

**Simetria radial de soluções positivas  
de sistemas elípticos cooperativos**

Janaina Schoeffel

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada  
Orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

Durante o desenvolvimento deste trabalho  
o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2012

# Simetria radial de soluções positivas de sistemas elípticos cooperativos

Esta dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Janaina Schoeffel em 27/02/2012.

O original encontra-se disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira - IME-USP
- Prof. Dr. Aloisio Jose Freiria Neves - IMECC-UNICAMP

Aos meus pais,  
João e Luisa.



# Agradecimentos

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a elaboração deste trabalho.

Em especial agradeço:

Ao meu orientador, professor Orlando Lopes, pelos valiosos ensinamentos.

A minha família, pelo apoio incondicional.

Ao Renato, pela companhia e por ter me incentivado a estudar no IME-USP.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.



# Resumo

SCHOEFFEL, J. **Simetria radial de soluções positivas de sistemas elípticos cooperativos**. 2012. 51f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

Neste trabalho estudamos a questão de simetria de soluções positivas de equações e sistemas de equações diferenciais parciais. Descrevemos em detalhe a demonstração de dois resultados sobre simetria radial, um para equações em domínios limitados e outro para sistemas de equações no espaço todo. Ambas as demonstrações baseiam-se no método dos *moving planes*. Em seguida aplicamos um dos resultados mencionados acima para a equação de Choquard.

**Palavras-chave:** simetria radial, *moving planes*, equação de Choquard.



# Abstract

SCHOEFFEL, J. **Radial symmetry of positive solutions of cooperative elliptic systems.** 2012. 51f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

In this work we study the question of symmetry for positive solutions of equations and systems of partial differential equations. We describe in detail the proof of two results on radial symmetry, one for equations in bounded domains and the other for systems of equations in the whole space. Both proofs are based on the method of moving planes. We apply one of the results mentioned above for the Choquard's equation.

**Keywords:** radial symmetry, moving planes, Choquard's equation.



# Sumário

1	Introdução	1
2	Equações em Domínios Limitados	3
3	Sistemas de Equações em $\mathbb{R}^n$	17
4	Aplicação: Equação de Choquard	39
	Apêndice: Princípios do Máximo	47
	Referências Bibliográficas	51



# Capítulo 1

## Introdução

Em seus célebres artigos [GNN79] e [GNN81], Gidas, Ni e Nirenberg provaram resultados de simetria radial e monotonicidade de soluções positivas de equações elípticas da forma

$$\Delta u(x) + f(u(x)) = 0,$$

tanto na bola com condição de Dirichlet como no espaço todo. Desde então esse assunto tem atraído a atenção de muitos pesquisadores e o método dos *moving planes* por eles introduzido tem sido bastante usado e generalizado. Em [LN93] foram provados resultados semelhantes para equações dependendo radialmente da variável espacial, isto é, por exemplo, a equação

$$\Delta u(x) + f(r, u(x)) = 0,$$

onde  $r = |x|$ . Já em [Tro81] foram provados resultados de simetria radial para soluções positivas de sistemas elípticos

$$\begin{aligned}\Delta u(x) + f(u(x), v(x)) &= 0 \\ \Delta v(x) + g(u(x), v(x)) &= 0,\end{aligned}$$

sob uma condição de cooperatividade e outra de não degenerência na origem. Posteriormente, Busca e Sirakov [BS00] generalizaram o resultado de Troy (mesmo no caso autônomo) substituindo a condição de não degenerência por hipóteses sobre os sinais de certos menores numa vizinhança da origem.

Um exemplo de um sistema que tem degenerência na origem vem da equação de Choquard

$$-\Delta u(x) - \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} u^2(y) dy \right) u(x) + u(x) = 0. \quad (1.1)$$

De fato, definindo

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} u^2(y) dy$$

e levando em conta que em dimensão três a solução fundamental do laplaciano é  $-1/r$ , obtemos o sistema cooperativo

$$\begin{cases} \Delta u(x) - u(x) + u(x)v(x) = 0 \\ \Delta v(x) + u^2(x) = 0 \\ u(x), v(x) > 0 \\ u(x), v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Em [MZ10] foi provado que toda solução positiva da equação (1.1) é radialmente simétrica e decrescente. O método empregado é uma adaptação dos *moving planes* para equações integrais. Em particular, os autores nem mencionam a equivalência entre a equação (1.1) e o sistema cooperativo (1.2). Entretanto, os resultados de [Tro81] não se aplicam ao sistema (1.2) pois o mesmo é degenerado na origem. A motivação para este trabalho era demonstrar o resultado de simetria radial para o sistema (1.2) como uma consequência direta dos resultados de [BS00]. No entanto, conforme detalhamos no capítulo 4, os resultados de [BS00] não se aplicam diretamente ao sistema (1.2) porque um certo menor tem o sinal "errado". Provando e usando um teorema de decaimento exponencial a priori (isto é, sem saber de antemão que a solução é radialmente simétrica), conseguimos superar essas dificuldades mostrando através de estimativas delicadas que o termo com sinal "certo" domina o termo com sinal "errado".

Como preparação para estudarmos o sistema (1.2) no capítulo 4 fizemos um estudo preliminar da questão de simetria em duas situações: uma equação em domínio limitado e um sistema de equações em  $\mathbb{R}^n$ .

No capítulo 2 estudamos o caso de uma equação em domínio limitado, que foi tratado por Brezis em [Bre99]. No decorrer do capítulo procuramos descrever com detalhe o estudo feito na primeira seção desse artigo. Para isso consultamos também [BN91] e [PR08].

O estudo feito para a elaboração desse capítulo foi muito importante, uma vez que foi o primeiro contato com técnicas utilizadas no estudo da simetria, e cujas ideias aparecem novamente no capítulo 3, porém de forma mais abstrata. Desse modo, o principal objetivo desse capítulo é nos preparar para o capítulo seguinte.

No capítulo 3 fazemos o estudo da simetria para sistemas de equações em  $\mathbb{R}^n$ . Esse estudo foi feito por Busca & Sirakov no artigo [BS00] citado acima. O que faremos aqui, precisamente, é detalhar a demonstração de um caso particular do teorema 1 desse artigo. Tal detalhamento é fundamental para obtermos as estimativas no capítulo 4.

Tanto no capítulo 2 quanto no capítulo 3, o estudo da simetria é feito através do método dos *moving planes*, que por sua vez baseia-se em princípios do máximo. Entretanto, no decorrer desses dois capítulos, nos deparamos com situações em que o princípio do máximo usual não se aplica, donde tivemos que buscar formas alternativas desse resultado. Para isso consultamos os livros [Eva98], [RR04], [PW67] e [GT01]. No apêndice 4 reunimos todos os enunciados de princípios do máximo que utilizamos no trabalho, fazendo uma comparação com os enunciados usuais.

## Capítulo 2

# Equações em Domínios Limitados

O foco deste trabalho é estudar sistemas de equações em  $\mathbb{R}^n$ . Faremos isso no capítulo 3. Entretanto neste capítulo estudaremos o problema abaixo, que se refere a apenas uma equação, a qual é considerada em um domínio limitado. Esse estudo preliminar foi importante para nos familiarizarmos com algumas ideias que aparecem no capítulo 3 de forma mais abstrata, por exemplo, o método dos *moving planes*.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

**Pergunta:** Se o domínio  $\Omega$  tem alguma simetria então a solução  $u$  de (2.1) herda essa simetria? Impondo algumas condições sobre  $\Omega$  e  $f$ , o seguinte teorema responde à pergunta positivamente:

**Teorema 2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, convexo na direção  $x_1$  (ou seja,  $(x_1, y), (x'_1, y) \in \Omega \Rightarrow (x, y) \in \Omega, \forall x_1 < x < x'_1$ ), limitado, simétrico em relação ao hiperplano  $x_1 = 0$  e  $f$  lipschitziana. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  é solução de (2.1), então  $u$  é simétrica com respeito a  $x_1$  e  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0, \forall x = (x_1, y) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$  com  $x_1 > 0$ .*

**Demonstração:**

Denotaremos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  por  $x = (x_1, y)$ , onde  $x_1 \in \mathbb{R}$  e  $y = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Essa notação já foi usada no enunciado do teorema.

Como veremos adiante, a demonstração do teorema consiste essencialmente em provar a seguinte desigualdade:

$$u(x_1, y) < u(x'_1, y), \quad \forall x = (x_1, y) \in \Omega \text{ com } x_1 > 0 \text{ e } \forall x'_1 \text{ com } |x'_1| < x_1. \quad (2.2)$$

**Observação 2.2.** *Para fazer sentido escrever  $u(x'_1, y)$  na desigualdade acima, devemos ter  $(x'_1, y) \in \Omega$ . De fato,*

$\Omega$  simétrico em relação ao hiperplano  $x_1 = 0$  e  $x = (x_1, y) \in \Omega \Rightarrow (-x_1, y) \in \Omega$ .

$\Omega$  convexo na direção  $x_1$  e  $(x_1, y), (-x_1, y) \in \Omega \Rightarrow (x'_1, y) \in \Omega, \forall x'_1 \text{ com } |x'_1| < x_1. \spadesuit$

A demonstração do teorema foi dividida em três passos: Primeiro vamos admitir (2.2) para provar a simetria de  $u$ , depois demonstramos (2.2) e por último fazemos a parte da derivada.

**Passo 1.** Mostrar que  $u$  é simétrica com respeito a  $x_1$ .

Queremos mostrar que,  $\forall x = (x_1, y) \in \Omega, u(x_1, y) = u(-x_1, y)$ .

Seja  $(x_1, y) \in \Omega$ , com  $x_1 > 0$ . Da simetria de  $\Omega, (-x_1, y) \in \Omega$ .

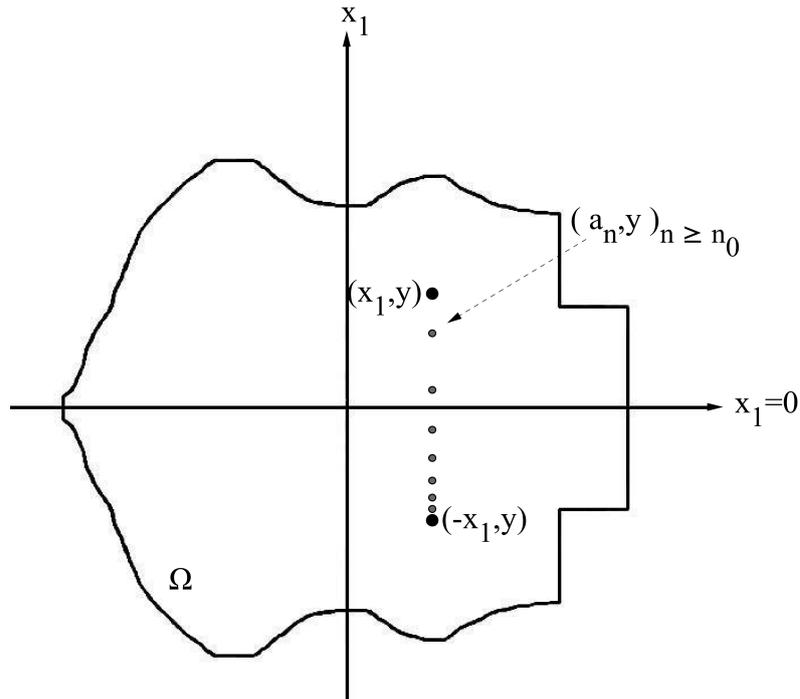


Figura 2.1

Consideremos uma sequência  $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ ,  $a_n \searrow -x_1$ . Como  $x_1 \neq 0$ , existe  $n_0$  suficientemente grande tal que  $|a_n| < x_1$ ,  $\forall n \geq n_0$  (veja a figura abaixo).

Logo, por (2.2),  $u(x_1, y) < u(a_n, y)$ ,  $\forall n \geq n_0$ .

Da continuidade de  $u$ ,  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -x_1 \Rightarrow u(a_n, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(-x_1, y)$ , donde obtemos

$$u(x_1, y) \leq u(-x_1, y). \quad (2.3)$$

Vejamos agora que vale também a desigualdade contrária.

Se  $u$  é solução de (2.1) então  $\tilde{u}$ , dada por  $\tilde{u}(x_1, y) = u(-x_1, y)$ , também é. De fato, seja  $(x_1, y) \in \Omega$ :

- $\Delta \tilde{u}(x_1, y) = \Delta u(-x_1, y) = f(u(-x_1, y)) = f(\tilde{u}(x_1, y))$ .
- $u > 0$  em  $\Omega \Rightarrow \tilde{u} > 0$  em  $\Omega$ .
- $(x_1, y) \in \partial\Omega \Rightarrow (-x_1, y) \in \partial\Omega$ . Portanto,  $\tilde{u}(x_1, y) = u(-x_1, y) = 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

Com isso (2.3) vale para  $\tilde{u}$  no lugar de  $u$ :

$$\tilde{u}(x_1, y) \leq \tilde{u}(-x_1, y).$$

E pela definição de  $\tilde{u}$  isso é o mesmo que

$$u(-x_1, y) \leq u(x_1, y). \quad (2.4)$$

Juntando (2.3) e (2.4) obtemos a igualdade

$$u(x_1, y) = u(-x_1, y),$$

como queríamos.

**Passo 2.** Mostrar a desigualdade (2.2).

Nesse passo usaremos o método dos *moving planes*. Vejamos qual a ideia geométrica desse método:

Consideremos um vetor unitário  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  e definamos, para  $\lambda \in \mathbb{R}$  o hiperplano

$$H_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle \gamma, x \rangle = \lambda\}$$

A afirmação abaixo nos dá uma ideia melhor de que hiperplano é esse:

**Afirmção 2.3.**  $H_\lambda = H_0 + \lambda \cdot \gamma$

**Demonstração da afirmação 2.3:**

( $\supseteq$ ) Dado  $y = x + \lambda\gamma \in H_0 + \lambda \cdot \gamma$ ,

$$\langle \gamma, y \rangle = \langle \gamma, x \rangle + \lambda \langle \gamma, \gamma \rangle = 0 + \lambda = \lambda.$$

Logo,  $y \in H_\lambda$ .

( $\subseteq$ ) Seja  $y \in H_\lambda$ , então  $x = y - \lambda\gamma \in H_0$ , pois

$$\langle \gamma, x \rangle = \langle \gamma, y \rangle - \lambda \langle \gamma, \gamma \rangle = \lambda - \lambda = 0.$$

E como  $y = x + \lambda\gamma$ , temos  $y \in H_0 + \lambda \cdot \gamma$ . ■

Concluimos assim que todos os hiperplanos  $H_\lambda$  têm o mesmo vetor  $\gamma$  como normal, e portanto variando  $\lambda$  variamos apenas a "altura" do hiperplano. Ou seja, os hiperplanos  $H_\lambda$  são paralelos uns aos outros e quanto maior o  $\lambda$ , mais "alto" estará o hiperplano.

Dado um domínio  $\Omega$ , consideremos  $\Sigma_\lambda$  a "tampa" de  $\Omega$  cortada fora por  $H_\lambda$ , isto é,

$$\Sigma_\lambda = \{x \in \Omega; \langle \gamma, x \rangle > \lambda\}.$$

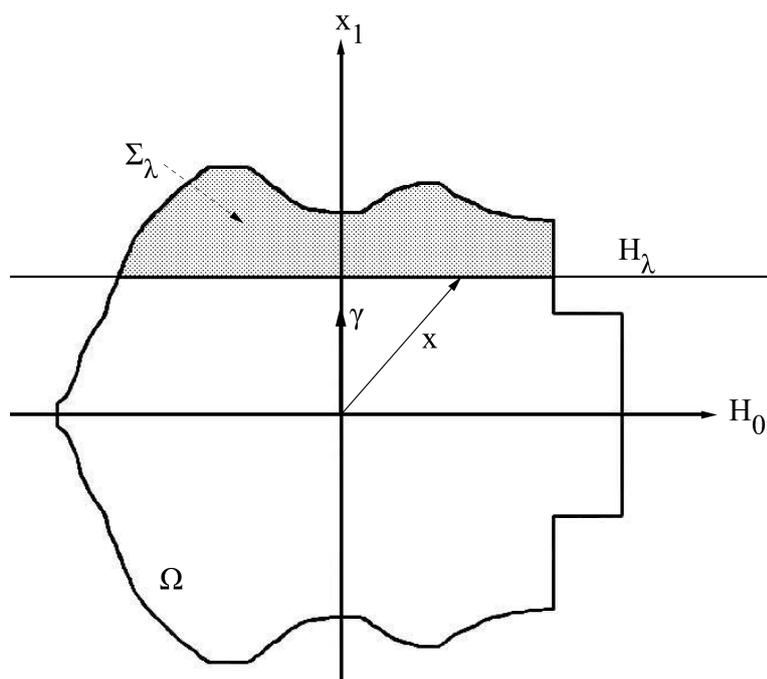


Figura 2.2

O método dos *moving planes* consiste em mover o plano  $H_\lambda$  sobre o domínio  $\Omega$  (onde mover significa variar  $\lambda$ ), de modo que o refletido de  $\Sigma_\lambda$  por  $H_\lambda$  permaneça contido em  $\Omega$ . Essa exigência fornece um  $\lambda_1$  mínimo e um  $\lambda_2$  máximo. Assim, varia-se  $\lambda$  dentro do intervalo  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . Para  $\lambda$ 's nesse intervalo, faz-se uma comparação da solução  $u$  com sua refletida por  $H_\lambda$  (que denotaremos por  $u_\lambda$  e definiremos mais adiante). Para obter tal comparação (relações do tipo  $u \leq u_\lambda$  ou  $u_\lambda \leq u$ ) utilizam-se princípios do máximo.

Agora que sabemos como o método funciona, vamos aplicá-lo ao nosso caso. Tomamos  $\gamma = e_1 \doteq (1, 0, \dots, 0)$ . Nesse caso temos

$$H_\lambda = \{x = (x_1, y) \in \Omega; x_1 = \lambda\}$$

e

$$\Sigma_\lambda = \{x = (x_1, y) \in \Omega; x_1 > \lambda\}.$$

Denotemos  $a = \sup \{x_1; (x_1, y) \in \Omega\}$ . Temos que  $a > 0$ , visto que  $\Omega$  é aberto e simétrico em relação a  $x_1 = 0$ .

