**Estimativas de erro para discretizações do Laplaciano por
métodos de volumes finitos em malhas esféricas geodésicas
icosaédricas**

Leonardo Andrés Poveda Cuevas

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Saulo Rabello Maciel de Barros
Coorientador: Prof. Dr. Pedro da Silva Peixoto

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, janeiro de 2021

Estimativas de erro para discretizações do Laplaciano por métodos de volumes finitos em malhas esféricas geodésicas icosaédricas

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 22/01/2021. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Saulo Rabello Maciel de Barros (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira - IME-USP
- Prof. Dr. André Pierro de Camargo - UFABC
- Prof. Dr. Marcus Antonio Mendonça Marrocos - UFABC
- Prof. Dr. Gaetano Siciliano - IME-USP

Agradecimentos

Quero expressar um agradecimento a meu orientador, o Professor Saulo, pela orientação, a paciência e as valiosas discussões durante o desenvolvimento deste trabalho. Lembrarei dele a ideia de que no final do doutorado eu deveria me tornar uma pessoa com sentido crítico. Ao Professor Pedro Peixoto pelo acompanhamento, as discussões e as sugestões da implementação numérica requerida no processo do trabalho. Tenho que agradecer também aos professores do IME pelas disciplinas cursadas. Agradeço aos membros da banca, por aceitarem o convite, pela leitura e as distintas sugestões para o trabalho.

Eu não teria conseguido chegar até aqui sem a companhia das pessoas mais importantes da minha vida. Agradeço principalmente a minha esposa Paola, quem com seu amor, paciência e compreensão incondicional contribuiu em me animar sempre em seguir em frente, além de incentivar diversas ideias que surgiram nas nossas extraordinárias discussões no caminho à Universidade e a ajuda com a revisão da tese. Aos meus pais, Aura Rosa e Fredy, que sempre me apoiaram e incentivaram em todos os meus caminhos pessoais e profissionais. Aos meus irmãos Jackson e Alejandro e a minha irmã Laura, pela confiança, companhia, apoio abrangente e por compartilhar aquelas risadas nos diferentes momentos das nossas vidas. A minha sogra Irene que me apoiou e acompanhou com as suas bênçãos e orações cada dia. À minha cunhada Jhohana (*in memoriam*) e aos meus cunhados Vladimir e Gustavo por desejar sempre o melhor para mim e para Paola.

Às minhas colegas do LabMap: Simone Brito, pela sua amizade, a generosidade e a ajuda nos momentos diversos, Larissa Sartori, pela amizade, as conversas de ânimo e o suporte no caminho. Demonstro igualmente minha gratidão pela amizade que sempre me ofereceram: Sandra Suárez, Vanessa Borges, Vanessa Steindorf, Laura Forero, Bruna Cassol e Ana “Anita” Rojas. Agradeço também aos meus colegas do IME: Carolina Torres, Diana, Jerusa, Sueni, Pollyanna, Luana, Camilo Angulo, Edwin Múrcia, Diego Ruge, Gregório, Lucas, Allan e German Benitez.

Destaco o enorme apoio recebido do meu grande amigo da faculdade e colega no IME, Alirio Gomez, nos momentos difíceis e que após vários bate-papos acadêmicos e filosóficos sobre os desafios da matemática, sempre mostrou um entusiasmo que indiretamente contribuiu no desenvolvimento desta pesquisa. Agradeço também ao Carlos Wilson e a Adriana por todos aqueles bons momentos vividos em São Paulo.

Agradeço à Professora Carla Columbano do IQ-USP, a orientadora da Paola, por permitir invadir os espaços da sala de estudo e pelo seu apoio financeiro a Paola, que indiretamente me beneficiou nestes últimos anos.

Agradeço à CAPES o apoio financeiro. Também a Comissão de Monitoria IME-USP.

Finalmente, quero agradecer a todos os funcionários, em especial as funcionárias do café, que fazem do IME um ótimo ambiente de trabalho. Além, aos funcionários da BIME, aos funcionários do SAS, aos funcionários do CRUSP, aos funcionários do CEPEUSP, aos funcionários da segurança e da limpeza e aos funcionários dos Restaurantes universitários da USP.

Resumo

CUEVAS, Leonardo A. P. **Estimativas de erro para discretizações do Laplaciano por métodos de volumes finitos em malhas esféricas geodésicas icosaédricas**. 2021. 115 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

A presente tese concentra-se no estudo de estimativas de erro das soluções aproximadas da discretização do Laplaciano pelo Método clássico de Volumes Finitos na esfera unitária $\mathbb{S}^2$. Inicialmente e conforme a literatura, estabelecemos a boa colocação do problema de Poisson em $\mathbb{S}^2$. Em seguida, apresentamos a construção recursiva usual das malhas esféricas geodésicas icosaédricas (NOPT) e esboçamos propriedades geométricas essenciais como o princípio de dualidade Voronoï-Delaunay e as otimizações SCVT e HR95, sendo que a precisão da soluções aproximadas depende da qualidade da malha.

Definida a estrutura, introduzimos uma discretização do Laplaciano via um Método clássico de Volumes Finitos (MVF). De forma geral, ao usar este método, frequentemente aparece uma perda da consistência causada pela não uniformidade da malha; mas isso não implica necessariamente em perda de convergência. Esse fato foi a motivação principal para o desenvolvimento deste trabalho. Nesse sentido, analisamos taxas de convergência através de uma abordagem mais tradicional, que consiste em reescrever o MVF como um Método de Elementos Finitos Lineares (MEFL) e usar a teoria de aproximação disponível dos MEFL. Aqui, mostramos estimativas clássicas *a priori* de primeira ordem nas normas H^1 e L^2 de forma direta.

O principal resultado deste trabalho são estimativas nas normas $W^{1,\infty}$ e L^∞ com ordem sub-linear em relação ao tamanho de malha. Tais estimativas são obtidas através do uso de funções de Green regularizadas em $\mathbb{S}^2$, combinadas com a relação entre o método de volumes finitos com elementos finitos. No caso de uso de uma malha SCVT a convergência nestas normas é super-linear (quase quadrática). Apresentamos exemplos numéricos confirmando as estimativas do erro, evidenciando que ao menos tais ordens de convergência são atingidas.

Palavras-chave: Laplaciano, malha esférica icosaédrica, volumes finitos, estimativas de erro *a priori*, estimativas pontuais, estimativas em norma uniforme.

Abstract

CUEVAS, Leonardo A. P. **Error estimates for discretizations of the Laplacian by finite volume methods on spherical geodesic icosahedral grids.** 2021. 115 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

In this work, we focus on the study of error estimates of the approximate solutions of a Poisson equation on the unit sphere $\mathbb{S}^2$, discretized by a classical Finite Volume Method (FVM). Initially and according to the literature, we establish the well-posedness of the problem. Next, we present the usual recursive construction of the spherical icosahedral geodesic grids (NOPT). We sketch essential geometric properties as the duality principle of Voronoï-Delaunay and SCVT and HR95 optimizations, since the precision of approximate solutions depends on the quality of the grid.

The usual finite volume discretization of the Laplacian on icosahedral spherical grids presents a loss of consistency, caused by non-uniformity of the grids. However, this does not necessarily imply in a degradation of convergence. This fact was the main motivation for the development of this work. In this sense, we analyse convergence rates through a more traditional approach, which consists on rewriting the FVM as a Linear Finite Element Method (LFEM) and use the available LFEM approximation theory. Here we present some classical *a priori* first order estimates in H^1 and L^2 -norms.

The main contribution of this work are estimates in the $W^{1,\infty}$ and L^∞ -norms with sub-linear order concerning the mesh size. The proofs employ regularized Green's functions on $\mathbb{S}^2$, combined with the finite element formulation for the finite volume method. In the case of the SCVT grid we obtain super-linear (almost quadratic) convergence estimates. Numerical examples evidence that the convergence is at least as good as predicted.

Keywords: Laplacian, finite volume, spherical icosahedral grids, *a priori* error estimates, pointwise estimates, uniform error estimates.

Sumário

Lista de Abreviaturas	ix
Lista de Símbolos	xi
Introdução	xv
1 Preliminares	1
1.1 Propriedades geométricas em $\mathbb{S}^2$	1
1.2 Espaços de funções	2
1.3 Espaços de Sobolev em $\mathbb{S}^2$	4
1.3.1 Espaço quociente	5
1.4 O modelo contínuo	5
1.4.1 Uma formulação variacional	6
2 Malhas esféricas geodésicas icosaédricas	9
2.1 Estruturas de malhas na esfera	9
2.2 Malhas esféricas icosaédricas	10
2.2.1 Construção recursiva	10
2.2.2 Decomposição Voronoï-Delaunay	12
2.3 Otimização	17
2.3.1 Malha esférica centroidal de Voronoï (SCVT)	17
2.3.2 Proposta de Heikes & Randall (HR95)	19
3 Discretização do Laplaciano	21
3.1 Métodos dos volumes finitos	21
3.2 Erro de truncamento	27
3.2.1 Experimentos numéricos	28
3.3 Relação MVF–MEFL e estabilidade	29
3.3.1 Correspondência geométrica	30
3.3.2 Espaços de aproximação	32
3.3.3 Estabilidade	37
3.3.4 Estimções do erro geométrico	39
4 Estimativas <i>a priori</i> do erro	45
4.1 Estimativas clássicas na H^1 e L^2 -norma	45
4.2 Estimativas na max-norma	52
4.2.1 Funções de Green em $\mathbb{S}^2$	52

4.3 Experimentos numéricos	61
Conclusões	65
A Erro de consistência	67
A.1 Uma condição de consistência fraca	67
A.1.1 Prova da Proposição 3.5	69
A.1.2 Prova da Proposição 3.6	72
B Elementos de cálculo e geometria esférica	79
B.1 Fórmula de Taylor e desigualdade de valor médio	79
B.2 Coordenadas geográficas	79
B.3 Distâncias geodésicas	80
B.4 Áreas geodésicas	80
B.5 Mudança de variável	80
B.5.1 Operadores diferenciais	81
C Elementos de álgebra linear	83
C.1 Considerações técnicas	83
C.2 Existência da solução discreta	83
C.3 Método de Gauss-Seidel SOR (Successive over relaxation)	84
Referências Bibliográficas	87

Lista de Abreviaturas

EDP	Equação Diferencial Parcial (<i>Partial Differential Equation</i>)
NOPT	Malha esférica geodésica icosaédrica não otimizada
SCVT	Malha esférica geodésica icosaédrica otimizada com o critério de Du et al. (2003a) (<i>Spherical Centroidal Voronoï Tessellation</i>)
HR95	Malha esférica geodésica icosaédrica otimizada com o critério de Heikes e Randall (1995b)
MVF	Método de Volumes Finitos (<i>Finite Volumes Method</i>)
MDF	Método de Diferenças Finitas (<i>Finite Differences Method</i>)
MEF	Método de Elementos Finitos (<i>Finite Elements Method</i>)
MEFL	Método de Elementos Finitos Lineares (<i>Linear Finite Elements Method</i>)
MEVF	Método de Elementos de Volumes Finitos (<i>Finite Volume Element Method</i>)

Lista de Símbolos

Geometria

$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturais
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$	Reta, plano e espaço real
$\mathbb{R}_+$	Conjunto de números reais positivos
$\mathbb{S}^2$	Esfera unitária
x, y, z	Pontos na esfera unitária
x_1, x_2, x_3	Coordenadas do ponto x no espaço $\mathbb{R}^3$
$d(\cdot, \cdot)$	Distância geodésica
$ \cdot $	Módulo de um número real
$\ \cdot\ _{\mathbb{R}^3}, \ \cdot\ $	Norma Euclidiana no $\mathbb{R}^3$
$\tilde{V}$	Região esférica
$\text{Int}(\tilde{V})$	Interior da região esférica $\tilde{V}$
$\text{cl}(\tilde{V})$	Fecho da região esférica $\tilde{V}$
$\partial\tilde{V}$	Fronteira ou contorno da região esférica $\tilde{V}$
$\tilde{\Gamma}$	Geodésica em $\mathbb{S}^2$
$S(\cdot)$	Área superficial esférica
$m(\cdot)$	Comprimento geodésico
$\text{Card}(\cdot)$	Cardinalidade de conjuntos

Espaços de funções

∂_i	Derivada parcial na coordenada x_i
∇	Gradiente usual no $\mathbb{R}^3$
∇_s	Gradiente ou componente tangencial na esfera $\mathbb{S}^2$
$\partial_{s,i}$	Derivada parcial tangencial na coordenada x_i
∇_s^α	Operador diferencial tangencial de ordem α
$-\Delta_s$	Laplaciano na esfera
$\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, x}$	Plano tangente à $\mathbb{S}^2$ no ponto x
$\vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}$	Vetor normal unitário à esfera $\mathbb{S}^2$ no ponto x
$\vec{n}_{x, \tilde{V}_i}$	Vetor normal unitário à fronteira $\partial\tilde{V}_i$ contido em $\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, x}$ no ponto x
$\vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$	Vetor normal unitário à aresta dual $\tilde{\Gamma}_{ij}$ contido em $\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, x}$ no ponto x
$\vec{n}_{x, \tilde{T}_{ijk}}$	Vetor normal unitário à triângulo $\tilde{T}_{ijk}$ contido em $\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, x}$ no ponto x
$C^k(\cdot)$	Espaço de funções k -vezes diferenciáveis
$(\cdot, \cdot)$	Produto escalar
$W^{m,p}(\mathbb{S}^2)$	Espaços de Sobolev definido em $\mathbb{S}^2$ com $m \geq 0$ e $1 \leq p \leq \infty$
$\ \cdot\ _{W^{m,p}(\mathbb{S}^2)}$	Norma no espaço $W^{m,p}(\mathbb{S}^2)$
$H^m(\mathbb{S}^2)$	Espaço de Sobolev-Hilbert definido em $\mathbb{S}^2$
$\ \cdot\ _{H^m(\mathbb{S}^2)}$	Norma no espaço $H^m(\mathbb{S}^2)$
$H_Q^1(\mathbb{S}^2)$	Espaço quociente definido em $\mathbb{S}^2$

Aproximação da esfera

$\mathbf{S}_h$	Poliedro de aproximação à esfera
$\mathcal{T}_h$	Decomposição triangular plana–primal
$\tilde{\mathcal{T}}_h$	Decomposição esférica primal ou Delaunay
$\tilde{\mathcal{V}}$	Decomposição esférica dual de Voronoï
$\mathbf{x}_i$	Ponto de malha primal ou gerador de malha dual
N	Número de vértices da malha
$\mathbf{S}_N$	Conjunto de vértices $\mathbf{x}_i$
ℓ	Nível de recursão ou refinamento de malha
$\tilde{V}_i$	Região esférica de Voronoï associada ao vértice $\mathbf{x}_i$
$\tilde{T}_{ijk}$	Triângulo esférico com vértices $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ e $\mathbf{x}_k$
h	Parâmetro de malha em relação à distância geodésica máxima
$\mathcal{P}$	Projeção radial na esfera unitária $\mathbb{S}^2$
$\tilde{U}_h$	Espaço de funções lineares por partes associado a $\tilde{\mathcal{T}}_h$
$\tilde{V}_h$	Espaço de funções constantes por partes associado a $\tilde{\mathcal{V}}$
Π_h	Interpolador linear de $\tilde{U}_h$
$\tilde{\Pi}_h$	Interpolador linear de $\tilde{V}_h$
I_h	Interpolador linear de transferência entre os espaços $\tilde{U}_h$ e $\tilde{V}_h$
$\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$	Forma variacional para o MEFL
$\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$	Forma variacional para o MVF
$\mathcal{A}_h^d(\cdot, \cdot)$	Forma variacional discreta para o MVF
$\langle \cdot, \cdot \rangle_h$	Produto escalar discreto
$\ \cdot \ _{n,h}$	norma discreta para $n = 0, 1$ ou ∞
ξ_h	Erro de truncamento
$\tilde{\xi}_h$	Erro de truncamento fraco
ε_h	Erro da soluções
$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), G^y(\mathbf{x})$	Função de Green com singularidade em $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^2$
$\hat{G}^y(\mathbf{x})$	Função de Green discreta
$\hat{G}_h^y(\mathbf{x})$	Aproximação por MEFL da função $\hat{G}^y$
$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \delta^y(\mathbf{x})$	Função delta de Dirac

Introdução

Nessa tese estudamos a taxa de convergência das soluções aproximadas por uma discretização do Laplaciano baseada nos Métodos clássicos de Volumes Finitos nas malhas geodésicas esféricas icosaédricas da esfera unitária. Revisemos como é feita a construção das estimativas.

O estudo de soluções numéricas das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) na esfera é uma área de pesquisa ativa na comunidade científica. O interesse está concentrado em uma ampla variedade de aplicações tais como: geometria, dinâmica dos fluidos, modelagem de materiais, ciências ambientais e biológicas, processamento de imagens entre outras. Neste trabalho, vamos considerar a equação de Poisson na esfera unitária $\mathbb{S}^2$. Consideramos o problema modelo,

$$-\Delta_s u(x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{S}^2,$$

onde $-\Delta_s$ representa o operador de Laplace-Beltrami (o Laplaciano em superfícies) que trabalha como uma generalização do operador de Laplace padrão (Demlow, 2009; Demlow e Dziuk, 2007; Dziuk e Elliott, 2013). O problema de Poisson está presente em diversas aplicações, como por exemplo os modelos da previsão do tempo globais (Scott *et al.*, 2016; Tomita *et al.*, 2001; Vreugdenhil, 2013). De particular interesse, essas aplicações são tradicionalmente resolvidas mediante modelos numéricos empregando uma discretização da superfície da terra em um sistema de coordenadas esféricas.

Nos últimos 30 anos, a pesquisa tem sido direcionada a gerar malhas apropriadas de $\mathbb{S}^2$. Isso virou um requisito essencial para os modelos numéricos, dado que a precisão e a acurácia das soluções aproximadas, junto à eficiência com a qual são obtidas, dependem de parâmetros da qualidade da malha; essencialmente a uniformidade, a regularidade e a quantidade de células da malha. Nesse sentido, foi surgindo um interesse nas malhas geradas a partir de poliedros regulares inscrito em $\mathbb{S}^2$ (Giraldo, 1997; Heinze e Hense, 2002; Randall *et al.*, 1998; Ronchi *et al.*, 1996). Entre as mais relevantes e que trataremos neste trabalho, estão as formadas a partir de um icosaedro regular conhecida popularmente como a *malha esférica geodésica icosaédrica* (Giraldo, 1997; Heikes e Randall, 1995a; Li e Xiao, 2010; Tomita *et al.*, 2001). Esse tipo de estrutura aparece inicialmente nos trabalhos de Sadourny *et al.* (1968) e Williamson (1968), mas ganharam uma melhor acolhida com as propostas de Baumgardner e Frederickson (1985) e Heikes e Randall (1995a), devido principalmente à distribuição uniforme dos vértices na superfície esférica.

Além de ser gerada de forma simples, de acordo com Augenbaum e Peskin (1985); Renka (1997) e Du e Wang (2006), a malha esférica geodésica icosaédrica proporciona entre outras coisas, condições geométricas propícias para a discretização de EDPs. Em princípio, dado que essa malha é composta unicamente por triângulos geodésicos, ela satisfaz a condição de Delaunay, *i.e.*, tem a capacidade de maximizar o menor ângulo de todos os seus triângulos (Augenbaum e Peskin, 1985; Gärtner e Kamenski, 2019; Renka, 1997), e portanto, define uma decomposição primal de

Delaunay em $\mathbb{S}^2$. Usando o princípio de dualidade Voronoi-Delaunay (Gärtner e Kamenski, 2019; Hjelle e Dæhlen, 2006) existe uma e somente uma decomposição dual de Voronoi, cujos vértices são os circuncentros dos triângulos da decomposição primal. Neste trabalho, a malha esférica icosaédrica será denominada como decomposição Voronoi-Delaunay em $\mathbb{S}^2$. Conforme já reportado por Williamson *et al.* (1992) e Heikes e Randall (1995b), a não uniformidade dessa malha dificulta a análise de certos operadores discretos. Uma primeira forma de lidar com esse inconveniente é invocar processos de otimização na qualidade da malha (Du *et al.*, 2003a; Heikes e Randall, 1995a,b; Miura e Kimoto, 2005; Satoh, 2013; Tomita *et al.*, 2001, 2002; Wang e Lee, 2011). Por simplicidade da apresentação, consideramos só duas dessas otimizações, que são: o critério da SCVT (*Spherical Centroidal Voronoi Tessellation*), desenvolvido por Du *et al.* (2003a), que avalia a distância entre os vértices (centros) e os centroides das células duais, e o critério da HR95 proposto por Heikes e Randall (1995b) que avalia as distâncias dos pontos médios das arestas primal/dual. Vale ressaltar que a abordagem desta tese não pretende aprimorar esses critérios nem desenvolver critérios novos. Apenas enfatizamos que as malhas otimizadas possuem suas próprias características geométricas e peculiaridades com relação à estimação dos erros de discretização e de convergência de soluções discretas. Além disso, até o presente, nenhuma técnica conhecida se mostrou eficaz na otimização simultânea de parâmetros da malha Miura e Kimoto (2005); Peixoto (2013).

Descrita a infraestrutura geométrica de $\mathbb{S}^2$, nos concentramos no estudo do comportamento das soluções aproximadas pelos Métodos de Volumes Finitos (MVF) para a equação de Poisson. Em primeiro lugar, os MVF são altamente potentes para modelagem numérica de uma ampla variedade de problemas físicos, dado que são bastante flexíveis na manipulação de geometrias complicadas que levam a esquemas robustos em comparação com os Métodos de Diferenças Finitas (MDF). Além de ser mais simples de implementar e gerar resultados satisfatórios em relação ao custo computacional, uma característica essencial é a conservação local dos fluxos numéricos, comparados esta vez com os Métodos de Elementos Finitos (MEF) (Eymard *et al.*, 2000, 2001; Hermeline, 2000; LeVeque *et al.*, 2002).

A construção do MVF em malhas tipo Voronoi-Delaunay é baseada na integração da equação em cada célula da decomposição dual. Através do teorema de Gauss é obtida uma formulação integral dos fluxos na fronteira da célula. Posteriormente, essa forma integral dos fluxos é aproximada no ponto médio de cada aresta da fronteira. Em seguida, essa aproximação dos fluxos é discretizada via um esquema de diferença finita centrada. Apesar de ser um método numérico robusto, comumente se observa uma perda na ordem de consistência causada pela não uniformidade da decomposição Voronoi-Delaunay. Não obstante, técnicas de análise de erro das diferenças finitas feitas por Barbeiro (2009); Bouche *et al.* (2005); Despres (2004) e Pascal (2007), mostraram que nas malhas não uniformes, a degradação no erro de consistência não necessariamente implica na perda de convergência das soluções. Em outras palavras, a convergência das soluções pode-se dar mesmo quando o erro de consistência exibe ordem inferior ou em certos casos não converge em absoluto. Este fenômeno de *supraconvergência* vem sendo detalhadamente investigado há vários anos e mostra que a consistência não é necessariamente um bom indicador da ordem de convergência dos operadores discretos nesse caso (Diskin e Thomas, 2010; Droniou, 2014; Kreiss *et al.*, 1986; Manteuffel e White, 1986; Pascal, 2007). Por exemplo, convergência em norma L^2 no plano têm sido bem estabelecida por Coudière *et al.* (1999); Eymard *et al.* (2001); Gallouët *et al.* (2000); Herbin (1995); Mishev (1998) e Eymard *et al.* (2006). Em Du *et al.* (2003b) são apresentadas

extensões para problemas de convecção difusão em $\mathbb{S}^2$. Nestes trabalhos mencionados mostra-se ordem de convergência um na norma L^2 sob condições de regularidade da malha, neste caso ser quase-uniforme (Cai, 1990; Ciarlet, 2002; Mishev, 1998).

Adicionalmente, Heikes e Randall (1995b) e Ringler (2003) realizaram experimentos numéricos de MVF para decomposições Voronoï-Delaunay em $\mathbb{S}^2$ e verificaram que, embora haja inconsistência no MVF, o método é convergente. Porém, esse estudo é empírico e não prova matematicamente que há convergência das soluções aproximadas, em especial na norma uniforme, para a qual não conhecemos estimativas de convergência na literatura. Portanto, obter estimativas a priori para o MVF nesta norma ainda é uma tarefa desafiadora, sendo a motivação principal para o desenvolvimento desta tese. Uma possível abordagem para obter estimativas na norma do máximo foi descrita por Faïlle (1992) para problemas no plano usando condições de Dirichlet na fronteira em malhas retangulares. O autor assume condições de regularidade na solução exata, e que o MVF conservativo satisfaz uma condição de consistência fraca, que junto da hipótese de estabilidade, garante a convergência das soluções aproximadas. Porém, esse estudo não determina qual é a ordem de convergência. Seguindo essa análise nós tentamos aplicar de forma preliminar uma extensão à $\mathbb{S}^2$, mostrando unicamente que o MVF é fracamente consistente na max-norma sob condições na decomposição Voronoï-Delaunay. Porém, a convergência não pode ser garantida dado que algumas das hipóteses de estabilidade não foram verificadas. Não nos parece simples determinar, por meio de técnicas de diferenças finitas, uma estimativa de convergência dos MVF para decomposições Voronoï-Delaunay em $\mathbb{S}^2$ na norma do máximo.

Optamos portanto por seguir uma outra abordagem, descrita amplamente na literatura (Ewing *et al.*, 2002; Li *et al.*, 2000; Lin *et al.*, 2013), usada na obtenção de estimativas em outras normas. A ideia chave consiste em reescrever o MVF como um Método de Elementos Finitos Lineares (MEFL) e empregar os procedimentos padrão dos MEF para as estimativas de convergência. Os MEF são também métodos populares para encontrar soluções de EDPs na forma variacional e o seu potencial é devido à sua extensa base teórica do princípio variacional acoplado a uma conveniente aproximação dos espaços funcionais (Brenner e Scott, 2007; Ciarlet, 2002). Além disso, há progressos na teoria de aproximações dos MEF em superfícies (Bonito e Demlow, 2019; Demlow, 2009; Demlow e Dziuk, 2007; Dziuk, 1988; Dziuk e Elliott, 2013; Kröner, 2017) e parcialmente dos MVF para decomposições duais não Voronoï (Ju e Du, 2009; Ju *et al.*, 2009). Em nosso trabalho, focamos nas estimativas de erro do MVF para decomposições Voronoï-Delaunay em $\mathbb{S}^2$.

Para começar, consideramos um espaço de elementos finitos lineares associado à descomposição primal de Delaunay. Agora, dado o princípio de dualidade na decomposição, o espaço de volumes finitos adequado é o gerado pela descomposição dual de Voronoï, cujos elementos são funções constantes por pedaços em cada uma das suas células. Assim, a solução aproximada pelo MVF é linear por partes associada à decomposição primal. Em seguida, definimos formas variacionais contínua e discreta para o MVF, com o propósito de estabelecer a estabilidade. Usando a estabilidade junto com relação entre as formas variacionais do MVF e MEFL, estabelecemos estimativas de convergência de primeira ordem nas normas H^1 e L^2 de forma direta, diferentemente das estimativas já apresentadas nos trabalhos de Eymard *et al.* (2001); Gallouët *et al.* (2000); Mishev (1998) e Du *et al.* (2003b).

Outros estudos utilizam decomposições que não são Voronoï-Delaunay e determinam estimativas

de convergência de ordem dois nestas normas para problemas no plano, como as dadas por Chou e Li (2000); Chou e Ye (2007); Chou *et al.* (2003); Jianguo e Shitong (1998); Li *et al.* (2000); Wu e Li (2003) e para superfícies por Ju e Du (2009) e Ju *et al.* (2009). Destacamos que a ordem das estimativas é obtida com o uso explícito dos baricentros dos triângulos e uma exigência extra na regularidade da solução exata, que é excessiva em comparação à pedida nos MEFL. Entretanto, Ewing *et al.* (2002) estabeleceu uma hipótese suficiente para diminuir essa regularidade na solução exata, e impor um requisito mínimo de regularidade no termo fonte. É importante notar que a construção das estimativas descritas acima não podem ser estendidas à decomposição Voronoi-Delaunay sem algumas considerações adicionais, como no caso mostrado por Du e Ju (2005), onde a estimativa de ordem quadrática na norma L^2 depende do critério de otimização da SCVT e da regularidade excessiva na solução exata.

Baseado nessa análise, aqui mostramos uma modificação da prova aplicando o fundamento de Ewing *et al.* (2002), *i.e.*, diminuindo a regularidade na solução exata e impondo uma mínima regularidade no termo fonte, e assim obter a ordem de convergência desejada. Concluimos, o mesmo que Du e Ju (2005), a prova não pode ser estendida para decomposições Voronoi-Delaunay em geral devido ao uso explícito do critério da SCVT ou para a H^1 -norma já que existe um comportamento de superconvergência na aproximação dos gradientes. De modo geral, determinar uma ordem de convergência quadrática na L^2 -norma é um problema em aberto para os MVF com a decomposição Voronoi-Delaunay. Diversos esforços tem sido feitos para responder esta questão e limitam-se aos aspectos topológicos, por exemplo, Omnes (2011) dá uma resposta parcial e um aprimoramento importante em relação ao que conhece-se até agora.

Definidos os critérios necessários de estabilidade das soluções construídas pelo MVF na norma H^1 , pudemos determinar as estimativas de erro na norma do máximo. Não é de nosso conhecimento que avanços nesse sentido tenham sido previamente descritos na literatura, em particular na esfera em decomposições Voronoi-Delaunay. Para tanto fizemos uso das funções de Green regularizadas para superfícies, definidas por Aubin (2013); Hebey (1996). Em seguida, definimos uma formulação variacional para as funções de Green com o objetivo de usar análises de convergência pontual dos MEF examinadas por Demlow (2009); Kröner (2017) e Kovács e Power Guerra (2018). Deste modo pudemos estabelecer uma estimativa fraca da estabilidade e obter estimativas da ordem de convergência nas max e $W^{1,\infty}$ -normas para as decomposições Voronoi-Delaunay não otimizadas (NOPT) e otimizadas sob o critério da SCVT. Os resultados obtidos nesse trabalho garantem convergência sub-linear (no caso NOPT) e super-linear (no caso SCVT). Não obstante, contém um fator logarítmico causado pelo uso das funções lineares na decomposição primal de Delaunay, que não pode ser evitado como examinado em domínios Euclidianos por Scott (1976) e Rannacher e Scott (1982).

Organização do trabalho

A análise das estimativas de erro para as discretizações do Laplaciano está organizada em quatro capítulos que visam sistematizar o conteúdo abordado nesta pesquisa. Cada capítulo possui uma breve introdução na qual contextualizamos seus objetivos. No Capítulo 1, fazemos uma rápida introdução das notações propriedades geométricas da esfera unitária $\mathbb{S}^2$, assim como de diversos resultados analíticos bem conhecidos da equação de Laplace em $\mathbb{S}^2$. Em particular, é definida a boa colocação (existência e unicidade) do problema e estabelecemos estimativas *a priori* da estabilidade e regularidade das soluções. O Capítulo 2 apresenta uma estrutura clássica da discretização de $\mathbb{S}^2$.

Centra-se na construção recursiva das malhas esféricas geodésicas icosaédricas junto com duas das suas otimizações usuais na literatura, a saber a SCVT e a HR95.

Em seguida, no Capítulo 3, descrevemos um esquema de volumes finitos para o Laplaciano, reconhecido atualmente como um modelo numérico eficaz em relação à estrutura da geometria introduzida no capítulo anterior. Conforme a literatura, usamos uma forma variacional para esquema de volumes finitos conservativo no sentido dos MEFL, com o propósito de definir a boa colocação discreta do problema. Posteriormente, definimos a estabilidade das soluções aproximadas.

O Capítulo 4 é dedicado às estimativas de erro para o esquema de volumes finitos. A abordagem apresentada combina então os MVF com os MEFL para mostrar as principais contribuições desta tese. Inicialmente, estabelecemos ordens de convergência em nas normas H^1 e L^2 para a malha NOPT. Em seguida, obtemos as estimativas na max e $W^{1,\infty}$ -norma usando funções de Green regularizadas como funções auxiliares para as malhas NOPT e SCVT. Por fim, apresentamos evidências numéricas, confirmando adequadamente as estimativas relatadas. Conclusões e comentários finais deste trabalho são dados no capítulo final.

O Apêndice A contem as provas da consistência fraca do MVF nas L^2 e max-normas. O Apêndice B reúne algumas considerações práticas sobre cálculo e ferramentas de geometria esférica. Por fim, descrevemos no Apêndice C considerações técnicas da implementação para resolver o sistema linear gerado a partir do Laplaciano discreto.

Capítulo 1

Preliminares

O propósito deste primeiro capítulo será estabelecer parte da notação e a terminologia, bem como algumas ideias básicas de geometria esférica que são imprescindíveis para o estudo do operador discreto de Laplace na esfera unitária. Em primeiro lugar, apresentaremos uma breve revisão das propriedades topológicas do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ e sua importância quando consideramos a esfera como um dos seus subconjuntos. Em seguida, estabeleceremos algumas definições dos espaços de funções, em particular os espaços de Sobolev em $\mathbb{S}^2$, junto com alguns dos seus teoremas clássicos. Por fim, deduziremos a boa colocação do problema contínuo e daremos estimativas *a priori* de estabilidade e regularidade das soluções.

1.1 Propriedades geométricas em $\mathbb{S}^2$

Nesta seção, apresentaremos uma série de generalidades e noções que serão usadas nos Capítulos 2 e 3. Consideremos o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, sejam $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ pontos no $\mathbb{R}^3$, então a norma Euclidiana e o produto escalar são definidos respectivamente como

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^3} = \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{1/2}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{R}^3} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i.$$

As vezes usaremos a notação simplificada $\|\cdot\|$ para denotar $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, denotaremos por $\text{cl}(\Omega)$ o fecho de Ω em $\mathbb{R}^3$ e o interior $\text{Int}(\Omega)$ de Ω em $\mathbb{R}^3$. O símbolo $\partial\Omega$ será considerado como a fronteira de Ω , *i.e.*, $\partial\Omega = \text{cl}(\Omega) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$. Conforme [Aubin \(2013\)](#) e [Hebey \(1996\)](#), a esfera é uma variedade Riemanniana 2-dimensional compacta de $\mathbb{R}^3$. Apenas para o desenvolvimento deste trabalho, consideramos a esfera unitária centrada na origem do $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbb{S}^2 := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^3} = 1 \right\},$$

onde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$ denota a norma Euclidiana no $\mathbb{R}^3$.

Apesar que o trabalho não tem um enfoque de geometria diferencial, vamos considerar diversas ideias do cálculo em superfícies, descritas nos textos de [Morimoto \(1998\)](#) e [Atkinson e Han \(2012\)](#). Dados dois pontos quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^2$, a curva de menor comprimento (geodésica) contida em $\mathbb{S}^2$ ligando $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é um arco de circunferência determinado pela interseção de $\mathbb{S}^2$ com o plano que passa por $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e a origem de $\mathbb{S}^2$. A distância geodésica entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \arccos((\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{R}^3}) \in [0, \pi], \quad \text{para cada } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^2,$$

onde $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^3}$ denota o produto escalar Euclidiano. Observe que, $d(\cdot, \cdot)$ é uma distância adequada com a curvatura de $\mathbb{S}^2$ ao medir o ângulo formado pelos pontos e ademais, representa o caminho que possui a menor distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ([Aubin, 2013](#); [Morimoto, 1998](#)). De acordo com [Atkinson e Han \(2012, pp. 4\)](#), podemos definir uma equivalência entre as distâncias geodésica e Euclidiana, dada como

$$\frac{2}{\pi} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^3} \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \text{para cada } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^2.$$

A desigualdade segue se escrevemos a distância Euclidiana por $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{2(1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{R}^3})}$ e

usando a desigualdade $\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$, para cada $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Dado um polígono esférico $\tilde{V} \subset \mathbb{S}^2$ delimitado por geodésicas. Denotaremos por $\text{cl}(\tilde{V})$ o fecho de $\tilde{V}$ e $\text{Int}(\tilde{V})$ o interior de $\tilde{V}$ em $\mathbb{S}^2$. Usaremos também o símbolo $\partial\tilde{V}$ para denotar a fronteira de $\tilde{V}$, i.e., $\partial\tilde{V} = \text{cl}(\tilde{V}) \cap (\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{V})$. Frequentemente serão usadas as medidas da área superficial $S(\tilde{V})$ para algum subconjunto $\tilde{V} \subset \mathbb{S}^2$ e do comprimento do arco geodésico $m(\Gamma)$ para alguma geodésica $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$. Definimos então,

$$S(\tilde{V}) = \int_{\tilde{V}} ds(x), \quad m(\Gamma) = \int_{\Gamma} d\gamma(x),$$

onde $ds(x)$ e $d\gamma(x)$ representam as medidas de Lebesgue na superfície da esfera $\mathbb{S}^2$ (Aubin, 2013; Morimoto, 1998).

1.2 Espaços de funções

Nesta seção, apresentaremos algumas noções fundamentais sobre os espaços de funções em $\mathbb{S}^2$ tomadas de Dziuk e Elliott (2013). Essas definições e resultados serão usados para descrever as ideias dos Capítulos 3 e 4. Consideremos $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de valor real definida em $\mathbb{S}^2$ e denotamos por $C(\mathbb{S}^2)$ o espaço de Banach das funções contínuas com norma

$$\|u\|_{C(\mathbb{S}^2)} := \sup\{|u(x)| : x \in \mathbb{S}^2\}, \quad \text{para cada } u \in C(\mathbb{S}^2).$$

Denotamos por $L^2(\mathbb{S}^2)$ o espaço de Hilbert de funções reais quadrado integráveis em $\mathbb{S}^2$ com produto escalar e norma induzida definidas respectivamente por

$$(u, v) := \int_{\mathbb{S}^2} u(x)v(x)ds(x), \quad \text{para cada } u, v \in L^2(\mathbb{S}^2), \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} := (u, u)^{1/2}.$$

Note-se que, o espaço $C(\mathbb{S}^2)$ com o produto escalar em $L^2(\mathbb{S}^2)$ não é Banach, logo o fecho de $C(\mathbb{S}^2)$ em relação à L^2 -norma, é $L^2(\mathbb{S}^2)$, i.e., se $u \in L^2(\mathbb{S}^2)$, existe uma sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{S}^2)$ tal que

$$\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Para cada $u \in C(\mathbb{S}^2)$ definiremos o seu *módulo de continuidade*,

$$m(u; \delta) := \sup\{|u(x) - u(y)| : x, y \in \mathbb{S}^2, \|x - y\|_{\mathbb{R}^3} < \delta\},$$

para $\delta \in (0, 1)$. Então

$$m(u; \delta) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \delta \longrightarrow 0.$$

Para $\delta \in (0, 1)$ definimos o conjunto

$$\Omega_\delta := \left\{x^* \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : 1 - \delta \leq \|x^*\|_{\mathbb{R}^3} \leq 1 + \delta\right\},$$

tal que $\mathbb{S}^2 \subset \Omega_\delta$ para cada $\delta \in (0, 1)$. Em vista disso, para a análise de convergência em $\mathbb{S}^2$ é usual considerar a extensão u^Ω da função u ao conjunto Ω_δ , então dado $x = \frac{x^*}{\|x^*\|} \in \mathbb{S}^2$, segue

$$u^\Omega(x^*) := u\left(\frac{x^*}{\|x^*\|}\right) = u(x), \quad \text{para } 0 \neq x^* \in \Omega_\delta.$$

Observe-se que u^Ω se estende naturalmente por meio da relação acima a uma função definida em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Ademais, se $u^\Omega : \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos por $C(\Omega_\delta)$ o espaço de funções contínuas em Ω_δ com norma,

$$\|u^\Omega\|_{C(\Omega_\delta)} := \sup\{|u^\Omega(x^*)| : x^* \in \Omega_\delta\}, \quad \text{para cada } u^\Omega \in C(\Omega_\delta).$$

Examinaremos agora o fundamento de diferenciabilidade o qual é bastante natural em $\mathbb{S}^2$, salvo alguns cuidados, pois certos procedimentos de cálculo elementar em $\mathbb{R}^3$ podem ser falsos em $\mathbb{S}^2$. Vamos introduzir a definição de gradiente tangencial a $\mathbb{S}^2$ para alguma função diferenciável $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, segundo a seguinte interpretação: definamos $\vec{v}$ um vetor no ponto $x \in \mathbb{S}^2$, o vetor $\vec{v}$

pode ser decomposto unicamente como soma de dois vetores, o primeiro será tangente a $\mathbb{S}^2$ em x , conhecido como a componente tangencial e o segundo será perpendicular a $\mathbb{S}^2$ em x conhecido como a componente normal. Assim, surge a expressão

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_\perp,$$

onde $\vec{v}_T$ denota a componente tangencial e $\vec{v}_\perp$ a componente normal. Os termos $\vec{v}_T$ e $\vec{v}_\perp$ são ortogonais entre si. Agora, se na definição anterior, substituimos $\vec{v}$ por ∇u , o gradiente usual no $\mathbb{R}^3$ da função u , com $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Podemos calcular a componente tangencial (tangente à superfície esférica no ponto x), definindo a componente normal como

$$(\nabla u(x))_\perp := (\nabla u(x) \cdot \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}) \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x},$$

onde “ $\cdot$ ” denota o produto escalar e $\vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}$ é o vetor normal unitário a $\mathbb{S}^2$ no ponto x . Consequentemente, a componente tangencial é dada como

$$(\nabla u(x))_T = \nabla u(x) - (\nabla u(x) \cdot \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}) \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}.$$

Em outras palavras, a componente tangencial $(\nabla u(x))_T$ da função u é o gradiente usual menos a componente normal à esfera $\mathbb{S}^2$ no ponto x . Observe ademais, que todos as componentes tangenciais a uma curva em $\mathbb{S}^2$ no ponto $x \in \mathbb{S}^2$ formam um plano tangente $\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, x}$, e um vetor perpendicular a $\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, x}$ é o vetor normal $\vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}$ no ponto x . Para simplificar a notação, denotaremos a componente tangencial $(\nabla u(x))_T$ por $\nabla_s u(x)$, para cada $x \in \mathbb{S}^2$. Desta maneira, geramos a seguinte definição.

