**Integração numérica de sistemas
não lineares semi-implícitos
via teoria de controle geométrico**

Celso Bernardo da Nóbrega de Freitas

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva

São Paulo, outubro de 2011

Integração numérica de sistemas não lineares semi-implícitos via teoria de controle geométrico

Esta tese contém as correções e alterações
sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa
realizada por Celso Bernardo da Nóbrega de Freitas em 04/11/2011.

O original encontra-se disponível no Instituto de
Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva (orientador) - Poli-USP
- Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli - IME-USP
- Prof. Dr. Carlos Corrêa Filho - FEI-SP

Resumo

Neste trabalho aprimorou-se um método para aproximar soluções de uma classe de equações diferenciais algébricas (DAEs), conhecida como sistemas semi-implícitos quadrados. O método, chamado aqui de MII, fundamenta-se na teoria geométrica de desacoplamento para sistemas não lineares, aliada a técnicas eficientes de análise numérica. Ele usa uma estratégia mista com cálculos simbólicos e numéricos para construir um sistema explícito, cujas soluções convergem exponencialmente para as soluções do sistema implícito original. Duas versões do método são apresentadas. Com a primeira, chamada de MIIcond, procura-se obter matrizes numericamente estáveis, através de balanceamentos. E a segunda, MIIproj, aproveita uma interpretação geométrica para o campo vetorial obtido. As implementações foram desenvolvidas em *Matlab/simulink* com o pacote de computação simbólica. Através dos *benchmarks*, realizando inclusive comparações com outros métodos atualmente disponíveis, constatou-se que o MIIcond foi inviável em alguns casos, devido ao tempo de processamento muito extenso. Por outro lado, o MIIproj mostrou-se uma boa alternativa para esta classe de problemas, em especial para sistemas de alto índice.

Palavras-chave: teoria de controle geométrico, DAEs, sistemas semi-implícitos quadrados, integração numérica.

Abstract

This work improves a method to approximate solutions for a class of differential algebraic equations (DAEs), known as systems semi-implicit square. The method, called here MII, is based on geometric theory of decoupling for nonlinear systems combined with efficient techniques numerical analysis. It uses an algorithm that mixes symbolic and numerical calculations to build an explicit system, whose solutions converge exponentially to solutions of the original implicit system. Two versions of the method are given. The first one is called MIIcond, trying to obtain numerically stable matrices through balancing. The second one is the MIIproj, taking advantage of a geometric interpretation of the vector field there obtained. The implementations were developed in *Matlab*/*Simulink* with the symbolic toolbox. Through *benchmarks*, including performing comparisons with other methods currently available, it was found that the MIIcond was not feasible in some cases, due to processing time too long. On the other hand, the MIIproj presented itself as good alternative to this class of problems, especially for systems of high index.

Keywords: geometric control theory, DAEs, semi-implicit square systems, numerical integration.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
1.1 Considerações Preliminares	3
1.2 Notações	6
1.3 Histórico e Objetivos	7
1.4 Contribuições	7
1.5 Organização do Trabalho	7
2 Sistema Explícito Teórico	9
2.1 Teoria do Desacoplamento	9
2.2 Existência de Coordenadas Complementares	17
2.3 Método por Realimentação de Estado Estática - MI	18
2.4 Sistemas Explícitos versus Semi-Implícitos	19
2.5 Método por Injeção de Saída Generalizada - MII	23
2.6 Teoremas de Proximidade	24
3 Sistema Explícito Numérico	31
3.1 Coordenadas por Derivação de Saída	31
3.2 Complemento Ortogonal	33
3.3 Coordenadas Complementares via Complemento Ortogonal - MI_{proj}	35
3.4 Coordenadas Complementares via Preservação de Condicionamento - MI_{cond}	38
3.5 Sistemas Variantes no Tempo	40
3.6 Construção da Implementação	41
4 Integração Numérica	45
4.1 Estrutura dos Problemas e Características da Simulação	45
4.2 Problema MatrizCond	49
4.3 Problema Pêndulo	52
4.4 Problema SpaceShuttle	55
4.5 Problema Chemakzo	57
4.6 Problema Andrews	59
4.7 Problema TransAmp	61
4.8 Problema CarAxis	63

4.9	Conclusões sobre as Implementações	66
5	Conclusões	67
5.1	Sugestões para Pesquisas Futuras	68
6	Apêndice	71
6.1	Código-Fonte Construção da Implementação	71
6.2	Código-Fonte MatrizCond	78
6.3	Código-Fonte Pêndulo	80
6.4	Código-Fonte SpaceShuttle	81
6.5	Código-Fonte Chemakzo	84
6.6	Código-Fonte Andrews	86
6.7	Código-Fonte TransAmp	91
6.8	Código-Fonte CarAxis	95
	Referências Bibliográficas	99

Lista de Figuras

1.1	Soluções do Sistema Implícito evoluindo na variedade Γ	2
1.2	A trajetória de $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ aproximando $(x(t), u(t))$ permanece perto de Γ	3
1.3	Esquema com estratégia para aproximação das soluções do Sistema Implícito.	5
2.1	Exemplo de comportamento indesejado para o erro $y^{(0)}$ utilizando o MI.	22
3.1	Interpretação geométrica das componentes do campo vetorial τ_x do MII_{proj}	36
3.2	Diagrama de simulação, padrão <i>Matlab</i>	42

Lista de Tabelas

4.1	Problemas Simulados: abreviatura, nome, área e referência	48
4.2	Problema MatrizCond: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-4}$	50
4.3	Problema MatrizCond: MII, condicionamento	50
4.4	Problema Pêndulo: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-4}$	53
4.5	Problema Pêndulo: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-6}$	54
4.6	Problema SpaceShuttle: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-4}$	55
4.7	Problema SpaceShuttle: MII _{proj} , rtol = atol = h_0 , refinamento de passo	55
4.8	Problema Chemakzo: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-10}$	57
4.9	Problema Chemakzo: Outros Solvers	58
4.10	Problema Chemakzo: MII _{proj} , rtol = atol = $h_0 = 10^{-10}$, ode113	58
4.11	Problema Andrews: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-4}$	59
4.12	Problema Andrews: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-7}$	59
4.13	Problema Andrews: MII _{proj} , rtol = atol = h_0 , refinamento de passo	59
4.14	Problema Andrews: Outros Solvers	60
4.15	Problema Transamp: MII, rtol = atol = 10^{-4} , $h_0 = 10^{-6}$	61
4.16	Problema Transamp: MII, rtol = atol = 10^{-7} , $h_0 = 10^{-9}$	62
4.17	Problema TransAmp: Outros Solvers	62
4.18	Problema CarAxis: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-4}$	63
4.19	Problema CarAxis: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-7}$	63
4.20	Problema CarAxis: MII, rtol = atol = $h_0 = 10^{-10}$	64
4.21	Problema CarAxis: Outros Solvers	64
4.22	Problema CarAxis: MII _{proj} , rtol = atol = h_0 , ode113	65

Capítulo 1

Introdução

Equações diferenciais ordinárias surgem na modelagem de sistemas em muitas áreas da ciência e tecnologia. No entanto, muitos modelos matemáticos em engenharia mecânica, elétrica, química, etc. [Cam82, Dai89, Cam90, KD99, Sto98, HW96, HLR89, Sch94] são construídos naturalmente como equações diferenciais ordinárias com restrições algébricas. Tal formulação, conhecida como equação diferencial algébrica (DAE), pode ser vista como uma generalização do conceito de equação diferencial ordinária. As DAEs são sistemas da forma:

$$F(\dot{x}(t), x(t), t) = 0$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de variáveis independentes e $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável que expressa a dinâmica do sistema.

O problema de integração numérica das DAEs é ainda um campo ativo de pesquisa e parte do estado da arte pode ser encontrado nos livros textos [BCP96, AP98]. A dificuldade de integração é em geral medida por um inteiro, denominado *index*, que avalia o número suficiente de derivadas da equação original para que se possa, ao menos teoricamente, explicitar a dinâmica.

Existem vários pacotes de integração numérica de DAEs, chamados aqui de solvers¹, como por exemplo em [BMM06, BCP96, IM98, Cas03, SLV97, HW99], podendo ser encontrados também no sítio do projeto *Test Set for Initial Value Problem Solvers*², [MM08].

Este trabalho explora um método para resolução numérica de uma classe importante de DAEs chamada de sistemas semi-implícitos, da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & (1.1a) \\ y = h(x) \equiv 0 & (1.1b) \\ x(t_0) = x_0 & (1.1c) \end{cases}$$

Utilizando-se nomenclatura usual na teoria de controle, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o estado do sistema, para t pertencente a um intervalo $I \doteq [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$, condição inicial x_0 tal que $h(x_0) = 0$, $u \in \mathbb{R}^m$ representa sua entrada e $y \in \mathbb{R}^l$ sua saída.

A primeira parte do sistema (1.1a) corresponde à sua dinâmica, dada por uma equação diferencial ordinária na variável independente t , regida pelo campo vetorial diferenciável $f : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\mathcal{A}$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$. A segunda parte (1.1b), com $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^l$ sendo também uma função diferenciável, expressa as chamadas “restrições algébricas”, impondo que o estado do sistema deve sempre pertencer à variedade $\{x \in \mathcal{A} : h(x) = 0\}$.

Fixada uma função suave $u : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ qualquer, diz-se que uma função diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema se satisfizer ao mesmo tempo (1.1a), (1.1b) e (1.1c). Será visto que (1.1b) induz restrições no espaço (x, u) fazendo com que u não seja uma verdadeira entrada do sistema.

¹Emprega-se neste trabalho o estrangeirismo comumente utilizado *solver*.

² <http://pitagora.dm.uniba.it/~testset/>

Assim, como as entradas que geram soluções do sistema também não são arbitrárias, justifica-se o uso do termo pseudo-estado e pseudo-entrada para essas funções. Por esse motivo, é admissível o abuso de nomenclatura ao dizer que o par $(x(t), u(t))$ é uma solução de (1.1).

Será mostrado no decorrer do trabalho que existe uma subvariedade $\Gamma \subset \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m$ na qual evoluem as soluções de (1.1).

Denote-se por $\varphi(t, x_0, u(t))$ a solução de (1.1) no instante t , partindo-se de x_0 com entrada u . Para uma mesma condição inicial x_0 podem existir diferentes entradas $u(t)$ e $\tilde{u}(t)$ tais que $\varphi(t, x_0, u(t))$ e $\varphi(t, x_0, \tilde{u}(t))$ são soluções de (1.1), como ilustrado na Figura 1.1. Neste caso, o sistema não é completamente determinado e há alguma liberdade de escolha em $u(t)$.

Figura 1.1: Soluções do Sistema Implícito evoluindo na variedade Γ .

Contudo, o presente trabalho lidará somente com os sistemas ditos quadrados, nos quais a dimensão da entrada é a mesma da saída, *i.e.*, com $l = m$, implicando determinação completa das soluções como será visto adiante.

Por vezes aqui, sistemas semi-implícitos quadrados serão chamados simplesmente de sistemas implícitos, quando não prejudicar o entendimento.

O método objeto deste trabalho denomina-se MII. Ele é baseado em teoria geométrica de desacoplamento para sistemas não lineares, aliada a métodos numéricos eficientes, permitindo construir, através de um algoritmo simbólico/numérico, um campo vetorial $\tau(x, u)$, de forma que a aproximação das soluções de (1.1) pode ser feita através da equação diferencial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x, u); \quad x(t_0) = x_0; \quad u(t_0) = u_0 \quad (1.2)$$

onde $u_0 \in \mathbb{R}^m$ é completamente determinado, podendo ser visto como a única escolha para a qual o vetor $f(x_0, u_0)$ pertence ao espaço tangente à superfície que anula identicamente as saídas no ponto x_0 . E, $\tau : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ é um campo vetorial suave explícito, de maneira que a solução $(x(t), u(t))$ de (1.2) também é solução de (1.1).

Observa-se que, diferentemente das técnicas empregadas pelos demais solvers em [MM08], é possível aplicar diretamente os métodos usuais para integração numérica de equações diferenciais ordinárias ao Sistema Explícito (1.2).

Contudo, em geral, métodos numéricos geram erros em relação à solução analítica. Ou ainda, devido à precisão finita, pode ocorrer que a condição inicial $(\bar{x}_0, \bar{u}_0)$ não pertença exatamente a Γ , estando sim a uma distância $\varepsilon > 0$ pequena de Γ . Torna-se necessário construir um campo $\tau(x, u)$ robusto, no sentido de que se $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ é uma solução de (1.2) definida para t num intervalo I_1 compacto, partindo da condição inicial $(\bar{x}_0, \bar{u}_0)$, então $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ ficará próxima de soluções do

Sistema Implícito; de forma que $\|h(\bar{x}(t))\|$ ainda será pequeno para todo $t \in I_1$, guardadas certas condições. A Figura 1.2. indica o conceito.

Figura 1.2: A trajetória de $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ aproximando $(x(t), u(t))$ permanece perto de Γ .

1.1 Considerações Preliminares

Esta seção destina-se apenas a fornecer uma primeira ideia sobre o método, com o intuito de facilitar o posterior entendimento do papel desempenhado por cada tópico da teoria.

A estratégia utilizada pelo MII para a aproximação das solução do sistema (1.1) consiste nas etapas:

Etapas 1: Transformação do Sistema Implícito Original em um Sistema Explícito Teórico

O primeiro resultado importante para esta etapa é a construção do conjunto Γ no qual evoluem as soluções do Sistema Implícito. Ora, se $(x(t), u(t))$, definida num intervalo $I_1 \subset \mathbb{R}$, é uma solução para o (1.1), em particular $y = h(x(t)) \equiv 0, \forall t \in I_1$. Mais ainda, as derivadas de $y = h(x(t))$ em relação à t de todas as ordens também serão nulas, i.e., $\forall k > 0, \frac{d}{dt^k}(y) \equiv 0$. Para $k = 1$, por exemplo, a derivada da primeira componente da saída $y_1^{(0)} \doteq y_1$ é dada por $\frac{d}{dt}(y_1) = \frac{\partial h_1}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h_1}{\partial x} f(x, u) \doteq y_1^{(1)}$. Observando que se a derivada parcial de $y_1^{(1)}$ em relação à entrada u for não nula numa vizinhança $\mathcal{V}$ da condição inicial (x_0, u_0) , pode-se dizer que $y_1^{(1)} = y_1^{(1)}(x, u)$ depende explicitamente de u em $\mathcal{V}$, caso contrário, diz-se que $y_1^{(1)} = y_1^{(1)}(x)$ não depende explicitamente de u .

A derivada de ordem k da i -ésima componente da saída pode ser construída iterativamente, denotando-se $y_i^{(k+1)} \doteq \frac{d}{dt}(y_i^{(k)})$. Portanto, pode-se derivar sucessivamente cada uma das componentes de saída, $y_i = h_i(x)$, para $i \in \{1, \dots, m\}$, até que $y_i^{(\rho_i)}$ dependa explicitamente da u em $\mathcal{V}_i$ (vide Observação 2.15). Para fixar ideias, assume-se que a vizinhança $\mathcal{V}_i$ na qual $y_i^{(\rho_i)}$ depende explicitamente de u é igual a $\mathcal{A}$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

O inteiro $\rho \doteq \sum_{i=1}^m \rho_i$ é chamado de grau relativo do sistema. O valor máximo entre as constantes $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ recebe o nome de *index* de uma DAE.³

Originam-se então ρ funções suaves, denotadas por $Y^{(\rho-1)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^\rho$, escritas como:

$$Y^{(\rho-1)}(x) = \left(y_1^{(0)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x) \right) \quad (1.3)$$

³Como sistemas explícitos podem ser vistos como DAEs de *index* zero e o MII obtém uma representação explícita para sistemas semi-implícitos quadrados, o MII pertence à classe dos métodos de redução de *index*.

Definem-se também m funções suaves $y^{(\rho)} : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, dadas por:

$$y^{(\rho)}(x, u) = \left(y_1^{(\rho_1)}(x, u), \dots, y_m^{(\rho_m)}(x, u) \right) \quad (1.4)$$

Vetorialmente, indicar-se-á $Y^{(\rho)}(x, u) = (Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho-1)}(x, u))$.

Como $h(x, u) \equiv 0$ implica $Y^{(\rho)}(x, u) = 0$, pois ambas expressões impõem que a saída do Sistema Implícito seja identicamente nula, vale que $\Gamma \doteq \{(x, u) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m : Y^{(\rho)}(x, u) = 0\}$. É claro que a norma $\|Y^{(\rho)}(\bar{x}, \bar{u})\|$ é uma medida da distância do ponto $(\bar{x}, \bar{u})$ em relação à variedade Γ .

Cabe frisar do ponto de vista computacional que a construção da função $Y^{(\rho)}(x, u)$ será feita pelo Algoritmo (3.2), implementado em *Matlab* utilizando cálculos simbólicos.

O segundo resultado importante para a definição do método, apresentado no Corolário 2.20, diz que sob certas condições existe uma função suave $\hat{x} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$, aqui chamada de *coordenadas complementares*, tal que a aplicação $\Psi : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, dada por $\Psi(x, u) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho)}(x, u))$ é um difeomorfismo entre uma vizinhança $\mathcal{W}$ de (x_0, u_0) e $\Psi(W)$. Como consequência, sobre as soluções $(x(t), u(t))$ do Sistema Implícito vale que $\Psi(x(t), u(t)) = (\hat{x}(x), 0)$.

Portanto, pode-se expressar em coordenadas $(\hat{x}, Y^{(\rho)})$ o Sistema Implícito (1.1) restrito à vizinhança $\mathcal{W}$, obtendo-se:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}) & (1.5a) \\ \dot{Y}^{(\rho)} = -\gamma Y^{(\rho)} & (1.5b) \\ \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 & (1.5c) \\ Y^{(\rho)}(t_0) = Y_0^{(\rho)} = 0 & (1.5d) \end{cases}$$

onde:

- $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^\rho$ é tal que $\Psi(x_0, u_0) = (\hat{x}_0, 0)$;
- $\theta(\hat{x}, Y^{(\rho)})$ é a chamada *dinâmica zero* do sistema, consistindo na expressão de $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f(x, u)$ em coordenadas $(\hat{x}, Y^{(\rho)})$;
- $\gamma > 0$ é uma constante, aqui denominada *parâmetro de convergência*

Note-se ainda que a solução analítica de (1.5b) é dada por $Y^{(\rho)}(t) = e^{-\gamma(t-t_0)} Y_0^{(\rho)} \equiv 0$.

O MII é estabelecido, escrevendo novamente o sistema (1.5) nas coordenadas originais (x, u) :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x, u) \\ \text{Onde} \quad T(x, u) \tau(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} (f(x, u)) \\ -\gamma Y^{(\rho)}(x, u) \end{pmatrix} \\ \text{com} \quad T(x, u) \doteq \frac{\partial \Psi}{\partial (x, u)} \Big|_{(x, u)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.6)$$

cujas soluções ficam próximas das soluções do Sistema Implícito, desde que a distância entre a condição inicial dada e a variedade Γ seja pequena. O motivo intuitivo para isso, formalizado na Seção 2.6, é que, mesmo para um erro inicial em relação à variedade $Y_0^{(\rho)}$ diferente de zero, a função $Y^{(\rho)}(t) = e^{-\gamma(t-t_0)} Y_0^{(\rho)}$ é uma função estritamente decrescente, cujo limite é zero. Entretanto, não

se pode integrar numericamente (1.6) por não se ter a expressão para o campo $\tau(x, u)$. Isto pois se sabe que existe, mas ainda não se fixou uma escolha de coordenadas complementares $\hat{x}(x)$, razão pela qual utilizou-se o adjetivo “teórico” para o sistema (1.6).

Etapa 2: Transformação do Sistema Explícito Teórico em um Sistema Explícito Numérico

De acordo com a Seção 3.2, é efetuada uma escolha numérica de coordenadas complementares $\hat{x}(x)$, possibilitando o cálculo de $\tau(x, u)$ pontualmente. Será utilizado o conceito de complemento ortogonal para gerar uma matriz $R(x)$ de dimensão $n \times (n - \rho)$, obtendo:

$$T(x, u) = \left(\begin{array}{c|c} R(x) & 0 \\ \hline \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \hline \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{array} \right) \quad (1.7)$$

Onde $\frac{\partial \hat{x}(x)}{\partial x}$ foi imposto como sendo a matriz $R(x)$, resultando $T(x, u)$ não singular.

São expostas duas opções de coordenadas complementares, cujas ideias principais são: para a primeira, chamada de MII_{proj} , recalcular o complemento ortogonal em todo ponto, aproveitando a estrutura especial que a inversa de T assume, como discutido na Seção 3.3; e a MII_{cond} , com coordenadas complementares como transformações lineares fixas por intervalos de tempo, trocadas quando o condicionamento dos blocos diagonais da matriz $T(x, u)$ ultrapassar uma tolerância, conforme Seção 3.4.

Etapa 3: Integração Numérica do Sistema Explícito Numérico

Utilizando métodos clássicos para EDOS, integrar numericamente o Sistema Explícito Numérico, processo este aqui indicado simplesmente por simulação. As simulações foram efetuadas com o *Matlab/Simulink*.

Importante esclarecer que a Etapa 2 também é feita durante a simulação, já que o campo $\tau(x, u)$ precisa ser avaliado somente sobre os pontos (x_{t_k}, u_{t_k}) , onde t_k , para $k \in \{0, \dots, N\}$, são os instantes de tempo gerados pela discretização do intervalo de tempo na simulação.

O esquema abaixo resume as três etapas.

Figura 1.3: Esquema com estratégia para aproximação das soluções do Sistema Implícito.

1.2 Notações

Descrevem-se aqui as principais notações e nomenclaturas:

- Todos os conjuntos abertos são tomados sobre topologia euclidiana.
- Para o ponto $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|$ indica a norma euclidiana, a menos de menção contrária.
- Para o ponto $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty$ indica a norma do máximo.
- Os nomes “função” e “aplicação” são empregados como sinônimos, mesmo quando o contradomínio possuir dimensão maior do que 1.
- O termo função suave será empregado para funções de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Se $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função suave, com I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $t_1 \in I$, $\dot{x}(t_1)$ indica $\frac{d}{dt}(x)|_{t_1}$. Nos extremos do intervalo são tomadas as derivadas laterais apropriadas.
- Se $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função suave, com $\mathcal{U}$ uma vizinhança de a em $\mathbb{R}^n$, a transformação linear $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ será identificada com a matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_a\right)$ quando isto não prejudicar o entendimento.
- Para o campo vetorial suave $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\mathcal{U}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$, e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, a Derivada de Lie $L_h f(x)$ é entendida como $\frac{\partial f}{\partial h}\bigg|_x$, *i.e.*, a derivada direcional de f na direção $h(x)$ avaliada no ponto x .
- O espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$ é identificado com o espaço $\mathbb{R}^{n \times m}$.
- Para a matriz M , a notação $M_{n \times m}$ indica que M tem dimensão $n \times m$.
- A matriz identidade de dimensão $n \times n$ é denotada por $I_{n \times n}$.
- A notação $M^\top$ indica a transposta de uma matriz M .
- Para vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\langle u, v \rangle = u^\top v$ denota o produto interno usual.
- Se M é uma matriz em $\mathbb{R}^{n \times m}$, a norma da matriz $\|M\|$ é igual a $\sup \{\|Mx\|, \forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.
- Se V e W são subespaços de $\mathbb{R}^n$ então $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ significa que $\mathbb{R}^n$ é soma direta de V e W .
- Se $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^m$, $(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ indica o vetor coluna de $\mathbb{R}^{n+m}$ formado pela justaposição de u e v .
- Se V é um espaço vetorial em $\mathbb{R}^n$, $V^\perp$ indica o complemento ortogonal de V .
- Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, a função $\text{proj}_V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ indica a projeção ortogonal sobre o espaço V , *i.e.*, associa um vetor $x \in \mathbb{R}^n \equiv V \oplus V^\perp$ à sua projeção em V .
- Se $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, a função $\text{proj}_{\mathbb{R}^n} : E \rightarrow E$ indica a projeção sobre o espaço $\mathbb{R}^n$.

1.3 Histórico e Objetivos

O método MII começou a ser definido em [SW02], abordando principalmente a Etapa 1, através da teoria do desacoplamento.

O uso do complemento ortogonal foi proposto em [SDS05], possibilitando as etapas 2 e 3. Ainda em [SDS05], foi feito um experimento numérico mostrando vantagens do MII em relação ao método clássico (MI) por realimentação de estado estática, conforme [NS90].

Posteriormente, [Sou06] repassa a teoria para a Etapa 1, generalizando-a para campos vetoriais variantes no tempo e definindo uma técnica para busca de condições iniciais compatíveis com as restrições. Além disso, realizaram-se mais simulações ilustrativas.

Em seguida, implementa-se em [Fre07] um algoritmo utilizando cálculos simbólicos para a construção automática das simulações. Outras comparações entre o MI e MII também são feitas por meio de simulações, reforçando as qualidades do MII.

Finalmente, o principal objetivo do atual trabalho foi empregar ferramentas de análise numérica na Etapa 2, melhorando-o em termos de precisão e performance. Por fim, para testar os resultados obtidos, foram utilizados problemas difíceis (*benchmarks*) nas simulações.

1.4 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são:

- Maior detalhamento dos teoremas e provas que discutem a proximidade entre as soluções do MII e do Sistema Implícito na Seção 2.6. Em especial, uma reformulação destes resultados que consistem no Teorema 2.27.
- Interpretação geométrica e justificativa da escolha de coordenadas complementares MII_{proj} , presente na Seção 3.3.
- Definição de coordenadas complementares por preservação de condicionamento MII_{cond} , registrada na Seção 3.4.
- Por à prova os resultados obtidos através de simulações de *benchmarks*, análise dos resultados e comparação com outros métodos (Capítulo 4).

1.5 Organização do Trabalho

O segundo capítulo corresponde à Etapa 1 descrita na Seção 1.1. Nele, estudam-se conceitos de controle geométrico como a teoria do desacoplamento, permitindo a construção das coordenadas $Y^{(\rho)}(x, u)$ e provando a existência de coordenadas complementares $\hat{x}(x)$. Na última seção incluem-se os teoremas que analisam a proximidade entre as soluções do MII e o Sistema Implícito.

A Etapa 2 é assunto do terceiro capítulo, exibindo-se duas possibilidades numéricas para escolha de coordenadas complementares. Além disso, são exibidos os algoritmos necessários na construção das simulações para MII_{proj} e MII_{cond} .

O quarto capítulo traz alguns exemplos ilustrativos da teoria, abrangendo a Etapa 3. Simulações com *benchmarks* são efetuadas, bem como a análise dos resultados e comparação com outros métodos.

No apêndice constam os códigos-fonte utilizados para as simulações.

Capítulo 2

Sistema Explícito Teórico

Este capítulo registra sucintamente a teoria necessária para a obtenção de um sistema explícito teórico de equações diferenciais, a partir de um sistema quadrado semi-implícito, utilizando-se para isso de controle geométrico.

Com a teoria de desacoplamento, avalia-se sob quais condições pode-se obter uma transformação para um sistema de controle explícito, a fim de que cada uma das componentes da saída seja afetada por apenas uma das componentes de entrada. Discute-se em seguida a existência de coordenadas complementares que, diferentemente do pseudo-estado, representarão a evolução das soluções “vistas de dentro” do conjunto que anula identicamente as saídas. Inclui-se então a estrutura do método MI por realimentação de estado estática utilizando essas ferramentas, passando pela relação entre sistemas explícitos e semi-implícitos com essa abordagem, bem como algumas questões sobre a sua aplicação.

Finalmente, o método MII objeto deste trabalho é apresentado, baseando-se em uma transformação de coordenadas sobre o espaço de estados e de entradas, realimentação de estado dinâmica e uma injeção generalizada da saída. Para formalização das ideias, estudam-se teoremas que discutem como as soluções desse novo sistema aproximam as soluções do sistema implícito original.

2.1 Teoria do Desacoplamento

Por um momento, será esquecido o fato de que esta dissertação estuda sistemas implícitos (1.1), para estudar certas propriedades de sistemas explícitos, onde a restrição algébrica (1.1b) está ausente.

Seja o seguinte sistema não linear afim explícito, dado por sua representação de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$(2.1b)$$

Onde:

x representa o estado do sistema, definido num aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$.

$u = (u_1, \dots, u_m) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de entrada arbitrária para o sistema.

$y \in \mathbb{R}^m$ é o espaço de saída.

$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial que descreve a dinâmica do sistema para entrada nula.

$g_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vetorial que descreve como a entrada u_i modifica a dinâmica do sistema.

$h : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$ função que associa um estado do sistema à sua saída.

$t \in I$ é a variável de tempo, com $I = [t_0, t_f] \in \mathbb{R}$ um intervalo no qual estarão definidas as soluções do sistema para uma determinada condição inicial $x_0 \in \mathcal{A}$ no instante t_0 . Sem perda de generalidade, fixa-se $t_0 = 0$, pois o sistema é invariante no tempo.

Para facilitar a exposição da teoria supõe-se que todas as funções acima são analíticas. Em particular, há existência e unicidade de soluções pois o campo vetorial no membro direito de (2.1a) é de classe $\mathcal{C}^1$ [Sot79].

Simplificando a notação, a dependência de t ou x será omitida quando possível.

Serão denotadas por $y_i(0, x_0, t, u)$, para $i \in \{1, \dots, m\}$, as saídas do sistema (2.1) no instante t , aplicando-se a entrada u , a partir de da condição inicial x_0 no instante $t_0 = 0$.

Definição 2.1 Para o sistema (2.1) uma saída y_i é dita invariante sob uma entrada u_j se para quaisquer $u = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_m)$ e $\tilde{u} = (u_1, \dots, \tilde{u}_j, \dots, u_m)$.

$$y_i(x_0, t, u) = y_i(x_0, t, \tilde{u}), \forall x_0 \in \mathcal{A}, \forall t \in I \quad (2.2)$$

Ou seja, a entrada u_j não altera a saída y_i , independente da escolha de u_j .

Teorema 2.2 Considere o conjunto de funções abaixo:

$$L_{g_j} L_{X_1} \dots L_{X_k} h_i(x), \forall k \geq 0, (X_1, \dots, X_k) \in \{f, g_1, \dots, g_m\}, x \in \mathcal{A} \quad (2.3)$$

Então, já que o sistema (2.1) é analítico, a saída y_i é invariante sob uma entrada u_j em $\mathcal{A}$ se e somente se (2.3) é identicamente nula para todo $x \in \mathcal{A}$.

