u2) ((l2m*dx(u1)+lambda*dy(u2))*N.x + mu*(dx(u2)+dy(u1))*N.y) //
    | end of macro
134 | macro StressNy(u1,u2) (mu*(dx(u2)+dy(u1))*N.x + (l2m*dy(u2)+lambda*dx(u1))*N.y) //
    | end of macro
135 |
136 | varf EstimadorResidual(unused,chiK) =

```

```

137     int2d(Th)(chiK*square(hTriangle)*(square(rhsx+DivStressx(u1,u2))+square(rhsy+
138         DivStressy(u1,u2))))
139 +intalledges(Th)(chiK*lenEdge*(square(jump(StressNx(u1,u2))) + square(jump(
140     StressNy(u1,u2))))
141 +int1d(Th,d)(chiK*lenEdge*(square(StressNx(u1,u2)-Forcex)+square(StressNy(u1,u2)
142     -Forcey)));
143
144 for (int n=0; n < NITER; n++){
145     cpu = clock();
146     Beam; // Obtem as aproximacoes
147     time[n]=1000*(clock()-cpu);
148
149     s11= lambda*(dx(u1)+dy(u2))+2*mu*dx(u1); // Tensao na direcao x
150     s22= lambda*(dx(u1)+dy(u2))+2*mu*dy(u1); // Tensao na direcao y
151     s12= mu*(dx(u1)+dy(u2)); // Tensao de cisalhamento
152     DS= (abs(s11+s22)+sqrt((s11-s22)^2+s12^2))/2;
153
154     //Aplica o deslocamento obtido na malha
155     mesh th1 = movemesh(Th, [x+coef*u1, y+coef*u2]);
156
157     //Calculo do estimador residual
158     Nh etak;
159     etak[]=EstimadorResidual(0,Nh);
160
161     //Calculo do erro do estimador
162     erroRes[n]= sqrt(etak[].sum);
163
164     //Imprime os dados
165     cout << "NN = "<< Th.nv << " NT = " << Th.nt << " etak = min " << etak[].min << "
166         max=" << etak[].max <<" Erro estimado: " << erroRes[n] <<" Tempo Computacional
167         = " << time(n) << endl;
168
169     //Gera as imagens
170     plot(Th, etak, wait=1, value=1, fill=1, cmm="Estimativa residual");
171     plot([u1, u2], value=true, wait=1, cmm="Deslocamentos nodais");
172     plot(th1, wait=1, cmm="Dominio deslocado");
173
174     ReMeshIndicator(Th, Nh, Gh, EstimadorResidual, cc); // adaptation
175     plot(Th, wait=1, cmm="Nova Discretizacao");
176 }

```

Apêndice C

Figuras

Neste apêndice encontram-se as figuras obtidas nas simulações em seus tamanhos originais.

C.1 Problema de Poisson

C.1.1 Problema 3.16

Aproximacao obtida

Figura C.1: Aproximação obtida com elementos lineares - Fig (3.2a)

Estimativa residual

Figura C.2: Residuo obtido na aproximação - Fig (3.2b)

Aproximacao obtida

Figura C.3: Aproximação obtida na primeira iteração do refinamento uniforme - Fig (3.3a)

Figura C.4: Residuo obtido na aproximação da malha gerada pela primeira iteração do refinamento uniforme - Fig (3.3b)

Figura C.5: Aproximação obtida na primeira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.4a)

Estimador Residual

Figura C.6: Residuo obtido na aproximação da malha gerada pela primeira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.4b)

Aproximacao obtida

Figura C.7: Aproximação obtida na quarta iteração do refinamento uniforme - Fig (3.5a)

Figura C.8: Residuo obtido na aproximação da malha gerada pela quarta iteração do refinamento uniforme - Fig (3.5b)

Figura C.9: Aproximação obtida na quarta iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.6a)

Estimador Residual

Figura C.10: Residuo obtido na aproximação da malha gerada pela quarta iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.6b)

Estimador Residual

Figura C.11: Estimador residual obtido na primeira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.7a)

Estimador Residual

Figura C.12: Estimador residual obtido na segunda iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.7b)

Estimador Residual

Figura C.13: Estimador residual obtido na terceira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.7c)

Estimador Residual

Figura C.14: *Estimador residual obtido na quarta iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.7d)*

C.1.2 Problema 3.17

Aproximacao obtida

Figura C.15: Aproximação inicial para o problema 3.17 - Fig (3.9a)

Estimativa residual

Figura C.16: Estimador residual obtido para a aproximação inicial - Fig (3.9b)

Aproximacao obtida

Figura C.17: Aproximação obtida na primeira iteração do refinamento uniforme - Fig (3.10a)

Estimativa residual

Figura C.18: Estimador residual obtido na primeira iteração do refinamento uniforme - Fig (3.10b)

Figura C.19: Aproximação obtida na primeira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.11a)

Figura C.20: Estimador residual obtido na primeira iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.11b)