Definição 1.1 (Gradiente tangencial). *Sejam $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ e $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x \in \mathbb{S}^2$. Definimos o gradiente tangencial de u em $x \in \mathbb{S}^2$ por*

$$\nabla_s u(x) := (\partial_{s,1}, \partial_{s,2}, \partial_{s,3}) u(x) = \nabla u^\Omega(x) - (\nabla u^\Omega(x) \cdot \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}) \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x},$$

onde $\partial_{s,n}$ denota a derivada parcial tangencial na coordenada x_n , do ponto x , $\vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}$ é o vetor normal a $\mathbb{S}^2$ em x . Aqui u^Ω é a extensão suave de u a $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^3$, tal que $u^\Omega|_{\mathbb{S}^2} = u$. Em particular, $u^\Omega(x) = u(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^2$.

De forma análoga, pode-se construir o operador de Laplace em $\mathbb{S}^2$:

Definição 1.2 (Operador de Laplace-Beltrami). *Sejam $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ e $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável. O operador de Laplace-Beltrami da função u é dado como*

$$\Delta_s u(x) := \sum_{n=1}^3 \partial_{s,n} \partial_{s,n} u(x) = \nabla_s \cdot \nabla_s u(x) = \nabla \cdot \nabla_s u(x) - \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}^t [\nabla(\nabla_s u(x))] \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x},$$

onde $\vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}^t$ denota o vetor transposto de $\vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}$ e $\nabla(\nabla_s u(x))$ representa a matriz que contém todas as derivadas de $\nabla_s u$.

Caso seja necessário para a diferenciação de ordem maior de funções em $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^2$ usamos a notação de multi-índice. Um multi-índice é o vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, para cada $0 \leq \alpha_i \in \mathbb{N}$, com comprimento dado por $|\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i$. Denotamos por ∇^α o operador diferencial de ordem $|\alpha|$ como

$$\nabla^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \partial_3^{\alpha_3},$$

onde ∂_n ($n \in \{1, 2, 3\}$) denota a derivada parcial usual no $\mathbb{R}^3$ da n -ésima coordenada do ponto $x = (x_1, x_2, x_3)$. De forma análoga, definimos ∇_s^α o operador diferencial tangencial de ordem $|\alpha|$ como

$$\nabla_s^\alpha = \partial_{s,1}^{\alpha_1} \partial_{s,2}^{\alpha_2} \partial_{s,3}^{\alpha_3}.$$

Para $k \geq 0$ e α um multi-índice, denotaremos por $C^k(\Omega_\delta)$ o espaço de funções contínuas u^Ω junto

com todas as suas derivadas $\nabla^\alpha u^\Omega$ contínuas de ordem $|\alpha| \leq k$ em $\Omega_\delta \subset \mathbb{R}^3$, i.e.,

$$C^k(\Omega_\delta) := \{u : \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{R} : \nabla^\alpha u \in C(\Omega_\delta) \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

O espaço $C^k(\Omega_\delta)$ é Banach com norma,

$$\|u^\Omega\|_{C^k(\Omega_\delta)} := \sup_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left\{ |\nabla^\alpha u^\Omega(\mathbf{x}^*)| : \mathbf{x}^* \in \Omega_\delta \right\}.$$

Uma função u é dita k -vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{S}^2$ sempre que u^Ω seja k -vezes continuamente diferenciável em Ω_δ . Destaca-se que a diferenciabilidade da função u é independente da escolha do $\delta \in (0, 1)$ (Dziuk e Elliott, 2013; Morimoto, 1998). Então, para $k \geq 0$, seja $C^k(\mathbb{S}^2)$ o espaço vetorial que consiste de todas as funções contínuas u junto com todas as suas derivadas tangenciais $\nabla_s^\alpha u$ contínuas de ordem $|\alpha| \leq k$ em $\mathbb{S}^2$. O espaço $C^k(\mathbb{S}^2)$ é um espaço de Banach com norma

$$\|u\|_{C^k(\mathbb{S}^2)} := \|u^\Omega\|_{C^k(\Omega_\delta)} \text{ para cada } u \in C^k(\mathbb{S}^2).$$

Em particular, temos que $C^\infty(\mathbb{S}^2) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{S}^2)$ é o espaço linear das funções contínuas infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{S}^2$.

1.3 Espaços de Sobolev em $\mathbb{S}^2$

Sabemos que no desenvolvimento da análise das soluções das EDPs tanto analíticas como numéricas, é indispensável o uso de certos espaços funcionais, em particular, os espaços de Sobolev. Fazemos uma pequena apresentação sobre generalidades e resultados em relação a esses espaços. As noções em princípio, estão lideradas pela formulação variacional aliada com a fórmula de Green. Ao leitor interessado em aprofundar nos detalhes destes temas para superfícies em geral recomendamos a consulta dos textos de: Hebey (1996) e Aubin (2013).

Como de costume, se p é algum número entre $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $L^p(\mathbb{S}^2)$ os espaços de funções mensuráveis $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ em relação à medida de superfície ds , tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} |u(\mathbf{x})|^p ds(\mathbf{x}) &< \infty, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2} |u(\mathbf{x})| &< \infty, \quad p = \infty. \end{aligned}$$

onde $\text{ess sup}(u(\mathbf{x})) = \inf\{C \geq 0 : |u(\mathbf{x})| \leq C, \text{ quase sempre}\}$, com normas

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} &= \left(\int_{\mathbb{S}^2} |u(\mathbf{x})|^p ds(\mathbf{x}) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} &= \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2} |u(\mathbf{x})|, \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Os espaços $L^p(\mathbb{S}^2)$ com $1 \leq p \leq \infty$ são espaços de Banach. Note-se, que os espaços $C(\mathbb{S}^2)$ e $C^1(\mathbb{S}^2)$ são densos em $L^p(\mathbb{S}^2)$ para $1 \leq p < \infty$. Utilizamos essa notação para a seguinte definição.

Definição 1.3 (Hebey, 1996). *Sejam k um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{S}^2)$ é o conjunto de todas as funções $u \in L^p(\mathbb{S}^2)$ tal que para cada multi-índice α , com $|\alpha| \leq k$, a α -ésima derivada tangencial fraca $\nabla_s^\alpha u$ existe e pertence ao espaço $L^p(\mathbb{S}^2)$, i.e.,*

$$W^{k,p}(\mathbb{S}^2) := \left\{ u \in L^p(\mathbb{S}^2) : \nabla_s^\alpha u \in L^p(\mathbb{S}^2), \text{ para cada } 0 \leq |\alpha| \leq k \right\}.$$

Definimos agora a norma em $W^{k,p}(\mathbb{S}^2)$ por

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{S}^2)} &= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\nabla_s^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{S}^2)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W^{k,\infty}(\mathbb{S}^2)} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\nabla_s^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}, \quad p = \infty, \end{aligned}$$

Resultados sobre os espaços $W^{k,p}(\mathbb{S}^2)$ ser Banach ou Hilbert estão contidos nos textos de [Hebey \(1996\)](#) e [Aubin \(2013\)](#).

Regularmente empregaremos $p = 2$ para simplificar $W^{k,2}(\mathbb{S}^2) = H^k(\mathbb{S}^2)$, que são espaços de Hilbert das funções quadrado integráveis com derivadas tangenciais fracas de ordem menor ou igual que k . Note ademais que se $k = 0$ obtemos o espaço usual $W^{0,2}(\mathbb{S}^2) = L^2(\mathbb{S}^2)$. Em particular, para $k = 2$ e $p = 2$ temos para alguma função $u \in H^2(\mathbb{S}^2)$, que

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} = \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 + \|\nabla_s u\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 + \sum_{|\alpha|=2} \|\nabla_s^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 \right)^{1/2}.$$

1.3.1 Espaço quociente

Convém notar que o trabalho centra-se em um conjunto especial de funções a saber, vamos trabalhar naqueles subespaços de funções que são ortogonais a constantes em $L^2(\mathbb{S}^2)$. Escolhemos um subespaço fechado do espaço $H^1(\mathbb{S}^2)$, que consiste de todas as funções $v \in H^1(\mathbb{S}^2)$ satisfazem a condição

$$(v, 1) = \int_{\mathbb{S}^2} v(x) ds(x) = 0. \quad (1.1)$$

Definimos o espaço quociente equipado com a H^1 -norma por

$$H_Q^1(\mathbb{S}^2) := H^1(\mathbb{S}^2)/\mathbb{R} = \left\{ v \in H^1(\mathbb{S}^2) : \int_{\mathbb{S}^2} v(x) ds(x) = 0 \right\}.$$

O seguinte resultado será útil na hora de provar a coercividade do operador de Laplace e sua prova está no texto de [Hebey \(1996, Lema 3.8, pp. 24\)](#).

Proposição 1.1 (Desigualdade de Poincaré-Friedrich). *Existe uma constante $C_P \in \mathbb{R}_+$, tal que para cada $u \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ vale a desigualdade,*

$$\left(\int_{\mathbb{S}^2} |u(x)|^2 ds(x) \right)^{1/2} \leq C_P \left(\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_s u(x)|^2 ds(x) \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

1.4 O modelo contínuo

Nesta seção, vamos descrever o problema contínuo para o desenvolvimento da análise numérica dos Capítulos 3 e 4. Sejam $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ a esfera unitária e a função $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ que satisfaz a condição de compatibilidade

$$(f, 1) = \int_{\mathbb{S}^2} f(x) ds(x) = 0, \quad (1.3)$$

onde $ds(x)$ denota a medida de superfície. Seja também a função $u \in H^2(\mathbb{S}^2)$ que resolve o problema

$$-\Delta_s u(x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{S}^2, \quad (1.4)$$

onde $-\Delta_s$ representa o operador de Laplace em $\mathbb{S}^2$. Visto que $\partial\mathbb{S}^2 = \emptyset$, não são necessárias condições de fronteira. Enunciamos as duas questões fundamentais que se colocam no estudo de (1.4):

(Q.1) *Existência:* a equação (1.4) possui solução se f satisfaz a condição de compatibilidade (1.3).

(Q.2) *Unicidade:* a solução pode exibir não unicidade, já que o operador de Laplace na esfera possui Kernel não-trivial, i.e., qualquer constante $C \in \mathbb{R}$ é também solução da equação homogênea,

$$-\Delta_s(u(x) + C) = 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{S}^2.$$

Então, para garantir a unicidade, requeremos que a solução u pertença ao espaço $H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$, cujos elementos são funções duas vezes diferenciáveis ortogonais a constantes no

espaço $L^2(\mathbb{S}^2)$.

No estudo, se (Q.1) e (Q.2) são satisfeitas, diremos que o problema (1.4) está bem posto ou que possui boa colocação contínua.

1.4.1 Uma formulação variacional

Podemos definir uma forma variacional da equação (1.4) no espaço $H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Para quaisquer $u, v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ definimos o funcional bilinear $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ tal que

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_{\mathbb{S}^2} \nabla_s u(x) \cdot \nabla_s v(x) ds(x). \quad (1.5)$$

A forma bilinear acima está bem definida no espaço $H_Q^1(\mathbb{S}^2) \times H_Q^1(\mathbb{S}^2)$.

Proposição 1.2 (Continuidade e coercividade). *Seja $\mathcal{A} : H_Q^1(\mathbb{S}^2) \times H_Q^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional bilinear. Então, existem constantes $C_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \{0, 1\}$ tal que,*

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq C_0 \|u\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|v\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}, \quad \text{para cada } u, v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2), \quad (1.6)$$

$$\mathcal{A}(v, v) \geq C_1 \|v\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}^2, \quad \text{para cada } v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2). \quad (1.7)$$

Demonstração. Dado o funcional bilinear e as desigualdade de Cauchy-Schwarz e Poincaré-Friedrich, temos para $u, v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ que

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(u, v)| &= \left| \int_{\mathbb{S}^2} \nabla_s u(x) \cdot \nabla_s v(x) ds(x) \right| \leq \left(\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_s u(x)|^2 ds(x) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_s v(x)|^2 ds(x) \right)^{1/2} \\ &\leq \|\nabla_s u\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|\nabla_s v\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|v\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}, \end{aligned}$$

em consequência segue (1.6). Considere $v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$, assim

$$\mathcal{A}(v, v) = \int_{\mathbb{S}^2} \nabla_s v(x) \cdot \nabla_s v(x) ds(x) = \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla_s v(x)|^2 ds(x) = \|\nabla_s v\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2.$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrich (Proposição 1.1), existe uma constante $C_P \in \mathbb{R}_+$, que independe de v , tal que

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 \leq C_P \|\nabla_s v\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2.$$

e junto à equivalência nas normas, existe uma constante $C_2 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|v\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}^2 \leq C_2 \|\nabla_s v\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2.$$

Portanto,

$$\mathcal{A}(v, v) = \|\nabla_s v\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 \geq C_1 \|v\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}^2.$$

para $C_1 = 1/C_2$. Isto encerra a demonstração. $\square$

Temos imposto a condição (1.3) para a função $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ no lado direito da equação de Laplace, logo o problema variacional de (1.4) é definido da seguinte forma: a única solução fraca $u \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ de (1.4) satisfaz o problema,

$$\mathcal{A}(u, v) = (f, v), \quad \text{para cada } v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2). \quad (1.8)$$

De posse das informações precedentes, temos o resultado a seguir.

Teorema 1.1 (Unicidade da solução fraca). *Seja $\mathbb{S}^2$ a esfera unitária e assumamos que $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ satisfaz (1.3). Então, existe uma única solução $u \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ do problema (1.8).*

A demonstração é uma aplicação do Teorema de Lax-Milgram (vide Brezis, 2010, Corolário 5.8, pp. 140), *i.e.*, como consequência imediata da Proposição 1.2. A existência da solução fraca é um

ingrediente importante nos requerimentos das estimativas de convergência dos esquemas numéricos, particularmente da estabilidade. Uma primeira estimativa *a priori* na H^1 -norma é definida como segue:

Proposição 1.3 (Estabilidade). *Seja $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ que satisfaz (1.3). Então, o problema variacional (1.8) tem única solução fraca $u \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ e satisfaz a estimativa,*

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)},$$

para alguma constante $C \in \mathbb{R}_+$.

Demonstração. A prova é obtida diretamente da Proposição 1.2, combinando as desigualdade de Cauchy-Schwarz de Poincaré-Friedrich,

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}^2 \leq C|\mathcal{A}(u, u)| \leq C|(f, u)| \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}\|u\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}\|u\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}.$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

Provas similares podem ser consultadas no trabalhos de Herrmann *et al.* (2018), Demlow (2009) ou Dziuk e Elliott (2013). Por último, se $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ é a única solução fraca de (1.8), pode-se estabelecer uma outra estimativa *a priori* na H^2 -norma, *i.e.*, uma estimativa de regularidade da solução.

Proposição 1.4 (Regularidade). *Assuma $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ que satisfaz a condição de compatibilidade (1.3). Então, se a única solução fraca do problema (1.8) é tal que $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$, esta satisfaz a estimativa de regularidade*

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}. \quad (1.9)$$

Demonstração. A prova segue diretamente usando a fórmula de Green para $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ na equação (1.4). Em seguida, usar a estimativa definida na Proposição 1.3. $\square$

Com o anterior, temos definido o problema contínuo na sua forma variacional; especificamente, temos estabelecido os argumentos padrão da estabilidade e a regularidade da solução exata para o problema de Laplace em $\mathbb{S}^2$. O passo seguinte, será discretizar a esfera unitária e usa-la como domínio computacional para nosso problema discreto.

Capítulo 2

Malhas esféricas geodésicas icosaédricas

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma construção usual das malhas esféricas geodésicas icosaédricas em $\mathbb{S}^2$, usadas frequentemente na literatura na discretização de problemas da dinâmica de fluidos geofísicos (Heinze e Hense, 2002; Putman e Lin, 2007; Williamson, 2007). Nesse sentido, as malhas serão definidas recursivamente satisfazendo o princípio de dualidade Voronoi-Delaunay. Descreveremos também duas das otimizações mais usadas na literatura em relação à qualidade de malha, a saber, a SCVT e HR95.

2.1 Estruturas de malhas na esfera

Historicamente foram usadas discretizações latitude-longitude, denominadas malhas geográficas, nos primeiros modelos globais de previsão do tempo. Esse tipo de discretizações é a forma mais simples de estabelecer um sistema de coordenadas para a superfície esférica e consiste na Figura 2.1a, por coordenadas esféricas, de um conjunto de segmentos de retas no plano de coordenadas angulares, com propriedades importantes como ortogonalidade e simetria.

Figura 2.1: Estruturas de malhas: (a) a malha geográfica latitude-longitude. Imagem gerada no site: [github, jobovy-stellarkinematics](https://github.com/jobovy-stellarkinematics), (b) a esfera cubada baseada nas transformações dos seis lados de um hexaedro circunscrito na esfera $\mathbb{S}^2$. Imagem gerada no site: www.gfdl.noaa.gov do GFDL (Geophysical Fluid Dynamics Laboratory) da NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) e (c) a malha Bucky-ball. Fonte: Heinze e Hense (2002).

A latitude (denotada por ϕ) determina a posição de um ponto no hemisfério norte ou sul, *i.e.*, a distância angular, medida em radianos, que varia desde 0 no equador até $\pi/2$ nos polos (norte ou sul). Usa-se latitude positiva no hemisfério norte e negativa no hemisfério sul. Os círculos paralelos ao equador possuem latitude constante. A longitude (denotada com θ) é a distância angular, medida no plano do equador, entre o meridiano do ponto na superfície e o meridiano de Greenwich, que por convenção é considerado a longitude base ou nula na literatura. Neste caso, usa-se longitude negativa a oeste, e positiva a leste, variando assim entre $-\pi$ e π .

No entanto, este tipo de malhas possui uma concentração dos pontos próximos aos polos, logo o tamanho das células computacionais e a distância entre dois pontos adjacentes da malha

dependem da latitude, gerando então uma malha anisotrópica. A convergência dos meridianos que se aproximam aos polos faz que o intervalo das distâncias longitudinais (medidas em distância em vez de graus) tenda para zero nos polos, logo o sistema de coordenadas torna-se singular perto dos polos. Essa convergência nos meridianos e a singularidade é conhecido como o *problema do polo* e foi vagamente definido no começo como uma dificuldade de custo computacional mais do que um problema fundamental (Murray, 1996; Williamson, 2007).

Diversas modificações foram sugeridas, por exemplo a proposta de Randall *et al.* (1998), apresentaram malhas geográficas uniformes com filtro espacial perto dos polos. Para prevenir a singularidade nos polos na sua totalidade, têm sido desenvolvidas técnicas de discretização alternativas. Uma delas foi usar as projeções gnomônicas ou radiais proposta por Sadourny (1972). A estratégia consiste em decompor a esfera em seis regiões idênticas, obtidas a partir das projeções dos lados de um hexaedro circunscrito na esfera (Figura 2.1b). Cada uma das seis aplicações, isoladamente, não contém singularidades. No trabalho de Ronchi *et al.* (1996), a construção foi melhorada e renomeada malha cubada (*cubed-sphere*). Atualmente é usada em problemas de modelagem atmosférica por exemplo em Harris *et al.* (2011); Putman e Lin (2007); Scott *et al.* (2016).

Algumas malhas usadas para discretizar modelos na esfera dependem de certa classe de poliedros altamente simétricos. Em particular, o poliedro conhecido como “*bucky*” ou “*soccer ball*”, que faz reconhecimento ao arquiteto americano Richard Buckminster Fuller. A malha bucky-ball (Figura 2.1c) apareceu no artigo de Heinze e Hense (2002) para aproximar equações de água rasa na esfera unitária S^2 . Em particular, a bucky-ball pertence a uma classe de malhas icosaédricas gerais introduzidas por Giraldo (2000) e ademais está classificada com número de malha 3 no sistema dado por Giraldo (1997). Por último, semelhante à esfera cubada, a bucky-ball não possui singularidade nos polos e pode ser gerada a partir de um poliedro inscrito em S^2 .

2.2 Malhas esféricas icosaédricas

As malhas obtidas a partir da projeção radial de poliedros inscritos na esfera são chamadas de malhas geodésicas esféricas. A classe dessas malhas que é gerada a partir dos sólidos platônicos inscritos na esfera, é “ideal” para a construção das malhas geodésicas esféricas uniformes (Figura 2.2). Um sólido platônico é um poliedro regular convexo cujas faces são polígonos onde todos os seus vértices têm o mesmo número de arestas e os seus ângulos são todos congruentes. Porém, devido a construção das malhas esféricas e os seus refinamentos posteriores, os polígonos consequentes irão ter uma leve “distorção” que as vezes prejudica a precisão dos esquemas numéricos (Miura e Kimoto, 2005; Tomita *et al.*, 2001). Dentre os sólidos platônicos, apenas o tetraedro, o octaedro e o icosaedro possuem faces formadas por triângulos equiláteros, e esta característica essencial os torna propícios para a distribuição dos vértices na superfície esférica. Entretanto, o icosaedro é o “melhor” para a construção, pois contém o maior número de vértices e distribui o defeito angular 4π uniformemente no número de vértices e minimiza a distorção dos triângulos esféricos perto desses vértices (Wang e Lee, 2011).

O desenvolvimento das malhas esféricas icosaédricas como domínio computacional foi devido principalmente aos trabalhos de Sadourny *et al.* (1968); Williamson (1968) para a previsão numérica do tempo. Os autores obtiveram resultados satisfatórios, mas ganhou uma melhor acolhida com os desenvolvimentos de Baumgardner e Frederickson (1985); Giraldo (1997); Heikes e Randall (1995a) e Thuburn (1997). Nessa ordem de ideias, a malha esférica icosaédrica consta de uma triangulação curvilinear formada pelas faces projetadas radialmente do icosaedro na superfície esférica. Existem duas maneiras de construir a malha: a primeira é mediante uma aproximação recursiva (diádica) e a segunda de forma não-recursiva. Por simplicidade da apresentação e o desenvolvimento desta tese consideramos apenas a recursiva e é descrita a seguir.

2.2.1 Construção recursiva

Colocamos o icosaedro inscrito em S^2 , em seguida projetamos radialmente os seus 12 vértices na superfície. A posição do icosaedro na esfera é arbitrária, mas consideramos o posicionamento mais usual na literatura (Giraldo, 1997; Sahr *et al.*, 2003; Satoh, 2013), onde dois dos seus vértices

Figura 2.2: Sólidos platônicos e suas respectivas projeções na esfera: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro. Fonte: *Gregory et al. (2008)*.

são colocados em cada polo de $\mathbb{S}^2$,

$$\text{polo norte} := (\phi_1, \theta_1) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \text{polo sul} := (\phi_{12}, \theta_{12}) = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right),$$

e os demais, são distribuídos uniformemente na superfície, *i.e.*, com a mesma distância geodésica $d(\cdot, \cdot)$ entre os vértices adjacentes. Logo, temos cinco no hemisfério norte,

$$(\phi_i, \theta_i) := \left(2 \arcsin \left(\frac{1}{2 \cos \left(\frac{3\pi}{10} \right)} \right) - \frac{\pi}{2}, \left(i - \frac{3}{2}\right) \frac{2\pi}{5} \right), \quad \text{para } i = 2, \dots, 6,$$

e os cinco restantes no hemisfério sul,

$$(\phi_i, \theta_i) := \left(-2 \arcsin \left(\frac{1}{2 \cos \left(\frac{3\pi}{10} \right)} \right) - \frac{\pi}{2}, (i - 7) \frac{2\pi}{5} \right), \quad \text{para } i = 7, \dots, 11.$$

As 20 faces (triângulos planos equiláteros) do icosaedro são projetadas radialmente na superfície e consequentemente obtemos uma malha triangular composta por triângulos esféricos com arestas geodésicas, conforme ilustrada na Figura 2.3.

Figura 2.3: O icosaedro e a sua projeção radial na superfície da esfera $\mathbb{S}^2$.

A malha inicial pode ser refinada incluindo os pontos médios das arestas triangulares e conectando-os para gerar novos triângulos. Deste modo, cada triângulo é dividido em quatro triângulos esféricos menores no seu interior. Os pontos de biseção são considerados vértices e são agregados à malha esférica. Por exemplo, se uma aresta geodésica é formada pelos vértices x_i

e x_j , então o ponto médio de $[x_i, x_j]$ o segmento que liga x_i com x_j , é dado como $x_{ij}^* = (x_i + x_j)/2$. Após, é projetado na superfície com a fórmula

$$x_{ij} = \frac{x_{ij}^*}{\|x_{ij}^*\|}.$$

Finalmente, x_{ij} é definido como um novo vértice na malha. De forma similar, repetimos esse processo nas arestas restantes do triângulo. A construção recursiva é completada quando a média (ou máxima) distância entre pontos de malha adjacentes atinge o valor desejado. Para a construção recursiva o número de vértices, triângulos e arestas são facilmente calculados pelas fórmulas:

$$\begin{aligned} N &= 10 \times 2^{2\ell} + 2, & \text{número de vértices,} \\ N_T &= 20 \times 2^{2\ell}, & \text{número de triângulos,} \\ N_A &= 30 \times 2^{2\ell}, & \text{número de arestas.} \end{aligned}$$

onde $\ell = 0, 1, 2, \dots$, é o nível de recursão (ou *glevel- ℓ* como [Sato, 2013](#); [Tomita et al., 2001](#)), que indica o nível de refinamento da malha. Na tabela 2.1 mostramos o número de vértices, triângulos e arestas que caracterizam a malha esférica icosaédrica nos diferentes níveis de refinamento.

MALHAS ESFÉRICAS ICOSAÉDRICAS			
NÍVEL	VÉRTICES	TRIÂNGULOS	ARESTAS
0	12	20	30
1	42	80	120
2	162	320	480
3	642	1280	1920
4	2562	5120	7680
5	10242	20480	30720
6	40962	81920	122880
7	163842	327680	491520
8	655362	1310720	1966080
9	2621442	5242880	7864320

Tabela 2.1: Níveis de refinamento ℓ da malha esférica icosaédrica e seu respectivo número de nós, triângulos e arestas.

Observe-se que o icosaedro é a malha inicial e o seu nível de refinamento é $\ell = 0$. Conforme a Figura 2.4, são ilustrados os níveis de refinamento $\ell = 0$ até 5. Além disso, denotando por N o número de vértices, N_A o número de arestas e N_T o número de faces, temos que o icosaedro satisfaz a característica de Euler:

$$N = 2 + N_A - N_T.$$

2.2.2 Decomposição Voronoï-Delaunay

Acompanhando a construção recursiva da malha esférica icosaédrica, definimos o conjunto de vértices distintos por

$$S_N = \{x_1, \dots, x_N\}, \quad \text{com } N = 10 \times 2^{2\ell} + 2.$$

Temos que o conjunto de triângulos geodésicos forma uma triangulação ou decomposição triangular em $\mathbb{S}^2$, denotada por $\tilde{\mathcal{T}}_h(\mathbb{S}^2)$ ou simplesmente $\tilde{\mathcal{T}}_h$, onde h está relacionado ao nível de refinamento da malha e será definido mais tarde. $\tilde{\mathcal{T}}_h$ satisfaz as propriedades:

- (i) Os vértices dos triângulos são nós computacionais,
- (ii) nenhum triângulo contém outros vértices a não ser seus próprios vértices,

Figura 2.4: Malha esférica icosaédrica com refinamento recursivo de níveis 0 (12 vértices) até 5 (10242 vértices).

- (iii) os interiores dos triângulos são dois a dois disjuntos e,
- (iv) a união dos triângulos cobre a esfera toda.

Os itens (i)–(ii) são conhecidos na literatura como as condições de uma triangulação tipo conforme para domínios em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ de acordo com Ciarlet (2002). A triangulação $\tilde{\mathcal{T}}_h$, na qual o interior do circuncírculo de qualquer triângulo esférico não contém outro vértice de malha além dos seus três vértices, é denominada como decomposição *primal* ou *triangulação de Delaunay* (Gärtner e Kamenski, 2019). Essa decomposição primal tem a propriedade de maximizar o menor de todos os ângulos dos triângulos geodésicos, assim obtemos uma malha triangular esférica com triângulos geodésicos o mais equiláteros possíveis (Hjelle e Dæhlen, 2006; Renka, 1997). Em particular, e para o desenvolvimento desta tese vamos caracterizar a decomposição primal de Delaunay $\tilde{\mathcal{T}}_h$ como segue:

Definição 2.1 (Decomposição primal de Delaunay). *Se x_i, x_j e x_k são vértices adjacentes (conectados por arestas) na malha $\tilde{\mathcal{T}}_h$, denotamos por $\tilde{T}_{ijk}$ o triângulo geodésico formado pelos vértices x_i, x_j e x_k , tal que*

$$\tilde{\mathcal{T}}_h := \bigcup_{ijk \in \Sigma} \tilde{T}_{ijk},$$

onde $\Sigma = \{ijk : i, j, k \text{ são vizinhos em } S_N\}$. Então, $\tilde{\mathcal{T}}_h$ é uma decomposição esférica de Delaunay em $\mathbb{S}^2$ associada com os vértices $S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$.

Pelo item (iv) acima e da definição anterior, obtemos

$$\mathbb{S}^2 = \bigcup_{ijk \in \Sigma} \text{cl}(\tilde{T}_{ijk}) = \bigcup_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \text{cl}(\tilde{T}_{ijk}),$$

onde $\text{cl}(\cdot)$ denota o fecho do triângulo geodésico $\tilde{T}_{ijk}$ com a métrica $d(\cdot, \cdot)$ definida em $\mathbb{S}^2$.

Observação 2.1. De forma análoga e pela construção recursiva da malha, podemos denotar por T_{ijk} o triângulo plano da respectiva decomposição $\mathcal{T}_h$ associada com os vértices $S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ do poliedro, digamos S_h , inscrito em $\mathbb{S}^2$.

Observação 2.2. É importante destacar que para a geração das malhas, bem como para a manipulação e visualização gráfica dos experimentos numéricos, empregamos o código desenvolvido na linguagem FORTRAN90 por Peixoto (2013) da sua tese de doutorado.

Figura 2.5: Decomposições primal e dual na esfera $\mathbb{S}^2$ de níveis 0 e 1.

A decomposição primal $\tilde{T}_h$ pode ser associada a uma e só uma decomposição dual, que é determinada ao conectar ciclicamente os circuncentros de cada triângulo esférico por geodésicas. Essa nova decomposição é definida como decomposição dual de Voronoï e está constituída pelas regiões de Voronoï, polígonos esféricos formados pelos respectivos circuncentros dos triângulos da decomposição primal (Figura 2.5). Por exemplo, para um triângulo geodésico $\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{T}_h$ com vértices x_i, x_j e x_k , o seu circuncentro q_{ijk} é calculado pela expressão

$$q_{ijk} = \frac{(x_j - x_i) \times (x_k - x_i)}{\|(x_j - x_i) \times (x_k - x_i)\|},$$

onde $\times$ denota o produto vetorial. Uma outra maneira para construir uma região de Voronoï $\tilde{V}_i$ em $\mathbb{S}^2$, é considerar $H(x_i, x_j)$ a região na superfície esférica que contém todos os pontos mais próximos ao ponto x_i do que x_j . Assim, a região de Voronoï $\tilde{V}_i$ será a intersecção das $N - 1$ regiões esféricas associadas a cada vértice de S_N , i.e.,

$$\tilde{V}_i = \bigcap_{\substack{j=1, \dots, N \\ j \neq i}} H(x_i, x_j),$$

onde cada célula resultante $\tilde{V}_i$ tem pelo menos $N - 1$ geodésicas. Quando aplicamos esse processo a cada vértice de S_N , obtemos um único conjunto de regiões de Voronoï disjuntas $\tilde{V}_i$ para cada $i = 1, \dots, N$. Introduzimos a definição a seguir.

Definição 2.2 (Região de Voronoï). Seja $S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ um conjunto de vértices distribuídos uniformemente na superfície da esfera unitária $\mathbb{S}^2$. Cada vértice $x_i \in S_N$ tem associada uma região de Voronoï $\tilde{V}_i$ dada como

$$\tilde{V}_i := \tilde{V}(x_i) = \{x \in \mathbb{S}^2 : d(x, x_i) < d(x, x_j), \quad j = 1, \dots, N \text{ e } j \neq i\}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

O conjunto $\tilde{V}_i$ consiste de todos os pontos x em $\mathbb{S}^2$ que estão mais próximos a x_i do que qualquer outro ponto de S_N .

Observe que todas as regiões de Voronoï são abertas e convexas. Particularmente, dadas duas regiões $\tilde{V}_i$ e $\tilde{V}_j$ temos $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j = \emptyset$, para cada $i \neq j$. Cada vértice da decomposição dual de Voronoï está associado a um único triângulo esférico da decomposição primal e esse fato é conhecido como *dualidade*, conforme o enunciado por [Augenbaum e Peskin \(1985\)](#); [Hjelle e Dæhlen \(2006\)](#), mais precisamente consiste das seguintes características:

- (i) Um vértice de Voronoï corresponde a um triângulo da decomposição primal,
- (ii) uma aresta de Voronoï corresponde a uma aresta da decomposição primal,
- (iii) uma região de Voronoï corresponde a um vértice na decomposição primal.

Observe que, o circuncentro q_{ijk} do triângulo $\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ com vértices x_i, x_j e x_k está na fronteira das três células de Voronoï associadas a cada um dos vértices do triângulo. Logo, o conjunto dos vértices da decomposição dual de Voronoï está formado unicamente pelos circuncentros dos triângulos da decomposição primal de Delaunay $\tilde{\mathcal{T}}_h$. Por outro lado, denotamos o fecho da célula de Voronoï $\tilde{V}_i$ por

$$\text{cl}(\tilde{V}_i) = \{x \in \mathbb{S}^2 : d(x, x_i) \leq d(x, x_j), \quad j = 1, \dots, N\}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Então, a união de todas as regiões $\text{cl}(\tilde{V}_i)$, para $i = 1, \dots, N$ cobrem a esfera toda, *i.e.*,

$$\mathbb{S}^2 = \bigcup_{i=1}^N \text{cl}(\tilde{V}_i).$$

A decomposição dual de Voronoï associada aos vértices $S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ é definida como:

Definição 2.3 (Decomposição dual de Voronoï). *Seja $S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ o conjunto de vértices na esfera unitária $\mathbb{S}^2$. Cada vértice em S_N tem associada uma única região $\tilde{V}_i$, então uma decomposição dual de Voronoï é dada por*

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N.$$

Figura 2.6: Configuração geométrica das células $\tilde{V}_i$ (hexágono/pentágono) associadas ao vértice x_i , onde x_{ij} é o ponto médio da aresta geodésica $d(x_i, x_j)$ e $\tilde{\Gamma}_{ij}$ a aresta comum entre as células de Voronoï associadas aos vértices x_i e x_j respectivamente.

Em particular, no icosaedro esférico, a decomposição dual de Voronoï é formada por pentágonos/hexágonos. Notamos que, no refinamento da malha, os pentágonos ficam localizados nos 12 vértices iniciais e os hexágonos nos vértices restantes, conforme é ilustrado na Figura 2.5. É importante destacar, que esses polígonos esféricos, sejam pentágonos ou hexágonos, serão usados como volumes de controle nos MVF descritos no Capítulo 3.

Observação 2.3. *A decomposição Voronoï-Delaunay construída anteriormente será considerada como a malha pura sem otimização e será denotada ao longo do trabalho como NOPT.*

Cabem agora algumas considerações para esse desenvolvimento. Em primeiro lugar, o par de vértices x_i e x_j são vizinhos se e só se $\tilde{\Gamma}_{ij} = \text{cl}(\tilde{V}_i) \cap \text{cl}(\tilde{V}_j) \neq \emptyset$, *i.e.*, para a decomposição dual de

Voronoi, $\tilde{\Gamma}_{ij}$ é uma aresta geodésica em $\mathbb{S}^2$ sempre que o comprimento $m(\tilde{\Gamma}_{ij})$ de $\tilde{\Gamma}_{ij}$ estiver bem definido (Figura 2.6). Com esta notação podemos estabelecer para cada x_i o conjunto de índices dos seus vizinhos x_j tal que $m(\tilde{\Gamma}_{ij}) > 0$, *i.e.*,

$$\Lambda(i) = \left\{ j : j \neq i \text{ e } \tilde{\Gamma}_{ij} = \text{cl}(\tilde{V}_i) \cap \text{cl}(\tilde{V}_j) \neq \emptyset \right\}.$$

Cada $\tilde{V}_i$ possui fronteira suave por partes $\partial\tilde{V}_i$, formada pelas arestas $\tilde{\Gamma}_{ij}$, para cada $j \in \Lambda(i)$, tal que

$$\partial\tilde{V}_i = \bigcup_{j \in \Lambda(i)} \tilde{\Gamma}_{ij},$$

onde $\Lambda(i)$ denota o conjunto de vértices vizinhos do x_i .

Algumas outras notações e fatos relevantes na decomposição dual de Voronoi são, para x_i e x_j vértices vizinhos com $j \in \Lambda(i)$:

- (i) Denotamos por $\overrightarrow{x_i x_j}$ o vetor que vai de x_i até x_j ,
- (ii) por $\tilde{\tau}_{ij}$ a aresta primal do triângulo geodésico $\tilde{T}_{ijk}$ que conecta os vértices x_i e x_j ,
- (iii) os pontos x_{ij} e m_{ij} denotam os pontos médios das arestas geodésicas $\tilde{\tau}_{ij}$ (primal) e $\tilde{\Gamma}_{ij}$ (dual) respectivamente,
- (iv) cada aresta primal geodésica $\tilde{\tau}_{ij}$ é perpendicular à aresta dual $\tilde{\Gamma}_{ij}$, *i.e.*, $\tilde{\tau}_{ij} \perp \tilde{\Gamma}_{ij}$,
- (v) o plano formado por $\tilde{\Gamma}_{ij}$ e a origem, divide à aresta $\tilde{\tau}_{ij}$ no seu ponto médio x_{ij} , então

$$d(x_i, x) = d(x, x_j), \quad \text{para cada } x \in \tilde{\Gamma}_{ij},$$

- (vi) e $\vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ é o vetor normal unitário na aresta de $\tilde{\Gamma}_{ij}$ que pertence ao plano $\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, x}$ tangente à esfera no ponto x . O vetor $\vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ é paralelo a $\overrightarrow{x_i x_j}$, *i.e.*, $\vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} \parallel \overrightarrow{x_i x_j}$ para cada $x \in \tilde{\Gamma}_{ij}$.

A metodologia usada na construção das decomposições Voronoi-Delaunay permite implementar tanto Métodos de Volumes Finitos como de Elementos Finitos para a equação de Laplace. Uma característica essencial para a discretização da equação e a sua implementação pelo MVF é a bisseção perpendicular das arestas dadas nos itens (iv) e (vi). Em particular, se usamos os dois tipos de decomposições, temos que a decomposição primal permite calcular ou aproximar a solução exata do problema nos seus vértices, enquanto a decomposição dual permite discretizar a equação diferencial em cada uma das suas células computacionais (Lin *et al.*, 2013).