Prova Vide [NS90] $\square$

Definição 2.3 O sistema (2.1) é chamado de desacoplado se, após possível reordenação das entradas, valem as seguintes propriedades para todo $i \in \{1, \dots, m\}$:

- (i) A saída y_i é invariante sob as entradas u_j , com $i \neq j$;
- (ii) A saída y_i é não invariante com respeito à entrada u_i .

Utilizando o Teorema 2.2 obtém-se uma condição necessária e suficiente para (i):

$$\begin{aligned} \forall j \neq i, L_{g_j} L_{X_1} \dots L_{X_k} h_i(x) &\equiv 0 \\ \forall k \geq 0, (X_1, \dots, X_k) &\in \{f, g_1, \dots, g_m\}, x \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (2.4)$$

De (2.3), extrai-se também a influência de u_i sobre y_i

$$\begin{aligned} L_{g_i} L_{X_1} \dots L_{X_k} h_i(x) \\ \forall k \geq 0, (X_1, \dots, X_k) &\in \{f, g_1, \dots, g_m\}, x \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para (ii), considere-se o seguinte subconjunto de (2.5):

$$L_{g_i} L_f^k h_i(x), \forall k \geq 0, x \in \mathcal{A} \quad (2.6)$$

Proposição 2.4 Se vale o item (i) da Definição 2.3 e se (2.6) é identicamente nula para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, então:

$$L_{g_i} L_f^k h_i(x) \equiv 0, \forall k \geq 0, x \in \mathcal{A} \quad (2.7)$$

Então todas as funções em (2.5) também serão.

Prova Basta notar que a expressão (2.5) assume somente duas formas, para $r, s \geq 0$ e $x \in \mathcal{A}$.

Se $i \neq j$: $L_{g_i} L_{X_1} \dots L_{X_r} \underbrace{L_{g_j}^s h_i(x)}_{\equiv 0} \equiv 0$, devido à (2.4).

Caso contrário: $L_{g_i} L_{X_1} \dots L_{X_r} \underbrace{L_{g_i}^s h_i(x)}_{\equiv 0} \equiv 0$, devido à (2.7). $\square$

Corolário 2.5 *Se um sistema (2.1) é desacoplado, então para todo $i \in \{1, \dots, m\}$:*

$$L_{g_i} L_f^k h_i(x) \neq 0, \text{ para algum } k \geq 0 \text{ e } x \in \mathcal{A} \quad (2.8)$$

Prova Supor por absurdo que não, então seriam válidas as hipóteses do teorema anterior. Logo, todas as funções em (2.5) seriam nulas e o sistema seria desacoplado pois o item (i) da Definição não seria satisfeito.

Observação 2.6 (Derivações de Saída Sucessivas) *Assumindo-se agora que o sistema (2.1) é desacoplado, a seguinte construção é admissível para $i \in \{1, \dots, m\}$:*

A partir de cada componente $y_i(x) = h_i(x)$ da saída, fixa-se $h_i^{(0)}(x) \doteq h_i(x)$.

Daí, derivando-se em relação a t , obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{h}_i^{(0)} &= \frac{d}{dt} \left(h_i^{(0)}(x(t)) \right) \\ &= \frac{\partial h_i^{(0)}}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial h_i^{(0)}}{\partial x} \left(f + \sum_{k=1}^m g_k u_k \right) \\ &= \frac{\partial h_i^{(0)}}{\partial x} f + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial h_i^{(0)}}{\partial x} g_k \right) u_k \\ &= L_f h_i^{(0)} + \sum_{k=1}^m \left(L_{g_k} h_i^{(0)} \right) u_k \\ &= L_f h_i + \sum_{k=1}^m (L_{g_k} h_i) u_k \quad (\text{por definição}) \\ &= L_f h_i + u_i L_{g_i} h_i \quad (\text{pois } L_{g_k} h_i = 0 \text{ para } k \neq i, \text{ devido à (2.4)}) \\ &\doteq h_i^{(1)}(x, u) \end{aligned}$$

De modo geral, enquanto $h_i^{(j)}$ for função somente de x , i.e., $h_i^{(j)}(x, u) = h_i^{(j)}(x) = L_f^j h_i(x)$, constrói-se $h_i^{(j+1)}$ derivando-se novamente:

$$\begin{aligned} \dot{h}_i^{(j)} &= \frac{d}{dt} \left(h_i^{(j)}(x(t)) \right) \\ &= \frac{\partial h_i^{(j)}}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial h_i^{(j)}}{\partial x} \left(f + \sum_{k=1}^m g_k u_k \right) \\ &= \frac{\partial h_i^{(j)}}{\partial x} f + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial h_i^{(j)}}{\partial x} g_k \right) u_k \\ &= L_f h_i^{(j)} + \sum_{k=1}^m \left(L_{g_k} h_i^{(j)} \right) u_k \\ &= L_f L_f^j h_i + \sum_{k=1}^m \left(L_{g_k} L_f^j h_i \right) u_k \quad (\text{por construção}) \\ &= L_f^{j+1} h_i + u_i L_{g_i} L_f^j h_i \quad (\text{pois } L_{g_k} L_f^j h_i = 0 \text{ para } k \neq i, \text{ devido à (2.4)}) \\ &\doteq h_i^{(j+1)}(x, u) \end{aligned}$$

Finalmente, as sucessivas derivações geram uma expressão que depende explicitamente de u no estágio ρ_i . Isso ocorre necessariamente para algum ρ_i finito, devido ao Corolário 2.5. Assim:

$$\begin{aligned} \dot{h}_i^{(\rho_i-1)} &= L_f h_i^{(\rho_i-1)} + u_i L_{g_i} h_i^{(\rho_i-1)} \\ &= L_f^{\rho_i} h_i + u_i L_{g_i} L_f^{\rho_i-1} h_i \\ &\doteq h_i^{(\rho_i)}(x, u) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Onde $L_{g_i} L_f^{\rho_i-1} h_i(\bar{x}) \neq 0$ para algum $\bar{x} \in \mathcal{A}$

Utilizar-se-á também a notação alternativa $y_i^{(j)} \doteq h_i^{(j)}$ para $j > 0$, enfatizando que essas expressões provêm de sucessivas derivações das coordenadas de saída do sistema (2.1).

Definição 2.7 Nesse contexto, define-se o número característico ρ_i como o menor inteiro não negativo tal que $y_i^{(\rho_i)}$ dependa explicitamente de u , ou seja, para $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\left\{ \begin{array}{llll} & y_i(x) & \doteq & y_i^{(0)}(x) \\ \dot{y}_i^{(0)} & = \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial x} \dot{x} & = & L_f y_i^{(0)}(x) \doteq y_i^{(1)}(x) \\ \vdots & & & \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-2)} & = \frac{\partial y_i^{(\rho_i-2)}}{\partial x} \dot{x} & = & L_f y_i^{(\rho_i-2)}(x) \doteq y_i^{(\rho_i-1)}(x) \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} & = \frac{\partial y_i^{(\rho_i-1)}}{\partial x} \dot{x} & = & L_f y_i^{(\rho_i-1)}(x) + u_i L_{g_i} y_i^{(\rho_i-1)}(x) \doteq y_i^{(\rho_i)}(x, u) \end{array} \right. \quad (2.10a)$$

$$\text{Observando que: } \left\{ \begin{array}{ll} L_{g_i} y_i^{(k)}(x) \equiv 0 & \forall x \in \mathcal{A}, \quad \forall k \in \{0, \dots, \rho_i - 2\} \\ L_{g_i} y_i^{(\rho_i-1)}(\bar{x}) \neq 0 & \text{para algum } \bar{x} \in \mathcal{A} \end{array} \right. \quad (2.10b)$$

Note que aqui para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $\rho_i \geq 1$ pois $h(x)$ não depende explicitamente de u por hipótese.

Indica-se também o subconjunto:

$$\mathcal{A}_0 \doteq \left\{ x \in \mathcal{A} : L_{g_i} y_i^{(\rho_i-1)}(x) \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \right\} \quad (2.11)$$

No qual a entrada u_i influencia instantaneamente a saída y_i

Definiremos também o grau relativo como a soma dos número característicos do sistema, i.e.:

$$\rho \doteq \sum_{i=1}^m \rho_i \quad (2.12)$$

Para exemplos simples desse processo de derivações de saída sucessivas, consultar Seções 4.2 e 4.3.

Ao maior número característico entre $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$, dá-se o nome de *index* do sistema (2.1), representando o “número de integrações entre” as entradas e saídas do sistema. Ele desempenha um papel importante no problema de desacoplamento, como será visto neste capítulo, além de fornecerem uma medida de dificuldade para a integração numérica desta classe de problemas.

Salienta-se que, diferentemente deste trabalho, algumas referências definem o número característico ρ_i como o menor inteiro não negativo tal que $y_i^{(\rho_i+1)}$ dependa explicitamente de u ao invés de $y_i^{(\rho_i)}$.

Definição 2.8 Um sistema (2.1) é dito fortemente desacoplado se vale o item (i) da Definição 2.3 e se existem números característicos $\rho_1, \dots, \rho_m$ tais que se $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$.

Caso o item (i) não for satisfeito em $\mathcal{A}$ inteiro, mas se $x_0 \in \mathcal{A}$ possuir uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ na qual o sistema é fortemente desacoplado, então diz-se que esta propriedade é *local*.

Em geral, (2.1) não é desacoplado, contudo pode-se tentar alterar a sua dinâmica adicionando uma realimentação de estado, como abaixo.

Definição 2.9 Para o sistema (2.1) uma realimentação de estado estática tem o formato:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (2.13)$$

Onde $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ e $v \in \mathbb{R}^m$.

Com $\det \beta(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Aplicando-se a realimentação de estado (2.13) ao sistema (2.1), obtém-se o sistema modificado em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^m \tilde{g}_i(x) v_i(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.14a)$$

$$(2.14b)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &\doteq f(x) + \sum_{j=1}^m \tilde{g}_j(x) \alpha_j(x) \\ \tilde{g}_i(x) &\doteq \sum_{j=1}^m g_j(x) u_i \beta_{ji}(x) \\ v &\doteq -\beta^{-1}(x) \alpha(x) + \beta^{-1}(x) u \end{aligned} \quad (2.15)$$

Denotando as operações matricialmente e substituindo (2.15) em (2.14a), obtém-se:

$$\dot{x} = \tilde{f} + \tilde{g}v = (f + g\alpha) + (g\beta)(-\beta^{-1}\alpha + \beta^{-1}u) = f + g\alpha - g\alpha + gu = f + gu \quad (2.16)$$

Logo, o sistema modificado é a expressão do sistema original com uma entrada reparametrizada por uma transformação, dada pela realimentação de estado estática.

Inclui-se abaixo o problema do desacoplamento que o primeiro método estudado neste trabalho busca resolver.

Problema 2.10 (Problema do Desacoplamento) Para o sistema (2.1), como obter uma realimentação de estado estática (2.13) tal que o sistema modificado (2.14) seja fortemente desacoplado?

Definição 2.11 Para um sistema (2.1) não necessariamente desacoplado é possível aplicar-se derivações de saída sucessivas (Observação 2.6). Assim como no caso desacoplado $\dot{y}_i^{(j)} = L_f y_i^{(j)}(x) = y_i^{(j+1)}$ para $j \in \{0, \dots, \rho_i - 2\}$. Já que agora não é garantido (2.4), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} &= L_f h_i^{(\rho_i-1)} + \sum_{k=1}^m \left(L_{g_k} h_i^{(\rho_i-1)} \right) u_k \\ &= L_f h_i^{(\rho_i-1)} + \left(L_{g_1} h_i^{(\rho_i-1)} \dots L_{g_m} h_i^{(\rho_i-1)} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \\ &\doteq y_i^{(\rho_i)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Agrupando matricialmente esses resultados, indicar-se-á:

$$y^{(\rho)}(x, u) = a(x) + b(x)u \quad (2.18a)$$

Onde:

$$y^{(\rho)} \doteq \begin{pmatrix} y_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(\rho_m)} \end{pmatrix}, \quad a(x) \doteq \begin{pmatrix} L_f h_1^{(\rho_1-1)} \\ \vdots \\ L_f h_m^{(\rho_m-1)} \end{pmatrix}, \quad u \doteq \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad (2.18b)$$

$$b(x) \doteq \begin{pmatrix} L_g h_1^{(\rho_1-1)} \\ \vdots \\ L_g h_m^{(\rho_m-1)} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} L_{g_1} h_1^{(\rho_1-1)} & \dots & L_{g_m} h_1^{(\rho_1-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} h_m^{(\rho_1-1)} & \dots & L_{g_m} h_m^{(\rho_1-1)} \end{pmatrix}$$

Identificando-se $\mathbb{R}^{m \times m}$ com o espaço das matrizes reais $m \times m$, $b(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ recebe o nome de matriz de desacoplamento.

Observação 2.12 Observe que num sistema (2.1) fortemente desacoplado, para todo $x \in \mathcal{A}$ a matriz de desacoplamento $b(x)$ é:

- Diagonal, já que o item (i) da Definição 2.3 equivale a (2.4), então $L_{g_i} h_j^{(\rho_i-1)} = 0$ para $i \neq j$.
- Tal que todos elementos de sua diagonal são não nulos em $\mathcal{A}_0$, pelo Corolário 2.5 e pela definição de $\mathcal{A}_0$ em (2.11), ressaltando que por ser um sistema fortemente desacoplado $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$.

Lema 2.13 Uma realimentação de estado estática $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$, não altera os número característicos de (2.1). Além disso, denotando a matriz de desacoplamento do sistema modificado por $\tilde{b}(x)$, e a da sistema original por $\underline{b}(x)$, vale que $\tilde{b}(x) = b(x)\beta(x)$.

Prova Vide [NS90] $\square$

Teorema 2.14 Considere-se o sistema (2.1), com números característicos $\rho_1, \dots, \rho_m$. Então o Problema de Desacoplamento 2.10 pode ser resolvido por uma realimentação de estado estática (2.13) se e somente se:

$$\text{posto } b(x) = m, \forall x \in \mathcal{A} \quad (2.19)$$

Prova ($\Leftarrow$)

Aplicando-se derivações de saída sucessivas obtém-se a expressão (2.18a) correspondente da forma $y^{(\rho)}(x, u) = a(x) + b(x)u$. Como assumimos que $\text{posto } b(x) = m, \forall x \in \mathcal{A}$, $b^{-1}(x)$ está bem definida neste domínio. Escolhe-se então a realimentação de estado estática:

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (2.20)$$

$$\text{Com } \alpha(x) = -b^{-1}(x)a(x) \text{ e } \beta(x) = b^{-1}(x)$$

Assim:

$$\begin{aligned} y^\rho(x) &= a(x) + b(x)u \\ &= a(x) + b(x)(\alpha(x) + \beta(x)v) \\ &= a(x) + b(x)(-b^{-1}(x)a(x) + b^{-1}(x)v) \\ &= v \end{aligned} \quad (2.21)$$

Logo, o sistema em malha fechada (2.14) é desacoplado pois existem por hipótese $\rho_1, \dots, \rho_m$ e cada uma das saídas y_i é influenciada somente pela entrada u_i , para $i \in \{1, \dots, m\}$.

($\Rightarrow$)

A existência de uma solução para o Problema de Desacoplamento diz que é possível projetar uma

realimentação de estado estática $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$, com $\beta(x)$ não singular, tal que o sistema modificado (2.14) seja desacoplado. Ademais, pela Observação (2.12), a matriz de desacoplamento desse sistema modificado $\tilde{b}(x)$ possui posto máximo para todo $x \in \mathcal{A}$. Assim:

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det(\tilde{b}(x)) \\ &= \det(b(x)\beta(x)) && \text{pelo Lema 2.13} \\ &= \det(b(x))\det(\beta(x)) \end{aligned}$$

Portanto $\det(b(x)) \neq 0$ e como $b(x)$ é uma matriz quadrada de tamanho m , conclui-se a tese. $\square$

Apresenta-se a seguir o teorema que, juntamente com as coordenadas complementares, possibilitará a obtenção da transformação de coordenadas sobre o espaço de estados necessária para a obtenção do método objeto deste trabalho. Esta prova é incluída para mostrar que a imposição de sistemas afins não será necessária posteriormente para o método.

Observação 2.15 *Seja um sistema não linear explícito, dado por sua representação de estado:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.22a) \\ (2.22b) \end{matrix}$$

Onde mantém-se a mesma notação e dimensões de (2.1), com a diferença que:

$f : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial analítico que descreve a dinâmica do sistema para o estado x com entrada u .

$h : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função analítica que dá a saída do sistema.

Utilizaremos daqui por diante $\mathcal{S}$ para denotar $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^m$, com $x \in \mathcal{A}$ e $u \in \mathbb{R}^m$. Por definição a derivada de Lie $L_f h_i(x)$ dá a derivada direcional da função h_i na direção f avaliada no ponto x , por isso não faria sentido à princípio tomar a direção f dependente de uma variável externa u . Entretanto, abusando-se da notação, a expressão $y_i^{(j+1)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} (y_i^{(j)})(x)$ será indicada por $L_f y_i^{(j)}(x)$, para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{0, \dots, \rho_i - 1\}$, no sentido de que por construção $y_i^{(j+1)}$ não depende explicitamente de u . Isto posto, pode-se de maneira similar à (2.10) aplicar derivações de saída sucessivas para (2.22), até obter-se uma expressão que dependa explicitamente de u , ou seja, para $i \in \{1, \dots, m\}$ constrói-se:

$$\left\{ \begin{array}{llll} & h_i(x, u) & \doteq & y_i^{(0)}(x) \\ \dot{y}_i^{(0)} & = \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial x} \dot{x} & = & L_f y_i^{(0)}(x) & \doteq & y_i^{(1)}(x) \\ \vdots & & & & & \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-2)} & = \frac{\partial y_i^{(\rho_i-2)}}{\partial x} \dot{x} & = & L_f y_i^{(\rho_i-2)}(x) & \doteq & y_i^{(\rho_i-1)}(x) \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} & = \frac{\partial y_i^{(\rho_i-1)}}{\partial x} \dot{x} & = & L_f y_i^{(\rho_i-1)}(x, u) & \doteq & y_i^{(\rho_i)}(x, u) \end{array} \right. \quad (2.23a)$$

$$\text{Onde: } \left\{ \begin{array}{l} y_i^{(k)} \quad \text{para } k \in \{0, \dots, \rho_i - 1\} \text{ é função somente de } x, \text{ i.e.} \\ \quad \frac{\partial}{\partial u} (y_i^{(k)}) \equiv 0 \\ y_i^{(\rho_i)} \quad \text{é função de } (x, u), \text{ no sentido que} \\ \quad \frac{\partial}{\partial u} (y_i^{(\rho_i)}) \text{ não é identicamente nulo} \end{array} \right. \quad (2.23b)$$

Mantendo as nomenclaturas de número característico e grau relativo (conforme (2.12)) como no caso afim. Observa-se somente que para (2.22) pode acontecer que $y_i^{(0)} = h_i$ depender explicitamente

de u , para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, e neste caso $\rho_i = 0$.

Outrossim, note que derivando-se (2.18a) em relação a u , obtém-se para a forma afim (2.1) uma outra expressão para a matriz de desacoplamento:

$$\frac{\partial}{\partial u} (y^{(\rho)}) = \frac{\partial}{\partial u} (a(x) + b(x)u) = b(x) \quad (2.24)$$

Ademais, para o sistema sem a restrição afim (2.22) denota-se a função que generaliza (2.18a), dada por $y^{(\rho)} : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$y^{(\rho)}(x, u) \doteq \begin{pmatrix} L_f y_1^{(\rho_1-1)}(x, u) \\ \vdots \\ L_f y_m^{(\rho_m-1)}(x, u) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Por outro lado, salienta-se que a realimentação de estado estática definida aqui requer a hipótese de que o sistema seja afim. Este fato é utilizado fortemente na Definição 2.11 e na demonstração do Teorema 2.14.

O argumento para a demonstração do próximo teorema é essencialmente o mesmo utilizado para o caso afim com posto máximo da matriz de desacoplamento.

Teorema 2.16 Para um sistema (2.22) com grau relativo ρ , tome-se a aplicação $Y^{(\rho-1)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^\rho$ definida por:

$$Y^{(\rho-1)}(x) = \left(y_1^{(0)}(x), \dots, y_1^{(\rho_1-1)}(x), \dots, y_m^{(0)}(x), \dots, y_m^{(\rho_m-1)}(x) \right) \quad (2.26)$$

Se o posto da matriz $\frac{\partial}{\partial u} (y^{(\rho)})|_{(x,u)}$ for máximo para (x, u) no aberto $\mathcal{W} \doteq (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \subset \mathcal{S}$, então o posto da aplicação $\frac{\partial}{\partial x} (Y^{(\rho-1)})|_{(x)}$ para $x \in \mathcal{U}$ também será.

Prova Por absurdo, assuma que para algum $x \in \mathcal{U}$, o posto de $Y^{(\rho-1)}(x)$ não é máximo, ou seja, os vetores linha $\frac{\partial}{\partial x} (Y^{(\rho-1)})$ devem ser linearmente dependentes. Para tanto, deve existir um vetor linha com ρ constantes não todas nulas, denotado por $C = (c_1^1, \dots, c_1^{\rho_1}, \dots, c_m^1, \dots, c_m^{\rho_m})$ tal que:

$$0_{(\rho \times 1)} = C \frac{\partial}{\partial x} (Y^{(\rho-1)})|_{(x)} \quad (2.27)$$

A fim de não sobrecarregar a notação, tomam-se nesta prova todas as matrizes jacobianas avaliadas no ponto x . Toma-se também u tal que $(x, u) \in \mathcal{W}$.

Multiplicando-se $\frac{\partial}{\partial x} (Y^{(\rho-1)})$ por $f(x, u)$ à direita e substituindo os termos de (2.26), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} (Y^{(\rho-1)}) f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (y_1^{(0)}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x} (y_1^{(\rho_1-1)}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x} (y_m^{(0)}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x} (y_m^{(\rho_m-1)}) \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} L_f y_1^{(0)} \\ \vdots \\ L_f y_1^{(\rho_1-1)} \\ \vdots \\ L_f y_m^{(0)} \\ \vdots \\ L_f y_m^{(\rho_m-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_1^{(\rho_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(1)} \\ \vdots \\ y_m^{(\rho_m)} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Assim, $C \frac{\partial}{\partial x} (Y^{(\rho-1)}) = 0$ implica

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\rho_i} c_i^j y_i^{(j)} = 0 \quad (2.29)$$

Derivando-se agora a expressão acima em relação à u tem-se:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\rho_i} c_i^j y_i^{(j)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\rho_i} c_i^j \frac{\partial}{\partial u} (y_i^{(j)}) \\
&= \sum_{i=1}^m c_i^{\rho_i} \frac{\partial}{\partial u} (y_i^{(\rho_i)}) \quad \text{pois } y_i^{(j)} \text{ não depende de } u \text{ para } j < \rho_i \\
&= (c_1^{\rho_1}, \dots, c_m^{\rho_m}) \frac{\partial}{\partial u} (y^{(\rho)})
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Visto que $\frac{\partial}{\partial u} (y^{(\rho)})$ possui linhas linearmente independentes, conclui-se que as constantes $(c_1^{\rho_1}, \dots, c_m^{\rho_m})$ são nulas.

O problema agora resume-se a analisar:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\rho_i-1} c_i^j y_i^{(j)} = 0 \tag{2.31}$$

Para ver que as constantes $(c_1^{\rho_1-1}, \dots, c_m^{\rho_m-1})$ também são todas nulas, basta tomar a derivada da expressão acima por x na direção f e depois derivar em relação a u , pois:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\rho_i-1} c_i^j y_i^{(j)} \right) f(x, u) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\rho_i-1} c_i^j \frac{\partial}{\partial x} (y_i^{(j)}) f(x, u) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\rho_i-1} c_i^j y_i^{(j+1)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m c_i^{\rho_i-1} \frac{\partial}{\partial u} (y_i^{(\rho_i)}) \\
&= (c_1^{\rho_1-1}, \dots, c_m^{\rho_m-1}) \frac{\partial}{\partial u} (y^{(\rho)})
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Novamente, como $\frac{\partial}{\partial u} (y^{(\rho)})$ possui linhas linearmente independentes, conclui-se que as constantes $(c_1^{\rho_1-1}, \dots, c_m^{\rho_m-1})$ são nulas.

A aplicação repetida deste argumento mostra o resultado desejado. $\square$

2.2 Existência de Coordenadas Complementares

Pela seção anterior, obtém-se sob certas condições ρ funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Vê-se abaixo que existem $n - \rho$ funções complementares, definindo uma transformação de coordenadas no espaço de estados.

Proposição 2.17 *Seja $\varphi \doteq \{\varphi_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n, i \in \{1, \dots, \rho\}\}$ um conjunto de funções suaves e independentes no sentido de que $D\varphi|_{(x)}$ possui posto máximo no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, para todo $x_0 \in \mathcal{A}$ existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ de x_0 e outro conjunto de funções suaves $\hat{x} = \{\hat{x}_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n - \rho\}\}$, tal que a aplicação $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:*

$$\psi(x) = (\hat{x}(x), \varphi(x))$$

É um difeomorfismo entre $\mathcal{U}$ e $\psi(\mathcal{U})$

Prova Afirma-se que para $x_0 \in \mathcal{U}$, qualquer função $\hat{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}|_{x_0}$ possua vetores linha linearmente independentes dos vetores linha de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x_0}$ servirá. Assim:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{pmatrix} \Big|_{x_0}$$

É uma matriz de posto máximo em uma vizinhança de x_0 . Então o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma vizinhança $\mathcal{V}$ de x_0 tal que ψ é um difeomorfismo entre $\mathcal{V}$ e $\psi(\mathcal{V})$.

Observe também que, por construção, $\psi(x)$ terá a menor classe de diferenciabilidade entre φ e $\hat{x}$, funções estas de classe $\mathcal{C}^{k \geq 1}$ $\square$

Para exemplificar o teorema, registra-se abaixo uma construção particular com $\hat{x}(x)$ linear que será utilizada no próximo capítulo.

Observação 2.18 Considere-se $x_0 \in \mathcal{A}$ e $\hat{x}(x) = Kx$. Assumindo-se que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ possui posto máximo em $\mathcal{A}$, fixa-se $K_{(n-\rho) \times n}$ tal que a matriz $\begin{pmatrix} K \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{pmatrix}$ é não singular em x_0 .

Assim, se $\psi(x) = (\hat{x}(x), \varphi(x))$, o determinante a matriz jacobiana $\frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x_0}$ é não nulo por construção. Já que a função determinante é contínua e $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ é contínua por hipótese, existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de x_0 tal que $\frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x_1}$ ainda é não nulo para todo $x_1 \in \mathcal{V}$.

Portanto, o Teorema da Função Inversa garante que existe uma outra vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ de x_0 tal que $\mathcal{U}$ e $\psi(\mathcal{U})$ são difeomórficos.

2.3 Método por Realimentação de Estado Estática - MI

Para introduzir as próximas, inclui-se aqui o método por realimentação de estado estática. Nesta seção consideram-se sistemas afins (2.1).

Reunindo os resultados do Teorema 2.16 e da Proposição 2.17, conclui-se que a condição posto $b(x) = m$ para todo x pertencente a algum aberto $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$, é necessária e suficiente para que a aplicação $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma transformação de coordenadas diferenciável, que será denotada $z = \psi(x)$.

Derivando-se então $z(t) = \psi(x(t))$ e substituindo a expressão de $\dot{x}$ conforme (2.1a), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{d}{dt}(\psi(x)) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} (f(x)) + \frac{\partial \psi}{\partial x} (g(x)) u \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} (f(\psi^{-1}(z))) + \frac{\partial \psi}{\partial x} (g(\psi^{-1}(z))) u \\ &= \tilde{f}(z) + \tilde{g}(z)u \end{aligned} \tag{2.33}$$

Onde $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{g} : \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ são as representações na coordenadas z das funções f e g , respectivamente.

Além disso, a soma $\sum_{i=1}^m g_i(x) u_i(x)$ foi indicada matricialmente por $g(x)u$.

Daí, as soluções das equações diferenciais (2.1a) e (2.33) *conjugadas* ([Sot79]) pela transformação ψ , no sentido de que se $x(t, x_0)$ é solução com condição inicial x_0 de (2.1a) então $\psi(x(t, x_0)) =$

$z(t, z_0)$ é solução (2.33) com condição inicial, com $z_0 = \psi(x_0)$ e vice-versa.

Como $\psi(x) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x))$ para alguma escolha de coordenadas complementares $\hat{x}$, reescreve-se $z = (\hat{x}, Y^{(\rho-1)})$. Levando à seguinte reformulação da equação (2.1a) nas coordenadas $(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \tilde{f}(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}) + \tilde{g}(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})u \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_i^{(0)} = y_i^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-2)} = y_i^{(\rho_i-1)} \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} = a_i + b_i u \end{array} \right\}, \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \end{cases} \quad (2.34a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_i^{(0)} = y_i^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-2)} = y_i^{(\rho_i-1)} \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} = a_i + b_i u \end{array} \right\}, \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \quad (2.34b)$$

Onde foi utilizado o vínculo natural de diferenciações entre as coordenadas $y_i^{(j)}$, tal qual (2.10). Denotando-se também por a_i e b_i a i -ésima linha das funções definidas em (2.18).

Adicionando agora a realimentação de estado estática desacoplante $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$, segundo (2.20), o Teorema 2.14 garante que o sistema (2.34) se torna:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}, v) \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_i^{(0)} = y_i^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-2)} = y_i^{(\rho_i-1)} \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} = v_i \end{array} \right\}, \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \end{cases} \quad (2.35a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_i^{(0)} = y_i^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-2)} = y_i^{(\rho_i-1)} \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} = v_i \end{array} \right\}, \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \quad (2.35b)$$

Onde $\theta(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}, v) \doteq \tilde{f}(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}) + \tilde{g}(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}) (\alpha(x) + \beta(x)v)$, com $x = \psi^{-1}(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})$

Nestas novas coordenadas torna-se claro, tratando-se de sistemas quadrados, que ao escolher v para controlar as coordenadas $Y^{(\rho-1)}$ não restam entradas para controlar diretamente $\hat{x}$. Por este motivo, e também devido à sua relação com os sistemas semi-implícitos como será visto na próxima seção, θ recebe o nome de *dinâmica zero* na literatura.