No nosso caso teremos  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = a$ . De fato, para  $\lambda > a$ ,  $H_\lambda$  não intersecta  $\Omega$ , e para  $\lambda < 0$ , a simetria de  $\Omega$  garante que o refletido de  $\Sigma_\lambda$  por  $H_\lambda$  não está contido em  $\Omega$ . Já para  $\lambda \in (0, a)$ , o refletido de  $\Sigma_\lambda$  por  $H_\lambda$  está contido em  $\Omega$ , como veremos na observação abaixo:

**Observação 2.4.** (Acompanhe na figura 2.3) Dado  $0 < \lambda < a$  e  $x = (x_1, y) \in \Sigma_\lambda$ , denotaremos  $x^\lambda \doteq (2\lambda - x_1, y)$ . Observemos que  $x^\lambda$  é o refletido de  $x$  pelo plano  $H_\lambda$ . Sendo assim, se denotarmos

$$\tilde{\Sigma}_\lambda \doteq \text{o refletido de } \Sigma_\lambda \text{ por } H_\lambda,$$

temos com essa notação que

$$\tilde{\Sigma}_\lambda = \{x^\lambda; x \in \Sigma_\lambda\}.$$

Então, para garantir  $\tilde{\Sigma}_\lambda \subset \Omega$ ,  $\forall \lambda \in (0, a)$ , basta ver que

$$x \in \Sigma_\lambda \Rightarrow x^\lambda \in \Omega, \forall \lambda \in (0, a).$$

De fato, seja  $x = (x_1, y) \in \Sigma_\lambda$  pela observação 2.2 basta ver que  $|2\lambda - x_1| < x_1$ , mas isso decorre imediatamente das duas linhas abaixo:

$$\lambda > 0 \Rightarrow 2\lambda - x_1 > -x_1$$

$$x \in \Sigma_\lambda \Rightarrow \lambda < x_1 \Rightarrow 2\lambda - x_1 < 2x_1 - x_1 = x_1$$



Agora podemos definir,  $\forall \lambda \in (0, a)$ :

$$\begin{array}{ccc} u_\lambda : \overline{\Sigma_\lambda} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u_\lambda(x) = u(x^\lambda) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \omega_\lambda : \overline{\tilde{\Sigma}_\lambda} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \omega_\lambda(x) = u_\lambda(x) - u(x). \end{array}$$

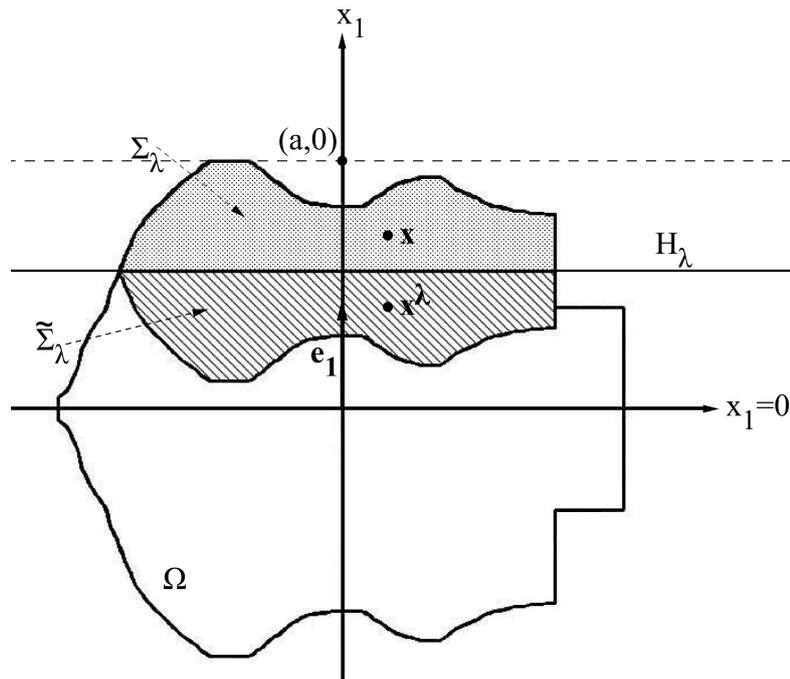


Figura 2.3

Ao invés de mostrar (2.2) diretamente, trabalharemos com  $\omega_\lambda$  e usaremos a seguinte equivalência, demonstrada a seguir:

$$(2.2) \Leftrightarrow \omega_\lambda > 0, \text{ em } \Sigma_\lambda, \forall \lambda \in (0, a). \quad (2.5)$$

Notemos que  $\omega_\lambda > 0 \Leftrightarrow u_\lambda > u$ , e essa segunda desigualdade é exatamente o que o método dos *moving planes* se propõe a provar. Assim, a equivalência acima transfere o problema de demonstrar (2.2) para a aplicação do *moving planes*.

**Demonstração de (2.5):** Lembremos que (2.2) é dada por

$$u(x_1, y) < u(x'_1, y), \quad \forall x = (x_1, y) \in \Omega \text{ com } x_1 > 0 \text{ e } \forall x'_1 \text{ com } |x'_1| < x_1.$$

( $\Rightarrow$ ) Fixemos  $\lambda \in (0, a)$  e  $x = (x_1, y) \in \Sigma_\lambda$ . Vimos na observação 2.4 que  $|2\lambda - x_1| < x_1$ . Daí, por (2.2),  $u(x) < u(x^\lambda) = u_\lambda(x)$ . Donde  $\omega_\lambda > 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $x = (x_1, y) \in \Omega$  com  $x_1 > 0$ . Existe  $\lambda_0 \in (0, a)$  tal que  $x_1 = \lambda_0$ , e portanto  $x \in \Sigma_\lambda$ ,  $\forall 0 < \lambda < \lambda_0$ . Daí, por hipótese,

$$u(x) < u_\lambda(x) = u(x^\lambda), \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_0). \quad (2.6)$$

Seja  $x'_1$  com  $|x'_1| < x_1 = \lambda_0$ . Tomando  $\lambda = \frac{x'_1 + x_1}{2}$  temos

$$\lambda < x_1 = \lambda_0 \text{ e } x'_1 = 2\lambda - x_1.$$

Logo (2.6) implica  $u(x'_1, y) > u(x_1, y)$ . ■

Sendo assim, para concluir o passo 2 basta garantir que  $\omega_\lambda > 0$ ,  $\forall x \in \Sigma_\lambda$ ,  $\forall \lambda \in (0, a)$ . Faremos isso aplicando princípios do máximo a  $\omega_\lambda$ .

Primeiramente, dado  $x \in \Sigma_\lambda$ , calculemos  $\Delta\omega_\lambda(x)$ :

$$\Delta\omega_\lambda(x) = \Delta u(x^\lambda) - \Delta u(x) = -f(u(x^\lambda)) + f(u(x)) = -f(u_\lambda(x)) + f(u(x)).$$

Definamos, para cada  $x \in \Sigma_\lambda$ ,

$$c_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{f(u(x)) - f(u_\lambda(x))}{\omega_\lambda(x)}, & \text{se } \omega_\lambda(x) \neq 0 \\ 0, & \text{se } \omega_\lambda(x) = 0 \end{cases}$$

Então,  $\Delta\omega_\lambda(x) = c_\lambda(x)\omega_\lambda(x)$ .

Além disso, notemos que  $\partial\Sigma_\lambda \subset H_\lambda \cup \partial\Omega$ . Daí,  $x \in \partial\Sigma_\lambda \Rightarrow x \in H_\lambda$  ou  $x \in \partial\Omega$ .

$$x \in H_\lambda \Rightarrow x = x^\lambda \Rightarrow \omega_\lambda(x) = 0$$

e

$$x \in \partial\Omega \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow \omega_\lambda(x) = u(x^\lambda) \geq 0,$$

pois, por hipótese,  $u$  é não-negativa. Portanto  $\omega_\lambda$  satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\omega_\lambda + c_\lambda\omega_\lambda = 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ \omega_\lambda \geq 0 & \text{sobre } \partial\Sigma_\lambda \end{cases} \quad (2.7)$$

Queremos garantir primeiramente  $\omega_\lambda \geq 0$  em  $\Sigma_\lambda$ . Para isso gostaríamos de usar um princípio do máximo. Entretanto, não temos nenhuma informação sobre o sinal de  $c_\lambda$ , logo não podemos aplicar o princípio do máximo usual (teorema 1 do apêndice) à (2.7). Por conta disso teremos que usar uma nova versão do princípio do máximo, a qual chamaremos de "Princípio do Máximo para Domínios Estreitos". Esse resultado está enunciado e demonstrado no apêndice (teorema 3), mas também o colocaremos aqui, em forma de lema:

**Lema 2.5** (Princípio do Máximo para Domínios Estreitos). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto, limitado e conexo. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \leq 0 & \text{em } \Omega \\ u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com  $\|c^-\|_{\frac{n}{2}} < S_n$ , onde  $c^- = \max\{-c, 0\}$ ,  $\|\cdot\|_{\frac{n}{2}}$  é a norma em  $L^{\frac{n}{2}}$  e  $S_n > 0$  é a melhor constante de Sobolev em  $\mathbb{R}^n$ , então  $u \leq 0$  em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Teorema 3 do apêndice. ■

**Observação 2.6.** *Não precisamos nos preocupar aqui com a expressão de  $S_n$ , ela será usada apenas na demonstração do lema. O importante é notar que*

$$\begin{aligned} \|c^-\|_{\frac{n}{2}} &= \left( \int_{\Omega} |c^-|^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} \|c^-\|_{\infty}^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \\ &= \|c^-\|_{\infty} \cdot \left( \int_{\Omega} 1 \right)^{\frac{2}{n}} \\ &= \|c^-\|_{\infty} \cdot |\Omega|^{\frac{2}{n}}, \end{aligned}$$

onde  $|\Omega| \doteq \int_{\Omega} 1$ . Logo, se  $\|c^-\|_{\infty}$  for limitada e  $\Omega$  for suficientemente pequeno para garantir

$$\|c^-\|_{\infty} \cdot |\Omega|^{\frac{2}{n}} < S_n,$$

o teorema pode ser aplicado. É daí que vem o nome do teorema: ele funciona para domínios que são suficientemente "estreitos". ♠

Como  $f$  é lipschitziana,  $\exists L$  tal que,  $\forall x, y \in [-\|u\|_{\infty}, \|u\|_{\infty}]$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ . Em particular,

$$\|c_{\lambda}\|_{\infty} \leq L. \quad (2.8)$$

Ou seja,  $c_{\lambda}$  é limitada,  $\forall \lambda$ , donde a observação acima e o lema 2.5 garantem que  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall \lambda > 0$  com  $0 < a - \lambda < \delta$ ,

$$\omega_{\lambda} \geq 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda}. \quad (2.9)$$

Vejamos agora que (2.9) vale  $\forall \lambda \in (0, a)$  e não apenas para  $\lambda$ 's próximos de  $a$ . Para isso consideremos o conjunto

$$\Lambda = \{\lambda \in (0, a); \omega_{\lambda} \geq 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda}\}.$$

Queremos mostrar que  $\Lambda = (0, a)$ .

- $\Lambda \neq \emptyset$ , pois  $(a - \delta, a) \subset \Lambda$ .
- $\Lambda$  é fechado em  $(0, a)$ .

De fato, seja  $(\lambda_n)_n \subset \Lambda$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ . Vamos mostrar que  $\lambda \in \Lambda$ .

Temos  $\omega_{\lambda_n} \geq 0$  em  $\Sigma_{\lambda_n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Seja  $x = (x_1, y) \in \Sigma_{\lambda}$ .

$$x_1 > \lambda \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } x_1 > \lambda + \epsilon.$$

Da convergência  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ , para esse  $\epsilon$ ,  $\exists n_0$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|\lambda_n - \lambda| < \epsilon$ . Daí concluímos que

$$\begin{aligned} x_1 > \lambda + \epsilon > \lambda_n &\Rightarrow x \in \Sigma_{\lambda_n} \\ &\Rightarrow \omega_{\lambda_n}(x) = u_{\lambda_n}(x) - u(x) \geq 0, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ ,  $x^{\lambda_n} \rightarrow x^{\lambda}$  e como  $u$  é contínua,  $u(x^{\lambda_n}) \rightarrow u(x^{\lambda})$ . Portanto

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda_n}(x) \rightarrow \omega_{\lambda}(x) &\Rightarrow \omega_{\lambda}(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow \lambda \in \Lambda \\ &\Rightarrow \Lambda \text{ é fechado.} \end{aligned}$$

- $\Lambda$  é aberto em  $(0, a)$ .

A demonstração desse item é mais complexa que a dos itens anteriores. Precisaremos usar aqui mais um princípio do máximo.

Consideremos o conjunto

$$\Lambda' = \{\lambda \in (0, a); \omega_\lambda > 0 \text{ em } \Sigma_\lambda\}.$$

**Afirmção 2.7.**

$$\Lambda = \Lambda'$$

**Demonstração:** ( $\supseteq$ ) Trivial, pois  $\omega_\lambda > 0 \Rightarrow \omega_\lambda \geq 0$ .

( $\subseteq$ ) Dado  $\lambda \in \Lambda$ , por (2.7) vale

$$\begin{cases} \Delta\omega_\lambda - c_\lambda\omega_\lambda = 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ \omega_\lambda \geq 0 & \text{sobre } \overline{\Sigma_\lambda}. \end{cases} \quad (2.10)$$

A ideia agora é aplicar um princípio do máximo ao problema acima, mas novamente a versão usual não nos serve, pois não temos hipóteses sobre o sinal de  $c_\lambda$ . Usaremos aqui a seguinte versão do princípio do máximo:

**Teorema 2.8.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo,  $n \geq 2$ . Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz*

$$\Delta u + cu \leq 0 \text{ em } \Omega,$$

*com  $c$  limitada em  $\overline{\Omega}$ . Suponhamos ainda que  $u$  não é constante. Então, independente do sinal de  $c$ ,  $u$  não pode ser zero em um ponto de mínimo interior.*

Esse teorema foi extraído do livro de Gilbarg & Trudinger [GT01] e está também enunciado no apêndice (teorema 5).

Conferindo as hipóteses: Fixado  $\lambda$  temos

- $\Delta\omega_\lambda - c_\lambda\omega_\lambda = 0$  em  $\Sigma_\lambda$  e valem as hipóteses sobre o domínio  $\Sigma_\lambda$  e sobre a regularidade de  $\omega_\lambda$ .
- $c_\lambda$  é limitada em  $\overline{\Sigma_\lambda}$ , conforme vimos em (2.8).
- $\omega_\lambda$  não é constante:

De fato, se  $\omega_\lambda$  fosse constante seria identicamente nula (pois é contínua e se anula no pedaço da fronteira contido em  $H_\lambda$ ), mas exibiremos  $x \in \partial\Sigma_\lambda \cap \partial\Omega$  tal que  $\omega_\lambda(x) \neq 0$ . Seja  $(x_1, y_0) \in \Sigma_\lambda$  um ponto interior. Consideremos

$$a' = \sup\{x; (x, y_0) \in \Sigma_\lambda\}.$$

Então  $x = (a', y_0) \in \partial\Sigma_\lambda \cap \partial\Omega \Rightarrow u(x) = 0$ . Além disso, a simetria de  $\Omega$  implica  $(-a', y_0) \in \partial\Omega$  e a convexidade de  $\Omega$  implica  $x^\lambda = (2\lambda - a', y_0) \in \Omega$ .

Como por (2.1)  $u > 0$  em  $\Omega$ , temos  $u(x^\lambda) > 0$ , e portanto

$$\omega_\lambda(x) = u_\lambda(x) - u(x) = u(x^\lambda) - 0 > 0.$$

Assim,  $\omega_\lambda$  não é constante.

Então o teorema 2.8 se aplica ao problema acima, e concluímos que  $\omega_\lambda$  não pode ser zero em um ponto de mínimo interior. Mas a condição  $\omega_\lambda \geq 0$  sobre  $\overline{\Sigma_\lambda}$  implica que pontos de  $\Sigma_\lambda$  onde  $\omega_\lambda$  se anula são pontos de mínimo interior. Logo, concluímos do teorema 2.8 que  $\omega_\lambda > 0$  em  $\Sigma_\lambda$ . Ou seja,  $\lambda \in \Lambda'$ . ■

Vejamos agora que  $\Lambda$  é aberto.

Dado  $\lambda \in \Lambda$ , mostremos que  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \subset \Lambda$ , ou seja,  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $\forall \mu \in (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ ,  $\omega_\mu \geq 0$  em  $\Sigma_\mu$ .

Sejam  $\epsilon' > 0$  tal que  $(\lambda - \epsilon', \lambda + \epsilon') \subset (0, a)$  e  $\delta$  suficientemente pequeno (para valer  $L \cdot \delta^{\frac{2}{n}} < S_n$ , onde  $S_n$  é dado no lema 2.5 e  $L$  na equação (2.8)). Tome  $K \subset \Sigma_\lambda$  compacto, com fronteira suave, tal que  $|\Sigma_\lambda \setminus K| \leq \frac{\delta}{2}$ .

Escolhamos  $\epsilon'' < \epsilon'$  tal que,  $\forall \mu \in (\lambda - \epsilon'', \lambda + \epsilon'')$ ,  $|\Sigma_\mu \setminus K| < \delta$ .

Esse  $\epsilon''$  existe porque os  $\Sigma_\lambda$ 's são todos limitados (uma vez que são subconjuntos de  $\Omega$ ).

$$\lambda \in \Lambda \stackrel{Af.2.7}{\Rightarrow} \lambda \in \Lambda' \Rightarrow \omega_\lambda > 0 \text{ em } \Sigma_\lambda \Rightarrow \omega_\lambda > 0 \text{ em } K.$$

Pela continuidade de  $u$ , garantimos que

$$\exists \epsilon < \epsilon'' \text{ tal que } \omega_\mu \geq 0 \text{ em } K, \forall \mu \in (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon). \quad (2.11)$$

Para concluir, basta ver que  $\omega_\mu \geq 0$  em  $\Sigma_\mu \setminus K$ ,  $\forall \mu \in (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ .

Notemos que  $\forall \mu \in (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ ,  $\partial(\Sigma_\mu \setminus K) \subset K \cup \partial\Sigma_\mu$ . Donde, por (2.11) e pela segunda linha de (2.7),  $\omega_\mu \geq 0$  sobre  $\partial(\Sigma_\mu \setminus K)$ . Além disso, a primeira linha de (2.7) garante em particular que  $\Delta\omega_\mu - c_\mu\omega_\mu = 0$  em  $\Sigma_\mu \setminus K$ . Portanto temos

$$\begin{cases} \Delta\omega_\mu - c_\mu\omega_\mu = 0 & \text{em } \Sigma_\mu \setminus K \\ \omega_\mu \geq 0 & \text{sobre } \partial(\Sigma_\mu \setminus K), \end{cases} \quad (2.12)$$

com  $\|c_\mu\|_\infty \leq L$  e  $|\Sigma_\mu \setminus K| < \delta$ ,  $\forall \mu \in (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ .

Assim, como  $\|c_\mu\|_\infty \cdot |\Sigma_\mu \setminus K|^{\frac{2}{n}} \leq L \cdot \delta^{\frac{2}{n}} < S_n$ , o lema 2.5 junto com a observação que o segue garantem que

$$\omega_\mu \geq 0 \text{ em } \Sigma_\mu \setminus K, \forall \mu \in (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon). \quad (2.13)$$

Juntando (2.11) e (2.13) concluimos que

$$\omega_\mu \geq 0 \text{ em } \Sigma_\mu, \forall \mu \in (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon),$$

como queríamos.

Acabamos de mostrar que  $\Lambda \subset (0, a)$  é não-vazio, fechado e aberto. Portanto, sendo  $(0, a)$  conexo,  $\Lambda = (0, a)$ , donde (2.9) vale  $\forall \lambda \in (0, a)$ . Daí, pela afirmação 2.7,

$$\Lambda' = (0, a),$$

ou seja,

$$\omega_\lambda > 0 \text{ em } \Sigma_\lambda, \forall \lambda \in (0, a).$$

Que é exatamente a expressão do lado esquerdo de (2.5). Concluimos assim o passo 2.

**Passo 3.** Mostrar que  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ ,  $\forall x = (x_1, y) \in \Omega$  com  $x_1 > 0$ .

No passo 2 vimos que  $\omega_\lambda$  satisfaz,  $\forall \lambda \in (0, a)$ ,

$$\begin{cases} \Delta\omega_\lambda - c_\lambda\omega_\lambda = 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ \omega_\lambda > 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ \omega_\lambda = 0 & \text{sobre } H_\lambda. \end{cases} \quad (2.14)$$

Dado  $x_0 = (x_1, y) \in \Omega$  com  $x_1 > 0$ ,  $\exists \lambda \in (0, a)$  tal que  $x_0 \in H_\lambda$  ( $\lambda = x_1$ ).

Esse contexto sugere que usemos um resultado como o teorema 7 do apêndice. Mas esse teorema exige condições sobre o sinal de  $c_\lambda$  que não temos aqui. Felizmente, encontramos no livro de Gilbarg & Trudinger [GT01] um resultado análogo, mas sem a hipótese sobre  $c_\lambda$ :

**Teorema 2.9.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo,  $n \geq 2$ , e  $x_0 \in \partial\Omega$ . Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz*

$$\Delta u + cu \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

*com  $c$  limitada em  $\bar{\Omega}$ . Suponhamos ainda que existe uma bola  $B \subset \Omega$  com  $x_0 \in \partial B$ , que  $u(x_0) > u(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ , e que  $u(x_0) = 0$ . Então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \doteq \langle \nabla u(x_0), \nu(x_0) \rangle > 0,$$

*onde  $\nu$  é a normal exterior à  $\partial\Omega$  no ponto  $x_0$ , desde que a derivada exista.*

Esse teorema também está enunciado no apêndice (teorema 8).

Aplicaremos o teorema 2.9 para o  $x_0$  dado acima, com  $\Omega = \Sigma_\lambda$  e  $u = -\omega_\lambda$ .

Conferindo as hipóteses:

- $\Sigma_\lambda$  é aberto e conexo;
- $x_0 \in H_\lambda \subset \partial\Sigma_\lambda$ ;
- $-\omega_\lambda \in C^2(\Sigma_\lambda) \cap C(\bar{\Sigma}_\lambda)$  e  $\Delta(-\omega_\lambda) - c_\lambda(-\omega_\lambda) = 0$  em  $\Sigma_\lambda$ , por (2.14);
- $c_\lambda$  é limitada, por (2.8);
- $x_0 \in \Omega$  e  $\Omega$  aberto implicam que  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $B(x_0, \epsilon) \subset \Omega$ . Portanto podemos tomar uma bola menor  $B \subset B(x_0, \epsilon)$  tal que  $B \subset \Sigma_\lambda$  e  $x_0 \in \partial B$ .
- $x_0 \in H_\lambda \Rightarrow -\omega_\lambda(x_0) = 0 \Rightarrow -\omega_\lambda(x_0) > -\omega_\lambda(x)$ ,  $\forall x \in \Sigma_\lambda$ , pela segunda linha de (2.14);
- $x_0$  ponto interior de  $\Omega$  implica que  $-\omega_\lambda$  é  $C^2$  em  $x_0$ , logo a derivada normal existe.

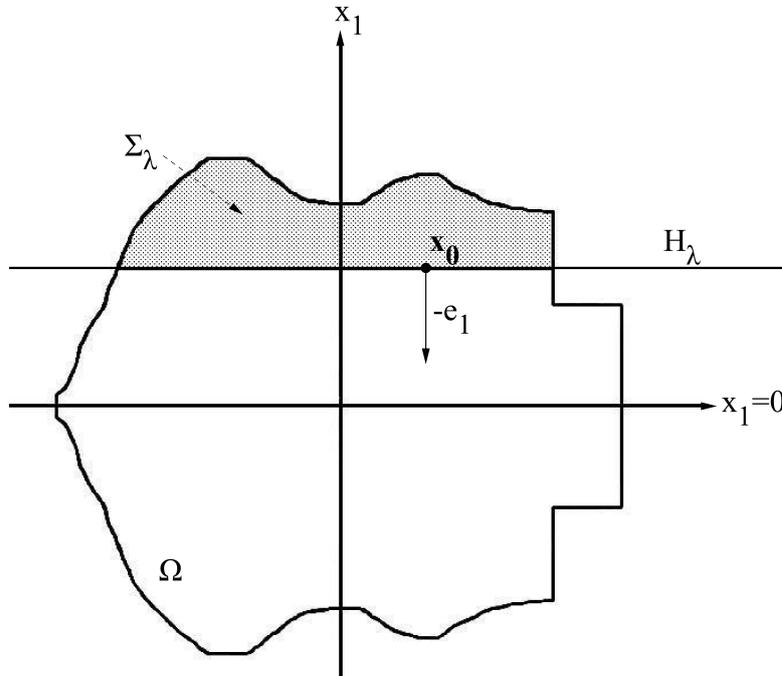


Figura 2.4

Como  $-e_1$  é a normal exterior à  $\partial\Sigma_\lambda$  no ponto  $x_0$ , o teorema 2.9 nos dá

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(-\omega_\lambda)}{\partial(-e_1)}(x_0) &\doteq \langle \nabla(-\omega_\lambda)(x_0), -e_1(x_0) \rangle \\
&= \frac{\partial\omega_\lambda}{\partial x_1}(x_0) > 0.
\end{aligned} \tag{\Delta}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\omega_\lambda}{\partial x_1}(x_0) &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(2\lambda - x_1, y) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, y) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0^\lambda) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) \\
&= -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0),
\end{aligned} \tag{\Delta\Delta}$$

pois  $x_0 \in H_\lambda \Rightarrow x_0 = x_0^\lambda$ . Portanto, juntando  $(\Delta)$  e  $(\Delta\Delta)$  temos

$$-2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) > 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) < 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Concluimos assim a demonstração do teorema 2.1.

Como o laplaciano é invariante por rotação e a função  $f$  do problema (2.1) não depende de  $x$ , o raciocínio feito para a direção  $e_1$  na demonstração do teorema 2.1 pode ser feito para qualquer outra direção  $\gamma$ . Inclusive definimos  $H_\lambda$  e  $\Sigma_\lambda$  para  $\gamma$  qualquer. O enunciado do caso geral ficaria assim:

**Teorema 2.10.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, convexo na direção  $\gamma$ , limitado, simétrico em relação ao hiperplano  $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle \gamma, x \rangle = 0\}$  e  $f$  lipschitziana. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  é solução de (2.1), então  $u$  é simétrica na direção  $\gamma$  e  $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0, \forall x \in \Sigma_0 = \{x \in \Omega; \langle \gamma, x \rangle > 0\} \subset \Omega$ .*

**Observação 2.11.** *Notemos que, quando varia-se  $\gamma$  por todas as direções possíveis, o hiperplano  $H_0$  citado no teorema 2.10 percorre todos os hiperplanos que passam pela origem.*

Desse teorema mais geral, obtemos o seguinte corolário, que trata de simetria radial:

**Corolário 2.12.** *Seja  $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ . Assuma que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

onde  $f \in C^1$ . Então  $u$  é radialmente simétrica e a derivada radial  $u'(r)$  é negativa para  $0 < r < 1$ .

**Afirmção 2.13.**

$$f \in C^1 \Rightarrow f \text{ restrita a } [-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty] \text{ é lipschitziana.}$$

**Demonstração da afirmação 2.13:**

A hipótese  $f \in C^1$  implica que  $f'$  é contínua.

Portanto, a restrição de  $f'$  ao compacto  $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$  é limitada, digamos

$$|f'(z)| \leq M, \quad \forall z \in [-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty].$$

Pelo teorema do valor médio, dados  $x, y \in [-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$ ,  $x < y$ ,  $\exists z \in (x, y)$  tal que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)| |x - y| \leq M |x - y|.$$

Ou seja,  $f$  restrita a  $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$  é lipschitziana. ■

**Demonstração do corolário 2.12:** A ideia aqui é aplicar o teorema 2.10. Verifiquemos as hipóteses:

- O domínio  $B(0, 1)$  é aberto, limitado, convexo em todas as direções e simétrico em relação a qualquer hiperplano passando pela origem.
- A hipótese " $f$  é lipschitziana" foi usada na demonstração do teorema 2.1 para garantir (2.8), e para isso necessitamos apenas de " $f$  restrita a  $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$  é lipschitziana". Portanto, pela observação acima, o teorema pode ser aplicado para a  $f$  do corolário.

Sendo assim, o teorema 2.10 garante que,  $\forall$  direção  $\gamma$ ,  $u$  é simétrica na direção  $\gamma$ .

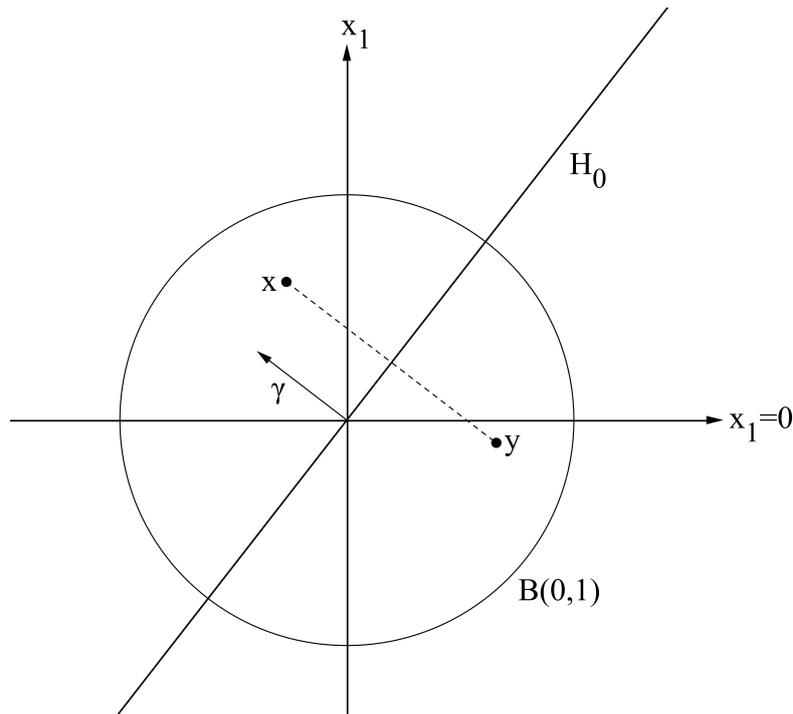


Figura 2.5

Geometricamente isso significa que, dados  $x$  e  $y$  como na figura acima, tem-se  $u(x) = u(y)$ , lembrando que o desenho vale para uma direção  $\gamma$  qualquer.

Consideremos a esfera  $S(0, r)$ , com  $0 < r < 1$  (acompanhe o procedimento na figura abaixo), e tome dois pontos, digamos  $x$  e  $y$ , sobre essa esfera.

Consideremos ainda o segmento ligando  $x$  e  $y$  e o seu ponto médio  $z = \frac{x+y}{2}$ . Tome o hiperplano perpendicular a esse segmento e passando por  $z$ . Chamaremos esse hiperplano de  $h$ . Temos que  $h$  passa pela origem e que  $x$  e  $y$  são pontos simétricos em relação a  $h$ . Logo, pelo teorema 2.10,  $u(x) = u(y)$ .

Como  $x$  e  $y$  foram escolhidos arbitrariamente sobre  $S(0, R)$ , concluímos que  $u(x) = u(r)$ , onde  $r = |x|$ , ou seja,  $u$  é radialmente simétrica.

Vejam agora o que acontece com a derivada. O teorema 2.10 garante,  $\forall$  direção  $\gamma$ , que

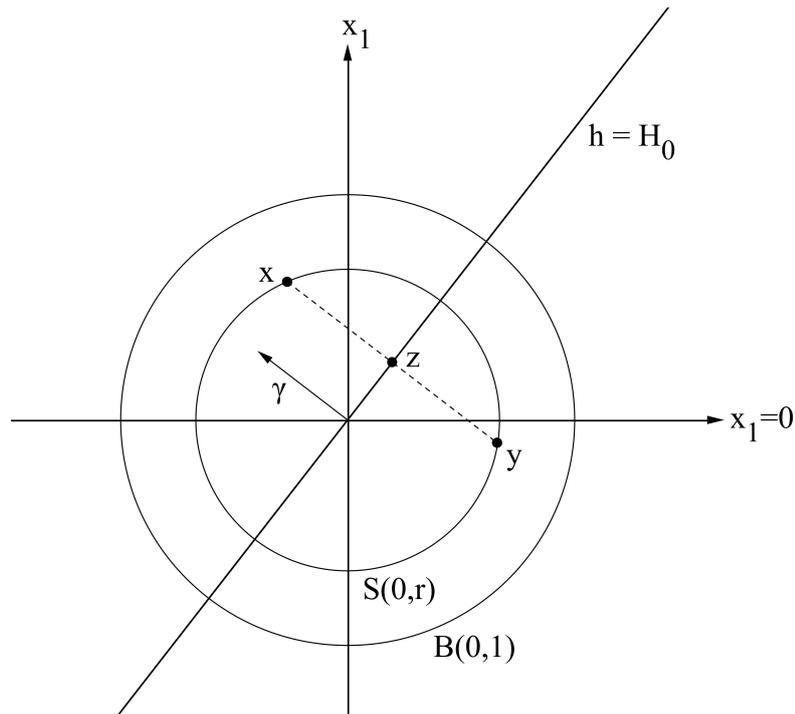


Figura 2.6

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0, \quad \forall x \in \Sigma_0 = \{x \in \Omega; \langle \gamma, x \rangle > 0\} \subset \Omega.$$

Nós precisaremos do resultado apenas em uma direção, tomemos digamos  $\gamma = e_1$ . Seja  $0 < r < 1$ . Tomando  $x = (x_1, y)$  com  $|x| = r$  e  $x_1 > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial e_1}(x) &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \\ &= \frac{\partial u}{\partial r}(r) \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) \\ &= u'(r) \frac{x_1}{r}. \end{aligned}$$

E isso implica

$$u'(r) = \frac{r}{x_1} \frac{\partial u}{\partial e_1}(x) < 0,$$

como queríamos. ■



## Capítulo 3

# Sistemas de Equações em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo trabalharemos com sistemas de equações em  $\mathbb{R}^n$ . Mais precisamente com o seguinte sistema de equações diferenciais parciais não-lineares:

$$\begin{cases} \Delta u + g(u, v) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ \Delta v + f(u, v) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u, v > 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 & \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $n \geq 2$ ,  $g, f \in C^1([0, +\infty) \times [0, +\infty), \mathbb{R})$  e valem as seguintes hipóteses sobre  $g$  e  $f$ :

$$(H1) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \geq 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \geq 0, \forall (u, v) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty);$$

$$(H2) \quad \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) > 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) > 0, \forall (u, v) \in O(\epsilon),$$

onde  $O(\epsilon) = \{(u, v) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty); u + v < \epsilon\}$ .

$$(H3) \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \leq 0 \text{ e } \det(A[(u_1, v_1), \dots, (u_4, v_4)]) \geq 0, \forall (u, v), (u_i, v_i) \in O(\epsilon), 1 \leq i \leq 4,$$

$$\text{onde } A[(u_1, v_1), \dots, (u_4, v_4)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u_1, v_1) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_2, v_2) \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_3, v_3) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_4, v_4) \end{pmatrix}.$$

**Observação 3.1.**  $(H1) + (H3) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \leq 0$  em  $O(\epsilon)$ . ♠

Nesse contexto, temos o seguinte teorema:

**Teorema 3.2.** *Suponhamos que  $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}^n) \times C^2(\mathbb{R}^n)$  é uma solução de (3.1), com  $g$  e  $f$  satisfazendo (H1), (H2) e (H3). Então existe um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $u$  e  $v$  são radialmente simétricas com respeito à origem  $x_0$ , isto é,*

$$u(x) = u(r) \quad e \quad v(x) = v(r), \quad \text{onde } r = |x - x_0|.$$

Além disso,

$$u'(r) < 0 \quad e \quad v'(r) < 0, \quad \forall r = |x - x_0| > 0.$$

Esse resultado é um caso particular do teorema 1 do artigo de Busca & Sirakov [BS00]. Trabalhamos com esse caso particular porque é exatamente ele que será utilizado na aplicação feita no próximo capítulo.