Com base nas definições anteriores, consideramos agora alguns parâmetros referentes às medidas e distâncias entre os vértices da decomposição dual de Voronoi. Uma primeira medida de malha é proposta por Du *et al.* (2003b) como,

$$h = \max_{i=1, \dots, N} h_i, \quad h_i = \max_{x \in \tilde{V}_i} d(x_i, x), \quad (2.1)$$

que relaciona as distâncias geodésicas dos pontos na célula de Voronoi. Sendo assim h_i a distância geodésica máxima entre um vértice x_i e os seus pontos na sua célula associada $\tilde{V}_i$ e h a máxima distância geodésica entre algum vértice e os seus pontos na sua célula. Devido à presença de hexágonos e pentágonos, a decomposição dual torna-se não-uniforme, por conseguinte a medida h pode ser usada como medida de uniformidade de malha, *i.e.*, de quão perto uma malha ideal é uniforme em $\mathbb{S}^2$ (Du *et al.*, 2003b). Esse fenômeno de não uniformidade pode ser atribuído à distorção nas células (Peixoto, 2013; Tomita *et al.*, 2001). Além da medida de uniformidade na decomposição dual de Voronoi $\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ definimos uma medida de regularidade da malha σ relacionada à distância geodésica dos pontos na célula de Voronoi (Du *et al.*, 2003b; Ringler, 2003).

A medida é dada como

$$\sigma = \min_{i=1,\dots,N} \sigma_i, \quad \sigma_i = \min_{j \in \Lambda(i)} \sigma_{ij} \quad \text{onde} \quad \sigma_{ij} = \frac{d(x_i, x_j)}{2h_i}. \quad (2.2)$$

Observação 2.4. As malhas esféricas icosaédricas não são malhas “ideais” uniformes (ou seja $\sigma = \sigma_i = \sigma_{ij}$ para cada i e $j \in \Lambda(i)$). Se existir uma variação na uniformidade das células, o valor de σ é reduzido. Então, σ pode ser usada como uma outra medida da uniformidade da malha; quanto maior for o valor de σ mais uniforme será a malha. O valor de σ nos fornece uma medida de uniformidade local da malha (Du et al., 2003b). Em particular, algumas demonstrações dos resultados desta tese dependerão do parâmetro σ , e para esses casos, vamos dizer que existem constantes positivas que dependem do valor da regularidade da malha. Por outro lado, conforme a dualidade na construção recursiva da malha, a decomposição primal dependerá também deste parâmetro σ .

2.3 Otimização

Antes de começar a exposição da otimização, convém esclarecer sua necessidade. Conforme descrito por Heikes e Randall (1995b), a malha esférica icosaédrica original apresenta deficiências na precisão de certos operadores diferenciais. Em geral, se temos malhas de qualidade “ruim”, i.e., se as células das malhas são muito distorcidas, vão produzir fontes de erros de truncamento grandes que dificultam a obtenção de estimativas do erro das soluções aproximadas. Não pretendemos elaborar alguma melhora nas malhas, mas sim fazer uma breve comparação no sentido prático. Certas características geométricas como colocação, bisseção e ortogonalidade foram discutidas em diferentes contextos por Miura e Kimoto (2005); Ringler (2003) e Peixoto (2013).

Figura 2.7: Configuração geométrica dos pontos médios das arestas da decomposição primal (destacados em quadrados azuis) e os pontos médios das arestas da decomposição dual (destacados em triângulos verdes). Além, o centroide x_i^* (destacado no círculo verde) da célula de Voronoi associada ao vértice x_i .

2.3.1 Malha esférica centroidal de Voronoi (SCVT)

A discretização proposta por Du et al. (2003a), centra-se em decomposições duais de Voronoi e é denominada na literatura como esférica centroidal de Voronoi (do inglês *Spherical Centroidal Voronoi Tessellation*) e será denotada ao longo desta tese por SCVT. Nas malhas esféricas icosaédricas em geral, os vértices ou centros associados as células de Voronoi não necessariamente coincidem com os seus centroides esféricos (Figura 2.7). O objetivo principal da SCVT é ajustar essa distância por meio de um funcional de forçamento ou colocação. Consideramos primeiramente o seguinte fato: o centroide usual no $\mathbb{R}^3$ de um polígono esférico $\tilde{V}$ pode ser calculado por

$$x^* = \int_{\tilde{V}} x ds(x).$$

Em geral, x^* não está na superfície da esfera, mas sim dentro dela. Consideramos então a definição descrita por [Du et al. \(2003a\)](#) para o centroide restrito a $\mathbb{S}^2$.

Definição 2.4 (Centroide esférico). *Dado um polígono esférico $\tilde{V}$, o centroide esférico $x^s \in \mathbb{R}^3$ é um ponto tal que $F(x^s) \leq F(x)$ para cada $x \in \tilde{V}$ com*

$$F(x) = \int_{\tilde{V}} \|x - y\|_{\mathbb{R}^3}^2 ds(y),$$

onde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$ é a norma euclidiana.

Com $\mathbb{S}^2$ na origem, temos que o centroide esférico de qualquer célula definida na superfície é obtido a partir do centroide padrão no $\mathbb{R}^3$ como,

$$x^c = \frac{x^*}{\|x^*\|_{\mathbb{R}^3}}.$$

Em geral, a otimização de [Du et al. \(2003a\)](#) consiste em forçar ou colocar o vértice associado à célula de Voronoi para ser o centroide da célula, preservando a ortogonalidade entre as arestas primal e dual ([Miura e Kimoto, 2005](#)). Agora, dada uma função de densidade $\rho(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{S}^2$, temos que para cada região $\tilde{V}_i \subset \mathbb{S}^2$, o centroide padrão x_i^* de $\tilde{V}_i$ é calculado pela expressão

$$x_i^* = \frac{\int_{\tilde{V}_i} x \rho(x) ds(x)}{\int_{\tilde{V}_i} \rho(x) ds(x)}, \quad \text{para } i = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Observe que, x_i^* não está em $\mathbb{S}^2$, mas sim dentro dela. A distância entre o centroide padrão x_i^* e o centroide x_i^c restrito a $\mathbb{S}^2$ é definida a seguir.

Proposição 2.1 ([Du et al., 2003a](#)). *Sejam $x_i^c \in \mathbb{S}^2$ e $x_i^* \in \mathbb{R}^3$ os centroides restrito a $\mathbb{S}^2$ e padrão da célula $\tilde{V}_i$, respectivamente. Então, $x_i^* - x_i^c$ é um vetor normal à superfície de $\mathbb{S}^2$ no ponto x_i^c , i.e., x_i^c é a projeção radial de x_i^* em $\mathbb{S}^2$ a longo da direção normal em x_i^c .*

Além disso, o centroide restrito x_i^c de uma região esférica $\tilde{V}_i$ é a solução ao problema:

$$\min_{x \in \tilde{V}_i} F(x), \quad \text{onde } F(x) = \int_{\tilde{V}_i} \rho(y) \|x - y\|_{\mathbb{R}^3}^2 ds(y).$$

Em consequência, dizemos que uma decomposição de Voronoi é do tipo SCVT se e só se, os vértices $S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ associados as regiões de Voronoi são também os centroides restritos dessas regiões, i.e., $x_i = x_i^c$. Assim, dada uma decomposição de Voronoi $\{x_i^\#, \tilde{V}_i^\#\}_{i=1}^N$ de $\mathbb{S}^2$, podemos definir o seguinte funcional de energia (*clustering energy*):

$$\mathcal{K}(\{x_i^\#, \tilde{V}_i^\#\}_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{V}_i^\#} \rho(y) \|y - x_i^\#\|_{\mathbb{R}^3}^2 ds(y).$$

Esse funcional de energia é usado como medida de qualidade da malha e é minimizado sempre que $\{x_i^\#, \tilde{V}_i^\#\}_{i=1}^N$ seja uma SCVT e é frequentemente associado com quantidades de variância e erro de quantização, de acordo relatado por [Du et al. \(2003a\)](#). Além disso, se no funcional de energia a função de densidade é constante obteremos uma malha SCVT uniformemente distribuída em $\mathbb{S}^2$. Caso contrário, para funções não constantes fornece uma distribuição não uniforme dos vértices, enquanto a acumulação dos vértices da SCVT permanece localmente regular ([Du et al., 2003b, 2010](#)). Não obstante, para o desenvolvimento dos experimentos numéricos da tese será usada uma função de densidade constante $\rho(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{S}^2$.

Existem várias formas para construir malhas SCVT (vide [Du et al., 2003a; Ju et al., 2002](#)). Em particular, conforme os resultados obtidos por [Du et al. \(2003b\)](#) e [Du e Gunzburger \(2002\)](#), enunciamos o algoritmo determinístico de *Lloyd* para gerar a SCVT.

Algoritmo 2.1. (Método de Lloyd) Dada uma função de densidade $\rho(x)$ definida para cada $x \in \mathbb{S}^2$ e N um inteiro positivo,

- 1: Defina o conjunto de N vértices $S_N := \{x_i\}_{i=1}^N$ em $\mathbb{S}^2$;
- 2: Construir as células $\{\tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ de $\mathbb{S}^2$ associado com $\{x_i\}_{i=1}^N$;
- 3: Determinar os centroides restritos do conjunto $\{\tilde{V}_i\}_{i=1}^N$;
- 4: Atualizar: os centroides restritos formam um novo conjunto de vértices $\{x_i\}_{i=1}^N$;
- 5: se o novo conjunto de vértices atinge algum critério de convergência “STOP”, caso contrario voltar ao passo 2.

A SCVT carregar uma vantagem adicional, pode ser gerada sem restrição em qualquer nível de refinamento da malha (Du *et al.*, 2003a) e é de bastante interesse nos modelos globais da previsão do tempo.

2.3.2 Proposta de Heikes & Randall (HR95)

Mencionamos uma outra otimização clássica das malhas esféricas icosaédricas. Consideramos o seguinte fato: observe na Figura 2.7 que os pontos médios das arestas da decomposição primal não coincidem com os pontos médios das arestas da decomposição dual. A proposta de Heikes e Randall (1995b) consiste em minimizar globalmente as distâncias entre esses pontos médios (bisseção) preservando a ortogonalidade entre as arestas. Nesse caso, a condição de colocação da SCVT não sempre é satisfeita devido à distorção nas células. Os autores mostraram que a relação entre os pontos médios e o comprimento da aresta dado como

$$r_{ij} = \frac{(x_{ij} - m_{ij})}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})}, \quad (2.4)$$

é um termo dominante para o erro de truncamento nos operadores diferenciais. Aqui x_{ij} e m_{ij} denotam os pontos médios das arestas primal e dual respectivamente e $m(\tilde{\Gamma}_{ij})$ é o comprimento da aresta dual. Então, para caracterizar a otimização, inicialmente foi definida uma função global, mais precisamente a soma das quartas potências dos números r_{ij} ,

$$R = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} r_{ij}^4.$$

O objetivo da otimização é encontrar a distribuição dos vértices que minimiza R mediante um método Quase-Newton. Em outras palavras, o método de otimização não-linear minimiza a função R para ajustar a intersecção das arestas, modificando a bisseção das arestas primal e dual, e além, preservando a ortogonalidade entre elas. Para simplificar a notação, esta malha será denotada por HR95, e mencionada só no contexto dos experimentos numéricos, dado que até o momento não existe um análise teórico de convergência para esta tipo de otimização.

Para finalizar esta seção, dadas as medidas de uniformidade e regularidade, afirmamos que todas as malhas mencionadas acima são em geral, uma classe de decomposições quase-uniformes (não muito distorcidas) de $\mathbb{S}^2$. Segue uma definição usual desta classe de malhas, dada por exemplo em Li *et al.* (2000) ou Mishev (1998) para discretizações de domínios no plano, mas são estendidas de maneira natural em superfícies (Ju e Du, 2009).

Definição 2.5 (Malhas quase-uniformes). *Uma família de malhas esféricas icosaédricas $\tilde{\mathcal{V}}(\mathbb{S}^2) = \{\tilde{V}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ de $\mathbb{S}^2$ é dita quase-uniforme (não muito distorcida), se para cada polígono esférico $\tilde{V}_i \in \mathcal{V}$, com fronteira $\partial\tilde{V}_i = \bigcup_{j \in \Lambda(i)} \tilde{\Gamma}_{ij}$, existem constantes $\{C_i\}_{i=1}^3 \subset \mathbb{R}_+$, independentes do*

parâmetro h , tal que

$$\frac{1}{C_1}h \leq m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \leq C_1h, \quad (2.5a)$$

$$\frac{1}{C_2}h^2 \leq S(\tilde{V}_i) \leq C_2h^2, \quad (2.5b)$$

$$\text{Card}(\partial\tilde{V}_i) \leq C_3, \quad (2.5c)$$

onde $\text{Card}(\partial\tilde{V}_i)$ denota a quantidade de arestas que constituem a fronteira de $\tilde{V}_i$.

Para terminar, dizemos então, que as malhas NOPT, SCVT e HR95 são decomposições quase-uniformes, *i.e.*, satisfazem as condições (2.5a)–(2.5c). Tomaremos essencial esta ideia para a obtenção das estimativas de convergência do problema de Laplace em $\mathbb{S}^2$. Por último, definido o domínio computacional o passo a seguir será definir uma discretização do Laplaciano associada as decomposições Voronoï-Delaunay de $\mathbb{S}^2$.

Capítulo 3

Discretização do Laplaciano

Neste capítulo vamos nos concentrar numa aproximação clássica da equação de Poisson através do Método dos Volumes Finitos (MVF). Inicialmente, formalizaremos esta discretização via um esquema de volumes de diferença finita centrada (*Cell-Centered Finite Volume Difference Scheme*), conforme a construção da decomposição Voronoï-Delaunay em $\mathbb{S}^2$ do capítulo precedente e ademais, o esquema resultante satisfaz a propriedade de conservação.

Em seguida, discutiremos brevemente que, em geral, o MVF é assintoticamente inconsistente, ou seja, o erro local de truncamento do método não tende a zero com o refinamento das malhas. Isso é devido à não uniformidade das células e às aproximações dos fluxos em cada uma das arestas como relatado por Heikes e Randall (1995b) e (Ringler, 2003). Mostraremos que devido à decomposição Voronoï-Delaunay ser quase-uniforme e o esquema ser conservativo, o MVF satisfaz uma condição de *consistência fraca* nas L^2 e max-normas no sentido das diferenças finitas (Coudière *et al.*, 1999; Eymard *et al.*, 2000; Faille, 1992), *i.e.*, os fluxos contínuos possuem aproximações consistentes nas arestas da célula. Finalizaremos essa parte com alguns experimentos numéricos do erro de truncamento.

Para garantir as estimativas de convergência do Capítulo 4 é necessário estabelecer condições de estabilidade. Para esse fim, estruturaremos conforme a literatura, uma correspondência geométrica entre $\mathbb{S}^2$ e o seu poliedro de aproximação $\mathbf{S}_h$. A ideia fundamental é reescrever o MVF como um MEFL e definir um operador que interpole os espaços de aproximação associados à decomposição Voronoï-Delaunay, e em seguida estabelecer algumas estimativas referentes à estabilidade. Por fim, estimamos os erros devidos à aproximação geométrica da esfera pelo poliedro nas formas variacionais correspondentes.

3.1 Métodos dos volumes finitos

Dada a decomposição dual de Voronoï $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$, o MVF consiste em discretizar diretamente a forma integral de (1.4) em cada uma das células de $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$. Em seguida, fazendo uso da fórmula de Green, obtemos uma integral de linha do gradiente tangencial na fronteira da célula. Suponhamos que $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seja de classe C^4 e satisfaça,

$$-\int_{\tilde{V}_i} \Delta_s u(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) = -\int_{\partial\tilde{V}_i} \nabla_s u(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}, \tilde{V}_i} d\gamma(\mathbf{x}) = \int_{\tilde{V}_i} f(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

onde $\vec{n}_{\mathbf{x}, \tilde{V}_i}$ é o vetor normal unitário à fronteira $\partial\tilde{V}_i$ no ponto $\mathbf{x}$ e está contido em $\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, \mathbf{x}}$, o plano tangente a $\mathbb{S}^2$ no ponto $\mathbf{x}$. Agora, queremos estimar o valor do Laplaciano de u no vértice $\mathbf{x}_i$ associado com $\tilde{V}_i$. Expomos esta estimação a seguir.

Proposição 3.1. *Sejam $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^4 e $\tilde{V}_i$ uma célula da decomposição dual de Voronoï $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ que satisfaz a condição (2.5b). Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ que independe do parâmetro h , tal que*

$$\left| \Delta_s u(\mathbf{x}_i^c) - \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \int_{\partial\tilde{V}_i} \nabla_s u(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}, \tilde{V}_i} d\gamma(\mathbf{x}) \right| \leq Ch^2, \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{x}_i^c$ é o centroide esférico da célula $\tilde{V}_i$, $S(\tilde{V}_i)$ denota a área superficial da célula e h é o tamanho

de malha definido em (2.1).

Demonstração. Com efeito, dadas $u \in C^4(\mathbb{S}^2)$ e $\tilde{V}_i \in \tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{x}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$, tomemos $u|_{\tilde{V}_i} \in C^4(\tilde{V}_i)$ a restrição de u à célula $\tilde{V}_i$. Também, consideremos a sua extensão u^Ω ao conjunto $\Omega_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 2\}$ que também é de classe C^4 em Ω_2 . Desta maneira, podemos usar o Teorema de Taylor até ordem dois do termo Δu^Ω , em torno do centroide não restrito à esfera x_i^* de $\tilde{V}_i$, após integrando em relação à $\tilde{V}_i$, dividindo a expressão pela respectiva área superficial de $\tilde{V}_i$ e em virtude da condição (2.5b), que diz: existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que $Ch^2 \leq S(\tilde{V}_i)$. Resulta,

$$\frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \int_{\tilde{V}_i} \Delta u^\Omega(x) ds(x) = \Delta u^\Omega(x_i^*) + \nabla \left(\Delta u^\Omega(x_i^*) \right) \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \cdot \int_{\tilde{V}_i} (x - x_i^*) ds(x) + R_{ij},$$

onde $|R_{ij}| \leq Ch^2 \max_{x \in \tilde{V}_i} |H(\Delta u^\Omega(x))|$ e H denota a Hessiana de Δu^Ω no ponto x . Da definição do centroide no $\mathbb{R}^3$, $x_i^* = \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \int_{\tilde{V}_i} x ds(x)$, o segundo termo da integral do lado direito é zero. Agora, para $x_i^* \in \Omega_2$, teremos que

$$\Delta u^\Omega(x_i^*) = \Delta_s u \left(\frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \right) = \Delta_s u(x_i^c),$$

onde x_i^c denota o centroide esférico de $\tilde{V}_i$, ademais $\Delta u^\Omega(x) = \Delta_s u(x)$ para cada $x \in \tilde{V}_i$. Portanto,

$$\frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \int_{\tilde{V}_i} \Delta_s u(x) ds(x) = \Delta_s u(x_i^c) + R_{ij}.$$

Finalmente, a limitação desejada segue imediatamente da fórmula de Green (3.1) e observando que a constante depende apenas das segundas derivadas de Δu^Ω . O que prova a proposição. $\square$

Como relatado na Subseção 2.2.2, uma célula de Voronoï $\tilde{V}_i$ é um polígono esférico aberto convexo com fronteira suave por pedaços. Sua fronteira $\partial \tilde{V}_i$ pode ser decomposta em um conjunto de arestas $\tilde{\Gamma}_{ij}$ tal que

$$\partial \tilde{V}_i = \bigcup_{j \in \Lambda(i)} \tilde{\Gamma}_{ij},$$

onde $\Lambda(i)$ é o conjunto de vizinhos do vértice x_i . Segundo essa notação, teremos para (3.1) a expressão,

$$- \int_{\tilde{V}_i} \Delta_s u(x) ds(x) = - \sum_{j \in \Lambda(i)} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \nabla_s u(x) \cdot \tilde{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x).$$

onde $\tilde{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ é o vetor normal unitário externo à célula $\tilde{V}_i$ contido no plano tangente $\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, x}$. No que se segue, vamos denotar ao fluxo contínuo da função u através da aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$ por,

$$F_{ij}^c(u) := - \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \nabla_s u(x) \cdot \tilde{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x), \quad \text{para cada } j \in \Lambda(i). \quad (3.3)$$

Um ingrediente básico envolvido na construção da discretização é a determinação de uma aproximação da integral ao longo das arestas $\tilde{\Gamma}_{ij}$ com base apenas no valor da função no ponto médio m_{ij} de cada aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$, conforme ilustrado na Figura 3.1. Mostraremos a seguir, uma estimação do fluxo por um método de integração numérica de ordem três em relação ao comprimento da aresta.

Proposição 3.2. *Sejam $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^4 e $\tilde{\Gamma}_{ij}$ uma aresta da célula de Voronoï $\tilde{V}_i$ associada ao vértice x_i da decomposição dual $\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{x}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ que satisfaz a condição (2.5a).*

Figura 3.1: Representação do stencil para a obtenção da aproximação do Laplaciano no vértice x_i .

Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, que independe do parâmetro h , tal que

$$\left| F_{ij}^c(u) - m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} \right| \leq Ch^3,$$

onde F_{ij}^c denota o fluxo contínuo através de $\tilde{\Gamma}_{ij}$, m_{ij} e $m(\tilde{\Gamma}_{ij})$ denotam respectivamente o ponto médio e o comprimento da aresta e h é o tamanho de malha definido em (2.1).

Demonstração. Com um argumento similar ao dado na prova da Proposição 3.1, basta mostrar para $u \in C^4(\tilde{V}_i)$. Sabemos que para cada $x \in \mathbb{S}^2$, $u(x) = u^\Omega(x)$ e que $\nabla u^\Omega(x) \cdot \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x} = 0$. Resulta da definição do gradiente tangencial que

$$\nabla_s u(x) = \nabla u^\Omega(x) - (\nabla u^\Omega(x) \cdot \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}) \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x} = \nabla u^\Omega(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{S}^2.$$

Assim, dados m_{ij} o ponto médio de $\tilde{\Gamma}_{ij}$ e o vetor $\vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ normal a $\tilde{\Gamma}_{ij}$ no ponto x , podemos considerar o Teorema de Taylor até ordem dois do termo $\nabla u^\Omega(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ em torno de m_{ij} , após integrando em relação a $\tilde{\Gamma}_{ij}$ obteremos

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \nabla_s u(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x) &= \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \nabla u^\Omega(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x) \\ &= m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \nabla u^\Omega(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} + \nabla \left(\nabla u^\Omega(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} \right) \cdot \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} (x - m_{ij}) d\gamma(x) \\ &\quad + R_{ij}, \end{aligned}$$

onde $|R_{ij}| \leq Ch^3 \max_{x \in \tilde{\Gamma}_{ij}} \left| H \left(\nabla u^\Omega(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} \right) \right|$ e H denota a matriz Hessiana. Observe-se que usamos a condição (2.5a), i.e., existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ independente de h , tal que $m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \leq Ch$, o fato $\|x - m_{ij}\| \leq h$. Ora, o segundo termo do lado direito da expressão acima é zero, em virtude da simetria em relação ao ponto médio m_{ij} . Então, resulta

$$\int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \nabla_s u(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x) = m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \nabla u^\Omega(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} + R_{ij}.$$

Finalmente, pondo a notação para o fluxo, equação (3.3), obtemos a limitação desejada, notando que a constante irá depender apenas do valor da Hessiana do fluxo. $\square$

O resultado anterior permite então, expressar uma aproximação do valor do Laplaciano de u

num vértice x_i mediante os valores dos fluxos nos pontos médios das arestas da célula de Voronoi associada. Mais propriamente:

Proposição 3.3. *Sejam $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^4 e $\tilde{V}_i$ a célula de Voronoi associada ao vértice x_i da decomposição dual $\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ que satisfaz as condições (2.5b)–(2.5c). Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ que independe do parâmetro h , tal que*

$$\left| \Delta_s u(x_i^c) - \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} \right| \leq Ch,$$

onde x_i^c denota o centroide esférico de $\tilde{V}_i$, $m(\tilde{\Gamma}_{ij})$ e m_{ij} são respectivamente o comprimento e o ponto médio da aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$, e $\vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ é o vetor normal na aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$ no ponto x .

Demonstração. Basta tomar as Proposições 3.1 e 3.2 junto à desigualdade triangular. $\square$

Resultados da mesma ordem em relação ao tamanho do comprimento de aresta, foram descritos em diferente contextos por Xu (2006) e Peixoto (2013). Porém, estimativas de ordem dois são possíveis sempre que as células com lados pares satisfaçam um critério de alinhamento de arestas como mostrado por Peixoto e Barros (2013).

Observe-se que, nas Proposições 3.1–3.3 os fluxos da função u através das arestas da célula, são aproximados pelos valores do gradiente tangencial nos pontos médios das arestas. Então, para levar adiante nossa discretização, precisamos construir uma outra aproximação para essas derivadas tangenciais no ponto médio das arestas. Tomaremos esta ideia mediante o seguinte fato: se a derivada normal à célula $\tilde{V}_i$ em cada aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$ for aproximada no ponto médio x_{ij} da aresta esférica triangular $\tilde{\tau}_{ij}$, teríamos um Método de Diferença Finita centrada (MDF) (*centered finite difference*) dado como

$$-\nabla_s u(x_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} = -\frac{u(x_j) - u(x_i)}{\|x_j - x_i\|} + \mathcal{O}(h^2). \quad (3.4)$$

A aproximação da derivada normal acima é simples de implementar e de ordem dois, mas não é ótima, pois estamos aproximando a derivada normal no ponto médio m_{ij} da aresta dual $\tilde{\Gamma}_{ij}$. Veja que, se tivéssemos células uniformes na superfície esférica em cada refinamento de malha, os pontos médios x_{ij} e m_{ij} das arestas primal e dual coincidiriam. No entanto, como foi discutido por Heikes e Randall (1995b), nas malhas esféricas icosaédricas os pontos médios das arestas primal e dual não coincidem e a sua distância é pelo menos de ordem um, *i.e.*, $\|x_{ij} - m_{ij}\| = \mathcal{O}(h)$. Examinaremos na proposição a seguir, que quando os pontos médios das arestas não coincidem teremos uma aproximação de ordem um para a derivada normal no ponto médio m_{ij} de $\tilde{\Gamma}_{ij}$.

Proposição 3.4. *Seja $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^4 . Então, a derivada normal no ponto médio m_{ij} da aresta dual $\tilde{\Gamma}_{ij}$, que satisfaz a condição (2.5a), pode ser aproximada pelo esquema de diferença finita centrada em termos dos vértices da aresta primal $\tilde{\tau}_{ij}$. Em outras palavras, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ independente de h , tal que*

$$\left| \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} - \frac{u(x_j) - u(x_i)}{\|x_j - x_i\|} \right| \leq Ch,$$

para h suficientemente pequeno.

Demonstração. Em primeiro lugar, lembremos que as células $\tilde{V}_i$ e $\tilde{V}_j$ associadas aos vértices x_i e x_j respectivamente, são adjacentes à aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$ com $m(\tilde{\Gamma}_{ij}) > 0$. Então, de forma análoga à Proposição 3.1, para $u \in C^4(\mathbb{S}^2)$, definimos a sua extensão u^Ω a Ω_2 e usando o Teorema de Taylor até ordem dois de u^Ω em torno de m_{ij} , temos

$$u(x_i) - u(m_{ij}) = u^\Omega(x_i) - u^\Omega(m_{ij}) = \nabla u^\Omega(m_{ij}) \cdot (x_i - m_{ij}) + R_{ij}^{(i)}, \quad (3.5)$$

onde $|R_{ij}^{(i)}| \leq Ch^2 \max_{x \in \tilde{V}_i} |H(u^\Omega)(x)|$. Analogamente,

$$u(x_j) - u(m_{ij}) = u^\Omega(x_j) - u^\Omega(m_{ij}) = \nabla u^\Omega(m_{ij}) \cdot (x_j - m_{ij}) + R_{ij}^{(j)}, \quad (3.6)$$

com $|R_{ij}^{(j)}| \leq Ch^2 \max_{x \in \tilde{V}_j} |H(u^\Omega)(x)|$. Subtraindo (3.5) de (3.6), obteremos

$$u(x_j) - u(x_i) = \nabla u^\Omega(m_{ij}) \cdot (x_j - x_i) + R_{ij},$$

onde $|R_{ij}| \leq Ch^2 \max_{x \in \tilde{V}_i \cup \tilde{V}_j} |H(u^\Omega)(x)|$. Note-se que para cada $x \in \tilde{\Gamma}_{ij}$, o vetor $\vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{x_i x_j}$, devido à bisseção perpendicular entre as arestas conforme enunciada na Subseção 2.2.2, i.e.,

$$x_j - x_i = \|x_j - x_i\| \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}.$$

Então,

$$u(x_j) - u(x_i) = \|x_j - x_i\| \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} + R_{ij}.$$

Por último, invocando a condição (2.5a), o fato $\|x_j - x_i\| \leq h$, segue que

$$\left| \frac{u(x_j) - u(x_i)}{\|x_j - x_i\|} - \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} \right| \leq Ch.$$

O que prova a proposição. $\square$

Observação 3.1. Destacamos que na proposição anterior, é possível obter ordem dois em relação ao comprimento de aresta, se invocarmos o critério de otimização proposto por Heikes e Randall (1995b) para as malhas esféricas icosaédricas e descrito na subseção 2.3.2. A proposta consiste em usar um método de otimização não linear para obter que a diferença entre os pontos médios x_{ij} e m_{ij} das arestas primal e dual respectivamente possui ordem dois, i.e., existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que

$$\|x_{ij} - m_{ij}\| \leq Ch^2. \quad (3.7)$$

Desta maneira, combinando (3.4) e (3.7) junto à desigualdade triangular, obteremos uma estimativa de ordem dois na Proposição 3.4.

Agora, de forma geral e conforme a Proposição 3.4, temos formalmente que: se $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^4 , então a derivada normal no ponto médio m_{ij} da aresta dual $\tilde{\Gamma}_{ij}$ é aproximada pelo esquema de diferença finita centrada em termos dos vértices da decomposição primal,

$$-\nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} = -\frac{u(x_j) - u(x_i)}{\|x_j - x_i\|} + \mathcal{O}(h).$$

onde h é a medida de malha suficientemente pequena. No que se segue, denotaremos o fluxo discreto da função u através da aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$ por

$$F_{ij}^d(u) := -m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \frac{u(x_j) - u(x_i)}{\|x_j - x_i\|}, \quad \text{para cada } j \in \Lambda(i), \quad (3.8)$$

onde $m(\tilde{\Gamma}_{ij})$ é o comprimento da aresta.

Em vista disso, e como consequência imediata das Proposições 3.1–3.4, podemos enunciar uma expressão do Laplaciano de u no vértice x_i em termos dos fluxos discretos através das arestas da célula $\tilde{V}_i$ dada como:

$$-\Delta_s u(x_i) \approx -\frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(u).$$

Ademais, seja f_i o valor médio da função f na célula $\tilde{V}_i$, *i.e.*,

$$f_i = \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \int_{\tilde{V}_i} f(x) ds(x), \quad \text{para cada } i = 1, \dots, N. \quad (3.9)$$

O processo descrito acima permite definir um esquema numérico para a discretização da equação (3.1). Mais precisamente:

Definição 3.1 (Esquema de volumes finitos). *Seja F_{ijs}^d o fluxo discreto definido em (3.8), o esquema de volumes finitos para o Laplaciano na esfera unitária é definido pelo sistema:*

$$(L_{s,h}(u_h))_i = \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(u_h) = f_i, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, N, \quad (3.10)$$

onde $L_{s,h}$ denota o operador discreto de Laplace, u_h é a solução aproximada, f_i é o valor médio da função f em $\tilde{V}_i$ e $S(\tilde{V}_i)$ denota a área superficial da célula.

A expressão (3.10) forma um sistema linear de equações,

$$L_{s,h}(u_h) = f_h, \quad (3.11)$$

onde u_h é a aproximação constante por pedaços, cujos valores são dados pelo esquema (3.10) e f_h é a função constante por pedaços, cujas componentes são os valores f_i definidos em (3.9). Vejamos rapidamente uma caracterização da existência da solução discreta. Se a condição de compatibilidade discreta

$$\langle f_h, 1 \rangle_h = \sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) f_i = 0,$$

é satisfeita, implica que o problema discreto (3.11) possui solução. Aqui $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ denota o produto escalar discreto. Observe-se que, a expressão acima define uma versão discreta da compatibilidade (1.3) definida na Seção 1.4 para o problema contínuo (1.4). Assim, da aproximação f_i temos,

$$0 = \sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) f_i = \sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \int_{\tilde{V}_i} f(x) ds(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{V}_i} f(x) ds(x) = \int_{\mathbb{S}^2} f(x) ds(x),$$

logo obtemos $\langle f_h, 1 \rangle_h = \langle f, 1 \rangle$.

Agora, em relação à unicidade da solução discreta, podemos assumir a condição $\langle u_h, 1 \rangle_h = 0$, mas conforme o objetivo principal desta tese, precisamos definir algumas condições adicionais, as quais serão relatadas em detalhe nas seções posteriores deste capítulo, mais precisamente na Seção 3.3. Por outro lado, no apêndice C descreve-se brevemente uma caracterização da existência e unicidade da solução do problema discreto via elementos da álgebra linear.

Observação 3.2. *O sistema dado em (3.11) pode ser resolvido numericamente usando métodos iterativos clássicos como Jacobi ou Gauss-Seidel, ou também métodos Multigrid como nos artigos de Heikes e Randall (1995b); Heikes et al. (2013). Neste trabalho usamos o método SOR (Successive Over Relaxation) descrito no Apêndice C.*

Podemos agora expor um resultado referente ao princípio do mínimo (ou máximo) discreto da solução aproximada.

Lema 3.1. *Seja u_h a solução discreta não constante de (3.11), tal que $L_{s,h}(u_h) > 0$ (pontualmente). Então, u_h não possui mínimo local.*

De forma análoga pode-se obter para u_h não constante, com $L_{s,h}(u_h) < 0$ (pontualmente), que u_h não possui máximo local.

Demonstração. Suponha que u_h atinge seu mínimo no vértice $x_i \in S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$. Logo, pela definição do operador discreto segue que,

$$(L_{s,h}(u_h))_i = - \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \frac{u_h(x_j) - u_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} = \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \frac{u_h(x_i) - u_h(x_j)}{\|x_j - x_i\|}.$$

Se $u_h(x_i) \leq u_h(x_j)$ para $j \in \Lambda(i)$, então $(L_{s,h}(u_h))_i \leq 0$. Em particular, se $(L_{s,h}(u_h))_i = 0$, então $u_h(x_i) = u_h(x_j)$ para todo vértice $x_j \in S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$, e em consequência u_h seria constante na esfera toda, uma contradição. Portanto u_h não possui mínimo local. $\square$

Dado que o MVF discretiza a forma integral (3.1) diretamente, uma virtude é a propriedade de conservação. Logo, o esquema (3.10) é naturalmente conservativo, se duas células $\tilde{V}_i$ e $\tilde{V}_j$ adjacentes à aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$ com $m(\tilde{\Gamma}_{ij}) > 0$, logo a aproximação F_{ij}^d em $\tilde{V}_i$ é igual a $-F_{ji}^d$ dada em $\tilde{V}_j$. Definimos, então a propriedade:

Definição 3.2 (Conservação discreta). *Sejam u_h a única solução ao sistema (3.11) e F_{ij}^d o fluxo discreto definido em (3.8). O esquema de volumes finitos (3.10) é dito conservativo, se satisfaz da condição*

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(u_h) = 0, \quad (3.12)$$

o qual segue de $F_{ij}^d = -F_{ji}^d$, para x_i e x_j vizinhos adjacentes com $m(\tilde{\Gamma}_{ij}) > 0$.

3.2 Erro de truncamento

Nesta seção discutiremos brevemente alguns fatos inerentes à discretização do Laplaciano, especificamente o erro da consistência, que no entanto não interferem nas nossas provas de convergência das soluções. Lembrando que para estudar a convergência das soluções dos MVF, podemos optar por dois caminhos distintos: o primeiro é assumir o MVF como um MDF, dado que o fluxo na fronteira da célula é aproximado por uma diferença finita centrada, como definido em (3.10) e é o mais usado nas decomposições Voronoi-Delaunay devido à bisseção perpendicular. O segundo caminho, é escrever o MVF como um Método de Elementos Finitos (MEF) baseado na formulação variacional de (1.4). Esta última opção será executada nesta tese e detalhada nas seções posteriores para obter as estimativas da estabilidade e da convergência das soluções do MVF.

Dado que (3.11) usa um esquema de diferença finita vamos usar a terminologia da análise de convergência dos MDF. O erro de truncamento ou consistência é obtido aplicando o operador discreto $L_{s,h}(\cdot)$ à solução exata $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\xi_h := L_{s,h}(\tilde{u}) - L_{s,h}(u_h) = L_{s,h}(\tilde{u}) - f_h, \quad (3.13)$$

onde $\tilde{u}$ representa os valores exatos de u em cada vértice de $S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$. Note-se que o erro ξ_h é a função constante por pedaços, cujas componentes são definidas por

$$\xi_i = (L_{s,h}(\tilde{u}))_i - f_i = (L_{s,h}(\tilde{u}))_i - \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(u), \quad \text{para } i = 1, \dots, N.$$

A equação (3.13) é de grande interesse, pois dela poderíamos estimar a diferença entre $\tilde{u}$ e a sua aproximação u_h em termos do erro de consistência (Teorema de Lax-Richtmyer, vide por exemplo Strikwerda, 2004, pp. 32). Não obstante, o esquema (3.11), não fornece uma aproximação consistente do Laplaciano. Em princípio, para um tamanho de malha h indo para zero e combinando as Proposições 3.3 e 3.4, obtemos que a medida da aproximação do Laplaciano é assintoticamente inconsistente, *i.e.*, o erro de truncamento não vai para zero, quando incrementamos o refinamento da malha. Frequentemente, a perda dessa ordem de precisão é causada pela aproximação da integral de linha na aresta e após pela aproximação da derivada normal pelo esquema das diferenças finitas centradas no ponto médio da aresta dual (Heikes e Randall, 1995b; Ringler, 2003).

Apesar disso, esse problema de inconsistência na aproximação pode ser corrigido incorporando uma condição alternativa conhecida na literatura como *consistência fraca* (Coudière *et al.*, 1999; Faille, 1992), a qual consiste em assumir que os fluxos contínuos possuem aproximações consistentes nas arestas (vide Apêndice A). Então, tendo consistência fraca aliada com hipóteses suficientes de estabilidade poderia-se garantir a convergência do esquema no sentido das diferenças finitas. Para contextualizar esse fato, apresentamos o resultado relatado por Du *et al.* (2003b, Proposição 3, pp. 3943), o qual faz uma extensão a $\mathbb{S}^2$ da análise feita por Gallouët *et al.* (2000); Mishev (1998) e Eymard *et al.* (2001) para a L^2 -norma. A prova da seguinte proposição será detalhada no Apêndice A.

Proposição 3.5 (Du *et al.*, 2003b). *Assuma $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=1}^N$ a decomposição dual de Voronoï de $\mathbb{S}^2$, $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ é a única solução ao problema (1.4) e considere o esquema dos volumes finitos definido em (3.11). Suponha também que as condições de ortogonalidade entre as arestas primal/dual e que o fluxo F_{ij}^c possui aproximações consistentes. Então, o erro de truncamento atende a estimativa*

$$\|\tilde{\xi}_h\|_{0,h} \leq Ch\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)},$$

onde $C \in \mathbb{R}_+$ é uma constante que depende apenas da medida de regularidade da malha σ definida em (2.2).

Um segundo resultado tem a abordagem do artigo de Faille (1992) para um problema de Laplace planar em malhas retangulares ou paralelepípedicas na max-norma. Estendemos a prova a $\mathbb{S}^2$ incorporando as condições (2.5a)–(2.5c) obtendo que o operador discreto satisfaz a condição de consistência fraca:

Proposição 3.6. *Assuma $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=1}^N$ a decomposição dual de Voronoï de $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c), $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ a única solução ao problema (1.4). Considere que o esquema (3.11) é conservativo. Suponha também que o fluxo F_{ij}^c possui aproximações consistentes. Então, o erro de truncamento converge para zero na topologia fraca $\star$, i.e., atende o critério de dualidade,*

$$\int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\xi}_h(\mathbf{x})v(\mathbf{x})ds(\mathbf{x}) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } h \longrightarrow 0, \text{ para cada } v \in L^1(\mathbb{S}^2).$$

O esquema é dito que satisfaz a propriedade de consistência fraca.