2.4 Sistemas Explícitos versus Semi-Implícitos

Considere o sistema (2.1) agora com o vínculo algébrico:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \equiv 0 \end{cases} \quad (2.36a)$$

$$y = h(x) \equiv 0 \quad (2.36b)$$

Ao contrário de antes, não mais podemos escolher arbitrariamente as entradas u devido à restrição (2.36b). De um ponto de vista geométrico, pode-se dizer que as soluções desse sistema no espaço de estados versus entradas dado por $\mathcal{S} \doteq \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m$ estão confinadas à superfície Γ , sendo implicitamente dependentes de u pelas relação diferencial expressa por (2.36a).

Fixando a aplicação:

$$\begin{aligned} Y^{(\rho)} : \quad \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \\ (x, u) &\mapsto \begin{pmatrix} Y^{(\rho-1)}(x) \\ y^{(\rho)}(x, u) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Onde $Y^{(\rho-1)}(x)$ é definida por (2.25) e $y^{(\rho)}(x, u)$ é definida por (2.26).

Indiquem-se os conjuntos:

$$\Gamma_\varepsilon \doteq \{(x, u) \in \mathcal{S} : \|Y^{(\rho)}\| \leq \varepsilon, \varepsilon \geq 0\} \quad (2.38)$$

Mantendo a notação $\Gamma = \Gamma_0$.

Além disso, o sistema (2.1) escrito em coordenadas $(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})$, conforme (2.35) e com $v \equiv 0$, torna-se:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}, 0) \\ \dot{Y}^{(\rho-1)} = 0 \end{cases} \quad (2.39a)$$

$$(2.39b)$$

Neste contexto, para uma condição inicial x_0 tal que $h(x_0) = 0$, as soluções dos sistemas (2.39) e (2.36) são equivalentes, pois:

- A equação diferencial do sistema implícito (2.39a) é a mesma que a do sistema explícito (2.1a) e portanto igual à (2.36a) a menos difeomorfismo, como visto na seção anterior.
- A restrição de saída (2.36b) equivale (2.39b), pois ambas expressões para uma condição inicial em Γ impõem que $y \equiv 0$, já que $Y^{(\rho)}(x, u)$ são derivadas de $y = h(x)$.

Com essa observação pode-se notar que as soluções $x(t)$ do sistema implícito (2.36) evoluem em Γ . Ademais, sobre uma destas soluções $\psi(x) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x)) = (\hat{x}(x), 0)$, mostrando que Γ é uma subvariedade de dimensão $n - \rho$ em $\mathcal{S}$. Por essa razão, toda a informação necessária para o conhecimento das soluções está em $\hat{x}$, justificando o uso dos termos pseudo-estado e pseudo-entrada para x e u .

Pode-se, entretanto, não se dispor para fins computacionais de uma condição inicial justa na restrição (2.36b), mas somente em Γ_ε , para algum ε pequeno. Além disso, métodos para integração de (2.36) implementados em um computador de precisão finita acarretarão inevitavelmente erros numéricos, gerando o mesmo problema.

Para lidar com isso, considere-se a generalização de (2.39) tomando cada uma das entradas v_i , segundo um parâmetro de convergência $\gamma > 0$:

$$v_i = - \sum_{j=0}^{\rho_i-1} c_i^{(j)} y_i^{(j)}, \forall i = \{1, \dots, m\} \quad (2.40a)$$

Onde as constantes $c_i^{(j)}$ são os coeficientes do polinômio:

$$\pi_i(s) = (s + \gamma)^{\rho_i} = s^{\rho_i} + \sum_{j=0}^{\rho_i-1} c_i^{(j)} s^j \quad (2.40b)$$

Aplicando então a entrada (2.40) ao sistema (2.35), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \end{cases} \quad (2.41a)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{y}_i^{(0)} \\ \dot{y}_i^{(0)} \\ \vdots \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_i^{(0)} & & & & -c_i^{(\rho_i-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i^{(0)} \\ y_i^{(0)} \\ \vdots \\ y_i^{(\rho_i-1)} \end{pmatrix} \end{cases} \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (2.41b)$$

Haja vista que (2.41b) é linear e possui todos autovalores iguais a $-\gamma$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} Y^{(\rho-1)}(t) = 0$, [Sot79].

Daí, para uma condição inicial x_0 com $\|Y^{(\rho-1)}(x_0)\| < \varepsilon$ e ε pequeno, a entrada (2.40) no sistema (2.41) atenua o erro em relação à (2.36b), gerando um solução $x(t, x_0)$ do sistema explícito (2.1) que convirja para uma solução $x(t, x_0^*)$ com $Y^{(\rho-1)}(x_0^*) = 0$, que é uma solução do sistema implícito (2.36).

Já que $\psi(x) = (\hat{x}, Y^{(\rho-1)})$ implica $\psi(x)\dot{x} = \left(\dot{\hat{x}}, \dot{Y}^{(\rho-1)}\right)$ e $\psi(x) = \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}, \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}\right)$ por construção, tomando a expressão do sistema (2.41) na coordenada x , resumindo os resultados até aqui, obtém-se a estrutura do Método por Realimentação de Estado Estática: (MI)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right) \dot{x} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} (f(x) + g(x)u(x)) \\ y_i^{(1)}(x) \\ \vdots \\ y_i^{(\rho_i-1)}(x) \\ v_i(x) \end{array} \right\} \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \\ \\ (x(0), u(0)) = (x_0, u_0), \text{ condição inicial fixa em } \Gamma_\varepsilon, \text{ com } \varepsilon \text{ pequeno} \\ \\ u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v(x), \text{ realimentação conforme (2.13)} \\ \\ v(x) \text{ conforme (2.40), para assegurar convergência} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Outrossim, o Teorema da Continuidade em Relação às Condições Iniciais para EDOs [Sot79] garante que num intervalo finito de tempo as soluções $x(t, x_0^*)$ e $x(t, x_0)$ estarão próximas, desde que x_0 e x_0^* estejam próximas.

Observação 2.19 (Sobre a Convergência do MI)

Mesmo com a teoria assegurando a convergência do Método por Realimentação de Estado Estática, esta convergência é de certa forma indireta, pois ela é atingida através da estabilização uma cadeia de integradores. Tome por exemplo um sistema (2.41) com $m = 1$ e $\rho = 2$, para uma condição inicial $(y^{(0)}(0), y^{(1)}(0)) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, então (2.41b) será da forma:

$$\begin{cases} \dot{y}^{(0)} &= y^{(1)} \\ \dot{y}^{(1)} &= -\gamma^2 y^{(0)} - 2\gamma y^{(1)} \end{cases}, \text{ já que } \pi(s) = (s + \gamma)^2 = s^2 + 2s\gamma + \gamma^2$$

Cuja solução analítica é:

$$\begin{aligned} y^{(0)}(t) &= e^{-\gamma t} (\varepsilon_0 + (\varepsilon_0 \gamma + \varepsilon_1) t) \\ y^{(1)}(t) &= -e^{-\gamma t} ((\varepsilon_0 \gamma + \varepsilon_1) \gamma t - \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Como pode ser verificado por substituição.

Observa-se que de fato $\lim_{t \rightarrow \infty} Y^{(\rho-1)}(t) = 0$, pela presença do termo exponencial. Entretanto, pode ocorrer que no período do transiente, entre o instante inicial e o momento que o erro seja suficientemente pequeno, o módulo de $Y^{(\rho-1)}(t)$ primeiro aumente para depois diminuir. Isto pode tornar a convergência mais lenta.

Para fixar ideias, analisar-se-á o comportamento de $y^{(0)}(t)$. Derivando em relação t :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y^{(0)}(t)) &= -\gamma e^{-\gamma t}(\varepsilon_0 + \varepsilon_0\gamma + \varepsilon_1 t) + e^{-\gamma t}(\varepsilon_0\gamma + \varepsilon_1) \\ &= -e^{-\gamma t}(\varepsilon_0\gamma^2 t + \gamma\varepsilon_1 t - \varepsilon_1)\end{aligned}\quad (2.44)$$

Igualando a expressão acima a zero, tem-se:

$$\begin{aligned}0 &= \underbrace{-e^{-\gamma t}}_{\neq 0} (t(\varepsilon_0\gamma^2 + \gamma\varepsilon_1) - \varepsilon_1) \\ \Rightarrow t &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0\gamma^2 + \gamma\varepsilon_1}\end{aligned}\quad (2.45)$$

Assumindo que ε_0 e ε_1 são positivos, então $y^{(0)}(t)$ possui um ponto de máximo em $\bar{t} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma(\varepsilon_0\gamma + \varepsilon_1)}$.

Esse máximo será:

$$\begin{aligned}y^{(0)}(\bar{t}) &= e^{-\gamma \frac{\varepsilon_1}{\gamma(\varepsilon_0\gamma + \varepsilon_1)}} \left(\varepsilon_0 + (\varepsilon_0\gamma + \varepsilon_1) \frac{\varepsilon_1}{\gamma(\varepsilon_0\gamma + \varepsilon_1)} \right) \\ &= e^{-\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_0\gamma + \varepsilon_1)}} \left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \right) \\ &\doteq \bar{y}\end{aligned}\quad (2.46)$$

A figura abaixo ilustra o comportamento de $y^{(0)}(t)$:

Figura 2.1: Exemplo de comportamento indesejado para o erro $y^{(0)}$ utilizando o MI.

Como $\|Y^p\|$ mede o erro referente à restrição (2.36b), deseja-se em particular que $y^{(0)}(t)$ seja mínimo. É claro que se pode diminuir $y^{(0)}(t)$ aumentando o parâmetro γ já que:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} e^{-\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_0\gamma + \varepsilon_1)}} \left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \right) = \varepsilon_0 \quad (2.47)$$

Entretanto, o aumento de γ dificulta a integração numérica, gerando um fenômeno conhecido como stiffness, devido à imposição de uma dinâmica muito rápida para a equação diferencial em relação ao tamanho do passo de integração.

Alguns experimentos numéricos ilustrando este fenômeno para diferentes γ 's, bem como a perda de acuidade da solução são encontrados em [Fre07] e em [SDS05].

Com o intuito atingir maior precisão na solução, estudar-se-á a partir da próxima seção a alternativa estruturada em [Sou06].

2.5 Método por Injeção de Saída Generalizada - MII

Nesta seção apresenta-se um método para a obtenção de um sistema explícito, a partir de um sistema semi-implícito:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \equiv 0 \end{cases} \quad (2.48a)$$

$$(2.48b)$$

Utilizando a mesma notação de (2.22), impondo a restrição de saída para (2.22b). Para este método, tentar-se-á construir uma campo vetorial τ conjuntamente sobre o espaço de estados cartesianiano com o espaço de entradas:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \tau(t, x, u) \quad (2.49)$$

Alternativamente denotado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tau_x(t, x, u) \\ \dot{u} = \tau_u(t, x, u) \end{cases} \quad (2.50)$$

De tal sorte que as soluções deste novo sistema convirjam para as soluções do sistema implícito (2.48).

Inicialmente, vê-se um corolário das seções anteriores com a transformação de coordenadas a ser utilizada.

Corolário 2.20 *Considere um aberto $\tilde{\mathcal{W}} \doteq (\tilde{\mathcal{U}} \times \tilde{\mathcal{V}}) \subset \mathcal{S}$, com $x \in \tilde{\mathcal{U}}$ e $u \in \tilde{\mathcal{V}}$, no qual $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x}$ possui posto máximo em $\tilde{\mathcal{W}}$. Tome-se a aplicação $\Psi : \tilde{\mathcal{W}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ definida por:*

$$\Psi(x, u) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u)) \quad (2.51)$$

Para $Y^{(\rho)}(x, u) = (Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u))$, conforme (2.37), e uma escolha de coordenadas complementares $\hat{x} : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$. Então para todo $(x, u) \in \tilde{\mathcal{W}}$ existe uma vizinhança $\mathcal{W} \doteq (\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ de (x, u) , com $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}}$, tais que $\mathcal{W}$ e $\Psi(\mathcal{W})$ são difeomórficos.

Prova Denote-se $\frac{\partial \Psi(x, u)}{\partial (\bar{x}, \bar{u})} \Big|_{x, u}$ por $T(\bar{x}, \bar{u})$ pelo restante deste trabalho, então:

$$T(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \Big|_{(x, u)} \quad (2.52)$$

Note que $\frac{\partial \hat{x}}{\partial u}$ e $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial u}$ são ambos nulos pois $\hat{x}$ e $Y^{(\rho-1)}$ não dependem de u por construção (vide (2.23) e Proposição 2.17). Ademais, pelo Teorema 2.16, tem-se que para todo $x \in \tilde{\mathcal{U}}$, $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \Big|_x$ possui posto máximo.

Por consequência da Proposição 2.17, a submatriz quadrada $n \times n$, $\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \end{pmatrix}$ é não singular.

Como o outro bloco na diagonal de $T(x, u)$ é a matriz quadrada $m \times m$ dada por $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}$, não singular por hipótese, tem-se que (2.52) é inversível, o que implica pelo Teorema da Função Inversa a existência de uma vizinhança $Z \subset \tilde{\mathcal{W}}$ de (x, u) para a qual Z e $\Psi(Z)$ são difeomórficos. Eventualmente diminuindo essa vizinhança, obtém-se $\mathcal{W} \doteq (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \subset Z$ no qual vale a tese. $\square$

Observação 2.21 *Convém mencionar que para este método a hipótese de que todas funções sejam analíticas pode ser relaxada, pois será suficiente que a transformação Ψ seja de classe C^1 , o que já será garantido se f e h forem de classe C^k , com k maior do o index do sistema.*

Diferentemente de (2.41), considere-se agora um sistema de equações diferenciais definido sobre o espaço $(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})$ conjuntamente com $y^{(\rho)}$, escolhendo um parâmetro de convergência $\gamma > 0$.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}) \doteq \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(f(x, u)) \end{cases} \quad (2.53a)$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{y}_i^{(0)} &= -\gamma y_i^{(0)} \\ \vdots \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} &= -\gamma y_i^{(\rho_i-1)} \\ \dot{y}_i^{(\rho_i)} &= -\gamma y_i^{(\rho_i)} \end{cases} \end{cases}, \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \quad (2.53b)$$

Onde $(x, u) = \Psi^1(\hat{x}, Y^{(\rho)})$. Reescrevendo na forma vetorial, obtém-se a equação diferencial que é a base do método MII:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}) \end{cases} \quad (2.54a)$$

$$\begin{cases} \dot{Y}^{(\rho)} = -\gamma Y^{(\rho)} \end{cases} \quad (2.54b)$$

É importante ressaltar que não foi aproveitado o vínculo diferencial $\dot{y}_i^{(j)} = y_i^{(j+1)}$, para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{0, \dots, \rho_i - 1\}$ inerente à construção dessas funções por derivações sucessivas de saída, segundo (2.23).

Ao invés disso, foi fixada a equação diferencial (2.54b), denominada de *injeção generalizada de saída*, com a vantagem de que a velocidade de $y_i^{(j)}$ é proporcional ao erro em relação àquela coordenada, pois a restrição algébrica (2.48b) equivale $y_i^{(j)} \equiv 0$, pela seção anterior. Isto evita o fenômeno indesejado ilustrado na Observação (2.19) da norma de $y_i^{(j)}$ crescer durante o transiente.

Estes fatos são constatados pela expressão da solução analítica para (2.54b), $y_i^{(j)}(t) = y_i^{(j)}(0)e^{\gamma t}$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{0, \dots, \rho_i - 1\}$, em particular, as soluções de (2.54) evoluirão sempre em Γ para uma equação condição inicial $(x_0, u_0) \in \Gamma$. Visto que $\lim_{t \rightarrow \infty} Y^{(\rho)}(t) = 0$, as soluções do sistema (2.54) estarão próximas da solução do sistema implícito (2.48), como garantirão os teoremas na próxima seção.

Como para o MI, expressar-se-á (2.54) nas coordenadas originais, já que $\Psi(x, u) = (\hat{x}, Y^{(\rho)})$ implica $T(x, u) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{Y}^{(\rho)} \end{pmatrix}$. Tomando a representação do sistema (2.54) nas coordenadas (x, u) obtém-se a estrutura objeto do presente trabalho, denominada Método por Injeção de Saída Generalizada, (MII):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x, u) \\ (x(0), u(0)) = (x_0, u_0), \text{ condição inicial fixa em } \Gamma_\varepsilon, \text{ com } \varepsilon \text{ pequeno} \\ \text{Onde } T(x, u)\tau(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(f(x, u)) \\ -\gamma Y^{(\rho)}(x, u) \end{pmatrix}, \text{ e } T(x, u) \text{ não singular} \end{cases} \quad (2.55)$$

2.6 Teoremas de Proximidade

Apresentam-se agora teoremas que formalizam e resumem os conceitos de convergência motivados na seção anterior.

Considere daqui por diante as nomenclaturas Sistema Implícito para (2.48) e MII para (2.55). Como ilustrado na seção anterior, o Sistema (2.54) equivale localmente ao MII no sentido de conjugação de equações diferenciais, através da transformação local de coordenadas Ψ^{-1} , e por isso esse sistema será denotado por MII'. Mais precisamente, tem-se a observação:

Observação 2.22 *Considerem-se os seguintes sistemas:*

$$\begin{array}{ccc} \text{MII}' & & \text{MII} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}) \\ \dot{Y}^{(\rho)} = -\gamma Y^{(\rho)} \end{array} \right. & e & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{u} \end{array} \right\} = \tau(x, u) \end{array} \quad (2.56)$$

Seja $(x(t), u(t))$ uma solução de MII com condição inicial (x_0, u_0) , contida num aberto $\mathcal{U}$ no qual a aplicação $\Psi(x, u) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u))$ é um difeomorfismo sobre $\Psi(\mathcal{U})$.

Assim, ao definir-se $(\hat{x}(t), Y^{(\rho)}(t)) \doteq \Psi(x(t), u(t))$, obtém-se:

$$\begin{aligned} & (\hat{x}, Y^{(\rho)}) = \Psi(x, u) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{Y}^{(\rho)} \end{pmatrix} = \frac{\partial \Psi}{\partial(x, u)} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} \quad \text{derivando em } t \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{Y}^{(\rho)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}) \\ -\gamma Y^{(\rho)} \end{pmatrix} \quad \text{pela definição de } \tau \end{aligned}$$

Portanto, $(\hat{x}(t), Y^{(\rho)}(t))$ é solução de MII' com condição inicial $(\hat{x}_0, Y_0^{(\rho)}) \doteq \Psi(x_0, u_0)$, para todo t desde que $(x(t), u(t)) \in \mathcal{U}$. Para a recíproca, o desenvolvimento é análogo.

Além disso, a hipótese de que $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}$ é não nula no domínio da função Ψ é suficiente (vide Corolário 2.20) para que haja uma vizinhança sobre todo ponto no domínio da Ψ tal que a aplicação Ψ conjugue as soluções de MII em MII'.

Teorema 2.23 *Seja $\bar{x}(t) \in \mathcal{C}^\infty$ uma solução do Sistema Implícito definida para $t \in I$, com entrada $\bar{u}(t)$ e $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial(x, u)}$ não singular sobre um aberto $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ contendo $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $\forall t \in I$, então $\zeta(t) \doteq (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ é uma solução para o MII com condição inicial $\zeta(0) \in \Gamma$. Reciprocamente, se $\zeta(t) = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ é uma solução para o MII com $t \in I$, $\zeta(0) \in \Gamma$ e $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial(x, u)}$ não singular sobre um aberto $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ contendo $\zeta(t)$, $\forall t \in I$, então $x(t) \doteq \bar{x}(t)$ é uma solução para o Sistema Implícito com entrada $\bar{u}(t)$.*

Prova Prova da primeira parte do teorema:

Seja $\bar{x}(t) \in \mathcal{C}^\infty$ uma solução do Sistema Implícito definida para $t \in I$, com entrada $\bar{u}(t)$ e condição inicial $(x_0, u_0) \in \mathcal{V}$. Tome-se um instante $t_1 \in I$ qualquer e o ponto $(x_1, u_1) \doteq (\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))$.

Como $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial(x, u)}$ é não singular sobre o aberto $\mathcal{V}$ contendo essa solução, o Teorema 2.16 afirma que $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$ tem posto máximo e pela Proposição 2.17, $\psi(x) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x))$ é um difeomorfismo local entre uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \text{proj}_x \mathcal{V}$ de x_1 e $\psi(\mathcal{U})$. Considere-se $I_1 \subset I$ tal que para todo t em I_1 , $x(t)$ pertença à $\mathcal{U}$.

Fixa-se agora a notação $(\hat{x}(t), Y^{(\rho-1)}(t))$ para $\psi(\bar{x}(t))$. Daí, por diferenciação em relação a t :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{Y}^{(\rho-1)} \end{pmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \end{pmatrix} f(\bar{x}, \bar{u}) \quad (2.57)$$

Por outro lado, $\dot{Y}^{(\rho-1)}$ foi construído de acordo com (2.23) por derivações sucessivas das saídas

do Sistema Implícito, a saber:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_i^{(0)} = y_i^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-2)} = y_i^{(\rho_i-1)} \\ \dot{y}_i^{(\rho_i-1)} = y_i^{(\rho_i)} \end{array} \right\}, \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \quad (2.58)$$

Ademais, a restrição $h(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \equiv 0$ equivale à $Y^{(\rho)}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$ para todo $t \in I_1$, pois ambas expressões impõem que a saída do Sistema Implícito y seja nula, já que as funções de $Y^{(\rho)}$ são da forma $y_i^{(j)} = L_f^j h_i$, para $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{0, \dots, \rho_i\}$.

Combinando estes resultados e denotando $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f(x, u)$ por $\theta(\hat{x}, Y^{(\rho)})$, conforme (2.53), vê-se que $(\hat{x}(t), Y^{(\rho-1)}(t))$ satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y^{(\rho)}) \\ Y^{(\rho)}(t) \equiv 0 \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Portanto $(\hat{x}(t), Y^{(\rho-1)}(t))$ é solução de MII' para todo $t \in I_1$ com $t_1 \in I_1$, visto que a solução do sistema $\{\dot{Y}^{(\rho)} = -\gamma Y^{(\rho)}; Y^{(\rho)}(t_1) = 0\}$ é nula.

Pela Observação 2.22, existe uma vizinhança $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ de $(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))$ no qual a aplicação Ψ conjugua soluções entre MII e MII'. Tome-se $\mathcal{W}$ pequeno o suficiente para que $\text{proj}_x \mathcal{W}$ esteja contida em $\mathcal{U}$. Indique-se então $\zeta(t) \doteq \Psi^{-1}(\hat{x}(t), Y^{(\rho-1)}(t), y^{(\rho)}(t))$, função esta bem definida para $t \in I_1$ tal que $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \mathcal{W}$.

Notando que $\Psi(x, u) = (\psi(x), y^{(\rho)}(x, u)) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u)) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho)}(x, u))$, tem-se que:

$$\zeta(t) = \Psi^{-1}((\hat{x}(t), Y^{(\rho)}(t))) = \Psi^{-1} \circ \Psi \circ (\bar{x}, \bar{u})(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{u}(t) \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Assim, $\zeta(t)$ é uma solução do MII em um subintervalo de I contendo t_1 . Como esse t_1 foi escolhido arbitrariamente em I , $\zeta(t) = (\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \forall t \in I$ pois vale a existência e unicidade das soluções para MII, já que $\tau(x, u)$ é um campo suave.

Prova da segunda parte do teorema:

Seja $\zeta(t) = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ uma solução para o MII com $t \in I$ e condição inicial $\zeta(0) \in \Gamma$.

Seja $t_1 \in I$ qualquer e o ponto $(x_1, u_1) \doteq (\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))$. Já que $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial(x, u)}$ é não singular no aberto $\mathcal{V}$ contendo os pontos desta solução, pela Observação 2.22 tem-se que existe uma vizinhança $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ de (x_1, u_1) tal que $(\hat{x}(t), Y^{(\rho-1)}(t), y^{(\rho)}(t)) \doteq \Psi(\zeta(t))$ é uma solução de MII' conjugada à $\zeta(t)$ no intervalo $I_1 \doteq \{t \in I : (\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \mathcal{W}\}$.

Nessas condições, $\psi(x) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x))$ é um difeomorfismo local entre uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \text{proj}_x \mathcal{V}$ de x_1 e $\psi(\mathcal{U})$. Tome-se $\mathcal{U}$ suficiente pequeno para que $\mathcal{U}$ esteja contido na $\text{proj}_x \mathcal{W}$. Além disso, denote-se $x(t) \doteq \psi^{-1}(\hat{x}(t), Y^{(\rho-1)}(t))$, função esta bem definida para $t \in I_1$ tal que $\bar{x}(t) \in \mathcal{U}$, resultando que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \end{pmatrix} = \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{Y}^{(\rho-1)} \end{pmatrix} = \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f(\bar{x}, \bar{u}) \\ -\gamma Y^{(\rho-1)}(\bar{x}, \bar{u}) \end{pmatrix} = \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} f(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x}, \bar{u}) \quad (2.61)$$

Utilizando na penúltima igualdade que $-\gamma Y^{(\rho-1)}(\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0 \equiv \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} f(\bar{x}, \bar{u})$, já que $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} f(\bar{x}, \bar{u})$ são derivadas da saída $y = h(\bar{x}, \bar{u}) \equiv 0$

Portanto $x(t)$ é solução do Sistema Implícito com entrada $\bar{u}(t)$ num subintervalo de I contendo t_1 .

Já que $\text{proj}_{(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})}(\Psi(x, u)) = \text{proj}_{(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})}(\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u)) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x)) = \psi(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} x(t) &= \psi^{-1}(\hat{x}, Y^{(\rho-1)}) \\ &= \psi^{-1}(\text{proj}_{(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})}(\Psi(\bar{x}(t), \bar{u}(t)))) \\ &= \psi^{-1} \circ \psi \circ \bar{x}(t) \\ &= \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Assim $x(t) = \bar{x}(t)$ para todo $t \in I$ porque t_1 foi escolhido arbitrariamente em I , lembrando que vale a existência e unicidade das soluções para Sistema Implícito, já que $f(x, u)$ é um campo suave. $\square$

Na prova anterior, as únicas propriedades exigidas para $\hat{x} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^\rho$ são que ela seja de classe $\mathcal{C}^2$, para existência e unicidade das soluções de MII'; e que os vetores linha de $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}$ sejam linearmente independentes de $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$, para que $(\hat{x}, Y^{(\rho-1)})$ sejam um difeomorfismo local.

Como a escolha de coordenadas complementares $\hat{x}$ não é única, a princípio ela poderia gerar campos vetoriais $\tau(x, u)$ distintos, pois τ foi construído utilizando-se $\hat{x}$. O corolário abaixo esclarece que isto não ocorre para pontos em Γ .

Corolário 2.24 (Independência de τ em relação às coordenadas complementares) *O campo $\tau(x, u)$ definido no MII tem as seguintes propriedades que não dependem da escolha de $\hat{x}(x)$:*

1. $\dot{Y}^{(\rho)} = -\gamma Y^{(\rho)}$
2. Para um ponto $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Gamma$, $\tau(\bar{x}, \bar{u})$ não depende da escolha de $\hat{x}(x)$
3. Para um ponto $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Gamma$, $\dot{x} = \tau_x(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x}, \bar{u})$, onde τ_x corresponde às primeiras n coordenadas do campo τ .

Prova Seja $\hat{x}(x)$ uma escolha qualquer de coordenadas complementares conforme a Proposição 2.17. Então vale:

1. Por construção, já que a imposição da dinâmica $-\gamma Y^{(\rho)}$ foi fixada sem depender de $\hat{x}$ no MII'.
2. Pois se $(x(t), u(t))$ é uma solução para o Sistema Implícito e $\zeta(t)$ é uma solução para o MII, ambos com condição inicial $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Gamma$, então, pelo Teorema 2.23, $\text{proj}_x \zeta(t) = x(t)$, independente da escolha de $\hat{x}(x)$.
3. Pois, no mesmo contexto do item anterior, diferenciando $\text{proj}_x \zeta(t) = x(t)$ em relação a t em $t = 0$, tem-se $\frac{d}{dt}(x(t))|_{t=0} = \tau_x(\bar{x}, \bar{u}) = f(\bar{x}, \bar{u})$. $\square$

Por outro lado, a escolha de $\hat{x}(x)$ influencia na estabilidade numérica do método e proporciona diferentes interpretações geométricas para pontos $(\bar{x}, \bar{u}) \in \Gamma_\varepsilon$, como será retomado no próximo capítulo.

Teorema 2.25 (Convergência de $Y^{(\rho)}$) *Seja $\zeta(t) = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ uma solução para o MII com condição inicial ζ_0 . Se $\zeta(t)$ está bem definida para todo t no intervalo $I \doteq [0, t_f]$, então*

$$\|Y^{(\rho)}(t)\| \leq e^{-\gamma t} \|Y^{(\rho)}(0)\|, \text{ para todo } t \in I. \quad (2.63)$$

Prova Observe primeiro que $Y^{(\rho)}(t)$ é igual à $\text{proj}_{Y^{(\rho)}} \Psi(\zeta(t))$ por construção. Já que $\dot{Y}^{(\rho)} = -\gamma Y^{(\rho)}$ em MII', extrai-se a solução analítica desta equação diferencial:

$$y_i^{(j)}(t) = y_i^{(j)}(0)e^{-\gamma t} \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \text{ e } j \in \{0, \dots, \rho_i - 1\} \quad (2.64)$$

Matricialmente, portanto: $\|Y^{(\rho)}(t)\| \leq e^{-\gamma t} \|Y^{(\rho)}(0)\|$, para todo $t \in I$. $\square$

Inclui-se agora uma observação lembrando que se $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}$ é não singular, garantem-se a existência dos difeomorfismos locais Ψ e ψ utilizados na hipótese do teorema seguinte.