**Observação 3.3.** *Consideramos aqui apenas o caso  $n \geq 2$ . No apêndice de [Iko09], Ikoma demonstra o teorema acima para o caso  $n = 1$ .*

O restante desse capítulo será dedicado à demonstração do teorema 3.2.

**Demonstração:**

Para provar a simetria de  $u$  e  $v$  usaremos o método dos *moving planes*, que já foi usado no capítulo 2. Do mesmo modo que no capítulo anterior, faremos primeiro o raciocínio para a direção  $e_1$ , e depois generalizaremos para uma direção qualquer. Diferentemente do problema (2.1), onde o domínio da equação era um conjunto limitado, aqui trabalhamos em todo o  $\mathbb{R}^n$ . Assim, a "altura" dos hiperplanos considerados será qualquer, não estando limitada somente a um intervalo.

Iniciemos definindo os hiperplanos usados no nosso caso, bem como as regiões delimitadas por cada um deles: para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  definimos

$$H_\lambda = \{x = (x_1, y) \in \mathbb{R}^n; x_1 = \lambda\},$$

$$\Sigma_\lambda = \{x = (x_1, y) \in \mathbb{R}^n; x_1 > \lambda\},$$

$$\tilde{\Sigma}_\lambda = \{x = (x_1, y) \in \mathbb{R}^n; x_1 < \lambda\}.$$

Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $x = (x_1, y) \in \mathbb{R}^n$ , denotaremos  $x^\lambda = (2\lambda - x_1, y)$ . Notemos que  $x^\lambda$  é a reflexão de  $x$  com respeito ao hiperplano  $H_\lambda$ .

Dado  $(u, v)$  nas condições do teorema, queremos encontrar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $u$  e  $v$  são simétricas em relação à  $H_\lambda$ . Para isso, definimos as seguintes funções:

$$\begin{aligned} u_\lambda : \overline{\Sigma}_\lambda &\longrightarrow \mathbb{R} & v_\lambda : \overline{\Sigma}_\lambda &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u_\lambda(x) = u(x^\lambda), & x &\longmapsto v_\lambda(x) = v(x^\lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_\lambda : \overline{\Sigma}_\lambda &\longrightarrow \mathbb{R} & V_\lambda : \overline{\Sigma}_\lambda &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto U_\lambda(x) = u_\lambda(x) - u(x), & x &\longmapsto V_\lambda(x) = v_\lambda(x) - v(x). \end{aligned}$$

Nosso objetivo é encontrar um valor de  $\lambda$  para o qual  $U_\lambda \equiv V_\lambda \equiv 0$ , pois isso implica  $u$  e  $v$  simétricas em relação à  $H_\lambda$ .

**Observação 3.4.**  $x = (x_1, y) \in H_\lambda \Rightarrow x^\lambda = (2\lambda - x_1, y) = (2x_1 - x_1, y) = x$ . Portanto  $U_\lambda \equiv 0$  e  $V_\lambda \equiv 0$  em  $H_\lambda$ . ♠

Notemos que

$$\Delta u_\lambda(x) = \Delta u(x^\lambda), \quad \forall x \in \Sigma_\lambda$$

e

$$\left(|x| \longrightarrow \infty \Leftrightarrow |x^\lambda| \longrightarrow \infty\right) \Rightarrow \left(u_\lambda(x) = u(x^\lambda) \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \longrightarrow \infty\right).$$

Como a definição de  $v_\lambda$  é análoga a de  $u_\lambda$ , temos que o mesmo vale para  $v_\lambda$ . Assim, se  $(u, v)$  é solução de (3.1) então  $(u_\lambda, v_\lambda)$  satisfaz:

$$\begin{cases} \Delta u_\lambda + g(u_\lambda, v_\lambda) = 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ \Delta v_\lambda + f(u_\lambda, v_\lambda) = 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ u_\lambda(x), v_\lambda(x) \longrightarrow 0 & \text{quando } |x| \longrightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

Logo,  $U_\lambda(x), V_\lambda(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , e subtraindo as equações em (3.1) das equações em (3.2) obtemos

$$\begin{cases} \Delta U_\lambda(x) + g(u_\lambda(x), v_\lambda(x)) - g(u(x), v(x)) = 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ \Delta V_\lambda(x) + f(u_\lambda(x), v_\lambda(x)) - f(u(x), v(x)) = 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ U_\lambda(x), V_\lambda(x) \rightarrow 0 & \text{quando } |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

Usando o teorema do valor médio podemos escrever:

$$\begin{aligned} g(u_\lambda(x), v_\lambda(x)) - g(u(x), v(x)) &= g(u_\lambda(x), v_\lambda(x)) - g(u_\lambda(x), v(x)) \\ &\quad + g(u_\lambda(x), v(x)) - g(u(x), v(x)) \\ &= \frac{\partial g}{\partial v}(u_\lambda(x), \eta_1(x, \lambda)) \cdot V_\lambda(x) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \lambda), v(x)) \cdot U_\lambda(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u_\lambda(x), v_\lambda(x)) - f(u(x), v(x)) &= f(u_\lambda(x), v_\lambda(x)) - f(u_\lambda(x), v(x)) \\ &\quad + f(u_\lambda(x), v(x)) - f(u(x), v(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(x, \lambda), v_\lambda(x)) \cdot U_\lambda(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), \eta_2(x, \lambda)) \cdot V_\lambda(x), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_i(x, \lambda) &\in (\min\{u(x), u_\lambda(x)\}, \max\{u(x), u_\lambda(x)\}) \\ \eta_i(x, \lambda) &\in (\min\{v(x), v_\lambda(x)\}, \max\{v(x), v_\lambda(x)\}), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Isso nos permite reescrever as equações em (3.3) usando as derivadas de  $f$  e  $g$ :

$$\Delta U_\lambda(x) + \frac{\partial g}{\partial v}(u_\lambda(x), \eta_1(x, \lambda)) \cdot V_\lambda(x) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \lambda), v(x)) \cdot U_\lambda(x) = 0, \quad \forall x \in \Sigma_\lambda \quad (3.4)$$

$$\Delta V_\lambda(x) + \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(x, \lambda), v_\lambda(x)) \cdot U_\lambda(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), \eta_2(x, \lambda)) \cdot V_\lambda(x) = 0, \quad \forall x \in \Sigma_\lambda \quad (3.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_i(x, \lambda) &\in (\min\{u(x), u_\lambda(x)\}, \max\{u(x), u_\lambda(x)\}) \\ \eta_i(x, \lambda) &\in (\min\{v(x), v_\lambda(x)\}, \max\{v(x), v_\lambda(x)\}), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Denotemos

$$\Lambda = \inf \{ \lambda > 0; U_\mu \geq 0 \text{ e } V_\mu \geq 0 \text{ em } \Sigma_\mu, \forall \mu \geq \lambda \} \geq 0.$$

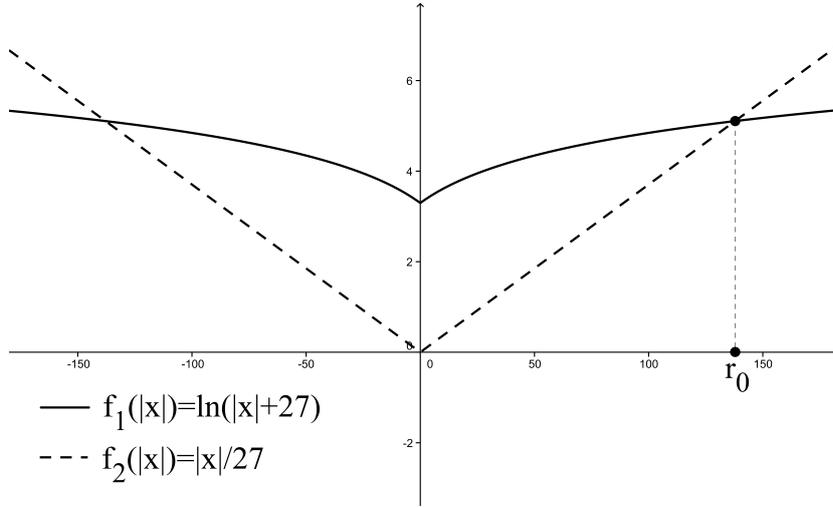
**Passo 1.** Mostrar que  $\Lambda < +\infty$ , ou seja, que existe  $\lambda^* \in \{ \lambda > 0; U_\mu \geq 0 \text{ e } V_\mu \geq 0, \forall \mu \geq \lambda \}$ .

**Observação 3.5.** Sejam  $f_1(|x|) = \ln(|x| + 27)$  e  $f_2(|x|) = \frac{|x|}{27}$  funções definidas  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Derivando em  $x \neq 0$  temos

$$f_1'(|x|) = \frac{1}{|x| + 27} < \frac{1}{27} = f_2'(|x|), \quad \forall x \neq 0.$$

Logo,  $\exists r_0 > 0$  tal que  $\ln(|x| + 27) < \frac{|x|}{27}$  quando  $|x| > r_0$ .



**Figura 3.1**

Os motivos para considerarmos essa constante  $r_0$  ficarão claros no decorrer do trabalho. ♠

Seja  $\epsilon > 0$  aquele dado em (H2). Segundo o prolema (3.1),

$$u(x), v(x) \longrightarrow 0 \text{ quando } |x| \longrightarrow \infty, \quad (3.6)$$

logo

$$\text{existe } R_0 > r_0 \text{ tal que } u < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } v < \frac{\epsilon}{2} \text{ em } \mathbb{R}^n \setminus B(0, R_0). \quad (3.7)$$

Denotemos,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$B[0, R_0]^\lambda = \{x; x^\lambda \in B[0, R_0]\},$$

ou seja,  $B[0, R_0]^\lambda$  é a reflexão de  $B[0, R_0]$  com respeito ao hiperplano  $H_\lambda$ .

Notemos que  $\lambda > R_0 \Rightarrow B[0, R_0]^\lambda \subset \Sigma_\lambda$ .

Assim, (3.6) nos garante que existe  $\lambda^* > R_0$  tal que,  $\forall \lambda > \lambda^*$ ,

$$\max_{B[0, R_0]^\lambda} u < \min_{B[0, R_0]} u$$

e

$$\max_{B[0, R_0]^\lambda} v < \min_{B[0, R_0]} v,$$

pois,  $\forall \lambda > \lambda^*$ ,  $B[0, R_0]^\lambda \subset \Sigma_\lambda \subset \Sigma_{\lambda^*}$ .

Daí, como  $x \in B[0, R_0]^\lambda \Rightarrow x^\lambda \in B[0, R_0]$ , temos que  $u(x^\lambda) > u(x)$  e  $v(x^\lambda) > v(x)$ ,  $\forall x \in B[0, R_0]^\lambda$ , ou seja,

$$U_\lambda > 0 \text{ e } V_\lambda > 0 \text{ em } B[0, R_0]^\lambda, \quad \forall \lambda > \lambda^*. \quad (3.8)$$

Desse modo, para completar a demonstração do passo 1, resta garantir que  $\exists \lambda^{**} > \lambda^*$  tal que

$$U_\lambda \geq 0 \text{ e } V_\lambda \geq 0 \text{ em } \Sigma_\lambda \setminus B[0, R_0]^\lambda, \quad \forall \lambda > \lambda^{**}. \quad (3.9)$$

Para isso precisaremos considerar a função auxiliar  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{(n-2)}{2}} + 1, & \text{se } n \geq 3 \\ \ln(\ln(|x| + 27)), & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

**Afirmação 3.6.** A função  $h$  definida acima satisfaz

- $h(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ;
- $\Delta h(x) < 0$  sempre que  $|x| > r_0$  (onde  $r_0$  é aquele dado na observação 3.5).

**Demonstração da afirmação 3.6:**

- Para  $n \geq 3$  é óbvio, já que  $|x|^{-\frac{(n-2)}{2}} \geq 0$ .

Para  $n = 2$  temos

$$h(0) = \ln(\ln 27) = \ln(\ln 3^3) = \ln(3 \ln 3) = \ln 3 + \ln(\ln 3) > 1,$$

pois  $\ln 3 > 1$ . Como  $\ln$  é uma função crescente,  $h(x) = h(|x|) \geq h(0) > 1$ .

- Para  $n \geq 3$ :

$$h(x) = |x|^{-\frac{(n-2)}{2}} + 1;$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = -\frac{(n-2)}{2} |x|^{-\frac{n}{2}} \frac{x_i}{|x|}, \quad i = 1, \dots, n, \quad x \neq 0;$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(x) = \frac{(n-2)n}{4} |x|^{-\frac{(n+2)}{2}} \frac{x_i^2}{|x|^2} - \frac{(n-2)}{2} |x|^{-\frac{(n+2)}{2}} + \frac{(n-2)}{2} |x|^{-\frac{(n+6)}{2}} x_i^2,$$

$$i = 1, \dots, n, \quad x \neq 0;$$

Portanto, para  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta h(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(x) \\ &= \frac{(n-2)n}{4} |x|^{-\frac{(n+2)}{2}} - \frac{n(n-2)}{2} |x|^{-\frac{(n+2)}{2}} + \frac{(n-2)}{2} |x|^{-\frac{(n+2)}{2}} \\ &= -\frac{(n-2)n}{4} |x|^{-\frac{(n+2)}{2}} + \frac{(n-2)}{2} |x|^{-\frac{(n+2)}{2}} \\ &= \left(-\frac{n}{2} + 1\right) \frac{(n-2)}{2} |x|^{-\frac{(n+2)}{2}} \\ &< 0, \text{ pois } n \geq 3. \end{aligned}$$

Em particular  $\Delta h(x) < 0$  sempre que  $|x| > r_0$ .

Para  $n = 2$ :

$$h(x) = \ln(\ln(|x| + 27));$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\ln(|x| + 27)} \frac{1}{|x| + 27} \frac{x_i}{|x|}, \quad i = 1, 2, \quad x \neq 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(x) &= -\frac{1}{(\ln(|x| + 27))^2} \frac{1}{(|x| + 27)^2} \frac{x_i^2}{|x|^2} \\ &\quad + \frac{1}{\ln(|x| + 27)} \left( -\frac{1}{(|x| + 27)^2} \frac{x_i^2}{|x|^2} + \frac{1}{|x| + 27} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} \right) \right), \quad i = 1, 2, \quad x \neq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta h(x) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(x) \\ &= -\frac{1}{(\ln(|x| + 27))^2} \frac{1}{(|x| + 27)^2} - \frac{1}{\ln(|x| + 27)} \frac{1}{(|x| + 27)^2} + \frac{1}{\ln(|x| + 27)} \frac{1}{|x| + 27} \frac{1}{|x|} \\ &= -\frac{1}{(|x| + 27)^2 (\ln(|x| + 27))^2} + \frac{27}{|x|(|x| + 27)^2 \ln(|x| + 27)}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, para  $x \neq 0$  e  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned} \Delta h(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{27}{|x|(|x| + 27)^2 \ln(|x| + 27)} < \frac{1}{(|x| + 27)^2 (\ln(|x| + 27))^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{27}{|x|} < \frac{1}{\ln(|x| + 27)} \\ &\Leftrightarrow \ln(|x| + 27) < \frac{|x|}{27}. \end{aligned}$$

O que, pela observação 3.5, vale sempre que  $|x| > r_0$ . ■

Assim, juntando os dois itens da afirmação 3.6, concluímos que

$$\frac{\Delta h}{h} < 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \setminus B[0, r_0]. \quad (3.10)$$

Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  definimos  $\bar{U}_\lambda, \bar{V}_\lambda : \bar{\Sigma}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\bar{U}_\lambda = \frac{U_\lambda}{h} \quad \text{e} \quad \bar{V}_\lambda = \frac{V_\lambda}{h}.$$

A necessidade de trabalharmos com  $\bar{U}_\lambda$  e  $\bar{V}_\lambda$ , ao invés de trabalharmos diretamente com  $U_\lambda$  e  $V_\lambda$ , ficará clara no decorrer da demonstração do passo 1, mais precisamente na observação 3.12 da página 29, onde fazemos considerações sobre isso. Adiantamos que tal necessidade está diretamente ligada ao fato de permitirmos  $\det(A[(u_1, v_1), \dots, (u_4, v_4)]) = 0$  em (H3).

Essas novas funções satisfazem equações análogas às equações (3.4) e (3.5) satisfeitas por  $U_\lambda$  e  $V_\lambda$ , conforme veremos na afirmação abaixo:

**Afirmação 3.7.**

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U}_\lambda(x) + \frac{2}{h(x)} \langle \nabla h(x), \nabla \bar{U}_\lambda(x) \rangle + \frac{\partial g}{\partial v}(u_\lambda(x), \eta_1(x, \lambda)) \bar{V}_\lambda(x) \\ + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \lambda), v(x)) \bar{U}_\lambda(x) + \frac{\Delta h(x)}{h(x)} \bar{U}_\lambda(x) = 0, \quad \forall x \in \Sigma_\lambda, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{V}_\lambda(x) + \frac{2}{h(x)} \langle \nabla h(x), \nabla \bar{V}_\lambda(x) \rangle + \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(x, \lambda), v_\lambda(x)) \bar{U}_\lambda(x) \\ + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), \eta_2(x, \lambda)) \bar{V}_\lambda(x) + \frac{\Delta h(x)}{h(x)} \bar{V}_\lambda(x) = 0, \quad \forall x \in \Sigma_\lambda. \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Demonstração da afirmação 3.7:**

Faremos as contas apenas para demonstrar a equação (3.11). A demonstração de (3.12) é análoga, utilizando (3.5) no lugar de (3.4).