Porém, algumas hipóteses da estabilidade não podem ser assumidas de forma simples e certos cuidados são necessários. Especificamente, o esquema (3.11) não satisfaz o princípio do máximo discreto, Lema 3.1, e ademais a matriz associada ao operador discreto é singular (Hackbusch, 2017, Teorema 4.6.2, pp. 77). Nesse sentido, uma prova sobre a ordem de convergência na max-norma não é atendida diretamente da ordem de consistência fraca (Pascal, 2007).

3.2.1 Experimentos numéricos

Nesta subseção, mostraremos um experimento numérico sobre a discretização do Laplaciano usando o esquema (3.11). Sejam u e f funções contínuas dadas em coordenadas geográficas latitude-longitude (ϕ, θ) (vide Apêndice B). Consideraremos o exemplo de Du e Ju (2005) cuja solução exata é

$$u(\phi, \theta) = \exp(\sin(\phi)), \tag{3.14}$$

e o respectivo Laplaciano é definido como

$$f(\phi, \theta) = \exp(\sin(\phi))(\cos^2(\phi) - 2\sin(\phi)). \tag{3.15}$$

Consideraremos também a malha esférica icosaédrica NOPT e as duas otimizações SCVT e HR95 definidas recursivamente como no Capítulo 2. Em particular, para o caso da SCVT usaremos uma malha uniformemente distribuída com função de densidade constante $\rho(\mathbf{x}) = 1$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$. A fim de verificar o erro de truncamento ξ_h , usaremos o erro quadrático médio e o máximo, definidos

ERRO DE TRUNCAMENTO E TAXA DE CONVERGÊNCIA p						
NÍVEL	NOPT		SCVT		HR95	
	$E_2(\xi_h)$	p	$E_2(\xi_h)$	p	$E_2(\xi_h)$	p
1	1.445E-01	–	1.445E-01	–	1.445E-01	–
2	4.612E-02	1.648E+00	3.923E-02	1.881E+00	3.828E-02	1.917E+00
3	1.575E-02	1.550E+00	1.071E-02	1.873E+00	1.034E-02	1.888E+00
4	6.115E-03	1.365E+00	3.299E-03	1.699E+00	2.880E-03	1.845E+00
5	2.658E-03	1.202E+00	1.257E-03	1.392E+00	8.423E-04	1.774E+00
6	1.238E-03	1.102E+00	5.670E-04	1.148E+00	2.611E-04	1.690E+00
7	5.976E-04	1.050E+00	2.749E-04	1.044E+00	8.618E-05	1.599E+00
8	2.937E-04	1.025E+00	1.362E-04	1.013E+00	2.936E-05	1.554E+00
NÍVEL	$E_\infty(\xi_h)$	p	$E_\infty(\xi_h)$	p	$E_\infty(\xi_h)$	p
1	4.982E-01	–	4.982E-01	–	4.982E-01	–
2	1.416E-01	1.814E+00	1.283E-01	1.957E+00	1.379E-01	1.853E+00
3	7.896E-02	8.430E-01	3.445E-02	1.898E+00	3.596E-02	1.939E+00
4	7.328E-02	1.077E-01	2.314E-02	5.737E-01	1.205E-02	1.578E+00
5	7.184E-02	2.849E-02	2.403E-02	5.430E-02	5.839E-03	1.045E+00
6	7.149E-02	7.227E-03	2.427E-02	1.428E-02	2.911E-03	1.004E+00
7	7.140E-02	1.813E-03	2.433E-02	3.500E-03	1.491E-03	9.653E-01
8	7.137E-02	4.537E-04	2.434E-02	7.036E-04	7.377E-04	1.015E+00

Tabela 3.1: Estimativas do erro de truncamento ξ_h nas E_2 e E_∞ -normas e a taxa de convergência p do Laplaciano discreto (3.10) para a função (3.14) nas malhas NOPT, SCVT e HR95 com níveis de refinamento de 1 até 8.

respectivamente como

$$E_2(\xi_h) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^2}, \quad E_\infty(\xi_h) = \max_{i=1, \dots, N} |\xi_i|.$$

A Tabela 3.1 expõe os valores do erro de truncamento ξ_h e a sua respectiva taxa de convergência p do esquema discreto para o exemplo (3.15) com as E_2 e E_∞ -normas. Observe-se que a taxa de convergência p nas malhas NOPT e SCVT é próximo de um para a E_2 -norma, o que confirmaria a Proposição 3.5. Por outro lado, Note-se que nessas malhas o erro de truncamento ξ_h cessa de cair a partir do nível de refinamento 4 na E_∞ -norma. Mostrando que o operador é assintoticamente inconsistente ao aumentar o nível de refinamento. Por sua vez, a malha HR95 mostra uma taxa de convergência p entre um e dois na E_2 -norma e próxima de um na E_∞ -norma. Esse comportamento é devido ao critério geométrico da otimização conforme relatado por Heikes e Randall (1995b).

A Figura 3.2 representa graficamente os valores dados na Tabela 3.1. O eixo horizontal representa o nível de refinamento ℓ de 1 até 8. No eixo vertical estão representados os erros de truncamento nas duas normas e a sua respectiva taxa de convergência p para as malhas NOPT (triângulo azul), SCVT (diamante vermelho) e HR95 (quadrado verde).

3.3 Relação MVF–MEFL e estabilidade

Nesta seção estaremos interessados no estudo da estabilidade de nosso esquema (3.11). A abordagem será feita conforme a literatura (Li *et al.*, 2000; Zhang, 2014), considerando o MVF como um MEFL. Em outras palavras, a aproximação construída pelo MVF será uma perturbação da aproximação dos MEFL. Logo, escrevendo (3.11) em uma forma variacional adequada, estaremos a estabilidade das soluções aproximadas.

Figura 3.2: Erro de truncamento ξ_h e a sua respectiva taxa de convergência p do Laplaciano discreto da função (3.14) nas E_2 e E_∞ -norma com as malhas: NOPT (triângulo azul), SCVT (diamante vermelho) e HR95 (quadrado verde) respectivamente nos níveis de refinamento de malha 1 (42 vértices) até 8 (655362 vértices).

3.3.1 Correspondência geométrica

Começamos incorporando alguns argumentos geométricos dos trabalhos de Demlow e Dziuk (2007); Du e Ju (2005); Dziuk e Elliott (2013); Ju e Du (2009) e Ju *et al.* (2009) para as decomposições Voronoi-Delaunay em $\mathbb{S}^2$. Assumamos que $\mathbb{S}^2$ é aproximada por uma sequência de poliedros $\mathbf{S}_h$ formada pela decomposição $\mathcal{T}_h$ (triângulos planos) com h indo para zero. Também assumamos, por construção, que para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$, há no máximo um ponto $\mathbf{x}^* \in \mathbf{S}_h$ tal que $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}^*\|}$ e que os vértices $\mathbf{S}_N = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ de $\mathbf{S}_h$ estejam na superfície de $\mathbb{S}^2$, tal que $\mathbf{S}_N := \mathbf{S}_h \cap \mathbb{S}^2$. Desta maneira, temos que

$$\mathbf{S}_h = \bigcup_{T_{ijk} \in \mathcal{T}_h} \text{cl}(T_{ijk}), \quad \mathbb{S}^2 = \bigcup_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \text{cl}(\tilde{T}_{ijk}),$$

onde $\text{cl}(\cdot)$ denota o fecho e T_{ijk} e $\tilde{T}_{ijk}$ denotam os triângulos plano e esférico com vértices $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ e $\mathbf{x}_k$. Deve-se notar que o poliedro de nível zero ou 0-*glevel* é o icosaedro puro. Consideraremos o seguinte definição:

Figura 3.3: Projecção radial do poliedro $\mathbf{S}_h$ na esfera $\mathbb{S}^2$.

Definição 3.3. (Projecção radial) Seja $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ um ponto no poliedro de aproximação $\mathbf{S}_h$. A aplicação $\mathcal{P} : \mathbf{S}_h \rightarrow \mathbb{S}^2$ suave e bijetiva, é definida como a projecção radial do ponto $\mathbf{x}^*$ na superfície esférica, i.e., $\mathcal{P}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^* / \|\mathbf{x}^*\|$ (Figura 3.3).

A seguinte proposição, dada por Du e Ju (2005, Seção 3, pp. 1677), define uma aproximação da geometria através da projecção radial.

Proposição 3.7 (Du e Ju, 2005). *Sejam $\mathbb{S}^2$ a esfera unitária e $\mathbf{S}_h$ o seu poliedro de aproximação. Para qualquer $x \in \mathbb{S}^2$, e para cada $\tilde{T}_{ijk} \subset \mathbb{S}^2$ e $T_{ijk} \subset \mathbf{S}_h$, existem constantes $C \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\|x - \mathcal{P}^{-1}(x)\| \leq Ch^2, \quad S(T_{ijk}) \leq S(\tilde{T}_{ijk}) \leq (1 + Ch^2)S(T_{ijk}).$$

Para levar adiante nosso estudo, consideraremos o conjunto $\Omega_h \subset \mathbb{R}^3$, dado por

$$\Omega_h := \left\{ x^* \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : 1 - Ch^2 < \|x^*\| < 1 + Ch^2 \right\},$$

onde $C \in \mathbb{R}_+$ é uma constante independente de h . Note-se que tanto $\mathbb{S}^2$ como $\mathbf{S}_h$ são subconjuntos de Ω_h . No que se segue, para cada função $u \in H^2(\mathbb{S}^2)$, denotamos por u^Ω a extensão de u a Ω_h , tal que $u^\Omega(x^*) = u(\mathcal{P}(x^*))$ para cada $x^* \in \Omega_h$. O seguinte resultado foi mostrado por Du *et al.* (2003b, Lema 1, pp. 3941).

Proposição 3.8 (Du *et al.*, 2003b). *Seja $u \in H^2(\mathbb{S}^2)$. Para qualquer $x^* \in \Omega_h$ com $x = \mathcal{P}(x^*) \in \mathbb{S}^2$, segue que*

$$\begin{aligned} \nabla_s u(x) &= \nabla u^\Omega(x), \quad \nabla(\partial_n u^\Omega(x)) = \nabla_s(\partial_{s,n} u)(x) - (\partial_{s,n} u(x)) \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}, \\ \|x^*\| \nabla u^\Omega(x^*) &= \nabla u^\Omega(x), \quad \|x^*\|^2 \partial_n \partial_m u^\Omega(x^*) = \partial_n \partial_m u^\Omega(x), \end{aligned}$$

onde ∂_n e $\partial_{s,n}$ denotam a derivada parcial e tangencial respectivamente na coordenada n do ponto $x \in \mathbb{S}^2$. A seguinte proposição compara as normas de funções definidas tanto em $\mathbb{S}^2$ como em $\mathbf{S}_h$. A prova está contida nos artigos de Dziuk e Elliott (2013, Lema 4.2, pp 312) e Demlow (2009, pp, 811). No entanto, reproduzimos uma parte da prova para colocá-la no nosso contexto.

Proposição 3.9 (Demlow, 2009). *Para cada $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ e qualquer par de triângulos esférico $\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ e plano $T_{ijk} \in \mathcal{T}_h$, existem constantes $C_n \in \mathbb{R}_+$, com $n \in \{0, 1, 2\}$, independentes de h , tal que*

$$\frac{1}{C_0} \|u\|_{L^2(\tilde{T}_{ijk})} \leq \|\bar{u}^\Omega\|_{L^2(T_{ijk})} \leq C_0 \|u\|_{L^2(\tilde{T}_{ijk})}, \quad (3.16a)$$

$$\frac{1}{C_1} \|u\|_{H^1(\tilde{T}_{ijk})} \leq \|\bar{u}^\Omega\|_{H^1(T_{ijk})} \leq C_1 \|u\|_{H^1(\tilde{T}_{ijk})}, \quad (3.16b)$$

$$\|\bar{u}^\Omega\|_{H^2(T_{ijk})} \leq C_2 \|u\|_{H^2(\tilde{T}_{ijk})}, \quad (3.16c)$$

onde $\bar{u}^\Omega$ denota a extensão da função u a Ω_h restrita ao poliedro $\mathbf{S}_h$, i.e., $\bar{u}^\Omega = u^\Omega|_{\mathbf{S}_h}$.

Demonstração. Para (3.16a), seja $\bar{u}^\Omega$ a extensão de u a Ω_h restrita a $\mathbf{S}_h$. Com efeito, se $x = \mathcal{P}(x^*) \in \mathbb{S}^2$ para cada $x^* \in T_{ijk}$, segue que $u(x) = u^\Omega(x^*)$. Assim,

$$\|u\|_{L^2(\tilde{T}_{ijk})}^2 = \int_{\tilde{T}_{ijk}} |u(x)|^2 ds(x) = \int_{\tilde{T}_{ijk}} |u^\Omega(\mathcal{P}^{-1}(x))|^2 ds(x).$$

Pela mudança de variável onde $ds(x) = \frac{1}{\|x^*\|} ds(x^*)$, com $0 < \frac{1}{C} \leq \frac{1}{\|x^*\|} \leq C < \infty$ (Dziuk e Elliott, 2013, Lema 1, pp 310), temos que,

$$\int_{\tilde{T}_{ijk}} |u^\Omega(\mathcal{P}^{-1}(x))|^2 ds(x) = \int_{T_{ijk}} \left| \bar{u}^\Omega(x^*) \right|^2 \frac{1}{\|x^*\|} ds(x^*) \leq C \int_{T_{ijk}} \left| \bar{u}^\Omega(x^*) \right|^2 ds(x^*).$$

O que implicaria,

$$\|u\|_{L^2(\tilde{T}_{ijk})} \leq C_0 \|\bar{u}^\Omega\|_{L^2(T_{ijk})},$$

Analogamente, podemos deduzir o lado direito de (3.16a). Agora, para (3.16b), pela mudança de

variável e a Proposição 3.8, obtemos

$$\|\nabla_s u\|_{L^2(\tilde{T}_{ijk})}^2 = \int_{\tilde{T}_{ijk}} |\nabla_s u(x)|^2 ds(x) \leq C \int_{T_{ijk}} |\nabla \bar{u}^\Omega(x^*)|^2 ds(x^*).$$

Pela estimativa (3.16a) junto a desigualdade de Poincaré-Friedrich, Proposição 1.1, segue para alguma constante $C_1 \in \mathbb{R}_+$ que

$$\|u\|_{H^1(\tilde{T}_{ijk})} \leq C_1 \|\bar{u}^\Omega\|_{H^1(T_{ijk})}.$$

O lado direito de (3.16b) e (3.16c) são deduzidas de maneira similar. $\square$

Observação 3.3. A proposição anterior compara as normas de Sobolev das funções definidas tanto em $\mathbb{S}^2$ como em $\mathbf{S}_h$. Também pode ser enfraquecida para funções $u \in W^{k,p}(\mathbb{S}^2)$ com $k \geq 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então, existiram constantes $C_k \in \mathbb{R}_+$ que dependerão só de k e $\mathbb{S}^2$.

3.3.2 Espaços de aproximação

Vamos introduzir o relacionamento dos MVF com os Métodos dos Elementos Finitos Lineares (MEFL). Para fim, conforme Dziuk e Elliott (2013); Ju e Du (2009) e Ju et al. (2009), configuraremos o MEFL no poliedro $\mathbf{S}_h$, como sendo que a decomposição $\mathcal{T}_h$, conformada pelos triângulos planos, é uma malha quase-uniforme (no sentido das condições (2.5b)–(2.5c)). Desta maneira, o espaço dos elementos finitos em $\mathbf{S}_h$ é definido como

$$\mathbb{P}_1(\mathbf{S}_h, \mathcal{T}_h) := \left\{ \bar{u}_h \in C(\mathbf{S}_h) : \bar{u}_h|_{T_{ijk}} \text{ é linear para cada } T_{ijk} \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Ademais é gerado pelas funções base nodais $\bar{\varphi}_{1,h}, \dots, \bar{\varphi}_{N,h}$, definidas por

$$\bar{\varphi}_{i,h}(x_j) = \delta_{ij}, \quad \text{para } i = 1, \dots, N,$$

onde x_j são os vértices em $S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ e δ_{ij} denota o delta de Kronecker. Ademais, note-se que a dimensão de U_h é $\text{Dim}(U_h) = N$. Toda função $\bar{u}_h \in \mathbb{P}_1(\mathbf{S}_h, \mathcal{T}_h)$ tem a forma

$$\bar{u}_h(x^*) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{\varphi}_{i,h}(x^*), \quad \text{para cada } x^* \in \mathbf{S}_h,$$

com constantes reais α_i ($i = 1, \dots, N$). Observe-se que a extensão $\bar{u}_h^\Omega$ de $\bar{u}_h$ a Ω_h satisfaz $\bar{u}_h^\Omega(x^*) = \bar{u}_h(x^*)$ para cada $x^* \in \mathbf{S}_h$. Desta maneira, podemos considerar o espaço de Sobolev em $\mathbf{S}_h$, no sentido de funções lineares por pedaços. Em virtude da correspondência geométrica entre $\mathbb{S}^2$ e $\mathbf{S}_h$, podemos estabelecer o espaço de elementos finitos associado à decomposição primal $\tilde{\mathcal{T}}_h$ dado como,

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{S}^2, \tilde{\mathcal{T}}_h) := \{u_h \in C(\mathbb{S}^2) : u_h = \bar{u}_h \circ \mathcal{P}^{-1}, \quad \text{para cada } \bar{u}_h \in \mathbb{P}_1(\mathbf{S}_h, \mathcal{T}_h)\},$$

onde $\mathcal{P}$ denota a projeção radial. Vejamos que $\mathbb{P}_1(\mathbb{S}^2, \tilde{\mathcal{T}}_h) \subset H^1(\mathbb{S}^2)$, com efeito, se consideramos $u_h \in \mathbb{P}_1(\mathbb{S}^2, \tilde{\mathcal{T}}_h)$, munido com a H^1 -norma e o fato $\{\bar{u}_h(x_i) = u_h(x_i)\}_{i=1}^N$, obteremos da Proposição 3.8, que $\bar{u}_h^\Omega = \bar{u}_h \in H^1(\mathbf{S}_h)$ e em consequência $u_h \in H^1(\mathbb{S}^2)$. Para mais detalhes vide Demlow (2009) ou Demlow e Dziuk (2007). Agora, precisamos aproximar funções do espaço quociente $H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Então, consideremos um subespaço de $\mathbb{P}_1(\mathbb{S}^2, \tilde{\mathcal{T}}_h)$ dado como

$$\tilde{U}_h(\tilde{\mathcal{T}}_h) := \left\{ u_h \in \mathbb{P}_1(\mathbb{S}^2, \tilde{\mathcal{T}}_h) : \int_{\mathbb{S}^2} u_h(x) ds(x) = 0 \right\},$$

i.e., o espaço de funções $u_h \in \mathbb{P}_1(\mathbb{S}^2, \tilde{\mathcal{T}}_h)$ que possuem média zero.

Conforme a literatura (vide por exemplo Li et al., 2000 ou Lin et al., 2013), a construção de $\tilde{U}_h$ permite de algum modo, determinar um espaço adequado de funções associadas à decomposição

dual de Voronoi $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$, cujos elementos são polinômios de menor grau que os de $\tilde{U}_h$ (isto para reduzir o custo computacional). Nesse sentido, definimos o espaço de volumes finitos como

$$\tilde{V}_h(\tilde{\mathcal{V}}) := \{v \in L^2(\mathbb{S}^2) : v|_{\tilde{V}_i} \text{ é constante em cada } \tilde{V}_i \text{ com } i = 1, \dots, N\}.$$

Em outras palavras, $\tilde{V}_h$ está formado pelas funções constantes por pedaços em $\mathbb{S}^2$. Cada função $v \in \tilde{V}_h$ pode ser representada por,

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N v(\mathbf{x}_i) \chi_i(\mathbf{x}),$$

onde χ_i denota a função característica associada à célula de Voronoi $\tilde{V}_i$. Note-se que $\tilde{V}_h$ possui a mesma dimensão do espaço $\tilde{U}_h$, i.e., $\text{Dim}(\tilde{V}_h) = \text{Dim}(\tilde{U}_h) = N$, mas $\tilde{V}_h \not\subset H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Essa diferença entre os espaços $\tilde{U}_h$ e $\tilde{V}_h$ é uma dificuldade na obtenção de estimativas de convergência nos MVF, mas é usual nos MEFL (Chou e Ye, 2007; Li et al., 2000).

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\Pi_h} & \tilde{U}_h \\ & \searrow \tilde{\Pi}_h = I_h \circ \Pi_h & \downarrow I_h \\ & & \tilde{V}_h \end{array}$$

Figura 3.4: Estrutura dos operadores lineares Π_h associado ao espaço $\tilde{U}_h$, $\tilde{\Pi}_h$ associado ao espaço $\tilde{V}_h$ e I_h o interpolador linear de transferência entre os espaços $\tilde{U}_h$ e $\tilde{V}_h$.

Definidos os espaços, queremos agora reescrever o esquema de volumes finitos (3.11) como se fosse um MEFL em superfícies (sob alguma regra de integração particular), e usar a teoria de aproximação disponível dos MEFL. A construção é feita com base na relação dos operadores lineares de interpolação associados a cada um dos espaços. Então, sejam $\Pi_h : H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow \tilde{U}_h$ o operador linear de interpolação em $\tilde{U}_h$ e $\tilde{\Pi}_h : H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow \tilde{V}_h$ o operador linear de interpolação em $\tilde{V}_h$. Em particular, a seguinte proposição determina um resultado essencial de aproximação em $\tilde{U}_h$. A demonstração está contida no artigo de Demlow (2009, Proposição 2.7, pp. 812).

Proposição 3.10 (Demlow, 2009). *Sejam $2 \leq p \leq \infty$ e $u \in W^{2,p}(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Então, para h suficientemente pequeno, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ independente de h tal que,*

$$\|u - \Pi_h(u)\|_{W^{k,p}(\mathbb{S}^2)} \leq Ch^{2-k} \|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{S}^2)}, \quad \text{para cada } k = 0, 1. \quad (3.17)$$

Observação 3.4. *Um fato de interesse no interpolador linear Π_h é a sua invariância para qualquer função $v_h \in \tilde{U}_h$, i.e., $\Pi_h(v_h) = v_h$ e ademais é limitado: para cada $v \in H^1(\mathbb{S}^2)$, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, que depende só da regularidade da malha, tal que $\|\Pi_h(v)\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq C\|v\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}$. A prova do anterior está detalhada para domínios do $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n = 2, 3$) no texto de Brenner e Scott (2007, Teorema 4.8.12, pp 123).*

Observação 3.5. *A aproximação dada pelo interpolador $\tilde{\Pi}_h : H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow \tilde{V}_h$, será dada na Proposição 4.1.*

Seguindo no contexto, é natural construir um operador que aplique funções de $\tilde{U}_h$ sob $\tilde{V}_h$. Consideremos $I_h : \tilde{U}_h \rightarrow \tilde{V}_h$ o interpolador linear de transferência um-a-um (Figura 3.4), definido como

$$I_h(v_h)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N v_h(\mathbf{x}_i) \chi_i(\mathbf{x}), \quad \text{para cada } v_h \in \tilde{U}_h.$$

Como queremos estabelecer estimações com o interpolador I_h será necessário invocar a propriedade inversa dos MEFL válida para decomposições quase-uniformes. A prova está descrita para problemas no $\mathbb{R}^3$ nos textos de [Ciarlet \(2002, Teorema 3.2.6, pp. 140\)](#) ou [Brenner e Scott \(2007, Teorema 4.5.11, pp. 112\)](#), mas é válida na esfera sob as condições das Proposições 3.8 e 3.9 (veja [Demlow, 2009, Proposição 2.7, pp. 812](#)).

Lema 3.2 (Propriedade inversa, [Ciarlet, 2002](#)). *Seja $\tilde{\mathcal{T}}_h(\mathbb{S}^2)$ uma família de triangulações definidas em $\mathbb{S}^2$ que satisfazem as condições (2.5a) e (2.5b). Assuma que $\tilde{U}_h$ é o espaço de elementos finitos associado à decomposição primal $\tilde{\mathcal{T}}_h$ de $\mathbb{S}^2$, que l, m são inteiros não negativos e $1 \leq r, t \leq \infty$, tal que*

$$l \leq m, \quad \tilde{U}_h \subset W^{l,r}(\tilde{T}_{ijk}) \cap W^{m,t}(\tilde{T}_{ijk}).$$

Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ independente do parâmetro h , tal que para cada $v_h \in \tilde{U}_h$, tem-se

$$\left(\sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \|v_h\|_{W^{m,t}(\tilde{T}_{ijk})}^t \right)^{1/t} \leq \frac{C}{(h^2)^{\max\{0, \frac{1}{r} - \frac{1}{t}\}} h^{m-l}} \left(\sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \|v_h\|_{W^{l,r}(\tilde{T}_{ijk})}^r \right)^{1/r}.$$

Em particular, para $r = 2, t = \infty$ e $l = m = 1$, temos

$$\|\nabla_s v_h\|_{L^\infty(\tilde{T}_{ijk})} \leq Ch^{-1} \|\nabla_s v_h\|_{L^2(\tilde{T}_{ijk})},$$

e para $r = 1$,

$$\|\nabla_s v_h\|_{L^\infty(\tilde{T}_{ijk})} \leq Ch^{-2} \|\nabla_s v_h\|_{L^1(\tilde{T}_{ijk})}.$$

Algumas características do interpolador I_h foram descritas por [Chou et al. \(2003\)](#); [Zhang \(2014\)](#) para problemas no plano. Examinaremos e mostraremos que são válidas em $\mathbb{S}^2$ para decomposições Voronoi-Delaunay, e contribuirão na limitação do Lema 4.1.

Figura 3.5: Configuração geométrica do triângulo esférico $\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ com vértices x_i, x_j e x_k . Em vermelho o circuncentro q_{ijk} e as arestas da malha dual que se intersectam com o interior do triângulo $\tilde{T}_{ijk}$.

Lema 3.3. *Sejam $\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ o triângulo esférico e $\tilde{\tau}_{ij} \subset \partial\tilde{T}_{ijk}$ que satisfazem as condições (2.5b) e (2.5a) respectivamente. Então, para cada $1 \leq q \leq \infty$ e $v_h \in \tilde{U}_h$, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$*

independente de h , tal que

$$\int_{\tilde{\tau}_{ij}} [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] d\gamma(x) = 0, \quad (3.18a)$$

$$\|v_h - I_h(v_h)\|_{L^q(\tilde{T}_{ijk})} \leq Ch \|v_h\|_{W^{1,q}(\tilde{T}_{ijk})}, \quad (3.18b)$$

Demonstração. Para (3.18a) basta mostrar que o termo $v_h - I_h(v_h)$ é ímpar em relação ao ponto médio de cada aresta de $\tilde{T}_{ijk}$. Com efeito, dado x_{ij} o ponto médio da aresta $\tilde{\tau}_{ij} \subset \partial\tilde{T}_{ijk}$, definamos $\tilde{\tau}_{ij}^{(n)}$ a distância geodésica entre os pontos x_{ij} e x_n com $n = i, j$. Sabemos que $I_h(v_h)(x) = v_h(x_n)$ para cada $x \in \tilde{\tau}_{ij}^{(n)}$ ($n = i, j$). Aliás, $\tilde{\tau}_{ij} = \tilde{\tau}_{ij}^{(i)} \cup \tilde{\tau}_{ij}^{(j)}$, então temos a expressão,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\tau}_{ij}} [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] d\gamma(x) &= \int_{\tilde{\tau}_{ij}^{(i)}} [v_h(x) - v_h(x_i)] d\gamma(x) + \int_{\tilde{\tau}_{ij}^{(j)}} [v_h(x) - v_h(x_j)] d\gamma(x) \\ &= \int_{\tilde{\tau}_{ij}} v_h(x) d\gamma(x) - \int_{\tilde{\tau}_{ij}^{(i)}} v_h(x_i) d\gamma(x) - \int_{\tilde{\tau}_{ij}^{(j)}} v_h(x_j) d\gamma(x) \\ &= \int_{\tilde{\tau}_{ij}} v_h(x) d\gamma(x) - \frac{1}{2} m(\tilde{\tau}_{ij}) [v_h(x_i) + v_h(x_j)], \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $m(\tilde{\tau}_{ij})$ denota o comprimento da aresta $\tilde{\tau}_{ij}$. Decorre da integração numérica que a regra de ponto médio é exata para funções lineares. Com efeito, consideremos v_h^Ω a extensão de v_h a $\Omega_{ijk} := \{x^* \in \Omega_h : \mathcal{P}(x^*) \in \tilde{T}_{ijk}\}$, com $v_h(x) = v_h^\Omega(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^2$ e x_{ij}^* o ponto médio de $[x_i, x_j]$ (o segmento que liga x_i a x_j) tal que $x_{ij} = \mathcal{P}(x_{ij}^*)$. Assumamos que $v_h^\Omega \in C^1(\Omega_{ijk})$, então usando o Teorema de Taylor para v_h^Ω em torno de x_{ij} e integrando em relação a $\tilde{\tau}_{ij}$, resulta

$$\int_{\tilde{\tau}_{ij}} v_h(x) d\gamma(x) = \int_{\tilde{\tau}_{ij}} v_h^\Omega(x) d\gamma(x) = m(\tilde{\Gamma}_{ij}) v_h^\Omega(x_{ij}) + \int_{\tilde{\tau}_{ij}} \int_0^1 \nabla v_h^\Omega(x_{ij} + t(x - x_{ij})) \cdot (x - x_{ij}) dt d\gamma(x).$$

O segundo termo no lado direito anula-se por conta da paridade de $\nabla v_h^\Omega(y)$ para qualquer $y \in [x, x_{ij}]$ e a simetria na aresta em relação ao ponto médio x_{ij} . Logo,

$$\int_{\tilde{\tau}_{ij}} v_h(x) d\gamma(x) = m(\tilde{\Gamma}_{ij}) v_h^\Omega(x_{ij}).$$

Substituindo a expressão acima em (3.19) obtemos

$$\int_{\tilde{\tau}_{ij}} [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] d\gamma(x) = m(\tilde{\tau}_{ij}) v_h^\Omega(x_{ij}) - \frac{1}{2} m(\tilde{\tau}_{ij}) [v_h(x_i) + v_h(x_j)] = 0,$$

dado que $v_h^\Omega(x_{ij}) = v_h^\Omega(x_{ij}^*)$ e $v_h^\Omega(x_{ij}^*) = \frac{1}{2} [v_h(x_i) + v_h(x_j)]$. O que prova a identidade (3.18a).

Para (3.18b), conforme ilustrado na Figura 3.5, consideremos $\tilde{Q}_i, \tilde{Q}_j$ e $\tilde{Q}_k$ as regiões poligonais esféricas formadas pela intersecção do triângulo $\tilde{T}_{ijk}$ com as células de Voronoï associadas a cada um dos vértices x_i, x_j e x_k , *i.e.*,

$$\tilde{Q}_n = \tilde{T}_{ijk} \cap \tilde{V}_n, \quad \text{com } n = i, j, k.$$

Em particular, se tomamos $\tilde{Q}_i$, temos $I_h(v_h)(x) = v_h(x_i)$ para cada $x \in \tilde{Q}_i$, calculamos

$$|v_h(x) - v_h(x_i)| = \left| \int_0^1 \nabla v_h^\Omega(x_i + t(x - x_i)) \cdot (x - x_i) dt \right| \leq |x - x_i| \max_{x^* \in [x, x_i]} |\nabla v_h^\Omega(x^*)|,$$

onde $[x, x_i]$ é o segmento que liga x a x_i . Para $1 \leq q \leq \infty$ integramos em relação a $\tilde{Q}_i$, o que resulta

$$\int_{\tilde{Q}_i} |v_h(x) - I_h(v_h)(x)|^q ds(x) \leq \int_{\tilde{Q}_i} |x - x_i|^q \max_{x^* \in [x, x_i]} |\nabla v_h^\Omega(x^*)|^q ds(x) \leq Ch^q \int_{\tilde{Q}_i} \max_{y \in \tilde{Q}_i} |\nabla v_h^\Omega(y)|^q ds(x).$$

Então, pondo $l = m = 1$, $r = q$ e $t = \infty$ na propriedade inversa (Lema 3.2), junto à condição (2.5b), obtemos

$$\|v_h - I_h(v_h)\|_{L^q(\tilde{Q}_i)}^q \leq Ch^q S(\tilde{Q}_i) |\nabla v_h^\Omega|_{L^\infty(\tilde{Q}_i)}^q \leq Ch^q \|\nabla v_h^\Omega\|_{L^q(\tilde{Q}_i)}^q.$$

De maneira semelhante, esse processo pode ser aplicado nas regiões restantes. Em consequência, obtemos

$$\|v_h - I_h(v_h)\|_{L^q(\tilde{T}_{ijk})} = \left(\sum_{n=i,j,k} \|v_h - I_h(v_h)\|_{L^q(\tilde{Q}_n)}^q \right)^{1/q} \leq Ch \|v_h\|_{W^{1,q}(\tilde{T}_{ijk})},$$

como queríamos mostrar. Isto encerra a demonstração. $\square$

Deve-se notar que a exigência na malha ser quase-uniforme é essencial para a validade do lema anterior. Podemos agora associar algumas normas discretas usuais à decomposição dual $\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ para funções de $\tilde{U}_h$, definidas por Du *et al.* (2003b) e Mishev (1998).

Definição 3.4 (Normas discretas). Para $u_h, v_h \in \tilde{U}_h$ e $I_h : \tilde{U}_h \rightarrow \tilde{V}_h$ o interpolador linear de transferência, tem-se que

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{0,h}^2 &= \langle I_h(u_h), I_h(u_h) \rangle_h, \quad \langle I_h(u_h), I_h(v_h) \rangle_h = \sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) u_h(x_i) v_h(x_i), \\ |u_h|_{1,h}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \Lambda_i} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(x_i, x_j) \left| \frac{u_h(x_i) - u_h(x_j)}{\|x_i - x_j\|} \right|^2, \\ \|u_h\|_{1,h}^2 &= \|u_h\|_{0,h}^2 + |u_h|_{1,h}^2, \\ \|u_h\|_{\infty,h} &= \max_{x_i \in S_N} |u_h(x_i)|, \end{aligned}$$

onde $S_N = \{x_i\}_{i=1}^N$ é o conjunto de vértices em $\mathbb{S}^2$.

Além disso, devido as Proposições 3.7 e 3.9, temos agora uma equivalência entre as normas:

Proposição 3.11 (Du e Ju, 2005). Para qualquer $u_h \in \tilde{U}_h$, existem constantes $C_n \in \mathbb{R}_+$, com $n \in \{0, 1\}$, que independem de h , tal que

$$\frac{1}{C_0} \|u_h\|_{0,h} \leq \|u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \leq C_0 \|u_h\|_{0,h}, \quad (3.20a)$$

$$\frac{1}{C_1} \|u_h\|_{1,h} \leq \|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq C_1 \|u_h\|_{1,h}. \quad (3.20b)$$

Demonstração. Consideremos que a norma $\|\cdot\|_{0,h}$ pode ser definida como

$$\|u_h\|_{0,h} := \|I_h(u_h)\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} = \left(\sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) |u_h(x_i)|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{para cada } u_h \in \tilde{U}_h.$$

Do fato que o operador I_h é um operador limitado ($\tilde{U}_h$ e $\tilde{V}_h$ possuem dimensão finita), então existe uma constante positiva $C_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|u_h\|_{0,h} \leq C_0 \|u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}.$$

Em consequência, temos a desigualdade do lado esquerdo de (3.20a). Analogamente, podemos deduzir o lado direito e as desigualdades em (3.20b). $\square$

3.3.3 Estabilidade

De posse da informação anterior, podemos definir uma forma variacional para o esquema (3.11). Para $(u_h, v_h) \in \tilde{U}_h \times \tilde{V}_h$, definimos os funcionais bilineares $\mathcal{A}_h : \tilde{U}_h \times \tilde{V}_h \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\mathcal{A}_h(u_h, I_h(v_h)) = \sum_{i=1}^N v_h(\mathbf{x}_i) \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^c(u_h), \quad (3.21)$$

e a versão discreta $\mathcal{A}_h^d : \tilde{U}_h \times \tilde{V}_h \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(v_h)) = \sum_{i=1}^N v_h(\mathbf{x}_i) \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(u_h), \quad (3.22)$$

onde F_{ij}^c e F_{ij}^d são os fluxos contínuo e discreto definidos em (3.3) e (3.8) respectivamente. Então, uma aproximação u_h de (3.11) é definida como a única solução ao problema discreto: encontrar $u_h \in \tilde{U}_h$ tal que

$$\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(v_h)) = \langle f_h, I_h(v_h) \rangle_h, \quad \text{para cada } v_h \in \tilde{V}_h. \quad (3.23)$$

Observe que, o produto $\langle f_h, I_h(v_h) \rangle_h$ está bem definido, visto que a aproximação f_h pertence ao espaço $\tilde{V}_h$ e cujas componentes são dadas pelos valores f_i ($i = 1, \dots, N$) em (3.9). A fim de provar a estabilidade, mostramos um resultado clássico referente à boa colocação discreta do problema (3.23). Mais precisamente:

Proposição 3.12 (Continuidade e Coercividade). *Sejam a decomposição Voronoï-Delaunay que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c) e o fluxo discreto F_{ij}^c definido em (3.8). Então, para cada $u_h \in \tilde{U}_h$ que satisfaz o problema (3.23), existem constantes $C_n \in \mathbb{R}_+$, com $n \in \{0, 1\}$, tal que*

$$\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(v_h)) \leq C_0 \|u_h\|_{1,h} \|v_h\|_{1,h}, \quad \text{para cada } v_h \in \tilde{V}_h, \quad (3.24a)$$

$$\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(u_h)) \geq C_1 \|u_h\|_{1,h}^2. \quad (3.24b)$$

Demonstração. Mostraremos a continuidade (3.24a). Com efeito, dado o funcional bilinear $\mathcal{A}_h^d : \tilde{U}_h \times \tilde{V}_h \rightarrow \mathbb{R}$, temos para $u_h, v_h \in \tilde{U}_h$ que

$$\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(v_h)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(u_h) v_h(\mathbf{x}_i) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \frac{u_h(\mathbf{x}_j) - u_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} v_h(\mathbf{x}_i).$$

Pela propriedade de conservação discreta, Definição 3.2, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(v_h)) &= - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \frac{u_h(\mathbf{x}_j) - u_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} v_h(\mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \frac{u_h(\mathbf{x}_j) - u_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} [v_h(\mathbf{x}_j) - v_h(\mathbf{x}_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| \frac{u_h(\mathbf{x}_j) - u_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \frac{v_h(\mathbf{x}_j) - v_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}, \end{aligned}$$

sabendo-se que $0 < \|x_j - x_i\| \leq d(x_i, x_j)$, segue

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(v_h)) &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(x_i, x_j) \frac{u_h(x_j) - u_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} \frac{v_h(x_j) - v_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \left(\sqrt{\frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(x_i, x_j)} \right)^2 \frac{u_h(x_j) - u_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} \frac{v_h(x_j) - v_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|}. \end{aligned}$$

Resulta imediatamente da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(v_h)) &\leq C \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(x_i, x_j) \left| \frac{u_h(x_j) - u_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(x_i, x_j) \left| \frac{v_h(x_j) - v_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C |u_h|_{1,h} |v_h|_{1,h}. \end{aligned}$$

Da construção de $\tilde{U}_h$, a seminorma é uma norma, o que provaria (3.24a). Agora, para a coercividade (3.24b), temos

$$\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(u_h)) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \frac{u_h(x_j) - u_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} u_h(x_i).$$

Usando de novo a conservação discreta e a relação $\|x_j - x_i\| \geq \frac{1}{2} d(x_j, x_i)$ produzem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(u_h)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \frac{u_h(x_j) - u_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} [u_h(x_j) - u_h(x_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \|x_j - x_i\| \left| \frac{u_h(x_j) - u_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(x_i, x_j) \left| \frac{u_h(x_j) - u_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} \right|^2 \\ &\geq C \|u_h\|_{1,h}^2. \end{aligned}$$

Portanto temos (3.24b). Isto encerra a demonstração da proposição. $\square$

Na proposição abaixo enunciamos a estimacão referente à estabilidade, o qual ocorre como consequência imediata da Proposição 3.12.

Proposição 3.13 (Estabilidade). *Seja $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ que satisfaz a condição de compatibilidade (1.3). A única solução $u_h \in \tilde{U}_h$ do problema discreto (3.23) satisfaz a condição*

$$\|u_h\|_{1,h} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}, \quad (3.25)$$

onde $C \in \mathbb{R}_+$ é uma constante independente de h .