Observação 2.26 *Se a matriz jacobiana $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \Big|_{(x_0, u_0)}$ é não singular para todo $(x_0, u_0) \in \tilde{\mathcal{W}} = (\tilde{\mathcal{U}} \times \tilde{\mathcal{V}}) \subset \mathcal{S}$, então:*

- *Pela Proposição 2.17, existem uma vizinhança $\mathcal{U}_1 \subset \tilde{\mathcal{U}}$ de x_0 e coordenadas complementares suaves $\hat{x} : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que a aplicação $\psi : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\psi(x) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x))$ é um difeomorfismo entre $\mathcal{U}_1$ e $\psi(\mathcal{U}_1)$.*
- *Pelo Corolário 2.20 existe uma vizinhança $\mathcal{W}_2 = (\mathcal{U}_2 \times \mathcal{V}) \subset \tilde{\mathcal{W}}$ de (x_0, u_0) tal que a aplicação $\Psi : \mathcal{W}_2 \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, dada por $\Psi(x, u) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u))$, com as coordenadas complementares $\hat{x}$ do item anterior, é um difeomorfismo entre $\mathcal{W}_2$ e $\Psi(\mathcal{W}_2)$.*
- *Considerando os abertos $\mathcal{U} \doteq \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ e $\mathcal{W} \doteq (\mathcal{U} \times \mathcal{V})$, vale simultaneamente que $\mathcal{U}$ e $\psi(\mathcal{U})$ são difeomórficos, bem como $\mathcal{W}$ e $\Psi(\mathcal{W})$.*

Teorema 2.27 *Seja $\mathcal{W} = (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \subset \mathcal{S}$ um aberto, conexo e limitado, onde $\mathcal{U} \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$, tal que:*

- *A aplicação $\Psi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, dada por $\Psi(x, u) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u))$ é um difeomorfismo entre $\mathcal{W}$ e $\Psi(\mathcal{W})$.*
- *A aplicação $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\psi(x) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x))$ é um difeomorfismo entre $\mathcal{U}$ e $\psi(\mathcal{U})$.*

Então se $(x(t), u(t))$ é uma solução do MII com condição inicial $(x(0), u(0)) = (x_0, u_0)$, definida num intervalo de tempo $I_1 = [0, t_1]$ tal que $(x(t), u(t)) \in \mathcal{W}, \forall t \in I_1$; e se $\bar{x}(t)$ é uma solução para o Sistema Implícito com entrada $\bar{u}(t)$ e condição inicial $(x_0^, u_0^*) \doteq \Psi^{-1}(\hat{x}(x_0), 0)$, definida num intervalo de tempo $I_2 = [0, t_2]$ tal que $x(t) \in \mathcal{U}, \forall t \in I_2$, então vale a desigualdade:*

$$\|(x(t), u(t)) - (\bar{x}(t), \bar{u}(t))\| \leq \kappa_1 \|Y_0^{(\rho)}\| e^{-\gamma t} + \kappa_2 \|Y_0^{(\rho)}\|, \forall t \in I \quad (2.65)$$

Onde κ_1, κ_2 são constantes não negativas e $I = [0, t_f] \doteq I_1 \cap I_2$.

Prova Em primeiro lugar, note-se que para uma condição inicial em Γ as soluções do Sistema Implícito são equivalentes às soluções do MII, no sentido expresso pelo Teorema 2.23. Logo, podem-se tomar as respectivas expressões em coordenadas $(\hat{x}, Y^{(\rho)})$ para o MII de solução $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, com condição inicial $(x_0^*, u_0^*) \in \Gamma$, e para MII de solução $(x(t), u(t))$, com condição inicial (x_0, u_0) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, 0) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \theta(\hat{x}, Y_0^{(\rho)} e^{-\gamma t}) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (2.66)$$

Onde no primeiro sistema foi utilizado que $Y^{(\rho)}(x, u) \equiv 0$ para o Sistema Implícito e, no segundo sistema, foi substituída a expressão analítica da solução de $\dot{Y}^{(\rho)} = -\gamma Y^{(\rho)}$, conforme (2.25); visto as soluções de MII' e MII são conjugadas mesmo para condições iniciais em Γ_ε com ε pequeno, conforme Observação 2.22 e indicando $Y^{(\rho)}(x_0, u_0)$ por $Y_0^{(\rho)}$.

Vê-se que os dois sistemas são da forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \tilde{\theta}(t, \hat{x}, \mu) \doteq \theta(\hat{x}, \mu e^{-\gamma t}) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Onde μ é um parâmetro fixo em $\mathbb{R}^{\rho+m}$, observando que $\tilde{\theta}$ é suave em relação μ , com $\mu = 0$ para o primeiro caso e $\mu = Y_0^{(\rho)}$ para o segundo. Portanto, a solução desse sistema na condição

inicial $\hat{x}_0$ está bem definida, pode ser denotada por $\eta(t, \mu)$ no instante t sob o parâmetro μ e, mais importante ainda, η é diferenciável em relação à μ (vide [Pon62]). Com essa notação, pode-se voltar para coordenada (x, u) , obtendo $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \tilde{\eta}(t, 0)$ e $(x(t), u(t)) = \tilde{\eta}(t, Y_0^{(\rho)} e^{-\gamma t})$. Onde:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} : \quad I \times \mathcal{Z} &\rightarrow \mathcal{U} \\ (t, \xi) &\mapsto \Psi^{-1}(\eta(t, \xi), \xi e^{-\gamma t}) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Com $\mathcal{Z} \doteq \text{proj}_{Y^{(\rho)}}(\Psi(\mathcal{W}))$ e $I = I_1 \cap I_2$ é um intervalo no qual $(\eta(t, \xi), \xi e^{-\gamma t})$ pertence à $\Psi(\mathcal{W})$ para os dois sistemas. Salientando que a função $\text{proj}_{Y^{(\rho)}} : \mathbb{R}^{n-\rho} \times \mathbb{R}^{\rho+m} \rightarrow \mathbb{R}^{\rho+m}$ é dada por $\text{proj}_{Y^{(\rho)}}(\hat{x}, Y^{(\rho)}) = Y^{(\rho)}$. Portanto, $\tilde{\eta}$ é diferenciável por ser composta de funções diferenciáveis. Então, vale que:

$$\begin{aligned} \|(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) - (x(t), u(t))\| &= \|\tilde{\eta}(t, 0) - \tilde{\eta}(t, Y_0^{(\rho)})\| \\ &= \|\Psi^{-1}(\eta(t, 0), 0) - \Psi^{-1}(\eta(t, Y_0^{(\rho)}), Y_0^{(\rho)} e^{-\gamma t})\| \\ &\leq \|\Psi^{-1}(\eta(t, 0), 0) - \Psi^{-1}(\eta(t, 0), Y_0^{(\rho)} e^{-\gamma t})\| \\ &+ \|\Psi^{-1}(\eta(t, Y_0^{(\rho)}), Y_0^{(\rho)} e^{-\gamma t}) - \Psi^{-1}(\eta(t, 0), Y_0^{(\rho)} e^{-\gamma t})\| \\ &\leq \kappa_1 \|Y_0^{(\rho)}\| e^{-\gamma t} + \kappa_2 \|Y_0^{(\rho)}\|, \forall t \in I \end{aligned}$$

Utilizando duas vezes na última passagem a Desigualdade do Valor Intermediário.

Com a notação $[a, b]$ indicando o segmento de reta em $\mathbb{R}^n$ ligando os pontos a, b , ou seja $[a, b] \doteq \{(a + (b - a)t) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq 1\}$, as constantes κ_1 e κ_2 podem ser tomadas como:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial Y^{(\rho)}} \Big|_{(\hat{x}, Y^{(\rho)})} \right\| : (\hat{x}, Y^{(\rho)}) \in [(\eta(t, 0), 0), (\eta(t, 0), Y_0^{(\rho)} e^{-\gamma t})] \right\} \\ c_1 &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \hat{x}} \Big|_{(\hat{x}, Y^{(\rho)})} \right\| : (\hat{x}, Y^{(\rho)}) \in [(\eta(t, Y_0^{(\rho)}), Y_0^{(\rho)} e^{-\gamma t}), (\eta(t, 0), Y_0^{(\rho)} e^{-\gamma t})] \right\} \\ c_2 &= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \eta}{\partial \mu} \Big|_{(t, \mu)} \right\| : (t, \mu) \in [(t, 0), (t, Y_0^{(\rho)})] \right\} \\ \kappa_2 &= c_1 c_2 \end{aligned}$$

Além disso, através do Teorema 2.27, demonstrou-se um resultado a princípio inesperado. Sob certas condições, para todo instante da simulação t_1 , existe um intervalo compacto $[t_1, t_2]$ no qual a distância entre a solução do MII e uma solução do Sistema Implícito decai exponencialmente até uma constante proporcional à $Y^{(\rho)}(x(t_1), u(t_1))$, *i.e.* proporcional ao erro da solução $(x(t), u(t))$ gerada pelo MII em relação à variedade Γ , no instante t_1 .

Capítulo 3

Sistema Explícito Numérico

No capítulo anterior viu-se como obter o Sistema Explícito MII (2.55) da forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x, u)$$

a partir do sistema semi-implícito quadrado autônomo (2.48), a saber:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \equiv 0 \end{cases}$$

Onde $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções suaves, definidas no aberto $\mathcal{S} = \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m$ no qual admite-se que $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}$ possui posto máximo em $\mathcal{S}$ de modo que, pelo Corolário 2.20, a aplicação $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ seja um difeomorfismo local.

Apresentam-se aqui algoritmos em pseudo-código para construir esse campo vetorial $\tau(x, u)$, utilizando cálculos simbólicos e numéricos, possibilitando posteriormente o uso de métodos tradicionais para resolução numérica de EDOs. Os códigos fonte dos algoritmos escritos para *Matlab*[®] utilizando o pacote de operações simbólicas constam no Apêndice.

Lembrando, conforme Seção 2.2, que a estrutura do Sistema Explícito MII não é única por requerer uma escolha arbitrária de coordenadas complementares $\hat{x} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$, discutem-se então duas alternativas de escolhas numéricas.

Ambas abordagens apresentadas utilizam o complemento ortogonal extraído de uma decomposição QR, sendo que na primeira o cálculo é feito em cada um dos instantes da solução, enquanto na segunda ele é refeito apenas quando a matriz $T(x, u) = \frac{\partial \Psi}{\partial (x, u)}$ perde condicionamento.

Ao final do capítulo registra-se uma generalização simples do MII permitindo tratar sistemas variantes no tempo e a construção das funções necessárias para a simulação.

3.1 Coordenadas por Derivação de Saída

Utilizando cálculos simbólicos, o primeiro trabalho a ser feito é aplicar o processo (2.23), derivando em relação a t sucessivamente as componentes $y_i^{(0)} \doteq h_i$, para $i \in \{1, \dots, m\}$, da função de saída (2.48b). Definindo iterativamente funções $y_i^{(k+1)}$ enquanto a expressão anterior for função somente da variável x e parando no primeiro estágio $\rho_i < \infty$ tal que $y_i^{(\rho_i)}$ depende explicitamente de u . Construindo-se daí $Y^{(\rho)}(x, u) = (Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u))$, com $Y^{(\rho-1)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$ e $y^{(\rho)} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Observação 3.1 (Notação alternativa para as funções do MII)

Neste capítulo fixam-se os seguintes símbolos: $\rho = \rho$, $Y = Y^{(\rho-1)}$, $Yx = \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$, $yp = y^{(\rho)}$, $ypx = \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x}$ e $ypu = \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}$. Essa notação será utilizada nos algoritmos e também na exposição da teoria quando isso não prejudicar o entendimento.

A notação $a \leftarrow b$ indica que é atribuído à variável a o conteúdo da variável b . Múltiplos comandos por linha são separados por um ponto e vírgula.

Já que as matrizes $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$, $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x}$ e $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}$ calculadas para a obtenção de $y^{(\rho)}$ e $Y^{(\rho-1)}$ são utilizadas também na matriz $T(x, u)$, elas também são devolvidas pelo algoritmo.

Algoritmo 3.2 (Derivações_Sucessivas)

```

Entradas do Algoritmo:  $f, h, x, u$ 
% onde f e g são funções de (x,u): variáveis simbólicas
Saídas do Algoritmo:  $\rho, Y, Yx, yp, ypx, ypu,$ 
% onde  $\rho$  é cte;  $Y$  e  $Yx$  funções de  $x$ ;  $yp,$ 
%  $ypx$  e  $ypu$  funções de  $(x,u)$ : variáveis simbólicas

% Inicializando variáveis, usando  $\emptyset$  para indicar o conjunto vazio
 $\rho \leftarrow 0$ ;  $Y \leftarrow \emptyset$ ;  $Yx \leftarrow \emptyset$ ;  $yp \leftarrow \emptyset$ ;  $ypx \leftarrow \emptyset$ ;  $ypu \leftarrow \emptyset$ 
% Construindo  $p, Y, JY, yp, Jyp$  iterativamente
Para  $i \in \{1, \dots, m\}$ , faça:
     $k \leftarrow 0$ 
     $\bar{h} \leftarrow h_i$ ;  $jhu \leftarrow \frac{\partial \bar{h}}{\partial u}$ 
    % Construindo os  $y_i^{(j)}$ s que não dependem de  $u$ 
    Enquanto  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial u} \equiv 0$ , faça:
         $Y \leftarrow Y \cup \{\bar{h}\}$ 
         $jhx \leftarrow \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}$ 
         $Yx \leftarrow Yx \cup \{\bar{h}\}$ 
         $\bar{h} \leftarrow \langle jhx, f \rangle$ 
         $jhu \leftarrow \frac{\partial \bar{h}}{\partial u}$ 
         $k \leftarrow k + 1$ 
    Fim do Enquanto.
    % Neste ponto  $k = \rho_i$ 
     $\rho \leftarrow \rho + k$ 
    % Construindo  $y_i^{(\rho_i)}$ 
     $yp \leftarrow yp \cup \{\bar{h}\}$ 
     $ypu \leftarrow ypu \cup \{jhu\}$ 
     $jhx \leftarrow \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}$ 
     $ypx \leftarrow ypx \cup \{jhx\}$ 
Fim do Para.

```

Uma observação importante é que a condição $\frac{\partial \bar{h}}{\partial u} \equiv 0$ depende de simplificações simbólicas, podendo chegar a uma conclusão enganosa se o pacote de cálculos simbólicos não estiver programado para identificar alguma equivalência necessária. Um exemplo simples seria se $\frac{\partial \bar{h}}{\partial u} = (\sin^2(x) + \cos^2(x)) - 1$, onde é claro que $\frac{\partial \bar{h}}{\partial u} \equiv 0$. Contudo, se a expressão entre parêntesis fosse mais complicada e o pacote simbólico não a reconhecesse como sendo igual a 1, o algoritmo daria resultados errados.

3.2 Complemento Ortogonal

Como visto na demonstração do Teorema 2.17, uma condição necessária e suficiente para que uma função suave $\hat{x} : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$ seja tal que $\psi(x) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x))$ é um difeomorfismo local é que os vetores linha de $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}$ sejam linearmente independentes dos vetores linhas de $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Por outro lado, a estrutura do MII conforme (2.55) pode ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(f(x, u)) \\ -\gamma Y^{(\rho)}(x, u) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

De onde conclui-se que, ainda que o MII exija uma escolha suave local de coordenadas complementares $\hat{x}$, o valor do campo τ avaliado em cada ponto $(x, u) \in \mathcal{S}$ requer somente o conhecimento da matriz jacobiana $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}$ avaliada em x . Esse tema será retomado na próxima seção.

Veja-se agora que uma escolha pontual de vetores linearmente independentes de $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$ pode ser feita numericamente através do complemento ortogonal.

Definição 3.3 (Complemento Ortogonal) *Se V é um espaço vetorial em $\mathbb{R}^n$, dá-se o nome de complemento ortogonal de V ao conjunto indicado por $V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle = 0, \forall v \in V\}$.*

Lema 3.4 *Seja V um espaço vetorial em $\mathbb{R}^n$, então $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$.*

Observação 3.5 (Complemento Ortogonal via Decomposição QR) *Com essa notação, um processo para se obter uma base ortogonal para $V^\perp$ é a decomposição QR [Str80]. Dada uma matriz de posto máximo $A_{n \times s} = [a_1, \dots, a_s]$, com $n \geq s$, cujas colunas formam uma base de V , obtêm-se pela decomposição QR uma matriz ortogonal $Q_{n \times n}$ e uma matriz triangular superior $\tilde{R}_{n \times s}$, tais que $Q\tilde{R} = A$.*

Como A é retangular, pode-se ainda subdividir as matrizes $Q = [Q_1 \quad Q_2]$ e $\tilde{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ de tal forma que:

$$A = Q\tilde{R} = [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1 \quad (3.3)$$

Com Q_1 de dimensão $n \times s$, Q_2 de dimensão $n \times (n-s)$, R_1 de dimensão $s \times s$ triangular superior de posto máximo.

Assim, similarmente ao processo de Gramm-Schmidt, a decomposição QR define nas colunas $\{u_1, \dots, u_s\}$ de Q_1 uma base ortogonal para V . Além disso, como Q é ortogonal, vale que:

$$I_{n \times n} = Q^\top Q = \begin{bmatrix} Q_1^\top \\ Q_2^\top \end{bmatrix} [Q_1 \quad Q_2] = \begin{bmatrix} Q_1^\top Q_1 & Q_1^\top Q_2 \\ Q_2^\top Q_1 & Q_2^\top Q_2 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_1^\top Q_2 = 0_{s \times (n-s)} \quad (3.4)$$

Logo $A^\top Q_2 = (Q_1 R_1)^\top Q_2 = R_1^\top Q_1^\top Q_2 = 0$; e os vetores coluna $\{v_1, \dots, v_{n-s}\}$ de Q_2 são ortogonais entre si e pertencem ao complemento ortogonal de V . Mais ainda, como o lema anterior garante que $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$, então as colunas de Q_2 formam uma base ortonormal para $V^\perp$.

Outra observação pertinente, é que a decomposição QR fornece uma decomposição como em (3.3), contudo o complemento ortogonal Q_2 não é único, no sentido de que se uma matriz Q'_2 é formada tomando-se reordenações e trocas de sinais dos vetores linhas de Q_2 , Q'_2 também será um complemento ortogonal.

Voltando para o contexto do MII, denote-se a matriz jacobiana $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$ avaliada num ponto $x \in \mathcal{A}$ por Y_x , cuja dimensão é $\rho \times n$. Para vetores linha de Y_x linearmente independentes, deseje-se

calcular uma base para o complemento ortogonal do subespaço gerado pelas linhas de Y_x , assim:

$$\begin{aligned} Y_x^\top &= Q\tilde{R} \\ \Leftrightarrow Y_x &= \tilde{R}^\top Q^\top = \begin{bmatrix} r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ R \end{bmatrix} = rq \end{aligned} \quad (3.5)$$

Onde, relacionando com (3.3), fixam-se as notações $r \doteq R_1^\top$ é uma matriz quadrada não singular $\rho \times \rho$ cuja transposta é triangular superior; $q \doteq Q_1^\top$ é uma matriz $\rho \times n$ e $R \doteq Q_2^\top$ é uma matriz $(n - \rho) \times n$.

Abusando-se da nomenclatura, será dito que R é o complemento ortogonal de Y_x para indicar que as colunas de $R^\top$ são uma base para o complemento ortogonal do subespaço gerado pelas colunas de $Y_x^\top$.

Da Observação 3.5, baseando-se numa função QR previamente implementada, o algoritmo para a obtenção do complemento ortogonal a partir da matriz Y_x é imediato, bastando subdividir as matrizes Q, R da decomposição como em (3.5).

Algoritmo 3.6 (Complemento_Ortogonal)

Entradas do Algoritmo: $H_{n \times s}$

Saídas do Algoritmo: r, R

% Aplicando a decomposição e subdividindo conforme observação anterior

$$[Q, \tilde{R}] \leftarrow QR(H^\top); \quad \begin{bmatrix} r & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \tilde{R}^\top; \quad \begin{bmatrix} q \\ R \end{bmatrix} \leftarrow Q^\top$$

3.3 Coordenadas Complementares via Complemento Ortogonal - MII_{proj}

Estuda-se aqui como aplicar o Complemento Ortogonal para o MII, visando a aplicação de um método para resolução numérica de EDOs. Denote-se a função $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times (n-\rho)}$ associando pontos $x \in \mathcal{A}$ ao complemento ortogonal de Y_x , pela decomposição QR conforme (3.5). Um dos problemas a ser entendido nesta seção é que a decomposição QR não é um processo diferenciável e poderia gerar também um campo $\tau(t, x, u)$ não diferenciavelmente em relação a x , já que ele é construído utilizando-se $R(x)$.

não é um processo diferenciável não depender diferenciavelmente de x .

Impondo $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = R(x)$ em cada ponto da discretização do método numérico, o MII será:

$$\begin{pmatrix} R(x) & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(x) (f(x, u)) \\ -\gamma Y^{(\rho)}(x, u) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Assumindo-se que o sistema acima esteja bem definido, cabe o comentário:

Observação 3.7 (Interpretação Geométrica do Complemento Ortogonal no MII)

O MII envolve a inversa da matriz T e e por ela ser uma matriz blocada pode-se reescrever (2.55), como:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tau_x(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f(x, u) \\ -\gamma Y^{(\rho-1)} \end{pmatrix} \\ \dot{u} = \tau_u(x, u) = \left(\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \right)^{-1} \left(-\gamma y^{(\rho)} - \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} \dot{x} \right) \end{cases} \quad (3.7a)$$

$$(3.7b)$$

Usando por simplicidade Y_x para indicar $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$ e impondo $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = R(x)$, a matriz inversa do membro direito de (3.7a) no ponto em que foi calculado o complemento ortogonal é dada por $\begin{pmatrix} R^\top & Y_x^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} \end{pmatrix}$, porque:

$$\begin{pmatrix} R \\ Y_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^\top & Y_x^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R R^\top & R Y_x^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} \\ Y_x R^\top & Y_x Y_x^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} \end{pmatrix} = I_{n \times n} \quad (3.8)$$

Visto que $R R^\top = I_{\rho \times \rho}$, pois as linhas de R são ortogonais; $R Y_x^\top = 0_{\rho \times (n-\rho)}$ e $Y_x R^\top = 0_{(n-\rho) \times \rho}$, pois R é o complemento ortogonal de Y_x ; e $Y_x Y_x^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} = I_{(n-\rho) \times (n-\rho)}$ por definição, salientando que a matriz $(Y_x Y_x^\top)$ é inversível já que:

$$(Y_x Y_x^\top) = r q (r q)^\top = r q q^\top r^\top = r r^\top \quad (3.9)$$

e a matriz quadrada r é inversível, desde que Y_x tenha posto máximo como visto na seção anterior.

Substituindo em (3.7a) a expressão da inversa, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{pmatrix} R \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Rf(x, u) \\ -\gamma Y^{(\rho-1)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} R^\top & Y_x^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Rf(x, u) \\ -\gamma Y^{(\rho-1)} \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{R^\top R}_{n \times n} f(x, u) - \gamma \underbrace{Y_x^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1}}_{n \times \rho} Y^{(\rho-1)}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Com a vantagem de que $Y_x Y_x^\top = rq (rq)^\top = rqq^\top r^\top = rr^\top$ e portanto o cálculo de $(Y_x Y_x^\top)^{-1} Y^{(\rho-1)}$ pode ser feito com duas eliminações de Gauss envolvendo matrizes triangulares de ordem ρ .

Além disso, já que os vetores linha de R são ortonormais, o termo $R^\top Rf(x, u)$ expressa geometricamente a projeção do vetor $f(x, u)$ no espaço gerado pelo vetores linha de R , indicado por $[R] = [R(x)]$. Justificando a notação $\text{proj}_{[R]}(f(x, u)) \doteq R^\top Rf(x, u)$.

Enquanto o termo $Y_x^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} Y^{(\rho-1)}(x, u)$ pode ser interpretado como uma inclusão do vetor $Y^{(\rho-1)}(x, u) \in \mathbb{R}^\rho$ no subespaço gerado pelos vetores linha de Y_x avaliados no ponto $x \in \mathcal{A}$, indicado por $[Y_x] = [Y_x|_x]$ contido no $\mathbb{R}^n$. Justificando a notação $\text{inc}_{[Y_x]}(Y^{(\rho-1)}(x, u)) \doteq Y_x^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} Y^{(\rho-1)}(x, u)$. [Str80].

Observe também que para todo $x \in \mathcal{A}$, $[Y_x|_x]^\perp = [R(x)]$ e, pelo Lema 3.4, $\mathbb{R}^n = [Y_x|_x] \oplus [R(x)]$. Com esta imposição de $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = R(x)$ o sistema (3.7) será denominado MII_{proj} e será igual a:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tau_x(x, u) = \text{proj}_{[R]}(f(x, u)) - \gamma \text{inc}_{[Y_x]}(Y^{(\rho-1)}(x)) \\ \dot{u} = \tau_u(x, u) \end{cases} \tag{3.11a}$$

$$\tag{3.11b}$$

Figura 3.1: Interpretação geométrica das componentes do campo vetorial τ_x do MII_{proj} .

Chama-se a atenção que a implementação do MII_{proj} é feita utilizando-se (3.11).

Contudo, mesmo que a expressão do campo $\tau(x, u)$ envolva somente o valor de $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}$, o MII faz sentido somente se a aplicação $\Psi(x, u) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho)}(x, u))$ for uma transformação de coordenadas diferenciável. No entanto, essa escolha numérica de complemento ortogonal via decomposição QR não garante a princípio nem mesmo a existência de função $\hat{x}$ tal que $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = R(x)$. Expõem-se abaixo resultados que justificam essa escolha.

Proposição 3.8 *Seja um aberto $\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ no qual $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}$ possui posto máximo. Então uma função suave $x(t)$ com entrada $u(t)$ e condição inicial $(x_0, u_0) \in \Gamma$, definidas para $t \in I$ onde $(x(t), u(t)) \in \mathcal{W}, \forall t \in I$, é solução do Sistema Implícito se e somente se $(x(t), u(t))$ é solução de MII_{proj} com condição inicial (x_0, u_0) .*

Prova Como $h(x(t), u(t)) \equiv 0$, vale que $Y^{(\rho)}(x(t), u(t)) = 0, \forall t \in I$.

Além disso, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e $t \in I$, $0 = h_i(x(t), u(t)) \doteq y_i^{(0)}((x(t), u(t)))$, (vide (2.23)), logo:

$$y_i^{(j+1)}(x) \doteq \frac{d}{dt} \left(y_i^{(j)}(x) \right) = \frac{\partial y_i^{(j)}}{\partial x} \dot{x} = \left\langle y_i^{(j)}, f(x, u) \right\rangle = 0, \text{ para todo } j \in \{0, \dots, \rho_i - 2\}$$

Ou seja, o vetor $f(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n$ é perpendicular ao subespaço $[Y_x|_{x(t)}]$.

Portanto $f(x(t), u(t)) \in [R(x(t))]$ e $\text{proj}_{[R]}(f(x(t), u(t))) = (f(x(t), u(t))) \forall t \in I$.

E, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = \text{proj}_{[R]}(f(x(t), u(t))) - \gamma \text{inc}_{[Y_x]}(Y^{(\rho-1)}(x(t), u(t)))$, para todo $t \in I$.

Para a dinâmica de u , usando o Teorema 2.23 já que $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}$ possui posto máximo em $\mathcal{W}$, o fato de $(x(t), u(t))$ ser solução do Sistema Implícito equivale a $(x(t), u(t))$ ser solução do MII para um campo vetorial $\bar{\tau}(x, u)$ como em (2.55). Frisando que as escolhas locais de coordenadas complementares $\hat{x}(x)$ envolvidas na construção do MII não precisam obedecer $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}|_x = R(x)$.

Denote-se o campo do MII_{proj} conforme (3.11) por $\tau(x, u)$.

Pelo Observação 2.24 Item 2, $\bar{\tau}(x, u)$ não depende da escolha de $\hat{x}(x)$, e como visto acima, $\tau_x(x, u)$ também não depende da escolha particular da base ortonormal para $[R(x)]$.

Portanto:

$$\begin{aligned} \tau_u(x, u) &= \left(\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \right)^{-1} \left(-\gamma y^{(\rho)} - \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} \dot{x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \right)^{-1} \left(-\gamma y^{(\rho)} - \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} f(x, u) \right) \\ &= \bar{\tau}_u(x, u) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Concluindo-se a primeira parte do teorema. Para a recíproca, vale o raciocínio análogo. $\square$

Outro aspecto essencial é se o MII_{proj} está bem definido para condições iniciais $(x_0, u_0) \in \Gamma_\varepsilon$ com $\varepsilon > 0$ pequeno. Para tanto a observação abaixo mostra que ele na verdade pode ser construindo a partir de uma escolha qualquer de coordenadas complementares $\hat{x}(x)$.

Observação 3.9 *Seja $(x_0, u_0) \in \Gamma_\varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ pequeno; $\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ uma vizinhança de (x_0, u_0) na qual $\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}$ tem posto máximo; e uma escolha de coordenadas complementares qualquer $\hat{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$.*

Escrevendo a primeira equação do MII para esta escolha de $\hat{x}$, conforme (3.7a), tem-se:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \end{array} \right) \dot{x} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f(x, u) \\ -\gamma Y^{(\rho-1)}(x, u) \end{array} \right) \quad (3.13)$$

Defina-se a função $M : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, satisfazendo:

$$M(x) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}|_x \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}|_x \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} R(x) \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}|_x \end{array} \right) \quad (3.14)$$

Note que $M(x)$ está bem definida e é não singular para todo $x \in \mathcal{U}$. Em particular, $M(x)^{-1}M(x) = I_{n \times n}$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Assim, denotando-se $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$ por Y_x e $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}$ por $\hat{x}_x$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \hat{x}_x \\ Y_x \end{pmatrix} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \hat{x}_x f(x, u) \\ -\gamma Y^{(\rho-1)}(x, u) \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow M(x) \begin{pmatrix} \hat{x}_x \\ Y_x \end{pmatrix} \dot{x} &= M(x) \begin{pmatrix} \hat{x}_x f(x, u) \\ -\gamma Y^{(\rho-1)}(x, u) \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} R(x) \\ Y_x \end{pmatrix} \dot{x} &= \begin{pmatrix} R(x) f(x, u) \\ -\gamma M(x) Y^{(\rho-1)} \end{pmatrix}, \text{ usando a seguir (3.8)} \\
 \Leftrightarrow \dot{x} &= R(x)^\top R(x) (f(x, u)) - \gamma (Y_x)^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} M(x) Y^{(\rho-1)}(x, u) \\
 \Leftrightarrow \dot{x} &= \text{proj}_{[R(x)]} (f(x, u)) - \gamma \text{inc}_{[Y_x]} (Y^{(\rho-1)}(x, u))
 \end{aligned}$$

Notando que $M(x)Y_x = Y_x$ em decorrência de (3.14) e utilizando na última equivalência que:

$$\begin{aligned}
 (Y_x)^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} M(x) Y^{(\rho-1)} &= (Y_x)^\top M(x)^\top (M(x) Y_x Y_x^\top M(x)^\top)^{-1} M(x) Y^{(\rho-1)} \\
 &= (Y_x)^\top M(x)^\top (M(x)^\top)^{-1} (Y_x Y_x^\top)^{-1} M(x)^{-1} M(x) Y^{(\rho-1)} \\
 &= (Y_x)^\top (Y_x Y_x^\top)^{-1} Y^{(\rho-1)} \\
 &= \text{inc}_{[Y_x]} (Y^{(\rho-1)})
 \end{aligned}$$

Portanto os teoremas da Seção 2.6 também são válidos para o MII_{proj} .

