Teoria de poda na família de Hénon

Juan Valentín Mendoza Mogollón

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. André Salles de Carvalho

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro
da FAPESP Processo N 2007/55771-0

São Paulo, Fevereiro de 2011

Teoria de poda na família de Hénon

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Juan Valentín Mendoza Mogollón
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. André Salles de Carvalho (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Fabio A. Tal - IME-USP.
- Prof. Dr. Isabel Rios - UFF.
- Prof. Dr. Philip Boyland - UFL.
- Prof. Dr. Daniel Smania - ICMC-USP.

*Dedico este trabalho aos meus pais:
Inelda e Valentín.*

Agradecimentos

Eu gostaria agradecer a cada uma das pessoas que, de diferentes maneiras, me ajudaram a concluir este trabalho. Especialmente, gostaria agradecer a meu orientador André de Carvalho por introduzir-me na pesquisa relacionada à teoria de poda, compartilhando comigo as suas ideias, que deram origem a esta tese, e pelo seu apoio decidido em cada momento que duraram os meus estudos de doutorado. A minha dívida com ele é tão grande quanto o meu agradecimento.

A Jorge e Elizangela Avila, e Juan Carlos e Fatima Aguilar por me receber como um irmão aqui em São Paulo.

A Dra. Helena de Castro que me forneceu todas as facilidades para fazer o Curso de Verão 2007. Aos professores do IME: Salvador Zanata, Jorge Sotomayor, Eduardo Colli pelas ensinamentos e estímulo que me passaram. Ao grupo de Sistemas Dinâmicos do IME pelas interessantes palestras que, religiosamente, cada sexta feira organizam. Ao Toby Hall quem me enviou o programa para desenhar variedades invariantes na família de Hénon.

A meus amigos no IME: Braulio García, Julianio Gonchorowski, Taty Batista, Graciele Pereira, Sebastian Vidal, Priscila Barbosa, Peter Hazard e muitos outros aos quais peço desculpas por não escrever seu nome aqui. Muito obrigado pelo companheirismo e pelas tantas manhãs e tardes de conversa e de café.

Aos funcionarios do IME, da Biblioteca, da secretaria da CPG e do Departamento de Matemática Aplicada por serem sempre amáveis comigo.

A meus amigos de Piura: Ellis Hidalgo, Segundo Correa, Carlos Imán, Jenniel Ruiz, Tania Heredia e, em especial a Ricardo Velesmoro pelos seus incentivos para estudar doutorado em Brasil e pela sua ajuda incondicional.

À Fapesp, pelo apoio financeiro e por me brindar a oportunidade de fazer o doutorado direto.

Finalmente, eu gostaria agradecer a minha família pela sua compreensão e paciência e por entenderem que, apesar dos miles de quilômetros que nos separam, sempre estão no meu coração.

Resumo

A teoria de poda é um caminho para dar uma descrição topológica de famílias de homeomorfismos de superfície. Nesta tese desenvolvemos uma teoria de poda diferenciável. Primeiro definimos discos de poda para o exemplo paradigmático da ferradura de Smale e provamos um teorema de poda diferenciável. Depois, com uma construção similar a derivados de Anosov, extendemos este teorema para difeomorfismos hiperbólicos.

Também aplicamos estas construções ao estudo da família de Hénon real e mostramos como se relaciona esta teoria com a família de Hénon complexa. Assim, provamos a Conjectura da Frente de Poda para alguns parâmetros reais na família de transformações de Hénon.

Palavras-chave: teoria de poda, família de Hénon, dinâmica simbólica.

Abstract

Pruning is originally a way of giving a topological description of the dynamics of families of surface homeomorphisms. A differentiable pruning theory is developed here. First pruning discs and the pruning theorem are presented for Smale's horseshoe, which is the paradigmatic chaotic dynamical system in dimension 2. Then this is generalized to hyperbolic surface diffeomorphisms.

This is then combined with complex and numerical techniques to give a computer assisted proof of the Pruning Front Conjecture for certain open sets of (real) parameters in the Hénon family.

Keywords: Pruning, Hénon family, symbolic dynamics.

Sumário

Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
1.1 A teoria de poda	2
1.2 Definição de problema	4
1.3 Contribuições	4
2 Conceitos	8
2.1 Preliminares	8
2.1.1 Terminologia e notações	8
2.1.2 Subshifts de tipo finito	9
2.1.3 A ferradura de Smale	9
2.1.4 Plano simbólico	11
2.1.5 Hiperbolicidade	12
2.1.6 Partições de Markov	13
2.2 Propriedades de transformações de Hénon	14
2.2.1 A ferraduras na família de Hénon	16
2.3 Teoria da Frente de Poda	18
2.3.1 Evidência para a CFP	18
2.3.2 Teoria de poda	19
3 Teoria de poda na ferradura	23
3.1 Construção do difeomorfismo de poda	23
3.1.1 Frentes de poda e discos de poda homoclínicos	23
3.1.2 Exemplos de discos homoclínicos	25
3.1.3 Construção da isotopia de poda	27
3.1.4 Construção de uma isotopia C^∞	31
3.2 Shifts de Markov para o difeomorfismo de poda H_1	32
3.2.1 Partição de geração 1	33

3.2.2	Operações sobre os retângulos	35
3.2.3	Algoritmo	35
3.3	Prova do teorema de poda	39
4	Poda para o derivado da ferradura	41
4.1	Derivados da ferradura	41
4.1.1	Derivados de Anosov	41
4.1.2	Cirurgia num ponto periódico	42
4.1.3	Hiperbolicidade de $\Omega(f)$ para f	47
4.1.4	Relação entre $\Omega(f)$ e Σ_2	49
4.2	O teorema de poda para o derivado da ferradura f	52
4.2.1	Tipo periódico-homoclínico	53
4.2.2	Tipo periódico-periódico	54
4.2.3	O Teorema de Poda para o derivado da ferradura	56
4.3	Teoria de poda em superfícies	58
5	Frentes de poda na família de Hénon	61
5.1	Perturbações de transformações de Hénon	61
5.2	Frentes de poda na família de Hénon complexa	62
5.2.1	O lugar de ferraduras	63
5.2.2	Frentes de poda e curvas em $\mathcal{H}_0^C$	64
6	Problemas de pesquisa	68
6.1	Quando $H_{a,b}$ preserva área	68
6.2	Evidência numérica	70
6.2.1	Usando um disco de poda	71
6.2.2	Usando dois discos de poda	72
6.2.3	Mais evidência numérica	74
6.3	Observações	77
6.4	Conjectura da Frente de poda no lugar de Ferraduras	81
A	O metodo de Biham-Wenzel	83
	Referências Bibliográficas	85

Lista de Figuras

1.1	Variedades estáveis e instáveis (Figura 1.1(a)) de $H_{4.75,0.75}$, que é uma ferradura completa e o plano simbólico (Figura 1.1(b)).	2
1.2	Variedades estáveis e instáveis (Figura 1.2(a)) de $H_{5.4,1}$, que parece ser uma ferradura incompleta e frente de poda no plano simbólico (Figura 1.2(b)).	3
2.1	Dinâmica da Ferradura F [dCH02b].	10
2.2	Dinâmica de uma transformação de Hénon.	15
2.3	Variedades invariantes de uma transformação de Hénon que é uma ferradura de Smale ($a \approx 4.75$ e $b = 0.75$).	17
2.4	Variedades invariantes de uma transformação de Hénon com entropia maximal ($a \approx 3.3715$ e $b = 0.5$).	18
2.5	Zoom do retângulo na figura 2.4 que indica a região onde está a tangência ($a \approx 3.3715$ e $b = 0.5$).	19
2.6	Variedades estáveis e instáveis (Figura 2.6(a)) de $H_{1.9,0.05}$ e o plano simbólico para órbitas de períodos menores que 15 (Figura 2.6(b)).	20
2.7	Relação $D_1 \succ D_2$	21
3.1	Disco homoclínico D definido pelos pontos homoclínicos $p_0 = 0^\infty 1111 \cdot 10110^\infty$ e $p_1 = 0^\infty 1110 \cdot 10110^\infty$. Também temos desenhado os principais elementos de um disco de poda. Os discos D e $H^{-1}(D)$ são livres.	25
3.2	Exemplos de discos homoclínicos	26
3.3	Funções g_1 , g_2 , g_3 e g_4 em um disco de poda homoclínico.	28
3.4	Partição de 1-geração para o disco de poda da figura 3.1.	34
3.5	Descrições pictóricas das operação P_1 (Ver figura 3.5(a)) e P_2 (Ver figura 3.5(b)).	36

3.6	Partição de 2-geração para o disco de poda da figura 3.1.	38
3.7	Partição de 3-geração para o disco de poda da figura 3.1.	38
3.8	Partição de 4-geração para o disco de poda da figura 3.1.	39
4.1	Ponto fixo do difeomorfismo de Anosov f (Figura 6.2(a)) e o derivado de Anosov (Figura 6.2(b)).	42
4.2	Discos do tipo periódico homoclínico. A figura 4.2(a) corresponde a uma região livre e a figura 4.2(b) é quando L é atratora.	54
4.3	Exemplo	54
4.4	Exemplo.	55
4.5	Discos do tipo periódico-periódico.	56
4.6	Discos do tipo periódico periódico-periódico.	56
4.7	Disco de poda.	58
5.1	Partições de Markov para os valores no conjunto A_1 (figura 5.1(a)) e para os valores no conjunto A_2 (figura 5.1(b)) do teorema 5.2.4.	67
6.1	Partições de Markov conjecturadas para as transformações de Hénon $H_{3.5197,0.648}$ (figura 6.1(a)) e $H_{5.65,1}$ (figura 6.1(b)).	72
6.2	Partições de Markov conjecturadas para $H_{5.6917,1}$ (figura 6.2(a)) e para $H_{5.59,1}$ (figura 6.2(b)).	73
6.3	Partição de Markov usando os discos $D_{3,4}$ e $D_{4,3}$ conjecturada para $H_{5.683,1}$	74
6.4	Partições de Markov conjecturadas para $H_{3.5,0.55}$ (figura 6.4(a)) e para $H_{2.766,0.4}$ (figura 6.4(b)).	75
6.5	Partições de Markov conjecturadas para $H_{2.887,0.4}$ (figura 6.5(a)) e para $H_{2.345,0.19}$ (figura 6.5(b)).	76
6.6	Partição de Markov conjecturada para $H_{2.812,0.4}$	77
6.7	$(a \approx 2.8187 + 0.0119i$ e $b = 0.4)$	78
6.8	$(a \approx 2.8255 - 0.032i$ e $b = 0.4)$	78
6.9	$(a \approx 2.8187 - 0.079i$ e $b = 0.4)$	79
6.10	$(a \approx 2.8187 - 0.095i$ e $b = 0.4)$	79
6.11	$(a \approx 2.8931 - 0.0959i$ e $b = 0.4)$	79
6.12	$(a \approx 3.00 - 0.0919i$ e $b = 0.4)$	80
6.13	$(a \approx 3.1432 - 0.0919i$ e $b = 0.4)$	80
6.14	$(a \approx 3.1432 - 0.048i$ e $b = 0.4)$	80
6.15	$(a \approx 3.149 - 0.00399i$ e $b = 0.4)$	81

Capítulo 1

Introdução

O estudo da família de transformações de Hénon, introduzida por Michel Hénon em [Hén76], possui um papel paradigmático na compreensão da dinâmica de difeomorfismos no plano uma vez que aparece, com frequência, em fenômenos físicos e matemáticos. A menos de mudanças de coordenadas¹, ela é dada pela fórmula:

$$H_{a,b}(x, y) := (a - x^2 - by, x), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Hoje é sabido que esta família tem muitos comportamentos interessantes como a existência, em alguns parâmetros, de atratores não triviais. Isto foi demonstrado por Benedicks e Carleson em [BC91]. Eles construíram², para valores de b muito pequenos, um conjunto $E(b)$ de valores de a para os quais $H_{a,b}$ possui um *atrator estranho*, isto é, um atrator transitivo com expoente de Lyapunov positivo que não se reduz a uma órbita periódica.

Para outros parâmetros, a família de Hénon exibe comportamento hiperbólico o que foi demonstrado por Devaney e Nitecki em [DN79]. Eles provaram que se $a \gg 0$ então $H_{a,b}$ é uma ferradura de Smale [Sma67], isto é, $H_{a,b}$ restrito ao seu conjunto não errante $\Omega(H_{a,b})$ é topologicamente conjugado ao *shift* σ definido no espaço de sequências simbólicas $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$; também demonstraram que se $a \ll 0$ então $H_{a,b}$ têm dinâmica trivial, isto é, $\Omega(H_{a,b}) = \emptyset$.

Por um resultado de Newhouse [New79], existem parâmetros nos quais $H_{a,b}$ tem tangências homoclínicas persistentes. Isto significa que existem parâmetros (a, b) tais que $H_{a,b}$ têm uma tangência homoclínica não degenerada e todo difeomorfismo C^r -próximo de $H_{a,b}$ possui também tangências homoclínicas.

Mas, existem questões que não são bem compreendidas sobre esta família. Considerando o fato que os anteriores comportamentos dinâmicos podem ocorrer, não é sabido se estes são os que prevalecem no espaço de parâmetros. Existem também interrogações abertas sobre como varia a complexidade da dinâmica quando os parâmetros são variados. Quando $a \ll 0$, a dinâmica é trivial, e quando $a \gg 0$, $H_{a,b}$ é uma ferradura de Smale que é um modelo de caoticidade. O que acontece para valores intermediários? Como o caos é criado?

¹M. Hénon estudou a família $T_{A,B}(x, y) := (1 - Ax^2 + y, Bx)$, mas $T_{A,B}$ e $H_{a,b}$ são conjugadas por uma transformação linear. Ele encontrou comportamentos interessantes nos valores $A = 1.4$, $B = 0.3$, onde a transformação reverte orientação.

²Benedicks e Carleson utilizaram também $T_{A,B}(x, y)$.

Essas são algumas questões que André de Carvalho e Toby Hall abordaram em [dCH02b] e propuseram um programa para entender a dinâmica de uma transformação de Hénon mediante a *teoria de poda*.

1.1 A teoria de poda

A teoria de poda tem seus inícios no trabalho de P. Cvitanović [Cvi91] e nos estudos numéricos efetuados em [CGP88]. Nestes artigos, trata-se de entender a dinâmica de uma transformação de Hénon como uma *ferradura incompleta*. Mais precisamente, a idéia é a seguinte: suponha que uma transformação de Hénon é uma ferradura completa, por exemplo, uma transformação como na figura 1.1(a) onde os parâmetros são $(a, b) = (4.75, 0.75)$. Cada ponto do conjunto não errante de $H_{a,b}$ tem uma representação simbólica em Σ_2 . Então podemos construir o *plano simbólico* que é uma representação de todas as órbitas da ferradura, ou seja, de Σ_2 , no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, obtida *colapsando* a dinâmica irrelevante que está entre as variedades invariantes e deixando só as órbitas do conjunto não errante. Veja a figura 1.1(b). Assim, cada ponto do plano simbólico corresponde a um, dois ou a quatro pontos no conjunto não errante e tem uma representação simbólica bi-infinita.

Figura 1.1: Variedades estáveis e instáveis (Figura 1.1(a)) de $H_{4.75,0.75}$, que é uma ferradura completa e o plano simbólico (Figura 1.1(b)).

Quando os parâmetros são modificados, a ferradura completa é destruída e um certo conjunto de pontos no plano simbólico pode perder as correspondentes órbitas na dinâmica da transformação. Na figura 1.2(a) podemos ver isto tomando parâmetros $(a, b) = (5.4, 1)$. Note que nesta figura existem regiões onde as variedades invariantes da ferradura foram “descruzadas”. Se representarmos estas órbitas no plano simbólico, como na figura 1.2(b), vamos ver regiões nas quais as órbitas foram eliminadas. Assim algumas regiões do plano simbólico são *podadas* e são chamadas a *frente de poda*.

A discussão anterior foi a motivação para que Cvitanović enunciara a **Conjectura da Frente de Poda (CFP)**. Grosso modo esta conjectura afirma

Figura 1.2: Variedades estáveis e instáveis (Figura 1.2(a)) de $H_{5.4,1}$, que parece ser uma ferradura incompleta e frente de poda no plano simbólico (Figura 1.2(b)).

que cada *transformação de Hénon* pode ser compreendida como uma *ferradura incompleta*. Isto é, afirma que o conjunto não errante de toda transformação de Hénon tem uma representação no plano simbólico, a qual é obtida *podando ou eliminando* certas regiões dele. O resultado desta eliminação deve ser um subconjunto próprio da ferradura. Logo, o problema de entender a dinâmica de uma transformação de Hénon se reduziria então a identificar as regiões que são podadas.

Uma formulação matematicamente rigorosa da teoria de poda foi desenvolvida por A. de Carvalho em [dC99] utilizando os chamados *discos de poda* e deformações por isotopias. Um disco de poda para um homeomorfismo f vem a ser um disco topológico D , satisfazendo certas propriedades dinâmicas, que contém uma região a ser podada. Neste contexto *uma poda* é uma isotopia que elimina dinâmica no disco de poda, isto é, uma isotopia que transforma a dinâmica não-errante de D em errante. O enunciado matemático preciso é o *teorema de poda*:

Teorema 1.1.1 (de Carvalho). *Dado um disco de poda D para um homeomorfismo f_0 , existe uma isotopia $f_t: f_0 \simeq f_1$, suportada na saturação de D sob f_0 (isto é, na união de D com todos os seus iterados passados e futuros sob f_0), tal que todos os pontos em D são errantes para f_1 .*

Em palavras, o teorema diz que podemos destruir dinâmica num disco de poda mediante uma isotopia chamada *isotopia de poda*. O homeomorfismo f_1 ao final da isotopia é chamado *uma poda de f_0* , ou *homeomorfismo de poda*, e coincide com f_0 fora da saturação de D .

A relação entre a teoria de poda e a família de Hénon é a *Conjectura da Frente de Poda de Cvitanović* introduzida por Cvitanović (veja [Cvi91] para a formulação original e [dCH02b] para a formulação apresentada aqui). Definimos a *família de poda $\mathcal{P}$* como o fecho (na topologia C^0) da família de todos os

homeomorfismos de poda obtidos a partir da ferradura de Smale, isto é, o fecho do conjunto de todas as podas da ferradura de Smale $F = f_0$ obtidas usando o Teorema 1.1.1:

Conjectura da Frente de Poda (CFP). *A menos de semiconjugação, a família de Hénon real está contida na família de poda, isto é, para qualquer escolha de parâmetros a, b reais, a transformação de Hénon $H_{a,b}$ pertence a $\mathcal{P}$, a menos de uma semi-conjugação.*

Veja o capítulo 2 para uma definição mais precisa. A conjectura afirma que explicar a dinâmica de qualquer elemento da família de Hénon é equivalente a encontrar discos de poda na ferradura de Smale F .

1.2 Definição de problema

Embora poda tenha tido êxito explicando fenômenos da dinâmica topológica de homeomorfismos do plano e da teoria dinâmica de tranças, ([dCH02b, dCH01, dCH02a, dCH10]), a CFP continua em aberto. Em particular, só é possível descrever topológica, ou mesmo combinatoriamente, um subconjunto relativamente pequeno de todas as transformações de Hénon.

Também, identificamos dois problemas ao tentar utilizar a teorema de poda para provar a CFP. O primeiro é que, assim possamos encontrar uma quantidade considerável de discos de poda, é difícil provar que as podas associadas a eles estão na família de Hénon porque estas podas são homeomorfismos em quanto que a família de Hénon é uma família de transformações analíticas. O segundo é que o teorema de poda precisa da construção de infinitas isotopias o que pode ocasionar que a poda resultante seja um homeomorfismo não diferenciável e muito difícil de descrever, o qual elimina a possibilidade de compará-lo com um elemento da família de Hénon.

Nesta tese estudamos as seguintes questões:

- É possível construir transformações de poda diferenciáveis?
- É possível construir transformações de poda hiperbólicas?
- Nos casos anteriores, qual é a dinâmica do conjunto não errante da poda?

1.3 Contribuições

Na primeira parte desta tese começamos o estudo da teoria de poda do ponto de vista diferenciável e na segunda parte estudamos as suas aplicações na família de Hénon.

No capítulo 2 apresentamos os conceitos a serem utilizados nos capítulos restantes como a definição de ferradura, hiperbolicidade, propriedades de transformações de Hénon, teoria de poda, entre outros.

No capítulo 3 construímos difeomorfismos de poda hiperbólicos para o caso da ferradura de Smale utilizando discos de poda *homoclínicos*.

Primeiro consideramos uma transformação de Hénon $H := H_{a,b}$ que seja uma ferradura hiperbólica (veja [DN79]). Então sabemos que existe um homeomorfismo h que conjugua a dinâmica de $H_{a,b}$, restrita a seu conjunto não errante $\Omega(H)$, e o shift σ definido em $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

Os discos de poda homoclínicos que utilizamos são definidos com órbitas homoclínicas ao ponto fixo correspondente à sequência simbólica 0^∞ e segmentos de variedades estáveis e instáveis que passam por estas órbitas homoclínicas. Para que um disco D seja um *disco de poda* é necessário que satisfaça as *condições de poda*. Estas condições são ligadas à existência de uma região *livre* L no disco D que é uma região errante pela transformação H e para a qual todos os seus iterados não intersectam o disco D . Isto faz que a caracterização de um disco de poda seja mais simples comparada com a de [dC99]. Provamos que podemos construir uma difeotopia H_t , com $H_0 = H$, tal que o difeomorfismo H_1 , ao final da isotopia, satisfaz as propriedades de poda dadas em [dC99]. H_1 é chamado *difeomorfismo de poda*. Mostramos também que sob estas condições é possível associar um subshift de tipo finito à dinâmica do conjunto não errante de H_1 . O resultado principal é o *teorema de poda* seguinte:

Teorema 1.3.1. *Seja D um disco de poda então existe uma difeotopia $H: \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{Supp}(H) \subset D$ tal que $H_0 = H$ e H_1 é um **difeomorfismo de poda de H** no seguinte sentido:*

- (i) $\Omega(H_1) = \Omega(H) \setminus \cup_{i \in \mathbb{Z}} H^i(D)$,
- (ii) $H_1|_{\Omega(H_1)}$ é hiperbólico, e
- (iii) existe um subshift de tipo finito (Σ_A, σ_A) e um homeomorfismo

$$\tau: \Omega(H_1) \rightarrow \Sigma_A \quad (1.2)$$

tais que: $\tau \circ H_1 = \sigma_A \circ \tau$.

Cabe ressaltar que a partição de Markov associada ao subshift de tipo finito do teorema anterior é obtida por um algoritmo que termina em tempo finito e do qual forneceremos detalhes na seção 3.2.

No capítulo 4 extendemos as construções do capítulo 3 a outros pontos periódicos da ferradura, isto é, construímos discos de poda com órbitas homoclínicas a pontos periódicos diferentes de 0^∞ . Para isto, no ponto periódico fazemos uma deformação, similar àquela feita para *derivados de Anosov*, para obter um difeomorfismo chamado *derivado da ferradura*. Este difeomorfismo tem uma dinâmica semelhante à da ferradura exceto que o ponto periódico bifurcou em três novos pontos: dois hiperbólicos e um atrator. Logo, construir transformações de poda para o derivado da ferradura é equivalente a encontrar *regiões livres* ou *regiões atratoras* L associadas ao ponto atrator e seguir as ideias do capítulo 3. Estas mesmas construções de *derivados* podem ser feitas para certos difeomorfismos hiperbólicos em superfícies. O seguinte teorema é uma versão diferenciável do teorema de poda de [dC99].

Teorema 1.3.2. *Seja f_0 um difeomorfismo hiperbólico de uma superfície compacta X e seja D um disco de poda para f_0 . Então existe uma difeotopia $f_t: f_0 \simeq f_1$ tal que f_1 é hiperbólico e $\Omega(f_1) = \Omega(f) \setminus \cup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(D)$.*

O feito nesta primeira parte fornece uma maquinaria para construir a *família de poda diferenciável* de um difeomorfismo f : dado um disco D_0 , se for necessário construímos o derivado de f , podamos o conjunto não errante em D_0 . Se a poda f_1 tem um disco de poda D_1 , podemos podar novamente para obter o difeo de poda f_2 , e assim sucessivamente. A família de poda diferenciável é a coleção de todos os difeos obtidos pela aplicação deste processo repetidas vezes.

A segunda parte da tese é o capítulo 5. Neste discutimos as relações entre a teoria de poda e a dinâmica na família de Hénon. As transformações de Hénon que estão na fronteira dos parâmetros hiperbólicos que correspondem a ferraduras completas são transformações de Hénon não hiperbólicas mas que têm *entropia maximal* (Veja os preliminares no capítulo 2 para esta definição). Estas transformações estão em parâmetros nos quais ocorre a primeira bifurcação. Provamos que C^0 -próximos destas transformações existem transformações de poda. O enunciado formal do resultado é o seguinte teorema.

Teorema 1.3.3. *Seja H_{a_0, b_0} uma transformação de Hénon com entropia maximal que não é hiperbólica. Então, existe um C^1 -aberto $\mathcal{U} \neq \emptyset$ em $\text{Diff}^1(\mathbb{R}^2)$ tal que:*

- (a) *dado $\epsilon > 0$, existe $f_\epsilon \in \mathcal{U}$ tal que $d_{C^0}(H_{a_0, b_0}, f_\epsilon) < \epsilon$,*
- (b) *se $f \in \mathcal{U}$ então $\Omega(f)$ é hiperbólico e existe um disco de poda D_f tal que f é topologicamente conjugado ao difeomorfismo de poda H_{D_f} associado a D_f como no teorema 1.3.1 quando ambos estão restritos aos seus conjuntos não errantes.*

No capítulo 5 também estudamos as conexões entre a teoria de poda e a dinâmica da transformação de Hénon complexa. Estas conexões estão relacionadas com o *lugar de ferraduras* que é o conjunto de todos os parâmetros complexos tais que a transformação de Hénon é uma ferradura complexa. Para isto, dada uma transformação de poda associamos um automorfismo do shift chamado *automorfismo de poda*. Este automorfismo, sob certas condições, estabelece um vínculo entre a dinâmica de um elemento da família de Hénon e a poda associada. Com estes conceitos, podemos provar a conjectura de poda para certos parâmetros reais na família de Hénon.

Teorema 1.3.4. *Há dois conjuntos abertos disjuntos A_1 e A_2 no plano de parâmetros reais tal que se $(a, b) \in A_1 \cup A_2$ então $H_{a, b}$ é topologicamente conjugado a uma poda não trivial da ferradura.*

No capítulo 6 apresentamos alguns problemas de pesquisa e nova evidência que suporta a CFP.

Parte I

Teoria de poda diferenciável

Capítulo 2

Conceitos

Neste capítulo apresentamos os conceitos que utilizaremos nos capítulos subsequentes. Na seção 2.1 definimos algumas notações: o que é uma ferradura, o plano simbólico e hiperbolicidade. Na seção 2.2 mostramos propriedades de transformações de Hénon e na seção 2.3 lembramos as ideias fundamentais da teoria de poda desenvolvidas em [dC99].

2.1 Preliminares

2.1.1 Terminologia e notações

Denotaremos a homeomorfismos do plano pelas letras f, g, F, G ou H .