Demonstração. Com efeito, das equações (3.24a) e (3.24b) junto com a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\|u_h\|_{1,h}^2 \leq C |\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(u_h))| \leq C |\langle f_h, I_h(u_h) \rangle_h| \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)},$$

pela Proposição 3.11 segue

$$\|u_h\|_{1,h}^2 \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}\|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}\|u_h\|_{1,h}.$$

Dividindo por $\|u_h\|_{1,h}$ cada lado da desigualdade obtemos a limitação desejada. $\square$

3.3.4 Estimações do erro geométrico

Esta subseção tem como finalidade enunciar duas estimatórias do erro geométrico produzidas na aproximação de $\mathbb{S}^2$ pela sequência de poliedros $\mathbf{S}_h$, quando h vai para zero. O seguinte lema foi relatado por Du e Ju (2005, Lema 4, pp. 1686) e mostra uma limitação de ordem dois em relação ao tamanho de malha h para a diferença entre os funcionais bilineares $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ e $\mathcal{A}_h^d(\cdot, \cdot)$. Cabe aclarar que a prova aqui é adaptada para o nosso problema de estudo.

Lema 3.4 (Du e Ju, 2005). *Sejam $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ e $\mathcal{A}_h^d(\cdot, \cdot)$ os funcionais bilineares definidos em (3.21) e (3.22) respectivamente. Assuma que $u_h \in \tilde{U}_h$ é a única solução do problema discreto (3.23). Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, que independe de h , tal que*

$$|\mathcal{A}_h(u_h, \mathbf{I}_h(v_h)) - \mathcal{A}_h^d(u_h, \mathbf{I}_h(v_h))| \leq Ch^2\|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}\|v_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}, \quad \text{para cada } v_h \in \tilde{U}_h.$$

Demonstração. Sejam $u_h \in \tilde{U}_h$ e os fluxos contínuo e discreto definidos em (3.3) e (3.8) respectivamente. Então, denotemos por ξ_{ij} o erro entre os fluxos, i.e.,

$$\begin{aligned} \xi_{ij}(u_h) &= -\frac{1}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x) + \frac{u_h(x_j) - u_h(x_i)}{\|x_j - x_i\|} \\ &= -\frac{1}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x) + \nabla u_h^\Omega(x^*) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}, \end{aligned}$$

onde u_h^Ω é a extensão de u_h a Ω_h . Se para cada $x \in \tilde{\Gamma}_{ij}$ temos $x^* = \mathcal{P}^{-1}(x)$, então da Proposição 3.8 segue, $\nabla_s u_h(x) = \nabla u_h^\Omega(x) = \|x^*\| \nabla u_h^\Omega(x^*)$ e junto ao fato $|\|x^*\| - 1| \leq Ch^2$, resulta

$$|\nabla_s u_h(x) - \nabla u_h^\Omega(x^*)| = |\|x^*\| \nabla u_h^\Omega(x) - \nabla u_h^\Omega(x^*)| \leq Ch^2 |\nabla u_h^\Omega(x^*)|.$$

Assim,

$$|\xi_{ij}(u_h)| \leq \frac{1}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \left| \left[\nabla_s u_h(x) - \nabla u_h^\Omega(x^*) \right] \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} \right| d\gamma(x) \leq Ch^2 \frac{|u_h(x_j) - u_h(x_i)|}{\|x_j - x_i\|}. \quad (3.26)$$

Desta maneira, a diferença dos funcionais bilineares irá ser

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A}_h(u_h, \mathbf{I}_h(v_h)) - \mathcal{A}_h^d(u_h, \mathbf{I}_h(v_h)) \right| &= \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} v_h(x_i) \left[F_{ij}^c(u_h) - F_{ij}^d(u_h) \right] \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} v_h(x_i) m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \xi_{ij}(u_h) \right|. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Agora, para última linha acima, sabemos que o esquema é conservativo e que $\|x_j - x_i\| \leq d(x_i, x_j)$.

Então, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a equação (3.26), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} v_h(\mathbf{x}_i) m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \xi_{ij}(u_h) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| \xi_{ij}(u_h) \frac{v_h(\mathbf{x}_j) - v_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \\
&\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \xi_{ij}(u_h) \frac{v_h(\mathbf{x}_j) - v_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) |\xi_{ij}(u_h)|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \left| \frac{v_h(\mathbf{x}_j) - v_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq Ch^2 \|u_h\|_{1,h} \|v_h\|_{1,h}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Por fim, usando a equivalência das normas (Proposição 3.11) e combinando (3.27) com (3.28) segue o resultado desejado. $\square$

Observação 3.6. Nesta ordem de ideias, é interessante observar que o lema acima é válido para cada $u_h, v_h \in \tilde{U}_h$, com $p \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$, tem-se pela desigualdade de Hölder a estimativa

$$|\mathcal{A}_h(u_h, I_h(v_h)) - \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(v_h))| \leq Ch^2 \|\nabla_s u_h\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} \|\nabla_s v_h\|_{L^q(\mathbb{S}^2)}, \quad \text{para cada } v_h \in \tilde{U}_h.$$

O seguinte lema encerrará este capítulo, na prova usaremos os Lemas 3.3 e 3.2. Evidentemente, sua validade é concedida, dado que a decomposição Voronoï-Delaunay é quase-uniforme. O resultado garante uma estimativa de ordem dois na diferença entre os funcionais $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ e $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ restritos para funções no espaço $\tilde{U}_h$.

Lema 3.5. Considere que decomposição Voronoï-Delaunay em $\mathbb{S}^2$ satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c). Sejam $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ e $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ os funcionais bilineares definidos em (1.5) e (3.21) respectivamente. Seja $u_h \in \tilde{U}_h$ a única solução do problema (3.23), Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, que independe de h , tal que

$$|\mathcal{A}(u_h, v_h) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(v_h))| \leq Ch^2 \|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|v_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}, \quad \text{para cada } v_h \in \tilde{U}_h. \tag{3.29}$$

Demonstração. Com efeito, dada $u_h \in \tilde{U}_h$ assumimos que $u_h|_{\tilde{T}_{ijk}} \in H^2(\tilde{T}_{ijk})$ para cada $\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$. Então, multiplicando $-\Delta_s u_h$ por $v_h \in \tilde{U}_h$, integrando em relação a $\tilde{T}_{ijk}$ e usando a fórmula de Green temos a expressão

$$-\int_{\tilde{T}_{ijk}} \Delta_s u_h(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) = \int_{\tilde{T}_{ijk}} \nabla_s u_h(\mathbf{x}) \cdot \nabla_s v_h(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \int_{\partial \tilde{T}_{ijk}} \nabla_s u_h(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}, \tilde{T}_{ijk}} v_h(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}).$$

Assim, da definição do funcional bilinear $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$, segue que

$$\mathcal{A}(u_h, v_h) = \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \left[-\int_{\tilde{T}_{ijk}} \Delta_s u_h(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\partial \tilde{T}_{ijk}} \nabla_s u_h(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}_{\mathbf{x}, \tilde{T}_{ijk}} v_h(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x}) \right].$$

Conforme o Lema 3.3, consideraremos de novo as regiões poligonais esféricas $\tilde{Q}_i, \tilde{Q}_j$ e $\tilde{Q}_k$ formadas pela intersecção do triângulo esférico $\tilde{T}_{ijk}$ com as células de Voronoï associadas a cada um dos vértices do triângulo, i.e., $\tilde{Q}_n = \tilde{V}_n \cap \tilde{T}_{ijk}$, onde $n \in \{i, j, k\}$, com fronteira

$$\partial \tilde{Q}_n = (\partial \tilde{V}_n \cap \tilde{T}_{ijk}) \cup (\partial \tilde{T}_{ijk} \cap \tilde{V}_n), \quad \text{para } n \in \{i, j, k\}.$$

Dada $u_h|_{\tilde{T}_{ijk}} \in H^2(\tilde{T}_{ijk})$, multiplicamos $-\Delta_s u_h$, agora pelo termo $I_h(v_h) \in \tilde{V}_h$ e integrando em relação a $\tilde{T}_{ijk}$, obteremos da fórmula de Green que

$$\begin{aligned} - \int_{\tilde{T}_{ijk}} \Delta_s u_h(x) I_h(v_h)(x) ds(x) &= \sum_{n=i,j,k} \int_{\tilde{Q}_n} \nabla_s u_h(x) \cdot \nabla_s I_h(v_h)(x) ds(x) \\ &\quad - \sum_{n=i,j,k} \int_{\partial \tilde{Q}_n} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{Q}_n} I_h(v_h)(x) d\gamma(x) \\ &= - \sum_{n=i,j,k} \int_{\partial \tilde{Q}_n} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{Q}_n} I_h(v_h)(x) d\gamma(x). \end{aligned}$$

Reorganizando as fronteiras de $\tilde{Q}_n$, $n \in \{i, j, k\}$ segue,

$$\begin{aligned} - \int_{\tilde{T}_{ijk}} \Delta_s u_h(x) I_h(v_h)(x) ds(x) &= - \int_{\partial \tilde{T}_{ijk}} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{T}_{ijk}} I_h(v_h)(x) d\gamma(x) \\ &\quad - \sum_{n=i,j,k} \int_{\partial \tilde{V}_n \cap \tilde{T}_{ijk}} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{V}_n} I_h(v_h)(x) d\gamma(x). \end{aligned}$$

Agora, somando em relação a todos os triângulos de $\tilde{\mathcal{T}}_h$ e pelo princípio de dualidade, cada aresta do triângulo intersecta uma única aresta dual de Voronoï (vide Subseção 2.2.2), obtemos que

$$\begin{aligned} - \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\tilde{T}_{ijk}} \Delta_s u_h(x) I_h(v_h)(x) ds(x) &= - \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\partial \tilde{T}_{ijk}} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{T}_{ijk}} I_h(v_h)(x) d\gamma(x) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{\partial \tilde{V}_i} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{V}_i} I_h(v_h)(x) d\gamma(x). \end{aligned}$$

Observe-se que a última integral é a definição do funcional bilinear $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$, logo adotando essa notação, temos

$$\mathcal{A}_h(u_h, I_h(v_h)) = \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \left[- \int_{\tilde{T}_{ijk}} \Delta_s u_h(x) I_h(v_h)(x) ds(x) + \int_{\partial \tilde{T}_{ijk}} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{T}_{ijk}} I_h(v_h)(x) d\gamma(x) \right].$$

Subtraindo os funcionais acima, resulta

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(u_h, v_h) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(v_h))| &\leq \left| \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\tilde{T}_{ijk}} \Delta_s u_h(x) [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] ds(x) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\partial \tilde{T}_{ijk}} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{T}_{ijk}} [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] d\gamma(x) \right|. \end{aligned}$$

Para cada aresta $\tilde{\tau}_{ij}$ de $\tilde{T}_{ijk}$, em virtude da simetria em relação ao ponto médio da aresta $\tilde{\tau}_{ij}$, temos que o fluxo $\nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{T}_{ijk}}$ é uma função par para cada $x \in \tilde{\tau}_{ij}$. Segue do Lema 3.3 que

$$\sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\partial \tilde{T}_{ijk}} \nabla_s u_h(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{T}_{ijk}} [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] d\gamma(x) = 0.$$

Em consequência temos,

$$|\mathcal{A}(u_h, v_h) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(v_h))| \leq \left| \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\tilde{T}_{ijk}} \Delta_s u_h(x) [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] ds(x) \right|.$$

Para continuar a demonstração, vamos considerar as extensões $\bar{u}_h^\Omega$ e $\bar{v}_h^\Omega$ restritas ao poliedro $\mathbf{S}_h$ de u_h e v_h respectivamente. Resulta imediatamente que $\bar{u}_h^\Omega$ é harmônica em cada triângulo plano $T_{ijk} \in \mathcal{T}_h$, i.e., $\Delta \bar{u}_h^\Omega(x^*) = 0$ para cada $x^* \in T_{ijk}$. Sabemos que $v_h(x) = \bar{v}_h^\Omega(x^*)$ para cada $x = \mathcal{P}(x^*)$ e como os vértices de $\mathbf{S}_h$ estão situados em $\mathbb{S}^2$, temos a relação $I_h(v_h)(x) = I_h(v_h^\Omega)(\mathcal{P}^{-1}(x)) = I_h(\bar{v}_h^\Omega)(x^*)$ para cada $x^* \in T_{ijk}$. Agora, se multiplicamos $\Delta \bar{u}_h^\Omega$ por $\bar{v}_h^\Omega - I_h(\bar{v}_h^\Omega)$ e integrando em relação a T_{ijk} , resulta

$$\int_{T_{ijk}} \Delta \bar{u}_h^\Omega(x^*) [\bar{v}_h^\Omega(x^*) - I_h(\bar{v}_h^\Omega)(x^*)] ds(x^*) = 0.$$

Levando em mente o anterior junto à mudança de variável com $||x^*|| - 1| \leq Ch^2$, resulta

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(u_h, v_h) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(v_h))| &= \left| \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\tilde{T}_{ijk}} \Delta_s u_h(x) [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] ds(x) \right| \\ &= \left| \sum_{T_{ijk} \in \mathcal{T}_h} \left(\int_{T_{ijk}} ||x^*|| \Delta \bar{u}_h^\Omega(x^*) [\bar{v}_h^\Omega(x^*) - I_h(\bar{v}_h^\Omega)(x^*)] ds(x^*) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{T_{ijk}} \Delta \bar{u}_h^\Omega(x^*) [\bar{v}_h^\Omega(x^*) - I_h(\bar{v}_h^\Omega)(x^*)] ds(x^*) \right) \right| \\ &\leq \sum_{T_{ijk} \in \mathcal{T}_h} \int_{T_{ijk}} ||x^*|| - 1| |\Delta \bar{u}_h^\Omega(x^*) [\bar{v}_h^\Omega(x^*) - I_h(\bar{v}_h^\Omega)(x^*)]| ds(x^*) \\ &\leq Ch^2 \sum_{T_{ijk} \in \mathcal{T}_h} \int_{T_{ijk}} |\Delta \bar{u}_h^\Omega(x^*) [\bar{v}_h^\Omega(x^*) - I_h(\bar{v}_h^\Omega)(x^*)]| ds(x^*). \end{aligned}$$

Por último, invocando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Proposição 3.9 e combinando os Lemas 3.3 e 3.2, temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(u_h, v_h) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(v_h))| &\leq Ch^2 \sum_{T_{ijk} \in \mathcal{T}_h} \left(\int_{T_{ijk}} |\Delta \bar{u}_h^\Omega(x^*)|^2 ds(x^*) \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{T_{ijk}} |\bar{v}_h^\Omega(x^*) - I_h(\bar{v}_h^\Omega)(x^*)|^2 ds(x^*) \right)^{1/2} \\ &\leq Ch^2 \sum_{T_{ijk} \in \mathcal{T}_h} \|\bar{u}_h^\Omega\|_{H^2(T_{ijk})} \|\bar{v}_h^\Omega - I_h(\bar{v}_h^\Omega)\|_{L^2(T_{ijk})} \\ &\leq Ch^2 \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \|u_h\|_{H^2(\tilde{T}_{ijk})} \|v_h - I_h(v_h)\|_{L^2(\tilde{T}_{ijk})} \\ &\leq Ch^2 \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \|u_h\|_{H^1(\tilde{T}_{ijk})} \|v_h\|_{H^1(\tilde{T}_{ijk})} \\ &\leq Ch^2 \|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|v_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned}$$

O que provaria (3.29). Isto encerra a demonstração. $\square$

Observação 3.7. Similar ao Lema 3.4, com mudanças menores o lema acima é válido para cada

$u_h, v_h \in \tilde{U}_h$, com $p \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$, tem-se pela desigualdade de Hölder a estimativa

$$|\mathcal{A}(u_h, I_h(v_h)) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(v_h))| \leq Ch^2 \|\nabla_s u_h\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} \|\nabla_s v_h\|_{L^q(\mathbb{S}^2)}, \quad \text{para cada } v_h \in \tilde{U}_h.$$

Observação 3.8. Deve-se notar que para problemas no plano a diferença (3.29) é identicamente zero, dado que a função linear por pedaços é harmônica em cada triângulo e além disso a dualidade entre as decomposições primal e dual, implicariam, que as formas bilineares tanto do MVF como do MEFL, são equivalentes como descrito por *Bank e Rose (1987)*; *Hackbusch (1989)*; *Vanselow (1996)*. Em particular, dada a função $u_h(\mathbf{x}) = x_1$, com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$, temos que $\Delta_s u_h \neq 0$, ainda quando u_h é harmônica no $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 4

Estimativas *a priori* do erro

Neste capítulo apresentaremos os resultados principais desta tese, a saber a estimativa da ordem de convergência das soluções do Laplaciano via o MFV nas normas H^1 , L^2 , max-norma e $W^{1,\infty}$ -norma para as malhas esféricas icosaédricas. Estabeleceremos as estimativas usando a estrutura de Du e Ju (2005); Ewing *et al.* (2002); Ju e Du (2009), para a decomposição Voronoï-Delaunay em $\mathbb{S}^2$. Ressaltamos que nas estimativas abaixo interfere a posição dos vértices das malhas duais (os circuncentros), logo a configuração geométrica desses influi na ordem de convergência. Começamos com o seguinte lema:

Lema 4.1. *Assuma que $f \in L^p(\mathbb{S}^2)$, com $p \geq 1$ que satisfaz a condição de compatibilidade (1.3). Então, para cada $v_h \in \tilde{U}_h$, $1/p + 1/q = 1$. Existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, que independe de h , tal que*

$$|(f, v_h) - \langle f_h, I_h(v_h) \rangle_h| \leq Ch \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} \|v_h\|_{W^{1,q}(\mathbb{S}^2)}, \quad (4.1)$$

Demonstração. Com efeito, dada f_h a aproximação de f , o produto escalar produz $\langle f_h, I_h(v_h) \rangle_h = (f, I_h(v_h))$. Então,

$$\begin{aligned} |(f, v_h) - (f, I_h(v_h))| &= |(f, v_h - I_h(v_h))| = \left| \int_{\mathbb{S}^2} f(x) [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] ds(x) \right| \\ &= \left| \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\tilde{T}_{ijk}} f(x) [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] ds(x) \right|. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com $1/p + 1/q = 1$ e em seguida o Lema 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} |(f, v_h) - (f, I_h(v_h))| &= \left| \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\tilde{T}_{ijk}} f(x) [v_h(x) - I_h(v_h)(x)] ds(x) \right| \\ &\leq Ch \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \|f\|_{L^p(\tilde{T}_{ijk})} \|v_h\|_{W^{1,q}(\tilde{T}_{ijk})} \\ &\leq Ch \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} \|v_h\|_{W^{1,q}(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned}$$

Portanto, segue a limitação (4.1). □

4.1 Estimativas clássicas na H^1 e L^2 -norma

Consideraremos inicialmente o erro das soluções na H^1 -norma. Em geral, a estimativa obtida de ordem um para problemas no plano foi exposta por Gallouët *et al.* (2000); Herbin (1995); Mishev (1998) e Eymard *et al.* (2001) usando a limitação do erro de consistência na L^2 -norma. Essa ideia foi estendida para a esfera por Du *et al.* (2003b) para a H^1 -norma discreta. Nesse contexto, a prova de convergência descrita abaixo, cuja principal ideia foi motivada por Ewing *et al.* (2002), difere dos trabalhos mencionados, dado que usa os procedimentos padrão das estimativas de erro para os MEFL. Em outras palavras, a característica essencial centra-se nos Lemas 3.4–4.1 junto com a Proposição 3.10. Por outro lado, sua relevância estará presente nos Teoremas 4.2–4.6.

Teorema 4.1. *Sejam $\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ a decomposição Voronoï-Delaunay (NOPT) para $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c) e $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ que satisfaz a condição de compatibilidade (1.3). Assuma que a única solução fraca u de (1.8) pertence ao espaço $H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Seja F_{ij}^d o fluxo discreto definido em (3.8), tal que o problema discreto (3.23) possui única solução $u_h \in \tilde{U}_h$. Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que*

$$\|\varepsilon_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq Ch \left(\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \right),$$

onde $\varepsilon_h = u - u_h$.

Demonstração. Para a prova, vamos considerar a coercividade da forma variacional $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$. Em seguida, da Proposição 3.10, somaremos e subtrairemos a interpolação de u a $\tilde{U}_h$, i.e., o termo $\Pi_h(u)$, e usando a desigualdade triangular resulta a expressão

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}^2 &\preceq |\mathcal{A}(u - u_h, u - u_h)| \\ &\preceq |\mathcal{A}(u - u_h, u - \Pi_h(u))| + |\mathcal{A}(u - u_h, \Pi_h(u) - u_h)| \\ &\preceq |\mathcal{A}(u - u_h, u - \Pi_h(u))| + |\mathcal{A}(u, \Pi_h(u) - u_h) - \mathcal{A}(u_h, \Pi_h(u) - u_h)|, \end{aligned}$$

onde a constante oculta em “ $\preceq$ ” vem da coercividade de $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$. Agora, somando e subtraindo os funcionais $\mathcal{A}_h^d(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$ e usando uma vez mais a desigualdade triangular produzimos a expressão,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}^2 &\preceq |\mathcal{A}(u - u_h, u - \Pi_h(u))| + \left| \mathcal{A}(u, \Pi_h(u) - u_h) - \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h)) \right| \\ &\quad + \left| \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h)) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h)) \right| \\ &\quad + |\mathcal{A}_h(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h)) - \mathcal{A}(u_h, \Pi_h(u) - u_h)|. \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= |\mathcal{A}(u - u_h, u - \Pi_h(u))|, \\ I_2 &= |\mathcal{A}(u, \Pi_h(u) - u_h) - \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h))|, \\ I_3 &= |\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h)) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h))|, \\ I_4 &= |\mathcal{A}_h(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h)) - \mathcal{A}(u_h, \Pi_h(u) - u_h)|. \end{aligned}$$

Para I_1 , da continuidade de $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ e da Proposição 3.10 segue que

$$\begin{aligned} I_1 &= |\mathcal{A}(u - u_h, u - \Pi_h(u))| \leq C \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|u - \Pi_h(u)\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dos problemas variacionais (1.8) e (3.23) temos para I_2

$$I_2 = \left| \mathcal{A}(u, \Pi_h(u) - u_h) - \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h)) \right| = |(f, \Pi_h(u) - u_h) - \langle f_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h) \rangle_h|.$$

Então, pondo $p = q = 2$ no Lema 4.1 produz para $\Pi_h(u) - u_h \in \tilde{U}_h$,

$$I_2 = |(f, \Pi_h(u) - u_h - I_h(\Pi_h(u) - u_h))| \leq Ch \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|\Pi_h(u) - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}. \tag{4.4}$$

Do Lema 3.4 obtemos para I_3 ,

$$I_3 = |\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h)) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h))| \leq Ch^2 \|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|\Pi_h(u) - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}, \tag{4.5}$$

e para I_4 , invocando o Lema 3.5 geramos a estimativa

$$I_4 = |\mathcal{A}_h(u_h, I_h(\Pi_h(u) - u_h)) - \mathcal{A}(u_h, \Pi_h(u) - u_h)| \leq Ch^2 \|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|\Pi_h(u) - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.6)$$

Da condição de estabilidade (3.25) e a equivalência das normas, Proposição 3.11, segue que

$$\|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}.$$

Invocando uma vez mais a Proposição 3.10, obteremos

$$\|\Pi_h(u) - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq \|u - \Pi_h(u)\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} + \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq Ch \|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}.$$

Então, para $h > 0$ suficientemente pequeno, temos para I_2, I_3 e I_4 que

$$I_2 \leq Ch \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}, \quad (4.7)$$

$$I_3, I_4 \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.8)$$

Combinando (4.3)–(4.8), junto com (4.2), resulta

$$\|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}^2 \leq Ch \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} (\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}).$$

Dividindo por $\|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}$ cada lado da expressão acima obtemos o resultado desejado. $\square$

A seguinte estimativa de ordem um na L^2 -norma é válida para decomposições Voronoi-Delaunay em geral. A mesma ordem de precisão foi obtida para problemas no plano por Gallouët *et al.* (2000) e Eymard *et al.* (2000) e para malhas não estruturadas por Coudière *et al.* (1999) e Eymard *et al.* (2006). O procedimento nesses trabalhos foi usar uma versão discreta da desigualdade de Poincaré-Friedrich junto à estimativa na H^1 -norma. Evidentemente nesses resultados, a ordem de convergência depende novamente do erro de consistência na L^2 -norma. A prova abaixo é deduzida usando um argumento de dualidade aliado ao Teorema 4.1.

Teorema 4.2. *Sob as hipóteses do Teorema 4.1. Existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que*

$$\|\varepsilon_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \leq Ch \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)},$$

onde $\varepsilon_h = u - u_h$.

Demonstração. Para a prova usamos o seguinte argumento de dualidade: como $u - u_h \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$, sabemos de (1.8) que existe uma única solução fraca $w \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ que satisfaz o problema variacional adjunto:

$$\mathcal{A}(v, w) = (v, u - u_h) \quad \text{para cada } v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2).$$

Pondo $v = u - u_h$, para w segue da condição de regularidade (1.9) que

$$\|w\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} \leq C \|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.9)$$

Agora, assumindo $w_h = \Pi_h(w) \in \tilde{U}_h$ e usando um argumento similar ao Teorema 4.1, temos que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 &= (u - u_h, u - u_h) \leq |\mathcal{A}(u - u_h, w)| \\ &= |\mathcal{A}(u - u_h, w - w_h) + \mathcal{A}(u - u_h, w_h)| \\ &= |\mathcal{A}(u - u_h, w - w_h) + \mathcal{A}(u, w_h) - \mathcal{A}(u_h, w_h)| \\ &\leq |\mathcal{A}(u - u_h, w - w_h)| + |\mathcal{A}(u, w_h) - \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(w_h))| \\ &\quad + |\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(w_h)) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(w_h))| + |\mathcal{A}_h(u_h, I_h(w_h)) - \mathcal{A}(u_h, w_h)| \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= |\mathcal{A}(u - u_h, w - w_h)|, \\ I_2 &= |\mathcal{A}(u, w_h) - \mathcal{A}_h^d(u, I_h(w_h))|, \\ I_3 &= |\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(w_h)) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(w_h))|, \\ I_4 &= |\mathcal{A}_h(u_h, I_h(w_h)) - \mathcal{A}(u_h, w_h)|. \end{aligned}$$

Do Teorema 4.1, a Proposição 3.10 e a limitação (4.9) obtemos para I_1 que

$$\begin{aligned} I_1 &= |\mathcal{A}(u - u_h, w - w_h)| \leq C \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|w - w_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch^2 \left(\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \right) \|w\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch^2 \left(\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \right) \|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Do Lema 4.1, da definição da w_h e junto à estimativa (4.9) temos para I_2 ,

$$\begin{aligned} I_2 &= |\mathcal{A}(u, w_h) - \mathcal{A}_h(u, I_h(w_h))| = |(f, w_h - I_h(w_h))| \leq Ch \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|w_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

De forma análoga ao Teorema 4.1, usando o Lema 3.4, a estabilidade (3.25) e a estimativa (4.9) segue para I_3 que

$$\begin{aligned} I_3 &= |\mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(w_h)) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(w_h))| \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|w_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por último, o Lema 3.5, a estabilidade (3.25) e (4.9) produzem a expressão

$$I_4 \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.13)$$

Combinando (4.10)–(4.13), obtemos para $h > 0$ suficientemente pequeno que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 \leq Ch \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}.$$

Dividindo por $\|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}$ cada lado da expressão encerraria a demonstração do Teorema. $\square$

Observação 4.1. Na estimativa foram impostas condições mínimas na regularidade da solução exata e no termo fonte. Porém, não parece relevante aumentarmos a regularidade em algum dos dois casos, para obter um ganho na ordem de convergência. Além disso, a taxa de convergência obtida é baixa em contraste às aproximações bem compreendidas dos MEFL e como veremos nos experimentos numéricos, os erros das soluções dos MVF comportam-se melhor do que mostraram as provas anteriores. Aparentemente, a perda de ordem tem sido relacionada as propriedades geométricas da decomposição Voronoï-Delaunay em geral, e por enquanto não existe um artifício padrão para incrementar a ordem de convergência na L^2 -norma.

Deve-se notar que o termo dominante na limitação acima é dada pelo Lema 4.1. Então, uma forma de ganhar uma potencia “extra” na ordem de convergência, é usar a otimização do tipo SCVT na decomposição Voronoï-Delaunay como descrita na Subseção 2.3.1. Essa estimativa quadrática na L^2 -norma já foi relatada por Du e Ju (2005), mas vamos ilustrar aqui visando a diminuição da regularidade na solução exata como relatado por Ewing *et al.* (2002). Para fim, precisamos enunciar uma aproximação em relação ao interpolador linear $\tilde{\Pi}_h$. Mais precisamente:

Proposição 4.1 (Du e Ju, 2005). Para cada $w \in W^{2,q}(\mathbb{S}^2)$ e $1 \leq q < \infty$, tem-se

$$\|w - \tilde{\Pi}_h(w)\|_{L^q(\mathbb{S}^2)} \leq Ch \|w\|_{W^{2,q}(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.14)$$

O próximo lema é uma versão mais simples do exposto por [Du e Ju \(2005, Lema 1, pp. 1682\)](#). Assumimos que a função de densidade ρ é constante igual a 1.

Lema 4.2 ([Du e Ju, 2005](#)). *Suponha que $\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ é uma decomposição dual de Voronoï do tipo SCVT de $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c). Então, para qualquer $w \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que*

$$\left| \int_{\tilde{V}_i} [w(x) - \tilde{\Pi}_h(w)(x)] ds(x) \right| \leq Ch^2 S(\tilde{V}_i)^{1/2} \|w\|_{H^2(\tilde{V}_i)}.$$

Demonstração. Para mostrar a limitação é suficiente assumir que $w(x)|_{\tilde{V}_i} \in C^2(\tilde{V}_i)$ e após invocar um argumento de densidade. Inicialmente temos que $\tilde{\Pi}_h(w)(x) = w(x_i)$ para cada $x \in \tilde{V}_i$ e consideremos w^Ω a extensão de w a Ω_h . Pela construção, podemos usar o Teorema de Taylor até ordem dois de w^Ω em torno de x e integrando em relação à célula $\tilde{V}_i$, resulta

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{V}_i} [w(x_i) - w(x)] ds(x) &= \int_{\tilde{V}_i} \nabla w^\Omega(x) \cdot (x - x_i) ds(x) \\ &\quad + \int_{\tilde{V}_i} \int_0^1 H(w^\Omega)(x_i + t(x - x_i))(x - x_i) \cdot (x - x_i) t dt ds(x), \end{aligned}$$

onde H denota a matriz Hessiana de w^Ω . Consideremos x_i^* o centroide esférico de $\tilde{V}_i$ não restrito a $\mathbb{S}^2$, logo

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{V}_i} [w(x_i) - w(x)] ds(x) &= \int_{\tilde{V}_i} \nabla w^\Omega(x) \cdot (x - x_i^*) ds(x) + \int_{\tilde{V}_i} \nabla w^\Omega(x) \cdot (x_i^* - x_i) ds(x) \\ &\quad + \int_{\tilde{V}_i} \int_0^1 H(w^\Omega)(x_i + t(x - x_i))(x - x_i) \cdot (x - x_i) t dt ds(x) \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Para I_1 , usamos o critério da SCVT, a condição $\int_{\tilde{V}_i} (x - x_i^*) ds(x) = 0$. Seja $\Pi_{\tilde{\mathcal{V}}}$ a L^2 -projeção no espaço $\tilde{V}_h$ (constante por pedaços) e lembrando que $\nabla_s w(x) = \nabla w^\Omega(x)$ para cada $x \in \tilde{V}_i$ temos da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\tilde{V}_i} \nabla_s w(x) \cdot (x - x_i^*) ds(x) - \Pi_{\tilde{\mathcal{V}}}(\nabla_s w) \cdot \int_{\tilde{V}_i} (x - x_i^*) ds(x) \\ &= \int_{\tilde{V}_i} [\nabla_s w(x) - \Pi_{\tilde{\mathcal{V}}}(\nabla_s w)] \cdot (x - x_i^*) ds(x) \\ &\leq \left(\int_{\tilde{V}_i} |\nabla_s w(x) - \Pi_{\tilde{\mathcal{V}}}(\nabla_s w)|^2 ds(x) \right)^{1/2} \left(\int_{\tilde{V}_i} \|x - x_i^*\|^2 ds(x) \right)^{1/2} \\ &\leq Ch S(\tilde{V}_i)^{1/2} \|\nabla_s w - \Pi_{\tilde{\mathcal{V}}}(\nabla_s w)\|_{L^2(\tilde{V}_i)} \\ &\leq Ch^2 S(\tilde{V}_i)^{1/2} \|w\|_{H^2(\tilde{V}_i)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para I_2 , como $x_i = \mathcal{P}(x_i^*)$ é o centroide esférico, da Proposição 3.8 segue que $\|x_i^* - x_i\| \leq Ch^2$. Em virtude da desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\tilde{V}_i} \nabla_s w(x) \cdot (x_i^* - x_i) ds(x) \leq Ch^2 S(\tilde{V}_i)^{1/2} \left(\int_{\tilde{V}_i} |\nabla_s w(x)|^2 ds(x) \right)^{1/2} \\ &\leq Ch^2 S(\tilde{V}_i)^{1/2} \|w\|_{H^2(\tilde{V}_i)}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Por último I_3 , tomando o conjunto $\tilde{V}_i^t = \{x^* \in \Omega_h : x^* = x_i + t(x - x_i) \text{ com } x \in \tilde{V}_i\}$. Pela mudança de variável, assumindo que $ds(x) \leq 2ds(x^*)/t^2$ e dado que $S(\tilde{V}_i^t) \leq t^2 S(\tilde{V}_i)$, temos

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\tilde{V}_i} \int_0^1 H(w^\Omega)(x_i + t(x - x_i))(x - x_i) \cdot (x - x_i) t dt ds(x) \\
&\leq 2h^2 \int_0^1 \int_{\tilde{V}_i^t} \frac{|H(w^\Omega)(x^*)|}{t} ds(x^*) dt \\
&\leq 2h^2 \int_0^1 \left(\int_{\tilde{V}_i^t} |H(w^\Omega)(x^*)|^2 ds(x^*) \right)^{1/2} S(\tilde{V}_i)^{1/2} dt \\
&\leq Ch^2 S(\tilde{V}_i)^{1/2} \|w\|_{H^2(\tilde{V}_i)}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Combinando (4.15)–(4.17) e usando um argumento de densidade para $w \in H^2(\mathbb{S}^2)$, obteremos o resultado. $\square$

O seguinte lema é o passo essencial na obtenção da ordem quadrática e usa o fato anterior.

Lema 4.3. *Sejam $f \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ e $\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ uma decomposição dual de Voronoï do tipo SCVT de $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c). Então, para cada $w \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que*

$$(f, \Pi_h(w) - \tilde{\Pi}_h(w)) \leq Ch^2 \|f\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|w\|_{H^2(\mathbb{S}^2)},$$

onde Π_h e $\tilde{\Pi}_h$ são os interpoladores nos espaços U_h e $\tilde{V}_h$ respectivamente.

Demonstração. Pela definição do produto escalar,

$$\begin{aligned}
(f, \Pi_h(w) - \tilde{\Pi}_h(w)) &= \int_{\mathbb{S}^2} f(x) [\Pi_h(w)(x) - \tilde{\Pi}_h(w)(x)] ds(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} f(x) [\Pi_h(w)(x) - w(x)] ds(x) + \int_{\mathbb{S}^2} f(x) [w(x) - \tilde{\Pi}_h(w)(x)] ds(x) \\
&= \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\tilde{T}_{ijk}} f(x) [\Pi_h(w)(x) - w(x)] ds(x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{V}_i} f(x) [w(x) - \tilde{\Pi}_h(w)(x)] ds(x).
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\Pi_{\tilde{\mathcal{V}}}(f)$, a L^2 -projecção da função f , segue

$$\begin{aligned}
(f, \Pi_h(w) - \tilde{\Pi}_h(w)) &= \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\tilde{T}_{ijk}} f(x) [\Pi_h(w)(x) - w(x)] ds(x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{V}_i} [f(x) - \Pi_{\tilde{\mathcal{V}}}(f)] [w(x) - \tilde{\Pi}_h(w)(x)] ds(x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{V}_i} \Pi_{\tilde{\mathcal{V}}}(f) [w(x) - \tilde{\Pi}_h(w)(x)] ds(x) \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Proposição 3.10 obtemos para I_1 ,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \int_{\tilde{T}_{ijk}} f(x) [\Pi_h(w)(x) - w(x)] ds(x) \leq \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \left(\int_{\tilde{T}_{ijk}} |f(x)|^2 ds(x) \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \left(\int_{\tilde{T}_{ijk}} |\Pi_h(w)(x) - w(x)|^2 ds(x) \right)^{1/2} \quad (4.18) \\
 &\leq \sum_{\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \|f\|_{L^2(\tilde{T}_{ijk})} \|w - \Pi_h(w)\|_{L^2(\tilde{T}_{ijk})} \\
 &\leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|w\|_{H^2(\mathbb{S}^2)}.
 \end{aligned}$$

De forma análoga, usando a Proposição 4.1 obtemos para I_2 ,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{V}_i} [f(x) - \Pi_{\tilde{V}}(f)] [w(x) - \tilde{\Pi}_h(w)(x)] ds(x) \leq \sum_{i=1}^N \left(\int_{\tilde{V}_i} |f(x) - \Pi_{\tilde{V}}(f)(x)|^2 ds(x) \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \left(\int_{\tilde{V}_i} |w(x) - \tilde{\Pi}_h(w)(x)|^2 ds(x) \right)^{1/2} \quad (4.19) \\
 &\leq Ch \sum_{i=1}^N \|f\|_{H^1(\tilde{V}_i)} \|w - \tilde{\Pi}_h(w)\|_{L^2(\tilde{V}_i)} \\
 &\leq Ch^2 \|f\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|w\|_{H^2(\mathbb{S}^2)}.
 \end{aligned}$$

Por último, usando o Lema 4.2, temos para I_3

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{V}_i} \Pi_{\tilde{V}}(f) [w(x) - \tilde{\Pi}_h(w)(x)] ds(x) \leq Ch^2 \sum_{i=1}^N |\Pi_{\tilde{V}}(f)|_{\tilde{V}_i} S(\tilde{V}_i)^{1/2} \|w\|_{H^2(\tilde{V}_i)} \\
 &\leq Ch^2 \left(\sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) |\Pi_{\tilde{V}}(f)|_{\tilde{V}_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N \|w\|_{H^2(\tilde{V}_i)}^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|w\|_{H^2(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Combinando (4.18)–(4.20) obtemos o desejado. $\square$

Mostramos então a modificação sutil da prova de Du e Ju (2005), assumindo que a solução exata está no espaço $H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ e o termo fonte em $H_Q^1(\mathbb{S}^2)$.

Teorema 4.3. *Seja $\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ uma decomposição dual de Voronoï do tipo SCVT de $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5b)–(2.5c) com função de densidade constante $\rho(x) > 0$, para cada $x \in \mathbb{S}^2$. Assuma também que $f \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ e que $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ é a única solução fraca de (1.8). Seja F_{ij}^d o fluxo discreto definido em (3.8), tal que o problema discreto (3.23) possui única solução $u_h \in \tilde{U}_h$. Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que*

$$\|\varepsilon_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \leq Ch^2 \left(\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \right), \quad (4.21)$$

onde $\varepsilon_h = u - u_h$.

Demonstração. A demonstração é análoga ao Teorema 4.2 para a NOPT, modificando apenas a equação (4.11), usando o Lema 4.3, para garantir a potencia extra no termo I_2 , i.e.,

$$I_2 = |(f, w_h - I_h(w_h))| \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|w\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \|u - u_h\|_{L^2(\mathbb{S}^2)},$$

onde $w_h = \Pi_h(w)$. Em consequência, é mostrada a ordem quadrática das soluções quando a malha é de tipo SCVT. $\square$

4.2 Estimativas na max-norma

Vamos passar às estimativas de erro nas max e $W^{1,\infty}$ -normas para o nosso MVF. Vamos proceder usando a forma variacional (1.5) para as funções de Green regularizadas, as quais serão consideradas como funções auxiliares. Começamos introduzindo de Aubin (2013) as propriedades dessas funções de Green para $\mathbb{S}^2$ aliadas da maquinaria construída para as estimativas pontuais dos MEF em superfícies definida principalmente por Demlow (2009) e Kröner (2017).

4.2.1 Funções de Green em $\mathbb{S}^2$

O Lema abaixo contém propriedades fundamentais das funções de Green regularizadas para $\mathbb{S}^2$. A prova detalhada está contida no texto de Aubin (2013, Teorema, 4.13, pp. 108).