Os algoritmos para essa escolha de coordenadas complementares, bem como outras discussões sobre a aplicação do método, são apresentados na Seção 3.6.

3.4 Coordenadas Complementares via Preservação de Condicionamento - MII_{cond}

Analisa-se nesta seção uma outra alternativa para obtenção de coordenadas complementares $\hat{x}$ numa vizinhança de um ponto $x_0 \in \mathcal{A}$.

A partir da Observação 2.18, desde que o posto de $Y_x \doteq \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$ seja máximo, pode-se realizar uma escolha local de coordenadas complementares local da forma $\hat{x}(x) = Kx$, onde K é uma matriz fixa $n \times (n - \rho)$ tal que $\begin{pmatrix} K \\ Y_x \end{pmatrix}$ seja não singular em x_0 .

Ora, o complemento ortogonal de $Y_x|_{x_0}$ satisfaz essa condição e portanto pode-se tomar $\hat{x}(x) = \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$ definida por $\hat{x}(x) = R(x_0)x$, para alguma vizinhança $\mathcal{U}$ de x_0 .

Todavia, diferentemente da seção anterior, a inversa da matriz $\begin{pmatrix} R(x_0) \\ Y_x \end{pmatrix}$ não cumpre (3.8), pois $R(x_0) (Y_x|_{x_1})^\top$ não é necessariamente nula para $x_0 \neq x_1 \in \mathcal{U}$.

Outrossim, é possível buscar uma transformação de coordenadas sobre $Y^{(\rho)}$ obtendo $\tilde{Y}^{(\rho)} = CY^{(\rho)}$, para alguma matriz fixa $C_{(n-\rho+m) \times (n-\rho+m)}$ não singular, de modo a facilitar a inversão da matriz $\tilde{T}(x, u) = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x, u}$, com $\tilde{\Psi}(x, u) = (\hat{x}(x), \tilde{Y}^{(\rho)}(x, u))$, para (x, u) suficientemente próximos de (x_0, u_0) , como será discutido em seguida.

Observação 3.10 (Transformação de coordenadas sobre $Y^{(\rho-1)}$)

Considere-se o MII dado por (2.55), substituindo $Y^{(\rho-1)}(x)$ por $\tilde{Y}^{(\rho-1)}(x) = CY^{(\rho-1)}(x)$ e $y^{(\rho)}(x, u)$ por $\tilde{y}^{(\rho)}(x, u) = Dy^{(\rho)}(x, u)$, para matrizes fixas não singulares de $C_{(n-\rho) \times (n-\rho)}$ e $D_{m \times m}$. Logo, as seguintes equivalências são imediatas:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \tilde{Y}^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \tilde{y}^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{y}^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f \\ -\gamma \tilde{Y}^{(\rho-1)} \\ -\gamma \tilde{y}^{(\rho)} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f \\ -\gamma Y^{(\rho-1)} \\ -\gamma y^{(\rho)} \end{pmatrix} \quad (3.15) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f \\ -\gamma Y^{(\rho-1)} \\ -\gamma y^{(\rho)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo, os teoremas da Seção 2.6 também são válidos para esta modificação do MII.

As matrizes C e D da observação anterior podem ser interpretadas como balanceamentos. Esses balanceamentos serão escolhidos com auxílio da decomposição QR, para que no ponto onde elas forem calculadas os blocos na diagonal de $T(x, u)$ sejam matrizes ortogonais.

Observação 3.11 (Escolha de Balanceamento)

Para um ponto (x_0, u_0) podem-se tomar $C = r_1^{-1}$ e $D = r_2^{-1}$, onde as matrizes r_1 e r_2 são tais que $r_1 q_1 = \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \Big|_{x_0}$ e $r_2 q_2 = \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \Big|_{(x_0, u_0)}$, com notação análoga à (3.5).

Observando que os cálculos $\tilde{Y}^{(\rho-1)} = r_1^{-1} Y^{(\rho-1)}$ e $\tilde{y}^{(\rho)} = r_2^{-1} y^{(\rho)}$ podem ser feitos por eliminação de Gauss envolvendo as matrizes triangulares r_1, r_2 .

Daí, numa vizinhança $\mathcal{V}$ da condição inicial (x_0, u_0) o MII será da forma:

$$\begin{pmatrix} R(x_0) & 0 \\ \frac{\partial \tilde{Y}^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \tilde{y}^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{y}^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(x_0) f(x, u) \\ -\gamma \tilde{Y}^{(\rho-1)} \\ -\gamma \tilde{y}^{(\rho)} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Onde $\frac{\partial \tilde{Y}^{(\rho-1)}}{\partial x} \Big|_{x_0} = r_1^{-1} \left(\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \Big|_{x_0} \right) = q_1$ e $\frac{\partial \tilde{y}^{(\rho)}}{\partial (x, u)} \Big|_{(x_0, u_0)} = r_2^{-1} \left(\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial (x, u)} \Big|_{(x_0, u_0)} \right) = q_2$ por construção. Assim, pela continuidade da derivada de $Y^{(\rho)}(x, u)$ em $\mathcal{V}$, os blocos na diagonal da matriz $T(x, u)$, no membro esquerdo de (3.16), estarão próximos das matrizes ortogonais $\begin{pmatrix} R(x_0) \\ q_1 \end{pmatrix}$ e q_2 , desde que (x, u) esteja próximo de (x_0, u_0) .

Conclui-se então que solução do MII está bem definida para $t \in [0, t_1)$, desde que $(x(t), u(t)) \in \mathcal{U}$. Entretanto, com o discutido até aqui ainda não se definiu como proceder quando os blocos da diagonal de $T(x, u)$ se “afastam da ortogonalidade”, prejudicando a acuidade numérica do método, ou como computar as soluções $(x(t), u(t))$ para $t \geq t_1$.

Para lidar com essas duas questões, lança-se mão do conceito de condicionamento para uma matriz real, por [Str80].

Lema 3.12 *Se A é uma matriz real $m \times n$, então existe uma decomposição $A = USV^\top$ onde $U_{m \times m}$ e $V_{n \times n}$ são matrizes ortogonais e $S_{m \times n}$ é uma matriz diagonal. Os elementos na diagonal de V são não negativos e ordenados de forma decrescente, recebendo o nome de valores singulares de A .*

Definição 3.13 *Se A é uma matriz real $m \times n$, a razão $\text{cond}(A)$ entre a norma do maior e do menor valor singular de A recebe o nome de número de condicionamento de A .*

O condicionamento de uma matriz A não singular é importante por representar, independente do método numérico utilizado, uma estimativa da precisão para a obtenção numérica da solução x do sistema linear $Ax = b$.

Observando que o melhor condicionamento possível é $\text{cond}(A) = 1$, atingido para matrizes A ortogonais. Enquanto que se A for singular, ao menos um de seus valores singulares será nulo, indicando-se por abuso de notação $\text{cond}(A) = \infty$.

Voltando ao MII com a escolha $\hat{x}(x) = R(x_0)x$, é possível monitorar o pior condicionamento dentre os blocos na diagonal de $T(x, u)$, computando:

$$K(t) \doteq \max \left\{ \text{cond} \left(\begin{pmatrix} R(x_0) \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} \Big|_{x(t)} \end{pmatrix}, \text{cond} \left(\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial (x, u)} \Big|_{(x(t), u(t))} \right) \right\} \quad (3.17)$$

Assim, pode-se fixar uma tolerância para o condicionamento $\text{tol}_{\text{cond}} > 1$ e se $K(t) > \text{tol}_{\text{cond}}$ para algum instante t_1 , aplica-se novamente o MII, desta vez com condição inicial $(x_1, u_1) \doteq (x(t_1), u(t_1))$ e $\hat{x}(x) = R(x_1)x$, calculando-se novas matrizes de balanceamento C_1 e D_1 pela Observação 3.11.

O MII com essa escolha de coordenadas complementares, preservando o condicionamento de $T(x, u)$ como discutido acima, será denotado por MII_{cond} .

O algoritmos para essa escolha de coordenadas complementares, bem como outras discussões sobre a aplicação do método, são apresentados na Seção 3.6.

3.5 Sistemas Variantes no Tempo

Considere um sistema semi-implícito quadrado variante no tempo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(t, x, u) \equiv 0 \end{cases} \quad (3.18a) \quad (3.18b)$$

Onde $f : I \times \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : I \times \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções suaves, tal como (2.48), acrescentando-se a dependência em relação ao tempo nas funções f e h para $t \in I$, um intervalo de $\mathbb{R}$.

Aqui será utilizado o artifício comum de inserir a variável t no estado do sistema, impondo-se $\dot{t} = 1$ com condição inicial $t(0) = t_0$. A transformação de coordenadas tomada será $\Psi(t, x, u) = (t, \hat{x}(t, x), Y^{(\rho-1)}(t, x), y^{(\rho)}(t, x, u))$, para alguma escolha de coordenadas complementares $\hat{x}(t, x)$ (como na Proposição 2.17) e para funções $Y^{(\rho-1)}(t, x)$ e $y^{(\rho)}(t, x, u)$ obtidas através do Algoritmo de Derivações Sucessivas 3.2 considerando o campo vetorial $\begin{pmatrix} 1 \\ f(t, x, u) \end{pmatrix}$.

Mantendo a notação $T(t, x, u) \doteq \frac{\partial \Psi(t, x, u)}{\partial (t, x, u)}$, o MII será:

$$T(t, x, u) \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial t} \quad \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, x, u) \end{pmatrix} \\ -\gamma Y^{(\rho-1)}(t, x) \\ -\gamma y^{(\rho)}(t, x, u) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Onde a matriz $T(t, x, u)$ é da forma:

$$T(t, x, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial t} & \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial t} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Dai, observa-se que se pode escolher $\hat{x}(t, x) = \hat{x}(x)$, *i.e.*, como função somente do estado x do sistema, pois a imposição de $\frac{\partial \hat{x}}{\partial t} \equiv 0$ não modifica o posto de $T(t, x, u)$.

Assim, o sistema (3.19) torna-se:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial t} \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial t} \end{pmatrix} \dot{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f(t, x, u) \\ -\gamma Y^{(\rho-1)}(t, x) \\ -\gamma y^{(\rho)}(t, x, u) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Ademais, como a evolução no tempo é controlada internamente pelo método numérico, a equação $\dot{t} = 1$ pode ser removida, resultando:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f(t, x, u) \\ -\gamma Y^{(\rho-1)}(t, x) \\ -\gamma y^{(\rho)}(t, x, u) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial t} \\ \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Ressaltando que esta técnica pode ser utilizada sem custo adicional para o método de resolução numérica de EDOs mesmo para sistemas autônomos, já que neles o termo mais à direita de (3.22) será nulo, obtendo-se a mesma expressão MII em (2.55).

3.6 Construção da Implementação

Os algoritmos desta seção têm como intuito organizar as ideias expostas até aqui. Os códigos-fonte podem ser encontrados na Seção 6.1.

Descreve-se agora a construção do algoritmo parametrizado por:

- funções f , h , nas variáveis t , x , u , na estrutura (3.18)
- uma variável `Tipo_de_Simulação`, igual a 1 para MII_{proj} (Seção 3.3) ou 2 para o MII_{cond} (Seção 3.4)
- um parâmetro de convergência $\text{gama} > 0$ (Seção 2.5)
- para o MII_{cond} , uma tolerância para o condicionamento $\text{tol}_{\text{cond}} > 1$ (Seção 3.4)

As etapas descritas a seguir são as mesmas da Seção 1.1.

Etapas 1: Cálculos Simbólicos

O algoritmo descrito abaixo utiliza o Algoritmo 3.2, possibilitando a generalização do MII para sistemas variantes no tempo da Seção 3.5.

Algoritmo 3.14 (ConstoiImplementacao)

```

Entradas do Algoritmo:  $f, h, t, x, u$ 
% onde f e g são funções de  $(t,x,u)$ : variáveis simbólicas
Saídas do Algoritmo:  $\rho, Y, Y_t, Y_x, y_p, y_{pt}, y_{px}, y_{pu}$ 
% onde  $\rho$  é cte;  $Y$  e  $Y_x$  funções de  $(t,x)$ ;
% e  $y_p, y_{px}$  e  $y_{pu}$  funções de  $(t,x,u)$ : variáveis simbólicas

% aplicando derivações sucessivas para o campo vetorial  $[1,f]$ 
% e estado  $[t,x]$ 
 $[\rho, Y, Y_{tx}, y_p, y_{ptx}, y_{pu}] \leftarrow [\text{Derivações\_Sucessivas}]([1,f], h, [t,x], u)$ 

% até aqui,  $Y_{tx}$  e  $y_{ptx}$  são as derivadas em relação a  $(t,x)$  de
%  $Y \doteq Y^{(\rho-1)}$  e de  $y_p \doteq y^{(\rho)}$ , respectivamente.

% as instruções abaixo separam a derivada em relação ao tempo das demais.
 $[Y_t \mid Y_x] \leftarrow Y_{tx}$ 
 $[y_{pt} \mid y_{px}] \leftarrow y_{ptx}$ 

```

Etapas 2 e 3: Cálculos Numéricos

Para a integração numérica do MII, é utilizado o seguinte diagrama.

Figura 3.2: Diagrama de simulação, padrão Matlab.

A avaliação do campo τ no ponto (t, x, u) (vide 3.22), nas versões MII_{proj} ou MII_{cond} , utiliza as variáveis simbólicas resultantes do algoritmo anterior é feita por:

Algoritmo 3.15 (Avalia_tau)

```

Entradas do Algoritmo:  $t, x, u$  % valores numéricos
Saídas do Algoritmo:  $\tau$ 
%  $\tau$  é a notação para o valor numérico da avaliação de  $\tau$  no ponto  $(t,x,u)$ 
% utilizando  $MII_{\text{proj}}$  ou  $MII_{\text{cond}}$  se Tipo_de_Simulação
% igual 1 ou igual 2, respectivamente.

% para o  $MII_{\text{cond}}$ , também define-se  $tol_{\text{cond}}$  e utilizam-se
% variáveis globais r1 e r2 para armazenar as matrizes de balanceamento

```

```

% avaliando as funções necessárias no ponto  $(t, x, u)$ 
% a barra abaixo dos símbolos indica que a variável é do tipo numérica
txu ← (t, x, u);
f ← f(txu);

Y ← Y(txu);
yp ← yp(txu);

Yt ← Yt(txu); Yx ← Yx(txu);
ypt ← ypt(txu); ypx ← ypx(txu); ypu ← ypu(txu);

% a notação  $A \setminus b$  abaixo indica o processo de eliminação de
% Gauss para obter x tal que Ax =b

Se Tipo_de_Simulação = 1 % : MIIproj

[R, r1] ← Coordenadas_Complementares(Yx); % algoritmo 3.6
tau1 ←  $R^T * R * \underline{f} - \underline{Yx}^T * ((r1 * r1^T) \setminus (gama * \underline{Y} + \underline{Yt}))$ 
tau2 ←  $-\underline{ypu} \setminus (\underline{ypx} * \underline{tau1} + gama * \underline{yp} + \underline{ypt})$ 

Se Tipo_de_Simulação = 2 % : MIIcond

% Aplicando o balanceamento nas coordenadas,
% mantendo o mesmo nome das variáveis.

Y ← r1 \ Y;
yp ← r2 \ yp;

Yt ← r1 \ Yt; Yx ← r1 \ Yx;
ypt ← r2 \ ypt; ypx ← r2 \ ypx; ypu ← r2 \ ypu;

% Calculando o condicionamento dos blocos diagonais
condRYx ← cond([R, Yx]); condypu ← cond(ypu);

Se condRYx > tolcond ou condYPu > tolcond
% Se o condicionamento é maior que tolcond
% é preciso recalculer os balanceamentos r1, r2
[R1, r1] ← Coordenadas_Complementares(Yx); % R1 não é utilizado
[Q2, r2] ← QR(ypu); % R2 não é utilizado
r2 ← r2T;
% R2 pode ser visto como uma matriz de dimensão 0 × 0,
% já que ypu é quadrada

```

```

% deve-se também reiniciar a simulação
% com condição inicial e tempo dados pelo último ponto
% calculado até aqui pela integração numérica
Reinicia_Simulação

Fim do Se

tau1 ←  $\begin{bmatrix} R \\ \underline{y}_x \end{bmatrix} \setminus \begin{bmatrix} R * \underline{f} \\ -\text{gama} * \underline{y} - \underline{y}_t \end{bmatrix}$ 

tau2 ←  $\underline{y}_{pu} \setminus (-\underline{y}_{px} * \text{tau1} - \text{gama} * \underline{y}_p - \underline{y}_{pt})$ 
Fim do Se

tau ← [tau1,tau2]

```

Observação 3.16 *Algumas observações importantes sobre o algoritmo anterior:*

- Antes da primeira iteração do Algoritmo 3.15 para o MII_{cond} , já estão calculadas as matrizes $r1$ e $r2$ no ponto $(x(t_0), u(t_0))$.
- Caso a matriz $T(x, u)$ seja singular em algum ponto durante a simulação, o Algoritmo 3.15 causará um erro e a simulação é finalizada.

Capítulo 4

Integração Numérica

Estuda-se aqui o uso de métodos numéricos para integração numérica dos Sistemas Explícitos MII_{proj} e MII_{cond} , resultantes dos cálculos simbólicos e escolhas numéricas discutidas no capítulo precedente.

A estrutura dos problemas e as características das simulações utilizadas seguem o *Test Set for Initial Value Problem Solvers*, [MM08]¹, consistindo em problemas considerados difíceis ou importantes na literatura, comumente chamados de *benchmarks* no contexto de computação, bem como procedimentos para aferição da acuidade dos métodos numéricos aplicáveis a eles.

São realizadas simulações para sete problemas, brevemente descritos em cada seção, utilizando o *Matlab/Simulink*®. Os três primeiros problemas destinam-se a ilustrar a teoria, enquanto os quatro últimos vêm do [MM08].

Os experimentos numéricos realizados têm como objetivo prático: avaliar o erro da solução numérica contra a solução exata; medir o erro da solução em relação às restrições algébricas; investigar o efeito da variação do parâmetro de convergência γ na solução; explorar diferentes métodos de integração numérica e tamanho de passo; e, para os *benchmarks*, comparar a acuidade do MII com a de outros métodos, através de informações extraídas diretamente do [MM08].

4.1 Estrutura dos Problemas e Características da Simulação

Os problemas simulados são sistemas de equações diferenciais não lineares semi-implícitos variantes no tempo, conforme (3.18), na seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(t, x, u) \equiv 0 \end{cases}$$

Com condição inicial $(x(t_0), u(t_0)) = (x_0, u_0)$, para os instantes $t \in I = [t_0, t_f]$. Além disso, é fornecida uma solução de referência $(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}})$ aproximando suficientemente $(x(t_f), u(t_f))$, para estimar a precisão da solução numérica no instante t_f .

Além do MII foram incluídos neste trabalho, juntamente com os *benchmarks*, os resultados apresentados no [MM08] para outros métodos numéricos, cabendo os comentários:

- Os problemas do [MM08] são apresentados originalmente da forma:

$$M(t, w) \frac{d}{dt}(w) = F(t, w); \quad w(t_0) = w_0; \quad w'(t_0) = w'_0;$$

Onde M e F dependem suavemente das variáveis (t, w) . Observa-se que para a aplicação do MII foi necessário reescrever os problemas no formato semi-implícito, o que é possível somente se M é uma matriz constante.

¹ <http://pitagora.dm.uniba.it/~testset/>

- Os demais solvers do [MM08] utilizam somente cálculos numéricos, ao contrário do MII que requer a expressão do campo f e da restrição algébrica h para realização das derivações sucessivas no Algoritmo 3.14. Por outro lado, eles exigem uma aproximação para a jacobiana de $F(t, w)$ (que também é fornecida previamente com os problemas), o que não é necessário para o MII, justamente pela utilização dos cálculos simbólicos.
- Não foram simulados 5 dos 9 *benchmarks* em razão dos itens anteriores.
- Os outros solvers foram implementados na linguagem *Fortran*, enquanto o MII foi desenvolvido em *Matlab*, impossibilitando uma comparação justa entre o tempo de processamento já que a primeira linguagem é compilada enquanto a segunda é interpretada, e portanto consideravelmente mais lenta.
- Todos solvers utilizados nas comparações também são de domínio público.

A descrição dos solvers presentes no [MM08] foge ao escopo deste trabalho. Registram-se abaixo somente informações gerais acerca dos solvers pertinentes:

Nome do Solver:	<u>BIMD</u>
Autores:	C. Magherini and L. Brugnano
Primeira Versão:	Outubro, 2005
Última Modificação:	Setembro, 2006
Linguagem:	Fortran 77
Link oficial:	http://www.math.unifi.it/~brugnano/BiM/index.html
Tipos de Problemas:	ODEs, DAEs de <i>index</i> menores ou iguais a 3

Breve Descrição: O código BIMD é baseado numa combinação de métodos implícitos de ordens 4, 6, 8, 10 e 12. Ele pertence à classe de métodos implícitos L-estáveis em bloco, definidos como uma combinação adequada de dois métodos equivalentes de maneira a melhorar requisitos de implementação.

Nome do Solver:	<u>DDASS</u>
Autores:	L. Petzold
Primeira Versão:	Março, 1983
Última Modificação:	Julho, 2000
Linguagem:	Fortran 77
Link oficial:	http://www.netlib.org/ode/ddassl.f
Tipos de Problemas:	DAEs e Equações Diferenciais Implícitas (IDE) de <i>index</i> 1.

Breve Descrição: Este código implementa um *Backward Differentiation Formula* de ordens entre 1 e 5 para resolver uma IDE para y e y' . Valores de y e y' no instante inicial devem ser fornecidos como entrada. Estes valores precisam ser consistentes, *i.e.*, t_0, y_0, y'_0 precisam satisfazer $f(t_0, y_0, y'_0) = 0$.

Nome do Solver:	<u>GAMD</u>
Autores:	F. Iavernaro and F. Mazzia
Primeira Versão:	Agosto, 1997
Última Modificação:	Fevereiro, 2006
Linguagem:	Fortran 90
Link oficial:	http://www.dm.uniba.it/~mazzia/ode/readme.html
Tipos de Problemas:	ODEs e DAEs de <i>index</i> menores do que 3.

Breve Descrição: O código GAMD usa um método generalizado de Adams na forma de bloco, de ordens 3, 5, 7 e 9. Estas fórmulas são A-estáveis, na classe de métodos para valores de contorno.

Nome do Solver:	<u>MEBDFI</u>
Autores:	Abdulla and J.R. Cash
Primeira Versão:	Outubro, 2003
Última Modificação:	Fevereiro, 2006
Linguagem:	Fortran 97
Link oficial:	http://www.ma.ic.ac.uk/~jcash/IVPsoftware/itest/mebdfi.f
Tipos de Problemas:	ODEs e DAEs de <i>index</i> menores ou iguais a 3.

Breve Descrição: O código MEBDFI é uma extensão do MEBDFIDAE para solução de equações diferenciais implícitas e usa o *Modified Extended Backward Differentiation Formulas of Cash*, que aumentam a região de estabilidade absoluta para BDFs clássicos. Estes métodos são especialmente elaborados para solução de sistemas *stiff*. As ordens das fórmulas implementadas variam de 1 à 8.

Nome do Solver:	<u>PSIDE-1</u>
Autores:	J.J.B. de Swart, W.M. Lioen, and W.A. van der Veen
Primeira Versão:	Novembro, 1997
Última Modificação:	Novembro, 1998
Linguagem:	Fortran 77
Link oficial:	http://www.ma.ic.ac.uk/~jcash/IVPsoftware/itest/mebdfi.f
Tipos de Problemas:	IDEs/DAEs de <i>index</i> menores que 3.

Breve Descrição: Este código usa o método Radau IIA de quatro estágios.

Nome do Solver:	<u>RADAU</u>
Autores:	J.J.B. de Swart, W.M. Lioen, and W.A. van der Veen
Primeira Versão:	Abril, 1998
Última Modificação:	Janeiro, 2002
Linguagem:	Fortran 77
Link oficial:	http://www.unige.ch/~hairer/prog/stiff/radau.f
Tipos de Problemas:	ODEs/DAEs de <i>index</i> menores ou igual a 3.

Breve Descrição: O código RADAU é baseado em método em Runge-Kutta Implícitos (Radau IIA) de ordens 5, 9 e 13. Estes métodos são L-estáveis.

Fixam-se os seguintes termos para as características de simulação dos métodos numéricos.

- *Nome do Solver:* Podendo ser MII_{proj} ou MII_{cond} , para as novas implementações. BIMD, DDASSL, GAMD, MEBDFI, PSIDE-1 ou RADAU, para os solvers do previamente simulados no [MM08].
- *rtol:* Tolerância relativa do erro para o integrador numérico.
- *atol:* Tolerância absoluta do erro para o integrador numérico.
- *h₀:* Tamanho do passo inicial.
- *scd:* O valor *scd* denota o número mínimo correto de dígitos significativos na solução numérica no final do intervalo de integração, *i.e.*:

$$scd \doteq -\log_{10} (\|\text{erro relativo no final do intervalo de integração}\|_{\infty})$$

Se algumas das componentes do vetor de solução não são considerados para o computo do valor do *scd*, ou se o valor absoluto é tomado ao invés do valor relativo, então isto será mencionado no problema em específico.

- *scdY*: O valor *scdY* denota o número mínimo correto de dígitos significativos para a norma do erro da solução em relação à variedade, durante toda a simulação, *i.e.*:

$$\text{scdY} \doteq \max \left\{ -\log_{10} \left(\|Y^{(\rho)}\|_{\infty} \right); \forall t \in I \right\}$$

- *steps*: Quantidade total de passos dados pelo método (incluindo passos rejeitados por falhas em testes de erro ou em teste de convergência).
- *#τ* e *#QR*: quantidade de cálculos do campo τ e de decomposições QR para $\frac{\partial Y^{\rho-1}}{\partial x}$. (aplicável somente para o MII). Já que no MII_{proj} é preciso calcular o complemento ortogonal em cada ponto durante a obtenção da solução, $\# \tau = \# QR$ para ele.
- *#F*, *#Jac* e *#LU*: quantidade de cálculos da função F, da jacobiana da F e da decomposição LU para a a Jacobiana de F (aplicável somente para os solvers do *TestSet*).
- *CPU*: Tempo de processamento de máquina em segundos para a simulação.

Os problemas simulados são:

Abreviatura	Nome do Problema	Área	Referência
MatrizCond	Matrizes Mal Condicionadas	exemplo teórico	[SDS05]
Pêndulo	Pêndulo Simples sem Amortecimento	mecânica	[FN02]
SpaceShuttle	Controle de Trajetória Prescrita	mecânica	[AP98]
Chemakzo	<i>Chemical Akzo Nobel problem</i>	cinética química	[MM08, Sto98]
Andrews	<i>Andrews' squeezing mechanism</i>	mecânica	[MM08, HW96]
TransAmp	Amplificador de Transistor	circuitos elétricos	[MM08, HLR89]
CarAxis	Eixo de carro	mecânica	[MM08, Sch94]

Tabela 4.1: *Problemas Simulados: abreviatura, nome, área e referência*

Outras informações importantes:

- A menos de menção contrária, é utilizado o método de integração numérica `ode45`² do *Matlab*. Para algumas simulações, utiliza-se também o `ode113`³.
- Os experimentos numéricos foram efetuados num computador com processador Intel Pentium (R) Dual Cpu T3200 2.0GHz, com 2.0Gb de memória RAM.
- Para as simulações, foi utilizado também o parâmetro de convergência $\gamma = 0$. Esta escolha foi tomada afim de avaliar o comportamento das soluções sem a presença da componente no campo vetorial corrigindo o erro em relação à variedade Γ .

² Da referência de ajuda do *Matlab*: o `ode45` é um método baseado na associação de métodos de Runge-Kutta de ordens 4 e 5, com controle automático de passo, conhecido como Dormand-Price. Ele é um método de passo único, *i.e.*, para o comuto de $y(t_n)$, é necessário somente o conhecimento imediato da solução no ponto anterior $y(t_{n-1})$. Em geral, o `ode45` costuma ser uma boa escolha para a *primeira tentativa* na maioria dos problemas.

³ Da referência de ajuda do *Matlab*: o `ode113` é um método com controle automático de passo, consistindo num Adams-Bashforth-Moulton PECE solver de ordens variadas. Ele costuma ser mais eficiente que o `ode45` para tolerâncias rigorosas e quando o avaliação do campo vetorial da EDO requer custo computacional alto. O `ode113` é um método de passo múltiplo, ou seja, excetuando-se os primeiros pontos, ele depende das soluções em vários instantes de tempo precedentes para calcular a próxima solução.

4.2 Problema MatrizCond

Considere inicialmente o sistema quadrado linear afim invariante no tempo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}x \equiv 0 \end{cases} \quad (4.2a)$$

$$(4.2b)$$

Onde:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -100 & -100 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Com condição inicial $x(0) = x_0 \doteq (2, 0, 0, 0)$ e $u(0) = 0$, para $t \in [0, 1000]$.

Assim, escrevendo separadamente as equações do sistema (4.2), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -100x_2 - 100x_3 - 100x_4 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u \\ y = x_2 \equiv 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

De onde verifica-se por substituição que a expressão analítica para a solução de (4.2) é:

$$x(t) = (2, 0, 0, 0), \quad u(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 1000] \quad (4.5)$$

Já que $h(x) = x_2$, aplicando-se o processo de derivações de saída sucessivas ao sistema (4.2), conforme Observação 2.6 e Algoritmo 3.2, obtém-se:

$$\begin{cases} x_2 & \doteq y^{(0)}(x) \\ \dot{y}^{(0)} = \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\tilde{A}x + \tilde{B}u) & \\ & = x_3 & \doteq y^{(1)}(x) \\ \dot{y}^{(1)} = \frac{\partial y^{(1)}}{\partial x} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\tilde{A}x + \tilde{B}u) & \\ & = x_4 & \doteq y^{(2)}(x) \\ \dot{y}^{(2)} = \frac{\partial y^{(2)}}{\partial x} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\tilde{A}x + \tilde{B}u) & \\ & = u & \doteq y^{(3)}(x, u) \end{cases}$$

Ou seja, $\rho = 3$, $Y^{(\rho-1)}(x) = (x_2, x_3, x_4)$ e $y^{(\rho)}(x, u) = u$.