Começemos calculando o gradiente e o laplaciano de  $\bar{U}_\lambda$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_\lambda}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{U_\lambda}{h} \right) \\ &= \left( \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i} h - U_\lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \frac{1}{h^2} \\ &= \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i} \frac{1}{h} - \frac{U_\lambda}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad \text{em } \Sigma_\lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}_\lambda}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \bar{U}_\lambda}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial^2 U_\lambda}{\partial x_i^2} \frac{1}{h} - \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i} \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x_i} - \left( \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i} \frac{1}{h^2} - \frac{2U_\lambda}{h^3} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{U_\lambda}{h^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} \\ &= \frac{1}{h} \frac{\partial^2 U_\lambda}{\partial x_i^2} - \frac{2}{h^2} \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{2U_\lambda}{h^3} \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{U_\lambda}{h^2} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}, \quad \text{em } \Sigma_\lambda. \end{aligned}$$

Dai,

$$\nabla \bar{U}_\lambda = \frac{1}{h} \nabla U_\lambda - \frac{U_\lambda}{h^2} \nabla h,$$

$$\langle \nabla h, \nabla \bar{U}_\lambda \rangle = \frac{1}{h} \langle \nabla h, \nabla U_\lambda \rangle - \frac{U_\lambda}{h^2} \langle \nabla h, \nabla h \rangle,$$

$$\Delta \bar{U}_\lambda = \frac{1}{h} \Delta U_\lambda - \frac{2}{h^2} \langle \nabla U_\lambda, \nabla h \rangle + \frac{2U_\lambda}{h^3} \langle \nabla h, \nabla h \rangle - \frac{U_\lambda}{h^2} \Delta h, \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

Com isso em mãos, calculemos a soma de três das cinco parcelas de (3.11):

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{U}_\lambda(x) + \frac{2}{h(x)} \langle \nabla h(x), \nabla \bar{U}_\lambda(x) \rangle + \frac{\Delta h(x)}{h(x)} \bar{U}_\lambda(x) &= \\
\frac{1}{h(x)} \Delta U_\lambda(x) - \frac{2}{h(x)^2} \langle \nabla U_\lambda(x), \nabla h(x) \rangle + \frac{2U_\lambda(x)}{h(x)^3} \langle \nabla h(x), \nabla h(x) \rangle - \frac{U_\lambda(x)}{h(x)^2} \Delta h(x) \\
+ \frac{2}{h(x)^2} \langle \nabla h(x), \nabla U_\lambda(x) \rangle - \frac{2U_\lambda(x)}{h(x)^3} \langle \nabla h(x), \nabla h(x) \rangle + \frac{\Delta h(x)}{h(x)} \frac{U_\lambda(x)}{h(x)} &= \\
= \frac{1}{h(x)} \Delta U_\lambda(x) \\
\stackrel{(3.4)}{=} -\frac{1}{h(x)} \left( \frac{\partial g}{\partial v}(u_\lambda(x), \eta_1(x, \lambda)) \cdot V_\lambda(x) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \lambda), v(x)) \cdot U_\lambda(x) \right) \\
= -\frac{\partial g}{\partial v}(u_\lambda(x), \eta_1(x, \lambda)) \cdot \bar{V}_\lambda(x) - \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \lambda), v(x)) \cdot \bar{U}_\lambda(x),
\end{aligned}$$

que é exatamente o que afirma a equação (3.11). ■

Depois de tantas contas, lembremos que a função  $h$  foi introduzida para que pudéssemos mostrar (3.9). Pelo primeiro item da afirmação 3.6, temos que  $h$  é uma função positiva, portanto mostrar (3.9) equivale a mostrar que  $\exists \lambda^{**} \geq \lambda^*$  tal que

$$\bar{U}_\lambda \geq 0 \text{ e } \bar{V}_\lambda \geq 0 \text{ em } \Sigma_\lambda \setminus B[0, R_0]^\lambda, \quad \forall \lambda > \lambda^{**}. \quad (3.13)$$

A prova de (3.13) será por absurdo. Suponhamos que  $\forall \lambda' \geq \lambda^*$  existe  $\lambda > \lambda'$  tal que,

$$\inf_{\Sigma_\lambda \setminus B[0, R_0]^\lambda} \bar{U}_\lambda < 0 \quad \text{ou} \quad \inf_{\Sigma_\lambda \setminus B[0, R_0]^\lambda} \bar{V}_\lambda < 0.$$

Então,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq \lambda^*$ , existe  $\lambda_n > n$  tal que,

$$\inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{U}_{\lambda_n} < 0 \quad \text{ou} \quad \inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{V}_{\lambda_n} < 0.$$

Nessas condições, temos três possibilidades:

1. Para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n > n \geq \lambda^*$ , vale

$$\inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{U}_{\lambda_n} < 0 \quad \text{e} \quad \bar{V}_{\lambda_n} \geq 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n};$$

2. Para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n > n \geq \lambda^*$ , vale

$$\bar{U}_{\lambda_n} \geq 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n} \quad \text{e} \quad \inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{V}_{\lambda_n} < 0;$$

3. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n > n \geq \lambda^*$ , vale

$$\inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{U}_{\lambda_n} < 0 \quad \text{e} \quad \inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{V}_{\lambda_n} < 0.$$

Queremos, em cada caso, chegar numa contradição. Para isso a seguinte afirmação será essencial:

**Afirmção 3.8.** *Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se  $\exists x_0 \in \Sigma_\lambda$  tal que  $\bar{U}_\lambda(x_0) < 0$  então  $\exists x_1 \in \Sigma_\lambda$  tal que*

$$\bar{U}_\lambda(x_1) = \min_{\Sigma_\lambda} \bar{U}_\lambda < 0.$$

**Demonstração da afirmação 3.8:**

De (3.3) temos que  $U_\lambda(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Como

$$|\bar{U}_\lambda(x)| = \frac{|U_\lambda(x)|}{|h(x)|} \leq |U_\lambda(x)|,$$

vale também  $\bar{U}_\lambda(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Logo  $\exists M > 0$  tal que

$$x \in \Sigma_\lambda \text{ e } |x| > M \Rightarrow \bar{U}_\lambda(x) > \bar{U}_\lambda(x_0),$$

pois  $\bar{U}_\lambda(x_0) < 0$ .

Portanto

$$\min_{\bar{\Sigma}_\lambda} \bar{U}_\lambda = \min_{\bar{\Sigma}_\lambda \cap B[0, M]} \bar{U}_\lambda \leq \bar{U}_\lambda(x_0) < 0.$$

E como  $\bar{\Sigma}_\lambda \cap B[0, M]$  é fechado e limitado, o mínimo acima existe, ou seja,  $\exists x_1 \in \bar{\Sigma}_\lambda$  tal que

$$\bar{U}_\lambda(x_1) = \min_{\bar{\Sigma}_\lambda} \bar{U}_\lambda < 0.$$

Pela observação 3.4,  $U_\lambda \equiv 0$  sobre  $H_\lambda$ , logo  $\bar{U}_\lambda \equiv 0$  sobre  $H_\lambda$  e então  $x_1 \notin H_\lambda$ . Ou seja,  $x_1 \in \Sigma_\lambda$ , como queríamos. ■

Vejam agora cada caso separadamente:

1. Para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n > n \geq \lambda^*$ , vale

$$\inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{U}_{\lambda_n} < 0 \quad \text{e} \quad \bar{V}_{\lambda_n} \geq 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}.$$

A primeira condição,  $\inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{U}_{\lambda_n} < 0$ , implica que existe  $x_0 \in \overline{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \subset \overline{\Sigma_{\lambda_n}} = \Sigma_{\lambda_n} \cup H_{\lambda_n}$  tal que  $\bar{U}_{\lambda_n}(x_0) < 0$ . Mas pela observação 3.4,  $U_{\lambda_n} \equiv 0$  em  $H_{\lambda_n}$ , portanto  $x_0 \in \Sigma_{\lambda_n}$ .

Daí, pela afirmação 3.8, existe  $\hat{x}_{\lambda_n} \in \Sigma_{\lambda_n}$  tal que

$$\bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) = \min_{\Sigma_{\lambda_n}} \bar{U}_{\lambda_n} < 0. \quad (3.14)$$

Além disso, (3.8) garante que

$$\hat{x}_{\lambda_n} \notin B[0, R_0]^{\lambda_n}.$$

**Observação 3.9.** Como  $\lambda_n > \lambda^* > R_0$  e

$$\hat{x}_{\lambda_n} \in \Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n},$$

temos que  $\hat{x}_{\lambda_n}, \hat{x}_{\lambda_n}^{\lambda_n} \notin B[0, R_0]$ . Assim, por (3.7),

$$u(\hat{x}_{\lambda_n}), u(\hat{x}_{\lambda_n}^{\lambda_n}), v(\hat{x}_{\lambda_n}), v(\hat{x}_{\lambda_n}^{\lambda_n}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Consequentemente,

$$\xi_i(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), \eta_i(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) < \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

♠

Como  $\hat{x}_{\lambda_n}$  é ponto de mínimo interior,  $\Delta \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq 0$  e  $\nabla \bar{U}_{\lambda_n} = 0$ . Daí, escrevendo a equação (3.11) para  $\hat{x}_{\lambda_n}$  temos

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \bar{V}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) + \left( \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \right) \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \leq 0. \quad (3.15)$$

Da segunda condição temos  $\bar{V}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq 0$ , que unida à hipótese (H1) nos dá

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \bar{V}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq 0,$$

e substituindo isso na equação (3.15) temos,

$$\left( \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \right) \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \leq 0. \quad (3.16)$$

A observação 3.9 junto com a hipótese (H3) garantem que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) \leq 0.$$

Além disso, por (3.10), temos

$$\frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} < 0.$$

E substituindo essas duas desigualdades em (3.16) obtemos

$$\bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq 0,$$

que contradiz (3.14).

2. Para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n > n \geq \lambda^*$ , vale

$$\bar{U}_{\lambda_n} \geq 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n} \quad \text{e} \quad \inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{V}_{\lambda_n} < 0.$$

Esse caso é análogo ao anterior. Por conveniência vamos rapidamente repetir o raciocínio:

Do mesmo modo que no caso 1, concluímos que existe  $\tilde{x}_{\lambda_n} \in \Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda}$  tal que

$$\bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) = \min_{\Sigma_{\lambda_n}} \bar{V}_{\lambda_n} < 0. \quad (3.17)$$

Escrevendo a equação (3.12) para  $\tilde{x}_{\lambda_n}$  obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) \bar{U}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) + \left( \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) + \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \right) \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \leq 0. \quad (3.18)$$

De  $\bar{U}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \geq 0$  e (H1) decorre que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) \bar{U}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \geq 0,$$

e portanto

$$\left( \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) + \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \right) \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \leq 0.$$

Daí, usando a observação 3.1 e a equação (3.10) concluimos que

$$\bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \geq 0,$$

o que contradiz (3.17).

3. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n > n \geq \lambda^*$ , vale

$$\inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{U}_{\lambda_n} < 0 \quad \text{e} \quad \inf_{\Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}} \bar{V}_{\lambda_n} < 0.$$

Do mesmo modo que nos casos 1 e 2, as condições acima implicam que existem  $\hat{x}_{\lambda_n}, \tilde{x}_{\lambda_n} \in \Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n}$  tais que

$$\bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) = \min_{\Sigma_{\lambda_n}} \bar{U}_{\lambda_n} < 0, \quad (3.19)$$

$$\bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) = \min_{\Sigma_{\lambda_n}} \bar{V}_{\lambda_n} < 0. \quad (3.20)$$

E portanto valem, agora simultaneamente, as inequações (3.15) e (3.18). Para uso posterior, vamos renumerá-las nesse caso

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \bar{V}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) + \left( \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \right) \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \leq 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) \bar{U}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) + \left( \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) + \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \right) \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \leq 0. \quad (3.22)$$

Temos também uma observação análoga à observação 3.9:

**Observação 3.10.**

$$\lambda_n > \lambda^* > R_0 \quad \text{e} \quad \hat{x}_{\lambda_n}, \tilde{x}_{\lambda_n} \in \Sigma_{\lambda_n} \setminus B[0, R_0]^{\lambda_n} \quad \Rightarrow$$

$$\hat{x}_{\lambda_n}, \hat{x}_{\lambda_n}^{\lambda_n}, \tilde{x}_{\lambda_n}, \tilde{x}_{\lambda_n}^{\lambda_n} \notin B[0, R_0] \quad \Rightarrow$$

$$u(\hat{x}_{\lambda_n}), u(\hat{x}_{\lambda_n}^{\lambda_n}), v(\hat{x}_{\lambda_n}), v(\hat{x}_{\lambda_n}^{\lambda_n}), u(\tilde{x}_{\lambda_n}), u(\tilde{x}_{\lambda_n}^{\lambda_n}), v(\tilde{x}_{\lambda_n}), v(\tilde{x}_{\lambda_n}^{\lambda_n}) < \frac{\epsilon}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\xi_i(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), \eta_i(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), \xi_i(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), \eta_i(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) < \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$



Como  $\hat{x}_{\lambda_n}$  e  $\tilde{x}_{\lambda_n}$  são pontos de mínimo, vale

$$\bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \leq \bar{U}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \quad \text{e} \quad \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \leq \bar{V}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}).$$

Por (H1),  $\frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0$ , portanto

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \bar{V}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq \frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) \bar{U}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \geq \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n})) \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}).$$

Usando essas desigualdades em (3.21) e (3.22), respectivamente, obtemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \leq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) + \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \leq 0. \end{cases}$$

Denotando,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq \lambda^*$ ,

$$M(n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} & \frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \\ \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) & \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) + \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \end{pmatrix},$$

o sistema acima pode ser escrito matricialmente como

$$M(n) \cdot \begin{pmatrix} \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \\ \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

onde  $y_1, y_2 \leq 0$ .

**Afirmção 3.11.**

$$\det M(n) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \lambda^*.$$

**Demonstração da afirmação 3.11:**

$$\begin{aligned} \det M(n) &= \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \\ &\quad - \frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) \\ &= \det(A[(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})), (u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)), (\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})), (u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n))]) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} + \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})}, \end{aligned}$$

onde a matriz  $A$  é aquela dada em (H3), e por hipótese tem determinante não-negativo.

A observação 3.10 junto com a hipótese (H3) e a observação 3.1 garantem que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \leq 0. \quad (3.24)$$

E por (3.10),

$$\frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} < 0. \quad (3.25)$$

Assim,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} + \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} > 0,$$

donde concluimos que  $\det M(n) > 0$ . ■

**Observação 3.12.** *É aqui que fica clara a necessidade de trabalharmos com  $\bar{U}_\lambda$  e  $\bar{V}_\lambda$  ao invés de  $U_\lambda$  e  $V_\lambda$ . Se tivéssemos trabalhado diretamente com  $U_\lambda$  e  $V_\lambda$  (o que implicaria tomar  $h \equiv 1$  em todas as contas acima), teríamos*

$$M(n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \\ \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) & \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \end{pmatrix}.$$

Ou seja,  $M(n)$  seria exatamente a matriz  $A$  dada em (H3), e por hipótese  $\det A \geq 0$ . Assim não conseguiríamos garantir que  $M(n)$  é inversível, como precisamos. ♠

Pela afirmação 3.11,  $M(n)$  é inversível, logo existe

$$M(n)^{-1} = \frac{1}{\det M(n)} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) + \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} & -\frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \\ -\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) & \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \end{pmatrix}.$$

Daí, voltando em (3.23) temos

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \\ \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \end{pmatrix} = M(n)^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{\det M(n)} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) + \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \right) y_1 - \frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) y_2 \\ -\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) y_1 + \left( \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \right) y_2 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) = \frac{1}{\det M(n)} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial v}(u(\tilde{x}_{\lambda_n}), \eta_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) + \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \right) y_1 - \frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}), \eta_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) y_2 \right] \\ \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) = \frac{1}{\det M(n)} \left[ -\frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n})) y_1 + \left( \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n), v(\hat{x}_{\lambda_n})) + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \right) y_2 \right] \end{cases}$$

Então a hipótese (H1), unida com (3.24) e (3.25) e com o fato de serem  $y_1, y_2 \leq 0$ , implica que

$$\bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq 0 \quad \text{e} \quad \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \geq 0.$$

E isso contradiz (3.19) e (3.20).

Esgotamos assim as três possibilidades, e com isso demonstramos (3.13). Como (3.13)  $\Rightarrow$  (3.9), concluímos a demonstração do passo 1.

**Passo 2.** Mostrar que uma das duas coisas acontece:

- Ou  $\Lambda = 0$ ;
- ou  $\Lambda > 0$  e  $U_\Lambda \equiv 0, V_\Lambda \equiv 0$ .

Do passo 1 temos que  $0 \leq \Lambda < +\infty$ , então ou  $\Lambda = 0$  ou  $\Lambda > 0$ . Para  $\Lambda > 0$ , suponhamos por absurdo que,  $U_\Lambda \not\equiv 0$  ou  $V_\Lambda \not\equiv 0$ .

Da definição de  $\Lambda$ , temos  $U_\Lambda \geq 0$  e  $V_\Lambda \geq 0$  em  $\Sigma_\Lambda$ . Daí, por (H1),

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial v}(u_\Lambda(x), \eta_1(x, \Lambda)) \cdot V_\Lambda(x) \geq 0, & \forall x \in \Sigma_\Lambda, \\ \frac{\partial f}{\partial u}(\xi_2(x, \Lambda), v_\Lambda(x)) \cdot U_\Lambda(x) \geq 0, & \forall x \in \Sigma_\Lambda. \end{cases}$$

E considerando essas desigualdades nas equações (3.4) e (3.5) temos

$$\begin{cases} \Delta U_\Lambda(x) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \Lambda), v(x)) \cdot U_\Lambda \leq 0, & \forall x \in \Sigma_\Lambda, \\ \Delta V_\Lambda(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), \eta_2(x, \Lambda)) \cdot V_\Lambda \leq 0, & \forall x \in \Sigma_\Lambda. \end{cases}$$

Aplicamos o Princípio do Máximo de Hopf (teorema 5 do apêndice) a cada uma das equações acima.