Lema 4.4 (Aubin, 2013). *Existe $G(x, y)$, uma função de Green do Laplaciano que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. Para cada $u \in C^2(\mathbb{S}^2)$,

$$u(y) - \frac{1}{S(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} u(x) ds(x) = - \int_{\mathbb{S}^2} G(x, y) \Delta_s u(x) ds(x) = \int_{\mathbb{S}^2} \nabla_s G(x, y) \cdot \nabla_s u(x) ds(x),$$

onde ∇_s e Δ_s denotam o gradiente tangencial e o Laplaciano que atuam em funções de x .

2. Para cada $x, y \in \mathbb{S}^2$ com $x \neq y$, segue $G(x, y)$ é uma função $C^\infty(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \setminus \{x = y\})$.

3. Existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{S}^2$ com $x \neq y$,

$$|G(x, y)| \leq C(1 + \ln |d(x, y)|), \quad |\nabla_s G(x, y)| \leq C \frac{1}{|d(x, y)|}, \quad |\Delta_s G(x, y)| \leq C \frac{1}{|d(x, y)|^2}.$$

4. Por último, $G(x, y)$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{S}^2} G(x, y) ds(x) = 0. \quad (4.22)$$

Formalmente, se para um ponto fixado $y \in \mathbb{S}^2$, $G(x, y)$ cumpre as condições do lema anterior, então é solução ao problema

$$-\Delta_s G(x, y) = \delta(x - y) - \frac{1}{S(\mathbb{S}^2)}, \quad x \in \mathbb{S}^2, \quad (4.23)$$

onde $\delta(x - y)$ representa a função delta de Dirac discreta (*Dirac delta function*) no ponto x . Para simplificar a notação, vamos denotar a função $G(x, y)$ por $G^y(x)$ e $\delta(x - y)$ por $\delta^y(x)$ com $y \in \mathbb{S}^2$ fixo. Nessa ordem de ideias, a única solução $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ de (1.4) pode ser representada por

$$u(y) = \int_{\mathbb{S}^2} G^y(x) f(x) ds(x).$$

Desta maneira,

$$-\Delta_s u(y) = - \int_{\mathbb{S}^2} \Delta_s G^y(x) f(x) ds(x) = \int_{\mathbb{S}^2} \left[\delta^y(x) - \frac{1}{S(\mathbb{S}^2)} \right] f(x) ds(x) = f(y),$$

dado que f satisfaz a condição de compatibilidade (1.3), obtemos (1.4). Vamos usar a notação $\hat{G}^y$ para nos referirmos à função de Green discreta definida como

$$\hat{G}^y(z) := \int_{\mathbb{S}^2} G^z(x) \delta^y(x) ds(x), \quad \text{para cada } z \in \mathbb{S}^2.$$

Além disso, empregaremos algumas características da função δ^y , as quais são definidas na seguinte proposição, cujos detalhes da prova para superfícies em geral estão no trabalho de Demlow (2009, Proposição 4.2, pp. 813).

Proposição 4.2 (Demlow, 2009). *Consideremos $v_h \in \tilde{U}_h$ e o ponto $y \in \tilde{T}_{ijk} \subset \mathbb{S}^2$. Seja $\vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}}$ um vetor unitário contido no plano tangente $\mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, y}$ no ponto y . Então, existem funções $\delta^y \in C_0^\infty(\tilde{T}_{ijk})$ e $\delta^{y, \Omega} \in C_0^\infty(\Omega_{ijk})$, a sua expansão ao conjunto $\Omega_{ijk} = \{x^* \in \Omega_h : \mathcal{P}(x^*) \in \tilde{T}_{ijk}\}$, que independem de v_h , tal que*

$$\|\delta^y\|_{W^{m,p}(\tilde{T}_{ijk})} + \|\delta^{y, \Omega}\|_{W^{m,p}(\tilde{T}_{ijk})} \leq Ch^{-m-2\left(\frac{p-1}{p}\right)}, \quad (4.24)$$

para $m = 0, 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, existem constantes genéricas $C \in \mathbb{R}_+$, tal que

$$|v_h(y)| \leq C \left| \int_{\tilde{T}_{ijk}} \delta^y(x) v_h(x) ds(x) \right|$$

$$\left| \nabla_s v_h(y) \cdot \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \right| \leq C \left| \int_{\tilde{T}_{ijk}} v_h(x) \nabla_s \cdot \delta^{y, \Omega}(x) ds(x) \right|.$$

Demonstração. Seja $y = \mathcal{P}(y^*)$ e $\tilde{T}_{ijk} = \mathcal{P}(T_{ijk})$, para cada $y^* \in T_{ijk}$. Então, para qualquer $v_h \in \tilde{U}_h$, temos $v_h(y) = \bar{v}_h^\Omega(y^*)$. De acordo com Schatz e Wahlbin (1995) e Rannacher e Scott (1982), existe uma função suave δ^{y^*} suportada em $T_{ijk} \in \mathcal{T}_h$ e independente de v_h , que satisfaz (4.24), logo

$$\bar{v}_h^\Omega(y^*) = \int_{T_{ijk}} \bar{v}_h^\Omega(x^*) \delta^{y^*}(x^*) ds(x^*) \leq C \int_{\tilde{T}_{ijk}} v_h(x) \delta^y(x) ds(x).$$

Portanto,

$$|v_h(y)| \leq C \left| \int_{\tilde{T}_{ijk}} v_h(x) \delta^y(x) ds(x) \right|.$$

Agora, dado o vetor $\vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \in \mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, y}$ e utilizando a Proposição 3.8, resulta

$$\left| \nabla_s v_h(y) \cdot \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \right| \leq C \left| \nabla \bar{v}_h^\Omega(y^*) \cdot \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \right|.$$

De forma análoga, existe uma função suave δ^{y^*} suportada no elemento $T_{ijk} \in \mathcal{T}_h$ que satisfaz (4.24), logo

$$\nabla \bar{v}_h^\Omega(y^*) \cdot \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} = \int_{T_{ijk}} \nabla \bar{v}_h^\Omega(x^*) \cdot \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \delta^{y^*}(x^*) ds(x^*).$$

A integração por partes produz

$$\int_{T_{ijk}} \nabla \bar{v}_h^\Omega(x^*) \cdot \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \delta^{y^*}(x^*) ds(x^*) = - \int_{T_{ijk}} \bar{v}_h^\Omega(x^*) \nabla \cdot \left(\vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \delta^{y^*}(x^*) \right) ds(x^*)$$

$$+ \int_{\partial T_{ijk}} v_h(x^*) \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \cdot \vec{n}_{x^*, T_{ijk}} \delta^{y^*} ds(x^*).$$

A última integral é zero em vista de δ^{y^*} estar suportado em T_{ijk} . Por último, considerando a mudança de variável, obtemos

$$\left| \nabla_s v_h(y) \cdot \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \right| \leq C \left| \int_{\tilde{T}_{ijk}} v_h(x) \nabla_s \cdot \delta^{y, \Omega} ds(x) \right|,$$

onde $\delta^{y, \Omega} = \|x^*\| \delta^{y^*, \Omega} \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}}$. Isto encerra a demonstração. $\square$

Vamos introduzir uma forma variacional para a função de Green discreta $\hat{G}^y$. Consideremos

$y \in \mathbb{S}^2$ fixo, definimos o funcional bilinear,

$$\mathcal{A}(v, \hat{G}^y) = \int_{\mathbb{S}^2} \nabla_s v(x) \cdot \nabla_s \hat{G}^y(x) ds(x), \quad \text{para cada } v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2),$$

onde $\nabla_{s,y}$ atua no ponto x . Observe que, da fórmula de Green junto com (4.23), resulta para $v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} \nabla_s v(x) \cdot \nabla_s \hat{G}^y(x) ds(x) &= - \int_{\mathbb{S}^2} v(x) \Delta_s \hat{G}^y(x) ds(x) = \int_{\mathbb{S}^2} v(x) \left[\delta^y(x) - \frac{1}{S(\mathbb{S}^2)} \right] ds(x) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} v(x) \delta^y(x) ds(x). \end{aligned}$$

Dizemos então, que as funções discretas de Green $\hat{G}_0^y, \hat{G}_1^y \in C^\infty(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ são as únicas soluções aos problemas variacionais adjuntos respectivamente

$$\mathcal{A}(v, \hat{G}_0^y) = (v, \delta^y), \quad \text{para cada } v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2), \quad (4.25a)$$

$$\mathcal{A}(v, \hat{G}_1^y) = (v, \nabla_s \cdot \delta^{y,\Omega}), \quad \text{para cada } v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2). \quad (4.25b)$$

Adicionalmente, por conta da construção de $\hat{G}_n^y$ podemos incorporar sua aproximação por elementos finitos, digamos $\hat{G}_{n,h}^y \in \tilde{U}_h$, $n \in \{0, 1\}$, que seja a única solução ao problema

$$\mathcal{A}(w_h, \hat{G}_n^y - \hat{G}_{n,h}^y) = 0, \quad \text{para cada } w_h \in \tilde{U}_h. \quad (4.26)$$

Claramente, $\hat{G}_{n,h}^y$ satisfaz a condição (4.22) dada a estrutura do espaço $\tilde{U}_h$.

Deve-se notar que $\hat{G}_n^y$, $n \in \{0, 1\}$ e a sua aproximação pelo MEFL satisfazem as estimativas de aproximação dos MEF nas H^1 e L^2 -normas. Além disso, precisamos de outras estimativas *a priori* das funções de Green que foram bem estudadas na literatura por Demlow (2009); Kröner (2017); Rannacher e Scott (1982) e Schatz e Wahlbin (1995). Reunimos algumas delas no seguinte lema.

Lema 4.5 (Demlow, 2009). *Sejam $\hat{G}_n^y$ a função de Green discreta e $\hat{G}_{n,h}^y \in \tilde{U}_h$ ($n \in \{0, 1\}$) a sua aproximação por elementos finitos. Então, têm-se:*

$$\|\nabla_s(\hat{G}_1^y - \hat{G}_{1,h}^y)\|_{L^1(\mathbb{S}^2)} \leq C |\ln h|, \quad (4.27a)$$

$$\|\hat{G}_0^y - \hat{G}_{0,h}^y\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^2)} \leq Ch |\ln h|, \quad (4.27b)$$

$$\|\nabla_s \hat{G}_1^y\|_{L^1(\mathbb{S}^2)} + \|\hat{G}_0^y\|_{W^{2,1}(\mathbb{S}^2)} \leq C |\ln h|, \quad (4.27c)$$

$$\|\hat{G}_{n,h}^y\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq C |\ln h|^{1/2}, \quad \text{com } n \in \{0, 1\}, \quad (4.27d)$$

$$\|\hat{G}_{n,h}^y\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^2)} \leq C |\ln h|, \quad \text{com } n \in \{0, 1\}. \quad (4.27e)$$

onde $C \in \mathbb{R}_+$ são constantes genéricas que independem de h . O fator $|\ln h|^{1/2}$ possui ordem $\mathcal{O}(h^{-\eta})$ para $\eta \in (0, 1)$.

Demonstração. Omitiremos os detalhes de (4.27a)–(4.27c), mas estão nos trabalhos de Demlow (2009, Lema 3.3, pp. 819) e Kröner (2017, Lema 5.2, pp. 10), que por sua vez, são as versões estendidas para superfícies das definidas por Rannacher e Scott (1982); Scott (1976) e Schatz (1998).

Para (4.27d), seja $\hat{G}_{n,h}^y \in \tilde{U}_h$, a solução por elemento finito de $\hat{G}_n^y$ ($n \in \{0, 1\}$). Então, da Proposição 4.2, existe uma função suave δ^y suportada em $\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$, tal que para $z \in \mathbb{S}^2$ fixo, segue

$$\hat{G}_{n,h}^y(z) = \int_{\mathbb{S}^2} \hat{G}_{n,h}^y(x) \delta^z(x) ds(x) = \mathcal{A}(\hat{G}_{n,h}^y, \hat{G}_{n,h}^y) = \|\hat{G}_{n,h}^y\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}^2. \quad (4.28)$$

Segue da desigualdade de Sobolev discreta (veja Brenner e Scott, 2007, Lema 4.9.2, pp. 124), que

existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\left| \hat{G}_{n,h}^y(z) \right| \leq C |\ln h|^{1/2} \|\hat{G}_{n,h}^y\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}, \quad \text{com } n \in \{0, 1\}. \quad (4.29)$$

Combinando (4.28)-(4.29) obtemos (4.27d). Por último, (4.27e) segue de (4.27b) e (4.27c) usando a desigualdade triangular. $\square$

Com o anterior podemos mostrar uma estimativa fraca da estabilidade das soluções na max-norma. Mais precisamente:

Lema 4.6 (Estabilidade fraca). *Assuma que $u_h \in \tilde{U}_h$ seja a única solução do problema discreto (3.23). Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, que independe de h , tal que*

$$\|u_h\|_{\infty,h} \leq C |\ln h|^{1/2} \|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.2, existe uma função suave $\delta^y \in C_0^\infty(\tilde{T}_{ijk})$, tal que

$$|u_h(y)| \leq C \left| \int_{\mathbb{S}^2} u_h(x) \delta^y(x) ds(x) \right| = C \left| \mathcal{A}(u_h, \hat{G}_h^y) \right|.$$

Em virtude da continuidade do funcional bilinear $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ e o Lema 4.5, resulta

$$|u_h(y)| \leq C \left| \mathcal{A}(u_h, \hat{G}_h^y) \right| \leq C \|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|\hat{G}_h^y\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \leq C |\ln h|^{1/2} \|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}.$$

Portanto, tomando o máximo, segue

$$\|u_h\|_{\infty,h} \leq C |\ln h|^{1/2} \|u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)},$$

como se queria mostrar. $\square$

Agora, podemos enunciar uma primeira estimativa de erro das soluções dadas pelo esquema de volumes finitos na max-norma.

Teorema 4.4. *Sejam $\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ a decomposição Voronoï-Delaunay (NOPT) para $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c) e $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ que satisfaz a condição de compatibilidade (1.3). Assuma que a única solução fraca u de (1.8) pertence ao espaço $W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2) \cap H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Seja F_{ij}^d o fluxo discreto definido em (3.8), tal que o problema discreto (3.23) possui única solução $u_h \in \tilde{U}_h$. Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que*

$$\|\varepsilon_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch |\ln h|^{1/2} \left(\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \right),$$

com $\varepsilon_h = u - u_h$.

Demonstração. Para $y \in \mathbb{S}^2$ fixo, consideremos a função discreta de Green $\hat{G}_0^y$ que satisfaz o problema variacional adjunto (4.25a) e a condição (4.22). Consideramos também a sua aproximação por elementos Finitos $\hat{G}_{0,h}^y \in \tilde{U}_h$ que satisfaz a o problema variacional (4.26). Então, da Proposição 4.2, existe uma função suave δ^y suportada em $\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ e pela Proposição 3.10, temos que

$$\begin{aligned} |(u - u_h)(y)| &\leq |(u - \Pi_h(u))(y)| + C \left| \int_{\mathbb{S}^2} (\Pi_h(u) - u_h)(x) \delta^y(x) ds(x) \right| \\ &\leq C \left(\|u - \Pi_h(u)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_0^y) \right| \right) \\ &\leq C \left(\|u - \Pi_h(u)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_0^y - \hat{G}_{0,h}^y + \hat{G}_{0,h}^y) \right| \right) \\ &= C \left(\|u - \Pi_h(u)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_0^y - \hat{G}_{0,h}^y) \right| + \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_{0,h}^y) \right| \right). \end{aligned}$$

Agora, para a limitação: a Proposição 3.10, com $p = \infty$, produz

$$\|u - \Pi_h(u)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.30)$$

Como $\Pi_h(u) - u_h \in \tilde{U}_h$, da equação (4.26), temos que $\mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_0^y - \hat{G}_{0,h}^y) = 0$. Pela continuidade do funcional bilinear $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ e invocando a Proposição 3.10 e a estimativa do Teorema 4.1 obtemos

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_{0,h}^y) \right| &\leq C \|\Pi_h(u) - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \|\hat{G}_{0,h}^y\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq C \left(\|u - \Pi_h(u)\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} + \|u - u_h\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \right) \|\hat{G}_{0,h}^y\|_{H^1(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch \left(\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \right) \|\hat{G}_{0,h}^y\|_{H^1(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned}$$

Por fim, usando (4.27d) do Lema 4.5, temos

$$|\mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, G_h^y)| \leq Ch |\ln h|^{1/2} \left(\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \right). \quad (4.31)$$

Desta maneira, combinando (4.30) e (4.31) para $h > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$|(u - u_h)(y)| \leq Ch |\ln h|^{1/2} \left(\|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \right),$$

tomando o máximo segue o resultado desejado. $\square$

Observação 4.2. A condição da aproximação do esquema (3.11) na estimativa acima está inclusa na estimativa da H^1 -norma.

A estimativa acima não é ótima em relação à regularidade requerida da solução exata, i.e., $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Essa regularidade excessiva pode ser removida prosseguindo da seguinte forma: coloque a restrição na única solução fraca u de (1.8) pertence o espaço $W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Após, calcule uma estimativa na $W^{1,\infty}$ -norma usando as Proposições 3.10 e 4.2 e o Lema 4.5. Em seguida, estime a max-norma das soluções.

O resultado abaixo estabelecerá uma estimativa pontual para a aproximação do gradiente tangencial das soluções na max-norma.

Teorema 4.5. Sejam $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=1}^N$ a decomposição Voronoï-Delaunay (NOPT) para $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c) e $f \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ que satisfaz a condição de compatibilidade (1.3). Assuma que a única solução fraca u de (1.8) pertence ao espaço $W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Seja $\mathbf{F}_{ij}^d$ o fluxo discreto definido em (3.8), tal que o problema discreto (3.23) possui única solução $u_h \in \tilde{U}_h$. Então, existem constantes $C, h_0 \in \mathbb{R}_+$ que independem de u , tal que para $0 < h \leq h_0 < 1$ tem-se,

$$\|\nabla_s \varepsilon_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch |\ln h| \left(\|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \right),$$

com $\varepsilon_h = u - u_h$.

Demonstração. Procederemos via um argumento de dualidade. Sejam $y \in \mathbb{S}^2$ fixo e o vetor tangente unitário $\tilde{\mathbf{n}}_{y, \tilde{\mathbf{T}}_{ijk}} \in \mathbb{T}_{\mathbb{S}^2, y}$. Por construção, existe uma função suave $\delta^{y, \Omega}$ suportada em Ω_{ijk} que atende as condições da Proposição 4.2. Seja $\hat{G}_1^y$ a função discreta de Green que junto a (4.22), satisfaz o problema variacional adjunto (4.25b), i.e.,

$$\mathcal{A}(v, \hat{G}_1^y) = (v, \nabla_s \cdot \delta^{y, \Omega}), \quad \text{para cada } v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2).$$

Consideremos também $\hat{G}_{1,h}^y$ a aproximação por Elementos Finitos de $\hat{G}_1^y$, a única solução do problema (4.26) satisfazendo a condição (4.22). Então, da desigualdade triangular,

$$\left| \nabla_s(u - u_h)(y) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{y, \tilde{\mathbf{T}}_{ijk}} \right| \leq \left| \nabla_s(u - \Pi_h(u))(y) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{y, \tilde{\mathbf{T}}_{ijk}} \right| + \left| \nabla_s(\Pi_h(u) - u_h)(y) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{y, \tilde{\mathbf{T}}_{ijk}} \right|.$$

Da Proposição 3.10, o primeiro termo do lado direito é limitado por

$$\|\nabla_s(u - \Pi_h(u))\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch\|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.32)$$

Basta limitar $\left| \nabla_s(\Pi_h(u) - u_h)(y) \cdot \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \right|$. Com efeito, para $\Pi_h(u) - u_h \in \tilde{U}_h$ teremos da linearidade de $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ que

$$\begin{aligned} \left| \nabla_s(\Pi_h(u) - u_h)(y) \cdot \vec{n}_{y, \tilde{T}_{ijk}} \right| &\leq C \left| \int_{\mathbb{S}^2} (\Pi_h(u) - u_h)(x) \nabla_s \cdot \delta^{y, \Omega}(x) ds(x) \right| \\ &\leq C \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_1^y) \right| \\ &= C \left(\left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_1^y - \hat{G}_{1,h}^y + \hat{G}_{1,h}^y) \right| \right) \\ &\leq C \left(\left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_1^y - \hat{G}_{1,h}^y) \right| + \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_{1,h}^y) \right| \right) \\ &\leq C \left(\left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_1^y - \hat{G}_{1,h}^y) \right| + \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u, \hat{G}_{1,h}^y) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \mathcal{A}(u - u_h, \hat{G}_{1,h}^y) \right| \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Segue de (4.26) que $\mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_1^y - \hat{G}_{1,h}^y) = 0$. Pela continuidade de $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ junto à Proposição 3.10 e a estimativa (4.27e) do Lema 4.5, resulta

$$\left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u, \hat{G}_{1,h}^y) \right| \leq Ch |\ln h| \|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.34)$$

Agora, para a limitação do termo $\left| \mathcal{A}(u - u_h, \hat{G}_{1,h}^y) \right|$, usamos a linearidade de $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$, após somamos e subtraímos os funcionais $\mathcal{A}_h^d(\cdot, \cdot)$ e $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$, para obter

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A}(u - u_h, \hat{G}_{1,h}^y) \right| &\leq \left| \mathcal{A}(u, \hat{G}_{1,h}^y) - \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\hat{G}_{1,h}^y)) \right| + \left| \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\hat{G}_{1,h}^y)) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(\hat{G}_{1,h}^y)) \right| \\ &\quad + \left| \mathcal{A}_h(u_h, I_h(\hat{G}_{1,h}^y)) - \mathcal{A}(u_h, \hat{G}_{1,h}^y) \right| \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para I_1 , com $f \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$, aplicando os Lemas 4.1 e 4.5 para $\hat{G}_{1,h}^y \in \tilde{U}_h$, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \mathcal{A}(u, \hat{G}_{1,h}^y) - \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\hat{G}_{1,h}^y)) \right| = \left| (f, \hat{G}_{1,h}^y - I_h(\hat{G}_{1,h}^y)) \right| \leq Ch \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \|\hat{G}_{1,h}^y\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch |\ln h| \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para I_2 , invocando o Lema 3.4 e a equação (4.27c), seque que

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(\hat{G}_{1,h}^y)) - \mathcal{A}_h(u_h, I_h(\hat{G}_{1,h}^y)) \right| \leq Ch^2 \|\nabla_s u_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \|\nabla_s \hat{G}_{1,h}^y\|_{L^1(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch^2 |\ln h| \|\nabla_s u_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned}$$

Note que, da Proposição 3.10, temos

$$\begin{aligned} \|\nabla_s u_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} &\leq \|\nabla_s(\Pi_h(u) - u_h)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \|\nabla_s(\Pi_h(u))\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq \|\nabla_s(\Pi_h(u) - u_h)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + Ch\|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)} + C\|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned}$$

Logo, tem-se

$$I_2 \leq Ch^2 |\ln h| \left(\|\nabla_s(\Pi_h(u) - u_h)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + (h+1)\|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)} \right). \quad (4.37)$$

Para I_3 , do Lema 3.5, e (4.27c) obtemos, de forma similar a I_2 que,

$$\begin{aligned} I_3 &= |\mathcal{A}_h(u_h, I_h(\hat{G}_{1,h}^y)) - \mathcal{A}(u_h, \hat{G}_{1,h}^y)| \leq Ch^2 \|\nabla_s u_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \|\nabla_s \hat{G}_{1,h}^y\|_{L^1(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch^2 |\ln h| \left(\|\nabla_s(\Pi_h(u) - u_h)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + (h+1) \|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Combinando (4.33)–(4.38), tomando o máximo e sabendo que existe um $h_0 \in \mathbb{R}_+$, tal que para $0 < h \leq h_0$, resulta

$$\|\nabla_s(\Pi_h(u) - u_h)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch |\ln h| \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.39)$$

Como consequência de (4.32) e (4.39) resulta,

$$\|\nabla_s(u - u_h)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch |\ln h| \left(\|u\|_{W^2(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \right).$$

Como se queria provar. $\square$

Por último, o seguinte resultado estabeleceria uma estimativa para a aproximação das soluções em termos da max-norma para a solução exata no espaço $W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$.

Teorema 4.6. *Sob as hipóteses do Teorema 4.5. Existem constantes $C, h_0 \in \mathbb{R}_+$, que independem de u , tal que $0 < h \leq h_0 < 1$, tem-se*

$$\|\varepsilon_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch |\ln h| \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)},$$

com $\varepsilon_h = u - u_h$.

Demonstração. Procederemos similar ao Teorema 4.5, com um argumento de dualidade. Para $y \in \mathbb{S}^2$ fixo, existe uma função suave δ^y suportada em $\tilde{T}_{ijk} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ como na Proposição 4.2. Seja $\hat{G}_0^y$, a função discreta de Green que junto à condição (4.22) satisfaz o problema variacional adjunto (4.25a), i.e.,

$$\mathcal{A}(v, \hat{G}_0^y) = (v, \delta^y), \quad \text{para cada } v \in H_Q^1(\mathbb{S}^2).$$

Consideremos também $\hat{G}_{0,h}^y$ a aproximação por elementos finitos de $\hat{G}_0^y$, a única solução ao problema (4.26) satisfazendo a condição (1.3). Usando a desigualdade triangular

$$|(u - u_h)(y)| \leq |(u - \Pi_h(u))(y)| + |(\Pi_h(u) - u_h)(y)|.$$

Da Proposição 3.10, o primeiro termo do lado direito é limitado por

$$\|u - \Pi_h(u)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.40)$$

Vamos limitar o termo $|(\Pi_h(u) - u_h)(y)|$. Com efeito, Para $\Pi_h(u) - u_h \in \tilde{U}_h$, obtemos da linearidade de $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ que,

$$\begin{aligned} |(\Pi_h(u) - u_h)(y)| &\leq C \left| \int_{\mathbb{S}^2} (\Pi_h(u) - u_h)(x) \delta^y(x) ds(x) \right| \\ &\leq C \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_0^y) \right| \\ &\leq C \left(\left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_0^y - \hat{G}_{0,h}^y) \right| + \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_{0,h}^y) \right| \right) \\ &\leq C \left(\left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_0^y - \hat{G}_{0,h}^y) \right| + \left| \mathcal{A}(\Pi_h(u) - u, \hat{G}_{0,h}^y) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \mathcal{A}(u - u_h, \hat{G}_0^y - \hat{G}_{0,h}^y) \right| \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

De (4.26) obtemos $\mathcal{A}(\Pi_h(u) - u_h, \hat{G}_0^y - \hat{G}_{0,h}^y) = 0$. Pela continuidade de $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ e combinando a

Proposição (3.10) com a equação (4.27e) temos

$$\left| \mathcal{A} \left(\Pi_h(u) - u, \hat{G}_{0,h}^y \right) \right| \leq Ch^2 |\ln h| \|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.42)$$

Agora, para tratar a expressão $\left| \mathcal{A} \left(u - u_h, \hat{G}_0^y - \hat{G}_{0,h}^y \right) \right|$, usamos a linearidade de $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$, somamos e subtraímos os funcionais $\mathcal{A}_h^d(\cdot, \cdot)$ e $\mathcal{A}_h(\cdot, \cdot)$. Isto implicaria que

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A} \left(u - u_h, \hat{G}_{0,h}^y \right) \right| &\leq \left| \mathcal{A} \left(u, \hat{G}_{0,h}^y \right) - \mathcal{A}_h^d \left(u_h, \mathbf{I}_h(\hat{G}_{0,h}^y) \right) \right| + \left| \mathcal{A}_h^d \left(u_h, \mathbf{I}_h(\hat{G}_{0,h}^y) \right) - \mathcal{A}_h \left(u_h, \mathbf{I}_h(\hat{G}_{0,h}^y) \right) \right| \\ &\quad + \left| \mathcal{A}_h \left(u_h, \mathbf{I}_h(\hat{G}_{0,h}^y) \right) - \mathcal{A} \left(u_h, \hat{G}_{0,h}^y \right) \right| \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Para I_1 , similar ao Teorema 4.5, com $f \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$, obtemos a limitação em virtude dos Lemas 4.1 e 4.5,

$$\begin{aligned} I_1 = \left| \mathcal{A}(u, \hat{G}_h^y) - \mathcal{A}_h^d(u_h, \mathbf{I}_h(\hat{G}_{0,h}^y)) \right| &= \left| (f, \hat{G}_{0,h}^y - \mathbf{I}_h(\hat{G}_{0,h}^y)) \right| \leq Ch \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \|\hat{G}_{0,h}^y\|_{W^{1,1}(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch |\ln h| \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Para I_2 , o Lema 3.4 produz

$$I_2 = \left| \mathcal{A}_h^d \left(u_h, \mathbf{I}_h(\hat{G}_{0,h}^y) \right) - \mathcal{A}_h \left(u_h, \mathbf{I}_h(\hat{G}_{0,h}^y) \right) \right| \leq Ch^2 |\ln h| \|\nabla_s u_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}.$$

Agora, invocando o Teorema 4.5, existe um $h_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que para $0 < h \leq h_0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \|\nabla_s u_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} &\leq \|\nabla_s(u - u_h)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \|\nabla_s u\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch |\ln h| \left(\|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \right) + \|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned}$$

Em consequência,

$$I_2 \leq Ch^2 |\ln h| \|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.45)$$

De forma análoga, obteremos uma estimativa para I_3 , usando esta vez o Lema 3.4. Então,

$$I_3 \leq Ch^2 |\ln h| \|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \quad (4.46)$$

Por último, combinando (4.40)–(4.46) e tomando o máximo, obtemos para h suficientemente pequeno, que

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch |\ln h| \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}.$$

Isto encerraria a demonstração. $\square$

Para finalizar, podemos obter uma estimativa adicional, agora usando o critério da SCVT, porém alguns modificações nos Lemas 4.2 e 4.3 são necessárias:

Lema 4.7. *Suponha que $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=1}^N$ é uma decomposição dual de Voronoï do tipo SCVT de $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c) com função de densidade constante $\rho(\mathbf{x}) > 0$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$. Então, para qualquer $w \in W^{2,1}(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que*

$$\left| \int_{\tilde{\mathbf{V}}_i} [w(\mathbf{x}) - \tilde{\Pi}_h(w)(\mathbf{x})] ds(\mathbf{x}) \right| \leq Ch^2 \|w\|_{W^{2,1}(\tilde{\mathbf{V}}_i)}.$$

Demonstração. A limitação é dada apenas usando a expansão em série de Taylor e o critério da SCVT como no Lema 4.2. $\square$

Lema 4.8. *Sejam $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ e $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=1}^N$ uma decomposição dual de Voronoï do tipo SCVT de $\mathbb{S}^2$, que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c) com função de densidade constante*

Figura 4.1: Comportamento da ordem de convergência das soluções do Laplaciano na malha esférica icosaédrica na max-norma onde o fator $|\ln h|^{1/2}$ possui ordem $\mathcal{O}(h^{-\eta})$ para $\eta \in (0, 1)$.

$\rho(x) > 0$, para cada $x \in \mathbb{S}^2$. Então, para cada $w \in W^{2,1}(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que

$$(f, \Pi_h(w) - \tilde{\Pi}_h(w)) \leq Ch^2 \|f\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{S}^2)} \|w\|_{W^{2,1}(\mathbb{S}^2)},$$

onde Π_h e $\tilde{\Pi}_h$ são os interpoladores nos espaços U_h e $\tilde{V}_h$ respectivamente.

Enunciamos o resultado:

Teorema 4.7. *Seja $\tilde{\mathcal{V}} = \{x_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ uma decomposição dual de Voronoï do tipo SCVT de $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c) com função de densidade constante $\rho(x) > 0$, para cada $x \in \mathbb{S}^2$. Assuma também que $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ e que $u \in W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ é a única solução fraca de (1.8). Seja F_{ij}^d o fluxo discreto definido em (3.8), tal que o problema discreto (3.23) tem única solução $u_h \in \tilde{U}_h$. Então, existem constantes $C, h_0 \in \mathbb{R}_+$, que independem de h , tal que para $0 < h \leq h_0 < 1$ tem-se*

$$\|\varepsilon_h\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \leq Ch^2 |\ln h| \left(\|u\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{S}^2)} + \|f\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{S}^2)} \right),$$

com $\varepsilon_h = u - u_h$.

Demonstração. A prova é a mesma do Teorema 4.6, agora usando o Lema 4.8 na equação (4.44) junto com (4.27c) do Lema 4.5, para o ganho da potencia extra de h . Então

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \mathcal{A}(u, G_h^y) - \mathcal{A}_h^d(u_h, I_h(G_h^y)) \right| = |(f, G_h^y - I_h(G_h^y))| \leq Ch^2 \|f\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{S}^2)} \|G_h^y\|_{W^{2,1}(\mathbb{S}^2)} \\ &\leq Ch^2 |\ln h| \|f\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{S}^2)}. \end{aligned}$$

Portanto obtemos o desejado. $\square$

Observação 4.3. O Teorema 4.5 é suficiente para garantir uma estimativa de ordem sub-linear na $W^{1,\infty}$ -norma com o critério da SCVT, pois não há um ganho adicional, a limitação fica restrita à aproximação da Proposição 3.10, mais precisamente da equação (4.32).

Por último, a Figura 4.1 ilustra as diferentes ordens de convergência das soluções dos esquemas de volumes finitos usual usando decomposições Voronoï-Delaunay.

4.3 Experimentos numéricos

Nesta seção ilustraremos um exemplo numérico para a aproximação do Laplaciano considerando a construção recursiva apresentada no Seção 2.2 para os três tipos NOPT, SCVT e HR95. Em particular, para a SCVT consideraremos a função de densidade constante $\rho = 1$. A fim de verificar a estimativa dos erros ε_h , usaremos o exemplo dado por Heikes e Randall (1995b), com solução exata u em coordenadas geográficas latitude-longitude (ϕ, θ) (vide Apêndice B),

$$u(\phi, \theta) = \cos(\theta) \cos^4(\phi), \quad (4.47)$$

e seu respectivo Laplaciano,

$$\begin{aligned} f(\phi, \theta) = & -\cos(\theta) \cos^2(\theta) [\cos^2(\phi) - 4 \sin(\phi) \cos(\phi) \sin(\phi) \cos(\phi) \\ & - 12 \cos^2(\phi) + 16 \cos^2(\phi) \cos^2(\phi)] / \cos^2(\phi). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Na Tabela 4.1 mostra a estimativas do erro da solução do problema (4.48) com as H^1 , L^2 , max e $W^{1,\infty}$ -norma nos três tipos de malhas com diferentes níveis de refinamento. Observamos que a taxa de convergência p é próxima de um na malha NOPT para a H^1 -norma e a $W^{1,\infty}$ -norma confirmando os resultados dos Teoremas 4.1 e 4.5. Tanto na L^2 -norma como na max-norma a NOPT apresenta uma ordem de convergência maior da estimada nos Teoremas 4.2 e 4.4/4.6. Não obstante, as estimativas nessas normas são independentes da estimativa do erro de truncamento em contraste com o mostrado na Seção 3.2. Em particular, a diferença entre os problemas variacionais dos MVF e MEFL aplicados à solução exata junto com à decomposição Voronoi-Delaunay em geral são um fator dominante na obtenção da taxa ideal de convergência.

Por outro lado, observe-se que a taxa de convergência p para a SCVT é próxima de dois na L^2 -norma confirmando a estimativa do Teorema 4.3. O mesmo comportamento é mostrado na max-norma confirmando o Teorema 4.7. Note-se ademais um melhor comportamento no erro da H^1 -norma nas duas otimizações, *i.e.*, existe um grau de superconvergência na aproximação dos gradientes. Por enquanto, não existe algum critério teórico que comprove esse comportamento e em consequência gera um bom desafio de pesquisa futura.

Para finalizar este capítulo, deixamos na Tabela 4.2 algumas das contribuições mais relevantes da literatura.

Figura 4.2: Representação gráfica dos valores da Tabela 4.1 para o erro das soluções aproximadas do Laplaciano nas normas estudadas para as malhas NOPT, SCVT e HR95 com níveis de refinamento de 1 (42 vértices) até 8 (655362 vértices).

ERRO DA SOLUÇÃO NA H_h^1 -NORMA E TAXA DE CONVERGÊNCIA p						
	NOPT		SCVT		HR95	
NÍVEL	$\ \varepsilon_h\ _{1,h}$	p	$\ \varepsilon_h\ _{1,h}$	p	$\ \varepsilon_h\ _{1,h}$	p
1	1.977E-01	—	1.977E-01	—	1.958E-01	—
2	5.827E-02	1.763E+00	5.660E-02	1.805E+00	5.839E-02	1.745E+00
3	1.591E-02	1.873E+00	1.448E-02	1.967E+00	1.511E-02	1.951E+00
4	4.457E-03	1.836E+00	3.657E-03	1.985E+00	3.808E-03	1.988E+00
5	1.311E-03	1.766E+00	9.228E-04	1.987E+00	9.545E-04	1.996E+00
6	4.091E-04	1.680E+00	2.314E-04	1.996E+00	2.388E-04	1.999E+00
7	1.338E-04	1.612E+00	5.841E-05	1.986E+00	5.971E-05	2.000E+00
8	4.531E-05	1.563E+00	1.464E-05	1.996E+00	1.489E-05	2.003E+00
	$\ \varepsilon_h\ _{0,h}$	p	$\ \varepsilon_h\ _{0,h}$	p	$\ \varepsilon_h\ _{0,h}$	p
1	5.472E-02	—	5.472E-02	—	4.716E-02	—
2	1.146E-02	2.255E+00	1.252E-02	2.128E+00	1.202E-02	1.972E+00
3	2.625E-03	2.127E+00	2.716E-03	2.204E+00	3.011E-03	1.996E+00
4	6.739E-04	1.962E+00	6.778E-04	2.003E+00	7.458E-04	2.014E+00
5	1.555E-04	2.115E+00	1.850E-04	1.873E+00	1.868E-04	1.997E+00
6	4.185E-05	1.894E+00	4.456E-05	2.053E+00	4.667E-05	2.001E+00
7	9.745E-06	2.103E+00	1.279E-05	1.801E+00	1.170E-05	1.996E+00
8	2.588E-06	1.913E+00	3.156E-06	2.019E+00	2.743E-06	2.093E+00
	$\ \varepsilon_h\ _{\infty,h}$	p	$\ \varepsilon_h\ _{\infty,h}$	p	$\ \varepsilon_h\ _{\infty,h}$	p
1	1.330E-01	—	1.330E-01	—	1.170E-01	—
2	3.136E-02	2.085E+00	3.245E-02	2.035E+00	2.987E-02	1.970E+00
3	7.286E-03	2.106E+00	6.790E-03	2.257E+00	7.677E-03	1.960E+00
4	1.900E-03	1.939E+00	1.700E-03	1.998E+00	1.877E-03	2.032E+00
5	4.280E-04	2.150E+00	4.815E-04	1.820E+00	4.739E-04	1.986E+00
6	1.216E-04	1.815E+00	1.159E-04	2.055E+00	1.184E-04	2.001E+00
7	2.796E-05	2.121E+00	3.252E-05	1.834E+00	2.989E-05	1.985E+00
8	6.497E-06	2.106E+00	7.704E-06	2.077E+00	6.599E-06	2.180E+00
	$\ \varepsilon_h\ _{W^{1,\infty}(\mathbb{S}^2)}$	p	$\ \varepsilon_h\ _{W^{1,\infty}(\mathbb{S}^2)}$	p	$\ \varepsilon_h\ _{W^{1,\infty}(\mathbb{S}^2)}$	p
1	2.124E-01	—	2.124E-01	—	1.965E-01	—
2	6.391E-02	1.733E+00	6.119E-02	1.796E+00	6.248E-02	1.653E+00
3	1.666E-02	1.939E+00	1.489E-02	2.039E+00	1.709E-02	1.870E+00
4	6.313E-03	1.400E+00	4.050E-03	1.878E+00	4.351E-03	1.974E+00
5	2.689E-03	1.231E+00	1.674E-03	1.275E+00	1.104E-03	1.978E+00
6	1.253E-03	1.102E+00	7.232E-04	1.211E+00	2.771E-04	1.995E+00
7	5.919E-04	1.082E+00	3.341E-04	1.114E+00	6.960E-05	1.993E+00
8	2.878E-04	1.040E+00	1.556E-04	1.102E+00	1.655E-05	2.072E+00

Tabela 4.1: Estimativas do erro da solução ε_h nas H^1 , L^2 , $\max$ e $W^{1,\infty}$ -normas com a sua respectiva taxa de convergência p obtidas do Laplaciano discreto (3.10) para a função (4.47) nas malhas NOPT, SCVT e HR95.