Tomem-se agora uma matriz $K_{4 \times 4}$, constante não singular, e a transformação de coordenadas $w = K^{-1}x$. Assim, o sistema (4.2) escrito nessas novas coordenadas é da forma:

$$\begin{cases} \dot{w} = Aw + Bu \\ y = Cw \equiv 0 \end{cases} \quad (4.7a)$$

$$(4.7b)$$

Onde:

$$A = K^{-1}\tilde{A}K, \quad B = K^{-1}\tilde{B}, \quad C = \tilde{C}K \quad (4.8)$$

Com condição inicial $w(0) = K^{-1}x_0$ e $u(0) = 0$, para $t \in [0, 1000]$.

Portanto a solução do sistema (4.7) será:

$$w(t) = K^{-1}x(t) = K^{-1}(2, 0, 0, 0), u(t) = 0, \forall t \in [0, 1000] \quad (4.9)$$

Toma-se então $(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}}) = (x(t_f), u(t_f)) (K^{-1}(2, 0, 0, 0), 0)$. Onde a inversão da matriz foi efetuada simbolicamente.

Daí, como (4.7) foi obtido por uma transformação linear de (4.2). Aplicando-se o processo de derivações de saída sucessivas para o sistema (4.7), também chega-se à $\rho = 3$, $Y^{(\rho-1)}(w) = (w_2, w_3, w_4)$ e $y^{(\rho)}(x, u) = u$.

Com o intuito de avaliar o efeito de um mal condicionamento, adotou-se a seguinte matriz K para as simulações:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 + 10^{-5} & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 + 10^{-5} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Cujo número de condicionamento é da ordem de 10^7 . Assim, o MII será da forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial w} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial w} & 0 \\ \hline \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial w} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{w}}{\partial w} (Aw + Bu) \\ -\gamma Y^{(\rho)}(w, u) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial w_1} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial w_2} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial w_3} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial w_4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial w} (Aw + Bu) \\ -\gamma w_2 \\ -\gamma w_3 \\ -\gamma w_4 \end{pmatrix}$$

Os resultados das simulações são expostos na tabela abaixo.

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII _{proj}		0	2.83	7.80	407	59	407	0.029
		0.1	3.87	6.60	407	59	407	0.029
		1	4.42	2.05	2228	308	2228	0.045
		10	3.86	2.39	22212	3018	22212	0.228
MII _{cond}	10	0	2.91	7.84	407	59	1	0.031
		0.1	3.78	6.63	407	59	1	0.031
		1	4.43	3.06	2239	307	1	0.031
		10	4.29	1.21	22247	3017	1	0.130

Tabela 4.2: Problema MatrizCond: MII, $rtol = atol = h_0 = 10^{-4}$

Além disso, o condicionamento dos blocos diagonais de $T(x, u)$ foi constante para todos os casos.

Solver	cond([R;Yx])	cond([ypu])
MII _{proj}	10^6	1
MII _{cond}	1	1

Tabela 4.3: Problema MatrizCond: MII, condicionamento

Análise do Experimento Numérico:

- Para ambos os casos, a precisão da solução (scd) melhorou com o aumento de γ , exceto para $\gamma = 10$. O maior (scd) foi atingido para $\gamma = 1$.
- O erro em relação à restrição ($scdY$) piorou com o aumento de γ em ambos os casos.
- Somente 1 balanceamento foi necessário para o MII_{cond} , pois o problema possui matriz $T(x, u)$ constante.
- Para cada γ , as características de tempo de processamento (CPU), $\#tau$ e $\#steps$ foram similares nos dois métodos.

4.3 Problema Pêndulo

Considere-se o problema do pêndulo simples sem amortecimento, onde m é uma massa fixada na extremidade inferior de um fio de comprimento L , g é a aceleração da gravidade, λ é a tensão no fio e θ é a coordenada angular contada a partir da vertical no sentido anti-horário. Escolhendo $m = 1$ e $L = 1$, chega-se a:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\lambda x \\ \ddot{y} = -\lambda y - g \\ 0 \equiv x^2 + y^2 - 1^2 \end{cases}$$

Com condição inicial $x(0) = x_0 \doteq (-1, 0, 0, 0)$ e $u(0) = 0$, para $t \in [0, t_f]$.

Que, com auxílio das variáveis auxiliares $x_1 \doteq x, x_2 \doteq \dot{x}, x_3 \doteq y, x_4 \doteq \dot{y}, u \doteq \lambda$, assume a estrutura semi-implícita:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ux_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -ux_3 - g \\ y = x_1^2 + x_3^2 - 1 \equiv 0 \end{cases}$$

E já que $h(x) = x_1^2 + x_3^2 - 1$, aplicando-se o processo de derivações de saída sucessivas ao sistema (4.13), conforme Observação 2.6 e Algoritmo 3.2, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1^2 + x_3^2 - 1 & \doteq y^{(0)}(x) \\ \dot{y}^{(0)} = \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -ux_1 \\ x_4 \\ -ux_3 - g \end{pmatrix} & \\ = 2x_1x_2 + 2x_3x_4 & \doteq y^{(1)}(x) \\ \dot{y}^{(1)} = \frac{\partial y^{(1)}}{\partial x} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 & 2x_4 & 2x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -ux_1 \\ x_4 \\ -ux_3 - g \end{pmatrix} & \\ = 2x_2^2 + 2x_4^2 - (x_1^2 + x_3^2 + x_3g)u & \doteq y^{(2)}(x) \end{array} \right.$$

Ou seja, $\rho = 2$, $Y^{(\rho-1)}(x) = (x_1^2 + x_3^2 - 1, 2x_1x_2 + 2x_3x_4)$ e $y^{(\rho)}(x, u) = 2x_2^2 + 2x_4^2 - (x_1^2 + x_3^2 + x_3g)u$.

Assim, o MII será da forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x} & 0 \\ \hline \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} & \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} f(x, u) \\ -\gamma Y^{(\rho)}(x, u) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

O instante final da simulação t_f será tomado como o período de oscilação do pêndulo, para que $(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}}) \doteq (x(t_f), u(t_f)) = (x(0), u(0))$. Esse período é dado pela expressão [FN02]:

$$t_f = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \left| \sin \frac{\theta_0}{2} \right|} \right)^{-1} \sin^2 \theta \, d\theta$$

O cálculo dessa integral elíptica é feito com 14 casas decimais de precisão.

Os resultados das simulações são expostos nas tabelas abaixo.

Solver	tol_{cond}	γ	scd	$scdY$	$\#\tau$	steps	$\#QR$	CPU
MII_{proj}		0	4.30	0.93	379	55	379	0.029
		0.1	4.35	0.93	379	55	379	0.031
		1	4.58	0.92	379	55	379	0.030
		10	3.75	0.49	379	55	379	0.027
		100	4.65	0.85	1114	160	1114	0.031
MII_{cond}	10	0	4.91	1.08	715	103	4	0.117
		0.1	4.91	1.08	715	103	4	0.106
		1	4.77	1.07	715	103	4	0.110
		10	4.03	0.65	721	103	4	0.110
		100	4.13	0.85	1219	175	4	0.095
MII_{cond}	5	0	4.80	1.02	715	103	4	0.151
		0.1	4.81	1.02	715	103	4	0.148
		1	4.72	1.01	715	103	4	0.139
		10	3.91	0.59	721	103	4	0.140
		100	4.26	0.85	1212	174	4	0.141
MII_{cond}	2	0	4.96	1.18	1905	273	15	0.654
		0.1	5.00	1.17	1905	273	15	0.484
		1	5.12	1.11	1905	273	15	0.617
		10	4.33	0.68	1905	273	15	0.498
		100	4.55	0.85	1884	270	12	0.399

Tabela 4.4: Problema Pêndulo: MII , $rtol = atol = h_0 = 10^{-4}$

O condicionamento do bloco ypu na diagonal de $T(x, u)$ foi constantemente igual a 1 em todos os casos. Para o MII_{proj} , o condicionamento máximo foi inferior à 9.5.

Análise do Experimento Numérico:

- Não há uma tendência clara entre o aumento de γ e scd . Considerando-se scd , $\gamma = 1$ está entre as melhores resultados em todos os casos.
- O erro em relação à restrição $scdY$ piorou com o aumento de γ em ambos os solvers, exceto para $\gamma = 100$.
- O custo computacional aumenta com o aumento de γ para todos os casos. Em especial para $\gamma = 100$ o aumento foi acentuado, indicando uma dinâmica muito rápida em relação ao tamanho do passo de integração, o que dificulta a integração numérica.
- Para o MII_{cond} com $tol_{cond} = 10$ e $tol_{cond} = 5$ foram necessárias 4 decomposições QR. Para o MII_{cond} com $tol_{cond} = 2$ foi preciso ao menos 3 vezes mais.
- O maior scd foi obtido com MII_{cond} com $tol_{cond} = 2$.
- Considerando conjuntamente o custo computacional (envolvendo CPU e $\#\tau$) e precisão scd , MII_{proj} com $\gamma = 1$ é a melhor escolha.

Solver	tol_{cond}	γ	scd	$scdY$	$\#\tau$	steps	$\#QR$	CPU
MII_{proj}		0	5.29	1.25	505	73	505	0.039
		0.1	5.33	1.23	505	73	505	0.025
		1	5.49	1.08	545	77	545	0.030
		10	5.55	1.15	736	106	736	0.050
		100	6.88	2.11	2584	370	2584	0.039
MII_{cond}	10	0	5.59	1.26	867	123	4	0.109
		0.1	5.55	1.25	865	123	4	0.095
		1	5.37	1.17	873	124	4	0.280
		10	5.55	1.18	986	141	4	0.102
		100	6.29	2.11	2780	398	4	0.102
MII_{cond}	5	0	5.59	1.25	853	121	4	0.100
		0.1	5.57	1.22	853	121	4	0.113
		1	5.45	1.16	846	120	4	0.135
		10	5.59	1.17	959	137	4	0.106
		100	6.36	2.13	2766	396	4	0.110
MII_{cond}	2	0	5.44	1.26	2202	315	15	0.422
		0.1	5.48	1.24	1881	269	14	0.394
		1	5.59	1.16	1895	271	14	0.397
		10	5.65	1.16	1960	281	14	0.556
		100	6.66	2.11	3410	488	12	0.341

Tabela 4.5: Problema Pêndulo: MII , $rtol = atol = h_0 = 10^{-6}$

Análise do Experimento Numérico:

- De maneira geral, o aumento de γ melhora o scd .
- O erro em relação à restrição $scdY$ atingiu menor valor para $\gamma = 1$ em todos os casos.
- O custo computacional aumenta com o aumento de γ para todos os casos. Em especial para $\gamma = 100$ o aumento foi acentuado, indicando uma dinâmica muito rápida em relação ao tamanho do passo de integração, o que dificulta a integração numérica.
- Para o MII_{cond} com $tol_{\text{cond}} = 10$ e $tol_{\text{cond}} = 5$ foram necessárias 4 decomposições QR. Para o MII_{cond} com $tol_{\text{cond}} = 2$ foi preciso ao menos 3 vezes mais.
- O maior scd foi obtido com MII_{cond} com $tol_{\text{cond}} = 2$.
- Considerando conjuntamente o custo computacional (envolvendo CPU e $\#\tau$) e precisão scd , MII_{proj} com $\gamma = 1$ é a melhor escolha.
- O custo computacional do MII_{proj} com $\gamma = 1$ e $rtol = atol = h_0 = 10^{-6}$ foi mais baixo e do que MII_{cond} com $\gamma = 1$, $tol_{\text{cond}} = 2$ e $rtol = atol = h_0 = 10^{-4}$, contudo a precisão scd foi maior. Nesse caso o refinamento do passo de integração para o MII_{proj} foi mais vantajoso que a imposição de uma tolerância menor no condicionamento para o MII_{cond} .

4.4 Problema SpaceShuttle

Na simulação de veículos espaciais, o formato da trajetória é frequentemente imposto adicionando-se um conjunto de restrições às equações de movimento.

O modelo de equações então torna-se um sistema de DAEs não linear semi-implícito. As equações diferenciais incluem as equações clássicas de movimento, e as equações algébricas correspondem às restrições de percurso. Dá-se o nome de *Trajectory prescribed path control - TPPC* para essa classe de problemas.

O problema tratado aqui é um TPPC de 6 equações diferenciais, 2 equações algébricas e *index* 2, presente em [AP98] Seção 6.3, da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(t, x) \equiv 0 \end{cases}$$

Com uma condição inicial $(x(0), u(0)) = (x_0, u_0)$ dada, para $t \in [0, 300]$.

Utilizou a solução obtida através do MII_{proj} com $\text{rtol} = \text{atol} = h_0 = 10^{-14}$ como $(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}})$, visto que a fonte [AP98] não disponibiliza uma solução suficientemente precisa para comparação em $t = 300$. Além disso, provavelmente por problemas de tipográficos em [AP98], algumas constantes na definição do problema estavam incorretas e precisaram ser readequadas para que $\|h(0, x_0)\|$ fosse suficientemente pequena. As constantes utilizadas bem como a solução de referência encontram-se no apêndice, dentro dos códigos fonte.

Os resultados das simulações são expostos nas tabelas abaixo.

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII_{proj}		0	4.51	2.83	400	58	400	0.027
		0.1	3.60	1.92	400	58	400	0.027
		1	2.76	1.30	843	120	834	0.051
		10	2.59	1.23	6430	916	6430	0.050
MII_{cond}	10	0	6.31	2.84	1246	180	10	0.253
		0.1	4.86	1.93	1248	180	10	0.267
		1	4.85	1.39	1421	204	8	0.194
		10	2.96	1.23	6722	956	8	0.231
MII_{cond}	5	0	6.20	2.84	2066	299	22	0.602
		0.1	4.85	1.93	2072	299	22	0.573
		1	4.64	1.39	1882	270	15	0.422
		10	3.23	1.17	6924	948	13	0.391

Tabela 4.6: Problema SpaceShuttle: MII , $\text{rtol} = \text{atol} = h_0 = 10^{-4}$

Solver	rtol	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII_{proj}	10^{-6}	1	4.73	2.61	1709	245	1709	0.100
	10^{-7}	1	5.61	3.23	2577	369	2557	0.135

Tabela 4.7: Problema SpaceShuttle: MII_{proj} , $\text{rtol} = \text{atol} = h_0$, refinamento de passo

Análise do Experimento Numérico:

- O aumento de γ piorou scd e $scdY$.
- O custo computacional aumenta com o aumento de γ para todos os casos. Em especial para $\gamma = 10$ o aumento foi acentuado.
- Para o MII_{cond} , o aumento de tol_{cond} exigiu mais decomposições QR.
- O maior scd foi obtido com MII_{cond} com $tol_{\text{cond}} = 5$ e $\gamma = 0$.
- Considerando conjuntamente o custo computacional (envolvendo CPU e $\#\tau$) e precisão scd , MII_{proj} com $\gamma = 1$ não foi a melhor escolha, mas não foi a pior.
- Nesse caso o refinamento do passo de integração para o MII_{proj} não foi mais vantajoso que a imposição de uma tolerância menor no condicionamento para o $\overline{MII}_{\text{cond}}$.

4.5 Problema Chemakzo

Nome do Problema:	<i>Chemical Akzo Nobel problem</i>
Contribuição:	<i>parallel-IVP-algorithm group of CWI.</i>
Ano:	1996
Área:	<i>cinética química.</i>

Breve Descrição Este PVI é um sistema de EDAs *stiff* com 6 equações e *index* 1. O problema é originário do *Akzo Nobel Central research in Arnhem* e descreve o processo químico no qual duas espécies químicas são misturadas, enquanto dióxido de carbono é adicionado continuamente.

O problema foi reescrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \equiv 0 \end{cases}$$

Com $x \in \mathbb{R}^5$ e $u \in \mathbb{R}$, condição inicial $(x(0), u(0)) = (x_0, u_0)$ dada, e $t \in [0, 180]$. A solução de referência ao final do intervalo de integração $(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}})$ também foi fornecida.

Os resultados das simulações são expostos nas tabelas abaixo.

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII _{proj}		0	10.99	5.72	3780	540	3780	0.040
		0.1	10.99	5.58	3780	540	3780	0.050
		1	10.91	6.45	4159	595	4159	0.040
		10	10.84	7.22	13805	1973	13805	0.070
		100	11.15	8.00	62329	8905	62329	0.192
MII _{cond}	10	0	10.99	5.72	3780	540	1	0.063
		0.1	10.99	5.58	3780	540	1	0.045
		1	10.91	6.45	4159	595	1	0.046
		10	10.84	7.22	13805	1973	1	0.090
		100	11.15	8.00	62329	8905	1	0.273

Tabela 4.8: *Problema Chemakzo: MII, rtol = atol = h₀ = 10⁻¹⁰*

Nesse problema a saída já depende explicitamente de u , assim $\rho = 0$. Além disso, $y_u \equiv -1$ e os condicionamento foram constantes para o MII_{proj}: $\text{cond}([R; Yx]) \equiv 1$ e $\text{cond}(y_u) \equiv 1$.

Análise do Experimento Numérico:

- A menos das características *CPU* e *#QR*, ambos os solvers exibiram comportamento idêntico, devido ao fato de ρ ser nulo.
- O aumento de γ piorou *scd*, exceto para $\gamma = 100$.
- O aumento de γ melhorou *scdY* para todos o γ .

Os resultados apresentados a seguir foram extraídos de [MM08], utilizando outros solvers implementados em Fortran.

Solver	rtol	atol	h_0	scd	steps	accept	#F	#Jac	#LU	CPU
BIMD	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	10.61	41	41	1177	41	41	0.0039
DDASSL	10^{-10}	10^{-10}		8.33	522	515	649	38		0.0039
GAMD	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	9.82	35	35	1737	35	35	0.0039
MEBDFI	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	9.76	274	273	916	32	32	0.0029
PSIDE-1	10^{-10}	10^{-10}		9.91	87	85	1671	15	204	0.0039
RADAU	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	8.39	43	41	696	30	43	0.0010

Tabela 4.9: *Problema Chemakzo: Outros Solvers*

Comparação com outros métodos:

- Tome-se como base o resultado obtido para o MII_{proj} com $\gamma = 1$.
- Comparando com a tabela acima, o *scd* foi melhor do que o dos outros solvers.
- A quantidade de passos *steps* ficou próxima da faixa dos outros solvers.
- A quantidade de cálculo de τ foi ao menos 4 vezes maior que a quantidade de cálculos de f dos outros solvers. Por outro lado, este custo pode ser reduzido utilizando um método de integração numérica de passo múltiplo, como ilustrado abaixo, mantendo ainda bons resultados.

Método	integrador	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII_{proj}	ode113	1	10.29	8.94	2072	681	2072	0.060

Tabela 4.10: *Problema Chemakzo: MII_{proj} , $rtol = atol = h_0 = 10^{-10}$, ode113*

4.6 Problema Andrews

Nome do Problema:	<i>Andrews' squeezing mechanism problem</i>
Contribuição:	<i>parallel-IVP-algorithm group of CWI</i>
Ano:	1996
Área:	mecânica

Breve Descrição: Este PVI é um sistema EDAs não-*stiff* de segunda ordem e *index* 3, constituído de 14 equações diferenciais e 13 equações algébricas. O problema descreve o movimento de 7 corpos rígidos conectado por articulações sem fricção.

O problema foi reescrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Com $x \in \mathbb{R}^{14}$ e $u \in \mathbb{R}^{13}$, condição inicial $(x(0), u(0)) = (x_0, u_0)$ dada, e $t \in [0, 0.03]$. A solução de referência ao final do intervalo de integração $(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}})$ também foi fornecida, observando-se que somente as 7 primeiras coordenadas da solução de referência foram utilizadas para o cálculo de *scd*, tal como feito por [MM08].

Os resultados das simulações são expostos nas tabelas abaixo.

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII _{proj}	0	0	2.02	-2.46	581	77	581	0.052
		0.1	2.02	-2.46	581	77	581	0.042
	1	1	2.02	-2.57	581	77	581	0.051
	10	10	2.05	-2.56	600	78	600	0.047
	100	100	2.41	-2.50	613	79	613	0.048
MII _{cond}	1000	1	5.29	1.19	38082	21561	4293	57.000

Tabela 4.11: *Problema Andrews: MII, rtol = atol = h₀ = 10⁻⁴*

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII _{proj}	0	0	5.75	-0.33	2315	323	2315	0.062
		0.1	5.75	-0.33	2290	322	2290	0.060
	1	1	5.76	-0.33	2284	322	2284	0.059
MII _{cond}	1000	1	8.20	1.28	178036	103839	8287	191.000

Tabela 4.12: *Problema Andrews: MII, rtol = atol = h₀ = 10⁻⁷*

Solver	rtol	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII _{proj}	10 ⁻⁹	1	8.21	0.51	5865	837	5865	0.088
	10 ⁻¹¹	1	8.86	1.32	14980	2140	14980	0.143

Tabela 4.13: *Problema Andrews: MII_{proj}, rtol = atol = h₀, refinamento de passo*

Análise do Experimento Numérico:

- O aumento de γ melhorou scd .
- Para $rtol = 10^{-4}$ o aumento de γ melhorou $scdY$, exceto para $\gamma = 100$. Para $rtol = 10^{-7}$ o aumento de γ não modificou $scdY$, exceto para $\gamma = 100$.
- Não há uma relação clara entre o aumento de γ e um maior custo computacional (CPU e $steps$).
- Para o MII_{cond} , tolerâncias de condicionamento mais baixas impossibilitaram na prática a simulação, devido ao tempo de processamento requerido. Mostram-se nas tabelas anteriores o resultado somente para $tol_{cond} = 1000$. De fato, obtiveram-se 3 dígitos a mais de precisão no scd , contudo a quantidade de cálculos de τ e o tempo de processamento CPU foram ao menos 70 vezes maiores.
- Considerando conjuntamente o custo computacional (envolvendo CPU e $\#\tau$) e precisão scd , MII_{proj} com $\gamma = 1$ foi uma boa escolha.
- Nesse caso o refinamento do passo de integração para o MII_{proj} foi mais vantajoso que o uso do MII_{cond} .

Solver	rtol	atol	h_0	scd	steps	accept	#F	#Jac	#LU	CPU
BIMD	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	3.05	46	41	1034	41	46	0.0185
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	5.38	122	122	2553	122	122	0.0459
GAMD	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	2.82	82	58	2281	58	82	0.0293
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	4.54	128	116	5176	116	128	0.0693
MEBDFI	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	0.37	118	108	466	23	23	0.0078
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	3.50	300	287	1222	38	38	0.0195
PSIDE-1	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	2.95	92	75	1675	52	368	0.0410
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	4.98	113	93	2637	63	428	0.0615
RADAU	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	1.36	96	56	810	54	96	0.0137
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	4.45	114	95	1292	90	114	0.0195

Tabela 4.14: *Problema Andrews: Outros Solvers*Comparação com outros métodos:

- Tome-se como base o resultado obtido para o MII_{proj} com $\gamma = 1$.
- Comparando com a tabela acima, o scd foi melhor do que o dos outros solvers.
- A quantidade de passos $steps$ foi ao menos duas vezes maior que a dos outros solvers.
- A quantidade de cálculos de τ ficou próxima da quantidade mais baixa dentre os outros solvers.

4.7 Problema TransAmp

Nome do Problema:	<i>Amplificador de Transistor</i>
Contribuição:	<i>parallel-IVP-algorithm group of CWI.</i>
Ano:	1996
Área:	análise de circuitos elétricos

Breve Descrição: Este PVI é um sistema EDAs *stiff* de *index* 1, constituído de 8 equações. O problema origina-se da análise de circuitos elétricos, sendo um modelo de amplificador de transistor.

Uma particularidade deste problema é que ele foi dado na forma:

$$\left\{ M \frac{d}{dt}(w) = F(t, w) \right.$$

Com $w(0) = w_0$, $w'(0) = w'_0$, $w \in \mathbb{R}^N$ e $t \in [0, 0.2]$. Observando-se que M é uma matriz constante singular, com a qual não é imediata, como nos *benchmarks* anteriores, a reformulação necessária.

Então, para transformá-lo num problema semi-implícito, será utilizada a decomposição em valores singulares, conforme o Lema 3.12, obtendo $USV^\top = M$ com S de posto n , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} M\dot{w} &= F(t, w) \\ \Leftrightarrow USV^\top \dot{w} &= F(t, w) \\ \Leftrightarrow S \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_1(t, x, u) \\ F_2(t, x, u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Onde $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \doteq V^\top w$, $\tilde{F}(t, x, u) = U^\top F\left(t, V \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\right)$ e $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) \doteq \tilde{F}$, onde $\tilde{F}_1$ representa as n primeiras componentes de $\tilde{F}$ e $\tilde{F}_2$ representa as últimas $m \doteq N - n$ componentes de $\tilde{F}$.

Como $S = \left(\begin{array}{c|c} s_{n \times n} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$, já que S é uma matriz diagonal não negativa, ordenada de maneira decrescente, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(t, x, u) \equiv 0 \end{cases}$$

Onde $f(t, x, u) \doteq s^{-1} \tilde{F}_1(t, x, u)$ e $h(t, x, u) \doteq \tilde{F}_2(t, x, u)$. Com condição inicial $(x(0), u(0)) = V^\top w_0$, para o mesmo intervalo de tempo $t \in [0, 0.2]$

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII _{proj}	0	0	1.25	1.11	10567	1429	10567	0.097
		0.1	1.34	1.11	10574	1430	10574	0.100
	1	1	1.55	1.09	10588	1432	10588	0.102
		10	1.67	0.91	10639	1435	10639	0.114
	100	100	2.70	1.16	10831	1465	10831	0.086
MII _{cond}	1000	1	2.07	1.19	59422	8452	1859	51.755

Tabela 4.15: Problema Transamp: MII, $rtol = atol = 10^{-4}$, $h_0 = 10^{-6}$

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII _{proj}		0	5.10	2.57	38304	5443	38304	0.268
		0.1	5.11	2.58	38304	5443	38304	0.223
		1	5.16	2.58	38298	5443	38298	0.228
		10	5.65	2.65	38395	5456	38395	0.255
		100	7.17	2.66	39242	5571	39242	0.238
MII _{cond}	1000	1	3.92	2.80	90722	13058	998	27.511

Tabela 4.16: *Problema Transamp: MII*, $rtol = atol = 10^{-7}$, $h_0 = 10^{-9}$

Análise do Experimento Numérico:

- O aumento de γ melhorou *scd*.
- Para $rtol = 10^{-4}$ a relação entre o aumento γ e *scdY* não é clara. Para $rtol = 10^{-7}$ o aumento de γ melhorou *scdY*.
- O aumento de γ acarretou um maior custo computacional (*CPU* e *steps*).
- Para o MII_{cond}, tolerâncias de condicionamento mais baixas impossibilitaram na prática a simulação, devido ao tempo de processamento requerido. Mostram-se nas tabelas anteriores o resultado somente para $tol_{cond} = 1000$. Mesmo assim o ganho em precisão expressivo e o custo computacional foi consideravelmente maior tanto para $rtol = 10^{-4}$ como 10^{-7} .
- Considerando conjuntamente o custo computacional (envolvendo *CPU* e # τ) e precisão *scd*, MII_{proj} com $\gamma = 1$ não foi a melhor escolha, mas ficou entre as melhores.

Solver	rtol	atol	h_0	scd	steps	accept	#F	#Jac	#LU	CPU
BIMD	10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}	5.63	466	408	8423	408	466	0.0322
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-9}	8.34	618	575	19632	575	618	0.0752
DDASSL	10^{-4}	10^{-4}		3.08	9759	6026	18381	7359		0.1113
	10^{-7}	10^{-7}		5.49	40810	23859	77402	33678		0.4743
GAMD	10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}	5.83	373	276	17204	276	373	0.0517
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-9}	7.37	374	325	34320	326	374	0.1064
MEBDFI	10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}	4.80	1580	1486	5949	256	256	0.0303
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-9}	6.99	3628	3513	13324	419	419	0.0703
PSIDE-1	10^{-4}	10^{-4}		4.76	516	362	9742	253	2008	0.0351
	10^{-7}	10^{-7}		7.23	653	653	21914	419	2724	0.0732
RADAU	10^{-7}	10^{-7}	10^{-9}	6.83	1551	1551	17582	1541	1775	0.0517

Tabela 4.17: *Problema TransAmp: Outros Solvers*

Comparação com outros métodos:

- Tome-se como base o resultado obtido para o MII_{proj} com $\gamma = 1$.
- Comparando com a tabela acima, o *scd* foi pior que todos os outros solvers, indicando que apesar do artifício registrado acima possibilitar a estruturação de $M\dot{w} = F(w)$ como um sistema semi-implícito, esta não é uma boa opção prática comparando-se com outros solvers que lidam diretamente com essa classe de problemas.

4.8 Problema CarAxis

Nome do Problema:	<i>Eixo de Carro</i>
Contribuição:	S. Schneider
Ano:	1996
Área:	mecânica

Breve Descrição: Este problema é um sistema EDAs *stiff* de *index* 3, constituído 8 equações diferenciais e 2 equações algébricas. Ele é um exemplo simplificado de sistema com múltiplos corpos, no qual o comportamento do eixo de um carro numa via esburacada é modelado como um conjunto de equações algébrico-diferenciais. O problema foi reescrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ y = h(t, x) \equiv 0 \end{cases}$$

Com $x \in \mathbb{R}^8$ e $u \in \mathbb{R}^2$, condição inicial $(x(0), u(0)) = (x_0, u_0)$ dada, e $t \in [0, 3]$. A solução de referência ao final do intervalo de integração $(x_{\text{ref}}, u_{\text{ref}})$ também foi fornecida.

Os resultados das simulações são expostos nas tabelas abaixo.