Pontos do plano são denotados por x, y, z e p .

Um *disco topológico* é um domínio aberto do plano simplesmente conexo.

Denotaremos por Id a identidade $\text{Id}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^2$.

Um ponto x é chamado *n-periódico* sob um homeomorfismo f se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. O menor n satisfazendo a anterior equação é chamado *período*. O conjunto de pontos periódicos será denotado por $\text{Per}(f)$. A *órbita* de um ponto x por f , denotada por $\text{Orb}(x) = \text{Orb}_f(x)$, é o conjunto $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Dizemos que um conjunto Λ é *f*-invariante se $\Lambda = f(\Lambda) = f^{-1}(\Lambda)$.

Um ponto $x \in \mathbb{R}^2$ é *errante de f* se existe uma vizinhança V tal que $f^k(V) \cap V = \emptyset, \forall k$ positivo. Um ponto é chamado *não errante* se o anterior não é verdade, isto é, se para toda vizinhança V de x , existe um inteiro positivo k tal que $f^k(V) \cap V \neq \emptyset$. Denotamos o conjunto de pontos não errantes de f por $\Omega(f)$.

Um ponto x é *recorrente por cadeias* se, dado qualquer $\epsilon > 0$, podemos escolher $N + 1$ pontos $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ com $x_1 = x_{N+1} = x$ e $|x_{i+1} - f(x_i)| < \epsilon$, para $1 \leq i \leq N$. O conjunto de todos pontos recorrentes por cadeias é denotado por $\mathcal{R}(f)$.

Da definição temos que, para todo f , $\Omega(f)$ e $\mathcal{R}(f)$ são conjuntos fechados *f*-invariantes e vale que $\Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$. Além disso, $\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$ e $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f^{-1})$.

Duas transformações $F: X \rightarrow X$ e $G: Y \rightarrow Y$ de espaços topológicos são *topologicamente conjugados* se existe um homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$ tal que

$$h(F(x)) = G(h(x)), \text{ para todo } x \in X. \quad (2.1)$$

O homeomorfismo h é chamado *conjugação*. Se h é só sobrejetor dizemos que é uma *semi-conjugação*; neste caso dizemos que F é um *fator* de G .

Denotaremos por $\text{Diff}^r(\mathbb{R}^2)$ ao conjunto de todos os C^r -difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$, para $r \geq 1$, e a C^r -norma por d_{C^r} para $r \geq 1$. A C^0 -norma é a norma do supremo. Um C^r -difeomorfismo f é dito *C^m -estruturalmente estável* ($1 \leq m \leq r$) se existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f na topologia C^m tal que todo $g \in \mathcal{U}$ é topologicamente conjugado a f .

2.1.2 Subshifts de tipo finito

Seja $[k] = \{0, \dots, k-1\}$ o espaço topológico de k símbolos com a topologia discreta. Seja $\Sigma_k = [k]^{\mathbb{Z}}$ o espaço produto. Um elemento de Σ_k é uma sequência bi-infinita de símbolos de $[k]$, $a = \dots a_{-1} \cdot a_0 a_1 \dots$. Quando escrevemos elementos $a \in \Sigma_k$ é comum colocar um ponto '.' entre a_{-1} e a_0 para indicar a origem da sequência. Note que a topologia produto é induzida pela métrica

$$d(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-(2|n|+1)} |a_n - b_n| \quad (2.2)$$

O conjunto Σ_k é compacto, totalmente desconexo e não têm pontos isolados, logo é um conjunto de Cantor. O homeomorfismo $\sigma : \Sigma_k \rightarrow \Sigma_k$ tal que $(\sigma(a))_i = a_{i+1}$ será chamado o *shift*.

Seja M_k o conjunto das matrizes $k \times k$ cujas entradas são 1 ou 0 e seja $A = (A_{i,j}) \in M_k$. Definimos $\Sigma_A = \{a \in \Sigma_k : \forall i, A_{a_i a_{i+1}} = 1\}$. Σ_A é um subespaço fechado e σ -invariante de Σ_k . Denotamos $\sigma_A = \sigma|_{\Sigma_A}$. O par (Σ_A, σ_A) é chamado um *subshift de tipo finito*.

Se $a = a_1 \dots a_n$ é uma sequência finita admissível de símbolos tal que $a_n a_1$ é permitida pela matriz A , ou seja $A_{a_n a_1} = 1$, então a^∞ é a repetição bi-infinita da sequência a .

Utilizaremos $s = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ para denotar um elemento de Σ_2 .

Definições análogas se podem fazer para $\Sigma_k^+ = [k]^{\mathbb{N}}$. Neste caso os shifts ou subshifts são chamados *unilaterais*.

2.1.3 A ferradura de Smale

Um dos homeomorfismos do plano com dinâmica não trivial que pode ser compreendida completamente é a *Ferradura de Smale* F definida por Stephen Smale em [Sma67]. Este pode ser construído como segue. Considere o quadrado $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ unido a dois semi-discos de raio 1 centrados em $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Veja a figura 2.1. Denotemos esta região por $\mathbb{T}$. A ação de F em $\mathbb{T}$ é esticar Q uniformemente na direção horizontal por um fator λ (o qual deve ser maior que 2), contrair o resultado na direção vertical por um fator $1/\lambda$ e então dobrar como na figura 2.1 de modo que segmentos verticais em $Q \cap F^{-1}(Q)$ são levados dentro de segmentos verticais por F e segmentos horizontais em $Q \cap F^{-1}(Q)$ são levados dentro de segmentos horizontais por F^{-1} . Os dois semi-discos são contraídos uniformemente e levados no interior do semi-disco da esquerda. Fora de $\mathbb{T}$, F tem um ponto fixo no ∞ com $F^{-n}(x) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \notin \mathbb{T}$.

Figura 2.1: Dinâmica da Ferradura F [dCH02b].

O conjunto não-errante $\Omega(F)$ de F é a união de ∞ , um ponto atrator no semi-disco da esquerda e um conjunto de Cantor

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 : F^n(x) \in Q, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.3)$$

A dinâmica de F em Λ pode ser compreendida simbolicamente: seja $\pi_1 : \mathbb{T} \rightarrow I$ a projeção na primeira coordenada e defina o *itinerário* $h : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ por

$$(h(x))_i = \begin{cases} 0 & \text{se } \pi_1(F^i(x)) < 0, \\ 1 & \text{se } \pi_1(F^i(x)) > 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Assim, h é um homeomorfismo que conjugua a dinâmica de F , restrita a Λ , com a dinâmica do shift $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$. Em outras palavras

$$h(F(x)) = \sigma(h(x)), \text{ para todo } x \in \Lambda. \quad (2.5)$$

De fato, a ferradura que consideraremos é uma variação de F , chamada também F , obtida fazendo uma primeira homotopia que colapsa o bordo de $\mathbb{T}$ no ∞ e depois uma segunda homotopia que leva o ponto fixo no semi-disco da esquerda no ∞ , deixando o conjunto Λ intacto. Assim, Λ pode ser caracterizado por

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^2 : \{F^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ é limitada}\} \quad (2.6)$$

ou o conjunto de pontos cujas órbitas estão contidas em Q .

Sem perda de generalidade podemos supor que F é um C^∞ -difeomorfismo do plano.

2.1.4 Plano simbólico

Em [Cvi91, CGP88], Cvitanović, Gunaratne e Proccacia utilizaram o *plano simbólico* para representar uma órbita de uma transformação de Hénon. No que segue mostraremos a construção do plano simbólico a partir das órbitas de Σ_2 que, essencialmente, é a imagem de uma aplicação $\zeta: \Sigma_2 \rightarrow [0, 1]^2$ que *colapsa* as lacunas entre as variedades invariantes da ferradura.

Denote $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ e $\mathbb{Z}_- = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$ e sejam os conjuntos $\Sigma^+ = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ e $\Sigma^- = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_-}$. É claro que $\Sigma_2 = \Sigma^- \times \Sigma^+$. Defina uma *ordem* $\prec$ no conjunto $\{0, 1\}$ tal que $0 \prec 1$.

A ordem horizontal e vertical de pontos em Σ_2 pode ser determinado usando a *ordem unimodal* $\preceq$ em Σ^+ , a qual é definida como segue (veja [Dev89, MT88]).

Definição 2.1.1. Sejam $s = s_0 s_1 \dots$ e $t = t_0 t_1 \dots$ elementos distintos de Σ^+ e $n \in \mathbb{Z}_+$ o menor natural tal que $s_n \neq t_n$, então $s \prec t$ se e somente se $\sum_{i=0}^n s_i$ é par. Isto é equivalente a dizer que

- (i) $\sum_{i=0}^{n-1} s_i$ é par e $s_n \prec t_n$, ou
- (ii) $\sum_{i=0}^{n-1} s_i$ é ímpar e $t_n \prec s_n$.

Se $s, t \in \Sigma^+$, então $s \preceq t$ se e somente se ou $s = t$ ou $s \prec t$.

Sabemos que Σ^+ define um conjunto de Cantor no intervalo $[0, 1]$ e que existe uma aplicação $\alpha: \Sigma^+ \rightarrow [0, 1]$ que colapsa as *lacunas* deste conjunto de Cantor. α é construída do seguinte modo (veja [CGP88, HC98]):

Para cada $s \in \Sigma^+$ definimos os números

$$c_n := \sum_{i=0}^n s_i \bmod 2 \quad (2.7)$$

Ou equivalentemente, se $c_0 = s_0$, então, para $n \geq 1$:

$$c_n := \begin{cases} c_{n-1} & \text{se } s_n = 0 \\ 1 - c_{n-1} & \text{se } s_n = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Então, defina

$$\alpha(s) = 0.c_1 c_2 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} \quad (2.9)$$

Observe que α preserva a ordem unimodal em Σ^+ e *colapsa* as sequências $s \in \Sigma^+$ que são pre-imagens de 0^∞ pelo σ , no seguinte sentido:

Proposição 2.1.1. Sejam $s, t \in \Sigma^+$ tais que $s \prec t$ então $\alpha(s) \leq \alpha(t)$. Se $\alpha(s) = \alpha(t)$ então existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $s = s_0 s_1 \dots s_N 010^\infty$ e $t = s_0 s_1 \dots s_N 110^\infty$ se $\sum_{i=0}^N s_i$ é par, e $t = s_0 s_1 \dots s_N 010^\infty$ e $s = s_0 s_1 \dots s_N 110^\infty$ se $\sum_{i=0}^N s_i$ é ímpar.

Observação 2.1.1. Note que se $\alpha(s) = \alpha(t)$ então s e t são consecutivos na ordem unimodal, isto é, não existe sequência $s' \in \Sigma^+$ tal que $s \prec s' \prec t$ ou $t \prec s' \prec s$.

Para todo $s = (s_i)_{i=-\infty}^{\infty} \in \Sigma_2$ definimos as *coordenadas no plano simbólico* de s , $\zeta(s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, por:

$$\zeta(s) = (\alpha(s_0 s_1 \dots), \alpha(s_{-1} s_{-2} \dots)) \quad (2.10)$$

Definição 2.1.2. Suponha que o conjunto não errante $\Omega(f)$ de f é equivalente a um subconjunto de Σ_2 , isto é, cada ponto $p \in \Omega(f)$ tem uma descrição simbólica $s(p) \in \Sigma_2$. Então o *Plano Simbólico* $S(f)$ de f é o subconjunto de $[0, 1] \times [0, 1]$ definido por

$$S(f) = \{\zeta(s(p)) : p \in \Omega(f)\} \quad (2.11)$$

2.1.5 Hiperbolicidade

Definição 2.1.3. Seja Λ um conjunto invariante para um C^r -difeomorfismo f de uma variedade M . Dizemos que Λ é um *conjunto hiperbólico* se existe uma decomposição contínua do espaço tangente de M restrito a Λ , TM_Λ , a qual é invariante por Tf

$$TM_\Lambda = E^s \oplus E^u; Tf(E^s) = E^s; Tf(E^u) = E^u; \quad (2.12)$$

e para a qual existem constantes C e λ , $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$, tais que para todo $n \geq 0$,

$$\|Tf^n|_{E^s}\| < C\lambda^n, \quad (2.13)$$

$$\|Tf^{-n}|_{E^u}\| < C\lambda^n. \quad (2.14)$$

Definição 2.1.4. Dado um ponto x da variedade M , os conjuntos estável e instável locais de um difeomorfismo f em x são:

$$W_\epsilon^s(x, f) := \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \text{ e } d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}$$

$$W_\epsilon^u(x, f) := \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \text{ e } d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \leq 0\}$$

Assim as variedades estáveis e instáveis são

$$W^s(x, f) := \cup_{n \geq 0} f^{-n} W_\epsilon^s(f^n(x)) \quad (2.15)$$

$$W^u(x, f) := \cup_{n \geq 0} f^n W_\epsilon^u(f^{-n}(x)) \quad (2.16)$$

Sabese que quando Λ é hiperbólico, para cada $x \in \Lambda$, $W_\epsilon^s(x, f)$ e $W_\epsilon^u(x, f)$ são variedades mergulhadas em M que passam por x . Ver, por exemplo, [Shu87, Teorema 6.2]:

Teorema 2.1.1. *Seja Λ um conjunto hiperbólico fechado para f . Então existe um número positivo ϵ tal que para cada ponto $x \in \Lambda$, $W_\epsilon^s(x, f)$ é um disco topológico de igual dimensão à de E^s ; além disso, $T_x W^s(x, f(x)) = E_x^s$; uma similar definição se cumpre para $W_\epsilon^u(x, f)$. Se f é C^r então $W_\epsilon^s(x, f)$ e $W_\epsilon^u(x, f)$ são C^r -variedades.*

A hiperbolicidade permite obter resultados sobre estabilidade estrutural. Em

[KH95, Teorema 18.2.1] demonstra-se que a hiperbolicidade em um conjunto invariante Λ é suficiente para garantir que $f|_\Lambda$ é estruturalmente estável.

Teorema 2.1.2. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de um difeomorfismo $f : U \rightarrow M$. Então para toda vizinhança aberta $V \subset U$ de Λ e cada $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que se $g : U \rightarrow M$ e $d_{C^1}(f|_V, g) < \epsilon$, existe um conjunto hiperbólico $\Lambda' = g(\Lambda) \subset V$ para g e um homeomorfismo $h : \Lambda' \rightarrow \Lambda$ com $d_{C^0}(Id, h) + d_{C^0}(Id, h^{-1}) < \delta$ tal que*

$$h \circ g|_{\Lambda'} = f|_\Lambda \circ g. \quad (2.17)$$

Além disso h é única quando δ é pequeno.

2.1.6 Partições de Markov

Uma partição de Markov é um conjunto de retângulos no plano que permite introduzir dinâmica simbólica num conjunto invariante Λ para um difeomorfismo do plano.

Definição 2.1.5. Uma *partição de Markov* [PT93] para um conjunto Λ de um difeomorfismo f consiste de um conjunto $\mathcal{P}$ de *retângulos*, isto é, imagens difeomorfas ao quadrado $Q = [-1, +1]^2$, denotadas por $B_1 = \Psi_1(Q)$, $B_2 = \Psi_2(Q)$, ..., $B_l = \Psi_l(Q)$ tais que:

(i) $\Lambda \subset \bigcup_{i=1}^l B_i$

(ii) $\text{int}(B_i) \cap \text{int}(B_j) = \emptyset$, se $i \neq j$, onde $\text{int}(B)$ denota o interior de B .

(iii)

$$f(\partial_s B_i) \subset \bigcup_{j=1}^l \partial_s B_j \quad (2.18)$$

e

$$f^{-1}(\partial_u B_i) \subset \bigcup_{j=1}^l \partial_u B_j \quad (2.19)$$

onde $\partial_s B_i = \Psi(\{(x, y) \mid |x| = 1, -1 \leq y \leq 1\})$ é o *lado estável* do retângulo B_i e $\partial_u B_i = \Psi(\{(x, y) \mid |y| = 1, -1 \leq x \leq 1\})$ é o *lado instável* de B_i .

O [KH95, teorema 18.7.3] diz que todo conjunto hiperbólico possui uma partição de Markov:

Teorema 2.1.3. *Um conjunto compacto invariante e hiperbólico Λ admite uma partição de Markov de diâmetro arbitrariamente pequeno.*

A principal consequência do teorema anterior é a existência de uma semi-conjugação entre o conjunto hiperbólico e um subshift de tipo finito. Isto é o teorema [KH95, Teorema 18.7.4]:

Teorema 2.1.4. *Suponha que Λ é um conjunto maximal invariante hiperbólico e $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_l\}$ uma partição de Markov de diâmetro suficientemente pequeno e*

$$A_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{se } R_i \cap f^{-1}(R_j) \neq \emptyset \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (2.20)$$

Então $f|_\Lambda$ é um fator do subshift de tipo finito (Σ_A, σ_A) .

Uma pergunta que aparece, então, é quando a semiconjugação do teorema anterior é uma conjugação. Note que para isso é necessário que Λ seja totalmente desconexo, dado que Σ_A é totalmente desconexo. O seguinte teorema ([KH95, Teorema 18.7.8]) diz que, na verdade, isto é uma condição suficiente.

Teorema 2.1.5. *Seja Λ um conjunto totalmente desconexo compacto maximal e hiperbólico para um difeomorfismo f . Então $f|_\Lambda$ é topologicamente conjugado ao subshift (Σ_A, σ_A) .*

2.2 Propriedades de transformações de Hénon

A família de transformações de Hénon [Hén76] tem sido muito estudada em sistemas dinâmicos. Ela é dada por

$$H_{a,b}(x, y) = (a - x^2 - by, x) \quad (2.21)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Fixados (a, b) no contexto, simplesmente dizemos H em vez de $H_{a,b}$. Note que $\text{Jac}(H) = b$. Estaremos interessados principalmente no caso $b > 0$, no qual $H_{a,b}$ preserva orientação.

Para um número positivo R , definimos os conjuntos:

$$V_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < R\}, \quad (2.22)$$

$$V_R^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{R, |y|\} < |x|\}, \quad (2.23)$$

$$V_R^- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{R, |x|\} < |y|\}, \quad (2.24)$$

$$\Lambda_R(H) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H^n(V_R), \quad (2.25)$$

e o conjunto de órbitas limitadas

$$K_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \{H_{a,b}^n(x, y)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ é limitada}\}.$$

No que segue, não faremos referência ao número R e simplesmente escrevemos V , V^+ and V^- .

Em [MNTU00], por exemplo, pode ser encontrada a seguinte proposição cuja demonstração é um simples cálculo utilizando a fórmula da transformação:

Proposição 2.2.1. *Para $R \gg 0$, existe um número real $\rho > 1$ com as seguintes propriedades:*

- (a) *Se $(x, y) \in \overline{V^+}$ e $H(x, y) = (x_1, y_1)$ então $H(x, y) \in V^+$ e $|x_1| > \rho|x|$.*
- (b) *Se $(x, y) \in \overline{V^-}$ e $H^{-1}(x, y) = (x_{-1}, y_{-1})$ então $H^{-1}(x, y) \in V^-$ e $|y_{-1}| > \rho|y|$.*

Observação 2.2.1. Vamos estimar o número R para a transformação de Hénon $H_{a,b}$. É suficiente escolher R tal que $|a - \zeta^2| > (1 + |b|)|\zeta|$, para $|\zeta| \geq R$ (com ρ

suficientemente próximo de 1). Dado que

$$|a - \zeta^2| - (1 + |b|)|\zeta| \geq |\zeta|^2 - (1 + |b|)|\zeta| - |a|$$

concluimos que R têm a propriedade procurada se é maior que a raiz positiva da equação: $t^2 - (1 + |b|)t - |a| = 0$ (Compare com [DN79]). Uma descrição pictórica da anterior proposição é dada na figura 2.2.

Figura 2.2: Dinâmica de uma transformação de Hénon.

Apresentamos outra importante proposição de [MNTU00] da qual daremos a prova pois será utilizada posteriormente.

Proposição 2.2.2. *Seja H uma transformação de Hénon, então para $R \gg 0$ temos que $\Omega(H) \subset V_R$.*

Demonstração. Suponha que $z = (x, y) \in V^+$ e seja $(x_n, y_n) := H^n(x, y)$, $n \geq 0$. Por (a) da proposição 2.2.1 concluímos que:

$$|x_n| > \rho |x_{n-1}| > \rho^2 |x_{n-2}| > \dots > \rho^n |x| \geq \rho^n R.$$

Isso implica que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, é impossível tomar uma sequência $\{z_n\}_{n=1}^{N+1}$ com $z = z_1 = z_{N+1}$ e $|z_{n+1} - H(z_n)| < \epsilon$, $(1 \leq n \leq N)$, o qual implica que $z \notin \mathcal{R}(H)$. Similarmente temos que se $z \in V^-$ então $z \notin \mathcal{R}(H)$. Logo $\mathcal{R}(H) \subset V$. $\square$

Outra proposição importante é a seguinte:

Proposição 2.2.3. *Se $H_{a,b}$ é uma transformação de Hénon e R é suficientemente grande então $\Omega(H_{a,b}) \subset \Lambda_R(H_{a,b})$ e $\Lambda_R(H_{a,b}) = K_{a,b}$.*

Veja a [MNTU00, Proposição 9.2.6] para a primeira parte da proposição e [BS91, Lemma 2.4] para a segunda parte.

2.2.1 A ferraduras na família de Hénon

Em [DN79], Devaney e Nitecki estudaram a família de Hénon e descobriram valores dos parâmetros nos quais a transformação de Hénon é uma ferradura de Smale.

Teorema 2.2.1 (Devaney-Nitecki). *Se $a > \frac{5+2\sqrt{5}}{4}(1+|b|)^2$ então $\Omega(H_{a,b}) = K_{a,b}$, $\Omega(H_{a,b})$ tem uma estrutura hiperbólica e $H_{a,b}|_{\Omega(H_{a,b})}$ é topologicamente conjugada a $\sigma|_{\Sigma_2}$.*

Um resultado mais abrangente ao anterior pode-se encontrar na tese de Oberste-Vorth [OV87]. Veja também [MNTU00, Proposição 7.4.6].

Teorema 2.2.2 (Oberste-Vorth). *Se $a > 2(1+|b|)^2$ então $\Omega(H_{a,b}) = K_{a,b}$, $\Omega(H_{a,b})$ tem uma estrutura hiperbólica e $H_{a,b}|_{\Omega(H_{a,b})}$ é topologicamente conjugada a $\sigma|_{\Sigma_2}$.*

Por estes dois teoremas, podemos escolher parâmetros (a, b) tais que para $H := H_{a,b}$, $\Omega(H)$ é hiperbólico e topologicamente conjugado à ferradura. Por tanto existe um homeomorfismo $h : \Omega(H) \rightarrow \Sigma_2$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \Omega(H) & \xrightarrow{H} & \Omega(H) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \end{array}$$

Assim cada ponto de $\Omega(H)$ corresponde a uma sequência bi-infinita de Σ_2 . Uma órbita periódica de H corresponde a uma sequência simbólica periódica $(s_0 s_1 \dots s_{n-1})^\infty$ onde w^∞ significa a repetição bi-infinita da palavra w . Existem unicamente dois pontos fixos 0^∞ e 1^∞ . Além disso, uma órbita homoclínica ao ponto 0^∞ é representada por uma sequência simbólica do tipo $0^\infty 1 s_{-T} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_N 10^\infty$. Para cada sequência $s = \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots$ definimos $x := s_0 s_1 \dots$ e $y := \dots s_{-2} s_{-1}$ e escrevemos $s = y \cdot x$. Doravante, um ponto em $z \in \Omega(H)$ será chamado por sua representação simbólica $h(z)$ e $\Lambda := \Omega(H)$.

A conjugação $h : \Omega(H) \rightarrow \Sigma_2$ é escolhida como sendo a *conjugação canônica*. Isto é, para cada $z = (x, y)$ em $\Omega(H)$ associamos uma sequência simbólica $h(z) = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ definida por:

$$s_i := \begin{cases} 0 & \text{se } \pi_1(H^i(z)) < 0 \\ 1 & \text{se } \pi_1(H^i(z)) > 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

onde π_1 é a projeção na primeira coordenada $\pi_1(z) := x$.

Note que esta codificação é válida para transformações de Hénon tais que $a \gg 0$; por exemplo, por [DN79] temos

Proposição 2.2.4. *$H_{a,b}$ é uma ferradura topológica se $a > 2(1+|b|)^2$ e existe um $\delta > 0$ tal que $|\pi_1(z)| > \delta$ para todo $z \in \Omega(H_{a,b})$.*

Para outros parâmetros usaremos continuação hiperbólica quando seja necessário. Uma representação das variedades invariantes da ferradura é como na figura 2.3. O conjunto não errante é o fecho das interseções destas variedades.

Figura 2.3: Variedades invariantes de uma transformação de Hénon que é uma ferradura de Smale ($a \approx 4.75$ e $b = 0.75$).

Outros importantes estudos sobre os parâmetros (a, b) nos quais $H_{a,b}$ é uma ferradura hiperbólica foram feitos por Bedford e Smillie em [BS04, BS06b] e junto a Lyubich em [BLS93]. No que segue resumimos os seus principais resultados.

Primeiro observe que existe evidência numérica mostrando que a região $a > 2(1 + |b|)^2$ do teorema de Oberste-Vorth não contém todas as ferraduras reais (veja [Ara07a]). Mas, para uma transformação de Hénon que seja uma ferradura hiperbólica, o fato que o conjunto de órbitas limitadas seja igual ao conjunto não errante é ainda válido. O seguinte teorema é uma das conclusões do [BLS93, Teorema 10.2]:

Teorema 2.2.3 (Bedford-Lyubich-Smillie). *Se $H_{a,b}|_\Lambda$ é uma ferradura completa real então $\Omega(H_{a,b}) = K_{a,b}$.*

Dizemos que uma transformação de Hénon tem *entropia maximal* se a sua entropia topológica é igual a $\text{Log}(2)$. Em [BS04], Bedford e Smillie classificaram as transformações de Hénon de entropia maximal. O seu principal resultado é:

Teorema 2.2.4 (Bedford-Smillie). *Se $H_{a,b}$ tem entropia maximal então ou $H_{a,b}$ é hiperbólico e topologicamente conjugado a uma ferradura de Smale ou $H_{a,b}$ possui uma tangência quadrática.*

Em [Hoe08], Ulrich Hoensch concluiu que se H tem entropia maximal mas não é hiperbólica, ou seja o segundo caso no teorema anterior, a órbita de tangência homoclínica deve ocorrer entre as variedades estáveis e instáveis de

um ponto fixo da ferradura. Se utilizarmos a codificação (2.26), o resultado de Hoensch se pode escrever como a seguinte proposição:

Proposição 2.2.5 (Hoensch). *Se $H_{a,b}$ corresponde a uma transformação de Hénon com entropia maximal não hiperbólica então a tangência homoclínica ocorre quando as órbitas homoclínicas codificadas por $0^\infty 10 \cdot 10^\infty$ e $0^\infty 11 \cdot 10^\infty$ colidem.*

Assim, a perda de hiperbolicidade de uma transformação de Hénon de entropia maximal é devida ao fato que as órbitas $0^\infty 10 \cdot 10^\infty$ e $0^\infty 11 \cdot 10^\infty$ colidem criando uma tangência homoclínica ao ponto fixo de codificação 0^∞ . Um exemplo é como na figura 2.4. Ainda neste caso, o conjunto não errante é um conjunto de Cantor. Isto é o teorema 5.2 de [BS04]:

Teorema 2.2.5 (Bedford-Smillie). *Se $H_{a,b}$ tem entropia maximal então $K_{a,b}$ é um conjunto de Cantor.*

Figura 2.4: Variedades invariantes de uma transformação de Hénon com entropia maximal ($a \approx 3.3715$ e $b = 0.5$).