	MALHA			ESTIMATIVAS					
	AUTOR	VORONOI	DONALD	H^1		L^2		$L^\infty/W^{1,\infty}$	
				TÉCNICA	ORDEM	TÉCNICA	ORDEM	TÉCNICA	ORDEM
PLANO	Gallouët <i>et al.</i> (2000)	✓	–	MVF	Linear	MVF	Linear	–	–
	Ewing <i>et al.</i> (2002)	–	✓	MEVF	Linear	MEVF	Quadrática	MEVF/Green	Superlinear
	Chou e Li (2000)	–	✓	MEVF	Linear	MEVF	Quadrática	MEVF/Green	Superlinear
	Zhang (2014)	–	✓	MEVF	Quadrática	–	–	MEVF/Green	Superlinear
	Du <i>et al.</i> (2003b)	NOPT	–	MVF	Linear	–	–	–	–
	Du e Ju (2005)	SCVT	–	MEVF	–	MEVF	Quadrática	–	–
ESFERA	Ju e Du (2009)	–	✓	MEVF	Linear	MEVF	Quadrática	–	–
	Demlow (2009)	–	–	MEF	Linear	MEF	Quadrática	MEF/Green	Sublinear
	Nossa contribuição	NOPT	–	MEVF	Linear	MEVF	Linear	MEVF/Green	Sublinear
		SCVT	–	MEVF	–	MEVF	Quadrática	MEVF/Green	Superlinear

TÉCNICA

MVF Método de Volumes Finitos

MEF Método de Elementos Finitos

MEVF Método de Elementos de Volumes Finitos

MALHA

NOPT Voronoi não otimizada

SCVT Malha Esférica Centroidal de Voronoi

Tabela 4.2: Estimativas do erro das soluções nos diferentes contextos da literatura.

Conclusões

Nos últimos anos, o uso de malhas mais isotrópicas na dinâmica de fluidos na esfera se tornou de maior interesse, em especial devido à necessidade de uso eficiente de paralelismo em computadores de alta performance. Neste trabalho consideramos malhas geradas a partir de um icosaedro inscrito em $\mathbb{S}^2$, conhecidas como malhas esféricas geodésicas icosaédricas, as quais permitem uma distribuição mais uniforme dos vértices na superfície esférica e definir, com base no princípio de dualidade, decomposições Voronoi-Delaunay em $\mathbb{S}^2$. Além disso, foram consideradas duas otimizações referentes à qualidade geométrica de malha, a SCVT proposta por [Du *et al.* \(2003a\)](#) e a HR95 proposta por [Heikes e Randall \(1995b\)](#). Características geométricas dessas decomposições tais como: área, posicionamento dos centroides das células, relação entre as arestas das decomposições primal/dual e distorção das células têm sido estudadas em detalhe nos trabalhos de [Gregory *et al.* \(2008\)](#); [Miura e Kimoto \(2005\)](#) e [Peixoto \(2013\)](#).

Apresentamos a discretização usual do problema de Poisson na esfera $\mathbb{S}^2$ através dos Métodos de Volumes Finitos (MVF). A discretização parte da forma integral da equação, com o uso do teorema de Gauss em volumes de controle. O procedimento utiliza uma estimação dos fluxos nos pontos médios das arestas do volume finito (as células de Voronoi) que garante uma aproximação de segunda ordem em relação ao tamanho de malha. Em seguida, uma outra aproximação via um esquema de diferença finita centrada foi definida para o fluxo nos pontos médios das arestas duais. Apesar do esquema possuir características importantes como a conservação local, *i.e.*, o fluxo numérico é conservado de uma célula para suas vizinhas, a não uniformidade das células acarreta um esquema assintoticamente inconsistente ([Heikes e Randall, 1995b](#); [Ringle, 2003](#)). Não obstante, como evidenciado em experimentos numéricos, o erro das soluções comporta-se “melhor” que o erro de truncamento. Esta característica é conhecida como supra-convergência e foi definida em vários trabalhos anteriores, como por exemplo [Diskin e Thomas \(2010\)](#); [Kreiss *et al.* \(1986\)](#); [Manteuffel e White \(1986\)](#); [Pascal \(2007\)](#). Ainda hoje, há grande dificuldade para se obter estimativas da ordem de convergência dos MVF em malhas não uniformes, utilizando as técnicas usuais da análise dos Métodos das Diferenças Finitas (MDF). Para contornar essa situação e conforme a literatura ([Chou e Ye, 2007](#); [Ewing *et al.*, 2002](#); [Li *et al.*, 2000](#); [Lin *et al.*, 2013](#)), é habitual considerar o MVF como um Método de Elementos Finitos Lineares (MEFL). A formulação tem sido definida associando um par de espaços adequados de aproximação associados à decomposição Voronoi-Delaunay em $\mathbb{S}^2$. Com base nisso, estabelecemos uma expressão para a estabilidade usando uma forma variacional discreta do MVF. Estimamos também certos erros geométricos causados pela aproximação da esfera unitária $\mathbb{S}^2$ por uma sequência de poliedros $\mathbf{S}_h$ com h indo para zero. Isto com o fim de determinar as limitações essenciais das diferenças entre as formas variacionais construídas para cada método, *i.e.*, dos MVF e MEFL.

Com isso em mente, nós focamos nas estimativas de erro das soluções. É conveniente notar que, apesar de existir toda uma teoria desenvolvida para problemas no plano ([Chen *et al.*, 2002](#); [Chou e Li, 2000](#); [Chou e Ye, 2007](#); [Chou *et al.*, 2003](#); [Jianguo e Shitong, 1998](#); [Zhang, 2014](#)), a abordagem fica muito atrás quando os MVF usam decomposições Voronoi-Delaunay, tanto no plano como em $\mathbb{S}^2$. Uma primeira linha de contribuições desta tese começa da expressão da coercividade da forma variacional de (1.4). Após, deduzido o relacionamento entre os MVF e MEFL, enunciamos estimativas clássicas nas H^1 e L^2 -normas com ordem de convergência um, um pouco diferentes das apresentadas em [Du *et al.* \(2003b\)](#), no sentido que usamos os procedimentos padrão dos MEFL. Estimativas de convergência de ordem 2 na norma L^2 são obtidas se a decomposição Voronoi-Delaunay é otimizada pelo critério da SCVT, como apresentado por [Du e Ju \(2005\)](#). Neste caso,

mostramos uma modificação da prova, pois a regularidade na solução exata é excessiva em contraste com a obtida pelos MEFL. Usando a ideia de Ewing *et al.* (2002), a qual adaptamos para as malhas SCVT, exigimos uma mínima regularidade no termo fonte, a função f , pertence ao espaço $H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ e assim obter uma diminuição da regularidade na solução exata, *i.e.*, estar no espaço $H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$.

Fazendo uso do recente desenvolvimento das técnicas da análise pontuais dos MEF em superfícies (Demlow, 2009; Demlow e Dziuk, 2007; Kovács e Power Guerra, 2018; Kröner, 2017) a principal contribuição desta tese centrou-se na obtenção de estimativas fracas na max e $W^{1,\infty}$ -norma. Seguindo os trabalhos mencionados, representamos uma forma variacional do problema de Laplace usando funções de Green regularizadas como funções auxiliares do problema adjunto. A exposição dos resultados de convergência, os Teoremas 4.4–4.6 têm ordem sublinear e o Teorema 4.7 ordem superlinear (quase quadrática) em relação às potências do tamanho de malha h . Não obstante, aparece um fator logarítmico, que não pode ser evitado, causado pelo uso das funções lineares por partes na decomposição primal de Delaunay. Esperamos que os resultados apresentados aqui, ainda possam ser melhorados, quem sabe usando técnicas como tem sido mostrado em domínios Euclidianos por Rannacher e Scott (1982); Schatz e Wahlbin (1995) e Schatz (1998) que aprimorem a ordem junto com técnicas de relaxamento nas condições geométricas da decomposição Voronoi-Delaunay.

Além disso, a estrutura da análise nesta tese pode ser estendida para problemas lineares de convecção-difusão, tendo em vista alguns cuidados adicionais, e para problemas de difusão como

$$-\nabla_s \cdot (\kappa(x) \nabla_s u(x)) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{S}^2,$$

onde κ é um coeficiente da difusão usualmente descontínuo.

De forma geral, diversos requerimentos são necessários para obter resultados próximos aos proporcionados numericamente, independente da malha esférica icosaédrica escolhida. Conclui-se então que, foram estabelecidas estimativas pontuais satisfatórias dos erros das soluções construídas pelo esquema de volumes finitos, embora haja evidências numéricas de que a ordem de convergência ainda possa ser melhorada.

Possíveis extensões deste trabalho

1. Estabelecer as estimativas de erro *a posteriori* para MVF Adaptativos nas malhas SCVT com refinamento local como nos trabalhos de Bonito e Demlow (2019); Demlow e Dziuk (2007); Ju *et al.* (2009). Este é um aspecto importante a ser considerado no desenvolvimento de modelos de previsão do tempo.
2. Análise de estimativas *post-processing* de soluções do MVF para obter o seu gradiente tangencial (recuperação do gradiente) usando a SCVT com refinamento local.
3. Análise de convergência nas normas usuais para as malhas de tipo HR95 usando a metodologia descrita nesta tese.
4. Fazer uma extensão adequada da análise de convergência nas L^2 e max-norma dos trabalhos de Lv e Li (2010) e Nie *et al.* (2017) para esfera cubada, *i.e.*, a geração da malha esférica a partir de um hexaedro inscrito em $\mathbb{S}^2$.
5. Implementação da decomposição dual de Donald (usando baricentros dos triângulos) na esfera e adaptar a análise de convergência neste caso.

Apêndice A

Erro de consistência

Neste apêndice damos as provas das Proposições sobre o erro de truncamento dadas no Capítulo 3.

A.1 Uma condição de consistência fraca

Como foi discutido na Seção 3.2 o erro de truncamento não é consistente (no sentido das diferenças finitas). A perda dessa ordem de precisão é devida, em princípio às aproximações da integral de linha na aresta da célula e após da derivada normal via um esquema de diferenças finitas centradas no ponto médio das arestas duais. Apesar disso, esse problema de inconsistência na aproximação pode ser corrigido incorporando uma condição alternativa conhecida na literatura como *consistência fraca* (Coudière *et al.*, 1999; Faille, 1992). Vamos descrever as hipóteses que colocam-se na análise da consistência fraca:

Hipótese A.1 (Ortogonalidade). *A decomposição Voronoi-Delaunay é uma malha admissível (no sentido de Gallouët *et al.*, 2000, pp. 1936, Eymard *et al.*, 2000, pp. 757) de $\mathbb{S}^2$ que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c) e possui ortogonalidade entre as arestas primal/dual.*

Pode-se construir uma outra malha esférica (vide Du *et al.*, 2003b), da seguinte maneira: considere os vértices x_i e x_j vizinhos que atendem a relação entre as distâncias

$$\frac{1}{2}d(x_i, x_j) \leq \|x_i - x_j\| \leq d(x_i, x_j).$$

Além disso, $\tilde{\Gamma}_{ij} = \text{cl}(\tilde{V}_i) \cap \text{cl}(\tilde{V}_j)$ é a aresta comum das células de $\tilde{V}_i$ e $\tilde{V}_j$ associadas aos vértices x_i e x_j respectivamente com $m(\tilde{\Gamma}_{ij}) > 0$, de acordo à Seção 1.1. Então, denotemos por $\tilde{D}_{ij}^{(n)}$ o triângulo esférico formado pela aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$ e o vértice x_n para $n = i, j$, e $\tilde{D}_{ij}$ o diamante esférico formado pela união dos triângulos $\tilde{D}_{ij}^{(n)}$, com $n \in \{i, j\}$, *i.e.*,

$$\tilde{D}_{ij} = \tilde{D}_{ij}^{(i)} \cup \tilde{D}_{ij}^{(j)}. \quad (\text{A.1})$$

Ademais, as suas áreas superficiais são definidas respectivamente como

$$\begin{aligned} S(\tilde{D}_{ij}) &= \frac{1}{2}m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(x_i, x_j), \\ S(\tilde{D}_{ij}^{(n)}) &= \frac{1}{2}m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(x_n, x), \quad \text{para cada } x \in \tilde{\Gamma}_{ij} \text{ e } n \in \{i, j\}. \end{aligned}$$

Definimos também o conjunto

$$D_{ij}^{(n)} = \{x_n + t(x - x_n) : x \in \tilde{\Gamma}_{ij}, t \in [0, 1]\}, \quad \text{com } n \in \{i, j\}, \quad (\text{A.3})$$

tal que $\tilde{D}_{ij}^{(n)}$ seja a sua projeção radial sobre a superfície esférica. Observe que, para $n \in \{i, j\}$ as regiões $\tilde{D}_{ij}^{(n)}$ e $D_{ij}^{(n)}$ estão contidas no conjunto Ω como definido nas provas das Proposições 3.1–3.4.

Figura A.1: Representação geométrica do losango $\tilde{D}_{ij} = \tilde{D}_{ij}^{(i)} \cup \tilde{D}_{ij}^{(j)}$, cujas diagonais estão definidas pela aresta dual $\tilde{\Gamma}_{ij}$ e a primal $\tilde{\tau}_{ij}$ com ponto médio x_{ij} .

Hipótese A.2 (Consistência dos fluxos). Dada $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^4 . Consideremos $\tilde{u}$ a função constante por pedaços cujas componentes são ou os valores exatos de u ou uma aproximação o mais perto dela, digamos por exemplo os seus valores médios em cada célula.

Então, dizemos que o fluxo contínuo $F_{ij}^c(u)$ possui uma aproximação consistente $F_{ij}^d(\tilde{u})$ de ordem menor ou igual ao tamanho de malha h . Em outras palavras, os fluxos numéricos F^d são aproximações consistentes dos fluxos exatos F^c , se substituirmos os valores aproximados u_h por os valores de $\tilde{u}$ (Eymard *et al.*, 2000). Deseja-se provar que o operador discreto (3.11) satisfaz a propriedade das aproximações consistentes nos seus fluxos, mais precisamente:

Proposição A.1 (Aproximação consistente). Sejam $\tilde{V}_i$ uma célula da decomposição dual de Voronoi que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c) e $u \in C^4(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$ a única solução ao problema (1.4). Considere também os fluxos contínuo F_{ij}^c e discreto F_{ij}^d como definidos em (3.3) e (3.10) respectivamente. Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ independente do parâmetro h , tal que

$$|F_{ij}^c(u) - F_{ij}^d(\tilde{u})| \leq Ch^2,$$

onde $\tilde{u}$ denota os valores exatos de u nos vértices da malha. Dizemos que $F_{ij}^d(\tilde{u})$ é uma aproximação consistente do fluxo $F_{ij}^c(u)$ a través da aresta dual $\tilde{\Gamma}_{ij}$.

Demonstração. A prova é bastante simples, pois segue diretamente da combinação das Proposições 3.2 e 3.4 junto à desigualdade triangular. Além disso, a constante irá depender apenas das segundas derivadas de u . Nesse sentido, temos

$$F_{ij}^d(\tilde{u}) = -m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} + R_{ij},$$

onde $|R_{ij}| \leq Ch^2 \max_{x \in (\tilde{V}_i \cup \tilde{V}_j)} |H(u^\Omega)(x)|$. Invocando a Hipótese A.1, denotamos o fluxo por,

$$F_{ij}^d(\tilde{u}) = m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \left[-\nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} + \epsilon_{ij} \right],$$

onde $|\epsilon_{ij}| \leq h \max_{x \in (\tilde{V}_i \cup \tilde{V}_j)} |H(u^\Omega)(x)|$. □

No que segue, sabemos que a propriedade de conservação é uma característica natural no esquema dos volumes finitos. Denotamos agora, o erro de truncamento por

$$\tilde{\xi}_h = L_{s,h}(\tilde{u}) - f_h. \quad (\text{A.4})$$

A.1.1 Prova da Proposição 3.5

São assumidas as Hipóteses A.1 e A.2.

Demonstração da Proposição 3.5. Dada $\tilde{D}_{ij}$ a região esférica como em (A.1). Basta provar para $u \in C^2(\tilde{D}_{ij})$. Consideremos u^Ω a extensão de u em $\Omega_{ij} = \{x^* \in \Omega : \mathcal{P}(x^*) \in \tilde{D}_{ij}\}$. Então, usando o Teorema de Taylor até ordem dois de u^Ω . Para $x \in \tilde{\Gamma}_{ij}$, temos

$$u^\Omega(x_i) - u^\Omega(x) = \nabla u^\Omega(x) \cdot (x_i - x) + \int_0^1 H(u^\Omega)(x_i + t(x - x_i))(x_i - x) \cdot (x_i - x) dt. \quad (\text{A.5})$$

Similarmente,

$$u^\Omega(x_j) - u^\Omega(x) = \nabla u^\Omega(x) \cdot (x_j - x) + \int_0^1 H(u^\Omega)(x_j + t(x - x_j))(x_j - x) \cdot (x_j - x) dt, \quad (\text{A.6})$$

onde $H(u^\Omega)(x)$ denota a matriz Hessiana com valores de u^Ω no ponto x . Subtraindo (A.5) de (A.6) e integrando em relação a $\tilde{\Gamma}_{ij}$ resulta

$$m(\tilde{\Gamma}_{ij}) [u^\Omega(x_j) - u^\Omega(x_i)] = \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \nabla u^\Omega(x) \cdot (x_j - x_i) d\gamma(x) + R_{ij}^{(i)} + R_{ij}^{(j)},$$

onde

$$R_{ij}^{(n)} = \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \int_0^1 H(u^\Omega)(x_n + t(x - x_n))(x_n - x) \cdot (x_n - x) dt d\gamma(x), \quad \text{com } n \in \{i, j\}.$$

Observe-se que o vetor normal $\vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ é paralelo a $\overrightarrow{x_i x_j}$ conforme enunciado na Subseção 2.2.2, então

$$x_i - x_j = \|x_i - x_j\| \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}.$$

Ademais, da definição do gradiente tangencial e o fato de $\vec{n}_{\mathbb{S}^2, x}$ e $\vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ ser ortogonais para $x \in \mathbb{S}^2$ resulta,

$$\nabla_s u(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} = \nabla u^\Omega(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} - (\nabla u^\Omega(x) \cdot \vec{n}_{\mathbb{S}^2, x})(\vec{n}_{\mathbb{S}^2, x} \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}) = \nabla u^\Omega(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}}.$$

Em primeiro lugar, dividindo por $m(\tilde{\Gamma}_{ij})\|x_j - x_i\|$, e para simplificar a notação, vamos definir a diferença dos fluxo por $\tilde{\xi}_{ij}(u)$ com $u(x) = u^\Omega(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^2$, o que implica

$$\tilde{\xi}_{ij}(u) = \frac{1}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})} [F_{ij}^d(\tilde{u}) - F_{ij}^c(u)] = \frac{1}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})\|x_j - x_i\|} [R_{ij}^{(i)} + R_{ij}^{(j)}]. \quad (\text{A.7})$$

Agora, basta limitar o lado direito da identidade acima. Veja que $\|x_j - x_i\| \leq h$ e que $\frac{1}{2}d(x_i, x_j) \leq \|x_j - x_i\|$. Então, para $n \in \{i, j\}$, segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})\|x_j - x_i\|} R_{ij}^{(n)} &\leq \frac{h_n^2}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})\|x_j - x_i\|} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \int_0^1 |H(u^\Omega)(x_n + t(x - x_n))| dt d\gamma(x) \\ &\leq \frac{2h_n^2}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(x_i, x_j)} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \int_0^1 |H(u^\Omega)(x_n + t(x - x_n))| dt d\gamma(x). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

O passo a seguir será estimar a integral no lado direito de (A.8), porém alguns cuidados são necessários. Da Seção 1.1, a mudança de variável e a relação entre as medidas das integrais estão bem definidas, logo

$$d(x_i, x_j) \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \int_0^1 dt d\gamma(x) = d(x_i, x_j) \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x) = d(x_i, x_j) \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x) = d(x_i, x_j) m(\tilde{\Gamma}_{ij}).$$

Para a última expressão, usamos a desigualdade triangular para $\mathbf{x} \in \tilde{\Gamma}_{ij}$, logo

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \leq 2\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \leq 4\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|m(\tilde{\Gamma}_{ij}), \quad \text{para } n \in \{i, j\}.$$

Conforme a definição da região $D_{ij}^{(n)}$ em (A.3), com área superficial dada por $S(D_{ij}^{(n)}) = \frac{1}{2}m(\tilde{\Gamma}_{ij})\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|$, obtemos

$$\frac{1}{2}d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \leq S(D_{ij}^{(n)}) = \int_{D_{ij}^{(n)}} ds(\mathbf{x}^*).$$

Em consequência obtemos a expressão,

$$\int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \int_0^1 dt d\gamma(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)} \int_{D_{ij}^{(n)}} ds(\mathbf{x}^*).$$

Por outro lado, da relação

$$S(D_{ij}^{(n)}) \leq \frac{1}{2}m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n),$$

onde $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \leq h_n$, para cada $n = i, j$. Segue então que

$$S(D_{ij}^{(n)}) \leq \frac{1}{2}m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \leq \frac{1}{2}m(\tilde{\Gamma}_{ij})h_n \leq \frac{1}{4\sigma}m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j). \quad (\text{A.9})$$

Na última expressão do lado direito, usamos a definição do parâmetro de regularidade σ conforme definido em (2.2) da Subseção 2.2.2. Agora, retomando nosso cálculo da integral, para $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_n + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$, invocando a desigualdade de Cauchy-Schwarz junto ao tratamento feito acima, produzimos a estimativa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} R_{ij}^{(n)} &\leq \frac{2h_n^2}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \int_0^1 \left| H(u^\Omega)(\mathbf{x}_n + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)) \right| dt d\gamma(\mathbf{x}) \\ &\leq \frac{2h_n^2}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)^2} \int_{D_{ij}^{(n)}} |H(u^\Omega)(\mathbf{x}^*)| ds(\mathbf{x}^*) \\ &\leq \frac{2h_n^2 \sqrt{S(D_{ij}^{(n)})}}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)^2} \left(\int_{D_{ij}^{(n)}} |H(u^\Omega)(\mathbf{x}^*)|^2 ds(\mathbf{x}^*) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

onde

$$\left| H(u^\Omega)(\mathbf{x}) \right|^2 = \sum_{n,m=1}^3 \left| \partial_n \partial_m u^\Omega(\mathbf{x}) \right|^2,$$

representa a norma de Frobenius da Hessiana. Segundo Du *et al.* (2003b, Lema 1, pp. 3941), existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, tal que

$$\left(\int_{D_{ij}^{(n)}} |H(u^\Omega)(\mathbf{x})|^2 ds(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \leq C \|u\|_{H^2(\tilde{D}_{ij}^{(n)})}, \quad \text{para cada } n \in \{i, j\}.$$

Da relação (A.9) e o fato da malha ser quase-uniforme, em particular, $Ch \leq d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, obtemos

$$\frac{1}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} R_{ij}^{(n)} \leq C \frac{2h_n}{\sigma \sqrt{\sigma m(\tilde{\Gamma}_{ij})d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}} \|u\|_{H^2(\tilde{D}_{ij}^{(n)})}, \quad \text{com } n \in \{i, j\}. \quad (\text{A.10})$$

Combinando (A.7) e (A.10) com $n = i, j$, tem-se

$$\begin{aligned} |\tilde{\xi}_{ij}(u)| &\leq C \left(\frac{2h_i}{\sigma \sqrt{\sigma m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}} \|u\|_{H^2(\tilde{D}_{ij}^{(i)})} + \frac{2h_j}{\sigma \sqrt{\sigma m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}} \|u\|_{H^2(\tilde{D}_{ij}^{(j)})} \right) \\ &\leq C \frac{h}{\sigma \sqrt{\sigma m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}} \|u\|_{H^2(\tilde{D}_{ij})}. \end{aligned}$$

Invocamos um argumento de densidade: sejam $u \in H^2(\tilde{D}_{ij})$ e a sequência $\{u_m\}_{m \geq 1}$ em $C^2(\text{cl}(\tilde{D}_{ij}))$ tal que $u_m \rightarrow u$ na $H^2(\tilde{D}_{ij})$ -norma. Conforme Brezis (2010); Hebey (1996), a esfera $\mathbb{S}^2$ é uma variedade compacta, então garante que u_m converge para u uniformemente em $H^2(\tilde{D}_{ij})$ e o fato que $\nabla_s u_m(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ converge para $\nabla_s u(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_{ij}}$ em $L^1(\tilde{D}_{ij})$.

Para finalizar, dada a área superficial $S(\tilde{V}_i) = \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ e o fato que cada célula $\tilde{V}_i$ pode ser decomposta nos triângulos esféricos formados pelo vértice associado $\mathbf{x}_i$ e cada aresta $\tilde{\Gamma}_{ij}$ da sua fronteira, então temos que a área superficial é dada por

$$S(\tilde{V}_i) = \sum_{j \in \Lambda(i)} S(\tilde{D}_{ij}^{(i)}), \quad \text{para } i = 1, \dots, N.$$

Temos para o erro de consistência $\tilde{\xi}_h$ na L^2 -norma discreta que,

$$\|\tilde{\xi}_h\|_{0,h}^2 = \sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) |\tilde{\xi}_i|^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} S(\tilde{D}_{ij}^{(i)}) |\tilde{\xi}_{ij}(u)|^2.$$

Da relação $S(\tilde{D}_{ij}^{(i)}) \leq m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, a limitação desejada segue imediatamente de (A.11), i.e.,

$$\begin{aligned} \|\xi_h\|_{0,h}^2 &\leq C \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} S(\tilde{D}_{ij}^{(i)}) \left| \frac{h}{\sigma \sqrt{\sigma m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}} \|u\|_{H^2(\tilde{D}_{ij})} \right|^2 \\ &\leq Ch^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \left| \frac{\|u\|_{H^2(\tilde{D}_{ij})}}{\sigma \sqrt{\sigma m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}} \right|^2 \\ &\leq C \frac{h^2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \|u\|_{H^2(\tilde{D}_{ij}^{(i)})}^2 \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)}^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\xi_h\|_{0,h} \leq Ch \|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)}$, com C dependendo unicamente de σ . Isto encerra a demonstração. $\square$

O resultado a seguir é um resultado direto da proposição 3.5 e a propriedade de estabilidade 3.13.

Teorema A.1. *Seja $\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{x}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ a decomposição dual de Voronoï de $\mathbb{S}^2$ (NOPT) que satisfaz as condições (2.5a)–(2.5c). Assuma que a única solução u de (1.8) pertence ao espaço $H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$. Seja F_{ij}^d o fluxo discreto definido em (3.3), tal que o problema discreto (3.23) tem única solução $u_h \in U_h$. Então, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, que só depende do parâmetro σ , tal que*

$$\|\varepsilon_h\|_{1,h} \leq Ch \|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)}, \quad (\text{A.11})$$

onde $\varepsilon_h = \Pi_h(u) - u_h$ é a função de malha do erro da solução e $\Pi_h(u)$ é a interpolação da função u nas locações da decomposição primal $\tilde{\mathcal{T}}_h$.

Demonstração. Seja $\varepsilon_h = \Pi_h(u) - u_h$. Então, da Proposição 3.12 e a ortogonalidade no funcional

$\mathcal{A}_h^d(\cdot, \cdot)$,

$$\mathcal{A}_h^d(u - \Pi_h(u), \mathbf{I}_h(v_h)) = 0, \quad \text{para cada } v_h \in \tilde{U}_h.$$

Obtemos

$$\|\varepsilon_h\|_{1,h}^2 = \|\Pi_h(u) - u_h\|_{1,h}^2 \leq C |\mathcal{A}_h^d(\Pi_h(u) - u_h, \mathbf{I}_h(\varepsilon_h))| = |\mathcal{A}_h^d(u - u_h, \mathbf{I}_h(\varepsilon_h))|.$$

Da definição da forma bilinear obtemos

$$\mathcal{A}_h^d(u - u_h, \mathbf{I}_h(\varepsilon_h)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} [\mathbf{F}_{ij}^c(u) - \mathbf{F}_{ij}^d(u)] \varepsilon_h(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \xi_{ij}(u) \varepsilon_h(\mathbf{x}_i),$$

onde $\tilde{\xi}_{ij}(u)$ é definido por

$$\tilde{\xi}_{ij}(u) = \frac{1}{m(\tilde{\Gamma}_{ij})} [\mathbf{F}_{ij}^c(u) - \mathbf{F}_{ij}^d(u)].$$

Pela conservação discreta do esquema resulta,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^d(u - u_h, \mathbf{I}_h(\varepsilon_h)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \tilde{\xi}_{ij}(u) [\varepsilon_h(\mathbf{x}_j) - \varepsilon_h(\mathbf{x}_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| \tilde{\xi}_{ij}(u) \frac{\varepsilon_h(\mathbf{x}_j) - \varepsilon_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}. \end{aligned}$$

A estimativa $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| \leq d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ gera,

$$\mathcal{A}_h^d(u - u_h, \mathbf{I}_h(\varepsilon_h)) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \tilde{\xi}_{ij}(u) \frac{\varepsilon_h(\mathbf{x}_j) - \varepsilon_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}.$$

Agora, da desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^d(u - u_h, \mathbf{I}_h(\varepsilon_h)) &\leq \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) |\tilde{\xi}_{ij}(u)|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{1}{2} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \left| \frac{\varepsilon_h(\mathbf{x}_j) - \varepsilon_h(\mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \right|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Conforme a Proposição 3.5, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, que depende somente de σ , temos a estimativa

$$\mathcal{A}_h^d(u - u_h, \mathbf{I}_h(\varepsilon_h)) \leq Ch \|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} \|\varepsilon_h\|_{1,h},$$

logo

$$\|\varepsilon_h\|_{1,h}^2 \leq Ch \|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)} \|\varepsilon_h\|_{1,h}.$$

Portanto segue a conclusão (A.11). $\square$

Estimativas na mesma norma discreta e da mesma ordem na esfera podem ser consultadas no trabalho de Du *et al.* (2003b).

A.1.2 Prova da Proposição 3.6

Introduzimos algumas definições para a demonstração.

Definição A.1 (Funções simples). *Uma função simples é uma combinação de funções características de conjuntos mensuráveis. Mais precisamente o espaço $(\mathbb{S}^2, d)$ é um espaço mensurável. Sejam $\{\mathbf{x}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^N$ uma sequencia de conjunto mensuráveis disjuntos e $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ uma*

sequencia de números reais. Uma função simples é uma função $s : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_i(\mathbf{x}),$$

onde χ_i denota a função característica da região $\tilde{V}_i$,

$$\chi_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \tilde{V}_i, \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin \tilde{V}_i. \end{cases}$$

Nessa ordem de ideias, podemos considerar $\mathbb{S}^2$ como um espaço mensurável, com a medida da área superficial S . O fato de uma função simples s ser anulada fora de um conjunto de medidas finitas significa que

$$S(\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2 : s(\mathbf{x}) \neq 0) < \infty,$$

de fato $S(\tilde{V}_i) < \infty$, logo para $1 \leq p < \infty$

$$\|s\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^p S(\tilde{V}_i).$$

Assim, $s \in L^p(\mathbb{S}^2)$ se e somente se anula-se fora de um conjunto de medida finita. Podemos enunciar o próximo resultado. Cabe aclarar que a demonstração referida não é original do autor, mas se é considerado como um exercício clássico na análise funcional e na teoria da medida.

Lema A.1 (Rudin, 2006). Para $1 \leq p < \infty$, o conjunto das funções simples mensuráveis, as quais se anulam fora de um conjunto de medida finita é denso em $L^p(\mathbb{S}^2)$.

Demonstração. Seja $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{S}^2)$. A demonstrar que dado um $\epsilon < 0$, existe uma função s simples mensurável, a qual é anulada fora de um conjunto de medida finita tal que $\|f - s\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} < \epsilon$.

Consideremos primeiro $f \geq 0$. Sabemos que existe uma sequencia $\{s_m\}_{m \geq 1}$ de funções simples não negativas e mensuráveis tal que $s_m \rightarrow f$ pontualmente em $\mathbb{S}^2$, dado que $0 \leq s_m \leq f$ para cada $m \in \mathbb{N}$ e $f \in L^p(\mathbb{S}^2)$, temos $s_m \in L^p(\mathbb{S}^2)$, em consequência s_m se anulam fora de um conjunto de medida finita. Observe que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |s_m - f|^p = 0, \quad \text{em } \mathbb{S}^2,$$

e

$$|s_m - f|^p \leq (|s_m| + |f|)^p \leq (2|f|)^p.$$

Dado que $f \in L^p(\mathbb{S}^2)$, implica que $2^p |f|^p \in L^1(\mathbb{S}^2)$. Invocando o Teorema de convergência dominada de Lebesgue (vide por exemplo Brezis, 2010) temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^2} |s_m(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^p dS(\mathbf{x}) = 0,$$

ou seja, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|s_m - f\|_{L^p(\mathbb{S}^2)}^p = 0$. Logo dado um $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|s_m - f\|_{L^p(\mathbb{S}^2)}^p < \epsilon^p.$$

O resultado neste caso segue se escolhemos $s = s_{m_0}$, logo $\|s - f\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} < \epsilon$.

Agora se f é mensurável, então podemos escreve-la como $f = f^+ - f^-$, onde $f^\pm$ são funções não negativas mensuráveis. Então, visando o anterior, existem funções simples s_1 e s_2 não negativas mensuráveis que se anulam fora de um conjunto de medida finita, tal que,

$$\|f^+ - s_1\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{e} \quad \|f^- - s_2\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $s = s_1 - s_2$, note-se que s é uma função simples mensurável, que se anula fora de um conjunto de medida finita. Finalmente, pela desigualdade de Minkowski (vide [Rudin, 2006](#)) segue

$$\|f - s\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} = \|(f^+ - s_1) - (f^- - s_2)\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} \leq \|f^+ - s_1\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} + \|f^- - s_2\|_{L^p(\mathbb{S}^2)} < \epsilon.$$

Isto encerra a demonstração. $\square$

São assumidas as Hipóteses [A.1](#) e [A.2](#) e especialmente o esquema ser conservativo.

Demonstração da Proposição 3.5. Com efeito, dada a Hipótese [A.2](#), consideremos o erro de consistência em cada célula de Voronoï por

$$\tilde{\xi}_i = (L_{s,h}(\tilde{u}))_i - f_i = \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \left(-\nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} + \epsilon_{ij} \right) - f_i.$$

Reorganizando os termos acima, podemos escrever

$$\tilde{\xi}_i = -\frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} - f_i + \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \epsilon_{ij} = \tilde{\xi}_i^* + \tilde{\xi}_i^{**}.$$

Em virtude da desigualdade triangular temos para $\tilde{\xi}_i^*$ que

$$\begin{aligned} |\tilde{\xi}_i^*| &= \left| \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} + f_i \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} - \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^c(u) \right| + \left| \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^c(u) + f_i \right| \\ &\leq \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} \left| m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \nabla_s u(m_{ij}) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} - F_{ij}^c(u) \right| + \left| \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^c(u) + f_i \right|. \end{aligned}$$

Agora, em vista da Proposição [3.2](#) e pelo Teorema de Gauss, temos

$$\begin{aligned} |\tilde{\xi}_i^*| &\leq C \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} h^3 + \left| \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^c(u) + f_i \right| \\ &\leq C \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} h^3 + \left| \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} \int_{\tilde{\Gamma}_{ij}} \nabla_s u(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{\Gamma}_{ij}} d\gamma(x) - f_i \right| \\ &\leq C \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} h^3 + \left| \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \int_{\partial \tilde{V}_i} \nabla_s u(x) \cdot \vec{n}_{x, \tilde{V}_i} d\gamma(x) - f_i \right| \\ &\leq C \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} h^3 + \left| \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \int_{\tilde{V}_i} \Delta_s u(x) ds(x) - f_i \right|. \end{aligned}$$

Da Hipótese [A.1](#), ou de maneira mais precisa, existem constantes $C \in \mathbb{R}_+$, tal que $Ch^2 \leq S(\tilde{V}_i)$ e $\text{Card}(\tilde{V}_i) \leq C$, tem-se

$$|\tilde{\xi}_i^*| \leq Ch + \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \left| \int_{\tilde{V}_i} \Delta_s u(x) ds(x) - \int_{\tilde{V}_i} f(x) ds(x) \right| \leq Ch.$$

Observe que, no segundo termo do lado direito utilizamos a definição de f_i , junto à equação [\(3.1\)](#). Portanto,

$$\|\tilde{\xi}_h^*\|_{\infty, h} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } h \longrightarrow 0. \quad (\text{A.12})$$

Resta provar uma limitação para $\tilde{\xi}_i^{**}$. Sabemos que este termo está relacionado ao erro ϵ_{ij} dos fluxos em cada aresta dual, pela Hipótese A.2. Note-se que as células, sob a Hipótese A.1 e o fato de $|\epsilon_{ij}| \leq Ch$, implicam que $\tilde{\xi}_i^{**}$ não tenda para zero quando h vai para zero. Apesar disso, este fato pode ser corrigido da seguinte maneira: sabemos que

$$|\tilde{\xi}_i^{**}| \leq \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) |\epsilon_{ij}| \leq C.$$

Consequentemente, o termo $\|\tilde{\xi}_h^{**}\|_{\infty, h}$ é limitado, *i.e.*, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente de h , tal que $\|\tilde{\xi}_h^{**}\|_{\infty, h} < C$. A demonstrar que a função constante por pedaços $\tilde{\xi}_h^{**}$ vai para zero no espaço $L^\infty(\mathbb{S}^2)$ para a topologia fraca $\star$, ou seja satisfaz o critério de dualidade

$$\int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\xi}_h^{**}(x) v(x) ds(x) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } h \longrightarrow 0, \quad \text{para cada } v \in L^1(\mathbb{S}^2).$$

Cabe agora as observações, em primeiro lugar note que a partir que $\tilde{\xi}_i^{**}$ ser limitado em $L^\infty(\mathbb{S}^2)$, existe uma subsequencia que denotaremos também por $\tilde{\xi}_i^{**}$, que converge para um limite ξ^{**} em $L^\infty(\mathbb{S}^2)$ para a topologia fraca $\star$. Vamos provar então o critério acima, sejam $v \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ e a sua aproximação $v_h(x) = v(x_i)$ para cada $x \in \tilde{V}_i$, *i.e.*, constante por pedaços, cujos valores são definidos por

$$v(x_i) = \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \int_{\tilde{V}_i} v(x) ds(x).$$

Desta maneira, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\xi}_h^{**}(x) v_h(x) ds(x) &= \sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) \tilde{\xi}_i^{**} v(x_i) = \sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) \left[\frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \epsilon_{ij} \right] v(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \epsilon_{ij} v(x_i). \end{aligned}$$

Agora bem, o esquema é conservativo. Sabemos que os fluxos discretos satisfazem $F_{ij}^d = -F_{ji}^d$, se x_i e x_j são vizinhos com $m(\tilde{\Gamma}_{ij}) > 0$, então segue a expressão

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(\tilde{u}) v(x_i) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ji}^d(\tilde{u}) v(x_i).$$

Com uma troca conveniente dos índices no lado direito, podemos simplificar à relação

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(\tilde{u}) v(x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(\tilde{u}) [v(x_j) - v(x_i)].$$

Com isto em mente, voltamos à nosso cálculo, para obter

$$\int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\xi}_h^{**}(x) v_h(x) ds(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \epsilon_{ij} [v(x_j) - v(x_i)].$$

Lembremos que existem constantes positivas $C \in \mathbb{R}_+$, independentes do parâmetro h , que implicam $m(\tilde{\Gamma}_{ij}) \leq Ch$ e $|\epsilon_{ij}| \leq Ch$. Além disso, da escolha da função $v \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, temos que as suas primeiras derivadas são contínuas e limitadas, então, em virtude da desigualdade do valor médio,

existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, independente do parâmetro h , tal que $|v(x_j) - v(x_i)| \leq Ch$. Logo,

$$\int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\xi}_h^{**}(x) v_h(x) ds(x) \leq C \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Lambda(i)} h^3.$$

O número total de arestas na decomposição dual é pelo menos de ordem de h^{-2} , assim

$$\int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\xi}_h^{**}(x) v_h(x) ds(x) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } h \longrightarrow 0. \quad (\text{A.13})$$

Agora note-se, que tanto v como sua aproximação v_h pertencem ao espaço $L^1(\mathbb{S}^2)$. Em particular, v_h é uma função simples, ou seja é uma combinação linear de funções características das células de Voronoï, *i.e.*,

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v(x_i) \chi_i(x),$$

onde χ_i é a função característica da célula $\tilde{V}_i$. Sabemos que o conjunto de funções simples é denso no espaço $L^1(\mathbb{S}^2)$ (vide Lema A.1), logo $v_h \longrightarrow v$ pontualmente em $\mathbb{S}^2$, quando $h \longrightarrow 0$ e portanto conclua-se que v_h converge para v na L^1 -norma, *i.e.*,

$$\|v_h - v\|_{L^1(\mathbb{S}^2)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } h \longrightarrow 0. \quad (\text{A.14})$$

Segue imediatamente de (A.14) junto ao fato de $\tilde{\xi}_h^{**} \longrightarrow \xi^{**}$ em $L^\infty(\mathbb{S}^2)$ para a topologia fraca $\star$, que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\xi}_h^{**}(x) v_h(x) ds(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{S}^2} \xi^{**}(x) v(x) ds(x), \quad \text{quando } h \longrightarrow 0.$$

Pela unicidade do limite e a expressão (A.13) temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} \xi^{**}(x) v(x) ds(x) = 0, \quad \text{para cada } v \in C^\infty(\mathbb{S}^2).$$

Observe-se que a função v está finitamente suportada em $\mathbb{S}^2$, portanto

$$\xi^{**} \equiv 0. \quad (\text{A.15})$$

A estimativa desejada segue então da combinação de (A.12), (A.13) e (A.15). $\square$

O anterior mostra que o esquema de volumes finitos é fracamente consistente. Agora, ainda quando temos a estimativa do Teorema A.1, não é suficiente para encontrar uma condição de estabilidade independente do parâmetro h . Em consequência, existem certas limitações para obter estimativas de erro na max-norma de forma direta usando técnicas padrão dos MDF. Portanto, recorre-se a enfraquecer a condição de estabilidade através do processo apresentado nos capítulos 3 e 4.