Verificando as hipóteses:

- $\Sigma_\Lambda$  é aberto e conexo;
- A continuidade de  $u$  e  $v$ , junto com a condição  $u(x), v(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow 0$ , garantem que  $u$  e  $v$  são limitadas. Daí  $g, f \in C^1$  implica que as derivadas acima também são limitadas.
- Se  $U_\Lambda$  e  $V_\Lambda$  fossem constantes teriam que ser identicamente nulas (pois  $U_\Lambda(x), V_\Lambda(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ ). Entretanto, pela suposição por absurdo,  $U_\Lambda \not\equiv 0$  e  $V_\Lambda \not\equiv 0$ . Assim  $U_\Lambda$  e  $V_\Lambda$  não são constantes.

Desse modo, sendo  $U_\Lambda \geq 0$  e  $V_\Lambda \geq 0$  em  $\Sigma_\Lambda$ , concluímos que

$$U_\Lambda > 0 \quad \text{e} \quad V_\Lambda > 0 \quad \text{em } \Sigma_\Lambda,$$

pois se existisse  $x \in \Sigma_\Lambda$  tal que  $U_\Lambda(x) = 0$  ou  $V_\Lambda(x) = 0$  teríamos  $U_\Lambda$  ou  $V_\Lambda$  se anulando num ponto de mínimo interior, o que contradiz o teorema 5 do apêndice. Daí,

$$\bar{U}_\Lambda > 0 \quad \text{e} \quad \bar{V}_\Lambda > 0.$$

Da definição de  $\Lambda$ , existem sequências  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , com  $\lambda_k \nearrow \Lambda$  e  $y_k \in \Sigma_{\lambda_k}$ , tais que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{ou } U_{\lambda_k}(y_k) < 0 \quad \text{ou } V_{\lambda_k}(y_k) < 0.$$

Pelo menos uma dessas duas possibilidades ocorrerá para um número infinito de índices  $k$ 's, suponhamos, sem perda de generalidade, que seja  $U_{\lambda_k}(y_k) < 0$ . Assim, obtemos uma subsequência de  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , que denotaremos igualmente por  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , tal que  $U_{\lambda_k}(y_k) < 0$ , e portanto  $\bar{U}_{\lambda_k}(y_k) < 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

Daí, pela afirmação 3.8, temos que existe  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma_{\lambda_k}$  tal que

$$\bar{U}_{\lambda_k}(x_k) = \min_{\Sigma_{\lambda_k}} \bar{U}_{\lambda_k} < 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.26)$$

Existem duas possibilidades para a sequência  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ :

1.  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência limitada.

Nesse caso, como toda sequência limitada possui uma subsequência convergente, concluímos que existe uma subsequência de  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , que ainda denotaremos por  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , convergente. Ou seja, existe  $\bar{x} \in \bar{\Sigma}_\Lambda$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ . Daí,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{U}_{\lambda_k}(x_k) = \bar{U}_\Lambda(\bar{x}),$$

o que implica  $\bar{U}_\Lambda(\bar{x}) \leq 0$ . Entretanto,  $\bar{U}_\Lambda > 0$  em  $\Sigma_\Lambda$ , logo  $\bar{x} \in H_\Lambda$ , donde

$$U_\Lambda(\bar{x}) = 0. \quad (3.27)$$

Além disso, como  $x_k$  é ponto de mínimo,  $\nabla \bar{U}_{\lambda_k}(x_k) = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , o que implica

$$\nabla \bar{U}_\Lambda(\bar{x}) = 0.$$

Na demonstração da afirmação 3.7 vimos que  $\nabla \bar{U}_\lambda = \frac{1}{h} \nabla U_\lambda - \frac{U_\lambda}{h^2} \nabla h$ , portanto as duas igualdades acima implicam

$$\nabla U_\Lambda(\bar{x}) = 0. \quad (3.28)$$

Escrevendo (3.4) para  $\lambda = \Lambda$ , e lembrando que  $V_\Lambda > 0$  em  $\Sigma_\Lambda$ , por (H1) temos

$$\Delta U_\Lambda(x) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \Lambda), v(x)) U_\Lambda(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Sigma_\Lambda. \quad (3.29)$$

Vamos aplicar o Lema de Hopf enunciado no teorema 8 do apêndice:

- $\Sigma_\Lambda$  é aberto, conexo e satisfaz a condição da bola para qualquer ponto em  $H_\Lambda$ ;
- $\Delta(-U_\Lambda)(x) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \Lambda), v(x))(-U_\Lambda)(x) \geq 0$ ;

- A continuidade de  $u$  e  $v$ , junto com a condição  $u(x), v(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , garantem que  $u$  e  $v$  são limitadas. Daí  $g \in C^1$  implica que a derivada acima também é limitada;
- $\bar{x} \in H_\Lambda = \partial\Sigma_\Lambda$  e, por (3.27),  $-U_\Lambda(\bar{x}) = 0 > -U_\Lambda(x), \forall x \in \Sigma_\Lambda$ .

Portanto,

$$\frac{\partial(-U_\Lambda)}{\partial(-e_1)}(\bar{x}) = \frac{\partial U_\Lambda}{\partial x_1}(\bar{x}) > 0,$$

mas isso contradiz (3.28).

2.  $|x_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ .

Nesse caso, como  $\lambda_k \rightarrow \Lambda$  e  $|x_k| \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ , temos que existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que,  $\forall k \geq k_0$ ,

$$x_k \in \Sigma_{\lambda_k} \setminus \left( B[0, R_0] \cup B[0, R_0]^{\lambda_k} \right). \quad (3.30)$$

Como  $x_k$  é ponto de mínimo,  $\Delta \bar{U}_{\lambda_k}(x_k) \geq 0$  e  $\nabla \bar{U}_{\lambda_k}(x_k) = 0$ . Substituindo isso na equação (3.11) temos

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_k}(x_k), \eta_1(x_k, \lambda_k)) \bar{V}_{\lambda_k}(x_k) + \left( \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x_k, \lambda_k), v(x_k)) + \frac{\Delta h(x_k)}{h(x_k)} \right) \bar{U}_{\lambda_k}(x_k) \leq 0.$$

Mas

$$x_k \notin B[0, R_0] \cup B[0, R_0]^{\lambda_k} \Rightarrow \xi_1(x_k, \lambda_k), v(x_k) < \frac{\epsilon}{2},$$

donde por (H2)

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x_k, \lambda_k), v(x_k)) < 0.$$

Além disso,

$$x_k \notin B[0, R_0] \stackrel{(3.10)}{\Rightarrow} \frac{\Delta h(x_k)}{h(x_k)} < 0.$$

Daí, como  $\bar{U}_{\lambda_k}(x_k) < 0$ , concluímos que

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u_{\lambda_k}(x_k), \eta_1(x_k, \lambda_k)) \bar{V}_{\lambda_k}(x_k) < 0.$$

Donde (H1) implica  $\bar{V}_{\lambda_k}(x_k) < 0, \forall k \geq k_0$ . E isso, pela observação 3.8, implica que existe  $(z_k)_{k \geq k_0} \subset \Sigma_{\lambda_k}$  tal que

$$\bar{V}_{\lambda_k}(z_k) = \min_{\Sigma_{\lambda_k}} \bar{V}_{\lambda_k} < 0, \forall k \geq k_0. \quad (3.31)$$

A equação (3.31) para  $V$  é análoga à equação (3.26) para  $U$ . Assim como lá, temos duas possibilidades para a sequência  $(z_k)$ , mas contas análogas às feitas no item 1 acima garantem que  $|z_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ . Desse modo, existe  $k_1 \geq k_0$  tal que

$$z_{k_1} \in \Sigma_{\lambda_{k_1}} \setminus \left( B[0, R_0] \cup B[0, R_0]^{\lambda_{k_1}} \right). \quad (3.32)$$

Concluindo, estamos na seguinte situação: existem  $x_{k_1}, z_{k_1} \in \Sigma_{\lambda_{k_1}} \setminus (B[0, R_0] \cup B[0, R_0]^{\lambda_{k_1}})$  tais que

$$\bar{U}_{\lambda_k}(x_{k_1}) = \min_{\Sigma_{\lambda_{k_1}}} \bar{U}_{\lambda_{k_1}} < 0,$$

$$\bar{V}_{\lambda_k}(z_{k_1}) = \min_{\Sigma_{\lambda_{k_1}}} \bar{V}_{\lambda_{k_1}} < 0.$$

Que é exatamente a situação do item 3 do passo 1. E o mesmo raciocínio feito lá nos leva a uma contradição.

**Observação 3.13.** *A propriedade  $x_{k_1}, z_{k_1} \notin B[0, R_0] \cup B[0, R_0]^{\lambda_{k_1}}$  é muito importante para que os cálculos do item 3 funcionem. A condição  $\hat{x}_{\lambda_n}, \tilde{x}_{\lambda_n} \in \Sigma_{\lambda_n}$  no item 3 é substituída aqui por  $x_{k_1}, z_{k_1} \notin B[0, R_0]$ . ♠*

E isso finaliza a demonstração do passo 2.

**Passo 3.** Conclusão da demonstração da simetria.

O passo 2 fornece duas situações possíveis:

- $\Lambda > 0$  e  $U_\Lambda \equiv 0, V_\Lambda \equiv 0$ :

Isso significa que  $u$  e  $v$  são simétricas em relação a  $H_\Lambda$ .

- $\Lambda = 0$ :

Ou seja,  $U_\mu \geq 0$  e  $V_\mu \geq 0$  em  $\Sigma_\mu, \forall \mu > 0$ , o que implica

$$U_0 \geq 0 \text{ e } V_0 \geq 0, \text{ em } \Sigma_0 = \{(x_1, y); x_1 \geq 0, y \in \mathbb{R}^{n-1}\}. \quad (3.33)$$

Nesse caso, é necessário refazer todo o raciocínio dos passos 1 e 2, mas agora para  $\lambda \leq 0$ . Vejamos mais precisamente como devemos refazer o raciocínio. Dado

$$\Lambda' = \sup \{\lambda < 0; U_\mu \leq 0 \text{ e } V_\mu \leq 0 \text{ em } \Sigma_\mu, \forall \mu \leq \lambda\} \leq 0,$$

precisamos

**Passo 1'.** Mostrar que  $\Lambda' > -\infty$ , ou seja, que existe  $\lambda^* \in \{\lambda < 0; U_\mu \leq 0 \text{ e } V_\mu \leq 0, \forall \mu \leq \lambda\}$ .

**Passo 2'.** Mostrar que necessariamente uma das duas coisas vale:

- Ou  $\Lambda' = 0$ ;
- ou  $\Lambda' < 0$  e  $U_{\Lambda'} \equiv 0, V_{\Lambda'} \equiv 0$ .

**Observação 3.14.** *A demonstração dos passos 1' e 2' é análoga à demonstração dos passos 1 e 2. Em quase todo o raciocínio basta trocar algumas desigualdades e colocar max onde se tem min. O único ponto onde aparece algo um pouco mais diferente, é na demonstração de (3.8): No passo 1', no lugar de (3.8) mostra-se que*

$$U_\lambda < 0 \text{ e } V_\lambda < 0 \text{ em } B[0, R_0], \quad \forall \lambda < \lambda^*.$$

Consequentemente, todo o raciocínio posterior serve pra garantir que  $\exists \lambda^{**} < \lambda^*$  tal que

$$U_\lambda \leq 0 \text{ e } V_\lambda \leq 0 \text{ em } \Sigma_\lambda \setminus B[0, R_0], \quad \forall \lambda < \lambda^{**},$$

ao invés de mostrar (3.9). Mas, se acompanharmos o raciocínio fazendo as respectivas mudanças, vemos que todos os argumentos são válidos.

O passo 2', assim como o passo 2, fornece duas situações possíveis:

–  $\Lambda' < 0$  e  $U_{\Lambda'} \equiv 0$ ,  $V_{\Lambda'} \equiv 0$ :

Isso significa que  $u$  e  $v$  são simétricas em relação à  $H_{\Lambda'}$ .

–  $\Lambda' = 0$ :

Ou seja,  $U_0 \leq 0$  e  $V_0 \leq 0$  em  $\Sigma_0$ , que unido com o que já tínhamos em (3.33) nos dá

$$U_0 \equiv 0 \text{ e } V_0 \equiv 0.$$

E isso é o mesmo que dizer que  $u$  e  $v$  são simétricas em relação à  $H_0$ .

Ou seja, concluímos que existe um hiperplano, a saber, ou  $H_{\Lambda}$ , ou  $H_{\Lambda'}$ , ou  $H_0$ , em relação ao qual  $u$  e  $v$  são simultaneamente simétricas.

Com isso mostramos que  $u$  e  $v$  são simétricas na direção  $e_1$ .

Todo o raciocínio feito até agora para a direção  $e_1$  pode ser feito para as direções  $e_2, \dots, e_n$ . Obtemos assim mais  $(n-1)$  hiperplanos em relação aos quais  $u$  e  $v$  são simultaneamente simétricas. Denotando o plano cuja normal é  $e_i$  por  $H_{\lambda_i}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , temos que

$$\bigcap_{i=1}^n H_{\lambda_i}^i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \doteq x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Na verdade, como o laplaciano é invariante por rotação e as funções  $g$  e  $f$  do problema (3.1) não dependem de  $x$ , o raciocínio feito acima para  $e_1$  pode ser feito para qualquer outra direção  $\gamma$ .

Desse modo, dada uma direção  $\gamma$ , temos que existe um hiperplano normal a  $\gamma$ , que denotaremos por  $H_{\lambda}^{\gamma}$ , tal que  $u$  e  $v$  são simétricas em relação a  $H_{\lambda}^{\gamma}$ .

Pode-se mostrar que, para cada direção  $\gamma$ , o plano  $H_{\lambda}^{\gamma}$  passa por  $x_0$ .

Vejam agora que  $x_0$  é a origem em relação a qual  $u$  e  $v$  são radialmente simétricas:

De fato, dado  $r > 0$ , consideremos dois pontos  $x, y \in S(x_0, r)$ .

Queremos mostrar que  $u(x) = u(y)$  e  $v(x) = v(y)$ . Do mesmo modo que fizemos no capítulo 2, conseguimos obter aqui um hiperplano  $h$  passando por  $x_0$  e tal que  $x$  e  $y$  são pontos simétricos em relação a esse hiperplano. Denotando por  $\gamma$  o vetor normal a  $h$ , temos que  $h = H_{\lambda}^{\gamma}$ . Logo,  $u(x) = u(y)$  e  $v(x) = v(y)$ , como queríamos.

**Passo 4.** Mostrar que  $\frac{du}{dr}(r) < 0$  e  $\frac{dv}{dr}(r) < 0$ ,  $\forall r = |x - x_0| > 0$ .

**Lema 3.15.** *Seja  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função satisfazendo  $w(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$  e  $w > 0$  em  $\mathbb{R}^n$ . Então existe no máximo um  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $w$  é simétrica em relação a  $H_{\lambda}$ .*

**Demonstração do lema 3.15:**

Suponhamos por absurdo que existam  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  tais que  $w$  é simétrica em relação a  $H_{\lambda_1}$  e  $H_{\lambda_2}$ .

Então, dado  $x = (2\lambda_1 - x_1, y) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} w(x) = w(x^{\lambda_1}) = w(x^{\lambda_2}) &\Rightarrow w(2\lambda_1 - (2\lambda_1 - x_1), y) = w(2\lambda_2 - (2\lambda_1 - x_1), y) \\ &\Rightarrow w(x_1, y) = w((2\lambda_2 - 2\lambda_1) + x_1, y) \\ &\Rightarrow w(x_1, y) = w(P + x_1, y), \end{aligned}$$

onde  $P = 2\lambda_2 - 2\lambda_1 \neq 0$ . Ou seja,  $w$  é periódica na primeira variável. Então,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $w(x_1, y) = w(nP + x_1, y)$  e daí

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow w(nP + x_1) \rightarrow 0 \Rightarrow w(x_1, y) = 0.$$

Mas isso contradiz a hipótese  $w > 0$ . ■

Esse lema vai nos ajudar a provar a seguinte afirmação:

**Afirmação 3.16.**

1. Se  $u$  e  $v$  são simétricas em relação a  $H_\Lambda$  então,

$$\forall \lambda > \Lambda, \quad U_\lambda > 0 \text{ e } V_\lambda > 0 \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

2. Se  $u$  e  $v$  são simétricas em relação a  $H_{\Lambda'}$  então,

$$\forall \lambda < \Lambda', \quad U_\lambda < 0 \text{ e } V_\lambda < 0 \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

3. Se  $u$  e  $v$  são simétricas em relação a  $H_0$  então,

$$\forall \lambda > 0, \quad U_\lambda > 0 \text{ e } V_\lambda > 0 \quad \text{em } \Sigma_\lambda,$$

$$\forall \lambda < 0, \quad U_\lambda < 0 \text{ e } V_\lambda < 0 \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

**Demonstração da afirmação 3.16:**

1. Suponhamos por absurdo que existam  $\lambda_1 > \Lambda$  e  $x \in \Sigma_{\lambda_1}$  tais que  $U_{\lambda_1}(x) = 0$  ou  $V_{\lambda_1}(x) = 0$ . Da definição de  $\Lambda$  temos que  $U_\lambda \geq 0$  e  $V_\lambda \geq 0$  em  $\Sigma_\lambda$ ,  $\forall \lambda > \Lambda$ . Considerando isso e (H1) nas equações (3.4) e (3.5) temos que

$$\Delta U_{\lambda_1}(x) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \lambda_1), v(x)) \cdot U_{\lambda_1}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Sigma_{\lambda_1},$$

$$\Delta V_{\lambda_1}(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), \eta_2(x, \lambda_1)) \cdot V_{\lambda_1}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Sigma_{\lambda_1}.$$

Daí, aplicando o teorema 5 do apêndice às equações acima temos

$$U_{\lambda_1}(x) = 0 \Rightarrow U_{\lambda_1} \equiv 0 \Rightarrow u \text{ simétrica em relação à } H_{\lambda_1},$$

$$V_{\lambda_1}(x) = 0 \Rightarrow V_{\lambda_1} \equiv 0 \Rightarrow v \text{ simétrica em relação à } H_{\lambda_1}.$$

E como  $\lambda_1 > \Lambda > 0 > \Lambda'$ , isso contradiz o lema 3.15.

