**Estabilidade estrutural dos campos
vetoriais seccionalmente
lineares no plano**

Bruno de Paula Jacóia

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, julho de 2013

Estabilidade estrutural dos campos vetoriais seccionalmente lineares no plano

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 15 de agosto de 2013. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello - IME-USP
- Prof. Dr. Salvador Addas Zanata - IME-USP
- Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia - UFG

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello, pela sua dedicação, atenção, paciência e pelos muitos conselhos e ensinamentos transmitidos.

Agradeço ao Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia, pelas valiosas observações e sugestões que ajudaram a aprimorar este trabalho.

Agradeço a toda minha família, especialmente aos meus pais, Zé e Cida, e aos meus avós, Antônio e Antonia, que sempre estão presentes me incentivando e torcendo por mim.

Agradeço a Priscila, que me acompanhou durante todo esse caminho, me apoiando e incentivando, nos bons e maus momentos, sendo uma fonte inesgotável de carinho.

Agradeço também ao Ramón, pelos inúmeros momentos de alegria proporcionados.

E por último, mas não menos importante, gostaria também de agradecer a todos os amigos que encontrei no instituto: Pedro, Lucas, Henrique, Ivã, Arthur, Gabriel, Luís, Max, Gabriel, Lucas, Ricardo, Fernando, Yuri, Felipe, Godoy, Fábio, André e Belmiro. Sem vocês todos esses anos no IME não teriam sido tão alegres e proveitosos.

Resumo

JACÓIA, B. P. **Estabilidade Estrutural dos Campos Vetoriais Seccionalmente Lineares no Plano**. 2013. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Estudamos uma classe de campos de vetores seccionalmente lineares no plano denotada por $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$. Tais campos aparecem frequentemente em modelos matemáticos aplicados à engenharia. Baseados no trabalho de J. Sotomayor e R. Garcia [SG03], impondo condições sobre as singularidades, órbitas periódicas e separatrizes, definimos um conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ de campos de vetores que são estruturalmente estáveis em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$. Provamos que esse conjunto é aberto, denso e tem medida de Lebesgue total em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$, o qual é um espaço vetorial de dimensão finita.

Palavras-chave: Estabilidade Estrutural, Campos de vetores lineares por partes, Compactificação de Poincaré.

Abstract

JACÓIA, B. P. **Structural Stability of Piecewise-linear Vector Fields in the Plane**. 2013. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

We study a class of Piecewise-linear vector fields in the plane denoted by $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$. These vector fields appear often in mathematical models applied to Engineering. Based on Jorge Sotomayor and Ronaldo Garcia paper [SG03], we impose conditions on singularities, periodic orbits and separatrices, to define a set $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ of vector fields structurally stable in $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$. We give a proof that this set is open, dense and has full Lebesgue measure in $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$, that is a finite dimensional vector space.

Palavras-chave: Structural Stability, Piecewise-linear Vector Fields, Poincaré Compactification.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	5
2.1	Campos seccionalmente lineares no plano	5
2.2	Resultados clássicos	8
2.3	Aplicação de transição	9
2.3.1	Derivada da aplicação de transição	14
2.3.2	Derivada da aplicação de retorno para órbitas periódicas	16
2.4	Compactificação de Poincaré	18
2.5	Comportamento dos campos no infinito via compactificação	23
2.5.1	Derivada da aplicação de retorno para a órbita no infinito	31
2.6	Tangências com a grade	35
3	Estabilidade Estrutural	37
3.1	Definição de Estabilidade Estrutural	37
3.2	Propriedades de genericidade dos sistemas seccionalmente lineares	38
3.3	Teorema de Estabilidade e Genericidade	39
3.4	Lemas	41
4	Abertura, Densidade e Estabilidade de $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$	57
4.1	Abertura	57
4.2	Regiões canônicas	57
4.2.1	Construção do homeomorfismo	63
4.3	Densidade	69
5	Conclusões	87

Capítulo 1

Introdução

A forma como as equações diferenciais ordinárias eram estudadas mudou drasticamente no final do século XIX depois que Henri Poincaré publicou seu seminal trabalho "*Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*" em 1881.

Este trabalho introduziu novas técnicas e uma inovadora linha de pensamento para o estudo das equações diferenciais ordinárias, e teve uma enorme influência para este ramo da matemática criando os alicerces da hoje conhecida Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos.

Tornou-se então importante a compreensão, geométrica e analítica, dos retratos de fase dos sistemas dinâmicos definidos por equações diferenciais, bem como o comportamento destes quando as equações que definem a dinâmica sofrem pequenas perturbações.

Este último aspecto se deu numa fase posterior do amadurecimento e assimilação das ideias de Poincaré.