Observação A.1. *Podemos estabelecer uma ordem de convergência quando o critério de HR95 é usado na decomposição Voronoï-Delaunay. Com efeito, a expressão do erro de truncamento,*

$$\xi_i = (L_{s,h}(\tilde{u}))_i - \frac{1}{S(\tilde{V}_i)} \sum_{j \in \Lambda(i)} F_{ij}^d(u), \quad \text{para } i = 1 \dots, N,$$

*possui neste caso ordem de h , *i.e.*, $|\xi_i| \leq Ch$ para cada $i = 1, \dots, N$. Portanto, para alguma função $u \in C^2(\mathbb{S}^2)$ que satisfaz $\int_{\mathbb{S}^2} u(x) ds(x) = 0$, é fácil deduzir que existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$, tal que*

$$\|\xi_h\|_{\infty,h} \leq Ch \|u\|_{C^2(\mathbb{S}^2)}.$$

De forma análoga, para $u \in H^2(\mathbb{S}^2) \cap H_Q^1(\mathbb{S}^2)$, temos para a L_h^2 -norma,

$$\|\xi_h\|_{0,h} = \left(\sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i) |\xi_i|^2 \right)^{1/2} \leq Ch \|u\|_{H^2(\mathbb{S}^2)},$$

onde na última desigualdade usamos um argumento similar ao feito na Proposição 3.5 para a Hessiana de u . Note-se que a limitação desejada também é consequência direta da expansão em série de Taylor e o argumento de densidade. É importante notar que a estimativa acima não é suficiente para a ordem de convergência dada nos testes numéricos.

Apêndice B

Elementos de cálculo e geometria esférica

Neste apêndice expomos brevemente sem provas, uma revisão estruturada de noções do cálculo e geometria esférica.

B.1 Fórmula de Taylor e desigualdade de valor médio

Coletamos um pequeno número de definições básicas do cálculo em várias variáveis no $\mathbb{R}^3$ que são usuais nas provas de alguns resultados. Inicialmente recordemos a definição e as propriedades mais simples do desenvolvimento de Taylor para funções de n variáveis. Se $f(x)$ tem α -ésima derivada em $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos a fórmula de Taylor de grau α de f em torno do ponto x_0 em função das diferenciais da seguinte maneira:

$$f(x_0) + D_{x_0}f(x - x_0) + \frac{1}{2!}D_{x_0}^2f(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{\alpha!}D_{x_0}^\alpha f(x - x_0),$$

onde $D_{x_0}^\alpha f(x)$ é dado como

$$D_{x_0}^\alpha f(x) = \sum_{|\alpha|} \binom{\alpha}{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x_0).$$

Teorema B.1 (Fórmula de Taylor). *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^α , para $N \in \mathbb{N}$, logo se $x, y \in \Omega$, $[x, y] = \{x + ty : t \in [0, 1]\} \subset \Omega$, então*

$$f(x + y) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} (\partial_x^\alpha f)(x) y^\alpha + N \sum_{|\alpha| = N} \frac{y^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1 - t)^{1-N} (\partial_x^\alpha f)(x + ty) dt.$$

Teorema B.2 (Desigualdade do valor médio). *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto $(x, x + y)$ e tal que sua restrição ao segmento fechado $[x, x + y] \subset \Omega$ seja contínua. Se $|f'(z)| \leq M$ para cada $z \in (x, x + y)$, então $|f(x + y) - f(x)| \leq M \cdot y$.*

B.2 Coordenadas geográficas

As coordenadas cartesianas de um ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ são denotadas nas coordenadas angulares ou geográficas (latitude-longitude),

$$x(\phi, \theta) = (\cos(\phi) \cos(\theta), \cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi)), \quad (\text{B.1})$$

onde $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ é a latitude e $\theta \in [-\pi, \pi]$ é a longitude. Por outro lado, denotamos por $d\tilde{s}(x)$ a medida na superfície esférica, a qual admite a representação $d\tilde{s}(x) = \sin(\phi) d\phi d\theta$.

De forma análoga, dado um ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, as suas coordenadas geográficas são

dadas por

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (\text{B.2a})$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), & \text{se } x_1 \neq 0, \\ 0, & \text{se } x_1 = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2b})$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{x_3}{r}\right). \quad (\text{B.2c})$$

B.3 Distâncias geodésicas

Para dois pontos em coordenadas geográficas $\mathbf{x}(\phi_1, \theta_1)$ e $\mathbf{y}(\phi_2, \theta_2)$ usamos a fórmula de Vincenty para determinar a distância geodésica dada como

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\sqrt{(\cos(\phi_2) \sin(\theta_1 - \theta_2))^2 + (\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(\theta_1 - \theta_2))^2}}{\sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \right). \quad (\text{B.3})$$

O cálculo de distância geodésica entre dois pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ na esfera unitária $\mathbb{S}^2$ em coordenadas cartesianas é dado pela equação

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos((\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbb{R}^3}), \quad (\text{B.4})$$

mas para evitar problemas na inversa da função cosseno, utilizamos como sugerido por [Peixoto \(2013\)](#), mais precisamente a equação

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{4 - \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^3}^2}{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^3}^2}} \right), \quad (\text{B.5})$$

onde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$ denota a norma Euclidiana.

B.4 Áreas geodésicas

As áreas dos triângulos esféricos podem ser calculadas com base no excesso esférico obtido pelo Teorema de L'Huilier.

Teorema B.3 (L'Huilier). *Seja $\tilde{T}$ um triângulo esférico com arestas de comprimento $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$ e $\tilde{\tau}_3$ e semi-perímetro s . Então o excesso esférico E é dado por*

$$\tan\left(\frac{1}{4}E\right) = \sqrt{\tan\left(\frac{1}{2}s\right) \tan\left[\frac{1}{2}(s - \tilde{\tau}_1)\right] \tan\left[\frac{1}{2}(s - \tilde{\tau}_2)\right] \tan\left[\frac{1}{2}(s - \tilde{\tau}_3)\right]}, \quad (\text{B.6})$$

onde $s = \frac{1}{2}(\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2 + \tilde{\tau}_3)$.

B.5 Mudança de variável

Estabelecemos algumas relações uteis para o cálculo de integrais em várias variáveis. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz ortogonal no espaço de matrizes $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^2$, então $ds(\mathbf{y}) = ds(\mathbf{A}\mathbf{x}) = ds(\mathbf{x})$. Em particular, temos a mudança de um vetor entre o sistema de coordenadas geográficas e cartesiano. Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ um ponto na esfera, e seja $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ um vetor nesse ponto, onde $\mathbf{e}_n$, com $n \in \{1, 2, 3\}$ é o vetor da base canônica no $\mathbb{R}^3$. A transformação para as coordenadas geográficas, como sendo um vetor $\vec{v} = v_r\vec{r} + v_\phi\vec{\phi} + v_\theta\vec{\theta}$, onde $\vec{r}, \vec{\phi}$ e $\vec{\theta}$ são os vetores canônicos locais em coordenadas geográficas, pode ser feita com a transposta da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) & -\sin(\phi) \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) & -\sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} & \frac{x_3 x_1}{\frac{\partial r}{\partial \phi}} & -\frac{x_2}{\frac{\partial}{\partial \theta}} \\ \frac{x_2}{r} & -\frac{x_3 x_2}{\frac{\partial r}{\partial \phi}} & \frac{x_1}{\frac{\partial}{\partial \theta}} \\ \frac{x_3}{r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

onde $\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Para $\mathbf{A}$ ortogonal, temos que a sua inversa é a transposta $\mathbf{A}^t$. Então

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_\theta \end{pmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

B.5.1 Operadores diferenciais

A base $\vec{\phi}$ e $\vec{\theta}$ define uma sistema de coordenadas local, que depende do ponto na esfera. Para uma função escalar u definida em coordenadas geográficas, o seu gradiente nessas mesmas coordenadas pode ser calculado da seguinte forma

$$\nabla_s u(\phi, \theta) = \left(\frac{\partial u}{\partial \phi}(\phi, \theta), \frac{1}{\cos(\phi)} \frac{\partial}{\partial \theta} u(\phi, \theta) \right) \quad (\text{B.9})$$

Por fim, podemos definir a equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem em termos das coordenadas geográficas por

$$\Delta_s u(\phi, \theta) = \frac{1}{\cos(\phi)} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos(\phi) \frac{\partial u}{\partial \phi}(\phi, \theta) \right) \right) + \frac{1}{(\cos(\phi))^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(\phi, \theta) \right). \quad (\text{B.10})$$

Apêndice C

Elementos de álgebra linear

C.1 Considerações técnicas

Os experimentos numéricos realizados neste estudo foram feitos principalmente em uma laptop ASUS S451LN com as seguintes especificações:

- Processador: Intel® Core™ i7-4500U CPU @ 1.80GHz
- Memória: 8 Gb
- Sistema operacional: Ubuntu 16.10 LTS 64 bits
- Compilador: Intel® Fortran Compiler 9.2.1

Os códigos e programas computacionais foram todos desenvolvidos em **FORTRAN90** na tese de doutorado de [Peixoto \(2013\)](#). Alguns experimentos que demandavam mais processamento foram realizados em um servidor numérico do laboratório de computação científica em matemática aplicada (LabMap) do IME-USP.

Para o desenvolvimento das figuras foi usado o software GMT - *The Generic Mapping Tools data processing and display software*, versão 5.4.5 para Linux. Os diagramas bidimensionais de geometria foram feitos no software GeoGebra 4 e o pacote do elementos gráficos **tikz** do **L^AT_EX**.

C.2 Existência da solução discreta

A expressão (3.11) forma um sistema linear de equações dado como

$$\mathbf{L}_{s,h} \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h, \quad (\text{C.1})$$

onde a matriz $\mathbf{L}_{s,h} = [l_{ij}]_{N \times N}$ é uma $N \times N$ -matriz, para $N = 10 \cdot 2^{2\ell} + 2$, com entradas na diagonal

$$l_{ii} = \sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{m(\tilde{\Gamma}_{ij})}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}, \quad \text{para } j \in \Lambda(i),$$

e fora da diagonal

$$l_{ij} = \begin{cases} -\frac{m(\tilde{\Gamma}_{ij})}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}, & \text{para } j \in \Lambda(i) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O vetor $\mathbf{u}_h$ tem como componentes os valores da função u_h em cada célula de Voronoi $\tilde{V}_i$, *i.e.*,

$$\mathbf{u}_h = [u_h(\mathbf{x}_1), \dots, u_h(\mathbf{x}_N)]^t,$$

e o vetor $\mathbf{f}_h$ é o vetor cujos componentes são os valores médios de f em cada $\tilde{V}_i$ vezes o valor da área superficial $S(\tilde{V}_i)$ da célula respectivamente, *i.e.*,

$$\mathbf{f}_h = [\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_N]^t,$$

onde $\bar{f}_i = S(\tilde{V}_i)f_i$ para cada $i = 1, \dots, N$.

A matriz $\mathbf{L}_{s,h}$ é simétrica e satisfaz as condições

$$l_{ii} > 0, \quad l_{ij} \leq 0, \quad \text{para cada } i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (\text{C.2})$$

Porém $\mathbf{L}_{s,h}$ é uma matriz singular, *i.e.*, em geral o sistema (C.1) não tem solução. Vejamos algumas características. Em relação à existência da solução, se a condição de compatibilidade

$$\langle \mathbf{f}_h, \mathbf{1} \rangle_h = \sum_{i=1}^N S(\tilde{V}_i)f_i = 0,$$

é satisfeita. O sistema (C.1) pode ser resolvido. Seja $\mathbf{u}_h$, então podemos construir uma submatriz $\tilde{\mathbf{L}}_{s,h}$ eliminando uma linha e uma coluna de $\mathbf{L}_{s,h}$, dado um vértice $\mathbf{x}_{i^*} \in S_N = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$, normalizamos $\mathbf{u}_h$ por $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}_{i^*}) = 0$. Desta maneira, denotamos por $\hat{\mathbf{u}}_h$ ao vetor $\mathbf{u}_h$ sem a componente $u_h(\mathbf{x}_{i^*})$. Então, obtemos o sistema

$$\tilde{\mathbf{L}}_{s,h} \hat{\mathbf{u}}_h = \hat{\mathbf{f}}_h, \quad (\text{C.3})$$

com $(N-1)^2 - 1$ equações e incógnitas. Aqui $\hat{\mathbf{f}}_h$ representa o vetor $\mathbf{f}_h$ sem a componente f_{i^*} . Considere as seguintes definições.

Definição C.1 (Hackbusch, 2017). A matriz $\tilde{\mathbf{L}}_{s,h} = [l_{ij}]_{(N-1) \times (N-1)}$ é dita *irredutível* se não existir uma matriz de permutação $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{P} \tilde{\mathbf{L}}_{s,h} \mathbf{P}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

onde $n < (N-1)$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times (N-1)-n}$ e $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{((N-1)-n) \times ((N-1)-n)}$.

Definição C.2 (Hackbusch, 2017). Seja $N = 10 \cdot 2^{2\ell} + 2$. Uma matriz $\tilde{\mathbf{L}}_{s,h} = [l_{ij}]_{(N-1) \times (N-1)}$ é dita *fracamente diagonal dominante* se

$$|l_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} l_{ij}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

e vale a desigualdade estrita para alguma linha.

Teorema C.1 (Hackbusch, 2017). Toda matriz fracamente diagonal dominante e irredutível é inversível.

Segundo o Teorema 4.7.4 de Hackbusch (2017, pp. 75) temos:

Teorema C.2 (Hackbusch, 2017). O sistema de equações de $\tilde{\mathbf{L}}_{s,h} \hat{\mathbf{u}}_h = \hat{\mathbf{f}}_h$ é solucionável; em particular, $\tilde{\mathbf{L}}_{s,h}$ é fracamente diagonal dominante e irredutível e portanto não singular. Sob a condição de compatibilidade discreta $\langle \hat{\mathbf{f}}_h, \mathbf{1} \rangle_h = 0$ e $\hat{\mathbf{u}}_h = \tilde{\mathbf{L}}_{s,h}^{-1} \hat{\mathbf{f}}_h$, implicam uma solução $\hat{\mathbf{u}}_h$ ao sistema (C.1).

C.3 Método de Gauss-Seidel SOR (Successive over relaxation)

O método de relaxação usado é obtido a partir de uma modificação no método de Jacobi. Este esquema é dado como

$$\tilde{u}_i^{[k+1]} = (1 - \omega) \tilde{u}_i^{[k]} + \omega \tilde{u}_i^*, \quad (\text{C.4})$$

onde

$$\tilde{u}_i^* = \left(\sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{m(\tilde{\Gamma}_{ij})}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \tilde{u}_j^{[k]} - S(\tilde{V}_i)f_i \right) \left(\frac{1}{\sum_{j \in \Lambda(i)} \frac{m(\tilde{\Gamma}_{ij})}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}} \right), \quad (\text{C.5})$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$ é o fator de relaxação. Para os testes numéricos usamos $\omega = 1.7$. O método, na maioria das vezes, têm convergência mais rápida do que o método de usual de Gauss-Seidel, mas exigem processamento serial.

Referências Bibliográficas

- Atkinson e Han(2012)** Kendall Atkinson e Weimin Han. *Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: an introduction*, volume 2044. Springer Science & Business Media. Citado na pág. [1](#)
- Aubin(2013)** Thierry Aubin. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Springer Science & Business Media. Citado na pág. [xviii](#), [1](#), [2](#), [4](#), [5](#), [52](#)
- Augenbaum e Peskin(1985)** Jeffrey M Augenbaum e Charles S Peskin. On the construction of the Voronoi mesh on a sphere. *Journal of Computational Physics*, 59(2):177–192. Citado na pág. [xv](#), [14](#)
- Bank e Rose(1987)** Randolph E Bank e Donald J Rose. Some error estimates for the box method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(4):777–787. Citado na pág. [43](#)
- Barbeiro(2009)** Silvia Barbeiro. Supraconvergent cell-centered scheme for two dimensional elliptic problems. *Applied numerical mathematics*, 59(1):56–72. Citado na pág. [xvi](#)
- Baumgardner e Frederickson(1985)** John R Baumgardner e Paul O Frederickson. Icosahedral discretization of the two-sphere. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 22(6):1107–1115. Citado na pág. [xv](#), [10](#)
- Bonito e Demlow(2019)** Andrea Bonito e Alan Demlow. A posteriori error estimates for the Laplace-Beltrami operator on parametric C^2 surfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 57(3):973–996. ISSN 0036-1429. doi: 10.1137/18M1169278. URL <https://doi.org/10.1137/18M1169278>. Citado na pág. [xvii](#), [66](#)
- Bouche et al.(2005)** Daniel Bouche, Jean-Michel Ghidaglia e Frédéric Pascal. Error estimate and the geometric corrector for the upwind finite volume method applied to the linear advection equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(2):578–603. ISSN 0036-1429. doi: 10.1137/040605941. URL <https://doi.org/10.1137/040605941>. Citado na pág. [xvi](#)
- Brenner e Scott(2007)** Susanne Brenner e Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media. Citado na pág. [xvii](#), [33](#), [34](#), [54](#)
- Brezis(2010)** Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media. Citado na pág. [6](#), [71](#), [73](#)
- Cai(1990)** Zhiqiang Cai. On the finite volume element method. *Numerische Mathematik*, 58(1): 713–735. Citado na pág. [xvii](#)
- Chen et al.(2002)** Zhongying Chen, Ronghua Li e Aihui Zhou. A note on the optimal L^2 -estimate of the finite volume element method. *Advances in computational Mathematics*, 16(4):291–303. Citado na pág. [65](#)
- Chou e Li(2000)** So-Hsiang Chou e Qian Li. Error estimates in L^2 , H^1 and L^∞ in covolume methods for elliptic and parabolic problems: a unified approach. *Mathematics of Computation*, 69(229):103–120. Citado na pág. [xviii](#), [64](#), [65](#)

- Chou e Ye(2007)** So-Hsiang Chou e Xiu Ye. Superconvergence of finite volume methods for the second order elliptic problem. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(37): 3706–3712. Citado na pág. [xviii](#), [33](#), [65](#)
- Chou et al.(2003)** So-Hsiang Chou, Do Y Kwak e Qian Li. L^p error estimates and superconvergence for covolume or finite volume element methods. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 19(4):463–486. Citado na pág. [xviii](#), [34](#), [65](#)
- Ciarlet(2002)** Philippe G Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM. Citado na pág. [xvii](#), [13](#), [34](#)
- Coudière et al.(1999)** Yves Coudière, Jean-Paul Vila e Philippe Villedieu. Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(3):493–516. Citado na pág. [xvi](#), [21](#), [28](#), [47](#), [67](#)
- Demlow(2009)** Alan Demlow. Higher-order finite element methods and pointwise error estimates for elliptic problems on surfaces. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2):805–827. Citado na pág. [xv](#), [xvii](#), [xviii](#), [7](#), [31](#), [32](#), [33](#), [34](#), [52](#), [53](#), [54](#), [64](#), [66](#)
- Demlow e Dziuk(2007)** Alan Demlow e Gerhard Dziuk. An adaptive finite element method for the laplace-beltrami operator on implicitly defined surfaces. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(1):421–442. Citado na pág. [xv](#), [xvii](#), [30](#), [32](#), [66](#)
- Despres(2004)** Bruno Despres. Lax theorem and finite volume schemes. *Mathematics of computation*, 73(247):1203–1234. Citado na pág. [xvi](#)
- Diskin e Thomas(2010)** Boris Diskin e James L. Thomas. Notes on accuracy of finite-volume discretization schemes on irregular grids. *Appl. Numer. Math.*, 60(3):224–226. ISSN 0168-9274. doi: 10.1016/j.apnum.2009.12.001. URL <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2009.12.001>. Citado na pág. [xvi](#), [65](#)
- Droniou(2014)** Jerome Droniou. Finite volume schemes for diffusion equations: introduction to and review of modern methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 24(08): 1575–1619. Citado na pág. [xvi](#)
- Du e Gunzburger(2002)** Qiang Du e Max Gunzburger. Grid generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations. *Applied mathematics and computation*, 133(2-3):591–607. Citado na pág. [18](#)
- Du e Ju(2005)** Qiang Du e Lili Ju. Finite volume methods on spheres and spherical centroidal Voronoi meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(4):1673–1692. Citado na pág. [xviii](#), [28](#), [30](#), [31](#), [36](#), [39](#), [45](#), [48](#), [49](#), [51](#), [64](#), [65](#)
- Du e Wang(2006)** Qiang Du e Desheng Wang. Recent progress in robust and quality delaunay mesh generation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 195(1-2):8–23. Citado na pág. [xv](#)
- Du et al.(2003a)** Qiang Du, Max D Gunzburger e Lili Ju. Constrained centroidal Voronoi tessellations for surfaces. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(5):1488–1506. Citado na pág. [ix](#), [xvi](#), [17](#), [18](#), [19](#), [65](#)
- Du et al.(2003b)** Qiang Du, Max D Gunzburger e Lili Ju. Voronoi-based finite volume methods, optimal Voronoi meshes, and PDEs on the sphere. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(35):3933–3957. Citado na pág. [xvi](#), [xvii](#), [16](#), [17](#), [18](#), [28](#), [31](#), [36](#), [45](#), [64](#), [65](#), [67](#), [70](#), [72](#)

- Du et al.(2010)** Qiang Du, Max Gunzburger e Lili Ju. Advances in studies and applications of centroidal Voronoi tessellations. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 3(2):119–142. Citado na pág. 18
- Dziuk(1988)** Gerhard Dziuk. Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces. Em *Partial differential equations and calculus of variations*, páginas 142–155. Springer. Citado na pág. xvii
- Dziuk e Elliott(2013)** Gerhard Dziuk e Charles M Elliott. Finite element methods for surface pdes. *Acta Numerica*, 22:289–396. Citado na pág. xv, xvii, 2, 4, 7, 30, 31, 32
- Ewing et al.(2002)** Richard E Ewing, Tao Lin e Yanping Lin. On the accuracy of the finite volume element method based on piecewise linear polynomials. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39(6):1865–1888. Citado na pág. xvii, xviii, 45, 48, 64, 65, 66
- Eymard et al.(2006)** R. Eymard, T. Gallouët e R. Herbin. A cell-centered finite-volume approximation for anisotropic diffusion operators on unstructured meshes in any space dimension. *IMA J. Numer. Anal.*, 26(2):326–353. ISSN 0272-4979. doi: 10.1093/imanum/dri036. URL <https://doi.org/10.1093/imanum/dri036>. Citado na pág. xvi, 47
- Eymard et al.(2000)** Robert Eymard, Thierry Gallouët e Raphaële Herbin. Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, 7:713–1018. Citado na pág. xvi, 21, 47, 67, 68
- Eymard et al.(2001)** Robert Eymard, Thierry Gallouët e Raphaële Herbin. Finite volume approximation of elliptic problems and convergence of an approximate gradient. *Applied Numerical Mathematics*, 37(1-2):31–53. Citado na pág. xvi, xvii, 28, 45
- Faille(1992)** Isabelle Faille. A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular mesh. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 100(2):275–290. Citado na pág. xvii, 21, 28, 67
- Gallouët et al.(2000)** Thierry Gallouët, Raphael Herbin e Marie Hlene Vignal. Error estimates on the approximate finite volume solution of convection diffusion equations with general boundary conditions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37(6):1935–1972. Citado na pg. xvi, xvii, 28, 45, 47, 64, 67
- Grtner e Kamenski(2019)** K. Grtner e L. Kamenski. Why Do We Need Voronoi Cells and Delaunay Meshes? Essential Properties of the Voronoi Finite Volume Method. *Comput. Math. Math. Phys.*, 59(12):1930–1944. ISSN 0965-5425. doi: 10.1134/S096554251912008X. URL <https://doi.org/10.1134/S096554251912008X>. Citado na pg. xv, xvi, 13
- Giraldo(1997)** Francis X Giraldo. Lagrange–Galerkin methods on spherical geodesic grids. *Journal of Computational Physics*, 136(1):197–213. Citado na pg. xv, 10
- Giraldo(2000)** Francis X Giraldo. Lagrange–Galerkin methods on spherical geodesic grids: the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 160(1):336–368. Citado na pg. 10
- Gregory et al.(2008)** Matthew J Gregory, A Jon Kimerling, Denis White e Kevin Sahr. A comparison of intercell metrics on discrete global grid systems. *Computers, Environment and Urban Systems*, 32(3):188–203. Citado na pg. 11, 65
- Hackbusch(1989)** W. Hackbusch. On first and second order box schemes. *Computing*, 41(4):277–296. ISSN 0010-485X. doi: 10.1007/BF02241218. URL <https://doi.org/10.1007/BF02241218>. Citado na pg. 43
- Hackbusch(2017)** Wolfgang Hackbusch. *Elliptic differential equations: theory and numerical treatment*, volume 18. Springer. Citado na pg. 28, 84

- Harris et al.(2011)** Lucas M Harris, Peter H Lauritzen e Rashmi Mittal. A flux-form version of the conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed sphere grid. *Journal of Computational Physics*, 230(4):1215–1237. Citado na pág. 10
- Hebey(1996)** Emmanuel Hebey. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, volume 1635. Springer Science & Business Media. Citado na pág. xviii, 1, 4, 5, 71
- Heikes e Randall(1995a)** Ross Heikes e David A Randall. Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part I: Basic design and results of tests. *Monthly Weather Review*, 123(6):1862–1880. Citado na pág. xv, xvi, 10
- Heikes e Randall(1995b)** Ross Heikes e David A Randall. Numerical integration of the shallow-water equations on a twisted icosahedral grid. Part II. A detailed description of the grid and an analysis of numerical accuracy. *Monthly Weather Review*, 123(6):1881–1887. Citado na pág. ix, xvi, xvii, 17, 19, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 61, 65
- Heikes et al.(2013)** Ross P Heikes, David A Randall e Celal S Konor. Optimized icosahedral grids: Performance of finite-difference operators and multigrid solver. *Monthly Weather Review*, 141(12):4450–4469. Citado na pág. 26
- Heinze e Hense(2002)** Th Heinze e A Hense. The shallow water equations on the sphere and their Lagrange-Galerkin-solution. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 81(1-2):129–135. Citado na pág. xv, 9, 10
- Herbin(1995)** Raphaële Herbin. An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion–convection problem on a triangular mesh. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 11(2):165–173. Citado na pág. xvi, 45
- Hermeline(2000)** F Hermeline. A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes. *Journal of computational Physics*, 160(2):481–499. Citado na pág. xvi
- Herrmann et al.(2018)** Lukas Herrmann, Annika Lang e Christoph Schwab. Numerical analysis of lognormal diffusions on the sphere. *Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations*, 6(1):1–44. Citado na pág. 7
- Hjelle e Dæhlen(2006)** Øyvind Hjelle e Morten Dæhlen. *Triangulations and applications*. Springer Science & Business Media. Citado na pág. xvi, 13, 14
- Ii e Xiao(2010)** Satoshi Ii e Feng Xiao. A global shallow water model using high order multi-moment constrained finite volume method and icosahedral grid. *Journal of Computational physics*, 229(5):1774–1796. Citado na pág. xv
- Jianguo e Shitong(1998)** Huang Jianguo e Xi Shitong. On the finite volume element method for general self-adjoint elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*, 35(5):1762–1774. Citado na pág. xviii, 65
- Ju e Du(2009)** Lili Ju e Qiang Du. A finite volume method on general surfaces and its error estimates. *J. Math. Anal. Appl.*, 352(2):645–668. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/j.jmaa.2008.11.022. URL <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.11.022>. Citado na pág. xvii, xviii, 19, 30, 32, 45, 64
- Ju et al.(2002)** Lili Ju, Qiang Du e Max Gunzburger. Probabilistic methods for centroidal Voronoi tessellations and their parallel implementations. *Parallel Computing*, 28(10):1477–1500. Citado na pág. 18
- Ju et al.(2009)** Lili Ju, Li Tian e Desheng Wang. A posteriori error estimates for finite volume approximations of elliptic equations on general surfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198(5-8):716–726. ISSN 0045-7825. doi: 10.1016/j.cma.2008.10.007. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.10.007>. Citado na pág. xvii, xviii, 30, 32, 66

- Kovács e Power Guerra(2018)** Balázs Kovács e Christian Andreas Power Guerra. Maximum norm stability and error estimates for the evolving surface finite element method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 34(2):518–554. Citado na pág. [xviii](#), [66](#)
- Kreiss et al.(1986)** H-O Kreiss, Thomas A Manteuffel, B Swartz, B Wendroff e AB White. Supra-convergent schemes on irregular grids. *Mathematics of Computation*, 47(176):537–554. Citado na pág. [xvi](#), [65](#)
- Kröner(2017)** Heiko Kröner. Approximative Green’s functions on surfaces and pointwise error estimates for the finite element method. *Comput. Methods Appl. Math.*, 17(1):51–64. ISSN 1609-4840. doi: 10.1515/cmam-2016-0036. URL <https://doi.org/10.1515/cmam-2016-0036>. Citado na pág. [xvii](#), [xviii](#), [52](#), [54](#), [66](#)
- LeVeque et al.(2002)** Randall J LeVeque et al. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press. Citado na pág. [xvi](#)
- Li et al.(2000)** Ronghua Li, Zhongying Chen e Wei Wu. *Generalized difference methods for differential equations: numerical analysis of finite volume methods*. CRC Press. Citado na pág. [xvii](#), [xviii](#), [19](#), [29](#), [32](#), [33](#), [65](#)
- Lin et al.(2013)** Yanping Lin, Jiangguo Liu e Min Yang. Finite volume element methods: an overview on recent developments. *Int. J. Numer. Anal. Model. Ser. B*, 4(1):14–34. Citado na pág. [xvii](#), [16](#), [32](#), [65](#)
- Lv e Li(2010)** Junliang Lv e Yonghai Li. L^2 error estimate of the finite volume element methods on quadrilateral meshes. *Advances in Computational Mathematics*, 33(2):129–148. Citado na pág. [66](#)
- Manteuffel e White(1986)** Thomas A Manteuffel e Andrew B White. The numerical solution of second-order boundary value problems on nonuniform meshes. *Mathematics of Computation*, 47(176):511–535. Citado na pág. [xvi](#), [65](#)
- Mishev(1998)** Ilya D Mishev. Finite volume methods on Voronoi meshes. *Numerical methods for Partial Differential equations*, 14(2):193–212. Citado na pág. [xvi](#), [xvii](#), [19](#), [28](#), [36](#), [45](#)
- Miura e Kimoto(2005)** Hiroaki Miura e Masahide Kimoto. A comparison of grid quality of optimized spherical hexagonal–pentagonal geodesic grids. *Monthly weather review*, 133(10):2817–2833. Citado na pág. [xvi](#), [10](#), [17](#), [18](#), [65](#)
- Morimoto(1998)** Mitsuo Morimoto. *Analytic functionals on the sphere*. American Mathematical Society. Citado na pág. [1](#), [2](#), [4](#)
- Murray(1996)** Ross J Murray. Explicit generation of orthogonal grids for ocean models. *Journal of Computational Physics*, 126(2):251–273. Citado na pág. [10](#)
- Nie et al.(2017)** Cunyun Nie, Shi Shu, Haiyuan Yu e Wenhua Xia. Superconvergence and asymptotic expansions for bilinear finite volume element approximation on non-uniform grids. *J. Comput. Appl. Math.*, 321:323–335. ISSN 0377-0427. doi: 10.1016/j.cam.2016.12.024. URL <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.12.024>. Citado na pág. [66](#)
- Omnes(2011)** Pascal Omnes. On the second-order convergence of a function reconstructed from finite volume approximations of the Laplace equation on Delaunay-Voronoi meshes. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 45(4):627–650. Citado na pág. [xviii](#)
- Pascal(2007)** Frédéric Pascal. On supra-convergence of the finite volume method for the linear advection problem. Em *Paris-Sud Working Group on Modelling and Scientific Computing 2006–2007*, volume 18 of *ESAIM Proc.*, páginas 38–47. EDP Sci., Les Ulis. doi: 10.1051/proc:071804. URL <https://doi.org/10.1051/proc:071804>. Citado na pág. [xvi](#), [28](#), [65](#)

- Peixoto(2013)** Pedro da Silva Peixoto. *Análise de discretizações e interpolações em malhas icosaédricas e aplicações em modelos de transporte semi-lagrangianos*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo. Citado na pág. [xvi](#), [14](#), [16](#), [17](#), [24](#), [65](#), [80](#), [83](#)
- Peixoto e Barros(2013)** Pedro S Peixoto e Saulo RM Barros. Analysis of grid imprinting on geodesic spherical icosahedral grids. *Journal of Computational Physics*, 237:61–78. Citado na pág. [24](#)
- Putman e Lin(2007)** William M Putman e Shian-Jiann Lin. Finite-volume transport on various cubed-sphere grids. *Journal of Computational Physics*, 227(1):55–78. Citado na pág. [9](#), [10](#)
- Randall et al.(1998)** David Randall, Judith Curry, David Battisti, Gregory Flato, Robert Grumbine, Sirpa Hakkinen, Doug Martinson, Ruth Preller, John Walsh e John Weatherly. Status of and outlook for large-scale modeling of atmosphere–ice–ocean interactions in the Arctic. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(2):197–219. Citado na pág. [xv](#), [10](#)
- Rannacher e Scott(1982)** Rolf Rannacher e Ridgway Scott. Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations. *mathematics of computation*, 38(158):437–445. Citado na pág. [xviii](#), [53](#), [54](#), [66](#)
- Renka(1997)** Robert J Renka. Algorithm 773: SSRFPACK: interpolation of scattered data on the surface of a sphere with a surface under tension. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 23(3):435–442. Citado na pág. [xv](#), [13](#)
- Ringler(2003)** Todd Ringler. Comparing truncation error to PDE solution error on spherical Voronoi tessellations. Relatório técnico, Tech report, Dept. Atmospheric Sci., Colorado State Univ. Citado na pág. [xvii](#), [16](#), [17](#), [21](#), [27](#), [65](#)
- Ronchi et al.(1996)** C Ronchi, R Iacono e Pier S Paolucci. The cubed sphere: a new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics*, 124(1):93–114. Citado na pág. [xv](#), [10](#)
- Rudin(2006)** Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-hill education. Citado na pág. [73](#), [74](#)
- Sadourny(1972)** Robert Sadourny. Conservative finite-difference approximations of the primitive equations on quasi-uniform spherical grids. *Monthly Weather Review*, 100(2):136–144. Citado na pág. [10](#)
- Sadourny et al.(1968)** Robert Sadourny, Akio Arakawa e Yale Mintz. Integration of the nondivergent barotropic vorticity equation with an icosahedral-hexagonal grid for the sphere. *Monthly Weather Review*, 96(6):351–356. Citado na pág. [xv](#), [10](#)
- Sahr et al.(2003)** Kevin Sahr, Denis White e A Jon Kimerling. Geodesic discrete global grid systems. *Cartography and Geographic Information Science*, 30(2):121–134. Citado na pág. [10](#)
- Satoh(2013)** Masaki Satoh. *Atmospheric circulation dynamics and general circulation models*. Springer Science & Business Media. Citado na pág. [xvi](#), [10](#), [12](#)
- Schatz e Wahlbin(1995)** A. H. Schatz e L. B. Wahlbin. Interior maximum-norm estimates for finite element methods. II. *Math. Comp.*, 64(211):907–928. ISSN 0025-5718. doi: 10.2307/2153476. URL <https://doi.org/10.2307/2153476>. Citado na pág. [53](#), [54](#), [66](#)
- Schatz(1998)** Alfred Schatz. Pointwise error estimates and asymptotic error expansion inequalities for the finite element method on irregular grids: Part I. Global estimates. *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, 67(223):877–899. Citado na pág. [54](#), [66](#)

- Scott(1976)** Ridgway Scott. Optimal L^∞ estimates for the finite element method on irregular meshes. *Math. Comp.*, 30(136):681–697. ISSN 0025-5718. Citado na pág. [xviii](#), [54](#)
- Scott et al.(2016)** RK Scott, LM Harris e LM Polvani. A test case for the inviscid shallow-water equations on the sphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 142(694):488–495. Citado na pág. [xv](#), [10](#)
- Strikwerda(2004)** John C. Strikwerda. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, second edição. ISBN 0-89871-567-9. doi: 10.1137/1.9780898717938. URL <https://doi.org/10.1137/1.9780898717938>. Citado na pág. [27](#)
- Thuburn(1997)** John Thuburn. A PV-based shallow-water model on a hexagonal–icosahedral grid. *Monthly Weather Review*, 125(9):2328–2347. Citado na pág. [10](#)
- Tomita et al.(2001)** Hirofumi Tomita, Motohiko Tsugawa, Masaki Satoh e Koji Goto. Shallow water model on a modified icosahedral geodesic grid by using spring dynamics. *Journal of Computational Physics*, 174(2):579–613. Citado na pág. [xv](#), [xvi](#), [10](#), [12](#), [16](#)
- Tomita et al.(2002)** Hirofumi Tomita, Masaki Satoh e Koji Goto. An optimization of the icosahedral grid modified by spring dynamics. *Journal of Computational Physics*, 183(1):307–331. Citado na pág. [xvi](#)
- Vanselow(1996)** R Vanselow. Relations between FEM and FVM applied to the Poisson equation. *Computing*, (57):93–104. Citado na pág. [43](#)
- Vreugdenhil(2013)** Cornelis Boudewijn Vreugdenhil. *Numerical methods for shallow-water flow*, volume 13. Springer Science & Business Media. Citado na pág. [xv](#)
- Wang e Lee(2011)** Ning Wang e Jin-Luen Lee. Geometric properties of the icosahedral-hexagonal grid on the two-sphere. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5):2536–2559. Citado na pág. [xvi](#), [10](#)
- Williamson(1968)** David L Williamson. Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid. *Tellus*, 20(4):642–653. Citado na pág. [xv](#), [10](#)
- Williamson(2007)** David L Williamson. The evolution of dynamical cores for global atmospheric models. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 85:241–269. Citado na pág. [9](#), [10](#)
- Williamson et al.(1992)** David L Williamson, John B Drake, James J Hack, Rüdiger Jakob e Paul N Swarztrauber. A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics*, 102(1):211–224. Citado na pág. [xvi](#)
- Wu e Li(2003)** Haijun Wu e Ronghua Li. Error estimates for finite volume element methods for general second-order elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 19(6):693–708. Citado na pág. [xviii](#)
- Xu(2006)** Guoliang Xu. Discrete Laplace–Beltrami operator on sphere and optimal spherical triangulations. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 16(01):75–93. Citado na pág. [24](#)
- Zhang(2014)** Tie Zhang. Superconvergence of finite volume element method for elliptic problems. *Advances in Computational Mathematics*, 40(2):399–413. Citado na pág. [29](#), [34](#), [64](#), [65](#)