2. Suponhamos por absurdo que existam  $\lambda_2 < \Lambda'$  e  $x \in \Sigma_{\lambda_2}$  tais que  $U_{\lambda_2}(x) = 0$  ou  $V_{\lambda_2}(x) = 0$ . De maneira análoga ao item anterior obtemos

$$\Delta (-U_{\lambda_2})(x) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(x, \lambda_2), v(x)) \cdot (-U_{\lambda_2})(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Sigma_{\lambda_2},$$

$$\Delta (-V_{\lambda_2})(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), \eta_2(x, \lambda_2)) \cdot (-V_{\lambda_2})(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Sigma_{\lambda_2}.$$

E pelo teorema 5 do apêndice,

$$U_{\lambda_2}(x) = 0 \Rightarrow U_{\lambda_2} \equiv 0 \Rightarrow u \text{ simétrica em relação à } H_{\lambda_2},$$

$$V_{\lambda_2}(x) = 0 \Rightarrow V_{\lambda_2} \equiv 0 \Rightarrow v \text{ simétrica em relação à } H_{\lambda_2},$$

onde  $\lambda_2 < \Lambda' < 0 < \Lambda$ , contradizendo o lema 3.15.

3. Como vimos no passo 3, esse caso acontece quando

$$U_\mu \geq 0 \text{ e } V_\mu \geq 0 \text{ em } \Sigma_\mu, \quad \forall \mu > 0,$$

$$U_\mu \leq 0 \text{ e } V_\mu \leq 0 \text{ em } \Sigma_\mu, \quad \forall \mu < 0.$$

Daí, um procedimento análogo ao feito nos itens anteriores, aplicando o teorema 5 do apêndice, nos dá o resultado. ■

Agora sim podemos obter o resultado sobre as derivadas. A afirmação acima nos permitirá aplicar o teorema 8 do apêndice. Dividiremos o cálculo em três casos:

- $u$  e  $v$  são simétricas em relação a  $H_\Lambda$ :

Nesse caso, a primeira coordenada de  $x_0$  é igual a  $\Lambda$ , logo, dado  $r > 0$ , existe  $x = (\lambda, y)$  com  $\lambda > \Lambda$  tal que  $r = |x - x_0|$ .

Para esse  $\lambda$ , como vimos na demonstração da afirmação 3.16, valem as seguintes equações

$$\Delta(-U_\lambda)(z) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(z, \lambda), v(z)) \cdot (-U_\lambda)(z) \geq 0, \quad \forall z \in \Sigma_\lambda,$$

$$\Delta(-V_\lambda)(z) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(z), \eta_2(z, \lambda)) \cdot (-V_\lambda)(z) \geq 0, \quad \forall z \in \Sigma_\lambda.$$

Pela afirmação 3.16, como  $x \in H_\lambda$ ,

$$-U_\lambda(x) = 0 > -U_\lambda(z) \quad \text{e} \quad -V_\lambda(x) = 0 > -V_\lambda(z), \quad \forall z \in \Sigma_\lambda.$$

E do mesmo modo que fizemos para a equação (3.29), verifica-se que as outras hipóteses do teorema 8 do apêndice valem para as equações acima. Assim, o teorema 8 do apêndice garante que

$$\frac{\partial(-U_\lambda)}{\partial(-e_1)}(x) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial(-V_\lambda)}{\partial(-e_1)}(x) > 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial U_\lambda}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_1}(x) > 0.$$

Por outro lado,  $x \in H_\lambda \Rightarrow x = x^\lambda$ , logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_\lambda}{\partial x_1}(x) &= -\frac{\partial u}{\partial x_1}(x^\lambda) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \\ &= -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x),\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial U_\lambda}{\partial x_1}(x) < 0.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial V_\lambda}{\partial x_1}(x) < 0.$$

Assim, pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) &= u'(r)\frac{\partial r}{\partial x_1}(x) = u'(r)\left(\frac{\lambda - \Lambda}{r}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) &= v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_1}(x) = v'(r)\left(\frac{\lambda - \Lambda}{r}\right).\end{aligned}$$

E portanto,

$$\begin{aligned}u'(r) &= \left(\frac{r}{\lambda - \Lambda}\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0, \\ v'(r) &= \left(\frac{r}{\lambda - \Lambda}\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) < 0.\end{aligned}$$

- $u$  e  $v$  são simétricas em relação a  $H_{\Lambda'}$ :

Aqui, a primeira coordenada de  $x_0$  é igual a  $\Lambda'$ , logo, dado  $r > 0$ , existe  $x = (\lambda, y)$  com  $\lambda < \Lambda'$  tal que  $r = |x - x_0|$ .

Nesse caso, análogo ao item anterior, aplicando o teorema 8 às equações

$$\begin{aligned}\Delta U_\lambda(z) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(z, \lambda), v(z)) \cdot U_\lambda(z) &\geq 0, \quad \forall z \in \Sigma_\lambda, \\ \Delta V_\lambda(z) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(z), \eta_2(z, \lambda)) \cdot V_\lambda(z) &\geq 0, \quad \forall z \in \Sigma_\lambda,\end{aligned}$$

obtemos que

$$\frac{\partial U_\lambda}{\partial x_1}(x) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_1}(x) < 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) > 0.$$

Assim,

$$u'(r) = \left( \frac{r}{\lambda - \Lambda'} \right) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \quad \text{e} \quad v'(r) = \left( \frac{r}{\lambda - \Lambda'} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) < 0.$$

- $u$  e  $v$  são simétricas em relação a  $H_0$ :

Finalmente, nesse caso a primeira coordenada de  $x_0$  é igual a 0, logo, dado  $r > 0$ , existe  $x = (\lambda, y)$  com  $\lambda > 0$  tal que  $r = |x - x_0|$ .

Daí, para esse  $\lambda$ , valem

$$\Delta(-U_\lambda)(z) + \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_1(z, \lambda), v(z)) \cdot (-U_\lambda)(z) \geq 0, \quad \forall z \in \Sigma_\lambda,$$

$$\Delta(-V_\lambda)(z) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(z), \eta_2(z, \lambda)) \cdot (-V_\lambda)(z) \geq 0, \quad \forall z \in \Sigma_\lambda,$$

donde obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) < 0,$$

e portanto

$$u'(r) = \left( \frac{r}{\lambda - \Lambda'} \right) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \quad \text{e} \quad v'(r) = \left( \frac{r}{\lambda - \Lambda'} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) < 0.$$

Assim concluímos a demonstração do passo 4. ■

## Capítulo 4

# Aplicação: Equação de Choquard

Consideremos a seguinte equação integro-diferencial:

$$-\Delta u(x) - \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} u^2(y) dy \right) u(x) + u(x) - g_1(u(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad (4.1)$$

com  $g_1(0) = g_1'(0) = 0$ .

Para  $g_1 \equiv 0$ , essa equação é conhecida como equação de Choquard. A equação de Choquard pode ser considerada como uma certa aproximação da teoria de Hartree-Fock para um plasma de um componente.

Nosso objetivo aqui é estabelecer um resultado sobre simetria para as soluções de (4.1) usando o que vimos no capítulo anterior.

Impondo uma condição de crescimento em  $g_1$  é possível mostrar que todas as soluções fracas positivas de (4.1) em  $H^1(\mathbb{R}^3)$  são na verdade soluções clássicas que tendem a zero no infinito. Para isso usam-se teoremas de regularidade elíptica e o seguinte resultado:

**Lema 4.1.** *Seja  $1 < p < q < \infty$  com  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2}{3}$ . Dada uma função  $f$  denotemos,  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ ,*

$$I(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} f(y) dy.$$

*Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|I(f)\|_q \leq C \|f\|_p.$$

O resultado acima foi extraído da página 119 de [Ste70], e é fundamental para o estudo da regularidade das soluções.

Além disso, se definirmos, para cada solução  $u$ , a função

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto v(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} u^2(y) dy, \end{aligned}$$

temos que

$$-\Delta v = u^2 \quad \text{e} \quad v(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0.$$

Resumindo concluímos que, se  $u$  é uma solução positiva da equação (4.1) então  $u, v \in C^2(\mathbb{R}^3)$  e  $(u, v)$  é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \Delta u - u + uv + g_1(u) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \\ \Delta v + u^2 = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \\ u, v > 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \\ u(x), v(x) \longrightarrow 0 & \text{quando } |x| \longrightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $g_1 \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R})$  e satisfaz  $g_1(0) = g_1'(0) = 0$ .

Logo, para mostrar que as soluções da equação (4.1) são simétricas basta mostrar que as soluções do sistema (4.2) são simétricas.

**Observação 4.2.** *Resultados sobre a simetria das solução da equação de Choquard já foram demonstrados, por exemplo por Ma & Zhao em [MZ10]. Mas destacamos aqui que neste trabalho conseguimos garantir a simetria usando outras ferramentas. Mais precisamente, a relação estabelecida acima, entre a equação (4.1) e o sistema (4.2), permite demonstrarmos propriedades de simetria para as soluções da equação de Choquard usando as ideias descritas no capítulo anterior, com algumas modificações.*

A ideia inicial aqui é aplicar o teorema 3.2 do capítulo anterior para esse caso particular. Para isso, antes de mais nada precisamos verificar se as hipóteses do teorema 3.2 são satisfeitas pelo sistema (4.2):

- $g(u, v) = -u + uv + g_1(u)$ ,  $f(u, v) = u^2$ , logo  $g, f \in C^1([0, +\infty) \times [0, +\infty), \mathbb{R})$ .
- $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = u \geq 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = 2u \geq 0$ ,  $\forall (u, v) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ . Portanto vale (H1).
- $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = u > 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = 2u > 0$ ,  $\forall (u, v) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ . Portanto vale (H2).
- A hipótese  $g_1'(0) = 0$  garante que  $\exists r_1 > 0$  tal que  $|u| < r_1 \Rightarrow |g_1'(u)| \leq \frac{1}{2}$ . Logo, tomando  $\epsilon = \min\{r_1, \frac{1}{2}\}$  temos,  $\forall (u, v) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$  com  $u + v < \epsilon$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = -1 + v + g_1'(u) \leq -1 + v + \frac{1}{2} < 0.$$

Portanto a primeira parte de (H3) está satisfeita. Entretanto,

$$\det(A[(u_1, v_1), \dots, (u_4, v_4)]) = \det \begin{pmatrix} -1 + v_1 + g_1'(u_1) & u_2 \\ & 2u_3 & 0 \end{pmatrix} = -2u_2u_3 < 0,$$

$$\forall (u_i, v_i) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty), 1 \leq i \leq 4,$$

enquanto (H3) exige que esse determinante seja não-negativo, ao menos numa vizinhança da origem.

Sendo assim, não podemos aplicar o teorema 3.2 aqui. Entretanto, todos os passos da demonstração do teorema 3.2 que não usam a hipótese sobre o determinante podem ser aproveitados para esse exemplo. Desse modo, poderemos aplicar a demonstração do teorema 3.2 para esse caso, desde que substituamos os argumentos que utilizam a hipótese sobre o determinante por outros que não a utilizem.

Como vimos no capítulo 3, tal hipótese sobre o determinante foi usada apenas num ponto do item 3 do passo 1, mais precisamente na demonstração da afirmação 3.11, onde garantimos  $\det M(n) > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n > \lambda^*$ .

Observemos que para obter a contradição do item 3 do passo 1, na demonstração do teorema 3.2, basta que exista um  $n > \lambda^*$  tal que  $\det M(n) > 0$ . O que precisamos fazer então é garantir que  $\det M(n) > 0$ , para algum  $n > \lambda^*$ , sem usar a hipótese  $\det(A[(u_1, v_1), \dots, (u_4, v_4)]) \geq 0$ . Felizmente conseguimos mostrar isso, na verdade conseguimos infinitos  $n$ 's tais que  $\det M(n) > 0$ , como podemos ver no lema abaixo:

**Lema 4.3.** *Consideremos a matriz  $M(n)$  que aparece na demonstração do teorema 3.2, para o contexto do sistema (4.2). Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\det M(n) > 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

Para demonstrar o lema 4.3 o seguinte resultado, referente ao decaimento das soluções de (4.2), será fundamental:

**Lema 4.4.** *Seja  $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}^3) \times C^2(\mathbb{R}^3)$  solução de (4.2). Então existem constantes  $K > 0$  e  $Q_0 > 0$  tais que*

$$u(x) \leq \frac{K}{r} e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}},$$

onde  $r = |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^3$  com  $|x| = r \geq Q_0$ .

**Observação 4.5.** *Notemos que o decaimento obtido para  $u$  é um pouco mais rápido que o decaimento da exponencial, já que também aparece um  $r$  no denominador. ♠*

**Demonstração do lema 4.4:**

Da hipótese  $g_1(0) = g_1'(0) = 0$  decorre que

$$\exists r_2 > 0 \quad \text{tal que} \quad |u| < r_2 \Rightarrow \frac{g_1(u)}{u} \leq \frac{1}{4} \text{ e } g_1'(s) \leq \frac{1}{4}, \quad \forall 0 < s < u.$$

Além disso, sendo  $(u, v)$  solução de (4.2), temos  $u, v > 0$  em  $\mathbb{R}^3$  e  $u(x), v(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Juntando todos os fatos acima temos que existe  $Q_0 > 0$  tal que

$$|x| \geq Q_0 \Rightarrow |v(x)| \leq \frac{1}{4} \text{ e } |u(x)| < r_2 \Rightarrow \frac{g_1(u(x))}{u(x)} \leq \frac{1}{4}, \quad g_1'(s) \leq \frac{1}{4} \text{ e } |v(x)| \leq \frac{1}{4}, \quad \forall 0 < s < u(x).$$

Assim, para  $|x| \geq Q_0$  vale

$$1 - v(x) - \frac{g_1(u(x))}{u(x)} \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 1 - v(x) - g_1'(s) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall 0 < s < u(x). \quad (4.3)$$

**Observação 4.6.** *A segunda desigualdade acima não será usada na demonstração desse lema. Entretanto como precisaremos dela na demonstração do lema 4.3, já a deixamos registrada aqui. ♠*

De (4.3), como  $u > 0$ , temos

$$\left(1 - v(x) - \frac{g_1(u(x))}{u(x)}\right) u(x) \geq \frac{u(x)}{2}.$$

Logo, para  $|x| \geq Q_0$  temos

$$-\Delta u(x) + \frac{u(x)}{2} \leq -\Delta u(x) + \left(1 - v(x) - \frac{g_1(u(x))}{u(x)}\right) u(x) \stackrel{(4.2)}{=} 0. \quad (4.4)$$

Dado  $a > 0$ , definamos

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ x &\longmapsto \phi(x) = \frac{e^{-ar}}{r}, \end{aligned}$$

onde  $r = |x|$ .

Calculemos  $\Delta\phi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial\phi}{\partial r}(r) \frac{\partial r}{\partial x_i}(x) \\ &= \left(-\frac{ae^{-ar}}{r} - \frac{e^{-ar}}{r^2}\right) \frac{x_i}{r} \\ &= \frac{e^{-ar}}{r} \left(-\frac{ax_i}{r} - \frac{x_i}{r^2}\right), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)(x) \\
&= \frac{e^{-ar}}{r} \left( -\frac{ax_i}{r} - \frac{x_i}{r^2} \right)^2 + \frac{e^{-ar}}{r} \left( -\frac{a}{r} + \frac{ax_i^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{2x_i^2}{r^4} \right) \\
&= \frac{e^{-ar}}{r} \left( -\frac{a}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{a^2 x_i^2}{r^2} + \frac{3ax_i^2}{r^3} + \frac{3x_i^2}{r^4} \right), \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Somando para  $i = 1$  até 3, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta \phi(x) &= \frac{e^{-ar}}{r} \left( -\frac{3a}{r} - \frac{3}{r^2} + \frac{a^2 r^2}{r^2} + \frac{3ar^2}{r^3} + \frac{3r^2}{r^4} \right) \\
&= \frac{e^{-ar}}{r} \left( a^2 + \frac{1}{r}(-3a + 3a) + \frac{1}{r^2}(-3 + 3) \right) \\
&= a^2 \frac{e^{-ar}}{r} = a^2 \phi(x).
\end{aligned}$$

Ou seja,  $\phi$  satisfaz a equação

$$-\Delta \phi + a^2 \phi = 0.$$

Vamos tomar  $a^2 = \frac{1}{2}$ , isto é,  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . A equação acima fica

$$-\Delta \phi + \frac{1}{2} \phi = 0. \quad (4.5)$$

Para  $x \in \mathbb{R}^3$  com  $|x| = Q_0$  temos que  $\phi(x) = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_0}}{Q_0}$  é constante. Assim, como  $u(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$u(x) \leq K\phi(x), \quad (4.6)$$

sempre que  $|x| = Q_0$ .

Definamos

$$\begin{aligned}
\theta : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \theta(x) = u(x) - K\phi(x).
\end{aligned}$$

Então

$$\Delta \theta(x) = \Delta u(x) - K\Delta \phi(x) \stackrel{(4.4) \text{ e } (4.5)}{\geq} \frac{u(x)}{2} - \frac{K}{2}\phi(x) = \frac{\theta(x)}{2}, \quad |x| \geq Q_0.$$

Donde  $\theta$  satisfaz

$$-\Delta \theta(x) + \frac{\theta(x)}{2} \leq 0, \quad (4.7)$$

para  $|x| \geq Q_0$ . Vejamos que isso implica  $\theta(x) \leq 0$  para  $|x| \geq Q_0$ :

De fato, por (4.6),  $\theta(x) \leq 0$  para  $|x| = Q_0$ . Além disso,  $\theta(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$  (pois  $u$  e  $\phi$  o fazem). Assim, se existisse algum  $x_0$  com  $|x_0| > Q_0$  tal que  $\theta(x_0) > 0$ , então  $\theta(x)$  restrita a  $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, Q_0)$  teria um ponto de máximo  $y_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus B[0, Q_0]$  com  $\theta(y_0) > 0$ .