2.3 Teoria da Frente de Poda

2.3.1 Evidência para a CFP

Os primeiros estudos numéricos relacionados ao que, posteriormente, foi chamada *Conjectura da Frente de Poda* foram feitos por Cvitanović, Gunaratne e Procaccia em [CGP88]. Neste artigo, eles consideraram alguns valores dos parâmetros¹ (a, b) com $b < 0$ e encontraram, numericamente, as órbitas periódicas de $H_{a,b}$ de períodos pequenos (menores que 15). Depois, desenharam elas no

¹Em [CGP88] é utilizado uma família do tipo $C_{\mu,\epsilon}(x, y) := (y + \mu - x^2, \epsilon x)$ com $\epsilon > 0$.

Figura 2.5: Zoom do retângulo na figura 2.4 que indica a região onde está a tangência ($a \approx 3.3715$ e $b = 0.5$).

plano simbólico. Seus resultados sugeriram que o conjunto de órbitas periódicas não preenchia completamente o plano simbólico pois existiam regiões *podadas* que não correspondiam a dinâmica da transformação. Assim, eles conjecturaram que

o conjunto não-errante destas transformações corresponde a um sub-conjunto próprio do plano simbólico e, portanto, de Σ_2 .

Usando o algoritmo do Apêndice A, nós reproduzimos alguns desses resultados. Embora nossa codificação simbólica difira um pouco da codificação em [CGP88] porque adaptamos a nossa apresentação do plano simbólico ao caso que $H_{a,b}$ preserva orientação, o espírito é o mesmo. Por exemplo, para os valores $(a, b) = (1.9, 0.05)$ o plano simbólico de $H_{a,b}$ para as órbitas de período menor que 15 é como na figura 2.6(b). Note que existem regiões no plano simbólico que não têm órbitas na dinâmica da transformação, ou seja, regiões podadas. Também desenhamos as variedades invariantes associadas a um ponto fixo (veja a figura 2.6(a)). É claro que a representação no plano simbólico é mais elucidativa, com respeito ao tipo de dinâmica que a transformação provavelmente tem, que a representação das variedades invariantes.

Em [Cvi91], Cvitanović introduziu o conceito de *frentes de poda* e formulou a Conjectura da Frente de Poda. Ele observou também que as regiões podadas se podem interpretar como o *descruzamento* de certas variedades invariantes estáveis e instáveis; assim, as órbitas podadas corresponderiam àquelas órbitas que estavam nas interseções entre estas variedades.

2.3.2 Teoria de poda

Uma formulação matematicamente rigorosa da *Teoria de Poda* foi desenvolvida por A. de Carvalho em [dC99]. Esta teoria permite destruir, de maneira controlada, parte da dinâmica de um homeomorfismo da superfície usando *discos de poda*. Neste contexto *destruir* dinâmica quer dizer *converter os pontos*

Figura 2.6: Variedades estáveis e instáveis (Figura 2.6(a)) de $H_{1.9,0.05}$ e o plano simbólico para órbitas de períodos menores que 15 (Figura 2.6(b)).

não errantes de certas regiões em pontos errantes, sem modificar a dinâmica em outras regiões. Esta destruição é feita por uma isotopia suportada nos discos de poda.

Definição 2.3.1. Uma *isotopia* é uma transformação contínua $H: \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que para todo $t \in [0, 1]$, $H_t := H(\cdot, t)$ é um homeomorfismo do plano. Dizemos que H é uma isotopia de f se $H_0 = f$. O *suporte* de H é o complementar do conjunto $\{x: H(x, t) = H(x, 0), \forall t \in [0, 1]\}$.

Seguindo as definições de [dC99], dado um homeomorfismo do plano f , um disco topológico D é um (c, e) -disco para f (c para “contractor” e e para “expansor”) se seu bordo pode ser representado como uma união de dois arcos que só se intersectam nos extremos, $\partial D = C \cup E$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } f^n(C) = 0 \quad (2.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } f^{-n}(E) = 0 \quad (2.28)$$

Mais precisamente, sob certas condições de diferenciabilidade para f , se pode pensar um (c, e) -disco de poda como sendo um aberto do plano limitado por dois arcos C e E tais que C pertence à variedade estável de um ponto hiperbólico e E pertence à variedade instável de outro ponto hiperbólico.

A partir dos (c, e) -discos definimos o conceito de frentes de poda. Primeiro precisamos uma definição de ordem parcial sobre eles.

Definição 2.3.2. Sejam D_1, D_2 dois (c, e) -discos tais que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ onde $I_i = \text{int}(D_i)$. Dizemos que D_1 é mais *longo* que D_2 , o que denotamos por $D_1 \succ D_2$, se as seguintes condições se cumprem (veja a figura 2.7):

- i) $C_1 \cap I_2 = \emptyset$ e $E_2 \cap I_1 = \emptyset$;

Figura 2.7: Relação $D_1 \succ D_2$.

- ii) se $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ então $C_1 \cup C_2$ é um arco e se $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ então $E_1 \cup E_2$ é um arco;
- iii) se $C_1^\circ \cap \overline{I_1 \cap I_2} \neq \emptyset$ então $C_1 \subset C_2$ e se $E_2^\circ \cap \overline{I_1 \cap I_2} \neq \emptyset$ então $E_2 \subset E_1$.

O objetivo principal é mostrar como destruir dinâmica de uma maneira controlada. Em [dC99] são definidos conjuntos para os quais é possível fazer isso. Estes conjuntos foram chamados *frentes de poda*.

Definição 2.3.3. Seja $\{D_i\}_{i=1}^l$ uma coleção de (c, e) -discos tais que as seguintes condições são satisfeitas:

- i) $\succ$ pode ser estendida por transitividade a um ordem parcial em $\{D_i\}_{i=1}^l$ ou, equivalentemente, não há laços $D_{i_1} \succ D_{i_2} \succ \dots \succ D_{i_n} \succ D_{i_1}$;
- ii) para cada $n > 0$ e $i, j \in l$, ou $f^n(D_i) \cap D_j = \emptyset$ ou $f^n(D_i) \succ D_j$;
- iii) para cada $m < 0$ e $i, j \in l$, ou $f^m(D_i) \cap D_j = \emptyset$ ou $D_j \succ f^m(D_j)$.

Toda coleção satisfazendo as propriedades anteriores será chamada *coleção de poda* e a sua união $\cup_{i=1}^l D_i$ a *frente de poda*. O principal teorema de [dC99] é o *teorema de poda*:

Teorema 2.3.1 (de Carvalho). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo do plano, $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^l$ uma coleção de discos de poda e $P = \bigcup_{i=1}^l I_i$, onde I_i é o interior do disco D_i . Então existe uma isotopia $S : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ da identidade, suportada em $U := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(P)$ tal que se $f_P(\cdot) = f \circ S(\cdot, 1)$ então cada ponto de U é errante sob f_P .*

A transformação f_P ao final da isotopia do teorema 2.3.1 é chamada uma *poda de f* . Dado que a isotopia é suportada em U e que cada ponto de U é errante para f_P , temos que a dinâmica interessante de f_P está em U^c e coincide ali com a dinâmica de f . Então, o teorema 2.3.1 permite destruir toda a dinâmica de f no interior de U por uma isotopia que mantém intacta f no complemento de U .

O teorema de poda permite também construir a família de poda $\mathcal{P}(f)$ de um homeomorfismo f da seguinte maneira. Suponha que f possui um disco de poda

D_1 então construa a poda f_{D_1} . Se f_{D_1} novamente têm um disco de poda D_2 então podemos contruir uma poda de f_{D_1} denotada por $f_{D_1 D_2}$. Se for o caso, podemos continuar este processo até obter uma transformação $f_{D_1 D_2 \dots D_n}$ para um n apropriado. A família de poda de f é o conjunto de todas as transformações obtidas desta maneira

$$\mathcal{P}(f) = \overline{\{f_{D_1 \dots D_n} : D_{i+1} \text{ é um disco de poda para } f_{D_i}\}} \quad (2.29)$$

onde o fecho é tomado na topologia C^0 . Nesta linguagem a Conjectura da Frente de Poda de Cvitanović é:

Conjectura da Frente de Poda: *Seja F a ferradura de Smale. Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, existe uma transformação de poda $g \in \mathcal{P}(F)$ que é semiconjugada a $H_{a,b}$.*

Num trabalho não publicado J. Dillon [Dil] encontrou numericamente valores dos parâmetros nos quais a anterior conjectura parece ser verdade.

Uma das dificuldades que aparece ao tentar utilizar o teorema de poda anterior para mostrar a CFP é que, dado um disco de poda, a transformação de poda f_P é obtida fazendo infinitas isotopias com suportes disjuntos. Isto faz que seja difícil trabalhar com a expressão da transformação de poda. Assim, é difícil saber qual é a dinâmica restante no conjunto não errante de F_P no caso geral. Outra dificuldade é que a transformação de poda é construída como sendo um homeomorfismo enquanto que a família de Hénon é uma família analítica de transformações. Isto faz que as possíveis comparações entre elas sejam difíceis de fazer.

No seguinte capítulo apresentaremos uma teoria de poda diferenciável utilizando *discos de poda homoclínicos*.

Capítulo 3

Teoria de poda na ferradura

Em [dC99] poda foi introduzida como uma ferramenta topológica mas as transformações de poda dadas pelo teorema 2.3.1 em geral não são diferenciáveis.

Neste capítulo demonstramos um *teorema de poda diferenciável* para o caso particular da *ferradura de Smale* construindo podas que são *difeomorfismos*. Para tal propósito, definimos os *discos de poda homoclínicos* os quais permitem construir uma deformação da ferradura que destrói a dinâmica suportada neles. Provaremos que esta deformação, obtida por uma difeotopia e chamada *difeomorfismo de poda*, é hiperbólica e possui uma dinâmica no conjunto não errante equivalente a um subshift de tipo finito.

Na seção 3.1 definimos o que é um disco de poda homoclínico e construímos as isotopias para o difeomorfismo de poda. Na seção 3.2 apresentamos um algoritmo que, utilizando as coordenadas do disco de poda, permite encontrar a partição de Markov do difeomorfismo de poda. Já na seção 3.3 demonstramos o teorema de poda.

3.1 Construção do difeomorfismo de poda

Pelo teorema 2.2.2 escolhemos parâmetros (a, b) tais que $H_{a,b}$ é uma ferradura de Smale hiperbólica. Doravante $H_{a,b}$ será chamada simplesmente por H e um ponto em $\Omega(H)$ será representado pela sua codificação simbólica em Σ_2 .

3.1.1 Frentes de poda e discos de poda homoclínicos

Agora definiremos o conceito de disco homoclínico. Precisaremos algumas definições preliminares.

Definição 3.1.1. Um *disco homoclínico* é um disco topológico $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado por dois segmentos C e E tais que:

- (i) $C \subset W^s(0^\infty)$ e $E \subset W^u(0^\infty)$, onde $W^s(0^\infty)$ e $W^u(0^\infty)$ são as variedades estáveis e instáveis do ponto 0^∞ ;
- (ii) existe um conjunto aberto simplesmente conexo G com $\overline{G} \subset D$ tal que $D \cap \Omega(H) \subset G$;
- (iii) $D \cap H(D) = \emptyset$.

Observação 3.1.1. Observe que estas condições garantem que as variedades estáveis e instáveis de todos os pontos de $\Omega(H)$ não se acumulam internamente em ∂D .

No que segue, um *ponto homoclínico* será um ponto homoclínico ao ponto 0^∞ e *segmentos de variedades estável e instável* serão segmentos de $W^u(0^\infty)$ e $W^s(0^\infty)$.

Dados os pontos homoclínicos $p_1, p_2, \dots, p_k$, construa o arco poligonal fechado que consiste da união do segmento de variedade instável unindo p_1 e p_2 , o segmento de variedade estável unindo p_2 e p_3 , e assim sucesivamente até o segmento de variedade estável unindo p_k e p_1 . Se este arco não tem autointerseções, a região poligonal limitada por ele e denotada por $G(p_1, \dots, p_k)$.

Para clarificar as seguintes definições veja uma representação esquemática na figura 3.1. As linhas verticais representam as variedades estáveis e as horizontais as variedades instáveis.

Seja $p_1 = y \cdot x$ um ponto homoclínico. Então seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $x = s_0 s_1 \dots s_N 10^\infty$. Suponha que $\sum_{i=0}^N s_i + 1$ é ímpar, e que $T \in \mathbb{N}$ tal que $y = 0^\infty 1 s_{-T} \dots s_{-2} 0$ e que $\sum_{i=1}^T s_{-i} + 1$ é ímpar. Definamos $y' := 0^\infty 1 s_{-T} \dots s_{-2} 1$ ao qual chamamos *o simétrico de y*. Seja $p_0 := y' \cdot x$. Note que p_0 é simétrico a p_1 em relação a uma horizontal traçada no meio do quadrado que contem a ferradura.

Com estas notações o disco homoclínico D definido por p_0 e p_1 é a região $G(p_0, p_1)$.

A *região instável* L_D de D , a qual denotamos por L quando não ha risco de confusão, é a região $G(p_0, q_0, q_1, p_1) \subset D$ tal que $q_0 := y' \cdot x^*$, $q_1 := y \cdot x^*$, onde $x^* = s_0 s_1 \dots \overline{s_N} 10^\infty$ e $\overline{s_i} = 1 - s_i$, isto é x^* é o sucessor imediato de x na ordem unimodal. Observe que em L não existem pontos do conjunto não-errante da ferradura. Mais ainda, pelo teorema 2.2.3, todo ponto de L tem órbita ilimitada sob iterados futuros de H . Por iterados passados, todo ponto de L ou vai para ∞ ou pertence à variedade instável de um ponto z_1 de $\Omega(H)$.

Para H^{-1} fazemos definições similares usando discos homoclínicos que são simétricos em relação a uma vertical traçada no meio do quadrado que contém a ferradura. Assim, um *disco homoclínico para H^{-1}* é um como o disco $H^{-1}(D)$ na figura 3.1. De maneira similar, definimos $L_{H^{-1}(D)}$ em $H^{-1}(D)$ para H^{-1} .

Definição 3.1.2. Um disco homoclínico D é *livre para H* se

$$H^n(L) \cap D = \emptyset, \forall n \geq 1. \quad (3.1)$$

Veja figura (3.1) para um exemplo. Similarmente, $H^{-1}(D)$ é *livre para H^{-1}* se

$$H^{-n}(L_{H^{-1}(D)}) \cap H^{-1}(D) = \emptyset, \forall n \geq 1. \quad (3.2)$$

Definição 3.1.3. Um disco homoclínico é um *disco de poda* se D é livre por H e $H^{-1}(D)$ é livre por H^{-1} . O conjunto aberto $\mathbb{P} := \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} H^i(D)$ é chamado a *frente de poda associada ao disco D* . O conjunto $\mathbb{P}_s := h(\mathbb{P} \cap \Omega(H))$ é chamado a *frente de poda simbólica*.

Figura 3.1: Disco homoclínico D definido pelos pontos homoclínicos $p_0 = 0^\infty 1111 \cdot 10110^\infty$ e $p_1 = 0^\infty 1110 \cdot 10110^\infty$. Também temos desenhado os principais elementos de um disco de poda. Os discos D e $H^{-1}(D)$ são livres.

Seja U a região $G(p_0, p_1, r_1, r_0)$ onde $r_0 := 0^\infty 1\overline{s_{-T}} \dots s_{-2} 1 \cdot x$ e $r_1 := 0^\infty 1\overline{s_{-T}} \dots s_{-2} 0 \cdot x$ (Veja a figura 3.1). Uma consequência desta definição é a seguinte

Proposição 3.1.1. $L_{H^{-1}(D)} = H^{-1}(U)$.

Demonstração. Note que

$$H^{-1}(p_0) = 0^\infty 1s_{-T} \dots s_{-2} \cdot 1x,$$

$$H^{-1}(r_0) = 0^\infty 1\overline{s_{-T}} \dots s_{-2} \cdot 1x,$$

$$H^{-1}(p_1) = 0^\infty 1s_{-T} \dots s_{-2} \cdot 0x, \text{ e,}$$

$$H^{-1}(r_1) = 0^\infty 1\overline{s_{-T}} \dots s_{-2} \cdot 0x.$$

A igualdade segue pela definição de região instável de $H^{-1}(D)$ para H^{-1} . $\square$

3.1.2 Exemplos de discos homoclínicos

Nesta seção apresentamos alguns discos homoclínicos. Em todos os exemplos, representaremos todos estes discos no plano simbólico. Pontos da órbita homoclínica de p_0 serão representados por pequenos quadrados. Observe que é suficiente fazer um número finito de iterações do disco homoclínico para decidir se é de poda ou não.

Exemplo 3.1.1. Seja D_1 o disco homoclínico definido por $p_0 = 0^\infty 1111 \cdot 10110^\infty$ e $p_1 = 0^\infty 1110 \cdot 10110^\infty$. Então, L é limitada pelos arcos de variedades definidos por p_0 , p_1 , $q_0 = 0^\infty 1111 \cdot 10010^\infty$ e $q_1 = 0^\infty 1110 \cdot 10010^\infty$. Neste caso D_1 é disco de poda. Na figura 3.2(a) mostramos este disco e alguns de seus iterados no plano simbólico.

Exemplo 3.1.2. Seja D_2 o disco homoclínico definido por $p_0 = 0^\infty 1111 \cdot 11010^\infty$ e $p_1 = 0^\infty 1110 \cdot 11010^\infty$. D_2 é um disco livre, mas $H^{-1}(D)$ não é livre para H^{-1} pois um iterado de p_0 por H^{-1} está em D_2 . Veja a figura 3.2(b).

Exemplo 3.1.3. As regiões podadas no exemplo da figura 1.2(b) correspondem ao disco homoclínico D_3 definido pelos pontos homoclínicos $p_0 = 0^\infty 11011 \cdot 10110^\infty$ e $p_1 = 0^\infty 11010 \cdot 10110^\infty$. Este é o disco homoclínico conjecturado para a transformação de Hénon $H_{5,4,1}$. Veremos mais tarde que esta conjectura pode ser demonstrada. Neste caso D_3 é um disco de poda. Veja a figura 3.2(c).

(a) O disco de poda D_1 .(b) D_2 não é um disco de poda. (c) D_3 é um disco de poda.

Figura 3.2: Exemplos de discos homoclínicos

Uma maneira de construir discos de poda é utilizando a noção de *simetria*. Definamos primeiro a função $\phi : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ por $(\phi(s))_i = s_{-(i+1)}$. Note que ϕ

satisfaz

$$\phi \circ \sigma \circ \phi = \sigma^{-1}, \text{ e, } \phi^2 = \text{Id}. \quad (3.3)$$

Se $A = G(p_0, p_1, \dots, p_k)$ então definamos $\phi(A)$ por $G(\phi(p_0), \phi(p_1), \dots, \phi(p_k))$ onde começamos utilizando o segmento de variedade estável para formar o caminho poligonal.

Um disco $D = G(p_0, p_1)$ é *simétrico* se, e somente se, $\sigma(\phi(p_i)) = p_i$ para $i = 0, 1$. Isto é equivalente a dizer que $H(\phi(D)) = D$ ou $\phi(D) = H^{-1}(D)$.

Proposição 3.1.2. *Se D é homoclínico livre e simétrico, então D é um disco de poda.*

Demonstração. Observe que $\phi \circ \sigma^n \circ \phi = \sigma^{-n}$. Se D é simétrico então, pela proposição 3.1.1, temos que $\phi(L) = L_{H^{-1}(D)}$ e $L = \phi(L_{H^{-1}(D)})$. Note que $H^{-n}(L_{H^{-1}(D)})$ é uma região limitada segmentos de variedades estáveis e instáveis que passam pelos pontos

$$\begin{aligned} \sigma^{-n}(\phi(p_0)) &= \phi \circ \sigma^n \circ \phi(\phi(p_0)) = \phi \circ \sigma^n(p_0), \\ \sigma^{-n}(\phi(p_1)) &= \phi \circ \sigma^n \circ \phi(\phi(p_1)) = \phi \circ \sigma^n(p_1), \\ \sigma^{-n}(\phi(q_0)) &= \phi \circ \sigma^n \circ \phi(\phi(q_0)) = \phi \circ \sigma^n(q_0), \\ \sigma^{-n}(\phi(q_1)) &= \phi \circ \sigma^n \circ \phi(\phi(q_1)) = \phi \circ \sigma^n(q_1), \end{aligned}$$

Portanto, $H^{-n}(L_{H^{-1}(D)}) = \phi(H^n(L))$. Só temos que provar que $\phi(H^n(L)) \cap \phi(D) = \emptyset$. Mas a última igualdade é verdade, dado que por hipótese, $H^n(L) \cap D = \emptyset$. $\square$

3.1.3 Construção da isotopia de poda

Nesta seção construímos a isotopia que remove os pontos não errantes de H que estão em D e portanto na frente de poda $\mathbb{P}$. A idéia principal é *levar* todo ponto de $\Omega(H) \cap D$ à região instável L a qual é livre ou errante. Mas observe que o fato de L ser errante não é suficiente para destruir a dinâmica em D da maneira que iremos fazer isso nesta seção.

Quando $a \gg 0$, seguindo as proposições de Hoensch [Hoe08, Proposição 2.1 e 2.2], podemos supor que existe y_0, y_1 tais que os segmentos C e E são curvas que podem ser escritas como graficos de funções sobre o eixo y

$$C = \{(\gamma_c(y), y) : y \in [y_0, y_1]\} \text{ e } E = \{(\gamma_e(y), y) : y \in [y_0, y_1]\}. \quad (3.4)$$

Embora Hoensch tenha utilizado a expressão $F_{r,b} = (rx(1-x) - by, x)$ para a família de Hénon, não é difícil ver que $F_{r,b}$ é conjugado a $H_{a,b}$ pela transformação

$$h(x, y) = (r(x - \frac{1}{2}), r(y - \frac{1}{2})), \text{ com } a = -\frac{r}{2} - \frac{br}{2} + \frac{r^2}{4} \quad (3.5)$$

e por tanto, as afirmações de [Hoe08] são também verdadeiras para $H_{a,b}$.

Tomemos novas curvas $g_1(y), g_2(y), g_3(y)$ e $g_4(y)$ que passem através de p_0 e p_1 tais que $\gamma_c(y) =: g_4(y) < g_3(y) < g_2(y) < g_1(y) := \gamma_e(y)$ e $\Omega(H) \cap D \subset$

Figura 3.3: Funções g_1 , g_2 , g_3 e g_4 em um disco de poda homoclínico.

$\{(x, y) : g_3(y) < x < g_2(y)\}$. Veja a figura (3.3). Por tanto $(g_3(y), y) \in L_D$ e $(g_2(y), y) \in U$.

Definição 3.1.4. Seja $g_t(y) = g_2(y) + t(g_3(y) - g_2(y))$. Definimos a isotopia S_t por:

$$S_t(x, y) = (f_t(x, y), y) \quad (3.6)$$

onde:

$$f_t(x, y) := \begin{cases} \frac{g_t(y) - g_1(y)}{g_2(y) - g_1(y)}(x - g_2(y)) + g_t(y), & \text{se } g_2(y) \leq x \leq g_1(y) \\ \frac{g_4(y) - g_t(y)}{g_4(y) - g_2(y)}(x - g_4(y)) + g_4(y), & \text{se } g_4(y) \leq x \leq g_2(y) \\ x, & \text{em outro caso.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Então, $S_0 = I_d$ e $S_1(g_2(y), y) = (g_3(y), y)$, $S_1(g_1(y), y) = (g_1(y), y)$, $S_t(g_4(y), y) = (g_4(y), y)$ e $\text{Supp}(S_t) = \overline{D}$.

Sejam os conjuntos

$$A_1 = \{(x, y) / g_2(y) < x < g_1(y)\}, \quad (3.8)$$

$$A_2 = \{(x, y) / g_3(y) < x < g_2(y)\}, \quad (3.9)$$

$$A_3 = \{(x, y) / g_4(y) < x < g_3(y)\}. \quad (3.10)$$

Definição 3.1.5. A isotopia de poda H_t de H é dada por:

$$H_t(x, y) := \begin{cases} H \circ S_t(x, y) & \text{em } D \\ H(x, y) & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (3.11)$$

Dado que $D \cap H(D) = \emptyset$ temos que H_t^{-1} é bem definida, isto é:

$$H_t^{-1}(x, y) := \begin{cases} S_t^{-1} \circ H^{-1}(x, y) & \text{em } H(D) \\ H^{-1}(x, y) & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (3.12)$$

Das definições anteriores se deduzem as proposições:

Proposição 3.1.3. *Para um disco homoclínico qualquer temos: $A_3 \subset L$, $S_1(A_1) \subset A_1 \cup A_2$ e $S_1(A_2 \cup A_3) \subset A_3$.*

Proposição 3.1.4. *A frente de poda para H é o mesmo para H_1 , isto é: $\mathbb{P} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} H_1^i(D)$. Além disso, é invariante por H e H_1 .*

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{P}$ e seja $\mathbb{B} := \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} H_1^i(D)$. Se $z \in D \cup H(D) \cup H^{-1}(D) = D \cup H_1(D) \cup H_1^{-1}(D)$, então $z \in \mathbb{B}$, dado que $H(D) = H_1(D)$ e $H_1^{-1}(D) = H^{-1}(D)$. Seja $z \in \mathbb{P} \cap (D \cup H(D) \cup H^{-1}(D))^c$. Então, como $z \in H^i(D)$ para algum $i \in \mathbb{Z}$, temos que podem acontecer dois casos:

- (i) Se $z \in H^{k_0}(D)$ para algum $k_0 > 1$. Então $H^{-k_0}(z) \in D$. Defina $k_0^* := \min\{k \in \{2, \dots, k_0\} | H^{-k}(z) \in D\}$. Logo $H^{-(k_0^*-1)}(z) \in H(D)$. Pela definição de k_0^* temos que $H^{-k}(z) \notin H(D) \cup D, \forall k \in \{0, \dots, k_0^* - 2\}$. Logo $H^{-(k_0^*-1)}(z) = H_1^{-(k_0^*-1)}(z) \in H_1(D)$ e portanto $H_1^{-k_0^*}(z) \in D$ e $z \in H_1^{k_0^*}(D)$.
- (ii) Se $z \in H^{-k_0}(D)$ para algum $k_0 > 1$. Então $H^{k_0}(z) \in D$. Defina $k_0^* := \min\{k \in \{2, \dots, k_0\} | H^k(z) \in D\}$. Então $H^k(z) \notin D, \forall k \in \{0, \dots, k_0^* - 1\}$. Então $H^{k_0^*}(z) = H_1^{k_0^*}(z) \in D$. Logo $z \in H_1^{-k_0^*}(D)$.