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	steps	# τ	#QR	CPU
MII _{proj}		0	0.99	-0.17	2061	261	2061	0.044
		1	1.38	-0.06	2030	260	2030	0.044
		10	2.56	-0.13	1985	257	1985	0.046
		100	1.91	0.32	2285	317	2285	0.045
MII _{cond}	10	0	1.48	-0.19	3245	425	20	0.574
		1	2.18	-0.23	2606	338	15	0.451
		10	2.20	-0.19	2654	350	19	0.548
		100	3.02	-2.41	2889	399	21	0.611
MII _{cond}	5	0	1.64	-0.09	3823	523	40	1.703
		1	1.79	-0.11	3783	513	37	1.710
		10	2.28	-0.16	3773	515	38	1.602
		100	2.61	0.02	4019	563	37	1.604

Tabela 4.18: *Problema CarAxis: MII, rtol = atol = h₀ = 10⁻⁴*

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII _{proj}		0	3.85	2.26	6673	949	6673	0.074
		1	4.19	2.23	6673	949	6673	0.072
		10	4.93	2.25	6665	947	6665	0.101
		100	6.25	1.72	8739	1245	8739	0.103
MII _{cond}	10	0	4.33	1.86	8759	1228	29	0.845
		1	4.84	2.05	8429	1185	24	0.674
		10	5.56	1.97	8708	1225	28	0.787
		100	6.17	1.75	10508	1491	28	0.945
MII _{cond}	5	0	4.52	1.59	8733	1223	30	1.284
		1	4.72	1.91	8717	1224	32	1.528
		10	5.39	2.03	8806	1243	32	1.386
		100	6.48	1.68	10678	1519	36	1.571

Tabela 4.19: *Problema CarAxis: MII, rtol = atol = h₀ = 10⁻⁷*

Solver	tol _{cond}	γ	scd	scdY	# τ	steps	#QR	CPU
MII _{proj}		0	7.71	3.60	26475	3783	26475	0.195
		1	8.09	3.60	26468	3782	26468	0.242
		10	8.92	3.58	26552	3794	26552	0.241
		100	9.33	3.47	34497	4929	34497	0.297
MII _{cond}	10	0	7.67	3.51	28909	4148	28	0.883
		1	8.05	3.43	28906	4148	28	0.895
		10	8.91	3.53	28798	4133	28	0.866
		100	9.40	3.45	36446	5226	28	1.072
MII _{cond}	5	0	7.41	3.44	29105	4180	38	1.869
		1	7.80	3.44	28948	4159	36	2.051
		10	8.76	3.43	28802	4135	34	1.764
		100	9.51	3.47	36385	5223	38	2.417

Tabela 4.20: Problema CarAxis: MII, $rtol = atol = h_0 = 10^{-10}$

Análise do Experimento Numérico:

- O aumento de γ melhorou scd , exceto para $rtol = 10^{-4}$ e $\gamma = 100$
- O aumento de γ não melhorou necessariamente $scdY$.
- De maneira geral o aumento de γ acarretou um maior custo computacional (CPU e $steps$).
- O MII_{cond} aumentou o custo computacional e não tornou a solução mais precisa quanto à scd .
- Considerando conjuntamente o custo computacional (envolvendo CPU e $\# \tau$) e precisão scd , MII_{proj} com $\gamma = 1$ ficou entre as melhores escolhas.

Solver	rtol	atol	h_0	scd	steps	accept	#F	#Jac	#LU	CPU
BIMD	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	0.34	71	71	1693	71	71	0.0088
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	3.34	138	138	4511	138	138	0.0224
	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	5.35	235	235	9669	235	235	0.0488
GAMD	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	0.39	39	39	2169	39	39	0.0088
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	2.64	98	98	7167	98	98	0.0293
	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	3.84	179	179	18771	179	179	0.0742
MEBDFI	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	-0.23	280	278	1246	27	27	0.0059
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	3.34	650	648	2797	47	47	0.0137
	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	2.08	1393	1391	5624	85	85	0.0264
PSIDE-1	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	-0.28	55	54	1403	42	220	0.0098
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	2.27	179	172	4103	83	464	0.0273
	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	4.86	625	612	13751	115	964	0.0869
RADAU	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	0.19	98	97	850	95	98	0.0039
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	2.51	289	288	2559	282	288	0.0127
	10^{-10}	10^{-10}	10^{-10}	4.22	179	178	4281	169	179	0.0166

Tabela 4.21: Problema CarAxis: Outros Solvers

Comparação com outros métodos:

- Tome-se como base o resultado obtido para o MII_{proj} com $\gamma = 1$.
- Comparando com a tabela acima, o scd foi melhor que todos os outros solvers, além disso
- A quantidade de cálculo de τ foi ao menos muitas vezes maior que a quantidade de cálculos de f dos outros solvers. Por outro lado, este custo pode ser reduzido utilizando um método de integração numérica de passo múltiplo, como ilustrado abaixo, mantendo ainda bons resultados.

Método	integrador	rtol	γ	scd	scdY	$\#\tau$	steps	#QR	CPU
MII_{proj}	ode113	10^{-4}	1	1.29	0.65	1413	471	1413	0.056
		10^{-7}	1	4.33	3.41	2771	942	2771	0.064
		10^{-10}	1	7.51	5.99	4817	1606	4817	0.063

Tabela 4.22: *Problema CarAxis: MII_{proj} , $rtol = atol = h_0$, ode113*

4.9 Conclusões sobre as Implementações

Sintetizam-se abaixo as conclusões dos experimentos numéricos:

- Foi possível realizar todas as simulações com ambas as escolhas de coordenadas complementares, MII_{proj} e MII_{cond} .
- A transformação do Sistema Implícito em um Sistema Explícito foi vantajosa por permitir o uso de diferentes métodos de integração numérica, dependendo das características do problema, como ilustrado em Seção 4.6 - Andrews.
- De maneira geral o MII_{proj} apresentou melhores resultados e a escolha de $\gamma = 0$ não foi boa, excetuando-se em especial a simulação do Seção 4.4 - SpaceShuttle.
- A utilização do parâmetro de convergência $\gamma = 1$ mostrou-se uma boa primeira escolha para as simulações.
- O aumento excessivo de γ pode gerar o fenômeno conhecido como *stiffness*, dificultando a integração numérica por impor uma dinâmica muito rápida para o sistema em relação ao tamanho de passo de integração. Com isso, trazendo um maior custo computacional, não acompanhado necessariamente de um ganho de precisão compensatório (Seção 4.8 - CarAxis).
- Em muitos casos o MII_{cond} foi mais preciso que o MII_{proj} . Contudo, o refinamento do passo de integração para o MII_{proj} foi mais vantajoso do que a imposição de uma tolerância menor no condicionamento para o MII_{cond} , avaliando conjuntamente a precisão da solução obtida e o custo computacional. Como por exemplo: Seção 4.3 - Pêndulo.
- Para o MII_{cond} , a imposição do parâmetro tol_{cond} muito justo tornou a simulação inviável para os problemas Seção 4.7 - TransAmp - e Seção 4.6 - Andrews.
- Não há indícios que a extensão do MII para sistemas variantes no tempo tenha prejudicado a performance do método.
- o artifício da transformação do sistema $M \frac{d}{dt}(w) = F(t, w)$, com M uma matriz constante, num sistema semi-implícito utilizando decomposição em valores singulares, Seção 4.7 - TransAmp, originou resultados piores do que os obtidos pelos outros solvers, que lidam diretamente com essa classe de problemas.

A principal conclusão sobre os experimentos numéricos é:

O MII_{proj} foi uma alternativa viável para a solução de sistemas implícitos com *index* baixos, mas ele mostrou-se uma ferramenta especialmente boa para problemas com *index* mais altos: Seção 4.7 - TransAmp e Seção 4.6 - Andrews.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho aprimorou-se o método MII para aproximar soluções de DAEs, dadas como Sistemas Semi-Implicitos Quadrados (chamados aqui por simplicidade de Sistemas Implícitos),

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \equiv 0 \end{cases}$$

através da integração numérica de um Sistema Explícito de equações diferenciais ordinárias,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x, u)$$

construído através do cálculos simbólicos e numéricos.

Inicialmente foi apresentada uma revisão da elementos da teoria de controle geométrico, definindo o método clássico por realimentação de estado estática (MI). Todavia, foi visto um exemplo simples no qual o erro relativo à variedade Γ das soluções geradas pelo MI pode apresentar um comportamento indesejado.

Passou-se então para a definição do MII por injeção de saída generalizada, contornando esta dificuldade. O MII como em (2.55) é da forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \tau(x, u), \text{ onde } T(x, u)\tau(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x}(f(x, u)) \\ -\gamma Y^{(\rho)}(x, u) \end{pmatrix}, \text{ com } T(x, u) \text{ não singular}$$

observando que:

- a função $Y^{(\rho)}(x, u) \doteq (Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u))$ é construída simbolicamente através de derivadas sucessivas das saída do Sistema Implícito (vide (2.23)), de forma que $Y^{(\rho-1)}(x)$ não depende de u e $y^{(\rho)}(x, u)$ depende de u ;
- $\hat{x}(x)$ são coordenadas complementares quaisquer, escolhidas para que a aplicação $\Psi(x, u) = (\hat{x}(x), Y^{(\rho-1)}(x), y^{(\rho)}(x, u))$ seja uma transformação de coordenadas suave. Ressaltando que na Seção 2.2 prova-se a existência de tais coordenadas complementares suaves desde que $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$ possua posto máximo numa vizinhança;
- $T(x, u)$ é uma notação para a matriz jacobiana $\frac{\partial \Psi(x, u)}{\partial x, u}$.

O próximo passo foi verificar que as soluções do Sistema Implícito evoluem sobre uma subvariedade $\Gamma \doteq \{(x, u); Y^{(\rho)}(x, u) = 0\}$.

Os teoremas discutindo a proximidade entre as soluções do MII e do Sistema Implícito foram aperfeiçoados e suas demonstrações tornadas mais claras. Provou-se com o Teorema 2.25 que a distância $\|Y^{(\rho)}(x, u)\|$ entre as soluções do MII e Γ decresce exponencialmente.

Na sequência do trabalho, tratou-se da obtenção pontual de coordenadas complementares, empregando técnicas de análise numérica com objetivo de melhorar a precisão e a performance do algoritmo.

Foram levantadas e testadas algumas novas opções para escolhas numéricas de $\hat{x}(x)$, das quais o MII_{cond} e o MII_{proj} , respectivamente nas Seções 3.3 e 3.3, obtiveram os melhores resultados.

A ideia principal do MII_{cond} é utilizar uma escolha linear de coordenadas complementares $\hat{x}(x) \doteq Kx$ e balanceamentos nas coordenadas $Y^{(\rho)}$, recalculados quando o número de condicionamento dos blocos diagonais ultrapassar uma tolerância tol_{cond} . Com isso, buscou-se que a eliminação de Gauss envolvendo $T(x, u)$ fosse sempre numericamente estável.

O conceito do MII_{proj} é tomar uma base para o complemento ortogonal do espaço gerado pelas linhas de $\frac{\partial Y^{(\rho-1)}}{\partial x}$, denotada matricialmente por $R(x)$, em cada um dos pontos x no decorrer da simulação. Além disso, aproveita-se a estrutura especial da matriz inversa de $T(x, u)$, descrita em (3.8), juntamente com uma interpretação geométrica da expressão obtida. Repete-se aqui por comodidade a estrutura obtida para o MII_{proj} como em (3.11):

$$\begin{cases} \dot{x} = \tau_x(x, u) = \text{proj}_{[R]}(f(x, u)) - \gamma \text{inc}_{[Y_x]}(Y^{(\rho-1)}(x)) \\ \dot{u} = \tau_u(x, u) = \left(\frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial u}\right)^{-1} \left(-\gamma y^{(\rho)}(x, u) - \frac{\partial y^{(\rho)}}{\partial x} \dot{x}\right) \end{cases}$$

Outro fato importante é a interpretação geométrica simples da expressão obtida para o campo vetorial τ_x , composto pela soma de dois vetores perpendiculares:

- $\text{proj}_{[R]}(f(x, u))$: projeção ortogonal do vetor $f(x, u)$ sobre o espaço tangente à superfície definida por $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \|Y^{(\rho-1)}(\bar{x})\| = \varepsilon\}$, no ponto x , com $\varepsilon \doteq \|Y^{(\rho-1)}(x)\|$.
- $-\gamma \text{inc}_{[Y_x]}(Y^{(\rho-1)}(x))$: inclusão no espaço de estados de uma componente corrigindo o erro $Y^{(\rho-1)}(x)$ em relação à variedade, com velocidade multiplicada por γ .

As simulações dos três primeiros problemas mostram que ambas escolhas numéricas de coordenadas complementares são aplicáveis. Com os *benchmarks*, constatou-se que o MII_{cond} foi inviável em alguns casos, devido ao tempo de processamento muito extenso, exigindo o ajuste do parâmetro tol_{cond} . Por outro lado, o MII_{proj} apresentou melhores resultados, sendo que parâmetro de convergência $\gamma = 1$ com integrador *ode45* mostrou-se uma boa primeira escolha em todos os casos.

Ademais, a liberdade de escolha para o integrador numérico, como por exemplo Runge-Kutta ou Adams Bash-forth, mostrou-se uma boa ferramenta para o ajuste das características da solução gerada dependendo da necessidade.

Conclui-se por fim, ao comparar com os demais solvers do [MM08], que o MII_{proj} é uma alternativa válida para aproximação numérica desta classe de problemas, em especial para sistemas com *index* alto (maior ou igual a 3).

5.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

Como sugestões para futuras pesquisas e implementação, ressaltam-se:

- Emprego de estratégia numérica para obter maior robustez na identificação do anulamento simbólico da expressão $\frac{\partial \bar{h}}{\partial u}$, conforme comentário ao final da Seção 3.1.
- Definição de um método para uma busca de solução inicial (x_0, u_0) tal que (x_0, u_0) pertença à Γ .
- Implementação usando um pacote de cálculo simbólico em *Fortran*.
- Generalização do método para lidar diretamente com problemas da forma $M(w)w' = F(t, w)$, ou ainda $F(t, w, w') = 0$.

- Generalização do método para tratar de sistemas semi-implícitos não necessariamente quadrados, *i.e.*, com $y \in \mathbb{R}^m$ e $u \in \mathbb{R}^l$, com $l \geq m$.

Capítulo 6

Apêndice

Neste capítulo incluem-se os códigos-fonte desenvolvidos em *Matlab*. Inicialmente estão as rotinas para construção das simulações e rotinas auxiliares, descritas na Seção 3.6, incluem-se depois o códigos-fonte dos problemas simulados.

6.1 Código-Fonte Construção da Implementação

Arquivo: ConstroiFuncao.m

```
function [] = ConstroiFuncao(out, f, x, varargin)
%A partir da função simbólica f na variável simbólica x,
%cria uma função out.m para ser acessada pela simulação

numvarargin = length(varargin);
if numvarargin==2
    cte = varargin{1};
    vcte = varargin{2};
else
    cte = [];
    vcte = [];
end

if exist(strcat(out, '.m')) == 2;
    delete(strcat(out, '.m'));
end

fid = fopen(strcat(out, '.m'), 'w');

fprintf(fid, strcat('function [out] = ', out, ' (x)'));

[n, m] = size(f);
[k, aux] = size(x);

%Estruturando as variáveis simbólicas como um vetor numérico
if (k>0)
    fprintf(fid, strcat('\n\n', char(37), ...
        'Recuperando variáveis simbólicas\n'));

    for i=1:k
        fprintf(fid, strcat(char(x(i)), '=', ...
```

```

        'x(', num2str(i, '%d' ), ')', ';' \n'));
    end
end

%Atribuindo valor às ctes
[k, aux ]=size(cte);
if (k~=0)
    fprintf(fid, strcat('\n\n', char(37), ...
        'Atribuindo valores às constantes\n'));

    for i=1:k
        if (vcte(i)==180/pi)
            fprintf(fid, strcat(char(cte(i)), '=', ...
                '180/pi', ';' \n'));
        else
            fprintf(fid, strcat(char(cte(i)), '=', ...
                num2str(vcte(i), '%20f'), ';' \n'));
        end
    end
end

%Escrevendo função
fprintf(fid, strcat('\n\n', char(37), ...
    'Escrevendo a função\n'));

fprintf(fid, strcat('out', '=zeros(', ...
    num2str(n), ', ', num2str(m), '); \n\n'));

for i=1:n
    for j=1:m
        if isnumeric(f(i,j))
            fprintf(fid, strcat('out', '(', num2str(i), ...
                ', ', num2str(j), ')=' , num2str(f(i,j), '%20f'), ';' \n'));
        else
            fprintf(fid, strcat('out', '(', num2str(i), ...
                ', ', num2str(j), ')=' , char(f(i,j)), ';' \n'));
        end
    end
end

status = fclose(fid);

```

Arquivo: Derivacoes_Sucessivas.m

```

function[p, Y, Yx, yp, ypx, ypu] = Derivacoes_Sucessivas(f, h, x, u)
%Cria funcoes atraves de derivadas sucessivas da saida

%Inicializando variáveis auxiliares
p = []; Y = []; Yx = []; yp = []; ypx = []; ypu = [];

%Calculando o tamanho dos vetores

```

```

n = max(size(f)); m = max(size(h));

%Construindo p, Y, Yx, yp, ypx, ypu iterativamente
for i=1:m

    k = 0;
    h_ = h(i); jhu = jacobian(h_, u);

    %Construindo Y que não dependem de u
    while (all(jhu == 0))

        Y = [Y; h_];

        jhx = jacobian(h_, x);

        Yx = [Yx; jhx];

        h_ = jhx*f;
        jhu = jacobian(h_, u);

        k = k + 1;
    end

    %Nesta ponto k = rho_i
    p = [p; k];

    %Construindo yp
    yp = [yp; h_];
    ypu = [ypu; jhu];

    jhx = jacobian(h_, x);
    ypx = [ypx; jhx];

end

```

Arquivo: ConstroiImplementacao.m

```

function[] = ConstroiImplementacao(f, h, x, u, tolcond)
%Gerando funções .m para que a simulação possa acessar

    fclose('all');

    if exist('n.m') == 2;
        delete('n.m');
    end
    if exist('m.m') == 2;
        delete('m.m');
    end

    n = length(x); m = length(u);

```

```

%Sempre faz a simulação na generalização variante no tempo
if (char(x(1)) == 't')
    tx = x;
    n = n-1;
else
    syms t;
    tx = [t;x];
end

%Obtendo a transformação de coordenadas por derivações sucessivas
[p, Y, Ytx, yp, yptx, ypu] = Cria_Funcoes_Simbolicas([1;f], h, tx, u);

if ~isempty(Ytx)
    Yt = Ytx(:,1);
    Yx = Ytx(:,2:(n+1));
else
    Yt = [];
    Yx = [];
end

ypt = yptx(:,1);
ypx = yptx(:,2:(n+1));

txu = [tx;u];

%Construindo funções para a transformação e suas derivadas
ConstroiFuncao('Y' , Y, txu);
ConstroiFuncao('yp', yp, txu);

ConstroiFuncao('Yt', Yt, txu);
ConstroiFuncao('Yx', Yx, txu);

ConstroiFuncao('ypt', ypt, txu);
ConstroiFuncao('ypx', ypx, txu);
ConstroiFuncao('ypu', ypu, txu);

%Construindo as funções de definição do problema
ConstroiFuncao('f', f, txu);
ConstroiFuncao('h', h, txu);

ConstroiFuncao('n', n, []); ConstroiFuncao('m', m, []);
ConstroiFuncao('dimout', n+m, []);
ConstroiFuncao('p', sum(p), []);

ConstroiFuncao('tolcond', tolcond, []);

pause(3);

global r1;
r1 = eye(n);

```

Arquivo: Complemento_Ortogonal.m

```
function[R, r] = Complemento_Ortogonal(H)
%Gerando o complemento ortogonal de H

if (p > 0)
    [q, r] = qr(H');
    R = q(:, (p+1):(n))';
    r = r(1:p,:)' ;

else

    R = eye(n);
    r = [];

end
```

Arquivo: ParametrosBalanceamento.m

```
function [] = ParametrosBalanceamento(txu)
%Para o MIIcond, calculando os balanceamentos r1 e r2,
%e o complemento ortogonal R

    global R r1 r2 calculos_QR;

    Yx_ = Yx(txu);
    [R, r1] = Complemento_Ortogonal(Yx_);

    ypu_ = ypu(txu);
    [q2, r2] = qr(ypu_');
    r2 = r2';

    calculos_QR = calculos_QR + 1;
```

Arquivo: SimulinkAdaptado.m

```
function [T,Y,tempoproc] = SimulinkAdaptado(intervalo,xu0)
%Para o MIIproj, simplesmente inicia o simulink
%Para o MIIcond, esta função controla as reinicializações
%necessárias para a simulação

    global ScopeData xu_ Tipo_Implementacao;
    tempoproc=0;

    t_ = intervalo(1);
    tf = intervalo(2);
    xu_ = xu0;
    T = []; Y = [];

    set_param('SimulinkTau', 'StopTime', num2str(tf,30));
```

```

while t_ < tf

    if Tipo_Implementacao == 2
        display('Balanceamento efetuado em')
        t_
        ParametrosBalanceamento([t_;xu_]);
    end

    set_param('SimulinkTau', 'StartTime', num2str(t_,30));

    %A simulação está configurada para aceitar
    %xu_ como condição inicial
    tInicialSimulacao = clock;
    set_param('SimulinkTau','simulationcommand','start')

    %Esperando a simulação parar
    esperou = 0;
    while ~strcmp(get_param('SimulinkTau','simulationstatus'),'stopped')
        esperou = esperou + 1;
        pause(1);
    end

    tempoproc = tempoproc + etime(clock,tInicialSimulacao) - esperou;

    %Esperando a variável ScopeData ser preenchida
    while 1
        pause(1);
        if ~isempty(ScopeData)
            break
        end
    end

    [steps, aux] = size(ScopeData.signals.values);

    T = [T; ScopeData.time];
    Y = [Y; ScopeData.signals.values];

    t_ = ScopeData.time(steps); xu_ = ScopeData.signals.values(steps,:);
end

```

Arquivo: Avalia_tau.m

```

function tau_ = Avalia_tau(txu)
%Função principal que calcula o campo vetorial tau
%para o MIIproj ou para o MIIcond

global R r1 r2 scdY calculos_Tau gama Tipo_Implementacao

calculos_Tau = calculos_Tau + 1;

```



```

%Avaliando as funções necessárias no ponto (t,x,u)
f_ = f(txu);

Y_ = Y(txu);
yp_ = yp(txu);

Yt_ = Yt(txu);    Yx_ = Yx(txu);
ypt_ = ypt(txu);   ypx_ = ypx(txu);   ypu_ = ypu(txu);

auxnorm = norm([Y_; yp_]);

%Tipo_Implementacao = 1 : MIIproj
%Tipo_Implementacao = 2 : MIIcond
if Tipo_Implementacao == 1

    [R, r1] = Complemento_Ortogonal(Yx_);

    if p > 0
        tau1 = R'*R*f_ - Yx_' * ((r1*r1')\ (gama * Y_ + Yt_));
    else
        tau1 = f_;
    end

    tau2 = ypu_\( - ypx_ * tau1 - gama * yp_ - ypt_);

elseif Tipo_Implementacao == 2

    %Aplicando o balanceamento nas coordenadas,
    %mantendo o mesmo nome das variáveis
    %a operação \ já aproveita a estrutura triangular das matrizes
    Y_ = r1\Y_;
    yp_ = r2\yp_;

    Yt_ = r1\Yt_;    Yx_ = r1\Yx_;
    ypt_ = r2\ypt_;   ypx_ = r2\ypx_;   ypu_ = r2\ypu_;

    %Calculando o condicionamento dos blocos diagonais
    condRYx = cond([R; Yx_]);   condypu = cond(ypu_);

    %Se o condicionamento ultrapassar a tolerância a função devolve
    %vazio
    if condRYx > tolcond || condypu > tolcond
        set_param('SimulinkTau','simulationcommand','stop');
        %a simulação se encarregará de calcular um novo balanceamento
        %e reiniciar a simulação através da função SimulinkAdaptado
    end

    if p > 0
        tau1 = [R; Yx_]\[R*f_ ; -gama * Y_ - Yt_];
    else
        tau1 = f_;
    end
end

```

```

        tau2 = ypu_\( - ypx_ * tau1 - gama * yp_ - ypt_);

    end

    scdY = max( scdY, auxnorm );

    tau_ = [tau1;tau2];

return

```

6.2 Código-Fonte MatrizCond

Arquivo: Problema_MatrizCond.m

```

%Iniciando variáveis auxiliares
global ScopeData xu_ gama Tipo_Implementacao
global calculos_Tau scdY calculos_QR
calculos_Tau = 0; scdY = 0; calculos_QR = 0;

%DEFININDO PROBLEMA
%Parâmetros
gama = 1;
AbsTol = 1e-4;
RelTol = 1e-4;
InitialStep = 1e-4;
Tipo_Implementacao = 2; %1: MIIproj, 2: MIIcond
tolcond = 10;

%Definindo variáveis simbólicas
syms x1 x2 x3 x4;
%Coordenadas Originais Sistema Semi-implícito
x = [x1; x2; x3; x4];

syms w1 w2 w3 w4;
%Coordenadas Modificadas Sistema Semi-implícito
w = [w1; w2; w3; w4];

syms u;      %Entrada do Sistema

%Matriz de Transformação
T1 = sym([1      2      3              4;
          4      5      6              7;
          7      8      9 + 10^(-5)    10;
          11     12     13              14 + 10^(-5)]);

%Problema Semi-implícito na Base Original
At = sym([ 0      -100 -100 -100;
          0      0      1      0;
          0      0      0      1;
          0      0      0      0      ]);

Bt = sym([ 0;

```

```

        0;
        0;
        1    ]));

Ct = sym([ 0    1    0    0    ]);

f = At*x + Bt*u;
h = Ct*x;

%Condição Inicial
x0 = [ 2;          0;          0;          0 ]          ;u0 = 0;

xu0 = [x0; u0];

%Problema Semi-implícito na Base Modificada
invT1 = inv(T1); %Inversa calculada simbolicamente

A = invT1 * At * T1;
B = invT1 * Bt;
C =          Ct * T1;

fw = A*w + B*u;
hw = C*w;

w0 = double(invT1*x0);
wu0 = [w0; u0];

%CONSTRUINDO IMPLEMENTAÇÃO
ConstroiImplementacao(fw, hw, w, u, tolcond);

t0 = 0;
tf = 1000;

%IMPLEMENTAÇÃO COM SIMULINK
load_system('SimulinkTau');
set_param('SimulinkTau', 'Solver', 'ode45', ...
          'StopTime', num2str(tf,30), ...
          'AbsTol', num2str(AbsTol,30), ...
          'RelTol', num2str(RelTol,30), ...
          'InitialStep', num2str(InitialStep,30));

[T,Y, tempoproc] = SimulinkAdaptado([t0 tf],wu0);

[steps, aux] = size(T);
yFim = Y(steps,:)' ;

%Gerando características da saída
n=4;
yFimRef = x0;

yFim = yFim(1:n);
yFim = double(T1) * yFim;

```

```

scd=abs(yFim-yFimRef);
scd=-log10(max(scd));

scdY = -log10(max(scdY));

if Tipo_Implementacao == 1
    calculos_QR = calculos_Tau;
end

Resultados = [scd scdY calculos_Tau steps calculos_QR tempoproc];

num2str(Resultados)

```

6.3 Código-Fonte Pêndulo

Arquivo: Problema_Pendulo.m

```

%Iniciando variáveis auxiliares
global ScopeData xu_ gama Tipo_Implementacao
global calculos_Tau scdY calculos_QR
calculos_Tau = 0; scdY = 0; calculos_QR = 0;

%DEFININDO PROBLEMA
%Parâmetros
gama = 1;
AbsTol = 1e-4;
RelTol = 1e-4;
InitialStep = 1e-4;
Tipo_Implementacao = 1; %1: MIIproj, 2: MIIcond
tolcond = 10;

%Definindo variáveis simbólicas
syms x1 x2 x3 x4 u;
syms L g;
x = [x1; x2; x3; x4];

f = [ x2;
      -u*x1;
      x4;
      -u*x3 - 9.8];

h = [x1^2 + x3^2-1^2];

%Condição Inicial
x0 = [-1; 0; 0; 0]; u0 = 0;

xu0 = double([x0; u0]);

%CONSTRUINDO IMPLEMENTAÇÃO
ConstroiImplementacao(f, h, x, u, tolcond);

t0 = 0;

```

```

tf = 2.36904972217535;

%IMPLEMENTAÇÃO COM SIMULINK
load_system('SimulinkTau');
set_param('SimulinkTau', 'Solver', 'ode45', ...
          'StopTime', num2str(tf,30), ...
          'AbsTol', num2str(AbsTol,30), ...
          'RelTol', num2str(RelTol,30), ...
          'InitialStep', num2str(InitialStep,30));

[T,Y, tempoproc] = SimulinkAdaptado([t0 tf],xu0);

[steps, aux] = size(T);
yFim = Y(steps,:)' ;

%Gerando características da saída
yFimRef = x0;

yFim = Y(steps,:)' ;
yFim = yFim(1:n);

scd=abs(yFim-yFimRef);
scd=-log10(max(scd));

scdY=-log10(max(scdY));

if Tipo_Implementacao == 1
    calculos_QR = calculos_Tau;
end

Resultados = [scd scdY calculos_Tau steps calculos_QR tempoproc];

num2str(Resultados)

```

6.4 Código-Fonte SpaceShuttle

Arquivo: Problema_SpaceShuttle.m

```

%Inicializando variáveis auxiliares
global ScopeData xu_ gama Tipo_Implementacao
global calculos_Tau scdY calculos_QR
calculos_Tau = 0; scdY = 0; calculos_QR = 0;

%DEFININDO PROBLEMA
%Parâmetros
gama = 1;
AbsTol = 1e-7;
RelTol = 1e-7;
InitialStep = 1e-7;
Tipo_Implementacao = 1; %1: MIIproj, 2: MIIcond
tolcond = 5;

%Definindo variáveis simbólicas