Mas daí  $y_0$  seria um ponto de máximo interior, donde valeria  $\Delta \theta(y_0) \leq 0$  e teríamos

$$-\Delta\theta(y_0) + \frac{\theta(y_0)}{2} > 0,$$

o que contradiz a equação (4.7).

Portanto, concluímos que  $\theta(x) \leq 0$  para  $|x| \geq Q_0$  e daí

$$u(x) \leq K\phi(x) = \frac{K}{r}e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}, \quad |x| \geq Q_0.$$

■

**Observação 4.7.** A constante  $Q_0$  que aparece no lema acima será fundamental na demonstração do lema 4.3. A usaremos para reescolher uma constante que aparece na demonstração do teorema 3.2. Como veremos, essa nova escolha (que não afeta o restante da argumentação) será a única alteração que precisa ser feita na demonstração do teorema 3.2 a fim de conseguirmos demonstrar o lema 4.3. ♠

### Demonstração do lema 4.3:

A matriz  $M(n)$  associada ao sistema (4.2) é dada por

$$M(n) = \begin{pmatrix} -1 + v(\hat{x}_{\lambda_n}) + g'_1(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} & u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \\ 2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) & \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \end{pmatrix},$$

onde

$$\frac{\Delta h(x)}{h(x)} = -\frac{1}{4} \frac{|x|^{-\frac{5}{2}}}{|x|^{-\frac{1}{2}} + 1} = -\frac{1}{4} \frac{1}{|x^2| + |x|^{\frac{5}{2}}} < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Temos

$$\det M(n) = (-1 + v(\hat{x}_{\lambda_n}) + g'_1(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n))) \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} - 2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}).$$

Como vimos em (4.3), se  $|x| \geq Q_0$  então  $1 - v(x) - g'_1(s) \geq \frac{1}{2}$ ,  $\forall 0 < s < u(x)$ , ou seja,  $-1 + v(x) + g'_1(s) \leq -\frac{1}{2}$ ,  $\forall 0 < s < u(x)$ .

Sendo assim, se na demonstração do teorema 3.2 (logo após a observação 3.7) escolhermos  $\lambda^* > \max\{R_0, Q_0\}$ , teremos

$$\hat{x}_{\lambda_n}, \tilde{x}_{\lambda_n} \in \Sigma_{\lambda_n} \Rightarrow |\hat{x}_{\lambda_n}|, |\tilde{x}_{\lambda_n}| > \lambda_n > n \geq \lambda^* \geq Q_0$$

e portanto

$$-1 + v(\hat{x}_{\lambda_n}) + g'_1(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)) \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow (-1 + v(\hat{x}_{\lambda_n}) + g'_1(\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n))) \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \geq -\frac{1}{2} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})},$$

já que  $\xi_1(\hat{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) < u(\hat{x}_{\lambda_n})$  (por (3.19)) e  $\frac{\Delta h}{h} < 0$ .

Assim,

$$\det M(n) \geq -\frac{1}{2} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} + \frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} - 2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n)u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}).$$

Como

$$\frac{\Delta h(\hat{x}_{\lambda_n})}{h(\hat{x}_{\lambda_n})} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} > 0,$$

se garantirmos

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} - 2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq 0, \quad (4.8)$$

obtemos  $\det M(n) > 0$ . Então, para finalizar a demonstração do lema basta garantir que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n > n_0$  vale (4.8). É isso que faremos a seguir:

Lembremos que estamos trabalhando no contexto do item 3 do passo 1 da demonstração do teorema 3.2. Nesse contexto, vimos em (3.19) que vale  $\bar{U}_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) < 0$ . Portanto

$$U_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) < 0 \Rightarrow u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) < u(\hat{x}_{\lambda_n}).$$

Isso, juntamente com o lema 4.4, fornece

$$u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) < u(\hat{x}_{\lambda_n}) \leq \frac{K}{|\hat{x}_{\lambda_n}|} e^{-\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}, \quad (4.9)$$

já que  $|\hat{x}_{\lambda_n}| \geq Q_0$ .

Além disso, escrevendo a equação (3.22) para o caso particular do sistema (4.2) obtemos

$$2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) \bar{U}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) + \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \leq 0.$$

Em (3.20), vimos que  $\bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) < 0$ , portanto

$$2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) \bar{U}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) \leq -\frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} \bar{V}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) < 0.$$

O que nos permite concluir que  $\bar{U}_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) < 0$ , uma vez que  $\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) \geq 0$ . Portanto

$$U_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) < 0 \Rightarrow u_{\lambda_n}(\tilde{x}_{\lambda_n}) < \xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) < u(\tilde{x}_{\lambda_n}),$$

e aplicando novamente o resultado do lema 4.4, obtemos a seguinte estimativa:

$$\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) < u(\tilde{x}_{\lambda_n}) \leq \frac{K}{|\tilde{x}_{\lambda_n}|} e^{-\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}. \quad (4.10)$$

Assim, juntando (4.9) e (4.10), temos

$$-2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq -2 \frac{K}{|\tilde{x}_{\lambda_n}|} e^{-\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}} \frac{K}{|\hat{x}_{\lambda_n}|} e^{-\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}} = -\frac{2K^2}{|\tilde{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}} |\hat{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}}.$$

Daí, substituindo a expressão para  $\frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})}$ , temos

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} - 2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq \frac{1}{8} \frac{1}{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^2 + |\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{5}{2}}} - \frac{2K^2}{|\tilde{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}} |\hat{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}}.$$

E como  $|\tilde{x}_{\lambda_n}| > \lambda_n > n \geq 1$ , vale  $|\tilde{x}_{\lambda_n}|^2 + |\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{5}{2}} \leq 2|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{5}{2}}$ . Daí,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} - 2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) &\geq \frac{1}{16} \frac{1}{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{5}{2}}} - \frac{2K^2}{|\tilde{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \frac{1}{|\hat{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \\
&= \frac{1}{16} \frac{1}{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{5}{2}}} \left( 1 - \frac{32K^2 |\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{5}{2}}}{|\tilde{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \frac{1}{|\hat{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \right) \\
&= \frac{1}{16} \frac{1}{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{5}{2}}} \left( 1 - 32K^2 \frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \frac{1}{|\hat{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \right).
\end{aligned}$$

Ou seja,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} - 2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq \frac{1}{16} \frac{1}{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{5}{2}}} \left( 1 - 32K^2 \frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \frac{1}{|\hat{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \right). \quad (4.11)$$

Como  $\hat{x}_{\lambda_n}, \tilde{x}_{\lambda_n} \in \Sigma_{\lambda_n}$ ,

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lambda_n \rightarrow +\infty \Rightarrow |\hat{x}_{\lambda_n}|, |\tilde{x}_{\lambda_n}| \rightarrow +\infty.$$

Daí,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\hat{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} = 0.$$

Desse modo, concluímos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  vale

$$32K^2 \frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{|\tilde{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \frac{1}{|\hat{x}_{\lambda_n}| e^{\frac{|\hat{x}_{\lambda_n}|}{\sqrt{2}}}} \leq \frac{1}{2}.$$

Isso implica, através de (4.11), que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$-\frac{1}{2} \frac{\Delta h(\tilde{x}_{\lambda_n})}{h(\tilde{x}_{\lambda_n})} - 2\xi_2(\tilde{x}_{\lambda_n}, \lambda_n) u_{\lambda_n}(\hat{x}_{\lambda_n}) \geq \frac{1}{32} \frac{1}{|\tilde{x}_{\lambda_n}|^{\frac{5}{2}}} > 0.$$

E é isso que queríamos garantir em (4.8). ■

Desse modo, unindo o lema 4.3 com a demonstração do teorema 3.2, temos o seguinte resultado sobre a simetria das soluções de (4.2):

**Teorema 4.8.** *Suponhamos que  $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}^3) \times C^2(\mathbb{R}^3)$  é uma solução de (4.2). Então existe um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  tal que  $u$  e  $v$  são radialmente simétricas com respeito à origem  $x_0$ , isto é,*

$$u(x) = u(r) \quad \text{e} \quad v(x) = v(r), \quad \text{onde } r = |x - x_0|.$$

Além disso,

$$u'(r) < 0 \quad \text{e} \quad v'(r) < 0, \quad \forall r = |x - x_0| > 0.$$



# Apêndice: Princípios do Máximo

Nos capítulos 2 e 3 utilizamos formas não usuais do Princípio do Máximo. O objetivo desse apêndice é listar tanto as formas usuais como as utilizadas por nós, a fim de fazer uma comparação e visualizar a necessidade da utilização das formas alternativas.

Os dois primeiros teoremas se referem às formas usuais do princípio do máximo:

**Teorema 1** (Princípio do Máximo Fraco, página 329 de [Eva98]). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \leq 0 & \text{em } \Omega \\ u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com  $c \geq 0$  e contínua em  $\Omega$ . Então  $u \leq 0$  em  $\Omega$ .

**Teorema 2** (Princípio do Máximo Forte, página 333 de [Eva98]). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto, limitado e conexo. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \leq 0 & \text{em } \Omega \\ u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com  $c \geq 0$  e contínua em  $\Omega$ , e  $u$  não é constante em  $\Omega$ . Então  $u < 0$  em  $\Omega$ .

No capítulo 2 nos deparamos com o problema (2.7), que não satisfaz a hipótese  $c \geq 0$  exigida nos teoremas acima. Desse modo, precisamos usar uma nova forma do princípio do máximo, que não tenha essa hipótese. O próximo teorema enfraquece a hipótese sobre  $c$ : denotando  $c^- = \max\{-c, 0\}$ , ao invés de exigirmos  $c^- = 0$ , como antes, exigimos apenas que  $c^-$  tenha norma pequena, mais precisamente:

**Teorema 3** (Princípio do Máximo para Domínios Estreitos, página 02 de [Bre99]). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto, limitado e conexo. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \leq 0 & \text{em } \Omega \\ u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com  $\|c^-\|_{\frac{n}{2}} < S_n$ , onde  $\|\cdot\|_{\frac{n}{2}}$  é a norma em  $L^{\frac{n}{2}}$  e  $S_n$  é a melhor constante de Sobolev em  $\mathbb{R}^n$ . Então  $u \leq 0$  em  $\Omega$ .

**Observação 4.** • A expressão para  $S_n$  é

$$S_n = \inf_{\phi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla \phi\|_2^2}{\|\phi\|_{\frac{2n}{n-2}}^2}.$$

• Notemos que

$$\begin{aligned}
\|c^-\|_{\frac{n}{2}} &= \left( \int_{\Omega} |c^-|^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \\
&\leq \left( \int_{\Omega} \|c^-\|_{\infty}^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}} \\
&= \|c^-\|_{\infty} \cdot \left( \int_{\Omega} 1 \right)^{\frac{2}{n}}.
\end{aligned}$$

Logo, denotando  $\int_{\Omega} 1 = |\Omega|$ , se  $\|c^-\|_{\infty}$  for limitada e  $\Omega$  for suficientemente pequeno para garantir

$$\|c^-\|_{\infty} \cdot \left( \int_{\Omega} 1 \right)^{\frac{2}{n}} < S_n,$$

o teorema pode ser aplicado. É daí que vem o nome do teorema.

### Demonstração:

Temos, por hipótese  $-\Delta u + cu \leq 0$  em  $\Omega$ . Multiplicando ambos os lados por  $u^+ = \max\{u, 0\}$  obtemos

$$-\Delta uu^+ + cuu^+ \leq 0. \quad (12)$$

Notemos que  $c = c^+ - c^-$  e  $uu^+ = (u^+)^2$ . Então a segunda parcela fica  $c^+(u^+)^2 - c^-(u^+)^2$ . Pela Fórmula de Green, se integrarmos a primeira parcela obtemos

$$\int_{\Omega} -\Delta uu^+ = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u^+ - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} u^+.$$

Como  $u \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ ,  $u^+ \equiv 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Além disso,  $\nabla u \nabla u^+ = |\nabla u^+|^2$ . Portanto, integrando 12 temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 + \int_{\Omega} c^+(u^+)^2 - \int_{\Omega} c^-(u^+)^2 \leq 0. \quad (*)$$

Usando a expressão de  $S_n$  temos que

$$\begin{aligned}
S_n &\leq \frac{\|\nabla u^+\|_2^2}{\|u^+\|_{\frac{2n}{n-2}}^2} \Rightarrow \\
S_n \|u^+\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 &\leq \|\nabla u^+\|_2^2 \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 \\
&\stackrel{(*)}{\leq} - \int_{\Omega} c^+(u^+)^2 + \int_{\Omega} c^-(u^+)^2 \\
&\leq \int_{\Omega} c^-(u^+)^2.
\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Hölder temos

$$\int_{\Omega} c^-(u^+)^2 \leq \|c^-\|_{\frac{n}{2}} \|u^+\|_{\frac{2n}{n-2}}^2$$

E por hipótese,  $\|c^-\|_{\frac{n}{2}} < S_n$ . Então, se  $\|u^+\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \neq 0$  temos

$$S_n \|u^+\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 < S_n \|u^+\|_{\frac{2n}{n-2}}^2,$$

que é um absurdo. Logo  $u^+ \equiv 0$ , ou seja,  $u \leq 0$  em  $\Omega$ . ■

No decorrer do capítulo 2, bem como no capítulo 3, precisamos novamente aplicar princípios do máximo, mas agora os domínios não são estreitos, e em geral não temos a hipótese sobre  $c$ . Para esses casos, encontramos um resultado no livro de Gilbarg & Trudinger:

**Teorema 5** (Princípio do Máximo de Hopf, página 35 de [GT01]). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo,  $n \geq 2$ . Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz*

$$\Delta u + cu \leq 0 \text{ em } \Omega,$$

*com  $c$  limitada em  $\bar{\Omega}$ . Suponhamos ainda que  $u$  não é constante. Então, independente do sinal de  $c$ ,  $u$  não pode ser zero em um ponto de mínimo interior.*

**Observação 6.** *O resultado acima não está explicitamente enunciado em [GT01], mas decorre de uma observação feita logo após a demonstração do teorema 3.5, na página 35 desse livro.* ♠

Os próximos teoremas não são princípios do máximo, mas sim lemas que falam sobre a derivada normal de  $u$ . Esses lemas são usados para demonstrar os respectivos princípios do máximo, mas também são importantes por si só, como podemos ver no texto. Primeiro enunciemos a forma usual desse resultado:

**Teorema 7** (Lema de Hopf, página 330 de [Eva98]). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado. Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  satisfaz*

$$-\Delta u + cu \leq 0 \text{ em } \Omega,$$

*com  $c \geq 0$  e contínua em  $\Omega$ . Suponhamos ainda que existe um ponto  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $u(x_0) \geq 0$  e que existe uma bola aberta  $B \subset \Omega$  com  $x_0 \in \partial B$ . Então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \doteq \langle \nabla u(x_0), \nu(x_0) \rangle > 0,$$

*onde  $\nu$  é a normal unitária exterior à  $B$  no ponto  $x_0$ .*

Em diversas oportunidades nos capítulos 2 e 3 precisamos de um resultado no formato do enunciado acima. Entretanto, da mesma forma que o princípio do máximo usual, o chamado Lema de Hopf usual não pôde ser utilizado no texto por ter hipóteses sobre o sinal de  $c$ . Daí buscamos um novo enunciado que se encaixasse nas nossas hipóteses, e o encontramos novamente no livro de Gilbarg & Trudinger:

**Teorema 8** (Lema de Hopf, página 34 de [GT01]). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo,  $n \geq 2$ , e  $x_0 \in \partial\Omega$ . Suponhamos que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz*

$$\Delta u + cu \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

*com  $c$  limitada em  $\bar{\Omega}$ . Suponhamos ainda que existe uma bola  $B \subset \Omega$  com  $x_0 \in \partial B$ , que  $u(x_0) > u(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ , e que  $u(x_0) = 0$ . Então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \doteq \langle \nabla u(x_0), \nu(x_0) \rangle > 0,$$

*onde  $\nu$  é a normal exterior à  $\partial\Omega$  no ponto  $x_0$ , desde que a derivada exista.*



# Referências Bibliográficas

- [BN91] Henri Berestycki e Louis Nirenberg. On the method of moving planes and the sliding method. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 22:01–37, 1991. 2
- [Bre99] Haïm Brezis. Symmetry in nonlinear pde's. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 65:01–12, 1999. 2, 47
- [BS00] Jérôme Busca e Boyan Sirakov. Symmetry results for semilinear elliptic systems in the whole space. *Journal of Differential Equations*, 163:41–56, 2000. 1, 2, 17
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1ª edição, 1998. 2, 47, 49
- [GNN79] Basilis Gidas, Wei-Ming Ni e Louis Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Communications in Mathematical Physics*, 68:209–243, 1979. 1
- [GNN81] Basilis Gidas, Wei-Ming Ni e Louis Nirenberg. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^n$ . *Mathematical Analysis and Applications, part A, Advances in Mathematics Supplementary Studies*, 7A:369–402, 1981. 1
- [GT01] David Gilbarg e Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 2001. 2, 10, 11, 49
- [Iko09] Norihisa Ikoma. Uniqueness of positive solutions for a nonlinear elliptic system. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 16(5):555–567, 2009. 18
- [LN93] Yi Li e Wei-Ming Ni. Radial symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^n$ . *Communications in Partial Differential Equations*, 18(5&6):1043–1054, 1993. 1
- [MZ10] Li Ma e Lin Zhao. Classification of positive solitary solutions of the nonlinear choquard equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 195:455–467, 2010. 2, 40
- [PR08] Filomena Pacella e Mythily Ramaswamy. Symmetry of solutions of elliptic equations via maximum principles. *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, 06:269–312, 2008. 2
- [PW67] Murray H. Protter e Hans F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Prentice-Hall, 1967. 2
- [RR04] Michael Renardy e Robert C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 2ª edição, 2004. 2
- [Ste70] Elias M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970. 39
- [Tro81] William C. Troy. Symmetry properties in systems of semilinear elliptic equations. *Journal of Differential Equations*, 42(3):400–413, 1981. 1, 2