Logo $\mathbb{P} \subset \mathbb{B}$.

Por outro lado, seja $z \in \mathbb{B}$. Então podemos supor que $z \notin D \cap H_1(D) \cap H_1^{-1}(D)$. Logo, existe um $i \in \mathbb{Z}$ tal que $z \in H_1^i(D)$. Novamente, temos dois casos:

- (i) Se $z \in H_1^{k_0}(D)$ para algum $k_0 > 1$. Então $H_1^{-k_0}(z) \in D$. Seja $k_0^* := \min\{k \in \{2, \dots, k_0\} | H_1^{-k}(z) \in D\}$. Logo $H_1^{-k}(z) \notin D \cup H_1(D), \forall k \in \{0, \dots, k_0^* - 2\}$. Logo $H_1^{-(k_0^*-1)}(z) = H^{-(k_0^*-1)}(z) \in H(D)$. Logo $H^{-k_0^*}(z) \in D$.
- (ii) Se $z \in H_1^{-k_0}(D)$ para algum $k_0 > 1$. Então $H_1^{k_0}(z) \in D$. Seja $k_0^* := \min\{k \in \{2, \dots, k_0\} | H_1^k(z) \in D\}$. Logo, $H_1^k(z) \notin D, \forall k \in \{0, \dots, k_0^* - 2\}$. Daí, $H_1^{k_0^*} = H^{k_0^*}(z) \in D$.

Por tanto, $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}$. Se $p \in \mathbb{P}$ então $p \in H^{i_0}(D)$, para algum i_0 , logo existe um $x \in D$ tal que $z = H_{i_0}(x)$. Note que $H^{i_0-1}(x) \in \mathbb{P}$. Logo $z \in H(\mathbb{P})$. Se $z \in H(\mathbb{P})$, então existe um i_0 e um $x \in H^{i_0}(D)$ tal que $z = H(x)$ e daí, $z = H^{i_0+1}(x) \in \mathbb{P}$. Portanto, $\mathbb{P} = H(\mathbb{P})$. De forma similar provamos que $\mathbb{P} = H^{-1}(\mathbb{P}) = H_1^{-1}(\mathbb{P}) = H_1^{-1}(\mathbb{P})$. $\square$

Proposição 3.1.5. *Se D é um disco de poda, então $\Omega(H_1) \cap D = \emptyset$.*

Demonstração. Como o disco D é livre, se $z \in A_2 \cup A_3$ existe um aberto $V := S_1^{-1}(L)$ tal que $z \in V$ e

$$H_1^n(V) \cap V = H^n(L) \cap V \subset H^n(L) \cap D = \emptyset, \forall n \geq 1. \quad (3.13)$$

Logo $z \notin \Omega(H_1)$. Por tanto podemos supor que $z \in A_1$. Escolhemos V , uma vizinhança de z , tal que $V \subset U$. Então, pela proposição 3.1.1, $H_1^{-1}(V) = H^{-1}(V) \subset L_{H^{-1}(D)}$. Seja $z_1 \in V$. Então $H^{-1}(z_1) \in L_{H^{-1}(D)}$. Considere $n(z_1) \geq 0$ o primer inteiro positivo tal que $H^{-n(z_1)}(H^{-1}(z_1)) \in H(D)$. Então $H^{-n(z_1)-2}(H^{-1}(z_1)) \in H^{-1}(D)$ o qual é uma contradição porque $H^{-1}(D)$ é livre por H^{-1} . Por tanto $\forall n \geq 0$, temos que $H^{-n}(H^{-1}(z_1)) \notin H(D)$ o que implica que $H_1^{-n-1}(z_1) \notin H_1(D)$. Assim, temos provado que $H_1^{-n-2}(z_1) \notin D$. Novamente, pela proposição 3.1.1, $H_1^{-1}(z_1) = H^{-1}(z_1) \notin D$. Logo $H_1^{-n}(z_1) \notin D, \forall n \geq 1$. Como o ponto z_1 foi arbitrário, concluímos que $\forall n \geq 1, H_1^{-n}(V) \cap D = \emptyset$ o qual implica que $z \notin \Omega(H_1^{-1})$, mas sabemos que $\Omega(H_1) = \Omega(H_1^{-1})$. Por tanto $z \notin \Omega(H_1)$. $\square$

Corolário 3.1.1. *Se D é um disco de poda, então $\Omega(H_1) \cap \mathbb{P} = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que $p \in \Omega(H_1) \cap \mathbb{P}$ então, pela proposição 3.1.4, existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que: $p \in \Omega(H_1) \cap H_1^{k_0}(D)$. Dado que $\Omega(H_1)$ é H_1 -invariante ou H_1^{-1} -invariante temos que $H_1^{-k_0}(p) \in \Omega(H_1) \cap D$, isto é uma contradição com a proposição 3.1.5. $\square$

Definição 3.1.6. Seja $\Lambda(H_1) := \Omega(H) \setminus \mathbb{P}$. Observe que $\Lambda(H_1)$ é fechado, H -invariante e H_1 -invariante.

Resumindo temos o seguinte lema:

Lema 3.1.1. *Se D é um disco de poda então H_1 é uma **poda de H** , isto é:*

- (i) $\Omega(H_1) \subset \Lambda(H_1)$,
- (ii) $H_1|_{\Lambda(H_1)} = H$.

Demonstração. Pela construção, $\text{Supp}(S_t) = \overline{D}$ e $\Lambda(H_1) \cap D = \emptyset$. Note que $S_t|_{\partial D} = I_d, \forall t \in [0, 1]$. Daí, (ii) é válido. Se $z \in \mathbb{P}$, então, pelo corolário 3.1.1, temos que $z \notin \Omega(H_1)$. Se $z \in (\Omega(H))^c \setminus \mathbb{P}$ então $H^k(z) = H_1^k(z), \forall k \in \mathbb{Z}$. Assim, dado que $\Omega(H)$ se pode caracterizar como o conjunto de órbitas limitadas (Teorema 2.2.3), $z \notin K_{a,b}$ e, por tanto, pode acontecer dois casos: (a) Existe uma sequência $H^{n_i}(z)$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} |H_1^{n_i}(z)| = \infty$. Neste caso consideramos um número real R e um natural i_0 tal que $p := H_1^{n_{i_0}}(z) = H^{n_{i_0}}(z) \in (V_R \cup D)^c$, onde

$$V_R = \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} < R\}. \quad (3.14)$$

Usando um procedimento similar ao usado na prova da proposição 2.2.2, podemos mostrar que $p \notin \Omega(H_1)$ e, então, $z \notin \Omega(H_1)$. (b) Existe uma sequência $H^{-n_i}(z)$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} |H_1^{-n_i}(z)| = \infty$ e continuamos como no caso (a). Nos dois casos $z \notin \Omega(H_1)$. Logo, $\Omega(H_1) \subset \Omega(H) \setminus \mathbb{P}$. $\square$

Definição 3.1.7. A transformação H_1 é chamada o *homeomorfismo de poda de H associado ao disco de poda D* .

Lema 3.1.2. Com as mesmas hipóteses do lema 3.1.1, se $D_s = h(D \cap \Omega(H))$ e $\mathbb{P}_s := \cup_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^k(D_s)$ a frente de poda simbólico, então $h_s := h|_{\Lambda(H_1)}$ é uma conjugação entre $H_1|_{\Lambda(H_1)}$ e $\sigma|_{\Sigma_2 \setminus \mathbb{P}_s}$.

Demonstração. Dado que h é um homeomorfismo, então D_s é aberto e portanto $\Sigma_2 \setminus \mathbb{P}_s$ é fechado. Note que por definição, $h_s = h : \Lambda(H_1) \rightarrow (\Sigma_2 \setminus \mathbb{P}_s)$ é bijetora. Observe que $\Lambda(H_1)$ é compacto e h_s é contínua. Logo, h_s é um homeomorfismo. $\square$

3.1.4 Construção de uma isotopia C^∞

Nesta seção mostraremos a construção da C^∞ -difeotopia de poda. Também mostramos que neste caso existem variedades estáveis e instáveis locais em todo ponto de $\Lambda(H_1)$ e que em consequência o difeomorfismo de poda H_1 é hiperbólico.

Lembremos que as curvas que limitam o disco de poda D são variedades invariantes dadas pelas expressões

$$C := \{(\gamma_c(y), y) : y \in [y_0, y_1]\} \text{ and } E := \{(\gamma_e(y), y) : y \in [y_0, y_1]\} \quad (3.15)$$

onde $\gamma_1(y), \gamma_2(y) \in C^\infty$ dado que $H_{a,b}$ é um difeomorfismo C^∞ . Veja o teorema 2.1.1. Logo podemos escolher um ϵ_0 tal que as curvas

$$\alpha := \{(\alpha_1(y), y) : y \in [y_0, y_1]\} = \{(\gamma_c(y) + \epsilon_0, y) : y \in [y_0, y_1]\} \quad (3.16)$$

e

$$\beta := \{(\beta_1(y), y) : y \in [y_0, y_1]\} = \{(\gamma_e(y) - \epsilon_0, y) : y \in [y_0, y_1]\} \quad (3.17)$$

são bem definidas, se intersectam no interior do disco D e tais que $\alpha \subset L$ e $\beta \subset U$. Sejam $t_0^* < t_1^* \in (y_0, y_1)$ parâmetros onde α e β se intersectam. Definamos

$$A := \{(\gamma_c(y) + \epsilon_0, y), y \in [t_0^*, t_1^*]\} \text{ e } B := \{(\gamma_e(y) - \epsilon_0, y), y \in [t_0^*, t_1^*]\}$$

e seja K_1 o conjunto compacto limitado por A e B . O número $\epsilon_0 > 0$ é escolhido como sendo tal que as interseções das variedades estáveis e instáveis que estão em D ficam contidas em $\text{int}(K_1)$, e os segmentos de variedades estáveis H só intersectam B e os segmentos de variedades instáveis só intersectam A . Isto é possível pelas propriedades *ii*) e *iii*) da definição 3.1.1. Então, podemos encontrar um $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$\epsilon_1 < \min\{\text{dist}(z, z_1), z \in K_1, z_1 \in \partial D\}.$$

Dado este ϵ_1 , definimos os conjuntos:

$$K_2 := \{z \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(z, z_1) \leq \frac{\epsilon_1}{4}, \text{ para algum } z_1 \in K_1\}$$

e

$$G_2 := \{z \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(z, z_1) < \frac{\epsilon_1}{2}, \text{ para algum } z_1 \in K_1\}.$$

É claro que K_2 é compacto, G_2 é aberto e $K_1 \subset K_2 \subset G_2 \subset D$. Assim, tomamos uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{G_2, \mathbb{R}^2 \setminus K_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Logo podemos encontrar uma função $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda = 1$ em K_2 e $\text{Supp}(\lambda) \subset G_2$. Então definimos o campo vetorial:

$$X(x, y) := \begin{cases} \lambda(x, y)(\alpha_1(y) - \beta_1(y), 0) & \text{se } (x, y) \in G_2 \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (3.18)$$

Pela construção, X é um campo vetorial C^∞ . Seja $S_t(x, y)$ o fluxo gerado por $X(x, y)$.

Proposição 3.1.6. $S_t \in C^\infty$, $S_0 = I_d$, $S_1(\beta_1(y), y) = (\alpha_1(y), y)$.

Assim, a difeotopia C^∞ é definida por $H_t(x, y) := H \circ S_t(x, y)$. É fácil ver que, utilizando uma análise similar à da seção 3.1.3, H_1 satisfaz as conclusões dos lemas 3.1.1 e 3.1.2. Neste caso, a hiperbolicidade de H no conjunto $\Omega(H)$ ajuda-nos a demonstrar a hiperbolicidade de H_1 em $\Lambda(H_1)$.

Proposição 3.1.7. *Existe um $\epsilon_2 > 0$ tal que se $\epsilon < \epsilon_2$ e $p \in \Lambda(H_1)$ então: $W_\epsilon^s(p, H_1) = W_\epsilon^s(p, H)$ e $W_\epsilon^u(p, H_1) = W_\epsilon^u(p, H)$.*

Demonstração. Pela construção, se $p \in \Lambda(H_1)$ então $\text{dist}(p, \text{Supp}(S_t)) > \frac{\epsilon_1}{2}$. Tome $\epsilon_2 < \frac{\epsilon_1}{4}$. Seja $\epsilon \leq \epsilon_2$ e z tal que $d(H_1^n(p), H_1^n(z)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0$. Como $d(H_1^n(p), \text{Supp}(S_t)) \geq \epsilon_2$ então $d(H_1^n(z), \text{Supp}(S_t)) > \epsilon_2 - \epsilon$. Logo $H_1^n(z) = H^n(z)$. Daí segue que $W_\epsilon^s(p, H_1) = W_\epsilon^s(p, H)$. Da mesma maneira provamos que $W_\epsilon^u(p, H_1) = W_\epsilon^u(p, H)$. $\square$

Assim, provamos o teorema:

Teorema 3.1.1. H_1 é uma isotopia de poda C^∞ . Isto é

- (i) $\Omega(H_1) \subset \Lambda(H_1)$,
- (ii) $H_1|_{\Lambda(H_1)} = H$ é hiperbólico.

No que segue

toda transformação de poda H_1 associada a um disco D será um C^∞ -difeomorfismo hiperbólico em $\Lambda(H_1)$ e chamado difeomorfismo de poda.

3.2 Shifts de Markov para o difeomorfismo de poda H_1

Pela sub-seção 3.1.3 observamos que é possível construir difeomorfismos de poda com discos de poda homoclínicos. Nesta seção provaremos que existe um subshift de tipo finito associado à dinâmica de H_1 em $\Lambda(H_1)$ e mostramos um algoritmo que permite obter a partição de Markov.

O algoritmo começa com a partição canônica da ferradura a qual consiste de dois retângulos R_0 e R_1 . A partir dela construímos a chamada *partição de geração-0* para H_1 que consiste de dois retângulos $B_{(0,1)}$ e $B_{(0,2)}$. Com a partição de geração-0 obtemos uma nova partição, chamada *partição de geração 1*, de maneira que o conjunto $\Lambda(H_1)$ ainda esteja contido na união dos elementos da partição. Depois, *iteramos* a partição para satisfazer as condições da definição 2.1.5. Usando o fato que os pontos que dividem o bordo do disco D são homoclínicos, demonstramos que o algoritmo termina num número finito de passos. Antes, precisamos de algumas definições.

Definição 3.2.1. Se um segmento γ da variedade estável de H passa por D , então defina o *pseudo-segmento* de variedade estável de H_1 por $\gamma_1 = S_1^{-1}(\gamma)$. Se γ é um segmento de variedade estável, então o *lado estável* $l(\gamma)$ que passa por γ é a prolongamento de γ aos extremos instáveis superior e inferior da ferradura.

Definição 3.2.2. Uma região L está em *posição normal* na partição $\mathcal{P}$ se, dado um elemento $B \in \mathcal{P}$, ou $L \cap B = \emptyset$, ou $L \subset \text{int}(B)$.

3.2.1 Partição de geração 1

Lembre que os pontos que definem o disco de poda são $p_0 = 0^\infty 1_{s_{-T} \dots s_{-2}} 1 \cdot s_0 \dots s_N 10^\infty$ e $p_1 = 0^\infty 1_{s_{-T} \dots s_{-2}} 0 \cdot s_0 \dots s_N 10^\infty$. A partição de *geração 1* é construída da seguinte maneira:

- Sejam

$$R_0 = G(0^\infty, 0^\infty 1 \cdot 0^\infty, 0^\infty 1 \cdot 010^\infty, 0^\infty \cdot 010^\infty) \quad (3.19)$$

e

$$R_1 = G(0^\infty \cdot 110^\infty, 0^\infty 1 \cdot 110^\infty, 0^\infty 1 \cdot 10^\infty, 0^\infty \cdot 10^\infty) \quad (3.20)$$

os elementos da partição canônica da ferradura. Isto é, o retângulo R_0 corresponde ao símbolo 0 e o retângulo R_1 corresponde ao símbolo 1. Então a *partição de 0-geração* $\mathcal{P}_0$ para H_1 consiste dos conjuntos:

$$B_{(0,1)} := S_1^{-1}(R_0) \text{ and } B_{(0,2)} := S_1^{-1}(R_1) \quad (3.21)$$

- Considere o disco $H^{-1}(D)$ e os pontos:

$$H^{-1}(p_0) = 0^\infty 1_{s_{-T} \dots s_{-2}} \cdot 1 s_0 \dots s_N 10^\infty$$

$$H^{-1}(p_1) = 0^\infty 1_{s_{-T} \dots s_{-2}} \cdot 0 s_0 \dots s_N 10^\infty$$

$$H^{-1}(q_1) = 0^\infty 1_{s_{-T} \dots s_{-2}} \cdot 0 s_0 \dots \overline{s_N} 10^\infty$$

e

$$H^{-1}(q_0) = 0^\infty 1_{s_{-T} \dots s_{-2}} \cdot 1 s_0 \dots \overline{s_N} 10^\infty$$

Construa os retângulos limitados pelos pontos:

$$B_{(1,1)} := G(0^\infty, 0^\infty 1 \cdot 0^\infty, 0^\infty 1 \cdot 0 s_0 s_1 \dots s_N 10^\infty, 0^\infty \cdot 0 s_0 s_1 \dots s_N 10^\infty)$$

$$B_{(1,2)} := G(0^\infty \cdot 0 s_0 \dots \overline{s_N} 10^\infty, 0^\infty 1_{s_{-T} \dots s_{-2}} \cdot 0 s_0 \dots \overline{s_N} 10^\infty, 0^\infty 1_{s_{-T} \dots s_{-2}} \cdot 010^\infty, 0^\infty \cdot 010^\infty)$$

Figura 3.4: Partição de 1-geração para o disco de poda da figura 3.1.

$$B_{(1,3)} := G(0^\infty \cdot 110^\infty, 0^\infty 1s_{-T} \dots s_{-2} \cdot 110^\infty, 0^\infty 1s_{-T} \dots s_{-2} \cdot 1s_0 \dots \overline{s_N} 10^\infty, 0^\infty \cdot 1s_0 \dots \overline{s_N} 10^\infty)$$

$$B_{(1,4)} := G(0^\infty \cdot 1s_0 \dots s_N 10^\infty, 0^\infty 1 \cdot 1s_0 \dots s_N 10^\infty, 0^\infty 1 \cdot 10^\infty, 0^\infty \cdot 10^\infty)$$

Assim, definimos a *partição de 1-geração* como sendo

$$\mathcal{P}_1 := \{B_{(1,1)}, B_{(1,2)}, B_{(1,3)}, B_{(1,4)}\}. \quad (3.22)$$

Quando um segmento de variedade estável passa por D , use o pseudo-segmento de variedade estável de H_1 . Da construção temos que

$$\Lambda(H_1) \subset \bigcup_{i=1}^4 B_{(1,i)} \quad (3.23)$$

dado que nenhum ponto de D pertence ao conjunto $\Lambda(H_1)$, e

$$H_1(\partial_s B_{(1,i)}) \cap D = \emptyset, \forall i = 1, \dots, 4 \quad (3.24)$$

mas pode acontecer que $H_1(\partial_s B_{(1,i)}) \cap H^{-1}(D) \neq \emptyset$, para algum i . Por outro lado temos a seguinte:

Proposição 3.2.1. *Se D é disco de poda então a região $S_1^{-1}(L_D)$ está em posição normal na partição de geração 1.*

Demonstração. A região $S_1^{-1}(L_D)$ é limitada por pseudo-segmentos verticais

de variedade estável e não contém pontos de $S_1^{-1}(\Omega(H))$ e os retângulos da partição de geração 1 são formados por pseudo-segmentos de variedade estável, logo é suficiente mostrar que L_D está em posição normal nos retângulos definidos usando as variedades estáveis de H . Suponha que $L_D \cap B_{(1,i)} \neq \emptyset$. Se L_D contém pontos de $B_{(1,i)}^c$, então L_D contém um segmento de variedade estável o qual contradiz a definição de L_D . Se um bordo estável de L_D coincide com um bordo estável de $B_{(1,i)}$, então L_D têm pontos de $\Omega(H)$ acumulando-se internamente, o que é impossível dado que $L_D \cap \Omega(H) = \emptyset$. Logo, os bordos estáveis de L_D estão no interior de $B_{(1,i)}$. $\square$

3.2.2 Operações sobre os retângulos

Note que a partição de geração 1 não satisfaz $H_1(\partial_s B_i) \subset \bigcup_{j=1}^l \partial_s B_j$. Por outro lado, observe que os lados estáveis de $S_1^{-1}(L_D)$ definem uma região que não contém pontos de $S_1^{-1}(\Omega(H))$. Para os segmentos estáveis $H_1(\partial_s B_{(1,i)})$ vale que ou pertencem ao lado estável de outro retângulo ou pertencem a um lado estável de $S_1^{-1}(L_D)$.

Definição 3.2.3. Seja $B \in \mathcal{P}$ e $L \subset \text{int}(B)$. Então, a *operação* P_1 em B é a construção de dois retângulos B_1 e B_2 tais que os lados estáveis de B_i são os prolongamentos dos lados estáveis de L (Ver figura 3.5(a)).

Definição 3.2.4. Seja $B_1, B_2, \dots, B_k$ retângulos de $\mathcal{P}$ e L' uma região limitada superiormente por segmentos instáveis, tal que $L' \cap \Omega(H) = \emptyset$ tal que $L' \cap B_i \neq \emptyset$ e os lados estáveis de L' estão no interior de B_1 e B_k (a figura 3.5(b) mostra os retângulos com $k = 2$). Então, a *operação* P_2 de $B_1, B_2, \dots, B_k$ é a construção de $k + 1$ retângulos, reduzindo o lado instável inferior de cada B_i ao lado instável superior de L' e definindo B_{k+1} como o retângulo limitado superiormente pelo segmento instável que passa pelo lado instável inferior de L' , pelos lados estáveis de B_1 e B_k e inferiormente pelo segmento instável inferior (Ver figura 3.5(b)).

Sejam p e q dois pontos em Σ_2 . Então a *x-pseudo-distância simbólica* entre p e q , $d_x(p, q)$ é a distância entre as coordenadas x , isto é:

$$d_x(p, q) := d(0^\infty \cdot p_x, 0^\infty \cdot q_x) \quad (3.25)$$

Observe que quando p e q são pontos homoclínicos ao ponto 0^∞ que estão no mesmo segmento horizontal e são consecutivos, isto é, p é o sucessor imediato de q na ordem unimodal ou q é o sucessor de p , então σ duplica sua *x-pseudo-distância* e σ^{-1} divide-a por 2.

3.2.3 Algoritmo

- a1) Como $S_1^{-1}(L_D)$ está em posição normal na partição de geração 1, então aplicamos a *operação* P_1 ao retângulo que contém $S_1^{-1}(L_D)$, isto gera a *partição de geração 2*.
- a2) Iteramos a região $S_1^{-1}(L_D)$ por H_1 ou, que é o mesmo, L_D por H . Em cada iteração, $H^k(L_D), k \geq 0$ está em posição normal na partição de

Figura 3.5: Descrições pictóricas das operação P_1 (Ver figura 3.5(a)) e P_2 (Ver figura 3.5(b)).

geração $k + 1$ o qual permite aplicar a operação P_1 no retângulo que contém $H^k(L_D)$ e obter a *partição de geração* $k + 2$.

Observe que a x -pseudo-distância entre os lados estáveis de cada $H_1^k(L_D)$ cresce por um factor 2 o qual garante que $H^k(L_D)$ está em posição normal na partição de geração $k + 1$. Novamente, este processo permite construir partições tais que

$$H_1(\partial_s B_{(k+2,i)}) \cap D = \emptyset, \forall i \quad (3.26)$$

e

$$H_1(\partial_s B_{(k+2,i)}) \subset \bigcup_{j=1}^l \partial_s B_{(k+2,j)} \text{ ou } H_1(\partial_s B_{(k+2,i)}) \cap H^{-1}(D) \neq \emptyset. \quad (3.27)$$

Este processo termina depois de $N - 1$ iterados dado que $H^N(L_D)$ tem os lados estáveis nos segmentos estáveis que passam pelos pontos $0^\infty \cdot s_N 10^\infty$ e $0^\infty \cdot \overline{s_N} 10^\infty$ que já pertencem ao lado estável de algum retângulo $B_{(N+1, i_0)}$. Se pode provar que por este procedimento temos construído $4 + N$ retângulos da partição de geração $N + 1$ tais que $H(\partial_s B_i) \subset \bigcup_{j=1}^l \partial_s B_j$ ou $H(\partial_s B_i) \cap H_1^{-1}(D) \neq \emptyset$.

Com os retângulos da partição de geração $N + 1$, definiremos uma partição que satisfara:

$$H^{-1}(\partial_u B_i) \subset \bigcup_{j=1}^l \partial_u B_j \quad (3.28)$$

Além disso, esta nova partição também permitirá descartar a possibilidade que $H(\partial_s B_i) \cap H_1^{-1}(D) \neq \emptyset$.

Os retângulos da partição de geração $N + 1$ cujos bordos instáveis estão no bordo superior da ferradura já satisfazem a condição 3.28. Logo, só temos que utilizar aqueles cujo bordo não chega à parte instável superior da ferradura. Mas, eles são os retângulos cujo bordo superior está no bordo instável de $H^{-1}(D)$. Portanto,

a3) continuamos o processo iterando $H^{-1}(D)$ por H_1^{-1} ou, mais precisamente, $L_{H^{-1}(D)}$ por H_1^{-1} ;

a4) na iteração $k \geq 1$, $H_1^{-k}(L_{H^{-1}(D)})$ satisfaz as condições para aplicar a operação P_2 na partição de geração $N + k$.

Observe que a x -pseudo-distância entre $H_1^{-1}(p_1)$ e $H_1^{-1}(q_1)$ decresce por iterados negativos de H_1 num fator 0.5. Isto permite construir a *partição de geração* $N + 1 + k$ que contém $4 + N + k$ retângulos. Observe também que isto elimina a possibilidade que $H_1(\partial_s B_i) \cap H^{-1}(D) \neq \emptyset$. O processo termina depois de $T - 2$ iterados dado que os *vértices* de $H_1^{-(T-2)}(L_{H^{-1}(D)})$ estão nos lados instáveis que passam por $y = 0^\infty 1 \overline{s_{-T}}$ e $y = 0^\infty 1 s_{-T}$. Portanto temos construído a *partição de geração* $N + T - 1 (= N + 1 + T - 2)$ com $2 + N + T (= 4 + N + T - 2)$ retângulos. Da construção é claro que a condição 3.28 é satisfeita e que:

$$\Lambda(H_1) \subset \bigcup_{i=1}^{2+N+T} B_i. \quad (3.29)$$

Exemplo 3.2.1. Se D é o disco de poda da figura 3.1, isto é um disco homoclínico limitado pelos pontos $p_0 = 0^\infty 1111 \cdot 10110^\infty$ e $p_1 = 0^\infty 1110 \cdot 10110^\infty$, então a partição de 1-geração é a partição mostrada na figura 3.4. A partição de 2-geração, $\mathcal{P}_2$, é obtida aplicando a operação 1 ao retângulo $B_{(1,4)}$. O resultado está na figura 3.6. Logo, aplicamos novamente a operação 1 a $\mathcal{P}_2$ e construímos a partição de 3-geração, $\mathcal{P}_3$. Isto está mostrado na figura 3.7. Note que esta partição satisfaz a condição da equação 2.18. Assim, podemos aplicar a operação 2 a região $L_{H^{-1}(D)}$ para obter a última partição de 4-geração, $\mathcal{P}_4$, mostrada na figura 3.8. $\mathcal{P}_4$ é a partição de Markov procurada.