Figura C.21: Aproximação obtida na quarta iteração do refinamento uniforme - Fig (3.12a)

Figura C.22: Estimador residual obtido na quarta iteração do refinamento adaptativo - Fig (3.12b)

C.2 Elasticidade Linear

Deslocamentos nodais

Figura C.23: Aproximação inicial para o problema da placa com furo - Fig (4.2a)

Estimativa residual

Figura C.24: *Estimador residual obtido na aproximação inicial - Fig (4.2b)*

Deslocamentos nodais

Figura C.25: Deslocamento obtido na terceira iteração de refinamento uniforme - Fig (4.4a)

Estimativa residual

Figura C.26: *Estimador residual obtido na terceira iteração de refinamento uniforme - Fig (4.6a)*

Estimativa residual

Figura C.27: Estimador residual obtido na terceira iteração de refinamento adaptativo - Fig (4.6b)

Referências Bibliográficas

- [1] J. O. L. Demkowicz and T. Strouboulis, “Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part 1: Variational principles and a posteriori error estimates,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 46, pp. 217–251, 1984. [1](#), [2](#), [47](#)
- [2] J. O. L. Demkowicz and T. Strouboulis, *An adaptive p-version finite element method for transient flow problems with moving boundaries*. John Wiley, 1985. [1](#), [2](#), [47](#)
- [3] R. Bank, “Analysis of a local a posteriori error estimat for elliptic equations,” *In Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, vol. 32, pp. 119–128, 1984. [1](#), [2](#), [47](#)
- [4] R. Bank and A. Weiser, “Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations,” *Math. Comp.*, vol. 44, pp. 283–301, 1985. [1](#), [2](#), [47](#)
- [5] I. Babutka and W. Rheinboldt, “A posteriori error estimates for the finite element method,” *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 12, pp. 1597–1615, 1978. [1](#)
- [6] I. Babutka and W. Rheinboldt, “Error estimates for adaptive finite element computations,” *SIAM - J. Numer. Analysis*, vol. 18, pp. 736–754, 1978. [2](#)
- [7] I. Babutka and W. Rheinboldt, “A posteriori error analysis of finite element solutions for one dimensional problems,” *SIAM - J. Numer. Analysis*, vol. 18, pp. 565–589, 1981. [2](#)
- [8] P. Ladevèze and D. Leguillon, “Error estimate procedure in the finite element method and applications,” *SIAM - J. Numer. Analysis*, vol. 20, pp. 485–509, 1983. [2](#)
- [9] D. Kelly, “The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method,” *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 20, pp. 1491–1506, 1984.
- [10] B. A. Szabo, “Estimation and control of error based on p-convergence,” *In Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, vol. 32, pp. 61–70. [2](#)
- [11] M. Ainsworth and J. Oden, *A posteriori error estimation in Finite Element Analysis*. Wiley, 1st ed., 2000. [2](#)
- [12] T. Grätsch and K.-J. Bathe, “A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis,” *Computer & Structures*, vol. 83, pp. 235–265, 2005. [2](#)
- [13] R. Verfuth, *A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods*. Oxford University Press, 2013. [2](#)
- [14] R. Verfuth, “A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems,” *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, vol. 176, pp. 419–440, 1999. [2](#), [39](#)
- [15] S. C. Brenner and L. Scott, *Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 3rd ed., 2008. [2](#), [5](#), [6](#), [7](#), [8](#), [39](#), [41](#)

- [16] D. Braess, *Finite Elements - Theory, fast solvers and applications in solid mechanics*. Cambridge, 3rd ed., 2007. 2, 5, 7, 10, 14, 39, 41
- [17] E. S. Watchen, *Finite Elements and Fast Iterative Solvers with applications in incompressible fluid dynamics*. Oxford University Press, 2006. 2
- [18] F. Hecht, *FreeFem++, Version 3.32*. 3rd ed., 2014. 2, 5, 18, 19, 21
- [19] K. Atkinson and W. Han, *Theoretical Numeric Analysis: A Functional Analysis Framework*. Springer, 2nd ed., 2008. 5, 7, 8
- [20] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998. 7
- [21] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Oxford, 1978. 10
- [22] J. E. Flaherty, “Course notes - finite element analysis,” <http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/>. ix, 16
- [23] G. Strang and G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1973. 35