```

```

syms t H xi lam VR gam A alp bet
syms betp alpp betpp alppp delta

%Atribundo valores às constantes
ae=20902900;
mu=0.14076539e17;
OmegaE = 0.72921159e-04;
m=2.890532728;
a=0.002378;
b=23800;
c=180/pi;
S=1;

r=H+ae;
g=mu/(r*r);

f= [VR*sin(gam);
    VR*cos(gam)*sin(A)/(H+ae)/cos(lam);
    VR*cos(gam)*cos(A)/(H+ae);
    -1/2*a*exp(-H/b)*(1/25+1/100000*c^2*alp^2)* ...
    S*VR^2/m-mu/(H+ae)^2*sin(gam)-OmegaE^2*(H+ae)* ...
    cos(lam)*(sin(lam)*cos(A)*cos(gam)-cos(lam)*sin(gam));
    1/200*a*exp(-H/b)*c*alp*S*VR*cos(bet)/m+cos(gam)* ...
    (VR^2/(H+ae)-mu/(H+ae)^2)/VR+2*OmegaE*cos(lam)* ...
    sin(A)+OmegaE^2*(H+ae)*cos(lam)*(sin(lam)*cos(A)* ...
    sin(gam)+cos(lam)*cos(gam))/VR;
    1/200*a*exp(-H/b)*c*alp*S*VR*sin(bet)/m/cos(gam)+ ...
    VR*cos(gam)*sin(A)*tan(lam)/(H+ae)-2*OmegaE* ...
    (cos(lam)*cos(A)*tan(gam)-sin(lam))+ ...
    OmegaE^2*(H+ae)*cos(lam)*sin(lam)*sin(A)/VR/cos(gam)];

x = [H;
     xi;
     lam;
     VR;
     gam;
     A];

u = [bet;
     alp];

y1 = ((180/pi)*gam + 1 + 9*(t/300)^2);
y2 = ((180/pi)*A - 45 - 90*(t/300)^2);

h = [y1; y2];

%Condição Inicial
x0 = [100000;
      0;
      0;
      12000;
      -pi/180];

```

```

        45*pi/180];
u0 = [-0.0009112291879423346;
      0.046650382102852828];

xu0 = [x0; u0];

yFimRef = [14200.811375710837
4.1710846155650128;
2.3314973476727507;
1433.2921335194001;
-10.000000000000011;
135.00000000000014;
26.377545223441455;
7.1555845680251204];

%CONSTRUINDO IMPLEMENTAÇÃO
ConstroiImplementacao(f, h, [t;x], u, tolcond);

t0 = 0;
tf = 300;

%IMPLEMENTAÇÃO COM SIMULINK
load_system('SimulinkTau');
set_param('SimulinkTau', 'Solver', 'ode45', ...
          'StopTime', num2str(tf,30), ...
          'AbsTol', num2str(AbsTol,30), ...
          'RelTol', num2str(RelTol,30), ...
          'InitialStep', num2str(InitialStep,30));

[T,Y, tempoproc] = SimulinkAdaptado([t0 tf],xu0);

[steps, aux] = size(T);
yFim = Y(steps,:);

%Gerando características da saída
yFim = xu_;
yFim(2)= c*yFim(2);
yFim(3)= c*yFim(3);
yFim(5)= c*yFim(5);
yFim(6)= c*yFim(6);
yFim(7)= c*yFim(7);
yFim(8)= c*yFim(8);

scd=abs(yFim-yFimRef);
scd=-log10(max(scd));

scdY=-log10(max(scdY));

if Tipo_Implementacao == 1
    calculos_QR = calculos_Tau;
end

```

```
Resultados = [scd scdY calculos_Tau steps calculos_QR tempoproc];

num2str(Resultados)
```

6.5 Código-Fonte Chemakzo

Arquivo: Problema_Chemakzo.m

```
%Iniciando variáveis auxiliares
global ScopeData xu_ gama Tipo_Implementacao
global calculos_Tau scdY calculos_QR
calculos_Tau = 0; scdY = 0; calculos_QR = 0;

%DEFININDO PROBLEMA
%Parâmetros
gama = 1;
AbsTol = 1e-10;
RelTol = 1e-10;
InitialStep = 1e-10;
Tipo_Implementacao = 1; %1: MIIproj, 2: MIIcond
tolBal = 10;

%Definindo variáveis simbólicas
syms y1 y2 y3 y4 y5 y6;
y = [y1; y2; y3; y4; y5; y6];

x = [y1; y2; y3; y4; y5];
u = y6;
xu = [x; u];

%Parâmetros
ks = 115.83;
k1 = 18.7;
k2 = 0.58;
k3 = 0.09;
k4 = 0.42;
kbig = 34.4;
kla = 3.3;
po2 = 0.9;
hen = 737;

%Construindo a função
r1 = k1*(y(1)^4)*sqrt(y(2));
r2 = k2*y(3)*y(4);
r3 = k2/kbig*y(1)*y(5);
r4 = k3*y(1)*(y(4)^2);
r5 = k4*(y(6)^2)*sqrt(y(2));
fin = kla*(po2/hen-y(2));

f1 = -2*r1 +r2 -r3 -r4;
f2 = -0.5*r1 -r4 -0.5*r5 + fin;
f3 = r1 -r2 +r3;
f4 = -r2 +r3 -2*r4;
```



```

f5 = r2 -r3 +r5;
f6 = ks*y(1)*y(4)-y(6);

f=[f1;f2;f3;f4;f5];
h=f6;

%Condição Inicial
x0 = [0.444;
      0.00123;
      0;
      0.007;
      0];

u0 = ks*x0(1)*x0(4);

xu0 = [x0; u0];

%Solução Referência para t=180

yFimRef = zeros(6,1);
yFimRef (1) = 0.1150794920661702e0;
yFimRef (2) = 0.1203831471567715e-2;
yFimRef (3) = 0.1611562887407974e0;
yFimRef (4) = 0.3656156421249283e-3;
yFimRef (5) = 0.1708010885264404e-1;
yFimRef (6) = 0.4873531310307455e-2;

%CONSTRUINDO IMPLEMENTAÇÃO
ConstroiImplementacao(f, h, x, u, tolcond);

t0 = 0;
tf = 180;

%IMPLEMENTAÇÃO COM SIMULINK
load_system('SimulinkTau');
set_param('SimulinkTau', 'Solver', 'ode113', ...
          'StopTime', num2str(tf,30), ...
          'AbsTol', num2str(AbsTol,30), ...
          'RelTol', num2str(RelTol,30), ...
          'InitialStep', num2str(InitialStep,30));

[T,Y, tempoproc] = SimulinkAdaptado([t0 tf],xu0);

%Calculando Características MII
[steps, aux] = size(T);
yFim = Y(steps,:);

scd=abs(yFim-yFimRef);
scd=-log10(max(scd));

scdY=-log10(max(scdY));

```

```

if Tipo_Implementacao == 1
    calculos_QR = calculos_Tau;
end

Resultados = [scd scdY calculos_Tau steps calculos_QR tempoproc];

num2str(Resultados)

```

6.6 Código-Fonte Andrews

Arquivo: Problema_Andrews.m

```

%Iniciando variáveis auxiliares
global ScopeData xu_ gama Tipo_Implementacao
global calculos_Tau scdY calculos_QR
calculos_Tau = 0; scdY = 0; calculos_QR = 0;

%DEFININDO PROBLEMA
%Parâmetros
gama = 1;
AbsTol = 1e-11;
RelTol = 1e-11;
InitialStep = 1e-11;
Tipo_Implementacao = 1; %1: MIIproj, 2: MIIcond
tolcond = 1000;

%Definindo variáveis simbólicas
syms y1 y2 y3 y4 y5 y6 y7 y8 y9 y10 y11 y12 y13 y14;
syms y15 y16 y17 y18 y19 y20 y21 y22 y23 y24 y25 y26 y27;

X = [y1; y2; y3; y4; y5; y6; y7; y8; y9; y10; y11; y12; y13; y14;];
U = [y15; y16; y17; y18; y19; y20; y21; y22; y23; y24; y25; y26; y27];
XU = [X; U];
y = XU;

%Parâmetros do problema
m1=.04325e0;
m2=.00365e0;
m3=.02373e0;
m4=.00706e0;
m5=.07050e0;
m6=.00706e0;
m7=.05498e0;
xa=-.06934e0;
ya=-.00227e0;
xb=-0.03635e0;
yb=.03273e0;
xc=.014e0;
yc=.072e0;
c0=4530e0;
i1=2.194e-6;
i2=4.410e-7;

```

```
i3=5.255e-6;
i4=5.667e-7;
i5=1.169e-5;
i6=5.667e-7;
i7=1.912e-5;
d=28e-3;
da=115e-4;
e=2e-2;
ea=1421e-5;
rr=7e-3;
ra=92e-5;
l0=7785e-5;
ss=35e-3;
sa=1874e-5;
sb=1043e-5;
sc=18e-3;
sd=2e-2;
ta=2308e-5;
tb=916e-5;
u=4e-2;
ua=1228e-5;
ub=449e-5;
zf=2e-2;
zt=4e-2;
fa=1421e-5;
mom=33e-3;

%Construindo a função
sibe = sin(y(1));
sith = sin(y(2));
siga = sin(y(3));
siph = sin(y(4));
side = sin(y(5));
siom = sin(y(6));
siep = sin(y(7));

cobe = cos(y(1));
coth = cos(y(2));
coga = cos(y(3));
coph = cos(y(4));
code = cos(y(5));
coom = cos(y(6));
coep = cos(y(7));

sibeth = sin(y(1)+y(2));
siphde = sin(y(4)+y(5));
siomep = sin(y(6)+y(7));

cobeth = cos(y(1)+y(2));
cophde = cos(y(4)+y(5));
coomep = cos(y(6)+y(7));
```

```

bep = y(8);
thp = y(9);
php = y(11);
dep = y(12);
omp = y(13);
epp = y(14);

m = sym(zeros(7,7));

m(1,1) = m1*ra^2 + m2*(rr^2-2*da*rr*coth+da^2) + i1 + i2;
m(2,1) = m2*(da^2-da*rr*coth) + i2;
m(2,2) = m2*da^2 + i2;
m(3,3) = m3*(sa^2+sb^2) + i3;
m(4,4) = m4*(e-ea)^2 + i4;
m(5,4) = m4*((e-ea)^2+zt*(e-ea)*siph) + i4;
m(5,5) = m4*(zt^2+2*zt*(e-ea)*siph+(e-ea)^2) + m5*(ta^2+tb^2) + i4 + i5;
m(6,6) = m6*(zf-fa)^2 + i6;
m(7,6) = m6*((zf-fa)^2-u*(zf-fa)*siom) + i6;
m(7,7) = m6*((zf-fa)^2-2*u*(zf-fa)*siom+u^2) + m7*(ua^2+ub^2)+ i6 + i7;

for j=2:7
    for i=1:(j-1)
        m(i,j) = m(j,i);
    end
end

xd = sd*coga + sc*siga + xb;
yd = sd*siga - sc*coga + yb;
lang = sqrt((xd-xc)^2 + (yd-yc)^2);
force = - c0 * (lang - l0)/lang;
fx = force * (xd-xc);
fy = force * (yd-yc);

f = sym(zeros(7));

f(1) = mom - m2*da*rr*thp*(thp+2*bep)*sith;
f(2) = m2*da*rr*bep^2*sith;
f(3) = fx*(sc*coga - sd*siga) + fy*(sd*coga + sc*siga);
f(4) = m4*zt*(e-ea)*dep^2*coph;
f(5) = - m4*zt*(e-ea)*php*(php+2*dep)*coph;
f(6) = - m6*u*(zf-fa)*epp^2*coom;
f(7) = m6*u*(zf-fa)*omp*(omp+2*epp)*coom;

gp = sym(zeros(6,7));

gp(1,1) = - rr*sibe + d*sibeth;
gp(1,2) = d*sibeth;
gp(1,3) = - ss*coga;
gp(2,1) = rr*cobe - d*cobeth;
gp(2,2) = - d*cobeth;
gp(2,3) = - ss*siga;
gp(3,1) = - rr*sibe + d*sibeth;

```

```

gp(3,2) = d*sibeth;
gp(3,4) = - e*cophde;
gp(3,5) = - e*cophde + zt*side;
gp(4,1) = rr*cobe - d*cobeth;
gp(4,2) = - d*cobeth;
gp(4,4) = - e*siphde;
gp(4,5) = - e*siphde - zt*code;
gp(5,1) = - rr*sibe + d*sibeth;
gp(5,2) = d*sibeth;
gp(5,6) = zf*siomep;
gp(5,7) = zf*siomep - u*coep;
gp(6,1) = rr*cobe - d*cobeth;
gp(6,2) = - d*cobeth;
gp(6,6) = - zf*coomep;
gp(6,7) = - zf*coomep - u*siep;

g = sym(zeros(6,1));

g(1) = rr*cobe - d*cobeth - ss*siga - xb;
g(2) = rr*sibe - d*sibeth + ss*coga - yb;
g(3) = rr*cobe - d*cobeth - e*siphde - zt*code - xa;
g(4) = rr*sibe - d*sibeth + e*cophde - zt*side - ya;
g(5) = rr*cobe - d*cobeth - zf*coomep - u*siep - xa;
g(6) = rr*sibe - d*sibeth - zf*siomep + u*coep - ya;

ff = sym(zeros(27,1));

for i=1:14
    ff(i) = y(i+7);
end

for i=15:21
    ff(i) = -f(i-14);
    for j=1:7
        ff(i) = ff(i) + m(i-14,j) * y(j+14);
    end
    for j=1:6
        ff(i) = ff(i)+gp(j,i-14)*y(j+21);
    end
end

for i=22:27
    ff(i) = g(i-21);
end

F=ff(1:14);
H=ff(15:27);

%Condição Inicial
xu0 = zeros(27,1);
xu0(1) = -0.0617138900142764496358948458001e0;
xu0(2) = 0e0;

```

```

xu0(3) = 0.455279819163070380255912382449e0;
xu0(4) = 0.222668390165885884674473185609e0;
xu0(5) = 0.487364979543842550225598953530e0;
xu0(6) = -0.222668390165885884674473185609e0;
xu0(7) = 1.23054744454982119249735015568e0;
xu0(8) = 0e0;
xu0(9) = 0e0;
xu0(10) = 0e0;
xu0(11) = 0e0;
xu0(12) = 0e0;
xu0(13) = 0e0;
xu0(14) = 0e0;
xu0(15) = 14222.4439199541138705911625887e0;
xu0(16) = -10666.8329399655854029433719415e0;
xu0(17) = 0e0;
xu0(18) = 0e0;
xu0(19) = 0e0;
xu0(20) = 0e0;
xu0(21) = 0e0;
xu0(22) = 98.5668703962410896057654982170e0;
xu0(23) = -6.12268834425566265503114393122e0;
xu0(24) = 0e0;
xu0(25) = 0e0;
xu0(26) = 0e0;
xu0(27) = 0e0;

```

```

yFimRef = zeros(27,1);
yFimRef(1) = 0.1581077119629904e+2;
yFimRef(2) = -0.1575637105984298e+2;
yFimRef(3) = 0.4082224013073101e-1;
yFimRef(4) = -0.5347301163226948e+0;
yFimRef(5) = 0.5244099658805304e+0;
yFimRef(6) = 0.5347301163226948e+0;
yFimRef(7) = 0.1048080741042263e+1;
yFimRef(8) = 0.1139920302151208e+4;
yFimRef(9) = -0.1424379294994111e+4;
yFimRef(10) = 0.1103291221937134e+2;
yFimRef(11) = 0.1929337464421385e+2;
yFimRef(12) = 0.5735699284790808e+0;
yFimRef(13) = -0.1929337464421385e+2;
yFimRef(14) = 0.3231791658026955e+0;
yFimRef(15) = -0.2463176316945196e+5;
yFimRef(16) = 0.5185037701610329e+5;
yFimRef(17) = 0.3241025686413781e+6;
yFimRef(18) = 0.5667493645176213e+6;
yFimRef(19) = 0.1674362929479361e+5;
yFimRef(20) = -0.5667493645176222e+6;
yFimRef(21) = 0.9826520791458422e+4;
yFimRef(22) = 0.1991753333731910e+3;
yFimRef(23) = -0.2975531228015052e+2;
yFimRef(24) = 0.2306654119098399e+2;
yFimRef(25) = 0.3145271365475927e+2;

```

```

yFimRef( 26) = 0.2264249232082739e+2;
yFimRef( 27) = 0.1161740700019673e+2;

clear m n;

%CONSTRUINDO IMPLEMENTAÇÃO
ConstroiImplementacao(F, H, X, U, tolcond);

t0 = 0;
tf = 0.03;

%IMPLEMENTAÇÃO COM SIMULINK
load_system('SimulinkTau');
set_param('SimulinkTau', 'Solver', 'ode45', ...
          'StopTime', num2str(tf,30), ...
          'AbsTol', num2str(AbsTol,30), ...
          'RelTol', num2str(RelTol,30), ...
          'InitialStep', num2str(InitialStep,30));

[T,Y, tempoproc] = SimulinkAdaptado([t0 tf],xu0);

[steps, aux] = size(T);
yFim = Y(steps,:)' ;

yFim = yFim(1:7);
yFimRef = yFimRef(1:7);

scd=abs(yFim(1:7)-yFimRef);
scd=-log10(max(scd));

scdY=-log10(max(scdY));

if Tipo_Implementacao == 1
    calculos_QR = calculos_Tau;
end

Resultados = [scd scdY calculos_Tau steps calculos_QR tempoproc];

num2str(Resultados)

```

6.7 Código-Fonte TransAmp

Arquivo: Problema_TransAmp.m

```

%Inicializando variáveis auxiliares
global ScopeData xu_ gama Tipo_Implementacao
global calculos_Tau scdY calculos_QR
calculos_Tau = 0; scdY = 0; calculos_QR = 0;

%DEFININDO PROBLEMA
%Parâmetros
gama = 0;
AbsTol = 1e-7;

```

```

RelTol = 1e-7;
InitialStep = 1e-9;
Tipo_Implementacao = 1; %1: MIIProj, 2: MIIcond
tolcond = 1000;

%Definindo variáveis simbólicas
syms t w1 w2 w3 w4 w5 w6 w7 w8;
w = [w1; w2; w3; w4; w5; w6; w7; w8];

%Parâmetros do problema
ub = 6e0;
uf=0.026e0;
alpha=0.99e0;
beta=1e-6;
r0=1000e0;
r1=9000e0;
r2=9000e0;
r3=9000e0;
r4=9000e0;
r5=9000e0;
r6=9000e0;
r7=9000e0;
r8=9000e0;
r9=9000e0;

c1=1e-6;
c2=2e-6;
c3=3e-6;
c4=4e-6;
c5=5e-6;

%Construindo a função
uet = 0.1e0*sin(200e0*pi*t);

fac1 = beta*(exp((w(2)-w(3))/uf)-1e0);
fac2 = beta*(exp((w(5)-w(6))/uf)-1e0);

F = sym(zeros(8,1));

F(1) = (w(1)-uet)/r0;
F(2) = w(2)/r1+(w(2)-ub)/r2+(1e0-alpha)*fac1;
F(3) = w(3)/r3-fac1;
F(4) = (w(4)-ub)/r4+alpha*fac1;
F(5) = w(5)/r5+(w(5)-ub)/r6+(1d0-alpha)*fac2;
F(6) = w(6)/r7-fac2;
F(7) = (w(7)-ub)/r8+alpha*fac2;
F(8) = w(8)/r9;

M = zeros(8,8);
M(1,1)=-c1; M(1,2)= c1;
M(2,1)= c1; M(2,2)=-c1;

```



```

M(3,3)=-c2;

M(4,4)=-c3; M(4,5)= c3;
M(5,4)= c3; M(5,5)=-c3;

M(6,6)=-c4;

M(7,7)=-c5; M(7,8)= c5;
M(8,7)= c5; M(8,8)=-c5;

%O problema eh da forma M(dw/dt)=F(w)

%Condição Inicial
w0 = zeros(8,1);
w0(1) = 0e0;
w0(2) = ub/(r2/r1+1e0);
w0(3) = ub/(r2/r1+1e0);
w0(4) = ub;
w0(5) = ub/(r6/r5+1e0);
w0(6) = ub/(r6/r5+1e0);
w0(7) = ub;
w0(8) = 0e0;
w0=double(w0);

tw = [t;w];
tw0 = [0; w0];

dw0 = zeros(8,1);
dw0(1) = 51.338775e0;
dw0(2) = 51.338775e0;
dw0(3) = double(valor( -F(3)/c2, w, w0));
dw0(4) = -24.9757667e0;
dw0(5) = -24.9757667e0;
dw0(6) =double(valor( -F(6)/c4, w, w0));
dw0(7) = -10.00564453e0;
dw0(8) = -10.00564453e0;
dw0=double(dw0);

%Vamos transformar o problema na forma semi-implicita
[U,S,V] = svd(M);

[n,n]=size(M);

%Primeiro precisamos reordenar o sistema conforme Q
syms u1 u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8;
u = [u1; u2; u3; u4; u5; u6; u7; u8];

syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8;
x = [x1; x2; x3; x4; x5; x6; x7; x8];

x0 = (V')*w0; u0 = (V')*dw0;

```

```

tx = [t;x]; tx0 = [0;x0];

Ftil = (U')*valor(F,w,V*x);

n=length(w); r=5;

h = Ftil((r+1):n);
Ftil = Ftil(1:r);

%Invertendo a matriz diagonal
S = S(1:r,1:r); invS = eye(r);
for i=1:r
    invS(i,i) = 1/S(i,i);
end

u = u((r+1):n);
u0 = u0((r+1):n);

f = [invS*Ftil; u];

xu = [x; u];
xu0 = [x0; u0];

yFimRef = zeros(n,1);
yFimRef(1) = -0.5562145012262709e-002;
yFimRef(2) = 0.3006522471903042e+001;
yFimRef(3) = 0.2849958788608128e+001;
yFimRef(4) = 0.2926422536206241e+001;
yFimRef(5) = 0.2704617865010554e+001;
yFimRef(6) = 0.2761837778393145e+001;
yFimRef(7) = 0.4770927631616772e+001;
yFimRef(8) = 0.1236995868091548e+001;

%CONSTRUINDO IMPLEMENTAÇÃO
ConstroiImplementacao(f, h, tx, u, tolcond);

t0 = 0;
tf = 0.2;

load_system('SimulinkTau');
set_param('SimulinkTau', 'Solver', 'ode45', ...
    'StopTime', num2str(tf,30), ...
    'AbsTol', num2str(AbsTol,30), ...
    'RelTol', num2str(RelTol,30), ...
    'InitialStep', num2str(InitialStep,30));

[T,Y, tempoproc] = SimulinkAdaptado([t0 tf],xu0);

[steps, aux] = size(T);
yFim = Y(steps,:)' ;

```

```

yFim = yFim(1:8);      yFim = V*yFim;

scd=abs(yFim-yFimRef);
scd=-log10(max(scd));

scdY=-log10(max(scdY));

if Tipo_Implementacao == 1
    calculos_QR = calculos_Tau;
end

Resultados = [scd scdY calculos_Tau steps calculos_QR tempoproc];

num2str(Resultados)

```

6.8 Código-Fonte CarAxis

Arquivo: Problema_CarAxis.m

```

%Iniciando variáveis auxiliares
global ScopeData xu_ gama Tipo_Implementacao
global calculos_Tau scdY calculos_QR
calculos_Tau = 0; scdY = 0; calculos_QR = 0;

%DEFININDO PROBLEMA
%Parâmetros
gama = 1;
AbsTol = 1e-7;
RelTol = 1e-7;
InitialStep = 1e-7;
Tipo_Implementacao = 1; %1: MIIproj, 2: MIIcond
tolcond = 10;

%Definindo variáveis simbólicas
syms xl yl xr yr xla yla xra yra lam1 lam2 t;
x = [xl; yl; xr; yr; xla; yla; xra; yra];
u = [lam1; lam2];

xu = [x; u];

%Parâmetros
eps = 1e-2;
M = 10e0;
L = 1e0;
L0 = 0.5e0;
r = 0.1e0;
w = 10e0;
g = 1e0;
yb = r*sin(w*t);
xb = sqrt(L*L-yb*yb);

%Construindo as funções
f = sym(zeros(8,1));

```

```

for i=1:4
    f(i) = x(i+4);
end

Ll = sqrt(xl^2+yl^2);
Lr = sqrt((xr-xb)^2+(yr-yb)^2);

f(5) = (L0-Ll)*xl/Ll + lam1*xb+2e0*lam2*(xl-xr);
f(6) = (L0-Ll)*yl/Ll + lam1*yb+2e0*lam2*(yl-yr)-M*eps*eps*g/2e0;
f(7) = (L0-Lr)*(xr-xb)/Lr - 2e0*lam2*(xl-xr);
f(8) = (L0-Lr)*(yr-yb)/Lr - 2e0*lam2*(yl-yr)-M*eps*eps*g/2e0;

f(5:8) = f(5:8) / (eps*eps*M/2);

h = sym(zeros(2,1));

h(1) = xb*xl+yb*yl;
h(2) = (xl-xr)^2+(yl-yr)^2-L*L;

%Condição Inicial
x0 = zeros(8,1);
x0(1) = 0;
x0(2) = 1/2;
x0(3) = 1;
x0(4) = 1/2;
x0(5) = -1/2;
x0(6) = 0;
x0(7) = -1/2;
x0(8) = 0;

u0 = zeros(2,1);
u0(1) = 0e0;
u0(2) = 0e0;

xu0 = [x0; u0];

yFimRef = zeros(10,1);

yFimRef(1) = 0.493455784275402809122e-1;
yFimRef(2) = 0.496989460230171153861e0;
yFimRef(3) = 0.104174252488542151681e1;
yFimRef(4) = 0.373911027265361256927e0;
yFimRef(5) = -0.770583684040972357970e-1;
yFimRef(6) = 0.744686658723778553466e-2;
yFimRef(7) = 0.175568157537232222276e-1;
yFimRef(8) = 0.770341043779251976443e0;
yFimRef(9) = -0.473688659084893324729e-2;
yFimRef(10) = -0.110468033125734368808e-2;

yprime = zeros(8,1);

```

```

for i=1:4
    yprime(i) = xu0(i+4);
    yprime(i+4)= 2e0/(M*eps*eps)*xu0(i+4);
end

%CONSTRUINDO IMPLEMENTAÇÃO
ConstroiImplementacao(f, h, [t;x], u, tolcond);

t0 = 0;
tf = 3;

%IMPLEMENTAÇÃO COM SIMULINK
load_system('SimulinkTau');
set_param('SimulinkTau', 'Solver', 'ode45', ...
          'StopTime', num2str(tf,30), ...
          'AbsTol', num2str(AbsTol,30), ...
          'RelTol', num2str(RelTol,30), ...
          'InitialStep', num2str(InitialStep,30));

[T,Y, tempoproc] = SimulinkAdaptado([t0 tf],xu0);

[steps, aux] = size(T);
yFim = Y(steps,:)' ;

scd=abs(yFim-yFimRef);
scd=-log10(max(scd));

scdY=-log10(max(scdY));

if Tipo_Implementacao == 1
    calculos_QR = calculos_Tau;
end

Resultados = [scd scdY calculos_Tau steps calculos_QR tempoproc];

num2str(Resultados)

```


Referências Bibliográficas

- [AP98] U. M. Ascher e L. R. Petzold. *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia, PA, 1998. 1, 48, 55
- [BCP96] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics - (SIAM). second edition, 1996. 1
- [BMM06] L. Brugnano, C. Magherini, and F. Mugnai. *Blended implicit methods for the numerical solution of dae problems..* J. Comput. Appl. Math., 189:34-50, 2006. 1
- [Cam82] S. L. Campbell. *Singular Systems of Differential Equations*. Pitman, London. 1982. 1
- [Cam90] S. L. Campbell. *Descriptor system in the 90's*. In *Proc. 29th IEEE Conf. Dec. Control*. pages, 442-447, 1990. 1
- [Cas03] J. Cash. *Efficient numerical methods for the solution of stiff initial-value problems and differential algebraic equations*. Proc. Roy. Soc. London, A. 459:797 815, 2003. 1
- [Dai89] Dai Liyi. *Singular Control System*. Springer-Verlag. 1989. 1
- [FN02] Djairo Figueiredo e A. F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 2ª ed. IMPA, 2002, 301p. 48, 52
- [Fre07] Celso B. N. Freitas. *Integração numérica de sistemas não lineares semi-implícitos via teoria de controle geométrico*. Trabalho de conclusão de curso, IME-USP, 2007. 7, 22
- [HLR89] E. Hairer, C. Lubich, and M. Roche. *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*. Lecture Notes in Mathematics 1409. Springer-Verlag, 1989. 1, 48
- [HW99] E. Hairer and G. Wanner. *Stiff differential equations solved by radau methods*. Appl. Math., 111:93-111, 1999. 1997. 1
- [HW96] E. Hairer and G. Wanner.. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-algebraic Problems*. Springer-Verlag, second revised edition, 1996. 1, 48
- [IM98] F. Iavernaro and F. Mazzia. *Solving ordinary differential equations by generalized adams methods: properties and implementation techniques*. Appl. Num. Math. 28:107-126, 1998. 1
- [KD99] A. Kumar e P. Daoutidis. *Control of nonlinear differential algebraic equation systems*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999. 1
- [MM08] Francesca Mazzia e Cecilia Magherini. *Test Set for Initial Value Problem Solvers, release 2.4*. 2008, February. Department of Mathematics, University of Bari and INdAM, Research Unit of Bari. Disponível em <http://www.dm.uniba.it/~testset>. 1, 2, 45, 46, 47, 48, 58, 59, 68

- [NS90] H. Nijmeijer e A. J. Van der Shaft. *Nonlinear dynamical control*. New York: Springer-Verlag, 1990. 7, 10, 14
- [Pon62] L. Pontrjagin. *Ordinary Differential Equations..* Addison Wesley, 1962. 29
- [Sch94] S. Schneider. *Intégration de systèmes d'équations différentielles raides et différentielles-algébriques par des méthodes de collocations et méthodes générales linéaires*. PhD thesis, Université de Genève, 1994. 1, 48
- [SDS05] Paulo S. P. da Silva, Emmanuel Delaleau e Iderval S. de Souza. *On geometric control and numeric integration of DAE's. In: IFAC World Congress 05, 2005, Praga, 2005, v.1, p-16*. 7, 22, 48
- [SLV97] J. J. B. de Swart, W. M. Lioen, and W. A. van der Veen. *Specification of PSIDE*. CWI. 1997. 1
- [Sot79] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides, 1979. 10, 18, 21
- [Sou06] Iderval S. de Souza. *Geometria do desacoplamento e integração numérica de equações diferenciais não lineares implícitas*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica, 2006. 7, 22
- [Sto98] W. J. H. de Stortelder. *Parameter Estimation in Nonlinear Dynamical Systems*. PhD thesis, University of Amsterdam, March 12, 1998. 1, 48
- [Str80] G. Strang. *Linear algebra and its applications*. 2nd ed. New York: Academic. Press, 1980. 33, 36, 39
- [SW02] Paulo S. P. da Silva e Carlos J. Watanabe. *Some Geometric Properties of Differential-Algebraic Equation*. Relatório interno, disponível em <http://www.lac.usp.br/>. 7
-