Figura 3.6: Partição de 2-geração para o disco de poda da figura 3.1.

Figura 3.7: Partição de 3-geração para o disco de poda da figura 3.1.

Figura 3.8: Partição de 4-geração para o disco de poda da figura 3.1.

3.3 Prova do teorema de poda

Nesta seção demonstramos que existe uma conjugação entre o difeomorfismo H_1 , restrito ao seu conjunto não errante, e σ em Σ_A onde A é a matriz de transição da partição obtida pelo algoritmo anterior. Também, provamos que $\Omega(H_1) = \Lambda(H_1)$.

Seja $\mathcal{P} = \{B_1, \dots, B_{2+T+N}\}$ a partição de geração $N + T - 1$. Se $k := N + T + 2$, defina a matriz $A \in M_k$ por: $A_{ij} = 1$ se $H_1(\text{int}(B_i)) \cap \text{int}(B_j) \neq \emptyset$ e $A_{ij} = 0$ em outro caso. Para cada $z \in \Lambda(H_1)$ podemos associar um elemento $a := \tau(z) \in \Sigma_A$ seguindo o *itinerário* de z entre os elementos de $\mathcal{P}$, isto é, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $H_1^i(z) \in B_{a_i}$. Com esta definição, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(H_1) & \xrightarrow{H_1} & \Lambda(H_1) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma_A} & \Sigma_A \end{array}$$

Isto é: $\tau \circ H_1 = \sigma_A \circ \tau$.

A seguinte é uma importante observação.

Observação 3.3.1. Da construção, para um retângulo B_i da partição de Markov $\mathcal{P}$ vale que ou $B_i \cap \Lambda(H_1) \subset R_0$ ou $B_i \cap \Lambda(H_1) \subset R_1$. Assim, existe um r tal que os índices podem ser organizados $B_{i_l} \cap \Lambda(H_1) \subset R_0, l = 1, \dots, r$ e $B_{i_l} \cap \Lambda(H_1) \subset R_1, l = r + 1, \dots, k$.

Definição 3.3.1. Defina $\psi : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_2$ da seguinte maneira: dado $a \in \Sigma_A$, $\psi(a) \in \Sigma_2$ é tal que $(\psi(a))_j = 0$ se $a_j \in \{i_1, \dots, i_r\}$ e $(\psi(a))_j = 1$ se $a_j \in \{i_{r+1}, \dots, i_k\}$. Dado $z \in \Lambda(H_1)$ com $\tau(z) = a$, defina $\psi^*(z) = \psi(\tau(z)) = \psi(a)$. Como $H_1 = H|_{\Lambda(H_1)}$, temos $\psi^*(z) = h(z)$ ou $\psi \circ \tau = h_s$. Lembre que $h_s = h|_{\Lambda(H_1)}$.

Teorema 3.3.1 (Teorema de poda). *Seja D um disco de poda e H_1 o difeomorfismo de poda associado. Então H_1 restrito $\Omega(H_1)$ é topologicamente conjugado ao shift σ_A no espaço Σ_A onde A é a matriz definida pelo algoritmo anterior.*

Demonstração. A prova consiste dos seguintes passos:

- (i) τ é injetora. Sejam $z_1, z_2 \in \Lambda(H_1)$ tais que $\tau(z_1) = \tau(z_2)$. Pela definição 3.3.1, temos $\psi(\tau(z_1)) = \psi(\tau(z_2))$ e daí, $h_s(z_1) = h_s(z_2)$. Logo, $z_1 = z_2$.
- (ii) τ é sobrejetora. Seja $a \in \Sigma_A$ uma sequência admissível. Considere $\psi(a)$ como na definição 3.3.1. Logo, existe um único $z \in \Omega(H)$ tal que $h(z) = \psi(a)$. Provaremos que $z \in \Lambda(H_1)$ e $\tau(z) = a$. Dado que $\mathcal{P}$ é uma partição de Markov [Shu87] temos que $\mathcal{F}_n := \cap_{s=-n}^n H_1^{-s}(B_{a_s})$ é uma sequência decrescente de compactos não vazios. Logo, a interseção $\mathcal{F} := \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ é não vazia. Seja $z^* \in \mathcal{F}$, então $\tau(z^*) = a$. Se $z^* \in \mathbb{P}$ então existe um $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $H_1^{n_0}(z^*) \in D$ e pela definição de disco de poda homoclínico temos que $H_1^{n_0}(z^*)$ tem órbita passada e/ou futura não limitada, isso é uma contradição com a construção de z^* , logo $z^* \in \mathbb{P}^c$. Portanto $H_1^i(z^*) = H^i(z^*)$ o que implica que z tem órbita limitada para H . Assim, pelo teorema 2.2.3, $z^* \in \Omega(H)$. Logo $h_s(z^*) = \psi(\tau(z^*)) = \psi(a) = h(z)$ e então $z^* = z$. Logo $z \in \Omega(H) \setminus \mathbb{P} = \Lambda(H_1)$.
- (iii) τ é contínua. Note que, de (ii), faz sentido definir a aplicação $\Phi : \Sigma_A \rightarrow \Lambda(H_1)$ da forma $\Phi(a) := \cap_{s=-\infty}^{\infty} H_1^{-s}(B_{a_s})$, isto é, Φ é a inversa de τ e é injetora e sobrejetora. Seja $a \in \Sigma_A$, U uma vizinhança de $z = \Phi(a)$ em $\Lambda(H_1)$ e $\{b^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em Σ_A que converge à a . Seja $\mathcal{F}_n$ os compactos definidos como em (ii); dado que a interseção dos $\mathcal{F}_n$ é só um ponto e $\mathcal{F}_n$ é uma sequência decrescente de compactos, existe um n_0 tal que para todo $m \geq n_0$, $\mathcal{F}_m \subset U$. Como b^n converge a a , existe um n_1 tal que:

$$\forall i \text{ com } |i| < n_0, \forall m > n_1 \text{ temos que } b_i^m = a_i. \quad (3.30)$$

Portanto, quando $m > n_1$, $\Phi(b^m) \in \mathcal{F}_{n_0}$, e por tanto esta em U . Como U e $\{b^n\}$ são arbitrários, Φ é contínua. Dado que Σ_A é compacto, Φ é um homeomorfismo.

Pelo lema 3.1.1 temos que $\Omega(H_1) \subset \Lambda(H_1)$. Por (i), (ii) e (iii) temos que todo ponto de $\Lambda(H_1)$ é não errante dado que todo ponto de Σ_A é não-errante (eles podem ser aproximados por órbitas periódicas). Logo $\Lambda(H_1) \subset \Omega(H_1)$. Portanto $\Omega(H_1) = \Omega(H) \setminus \mathbb{P}$. $\square$

Capítulo 4

Poda para o derivado da ferradura

A existência da região livre L num disco homoclínico D é a principal ferramenta para construir podas da ferradura que sejam diferenciáveis. Note que a definição de L depende dos fatos que as órbitas que definem o disco D são órbitas homoclínicas ao ponto 0^∞ e que as projeções destas sobre o eixo x são os extremos das lacunas de um conjunto de Cantor unidimensional. Isto não é o caso para outras órbitas periódicas pois um ponto periódico pode ser aproximado por órbitas que estão à direita e à esquerda dele.

Neste capítulo construiremos difeomorfismos de poda da ferradura utilizando órbitas homoclínicas e outros pontos periódicos. A ideia da construção é, como no capítulo 3, encontrar regiões livres limitadas por segmentos de variedades invariantes ao ponto periódico; sem embargo, pelo dito no parágrafo anterior, não podemos encontrar estas regiões diretamente na ferradura. Mas, fazendo uma construção, similar a aquelas para *derivados de Anosov*, podemos *abrir* o ponto periódico em três pontos tais que para um deles existem discos homoclínicos análogos aos discos homoclínicos associados ao ponto fixo 0^∞ . As transformações obtidas assim serão chamadas *derivadas da ferradura*. Veja a seção 4.1.

Feito isso, construir transformações de poda com esses discos será equivalente a definir regiões que sejam livres (de maneira análoga à região instável L do capítulo anterior) ou atratoras que serão definidas na seção 4.2. Assim, nesta mesma seção enunciamos um teorema de poda para o derivado da ferradura.

Então, no final deste capítulo, na seção 4.3, apresentamos um teorema de poda diferenciável que generaliza o teorema de poda para difeomorfismos hiperbólicos em superfícies.

4.1 Derivados da ferradura

4.1.1 Derivados de Anosov

O primeiro exemplo de um derivado de Anosov foi dado por Smale em [Sma67] fazendo um tipo de *cirurgia* a um difeomorfismo de Anosov f do toro $\mathbb{T}^2$. Esta cirurgia é feita mudando o difeomorfismo de Anosov numa pequena vizinhança *quadrada* ao redor do ponto fixo correspondente ao ponto $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$.

Inicialmente temos que o quadrado $Q = ABCD$ é levado linearmente por

f em $A'B'C'D'$ como na figura 6.2(a). Sem mudar o difeomorfismo fora de Q , podemos mudar f tal que temos três pontos fixos em Q como é ilustrado na figura 6.2(b): um ponto atrator x e dois pontos hiperbólicos.

Assim, $\mathbb{T}^2$ pode ser escrito como a união de uma variedade estável bi-dimensional do ponto x , $W^s(x)$, e um conjunto unidimensional f -invariante Λ . Escolhendo convenientemente a deformação, podemos fazer que Λ seja um conjunto hiperbólico.

(a) Vizinhança do ponto fixo.

(b) Deformação em Q .

Figura 4.1: Ponto fixo do difeomorfismo de Anosov f (Figura 6.2(a)) e o derivado de Anosov (Figura 6.2(b)).

4.1.2 Círculo num ponto periódico

Nesta seção faremos uma deformação similar à anterior em pontos periódicos da ferradura. Seguiremos de perto a construção de derivados de Anosov de [KH95, Seção 17.2].

Considere uma ferradura F tal que o seguinte se satisfaz:

- A1.** F é uma ferradura hiperbólica no plano de classe C^∞ .
- A2.** As variedades estáveis associadas a todos os pontos de $\Omega(F)$ são verticais e que as variedades instáveis são horizontais.
- A3.** A codificação simbólica em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de um ponto $(x, y) \in \Omega(F)$ é dada como na seção 2.1.3, isto é:

$$(h(x, y))_i = \begin{cases} 0 & \text{se } \pi_1(F^i(x, y)) < 0, \\ 1 & \text{se } \pi_1(F^i(x, y)) > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

- A4.** A partição canônica de F consiste de dois retângulos:

$$R_0 = G(0^\infty, 0^\infty 1 \cdot 0^\infty, 0^\infty 1 \cdot 010^\infty, 0^\infty \cdot 010^\infty) \quad (4.2)$$

e

$$R_1 = G(0^\infty \cdot 110^\infty, 0^\infty 1 \cdot 110^\infty, 0^\infty 1 \cdot 10^\infty, 0^\infty \cdot 10^\infty). \quad (4.3)$$

onde R_0 corresponde ao símbolo 0 e R_1 corresponde ao símbolo 1.

A5. O conjunto não-errante $\Omega(F)$ é igual ao conjunto de órbitas limitadas:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \{F^n(x, y)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ é limitada}\}. \quad (4.4)$$

Uma órbita periódica P de período N será descrita pelo seu código simbólico $c_P \in \{0, 1\}^N$ o qual é dado pelos primeiros N símbolos do itinerário do seu ponto que fica mais à direita p , assim:

$$\tau(p) = c_P^\infty \cdot c_P^\infty \quad (4.5)$$

Doravante $c_P = s_1 s_2 \dots s_N$. Da definição se $c_P \neq 0$, $s_1 = 1$. Defina os números $r_P(i) = \sum_{j=1}^i s_j$, ou seja, o número de 1's que existem até os primeiros i símbolos. Quando seja claro qual é a órbita periódica estudada, simplesmente escreveremos $r(i)$ em vez de $r_P(i)$.

Proposição 4.1.1. *Seja P uma órbita periódica de período N então:*

- i) Se $r_P(N)$ é par então $DF^N(p)$ tem autovalores positivos.*
- ii) Se $r_P(N)$ é ímpar então $DF^N(p)$ tem autovalores negativos.*

Demonstração. Segue dos fatos que:

- Se $(x, y) \in \Omega(H) \cap R_0$ então a derivada $DF(x, y)$ tem autovalores positivos,
- Se $(x, y) \in \Omega(H) \cap R_1$ então a derivada $DF(x, y)$ tem autovalores negativos.

□

Para $\epsilon > 0$ muito pequeno, considere um disco U centrado em p e de raio ϵ . Tome ϵ tão pequeno que em U não existam outros pontos periódicos de período N nem pontos de período $2N$, e tal que $f^i(U) \cap U = \emptyset, \forall i = \{1, \dots, N-1\}$. Isto é possível pois na ferradura só existe um número finito de pontos periódicos de um período dado. Em U introduzimos coordenadas locais (x_1, x_2) tal que

$$F^N(p + (x_1, x_2)) = p + (\lambda x_1, \mu x_2) \quad (4.6)$$

onde λ e μ são os autovalores de $DF^N(p)$ com $|\lambda| > 1$ e $0 < |\mu| < 1$.

Defina $\lambda_1 = \sqrt[N]{|\lambda|}$ e $\mu_1 = \sqrt[N]{|\mu|}$. Assim $\lambda = (-1)^{r(N)} \lambda_1^N$ e $\mu = (-1)^{r(N)} \mu_1^N$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que em U , o i -iterado da ferradura F é dado por

$$F^i(p + (x_1, x_2)) = F^i(p) + (-1)^{r(i)} (\lambda_1^i x_1, \mu_1^i x_2). \quad (4.7)$$

Para construir um derivado da ferradura, primeiro definimos, dado $\epsilon > 0$, uma C^∞ -função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\phi(-t) = \phi(t), \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (4.8)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq \epsilon/8, \\ 0 & \text{se } |t| \geq \epsilon/4, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\phi'(t) < 0, \text{ se } \epsilon/8 < t < \epsilon/4. \quad (4.10)$$

Agora tomemos $k \in \mathbb{R}$ suficientemente grande (e que será especificado posteriormente) e definamos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$f|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = F|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} \quad (4.11)$$

e

$$f(p + (x_1, x_2)) = F(p + (x_1, x_2)) + (-1)^{r(1)}(m\phi(kx_1)\phi(x_2)x_1, 0), \text{ em } U. \quad (4.12)$$

onde m é um número real a ser definido. O difeomorfismo f será chamado *derivado da ferradura* (DF).

Assim, como na equação 4.7, temos

$$f^i(p + (x_1, x_2)) = F^i(p) + (-1)^{r(i)}(\lambda_1^i x_1 + \lambda_1^{i-1} m \phi(kx_1)\phi(x_2)x_1, \mu_1^i x_2) \quad (4.13)$$

Por tanto as derivadas de f e f^N em U são:

$$Df(p + (x_1, x_2)) = \begin{bmatrix} g(x_1, x_2) & -mx_1\phi(kx_1)\phi'(x_2) \\ 0 & -\mu_1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$Df^N(p + (x_1, x_2)) = \begin{bmatrix} h(x_1, x_2) & (-1)^{r(N)}\lambda_1^{N-1}mx_1\phi(kx_1)\phi'(x_2) \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

onde

$$g(x_1, x_2) = -\lambda_1 - m\phi(x_2)(\phi(kx_1) + kx_1\phi'(kx_1)) \quad (4.16)$$

e

$$h(x_1, x_2) = \lambda + (-1)^{r(N)}\lambda_1^{N-1}m\phi(x_2)(\phi(kx_1) + kx_1\phi'(kx_1)) \quad (4.17)$$

A partir deste ponto, dividimos a construção em dois casos.

Caso 1: Se $r(N)$ é par.

Neste caso $\lambda > 1$ e $0 < \mu < 1$. Escolhemos m como sendo $m = \frac{\lambda_1(1-2\lambda)}{2\lambda} < 0$. Logo

$$f^N(p + (x_1, x_2)) = p + (\lambda x_1 + (\frac{1-2\lambda}{2})\phi(kx_1)\phi(x_2)x_1, \mu x_2) \quad (4.18)$$

Vamos encontrar os pontos N -periódicos de f em U . A equação

$$f^N(p + (x_1, x_2)) = p + (x_1, x_2) \quad (4.19)$$

é equivalente a

$$\lambda x_1 + \left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\phi(kx_1)\phi(x_2)x_1 = x_1, \text{ e } \mu x_2 = x_2 \quad (4.20)$$

Portanto um ponto N -periódico é $(x_1, x_2) = (0, 0)$ (que corresponde a p) e os outros são $(x^*, 0)$ e $(-x^*, 0)$ (que correspondem aos pontos $p + (x^*, 0)$ e $p - (x^*, 0)$) onde x^* é a solução positiva da equação

$$\phi(kx_1) = \psi(\lambda) \text{ com } \psi(\lambda) = \frac{2(1-\lambda)}{1-2\lambda}. \quad (4.21)$$

Note que a equação anterior tem solução pois, para $\lambda > 1$, $0 < \psi(\lambda) < 1$.

Para saber qual é a natureza destes pontos periódicos utilizamos a expressão 4.15 da derivada Df^N . Em particular

$$Df^N(p + (0, 0)) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Logo p é um ponto atrator para f . Também

$$Df^N(p \pm (x^*, 0)) = \begin{bmatrix} h(x^*, 0) & \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)kx^*\phi'(kx^*) & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Dado que $\lambda > 1$ e $t\phi'(kt) < 0$ temos que os pontos $p \pm (x^*, 0)$ são pontos sela.

Proposição 4.1.2. *O segmento aberto $\{p + (t, 0) : t \in (-x^*, x^*)\}$ centrado em p e o eixo vertical que passa por p estão contidos na variedade estável bi-dimensional de p , $W^s(p, f^N)$.*

Demonstração. Suponha que $0 < x < x^*$ então $\phi(kx) > \phi(kx^*)$. Dado que $\lambda > 1$ temos

$$\lambda x + \left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\phi(kx)x < x\left(\lambda + \left(\frac{1-2\lambda}{2}\right)\phi(kx^*)\right) = x.$$

Isto implica que $f^{nN}(p + (x, 0)) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$. Para $-x^* < x < 0$ a prova é a mesma.

Também $f^N(p + (0, t)) = p + (0, \mu t)$ o qual implica que $f^{nN}(p + (0, t)) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$. $\square$

Caso 2: Se $r(N)$ é ímpar.

Neste caso $\lambda < -1$ e $-1 < \mu < 0$. Defina $m = -\frac{\lambda_1(1+2\lambda)}{2\lambda} < 0$. Logo

$$f^N(p + (x_1, x_2)) = p + (\lambda x_1 - \left(\frac{1+2\lambda}{2}\right)\phi(kx_1)\phi(x_2)x_1, \mu x_2). \quad (4.24)$$

Fazendo uma análise similar ao caso anterior, provamos que existe um único ponto N -periódico atrator em U que corresponde ao ponto p . A equação para os pontos N -periódicos em U conduz às equações

$$x_1(\lambda - (\frac{1+2\lambda}{2})\phi(kx_1)\phi(x_2)) = x_1 \text{ e } \mu x_2 = x_2. \quad (4.25)$$

Uma solução é $(x_1, x_2) = (0, 0)$, que corresponde ao ponto p . Outras soluções devem ser $(x_1, 0)$ onde

$$\phi(kx_1) = \psi(\lambda) \text{ com } \psi(\lambda) = \frac{2(\lambda-1)}{2\lambda+1}. \quad (4.26)$$

A anterior equação não tem soluções pois para $\lambda < -1$ temos $\psi(\lambda) > 1$.

Pela escolha de m , a derivada de f^N em p é

$$Df^N(p + (0, 0)) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

mostrando que p é um ponto atrator.

Encontraremos os pontos de período $2N$. Seja

$$\sigma(x_1, x_2) = \lambda x_1 - (\frac{1+2\lambda}{2})\phi(kx_1)\phi(x_2)x_1. \quad (4.28)$$

Então $p + (x_1, x_2)$ é um ponto $2N$ -periódico se $x_2 = 0$ e

$$\sigma(\sigma(x_1, 0), 0) = x_1. \quad (4.29)$$

Seja $\tau(t) = \sigma(t, 0)$. Então temos que encontrar as soluções de $\tau^2(t) = t$. Note que τ é uma função ímpar e, dado que $\phi(t) \leq 1$ e $t\phi'(kt) < 0$, temos

$$\tau'(t) \leq -\frac{1}{2} - \frac{1+2\lambda}{2}tk\phi'(tk) < 0 \quad (4.30)$$

Logo τ^2 é uma função crescente. Note que $t = 0$ é a solução da equação que corresponde ao ponto p . Observe também que não existem soluções em $(0, \frac{\epsilon}{8k}]$ e em $[\frac{\epsilon}{4k}, \infty)$. Por tanto as soluções positivas estão em $[\frac{\epsilon}{8k}, \frac{\epsilon}{4k}]$. Dado que τ^2 é crescente e $\tau(\frac{\epsilon}{4k}) = \lambda^2 \frac{\epsilon}{4k} > \frac{\epsilon}{4k}$ e $\tau^2(\frac{\epsilon}{8k}) = \frac{\epsilon}{32k} < \frac{\epsilon}{8k}$, temos que, pelo teorema do valor intermediário, existe uma única solução t^* em $[\frac{\epsilon}{8k}, \frac{\epsilon}{4k}]$. Como τ é ímpar, a outra solução é $-t^*$.

Portanto existem dois pontos $p \pm (t^*, 0)$ de período $2N$. É fácil ver que $f^N(p + (t^*, 0)) = p - (t^*, 0)$ e $f^N(p - (t^*, 0)) = p + (t^*, 0)$. A derivada nestes pontos é

$$Df^{2N}(p \pm (t^*, 0)) = \begin{bmatrix} (-1 - k\frac{1+2\lambda}{2}t^*\phi'(kt^*))^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Isto mostra que estes pontos são tipo sela pois $k\frac{1+2\lambda}{2}t^*\phi'(kt^*) > 0$.

Proposição 4.1.3. *O segmento aberto $p + \{(t, 0), t \in (-t^*, t^*)\}$ e o eixo vertical que passa por p estão contidos na variedade estável bidimensional $W^s(p, f^N)$.*

Demonstração. A prova é similar à da proposição 4.1.2. $\square$

4.1.3 Hiperbolicidade de $\Omega(f)$ para f .

Definamos o conjunto $\Lambda_f := (R_0 \cup R_1) \setminus W^s(p)$. Se não há lugar a confusão, simplesmente escreveremos Λ em vez de Λ_f . É claro que $\Omega(f) \setminus \{p\} \subset \Lambda$. Observe que Λ é um conjunto compacto contido na união de R_0 e R_1 .

Nesta subseção provaremos que, escolhendo k convenientemente, em Λ existe um campo de cones para f^N ou para f^{2N} (dependendo de $r(N)$) e, portanto, pelo teorema abaixo de Newhouse [New04], $\Omega(f)$ é hiperbólico para f .

Teorema 4.1.1 (Newhouse). *Uma condição necessária e suficiente para que Λ seja uniformemente hiperbólico para f é que exista um inteiro $N > 0$ e um campo de cones invariante $\mathcal{C}$ tal que f^N expande e co-expande vetores em $\mathcal{C}$.*

Sejam $q_1 = p - (x^*, 0)$ e $q_1 = p + (x^*, 0)$ se N é par, ou $q_1 = p - (t^*, 0)$ e $q_2 = p + (t^*, 0)$ se N é ímpar. Das proposições 4.1.2 e 4.1.3 temos

Proposição 4.1.4. *As variedades unidimensionais $W^u(q_1, f)$ e $W^u(q_2, f)$ limitam a bacia de atração de p .*

Provaremos a seguinte proposição

Proposição 4.1.5. *Para k suficientemente grande Λ é um conjunto hiperbólico para f .*

Se um ponto $q \in \Lambda \setminus U$ então

$$\text{ou } Df(q) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\mu_1 \end{bmatrix} \quad \text{ou } Df(q) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Precisaremos a expressão da derivada de f^N em um ponto $q = (x, y)$ de Λ . Pela definição de f deduzimos que

$$Df^N(q) = \begin{bmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ 0 & \pm\mu \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Para os outros termos observamos o seguinte:

- a) Se $f^i(q) \notin U$ para $i = 0, N - 1$ então $A(x, y) = \pm\lambda$ e $B(x, y) = 0$.
- b) Se $q \in U$ então

$$A(x, y) = h(x_1, y_1) \text{ e } B(x, y) = (-1)^{r(N)} \lambda_1^{N-1} m x_1 \phi(k x_1) \phi'(x_2). \quad (4.34)$$

- c) Se existe $i \in \{1, \dots, N - 1\}$ tal que $f^i(q) \in U$ então

$$A(x, y) = \lambda + (-1)^{r(N)} \lambda_1^{N-1} m \phi(v) (\phi(ku) + ku \phi(ku)) \quad (4.35)$$

e

$$B(x, y) = (-1)^{r(N)} \lambda_1^{N-1-i} \mu_1^i \mu u \phi(ku) \phi'(u) \quad (4.36)$$

onde (u, v) são as coordenadas de $f^i(q)$ em U .

No que segue suponha que $r(N)$ é par.

Lema 4.1.1. *Existe $\lambda' > 1$ tal que $|A(x, y)| > \lambda'$ em Λ .*

Demonstração. Se q é como no caso **a**) a afirmação do lema é verdade. Suponha que q é como no caso **b**). Note que neste caso é suficiente mostrar que $h(x_1, x_2) > 1$ no complemento de um conjunto compacto de $R_0 \cup R_1 \setminus \Lambda = (R_0 \cup R_1) \cap W^s(p, f)$. Seja $V := \{(x_1, x_2) \in U : h(x_1, x_2) \leq 1\} = \bigcup_{(x_1, x_2) \in U} (V_{x_2} \times \{x_1\})$ onde $V_{x_2} = \{x_1 : h(x_1, x_2) \leq 1\}$. Note que $h(x_1, x_2) \leq 1$ se e somente se

$$\frac{d[t\phi(kt)]}{dt} \Big|_{t=x_1} \geq \frac{2(1-\lambda)}{1-2\lambda} \cdot \frac{1}{\phi(x_2)}. \quad (4.37)$$

Assim, dado que $\frac{d[t\phi(kt)]}{dt}$ é par temos que V_{x_2} é um intervalo simétrico para todo x_2 e, se $0 \leq y < x$ então $\phi(x) \leq \phi(y)$ e, por tanto, $V_x \subset V_y$. Lembre que

$$f^N(p + (x_1, x_2)) = p + \left(x_1 \left(h(x_1, x_2) - \left(\frac{1-2\lambda}{2} \right) \phi(x_2) \phi'(kx_1) kx_1 \right), \mu x_2 \right) \quad (4.38)$$

e que f^N preserva os níveis horizontais. Dado que

$$\lambda + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) \phi(x_2) \phi(kx_1) \geq \frac{1}{2} \quad (4.39)$$

temos que

$$\frac{1}{2} \leq h(x_1, x_2) - \left(\frac{1-2\lambda}{2} \right) \phi(x_1) \phi'(kx_1) kx_1 \leq 1. \quad (4.40)$$

Então, pela equação anterior, se $f^N(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2)$ e $f^N(V_{x_2} \times \{x_2\}) = V'_{x'_2} \times \{x'_2\}$ teremos que $V'_{x'_2} \subset V_{x'_2}$. Portanto, temos provado que $f^N(V) \subset V$.

Por outro lado, note que V_0 contem $x_1 = 0$, pois $h(0, 0) = 1/2$, e não contem $x_1 = x^*$ pois $h(x^*, 0) = 1 + \left(\frac{1-2\lambda}{2} \right) kx^* \phi(kx^*) > 1$. Logo existe uma vizinhança I de 0 tal que $V_t \subset W^s(p, f)$ para todo $t \in I$.

Assim, existe um n tal que $f^{nN}(V) \subset W^s(f, p)$ e portanto $V \subset W^s(f, p)$.

O caso **c**) segue utilizando um procedimento similar. A única diferença é que V está no ponto $f^{-i}(p)$. $\square$

Prova da proposição 4.1.5. . Desde que $\phi'(t)$ é limitada e $\phi < 1$ temos que existe uma constante C_1 tal que $|B(x, y)| < \frac{C_1 \epsilon}{4k}$. Dado que $A(x, y)$ é uma função limitada em Λ , existe M tal que $|A| < M$. Seja λ' como no lemma 4.1.1. Tome $0 < \gamma < 1$ e $\delta > 0$ tão pequenos tal que $\lambda' - \mu > \delta$ e $\lambda'^2 - \gamma^2 > 1 + 2\gamma\delta M$ e escolha k tão grande que $|B(x, y)| < \delta$.

Considere os cones horizontais da forma $C^u(q) = \{(u, v) : |v| < \gamma|u|\}$. Estes

cones são invariantes para f^N pois se $Df_q^N(u, v) =: (u', v')$ então:

$$|u'| = |Au + Bv| \geq |A||u| - |B||v| > \frac{\lambda'}{\gamma}|v| - \delta|v| = \frac{\lambda' - \delta\gamma}{\gamma\mu}|v'| \quad (4.41)$$

Como $\lambda' - \delta\gamma > \mu$ então $|u'| > \frac{1}{\gamma}|v'|$. Para ver que vetores nos γ -cones são expandidos notamos que

$$\begin{aligned} |u'|^2 + |v'|^2 &= (Au + Bv)^2 + \mu^2 v^2 \\ &\geq |A|^2|u|^2 - 2|A||B||u||v| + |B|^2|v|^2 + \mu^2|v|^2 \\ &\geq \lambda'^2|u|^2 - 2\gamma|A||B||u|^2 - \gamma^2|u|^2 + |v|^2 \\ &\geq (\lambda'^2 - 2\gamma\delta|A| - \gamma^2)|u|^2 + |v|^2 \\ &\geq (\lambda'^2 - 2\gamma\delta M - \gamma^2)|u|^2 + |v|^2 \\ &\geq \beta|u|^2 + |v|^2 > |u|^2 + |v|^2, \end{aligned}$$

onde $\beta > 1$ pela escolha dos parâmetros.

Similarmente podemos mostrar que cones verticais são invariantes por $D(f^N)^{-1}$ e que $D(f^N)^{-1}$ expande vetores nestes cones verticais. Portanto, a hiperbolicidade de f segue pelo teorema 4.1.1. $\square$

Se $r(N)$ é ímpar a prova da hiperbolicidade de Λ para f^N segue as mesmas ideias.

4.1.4 Relação entre $\Omega(f)$ e Σ_2 .

Note que R_0 e R_1 é uma partição de Markov para f . Assim, dada uma sequência simbólica $s = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_2$, o conjunto $\mathcal{O}_s := \cap_{i=-\infty}^{\infty} f^{-i}(R_{s_i})$ é um conjunto compacto não vazio. Defina $\mathcal{O} = \bigcup_{s \in \Sigma_2} \mathcal{O}_s$ então $\mathcal{O}$ contém a $\Omega(f)$, pois cada ponto fora de $R_0 \cup R_1$ é errante para f e portanto cada ponto de $\Omega(f)$ segue um itinerário em Σ_2 . Assim, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{f} & \mathcal{O} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \end{array}$$

onde Π é o itinerário de um ponto de $\mathcal{O}$ nos retângulos R_0 e R_1 . Note que $\Pi^{-1}(\{s\}) = \mathcal{O}_s$ e $f(\mathcal{O}_s) = \mathcal{O}_{\sigma(s)}$.

O problema é determinar quando $\mathcal{O}_s$ contém um único ponto de $\Omega(f)$. Em geral isto não é o caso: se $r(N)$ é par e $s = c_P^\infty$ então $\mathcal{O}_s$ contém o segmento $\{p + (t, 0) : t \in [-x^*, x^*]\}$. Mas, provaremos que, para a maioria das sequências, $\mathcal{O}_s$ é unitário e o único ponto que contém pertence a $\Omega(f)$.

Dada uma sequência $s \in \Sigma_2$ e $m \in \mathbb{N}$, definamos a *m-faixa estável* de s ,

$\mathcal{F}_m^s(s)$, pelo conjunto

$$\mathcal{F}_m^s(s) = \bigcap_{i=0}^m f^{-i}(R_{s_i}) \quad (4.42)$$

e a m -faixa instável de s pelo conjunto

$$\mathcal{F}_m^u(s) = \bigcap_{i=-m}^0 f^{-i}(R_{s_i}). \quad (4.43)$$

É claro que $\mathcal{O}_s = \mathcal{F}_\infty^s(s) \cap \mathcal{F}_\infty^u(s)$.

Proposição 4.1.6. *Para cada $s \in \Sigma_2$ e $m \in \mathbb{N}$, temos que:*

- a) $\mathcal{F}_m^s(s)$ é uma faixa vertical que cruza R_{s_0} ,
- b) a interseção de $\mathcal{F}_m^s(s)$ e toda linha horizontal em R_{s_0} é um intervalo horizontal contido em R_{s_0} ,
- c) $\mathcal{F}_m^u(s)$ é uma faixa horizontal de lados paralelos ao eixo x que cruza R_{s_0} ,
- d) $\mathcal{F}_\infty^u(s)$ é um intervalo horizontal que cruza R_{s_0} ,
- e) $\mathcal{O}_s = [a, b] \times \{y_s\}$ é um segmento horizontal em R_{s_0} , onde y_s depende unicamente de $\dots s_{-2}s_{-1}$.

Demonstração. Provaremos **a)** e **b)** juntos por indução. Se $m = 1$ então a afirmação é verdade pois $f^{-1} = F^{-1}$ em ∂R_i , para $i = 0, 1$, e $\partial_s R_i \cap f(U) = \emptyset$. Suponha que $\mathcal{F}_{m-1}^s(s)$ satisfaz a) e b), então $\mathcal{F}_m^s(s) = \mathcal{F}_{m-1}^s(s) \cap f^{-m}(R_{s_m})$ satisfaz a) pois $f = F$ em $\partial_u R_i$ e $f^{-m}(\partial_u R_i) = F^{-m}(\partial_u R_i)$, e satisfaz b) pois a segunda coordenada de f é igual a segunda coordenada de F .

A prova de **c)** e **d)** segue utilizando uma prova similar à anterior e lembrando que f contrai por um fator μ_1 a segunda coordenada.

O item **e)** segue por **b)** e **d)**. $\square$

Queremos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 4.1.7. *Seja $s \in \Sigma_2$.*

- a) *Se $s = \dots s_0 \dots s_n c_P^\infty$ então $\mathcal{O}_s = [r, t] \times \{y_s\}$ e $(r, t) \times \{y_s\} \subset W^s(p, f)$ onde $(r, y_s) \in W^s(p + (-x^*, 0))$ e $(t, y_s) \in W^s(p + (x^*, 0))$ ou viceversa.*
- b) *Se $s \neq \dots s_0 \dots s_n c_P^\infty$ então $\mathcal{O}_s$ é unitário.*

Para a sua prova precisamos do lema

Lema 4.1.2. *Seja $p = (p_x, p_y)$. Se $r(N)$ é par então $\mathcal{O}_{c_P^\infty} = \{p + (t, 0) : t \in [-x^*, x^*]\} \times \{p_y\}$. Se $r(N)$ é ímpar então $\mathcal{O}_{c_P^\infty} = \{p + (t, 0) : t \in [-t^*, t^*]\} \times \{p_y\}$.*

Demonstração. Provaremos para $r(N)$ par. O caso $r(N)$ ímpar é similar e a prova será omitida.

Seja $I = \{p + (t, 0) : t \in [-x^*, x^*]\} \times \{p_y\}$ e $s = c_P^\infty$. Dado que $I \subset \mathcal{O}_s$ e $\mathcal{O}_s$ é um intervalo, podemos supor que $\mathcal{O}_s = \{p + (t, 0) : t \in [a, b]\} \times \{p_y\}$ onde $a \leq -x^*$ e $x^* \leq b$. Suponha que $b > x^*$. Tome $q, \tilde{q}$ tais que $p_x + x^* < q_x < \tilde{q}_x < p_x + b$.

Se $f^{kN}([q, \tilde{q}] \times \{p_y\}) \cap W^s(p, f) = \emptyset$, $\forall k \geq 0$ então $f^{kN}([q, \tilde{q}] \times \{p_y\}) \subset \Lambda$; mas Λ é hiperbólico e por tanto (pelo lema 4.1.1)

$$|f^{kN}(q) - f^{kN}(\tilde{q})| \geq (\min |Df^N|^k) |q - \tilde{q}| \geq (\lambda')^k |q_x - \tilde{q}_x| \quad (4.44)$$

Seja $|R_i|_x$ a longitude do lado instável de R_i . Tomando k_0 tal que

$$|f^{k_0 N}(q) - f^{k_0 N}(\tilde{q})| > \max\{|R_0|_x, |R_1|_x\} \quad (4.45)$$

chegamos a uma contradição pois neste caso ou q e $\tilde{q}$ estão em retângulos diferentes ou um deles está fora de $R_0 \cup R_1$. Logo, existe k_1 tal que $f^{k_1 N}([q, \tilde{q}] \times \{p_y\}) \cap W^s(p, f) \neq \emptyset$.

Assim, existe um segmento $\mathcal{W} \subset [x^*, b] \times \{p_y\}$ tal que $f^{k_1 N}(\mathcal{W}) \subset W^s(p)$. Dado que $\mathcal{W} \subset \mathcal{O}_s$ e f preserva os níveis horizontais, existe um k_2 tal que $f^{k_2 k_1 N}(\mathcal{W}) \subset I$. Mas $f^N(I) = I = f^{-N}(I)$, logo $\mathcal{W} \subset I$. Isto é uma contradição. Por tanto $b = x^*$.

Da mesma maneira provamos que $a = -x^*$. $\square$

Prova da proposição 4.1.7. Sem perda de generalidade podemos supor que $s = \dots s_{-1} \cdot c_P^\infty$ então $\mathcal{O}_s = \mathcal{F}_\infty^s(c_P^\infty) \cap \mathcal{F}_\infty^u(s)$. Pela lema anterior, $\mathcal{F}_\infty^s(c_P^\infty)$ é uma faixa vertical em R_1 cuja interseção com a reta horizontal que passa por p é $\mathcal{O}_{c_P} = I$. Note que $f^{kN}(\mathcal{F}_\infty^s(c_P^\infty)) = \mathcal{F}_{kN}^u(c_P^\infty) \cap \mathcal{F}_\infty^s(c_P^\infty)$. Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kN}(\mathcal{F}_\infty^s(c_P^\infty)) = \mathcal{O}_{c_P}. \quad (4.46)$$

Tomando k suficientemente grande tal que $\mathcal{G} := f^{kN}(\mathcal{F}_\infty^s(c_P^\infty))$ está próximo de $\mathcal{O}_{c_P}$ e pela natureza sela dos pontos $p \pm (x^*, 0)$ temos que $\partial_s \mathcal{G}$ (bordo vertical) deve estar contido nas variedades estáveis de $p \pm (x^*, 0)$. Logo o bordo estável de $\mathcal{F}_\infty^s(c_P^\infty)$ (bordo vertical) está formado pelas variedades estáveis de $p \pm (x^*, 0)$. Então as seqüências $s = \dots s_{-1} \cdot c_P^\infty$ satisfazem **a**). Provaremos que são as únicas que satisfazem **a**).

Seja s tal que $\mathcal{O}_s \cap W^s(p) \neq \emptyset$ então existe um ponto $q \in \mathcal{O}_s$ tal que $\Pi(q) = \dots a_n c_P^\infty$. Mas $\Pi(q) = s$ então $s = \dots a_n c_P^\infty$ e, pelo feito antes, $\mathcal{O}_s$ satisfaz **a**).

Se s é tal que $\mathcal{O}_s \cap W^s(p) = \emptyset$ então $f^j(\mathcal{O}_s) \subset \Lambda$ e portanto a distancia entre dois pontos de $\mathcal{O}_s$ cresce pelo menos por λ' por iterados de f^N (lema 4.1.1). Isto implica que $\mathcal{O}_s$ é unitário e que $s \neq \dots s_0 \dots s_n c_P^\infty$, com o qual provamos **b**). $\square$

Seja $\Omega' = \Omega(f) \setminus \{p\}$, então $\Omega' \subset \Lambda$ e portanto é hiperbólico. Das definições temos que $\Omega' \subset \bigcup_{s \in \Sigma_2} \partial \mathcal{O}_s$. Desejamos demonstrar que $\Omega' = \bigcup_{s \in \Sigma_2} \partial \mathcal{O}_s$.

Lema 4.1.3. $\bigcup_{s \in \Sigma_2} \partial \mathcal{O}_s \subset \Omega'$.

Demonstração. Se $s \neq \dots s_0 \dots s_n c_P^\infty$ então pela proposição 4.1.7, $\partial \mathcal{O}_s = \mathcal{O}_s = \{o_s\}$. Dado $\epsilon > 0$ pequeno, escolha m tal que $|\mathcal{F}_m^s(s) \cap \mathcal{F}_\infty^u(s)| < \epsilon/2$. Logo, escolha m' tal que $\text{diam}(\mathcal{F}_m^s(s) \cap \mathcal{F}_{m'}^u(s)) < \epsilon$. Note que a sequência periódica t correspondente a repetição bi-infinita de $s_{-m'} \dots s_{-1} \cdot s_0 \dots s_m$ é diferente das sequências do tipo $\dots a_n c_P^\infty$. Assim, $\mathcal{O}_t = \{o_t\}$ onde o_t é um ponto $(m+m'+1)$ -periódico de f e $\text{dist}(o_s, o_t) < \epsilon$. Portanto, $o_s \in \Omega'$ pois em toda vizinhança de o_s existem pontos periódicos.

Se $s = c_P^\infty$ então $\partial \mathcal{O}_s = \{p - (x^*, 0), p + (x^*, 0)\} \subset \Omega'$.

Se $s = \dots s_0 \dots s_n c_P^\infty \neq c_P^\infty$ então $\partial \mathcal{O}_s = \{(r, y_s), (t, y_s)\}$ onde $(r, y_s) \in W^s(p - (x^*, 0))$ e $(t, y_s) \in W^s(p + (x^*, 0))$ ou viceversa. Sem perda de generalidade suponha que $s = \dots \cdot c_P^\infty$. Escolha m tal que se $\{(r', y_s), (t', y_s)\} := \partial(\mathcal{F}_\infty^u(s) \cap \mathcal{F}_m^s(s))$ então $|r' - r| < \epsilon/2$ e $|t - t'| < \epsilon/2$. Depois escolha m' tal que

$$\text{dist}(\partial(\mathcal{F}_{m'}^u(s) \cap \mathcal{F}_m^s(s)), \partial(\mathcal{F}_{m'}^u(s) \cap \mathcal{F}_\infty^s(s))) < \epsilon. \quad (4.47)$$

Seja s' a sequência periódica correspondente a repetição bi-infinita de $s_{-m'} \dots \cdot s_0 \dots s_m$. A sequência s' é diferente das sequências periódicas $\dots a_n c_P^\infty$ então $\mathcal{O}_{s'} = \{o_{s'}\}$. Logo $o_{s'}$ está próximo ou de (r, y_s) ou de (t, y_s) . Escolhendo m e m' convenientemente podemos fazer que $o_{s'}$ esteja próximo de (r, y_s) ou de (t, y_s) e assim, (r, y_s) e (t, y_s) pertencem a Ω' pois podem ser aproximados por órbitas periódicas. $\square$

Assim, para o derivado da ferradura f , cada sequência em Σ_2 corresponde a uma única órbita em $\Omega(f) = \Omega' \cup \{p\}$ se a sequência não está na variedade estável da sequência c_P^∞ . Em outro caso, cada sequência corresponde a dois (ou três, se a sequência é c_P^∞) pontos de $\Omega(f) = \Omega' \cup \{p\}$. Disto deduzimos que a configuração das variedades invariantes de f é dada como na ferradura com a variedade estável de p bifurcando em duas variedades estáveis: as correspondentes aos pontos selas $p \pm (x^*, 0)$ (no caso $r(N)$ par). Como na ferradura, as variedades invariantes de cada ponto são densas em $\Omega(f)$ e portanto a bacia de atração de um elemento da órbita P é densa em $\Omega(f)$.

4.2 O teorema de poda para o derivado da ferradura f

Uma vez construído o DF, podemos fazer podas do derivado da ferradura utilizando as mesmas ideias do capítulo 3, isto é, encontrando *regiões livres*; mas também, neste caso, existem outros tipos de regiões com as quais podemos construir difeos de poda. Estas serão chamadas regiões *atratoras*. Note que as condições de poda para o DF estão relacionadas as condições gerais de poda dadas em [dC99] (Veja a seção 2.3.2). Sem embargo, para discos de poda de DF's, a isotopia de poda é uma difeotopia obtida fazendo só uma difeotopia (ou um número finito de isotopias em caso de coleções de discos de poda).

A seguinte definição será importante.

Definição 4.2.1. Sejam A e B duas regiões simplesmente conexas tais que $A \subset B$. Dizemos que A é livre para f em B se $f^k(A) \cap B = \emptyset, \forall k \geq 1$. Dizemos

que A é atratora para f em B se existe um $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^i(A) \cap B = \emptyset$, $\forall i = 1, \dots, j-1$ e $f^j(A) \subset A$. Podemos fazer as mesmas definições para f^{-1} substituindo f por f^{-1} .

Seja f o difeomorfismo DA, como na seção 4.1, construído utilizando a órbita periódica de código c_P . A partir de f podemos definir dois tipos de discos de poda.

4.2.1 Tipo periódico-homoclínico

Seja D um disco limitado por um segmento de variedade estável do ponto $p \pm (x^*, 0)$ e um segmento de variedade instável do ponto 0^∞ ; ou seja, D é como um disco homoclínico do capítulo 3, limitado por variedades invariantes e simétrico em relação a uma horizontal traçada no meio do quadrado que define a ferradura, mas com o lado estável pertencendo a variedade estável de $p \pm (x^*, 0)$. Daremos condições para que um destes discos seja de poda. Como na definição de disco homoclínico, podemos definir a *região instável* L de D limitada por segmentos de variedade estável (um deles é o bordo estável de D) e que não contém pontos do conjunto não errante. Definimos também a *região* U limitada pelo bordo instável de D e outro segmento de variedade instável ao 0^∞ tal que não existem pontos do conjunto não-errante em U (Veja as figuras 4.2(a) e 4.2(b)). Assim L e U satisfazem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(L) = p \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(U) = \infty \quad (4.48)$$

Temos dois casos.

Caso 1:

No primeiro caso D é um disco de poda se L é livre para f em D e U é livre para f^{-1} em D . A figura 4.2(a) mostra uma representação de um destes discos. A região L é a região $AGEFHBCDA$ e a região U é $AGHB CFEDA$. Na figura 4.3 mostramos um exemplo destes discos quando o ponto periódico no qual construímos o derivado da ferradura tem codificação simbólica $(101)^\infty$.

Caso 2:

Neste caso D é um disco de poda se L é uma região atratora para f em D e se U é livre para f^{-1} em D . Neste caso, o ponto p está em L . Observe que $j = N$ ou $j = 2N$ onde N é o período da sequência c_P . Na figura 4.2(b) mostramos um destes discos. O ponto p está representado por um quadrado azul. A região L é a região $AGEFHBCDA$ e a região U é $AGHB CFEDA$. Na figura 4.4 mostramos um exemplo destes discos quando o ponto periódico utilizado para construir o DF é $(101)^\infty$.

Figura 4.2: Discos do tipo periódico homoclínico. A figura 4.2(a) corresponde a uma região livre e a figura 4.2(b) é quando L é atratora.

Figura 4.3: Exemplo

4.2.2 Tipo periódico-periódico

Sem perda de generalidade podemos supor que as variedades estáveis de pontos hiperbólicos de f são verticais e que as variedades instáveis são horizontais.

Escolhendo *outra órbita periódica* Q de período N_1 , podemos definir novamente um derivado de f modificando a variedade instável de q , onde q é o ponto de maior altura da órbita Q . Isto é, modificando a coordenada local y em q .

O difeomorfismo obtido depois desta nova deformação, chamado novamente de f , tem três novos pontos numa vizinhança de q : um ponto repulsor q e dois pontos hiperbólicos $q \pm (0, y^*)$. Fazendo uma análise similar a subseção 4.1.4

Figura 4.4: Exemplo.

podemos mostrar que existe uma semiconjugação, finita a um, entre $\Omega(f)$ e Σ_2 .

Os discos homoclínicos para este f , então, são limitados por um segmento de variedade estável do ponto $p \pm (x^*, 0)$ e um segmento da variedade instável de $q \pm (0, y^*)$.

Desta vez, as regiões L e U são definidas utilizando segmentos da variedade estável de $p \pm (x^*, 0)$ e segmentos da variedade instável de $q \pm (0, y^*)$, respectivamente; e tais que não existem pontos do conjunto não errante de f em L e em U . Então elas satisfazem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(L) = p \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} f^{-k}(U) = q. \quad (4.49)$$

As condições para que um disco homoclínico seja de poda estão discriminadas nos seguintes casos. Em todos eles a região L é a região $AGEFHBCDA$ e a região U é $AGHBCFEDA$.

Caso 1:

D é um disco de poda se L é livre para f em D e U é livre para f^{-1} em D . Veja figura 4.5(a).

Caso 2:

D é um disco de poda se L é atratora para f em D e U é livre para f^{-1} em D . Veja figura 4.5(b).

Caso 3:

D é um disco de poda se L é livre para f em D e U é atratora para f^{-1} em D . Veja figura 4.6(a).

Figura 4.5: Discos do tipo periódico-periódico.

Caso 4:

D é um disco de poda se tanto L como U são atratoras em D para f e f^{-1} , respectivamente. Veja figura 4.6(b).

Figura 4.6: Discos do tipo periódico periódico-periódico.

Em todos estes caso, se L é atratora para f então $f^N(L) \subset L$ ou $f^{2N}(L) \subset L$; e se U é atratora para f^{-1} então $f^{-N_1}(U) \subset U$ o $f^{-2N_1}(U) \subset U$.

4.2.3 O Teorema de Poda para o derivado da ferradura

Em todos os casos anteriores podemos definir uma difeotopia, suportada em D que é uma difeotopia de poda. Esta difeotopia é definida por um campo C^∞

como na seção 3.1.4 seguindo a ideia da isotopia de poda: empurrar a dinâmica interessante de D na região livre ou atratora para iterados passados ou futuros. Seja $\mathbb{P} := \cup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(D)$, a frente de poda gerada por D .

Teorema 4.2.1. *Dado um disco de poda homoclínico, existe uma difeotopia f_t , com $f_0 = f$, tal que f_1 , o difeo ao final da difeotopia, é um difeo de poda, isto é*

- i) $\Omega(f_1) = (\Omega(f) \setminus \mathbb{P}) \cup \text{Orb}(p)$ (unido à $\text{Orb}(q)$ quando for o caso),
- ii) $\Omega(f_1)$ é hiperbólico tipo sela (exceto em p que é atrator e q que é repulsor).

Demonstração. Faremos a prova para o caso 4 do tipo periódico-periódico. Veja a figura 4.7. Note que a variedade estável $W^s(p, F)$ do ponto p pela ferradura F é invariante por f . Esta variedade está representada por uma linha vertical pontilhada. O mesmo pode ser dito para a variedade instável $W^u(q, F)$ do ponto q . Esta variedade é a linha horizontal pontilhada. Assim, suponha que o disco de poda D' é a região limitada por estas curvas pontilhadas, ou seja, a região definida pelos pontos A e B na figura. Os pontos p e q são os quadrados em azul. Depois utilizamos a construção da isotopia C^∞ da seção 3.1.4 no disco D' .

Podemos ver que todo ponto em D' é errante para f_1 pois ou estão na bacia de atração do ponto p para f , ou estão na bacia de atração do ponto q para f^{-1} . O mesmo é verdade para os pontos que nunca entram em D' e que são errantes para f : Eles estão na bacia de p para f , ou na bacia de q para f^{-1} , ou convergem a ∞ por iterados positivos de f ou convergem a ∞ por iterados negativos de f . Logo

$$\Omega(f_1) \subset (\Omega(f) \setminus \mathbb{P}) \cup \text{Orb}(p) \cup \text{Orb}(q). \quad (4.50)$$

Seja $z \in \Omega(f) \setminus \mathbb{P}$, então dada qualquer vizinhança V de z , existe um k_V tal que $f^{k_V}(V) \cap V \neq \emptyset$. Suponha que V é tão pequeno que $D' \cap V = \emptyset$. Dado que $z \notin \mathbb{P}$, então para cada i existe um conjunto $M_i \subset V$ contendo a z tal que $f^j(M_i) \cap D' = \emptyset$ para todo $j = 0, \dots, i$. Assim, existe um $M_{k_V} \subset V$ contendo a z tal que $f^j(M_{k_V}) \cap D' = \emptyset$ para todo $j = 0, \dots, k_V$. Então $f^{k_V}(M_{k_V}) \cap V \neq \emptyset$. Isto implica que $f_1^{k_V}(M_{k_V}) \cap V \neq \emptyset$ e portanto $f_1^{k_V}(V) \cap V \neq \emptyset$. Assim, z é não-errante para f_1 .

Outra maneira de demonstrar que todo ponto em $\Omega(f) \setminus \mathbb{P}$ é não-errante para f_1 é observando que todo ponto em $\mathbb{P}$ corresponde a uma sequência que possui certos blocos simbólicos de 0's e 1's. Assim, se $z \in \Omega(f) \setminus \mathbb{P}$, a sua sequência simbólica $s(z) = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ não possui tais blocos. Logo, podemos construir pontos f_1 -periódicos z_n muito próximos de z pegando um bloco b_n muito grande de $s(z)$ e repetindo-lo infinitas vezes para formar uma sequência periódica $s^n = b_n^\infty$, tal que $s(z_n) = s^n$. Portanto, z está em $\Omega(f_1)$. □

Figura 4.7: Disco de poda.

4.3 Teoria de poda em superfícies

Nesta seção faremos a construção de difeomorfismos de poda em superfícies. Depois do feito nas seções anteriores, fica claro qual é o processo a seguir para definir as propriedades dos discos de poda que permitam construir difeos de poda: *Encontrar regiões livres e atratoras*.

Seja $f : X \rightarrow X$ um difeomorfismo C^∞ de uma superfície compacta X e hiperbólico no seu conjunto não errante $\Omega(f)$, o qual está formado por um conjunto tipo sela Λ e uma quantidade finita de pontos periódicos atratores e repulsores. Sejam p e q dois pontos selas periódicos de períodos N_1 e N_2 . Como na seção 4.2, um *disco homoclínico* D será um domínio simplesmente conexo em X limitado por um segmento da variedade estável de p , $\gamma^s(p)$, e um segmento da variedade instável de q , $\gamma^u(q)$.

Definição 4.3.1. O disco homoclínico D é um *disco de poda* se satisfaz as condições da definição 2.3.3 da seção 2.3.2 onde $\gamma^s(p)$ e $\gamma^u(q)$ são os lados C e E , ou seja, D satisfaz as condições de [dC99].

Se o segmento $\gamma^s(p)$ não tem pontos do conjunto $\Omega(f)$ acumulando-se internamente, então podemos definir uma região livre ou atratora L . Se não for o caso, construímos um *derivado de f* , ao qual novamente chamamos de f , para abrir o ponto p em três pontos e poder definir a região L , de maneira similar ao que fizemos nas seções 4.1 e 4.2.

O mesmo procedimento anterior pode ser feito para o ponto q . Se $\gamma^u(q)$ não tem pontos de $\Omega(f)$ acumulando-se internamente então podemos definir a região livre ou atratora U para f^{-1} . Se não for o caso, fazemos a construção do derivado de f ao redor do ponto q .

Tendo gerado as regiões L e U e tomando coordenadas nas quais $\gamma^s(p)$ e $\gamma^u(q)$ sejam graficos sobre o eixo y , podar o difeomorfismo f significa definir a difeotopia f_t como na seção 3.1.4.

O teorema abaixo, cuja prova será omitida pois segue as ideias que temos utilizado ultimamente, vem a ser o teorema de poda diferenciável para superfícies.

Teorema 4.3.1. *Seja f_0 um difeomorfismo hiperbólico e seja D um disco de poda. Então existe uma difeotopia $f_t: f_0 \simeq f_1$ tal que f_1 é hiperbólico e $\Omega(f_1) = \Omega(f) \setminus \cup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(D)$.*

Se para o difeomorfismo de poda f_1 podemos encontrar novamente um disco de poda limitado por segmentos de variedades invariantes de dois pontos selas, continuamos podando e construindo derivados do difeomorfismo inicial. Isto permite definir a *família de poda diferenciável* $\mathcal{P}(f)$: começando com um difeo f como na hipótese do teorema anterior (não apenas a ferradura), podemos repetidas vezes (um número finito de vezes) e tomamos a coleção de todas estas podas. Observe que desta forma obtemos uma construção indutiva: após podarmos uma primeira vez, o nosso procedimento de poda pode ser aplicado novamente e assim indutivamente.

Parte II

Aplicações na família de Hénon

Capítulo 5

Frentes de poda na família de Hénon

Neste capítulo apresentamos conexões entre a teoria de poda e a dinâmica na família de Hénon. Na seção 5.1 demonstramos que próximo de transformações de Hénon com *entropia maximal*, existem difeomorfismos de poda. Isto é possível pois neste caso podemos escolher um disco de poda com diâmetro muito pequeno tal que o difeomorfismo de poda esteja muito próximo da transformação de Hénon na topologia C^0 .

Na seção 5.2 discutimos quais deveriam ser as relações entre a família de Hénon complexa e teoria de poda. Estas estão baseadas nos conceitos que temos introduzido no capítulo 3 e estão relacionadas com certas monodromias no conjunto de ferraduras complexas hiperbólicas denominado o *lugar de ferraduras*. Assim, sob a condição do teorema 5.2.3, uma transformação de poda pode ser conjugada a um elemento da família de Hénon. Nesta seção também provamos a CFP para alguns parâmetros da família de Hénon utilizando os trabalhos de Zin Arai [Ara07a, Ara07b].

Os discos de poda neste capítulo serão como os discos homoclínicos do capítulo 3.

5.1 Perturbações de transformações de Hénon

Em [BS04, BS06b] Eric Bedford e John Smillie estudaram transformações de Hénon com *entropia maximal*. Uma transformação de Hénon H_{a_0, b_0} tem *entropia maximal* se a entropia topológica $h_{top}(H_{a_0, b_0})$ é igual a $\log 2$. Eles demonstraram que neste caso ou H_{a_0, b_0} é hiperbólica e topologicamente conjugada a uma ferradura completa ou possui uma órbita de tangências homoclínicas quadráticas entre as variedades estáveis e instáveis de um ponto fixo a qual ocasiona a perda de hiperbolicidade (Veja [BS04, BS06b]). Da análise das variedades estáveis e instáveis do ponto 0^∞ , Ulrich Hoensch [Hoe08] concluiu que, no segundo caso, a tangência quadrática acontece entre os pontos $0^\infty 10 \cdot 10^\infty$ e $0^\infty 11 \cdot 10^\infty$ na codificação canônica da ferradura. Neste caso, a primeira tangência é a primeira bifurcação. Com estes fatos demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 5.1.1. *Seja H_{a_0, b_0} uma transformação de Hénon com entropia maximal que não é hiperbólica. Então, existe um C^1 -aberto $\mathcal{U} \neq \emptyset$ em $\text{Diff}^1(\mathbb{R}^2)$ tal que:*

- (a) dado $\epsilon > 0$, existe $f_\epsilon \in \mathcal{U}$ tal que $d_{C^0}(H_{a_0, b_0}, f_\epsilon) < \epsilon$,
- (b) se $f \in \mathcal{U}$ então $\Omega(f)$ é hiperbólico e existe um disco de poda D_f tal que f é topologicamente conjugado ao difeomorfismo de poda H_{D_f} associado a D_f como no teorema de poda quando ambos estão restritos aos seus conjuntos não errantes.

Demonstração. Seja H_{a_0, b_0} uma transformação de Hénon com entropia maximal que não é hiperbólica. Pelo teorema 2.2.4 e a proposição 2.2.5, H_{a_0, b_0} possui uma tangência homoclínica nos pontos $0^\infty 10 \cdot 10^\infty$ e $0^\infty 11 \cdot 10^\infty$. Dado $\epsilon > 0$, é suficiente mostrar que existem pontos homoclínicos p_0 e p_1 , próximos da tangência $t := 0^\infty 10 \cdot 10^\infty = 0^\infty 11 \cdot 10^\infty$, definindo um disco de poda D tal que $\text{diam}(H(D)) < \epsilon$.

Por 2.2.5, se $\mathcal{T} := \text{Orb}(t)$ denota o conjunto de tangências homoclínicas entre $W^u(K_{a,b})$ e $W^s(K_{a,b})$ então $K_{a,b}$ é totalmente desconexo numa vizinhança de cada ponto de $K_{a,b} \setminus \mathcal{T}$ e estas desconexões ocorrem em órbitas homoclínicas ao 0^∞ , então é possível construir discos homoclínicos que passam por órbitas homoclínicas. Observe que as propriedades de poda não são modificadas se existe uma tangência homoclínica entre os pontos $0^\infty 10 \cdot 10^\infty$ e $0^\infty 11 \cdot 10^\infty$. Tome $N, M \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes tal que os pontos $p_0 := 0^\infty 110^N 11 \cdot 10^M 110^\infty$ e $p_1 := 0^\infty 110^N 10 \cdot 10^M 110^\infty$ definem um disco de poda $D_{N,M}$ que satisfaz $\text{diam}(H(D_{N,M})) < \epsilon$. Use a construção da seção 3.1.4 para construir um difeomorfismo de poda H_1 como no teorema de poda associado a $D_{N,M}$. Logo, $d_{C^0}(H_1, H) < \epsilon$. Assim, pela proposição 3.1.7, H_1 é hiperbólico no conjunto $\Omega(H_1)$. Pelo teorema 2.1.2 existe uma C^1 -vizinhança $\mathcal{U}_1$ de H_1 tal que para cada g em $\mathcal{U}_1$ existe um conjunto g -invariante Λ' tal que $g|_{\Lambda'}$ é topologicamente equivalente a $H_1|_{\Omega(H_1)}$. A vizinhança $\mathcal{U}_1$ é escolhida de maneira que cada $g \in \mathcal{U}_1$ tem como conjunto não errante a Λ' .

Repetindo a construção do paragrafo anterior para todos os discos de poda D cujos pontos homoclínicos estão suficientemente próximos da tangência, podemos afirmar que existe uma transformação de poda $H_D \in \text{Diff}^\infty(\mathbb{R}^2)$ suficientemente próxima de H_{a_0, b_0} e uma C^1 -vizinhança $\mathcal{U}_D$ de H_D tal que cada $g \in \mathcal{U}_D$ é topologicamente conjugado a H_D quando ambos estão restritos a seus conjuntos não errantes. Portanto, se definirmos

$$\mathcal{U} := \bigcup_D \mathcal{U}_D, \quad (5.1)$$

temos que $\mathcal{U}$ satisfaz as conclusões do teorema. $\square$

5.2 Frentes de poda na família de Hénon complexa

A família de Hénon

$$H_{a,b}(x, y) = (a - x^2 - by, x) \quad (5.2)$$

tem uma extensão natural a $\mathbb{C}^2$ considerando $H_{a,b}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ com $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, a qual tem sido muito utilizada por vários autores, especialmente por Bedford

e Smillie [BS04, BS06b], Hubbard e Oberste-Vorth [HOV95, HOV94], Fornaes e Sibony [FS92]. Uma maneira de estudar a dinâmica de uma transformação de Hénon é ver qual é a topologia do *lugar de ferraduras*, que é conjunto de parâmetros $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tais que o conjunto de órbitas limitadas de $H_{a,b}$ constitui uma ferradura complexa hiperbólica completa (veja [BS06a]).

Nesta seção observaremos algumas relações entre a teoria de poda e o lugar de ferraduras. Estas são uma consequência do trabalho de Arai [Ara07b] sobre monodromias no lugar de ferraduras complexas e nosso trabalho prévio sobre a teoria de poda desenvolvido no capítulo 3. Apresentamos, no teorema 5.2.3, uma condição que implica que uma transformação de Hénon é uma transformação de poda da ferradura e que permite demonstrar a CFP em alguns valores do plano de parâmetros.

5.2.1 O lugar de ferraduras

Utilizaremos as notações do artigo de Arai [Ara07b]. Seja $K_{a,b}^{\mathbb{C}}$ o conjunto de órbitas limitadas

$$K_{a,b}^{\mathbb{C}} = \{p \in \mathbb{C}^2 \mid \{H_{a,b}^n(p)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ é limitada}\} \quad (5.3)$$

e $K_{a,b}^{\mathbb{R}} := K_{a,b}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$ a sua interseção com $\mathbb{R}^2$. Seja $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ o conjunto de parâmetros $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tais que a restrição de $H_{a,b}$ a $K_{a,b}^{\mathbb{C}}$ é topologicamente conjugada ao 2-shift (σ, Σ_2) . $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ é chamado o *lugar de ferraduras*. De modo similar, seja $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ o conjunto de parâmetros $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a restrição de $H_{a,b}$ a $K_{a,b}^{\mathbb{R}}$ é topologicamente conjugado ao 2-shift.

Devaney e Nitecki demonstraram que $\mathcal{H}^{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ e que contém o conjunto $\text{DN} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > (5 + 2\sqrt{5})(1 + |b|)^2/4, b \neq 0\}$; além disso, eles mostraram que se $(a, b) \in \text{EMP} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a < -(1 + |b|)^2/4\}$ então $K_{a,b}^{\mathbb{R}} = \emptyset$ (veja [DN79]).

Hubbard e Oberste-Vorth demonstraram que $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ contém o conjunto $\text{HOV} := \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a| > 2(1 + |b|)^2, b \neq 0\}$ (veja [OV87]). Note que $\text{DN} \subset \text{HOV}$.

Em [Ara07b], Arai demonstrou que existem parâmetros $(a, b) \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$ nos quais $K^{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ mas $H_{a,b}$ restrito a $K^{\mathbb{R}}$ não é conjugado ao 2-shift. Estes parâmetros foram chamados *parâmetros de tipo-3* (Veja [BS06a]). Também em [BS06a], Bedford e Smillie exibiram uma maneira de conectar distintas componentes conexas do *lugar real de ferraduras*, $\mathcal{H}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$, usando laços em $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ que começam em DN. Seja $\mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$ a componente conexa de $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ que contém HOV e tome um ponto $(a_0, b_0) \in \text{DN} \subset \mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$. Então existe uma *conjugação canônica*

$$g_0 : K_{a_0, b_0}^{\mathbb{C}} \rightarrow \Sigma_2 \quad (5.4)$$

entre H_{a_0, b_0} e σ . Seja $\gamma(t)$ um laço em $\mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$ com ponto base em (a_0, b_0) . Pela estabilidade estrutural existem conjugações g_t entre $K_{\gamma(t)}^{\mathbb{C}}$ e Σ_2 . Dado que $\gamma(0) = \gamma(1) = (a_0, b_0)$, podemos definir um automorfismo do shift

$$\rho(\gamma) := g_1 \circ g_0^{-1} \in \text{Aut}(\Sigma_2) \quad (5.5)$$

onde $\text{Aut}(\Sigma_2)$ é o grupo de automorfismos de Σ_2 que consiste de todos os homeomorfismos de Σ_2 em Σ_2 que comutam com σ . Assim, ρ leva um laço γ em um automorfismo em $\text{Aut}(\Sigma_2)$ o qual só depende da classe de homotopia do laço, $[\gamma]$. Portanto, a aplicação:

$$\rho : \pi_1(\mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}, (a_0, b_0)) \rightarrow \text{Aut}(\Sigma_2) \quad (5.6)$$

dada por $[\gamma] \rightarrow \rho(\gamma)$ é um homomorfismo de grupos bem definido chamado *homomorfismo de monodromia*.

Assim, podemos enunciar a Conjectura de Hubbard:

Conjectura de Hubbard: ρ é sobrejetor.

Bedford e Smillie também demonstraram que se γ representa um elemento de $\pi_1(\text{HOV})$ então ou $\rho(\gamma)$ é a identidade ou $\rho(\gamma)$ é o automorfismo de Σ_2 que substitui os símbolos 0 e 1, um pelo outro [BS06a]. Recentemente, Arai [Ara07b] demonstrou, usando uma demonstração numérica rigorosa, que Γ tem um elemento de ordem infinita.

O resultado principal de Arai [Ara07b] está relacionado a laços em $\mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$ que passam através de parâmetros reais (a, b) . Sua formulação é

Teorema 5.2.1 (Arai). *Se $(a, b) \in \mathcal{H}_0^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$, então existe um laço $\gamma := \bar{\alpha}^{-1} \cdot \alpha$ com $\gamma(1/2) = (a, b)$, onde α é um caminho em $\mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$ com extremos em (a_0, b_0) e (a, b) , tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} K_{a,b}^{\mathbb{R}} & \xrightarrow{H_{a,b}} & K_{a,b}^{\mathbb{R}} \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \text{Fix}(\rho(\gamma)) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Fix}(\rho(\gamma)) \end{array}$$

onde $g_{1/2}$ é a conjugação entre $K_{a,b}^{\mathbb{C}}$ e Σ_2 , $g := g_{1/2}|_{K_{a,b}^{\mathbb{R}}}$ e $\text{Fix}(\rho(\gamma))$ é o conjunto de pontos fixos de $\rho(\gamma)$.

Uma interessante questão é a seguinte: Que automorfismos no teorema anterior são realizáveis por transformações de Hénon no lugar real de ferraduras? Na seguinte seção, observaremos que estes automorfismos podem ser associados a automorfismos definidos por transformações de poda.

5.2.2 Frentes de poda e curvas em $\mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$

Precisaremos algumas definições do capítulo 3 onde construímos os difeomorfismos de poda da ferradura de Smale F definida por uma transformação de Hénon H .

Dado $N \in \mathbb{N}$, defina $s_i^N := \underbrace{s_i s_i \dots s_i}_{N\text{-vezes}}$ onde $s_i^0 = \emptyset$ é a sequência vazia. Para

o que estamos interessados aqui, um disco de poda será um disco $D_{N,M}$ tal que $H^{-1}(D_{N,M})$ contém os pontos correspondentes a os blocos das sequências simbólicas $0^N 1 \cdot 010^M$ e $0^N 1 \cdot 110^M$. Então $D_{N,M}$ é limitado por segmentos

de variedades estáveis e instáveis que passam pelos pontos homoclínicos $p_0 = 0^\infty 110^{N-1} 11 \cdot 10^{M-1} 110^\infty$ e $p_1 = 0^\infty 110^{N-1} 10 \cdot 10^{M-1} 110^\infty$. A seguinte proposição dá-nos condições nas quais o disco $D_{N,M}$ é um disco de poda,

Proposição 5.2.1. *$D_{N,M}$ é um disco de poda homoclínico, se $N, M \geq 3$. Além disso, o mesmo vale nos seguintes casos:*

- (i) $N = 0$ e $M \geq 2$, ou $M = 0$ e $N \geq 2$,
- (ii) $N = 1$ e $M \geq 2$, ou $M = 1$ e $N \geq 2$,
- (iii) $N = 2$ e $M \geq 1$, ou $M = 2$ e $N \geq 1$.

Seja $f_{N,M}$ o difeomorfismo de poda associado ao disco $D_{N,M}$ como no Teorema de poda. O seguinte resultado, que será crucial para nossas observações, afirma que para cada $f_{N,M}$ existe um *automorfismo* que depende unicamente dos pontos homoclínicos que definirem o disco $D_{N,M}$:

Teorema 5.2.2. *Para cada disco $D_{N,M}$ como na proposição 5.2.1, então existe um automorfismo do shift $\rho_{N,M} \in \text{Aut}(\Sigma_2)$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f_{N,M}) & \xrightarrow{f_{N,M}} & \Omega(f_{N,M}) \\ h_s \downarrow & & \downarrow h_s \\ \text{Fix}(\rho_{N,M}) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Fix}(\rho_{N,M}) \end{array}$$

onde h_s é a restrição de h ao conjunto não errante de $f_{N,M}$, $\Omega(f_{N,M})$.

Demonstração. Considere o automorfismo $\rho_{N,M}$ que substitui as sequências $0^N 1010^M$ e $0^N 1110^M$, uma pela outra:

$$(\rho_{N,M}(s))_i = \begin{cases} 0 & \text{se } s_{i-N-1} \dots s_i \dots s_{i+M+1} = 0^N 1110^M \\ 1 & \text{se } s_{i-N-1} \dots s_i \dots s_{i+M+1} = 0^N 1010^M \\ s_i & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (5.7)$$

Note que

$$\mathbb{P}_s = \{s \in \Sigma_2 \mid \exists i \in \mathbb{Z} \text{ tal que } s_{i-1-N} \dots s_i \dots s_{i+1+M} \in \{0^N 1010^M, 0^N 1110^M\}\}$$

onde $\mathbb{P}_s$ é a frente de poda simbólica. Então $\Sigma_2 \setminus \mathbb{P}_s = \text{Fix}(\rho_{N,M})$. Assim, pelo lema 3.1.2, h_s é uma conjugação entre $f_{N,M}$ restrito a $\Omega(H) \setminus \mathbb{P}$ e o shift σ restrito a $\text{Fix}(\rho_{N,M})$, onde $\mathbb{P}$ é a frente de poda associada a $D_{N,M}$. Como, pelo teorema de poda, $\Omega(f_{N,M}) = \Omega(H) \setminus \mathbb{P}$, o teorema segue. $\square$

É claro que o teorema 5.2.2 pode ser generalizado a todo disco de poda e a dois ou mais discos de poda. O automorfismo do shift definido pelo disco $D_{N,M}$ como na prova do teorema anterior será chamado *automorfismo de poda associado ao disco $D_{N,M}$* .

Definição 5.2.1. Seja γ uma curva fechada em $\mathbb{C}^2$ e $\bar{\gamma} := \varphi(\gamma)$ onde $\varphi(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ é a conjugação complexa. Dizemos que γ é *simétrica* se $\bar{\gamma} = \gamma^{-1}$, isto é, $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t), \forall t \in [0, 1]$. Note que quando γ é simétrica temos que $\gamma(0), \gamma(1/2) \in \mathbb{R}^2$. Doravante vamos supor que $\gamma(0) \in DN$.

O teorema 5.2.2 mostra uma conexão entre uma poda da ferradura de Smale e as possíveis dinâmicas reais de $H_{a,b}$ quando $(a, b) \in \mathcal{H}_0^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$ no seguinte sentido:

Teorema 5.2.3. *Seja $\rho_{N,M}$ o automorfismo de poda associado ao disco $D_{N,M}$. Suponha que existe uma curva $\gamma \in \mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$ simétrica tal que $\rho(\gamma) = \rho_{N,M}$ e seja $(a, b)_{N,M} = \gamma(1/2)$. Então existe uma conjugação entre a transformação de Hénon $H_{(a,b)_{N,M}}$ restrita a $K_{(a,b)_{N,M}}^{\mathbb{R}}$ e a transformação de poda $f_{N,M}$ restrita a $\Omega(f_{N,M})$.*

Demonstração. Seja g_t as conjugações entre $H_{\gamma(t)}$ e σ restritos a $K_{\gamma(t)}^{\mathbb{C}}$ e Σ_2 respectivamente. Então $\rho_{N,M} = g_1 \circ (g_0)^{-1}$ por definição. Seja $\alpha := \gamma|_{[0,0.5]}$, então $\gamma = \bar{\alpha}^{-1} \cdot \alpha$ e pelo teorema 5.2.1 de Arai, $g_{1/2}$ é uma conjugação entre $H_{a,b}$ e σ restritos a $K_{a,b}^{\mathbb{R}}$ e $\text{Fix}(\rho_{N,M})$, respectivamente. Então pelo teorema 5.2.2 a conjugação procurada é $(h_s)^{-1} \circ g_{1/2}$. $\square$

Note que se a conjectura de Hubbard é verdadeira então para cada automorfismo de poda $\rho_{N,M}$ existirá um laço não trivial $\gamma_{N,M}$ em $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$. Se, além disso, $\gamma_{N,M}$ passa por parâmetros reais (a, b) , então, pelo teorema 5.2.3, a dinâmica real de $H_{a,b}$ será conjugada à dinâmica do difeomorfismo de poda $f_{N,M}$. Logo, a análise de quais difeomorfismos de poda existem na família de Hénon poderia trazer conhecimento sobre qual é a topologia do lugar real de ferraduras.

Como uma consequência do teorema 5.2.3 obtemos uma prova da CFP para alguns valores dos parâmetros:

Teorema 5.2.4. *Há dois conjuntos abertos disjuntos A_1 e A_2 no plano de parâmetros reais tal que se $(a, b) \in A_1 \cup A_2$ então $H_{a,b}$ é topologicamente conjugado a uma poda não trivial da ferradura.*

Demonstração. Considere os parâmetros $(a, b) \in [5.3125, 5.46875] \times \{1\}$. Por [Ara07a], estes parâmetros correspondem a transformações de Hénon hiperbólicas. Então existe um conjunto aberto conexo A_1 tal que todas as transformações ali são conjugadas. Por [Ara07b], existe uma curva simétrica $\gamma_1 \in \mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$ tal que $\gamma_1(1/2) = (a, b)$ e $\rho(\gamma_1) = \rho_{2,2}$. Então, pelo teorema 5.2.3, $H_{a,b}$, restrito a $K_{a,b}^{\mathbb{R}}$, é conjugado ao difeomorfismo de poda $f_{2,2}$ associado ao disco de poda $D_{2,2}$ e restrito a $\Omega(f_{2,2})$.

O aberto A_2 é obtido considerando os valores $(a, b) \in [2.21875, 2.296875] \times \{0.25\}$. A prova segue o mesmo raciocínio. Neste caso $H_{a,b}$, restrito a $K_{a,b}^{\mathbb{R}}$, é conjugado ao difeomorfismo de poda $f_{0,2}$ associado ao disco de poda $D_{0,2}$ e restrito a $\Omega(f_{0,2})$. $\square$

Observação 5.2.1. Pelo algoritmo da seção 3.2 é fácil construir as partições de Markov para as transformações de Hénon do teorema anterior (Compare

com [DMS91] quando $(a, b) = (5.4, 1)$). Para os valores no conjunto A_1 a matriz é:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Para valores no conjunto A_2 , a matriz é:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Figura 5.1: Partições de Markov para os valores no conjunto A_1 (figura 5.1(a)) e para os valores no conjunto A_2 (figura 5.1(b)) do teorema 5.2.4.

Capítulo 6

Problemas de pesquisa

Neste capítulo reportamos alguns problemas de pesquisa que se deduzem dos capítulos anteriores relacionando a teoria de poda e a dinâmica na família de Hénon.

Na seção 6.1 estudamos a família de Hénon real quando esta preserva área e analisamos o tipo de subshift que deve estar associado mediante poda. Na seção 6.2 mostramos mais evidência numérica que suporta a CFP. Na seção 6.3 observamos que, pelo menos numericamente, estes valores estão no lugar de ferraduras. Na seção 6.4 apresentamos uma conjectura relacionando as construções de poda com o lugar de ferraduras.

6.1 Quando $H_{a,b}$ preserva área

O caso $b = 1$, o qual corresponde a transformações de Hénon que preservam orientação e área, tem sido muito estudado. No ano 1991, Davis, Mackay e Sannami [DMS91] conjecturaram que, quando $a = 5.4$, $a = 5.59$ e $a = 5.65$, $H_{a,1}$ é hiperbólico e exibiram um subshift de tipo finito para a dinâmica do conjunto não errante em cada um destes valores. Estes subshifts provinham, conjecturalmente, de uma região na qual as variedades invariantes foram descruzadas. Em 2002, de Carvalho and Hall em [dCH02b] replicaram estes resultados para $a = 5.4$ usando o abordagem da teoria de poda. Eles associaram conjecturalmente um subshift de tipo finito a $H_{5.4,1}$ em termos de uma frente de poda. Este é a frente de poda da figura 1.2(b). Finalmente no 2007, Arai em [Ara07b] demonstrou que $H_{5.4,1}$ restrita ao seu conjunto não errante é, de fato, hiperbólica utilizando rigorosas pesquisas numéricas. Hoje, pelo nosso teorema de poda, o resultado de Arai se pode interpretar como uma poda da ferradura utilizando um disco de poda simétrico.

Gostaríamos de fazer algumas observações sobre como devem estar relacionadas a teoria de poda e a dinâmica de transformações de Hénon que preservam área. Destas observações parece-se inferir que *se uma destas transformações é uma poda então o disco de poda associado é um disco simétrico*. Isto segue utilizando a reversibilidade do shift σ em Σ_2 . Antes precisamos de algumas definições.

Definição 6.1.1. Seja X um espaço topológico e $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. Um homeomorfismo $g : X \rightarrow X$ é chamado um *reversor* para (X, f)

se

$$g \circ f = f^{-1} \circ g \quad (6.1)$$

e $g^2 = Id$. Dizemos que (X, f) é um *sistema reversível* se admite um reversor g e, então, (X, f, g) é um *sistema reversor*.

É claro que (Σ_2, σ) é reversível pelo reversor

$$\phi : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 \quad (6.2)$$

definido por $\phi(s_- \cdot s_+) = s_+ \cdot s_-$, isto é, $(\phi(s))_i = s_{-(i+1)}$.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação $T(x, y) = (y, x)$. Se $H_{a,b}$ preserva área, $b = 1$, então

$$T \circ H_{a,1}(x, y) = H_{a,1}^{-1} \circ T(x, y) \quad (6.3)$$

Assim $(\Omega(H_{a,1}), H_{a,1})$ é um sistema reversível.

Definição 6.1.2. Dizemos que um disco de poda D , definido pelos pontos homoclínicos p_0 e p_1 é *simétrico* se

$$\phi(\sigma^{-1}(p_k)) = p_k, \text{ para } i = 1, 2. \quad (6.4)$$

Observe que se um disco de poda D é simétrico então é definido pelas órbitas homoclínicas $p_0 = 0^\infty \mathbf{w}^* \mathbf{1} \cdot \mathbf{w} 10^\infty$ e $p_1 = 0^\infty \mathbf{1} \mathbf{w}^* \mathbf{0} \cdot \mathbf{w} 10^\infty$ onde $\mathbf{w}$ é uma sequência finita de símbolos 0 e 1 tal que a soma de símbolos é par e, se $\mathbf{w} = w_1 w_2 \dots w_n$ então $\mathbf{w}^* = w_n w_{n-1} \dots w_1$.

Proposição 6.1.1. *Seja D um disco de poda simétrico e seja $D_s := h(D \cap \Omega(H))$. Então:*

$$s \in D_s \text{ se, e somente se, } \phi(\sigma^{-1}(s)) \in D_s. \quad (6.5)$$

Demonstração. Seja $s = \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots$. Lembre que a codificação canônica preserva a ordem unimodal nas projeções, assim $s \in D_s$ se e somente se

$$\mathbf{w} 10^\infty < s_0 s_1 \dots \leq 10^\infty \text{ e } 0 \mathbf{w} 10^\infty < s_{-1} s_{-2} \dots < 1 \mathbf{w} 10^\infty. \quad (6.6)$$

Mas, pela dinâmica do σ (considerando-o como uma transformação unimodal do intervalo), estas condições são equivalentes as seguintes

$$\mathbf{w} 10^\infty < s_{-2} s_{-3} \dots \leq 10^\infty \text{ e } 0 \mathbf{w} 10^\infty < s_{-1} s_0 \dots < 1 \mathbf{w} 10^\infty. \quad (6.7)$$

Estas últimas condições são equivalentes a dizer que $\phi(\sigma^{-1}(s)) \in D_s$. $\square$

Seja (Σ_A, σ_A) o subshift obtido no Teorema 1.3.1. Com estas definições podemos provar as seguintes

Proposição 6.1.2. *Se D é um disco de poda simétrico então o subshift (Σ_A, σ_A) é reversível.*

Demonstração. Pela proposição 6.1.1, um disco de poda simétrico satisfaz: $s \in D_s$ se, e somente se, $\phi(\sigma^{-1}(s)) \in D_s$. Pela equação $\sigma \circ \phi = \phi \circ \sigma^{-1}$ temos que $s \in \sigma^n(D_s)$ se, e somente se, $s \in \phi(\sigma^{-n}(\phi(D_s)))$ se e somente se $\phi(s) \in \sigma^{-(n+1)}(\sigma(\phi(D_s)))$ se e somente se $\phi(s) \in \sigma^{-(n+1)}(D_s)$. Por tanto $s \in \mathbb{P}_s$ se e somente se $\phi(s) \in \mathbb{P}_s$. Logo

$$\phi_A : \Sigma_2 \setminus \mathbb{P}_s \rightarrow \Sigma_2 \setminus \mathbb{P}_s \quad (6.8)$$

definido por $\phi_A = \phi|_{\Sigma_2 \setminus \mathbb{P}_s}$ é um homeomorfismo bem definido. Lembremos a transformação $\psi : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_2$ dada na definição 3.3.1. Sabemos que $\psi(\Sigma_A) = \Sigma_2 \setminus \mathbb{P}_s$. Assim, ψ é sobrejetora. Suponha que $\psi(a) = \psi(a')$. Então pelo teorema 1.3.1, existe $x, y \in \Omega(H_1)$ tal que $\tau(x) = a$ e $\tau(y) = a'$. Logo $\psi(\tau(x)) = \psi(\tau(y))$ o que implica que $h_s(x) = h_s(y)$ ou $x = y$ dado que h_s é injetiva. Por tanto $a = a'$ e assim ψ é injetiva. Note que ψ é contínua. Então ψ é um homeomorfismo entre Σ_A e $\Sigma_2 \setminus \mathbb{P}_s$. Se definirmos $\hat{\phi} : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ por $\hat{\phi}(a) = \psi^{-1}\phi_A\psi(a)$ então $\hat{\phi}$ é um reversor para o sistema (Σ_A, σ_A) . $\square$

Proposição 6.1.3. *Se $(\Omega(H_{a,1}), H_{a,1})$ é conjugado ao difeomorfismo de poda obtido utilizando um disco D então o sistema (Σ_A, σ_A) é reversível.*

Demonstração. Seja $f : \Omega(H_{a,1}) \rightarrow \Omega(H_1)$ a conjugação entre $H_{a,1}$ e a transformação de poda H_1 associada ao disco D . Lembre que τ é uma conjugação entre H_1 e σ_A . Então $\hat{\phi} := \tau f T f^{-1} \tau^{-1}$ é um reversor para o sistema (Σ_A, σ_A) . $\square$

As duas proposições anteriores indicam que reversibilidade e simetria são conceitos ligados. Podemos então perguntar:

Qual é a relação entre $\tilde{\phi}$ e $\hat{\phi}$?

Se eles são iguais então poderíamos provar que se uma transformação de Hénon que preserva área é um difeomorfismo de poda então o disco de poda associado é simétrico. Em outras palavras, quando $b = 1$ só alguns tipos de poda seriam permitidos. Isto motiva as seguintes questões:

Para b fixo, que tipos de poda são permitidos?

Note que os discos $D_{N,N}$ são simétricos. Assim eles corresponderiam a podas reversíveis. Logo uma pergunta natural é:

Se $H_{a,b}$ é uma poda associada ao disco $D_{N,M}$, qual é a relação entre M , N e b ?

6.2 Evidência numérica

Nós temos realizado experimentos numéricos com a família de Hénon e temos encontrado parâmetros onde uma transformação de Hénon pode ser interpretada como um difeomorfismo de poda. Pelo trabalho de Arai [Ara07a], sabemos que muitos destes parâmetros correspondem a parâmetros onde a transformação de Hénon é hiperbólica. Note que entre estes parâmetros estão aqueles estudados por Davis, Mackay and Sannami em [DMS91] e usamos a uma ideia destes últimos autores para conjecturar que certas transformações de Hénon são difeomorfismos de poda, isto é: achamos numericamente órbitas periódicas de período pequeno pelo método de Biham-Wenzel [BW89] e comparamos com

Figura 6.1: Partições de Markov conjecturadas para as transformações de Hénon $H_{3.5197,0.648}$ (figura 6.1(a)) e $H_{5.65,1}$ (figura 6.1(b)).

Esta matriz tem o mesmo número de órbitas periódicas de cada período (< 16) que o número de órbitas periódicas de $H_{5.65,1}$ encontradas pelo método de Biham-Wenzel (Compare com [DMS91]). Na figura 6.1(b) mostramos a partição de Markov associada.

Exemplo 6.2.3. Consideremos os valores $a = 5.6917$. Numéricamente observamos que $H_{5.6917,1}$ pode ser considerado como um difeomorfismo de poda da ferradura usando o disco de poda $D_{4,4}$. A partição de Markov está na figura 6.2(a). A matriz associada é:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Também, esta matriz tem o mesmo número de órbitas periódicas que estas de $H_{5.6917,1}$ encontradas pelo método de Biham-Wenzel para períodos menores ou iguais que 14.

6.2.2 Usando dois discos de poda

Exemplo 6.2.4. Outros valores estudados em [DMS91] são $(a, b) = (5.59, 1)$. Para estes parâmetros, associamos dois discos de poda: $D_{2,3}$ e $D_{3,2}$. Nós

Figura 6.2: Partições de Markov conjecturadas para $H_{5.6917,1}$ (figura 6.2(a)) e para $H_{5.59,1}$ (figura 6.2(b)).

construímos uma partição de Markov a qual está na figura 6.2(b) (Compare com [DMS91]). A matriz de transição é a seguinte:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Exemplo 6.2.5. Considere os valores $(a, b) = (5.683, 1)$. Numéricamente, associamos dois discos de poda: $D_{3,4}$ e $D_{4,3}$. A partição de Markov está na figura

6.6. Assim a matriz de transição é:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Esta matriz tem o mesmo número de órbitas periódicas que o número de órbitas período de $H_{a,b}$ encontradas pelo método de Biham-Wenzel para períodos menores que 16.

Figura 6.3: Partição de Markov usando os discos $D_{3,4}$ e $D_{4,3}$ conjecturada para $H_{5,683,1}$.

6.2.3 Mais evidência numérica

Exemplo 6.2.6. Considere a transformação de Hénon $H_{3,5,0.55}$. O disco de poda associado a esta transformação é $D_{2,3}$. A partição de Markov está na

figura 6.4(a). A matriz de transição é:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Exemplo 6.2.7. Considere a transformação de Hénon $H_{2.766,0.4}$. Neste caso associamos dois discos de poda: $D_{0,3}$ e $D_{1,2}$. A partição de Markov está na figura 6.4(b). A matriz de transição é:

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

(a) Usando $D_{2,3}$ e...

(b) .. usando dois discos de poda: $D_{0,3}$ e $D_{1,2}$.

Figura 6.4: Partições de Markov conjecturadas para $H_{3.5,0.55}$ (figura 6.4(a)) e para $H_{2.766,0.4}$ (figura 6.4(b)).

Exemplo 6.2.8. Considere parâmetros próximos da transformação de Hénon $H_{2.887,0.4}$. Para esta transformação associamos o homeomorfismo de poda definido pelos discos $D_{1,3}$ e $D_{2,2}$. A partição de Markov está na figura 6.5(a) e a matriz de transição é:

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Figura 6.5: Partições de Markov conjecturadas para $H_{2.887,0.4}$ (figura 6.5(a)) e para $H_{2.345,0.19}$ (figura 6.5(b)).

Exemplo 6.2.9. Considere os parâmetros $(a, b) = (2.345, 0.19)$. Neste caso a transformação de Hénon $H_{a,b}$ é numericamente conjugada à transformação de poda utilizando o disco $D_{0,3}$. A partição de Markov está na figura 6.5(b) e a matriz de transição é a seguinte:

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Exemplo 6.2.10. Considere os valores $(a, b) = (2.812, 0.4)$. Os discos de poda conjecturados para esta transformação são $D_{1,2}$ e o disco de poda definido pelas órbitas homoclínicas $p_0 = 0^\infty 10111 \cdot 100110^\infty$ e $p_1 = 0^\infty 10110 \cdot 100110^\infty$. A partição de Markov está na figura 6.6 e a matriz de transição é a seguinte:

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Figura 6.6: Partição de Markov conjecturada para $H_{2.812,0.4}$.

6.3 Observações

Na seção 5.2 provamos que, a menos de uma conjugação, existem transformações de Hénon que são difeomorfismos de poda. Pelo trabalho de Arai [Ara07b], eles correspondem a parâmetros que pertencem ao lugar real de ferraduras.

- Para $(a, b) \in [5.3125, 5.46875] \times \{1\}$, associamos o disco de poda $D_{2,2}$; claramente, o automorfismo $\rho_{2,2}$ substitui as sequências 0010100 e 0011100, uma pela outra, quando elas aparecem na codificação simbólica de um ponto de Σ_2 .
- Para $(a, b) \in [2.21875, 2.296875] \times \{0.25\}$, associamos o discos $D_{0,2}$. Neste caso vemos que o automorfismo do shift $\rho_{0,2}$ substitui as sequências 10100 e 11100 quando elas aparecem na codificação simbólica.

Figura 6.7: $(a \approx 2.8187 + 0.0119i$ e $b = 0.4)$. Figura 6.8: $(a \approx 2.8255 - 0.032i$ e $b = 0.4)$.

Também na seção 6.2, apresentamos evidência numérica indicando que outros parâmetros podem ser interpretados como difeomorfismos de poda. Nós conjecturamos que **todos esses parâmetros estão no lugar de ferraduras**, pois, ao parecer, existem caminhos em $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ unindo estes parâmetros com um ponto em DN . Isto se deduz utilizando o programa **SaddleDrop**¹ e desenhando a variedade instável complexa do ponto fixo hiperbólico 0^{∞} .

Por exemplo para os valores $(2.812, 0.4)$, pegamos 9 pontos no espaço de parâmetros complexos que aparentemente unem os valores $(2.812, 0.4)$ com os valores $(3.149, 0.4) \in DN$. Em todos os casos o conjunto de órbitas limitadas $K_{a,b}$, restrito à variedade instável complexa do ponto 0^{∞} , parece ser um conjunto de Cantor totalmente desconexo que **varia continuamente** quando os parâmetros são modificados. Veja desde a figura 6.7 até a figura 6.15. Isto sugere que todos os valores considerados estão no lugar de ferraduras.

Os automorfismos de poda conjecturados para alguns dos exemplos da seção 6.2 serão:

- Para alguma região ao redor de $(a, b) = (3.5197, 0.648)$ associamos o disco de poda $D_{1,2}$. Acreditamos que (a, b) está no lugar de ferraduras real e

¹SaddleDrop é um programa criado por J. Hubbard e K. Papadantonakis para estudar a família de Hénon complexa. Este pode ser encontrado em <http://www.math.cornell.edu/dynamics/SD/index.html>

Figura 6.9: $(a \approx 2.8187 - 0.079i$ e $b = 0.4)$.

Figura 6.10: $(a \approx 2.8187 - 0.095i$ e $b = 0.4)$.

Figura 6.11: $(a \approx 2.8931 - 0.0959i$ e $b = 0.4)$.

Figura 6.12: $(a \approx 3.00 - 0.0919i$ e $b = 0.4)$.

Figura 6.13: $(a \approx 3.1432 - 0.0919i$ e $b = 0.4)$.

Figura 6.14: $(a \approx 3.1432 - 0.048i$ e $b = 0.4)$.

Figura 6.15: $(a \approx 3.149 - 0.00399i$ e $b = 0.4)$.

que o automorfismo do teorema 5.2.1 de Arai é o automorfismo de poda $\rho_{1,2}$ o qual substitui os blocos 010100 and 011100.

- O mesmo pode ser dito para os valores estudados por Davis, Mackay e Sannami em [DMS91]. Para $(a, b) = (5.65, 1)$ precisamos um disco de poda e para $(a, b) = (5.59, 1)$ de dois discos de poda. No primeiro caso, o disco é $D_{3,3}$ e o automorfismo substitui as sequências 000101000 e 000111000; no segundo caso associamos os discos $D_{2,3}$ e $D_{3,2}$ e o automorfismo substitui as sequências 100101000 e 100111000, uma pela outra, e as sequências 00010100 e 00011100 uma pela outra.
- Considere os valores $(a, b) = (5.683, 1)$. Neste caso associamos dois discos de poda: $D_{3,4}$ e $D_{4,3}$. Para os valores $(a, b) = (5.6917, 1)$, associamos o disco de poda $D_{4,4}$. Nestes casos é fácil ver quais são os automorfismos de poda correspondentes.

6.4 Conjectura da Frente de poda no lugar de Ferraduras

Gostaríamos de ressaltar a similaridade entre o teorema 5.2.1 de Arai e o teorema 5.2.2. Esta semelhança diz que existe um ponto de contacto entre um difeomorfismo de poda e uma transformação de Hénon que está no lugar de ferraduras real. Este ponto de contacto é o automorfismo do shift. Também, numericamente, observamos que há laços não triviais no lugar de ferraduras que passam por transformações de Hénon cujos automorfismos de monodromia são automorfismos de poda. Conjecturamos que isto também é verdade para cada laço que passa pelo lugar real de ferraduras e que começa em DN . Portanto, uma poda com discos homoclínicos pode ser interpretada como a ação de um elemento de $\text{Aut}(\Sigma_2)$ o qual fixa algum subconjunto de Σ_2 . Assim uma transformação $H_{a,b}$ com $(a, b) \in \mathcal{H}_0^C \cap \mathbb{R}^2$ poderia ser considerada como um difeomorfismo de poda e o automorfismo do shift associado como um automorfismo de poda. No caso que $H_{a,b}$ preserva área, pela seção 6.1, estes automorfismos de monodromia deveriam ter uma forma particular: Eles provêm de frentes de poda simétricos.

Pelo Teorema 1.3.3, se uma transformação de Hénon $H_{a,b}$ tem entropia maximal mas não é hiperbólica, existem difeomorfismos de poda hiperbólicos arbi-

trariamente próximos a ela. Assim, pensamos que as afirmações anteriores são verdadeiras, em particular, para muitos parâmetros próximos a estas transformações.

Acreditamos que a caracterização topológica do conjunto não errante real $\Omega(H) \cap \mathbb{R}^2$ de uma transformação de Hénon que preserva orientação e que está no lugar real de ferraduras, é dada pela dinâmica simbólica de um difeomorfismo de poda como no Teorema 1.3.1. Assim, reformulamos a CFP em termos de discos homoclínicos:

Conjectura: *Dada uma transformação de Hénon real $H_{a,b}$ com $(a,b) \in \mathcal{H}_0^C \cap \mathbb{R}^2$ e $b > 0$, existe uma coleção $\mathcal{D}$ de discos de poda homoclínicos e um laço $\gamma \in \mathcal{H}^C$ que passa pelo ponto (a,b) e que começa em DN tais que o automorfismo de monodromia associado a γ é o automorfismo de poda associado à coleção $\mathcal{D}$.*

Apêndice A

O metodo de Biham-Wenzel

Em [BW89], Ofer Biham e Wolfgang Wenzel introduziram um método para encontrar órbitas periódicas. Embora o metodo carece de um fundamento matemático que garante a convergencia a uma solução, tem sido muito utilizado para descrever numericamente a natureza do conjunto não errante de transformações do plano. Nós temos utilizado ele para encontrar órbitas periódicas da transformação de Hénon para valores a e b dados.

Podemos descrever o metodo da seguinte maneira. Suponha que temos um sistema da forma:

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Ou seja, $x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1})$. Estamos interessados em encontrar uma órbita N -periódica: $p_1, p_2, \dots, p_N$, com $p_0 := p_N, p_{N+1} := p_1$. Suponha que esta órbita periódica tem um codificação simbólica $\overline{s_1 \dots s_N}$, então defina a *Codificação Biham-Wenzel* por $\overline{S_1 \dots S_N}$ com:

$$S_i := \begin{cases} 1 & \text{se } s_i = 0 \\ -1 & \text{se } s_i = 1 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Em outras palavras, no caso da família de Hénon, a codificação Biham-Wenzel diz, supondo que $p_i \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}$:

$$S_i := \begin{cases} 1 & \text{se } p_i < 0 \\ -1 & \text{se } p_i > 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Isto é $S_i p_i < 0, \forall i = 1, \dots, N$. Considere o sistema n -dimensional [GKM89]:

$$\frac{dx_i}{dt} = S_i(x_{i+1} - F(x_i, x_{i-1})), \quad (\text{A.4})$$

para todo $i \in \{1, \dots, N\}$ com $x_0 := x_N$ e $x_{N+1} := x_1$. Observe que uma solução estacionaria do sistema de equações diferenciáveis A.4 corresponde a uma órbita periódica de A.1 e viceversa. Assim, o problema de encontrar a órbita N -periódica se reduz a encontrar um ponto de equilibrio do sistema A.4 o que pode ser feito utilizando o método de Runge-Kutta.

No caso da família de Hénon, $F(x_n, x_{n-1}) = a - x_n^2 - bx_{n-1}$, existe um teorema que, sob certas condições na órbita e o parâmetro b , garanta a convergência a um ponto de equilíbrio.

Teorema A.0.1. *Suponha que $p = \{p_1, \dots, p_N\}$ é uma órbita periódica de A.1 e suponha que existe um $\epsilon > 0$ talque $p_i S_i \leq -\epsilon, \forall i$ e $\epsilon > \frac{1+b}{2}$ então p é um ponto crítico atrator do sistema A.4.*

Demonstração. Pelas hipoteses: $2S_i p_i + |S_i| + |bS_i| \leq -2\epsilon + 1 + b < 0$. Logo $|S_i| + |bS_i| < |2S_i p_i|$. A derivada do campo é:

$$DF(p) = \begin{bmatrix} 2S_1 p_1 & S_1 & 0 & .. & .. & .. & 0 & bS_1 \\ bS_2 & 2S_2 p_2 & S_2 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & bS_3 & 2S_3 p_3 & S_3 & 0 & .. & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & .. & .. & .. & 0 & bS_{N-1} & 2S_{N-1} p_{N-1} & S_{N-1} \\ S_N & 0 & .. & .. & .. & 0 & bS_N & 2S_N p_N \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

Seja λ um autovalor de $DF(p)$, então, pelo teorema de Gershgorin:

$$|\lambda - 2S_i p_i| \leq |S_i| + |bS_i| < |2S_i p_i| \quad (A.6)$$

Dado que $2S_i p_i$ é negativo, temos que $\text{Re}(\lambda) < 0$. $\square$

Para outros parâmetros simplesmente utilizamos o metodo de Runge-Kutta e se vemos que este parece convergir então consideramos que temos encontrado a órbita periódica procurada. Se o método parece divergir então dizemos que não existe sequência periódica com a codificação Biham-Wenzel dada.

Referências Bibliográficas

- [Ara07a] Zin Arai. On hyperbolic plateaus of the Hénon map. *Experiment. Math.*, 16(2):181–188, 2007.
- [Ara07b] Zin Arai. On loops in the hyperbolic locus of the complex Hénon map and their monodromies. *arXiv:math.DS/0704.2978v1*, 2007.
- [BC91] Michael Benedicks and Lennart Carleson. The dynamics of the Hénon map. *Ann. of Math. (2)*, 133(1):73–169, 1991.
- [BLS93] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1):77–125, 1993.
- [BS91] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$: currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent. Math.*, 103(1):69–99, 1991.
- [BS04] Eric Bedford and John Smillie. Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy: Tangencies. *Ann. of Math. (2)*, 160(1):1–26, 2004.
- [BS06a] Eric Bedford and John Smillie. The Hénon family: the complex horseshoe locus and real parameter space. In *Complex dynamics*, volume 396 of *Contemp. Math.*, pages 21–36. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [BS06b] Eric Bedford and John Smillie. Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy. II. Small Jacobian. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 26(5):1259–1283, 2006.
- [BW89] Ofer Biham and Wolfgang Wenzel. Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers. *Phys. Rev. Lett.*, 63(8):819–822, 1989.
- [CGP88] Predrag Cvitanović, Gemunu H. Gunaratne, and Itamar Procaccia. Topological and metric properties of Hénon-type strange attractors. *Phys. Rev. A (3)*, 38(3):1503–1520, 1988.

- [Cvi91] Predrag Cvitanović. Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos. *Phys. D*, 51(1-3):138–151, 1991. Nonlinear science: the next decade (Los Alamos, NM, 1990).
- [dC99] André de Carvalho. Pruning fronts and the formation of horseshoes. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(4):851–894, 1999.
- [dCH01] André de Carvalho and Toby Hall. Pruning theory and Thurston’s classification of surface homeomorphisms. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 3(4):287–333, 2001.
- [dCH02a] André de Carvalho and Toby Hall. The forcing relation for horseshoe braid types. *Experiment. Math.*, 11(2):271–288, 2002.
- [dCH02b] André de Carvalho and Toby Hall. How to prune a horseshoe. *Nonlinearity*, 15(3):R19–R68, 2002.
- [dCH10] André de Carvalho and Toby Hall. Decoration invariants for horseshoe braids. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 27(3):863–906, 2010.
- [Dev89] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, second edition, 1989.
- [Dil] James Dillon. Trabalho não publicado.
- [DMS91] M. J. Davis, R. S. MacKay, and A. Sannami. Markov shifts in the Hénon family. *Phys. D*, 52(2-3):171–178, 1991.
- [DN79] R. Devaney and Z. Nitecki. Shift automorphisms in the Hénon mapping. *Comm. Math. Phys.*, 67(2):137–146, 1979.
- [Fro10] R. Frongillo. Topological entropy bounds for hyperbolic plateaus of the Hénon map. *arXiv:math.DS/1001.4211v1*, 2010.
- [FS92] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex Hénon mappings in $\mathbf{C}^2$ and Fatou-Bieberbach domains. *Duke Math. J.*, 65(2):345–380, 1992.
- [GKM89] P. Grassberger, H. Kantz, and U. Moenig. On the symbolic dynamics of the Hénon map. *J. Phys. A*, 22(24):5217–5230, 1989.
- [HC98] K. Hansen and P. Cvitanović. Bifurcation structures in maps of Hénon type. *Nonlinearity*, 11(5):1233–1261, 1998.
- [Hén76] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math. Phys.*, 50(1):69–77, 1976.
- [Hoe08] Ulrich A. Hoensch. Some hyperbolicity results for Hénon-like diffeomorphisms. *Nonlinearity*, 21(3):587–611, 2008.

- [HOV94] John H. Hubbard and Ralph W. Oberste-Vorth. Hénon mappings in the complex domain. I. The global topology of dynamical space. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (79):5–46, 1994.
- [HOV95] John H. Hubbard and Ralph W. Oberste-Vorth. Hénon mappings in the complex domain. II. Projective and inductive limits of polynomials. In *Real and complex dynamical systems (Hillerød, 1993)*, volume 464 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 89–132. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [HS04] R. Hagiwara and A. Shudo. An algorithm to prune the area-preserving Hénon map. *J. Phys. A*, 37(44):10521–10543, 2004.
- [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [MNTU00] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda. *Holomorphic dynamics*, volume 66 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1995 Japanese original and revised by the authors.
- [MT88] J. Milnor and W. Thurston. On iterated maps of the interval. In *Dynamical systems (College Park, MD, 1986–87)*, volume 1342 of *Lecture Notes in Math.*, pages 465–563. Springer, Berlin, 1988.
- [New79] Sheldon E. Newhouse. The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):101–151, 1979.
- [New04] Sheldon Newhouse. Cone-fields, domination, and hyperbolicity. In *Modern dynamical systems and applications*, pages 419–432. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [OV87] R. Oberste-Vorth. *Complex horseshoes and the dynamics of mappings of two complex variables*. PhD thesis, Cornell University, 1987.
- [PT93] Jacob Palis and Floris Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, volume 35 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. Fractal dimensions and infinitely many attractors.
- [Shu87] Michael Shub. *Global stability of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1987. With the collaboration of Albert Fathi and Rémi Langevin, Translated from the French by Joseph Christy.

- [Sma67] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.