Assim, estudos pioneiros iniciados por Alexander Andronov e Lev Pontryagin em 1937 deram origem ao conceito hoje conhecido como estabilidade estrutural dos sistemas dinâmicos.

Eles estavam interessados em entender como pequenas perturbações nas equações que definem o sistema afetam qualitativamente o comportamento de suas soluções e qual tipo de sistema é “robusto” o suficiente para que seus aspectos qualitativos permaneçam inalterados após tais perturbações.

Inspirados por essa forma de analisar os campos, dizemos que um sistema é estruturalmente estável caso as propriedades topológicas do sistema dinâmico se mantenham as mesmas após uma pequena perturbação da função que os definem.

No início da década de 1960, os matemáticos brasileiros Maurício Peixoto e Marília Peixoto, estendendo os resultados dos trabalhos de Andronov e Pontryagin, demonstraram em [PP59] um teorema de necessidade e suficiência para a estabilidade estrutural de sistemas dinâmicos em regiões compactas com bordo suave do plano.

No trabalho de Peixoto e Peixoto a compreensão do conjunto dos sistemas estrutural-

mente estáveis é obtida através da caracterização das condições que elementos essenciais do sistema (singularidades, órbitas periódicas e separatrizes) devem satisfazer. Além disso é provado em [Pei62] que os sistemas estruturalmente estáveis formam um conjunto aberto e denso no espaço dos sistemas considerados.

Posteriormente Jorge Sotomayor estendeu o resultado para o caso de sistemas polinomiais definidos no plano $\mathbb{R}^2$.

A caracterização dos sistemas estruturalmente estáveis e sua densidade é uma questão de grande relevância para várias aplicações. Por exemplo, em sistemas oriundos da física ou da biologia, podemos analisar o comportamento do retrato de fase de tais sistemas fazendo aproximações e medições, e nesse caso podemos considerar que o sistema sofre pequenas perturbações devidas a pequenos erros das medições ou limitações de precisão dos equipamentos utilizados. Portanto contar a estabilidade estrutural do sistema nos garante que tais perturbações não afetam qualitativamente o comportamento assintótico das soluções.

Esta dissertação se baseia no artigo [SG03] de Jorge Sotomayor e Ronaldo Garcia. Serão considerados neste trabalho os campos vetoriais contínuos seccionalmente lineares no plano. Em [CL91], L. Chua e R. Lum discutem o interesse computacional e a aplicabilidade de tais sistemas.

Tais campos aparecem persistentemente em problemas envolvendo teoria do controle e em modelagens matemáticas de problemas de engenharia que possuem comportamento não suave.

Logo, é de grande interesse aplicado, caracterizarmos os campos de vetores que são estruturalmente estáveis dentro da classe dos campos de vetores seccionalmente lineares no plano.

A dissertação está organizada da seguinte maneira.

No capítulo 2, introduzimos o tipo de campos de vetores que estudaremos e sua representação matemática. Definimos também qual será o conjunto onde os campos deixam de ser diferenciáveis. Observamos que tais campos formam um espaço vetorial de dimensão finita, representado por $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$, e portanto podemos associá-los naturalmente com o espaço euclidiano de dimensão apropriada.

É introduzido também uma importante ferramenta, chamada de compactificação de Poincaré, apropriada para lidar com a não compacidade do plano de fase dos sistemas em estudo.

Também enunciaremos e provaremos alguns resultados técnicos referentes aos campos em questão. Estabeleceremos a relação entre alguns resultados sobre sistemas dinâmicos suaves e seus correspondentes no caso de campos seccionalmente lineares no plano.

Faremos a análise matemática e daremos a descrição geométrica de como alguns tipos de perturbação afetam os campos estudados, também introduziremos ferramentas que facilitam a análise do comportamento de singularidades e órbitas periódicas dos sistemas em

questão, principalmente a análise dos resultados referentes ao comportamento no equador da esfera $\mathbb{S}^2$ depois que os campos são compactificados.

No capítulo 3 é definido o que é estabilidade estrutural dentro da classe dos campos de vetores seccionalmente lineares no plano. Inspirados pelos trabalhos de Maurício Peixoto, Marília Peixoto, Jorge Sotomayor e Ronaldo Garcia, descrevemos quais são as propriedades que um campo de vetores deve satisfazer para ser estruturalmente estável. Essas propriedades são relativas a elementos dinâmicos essenciais do sistema, tais como as singularidades, órbitas periódicas e separatrizes.

Neste capítulo é enunciado o principal teorema deste trabalho, que estabelece as propriedades topológicas e a medida de Lebesgue do conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ de campos estruturalmente estáveis, tal como definido em 3.1.

Devido ao fato do espaço em questão ser de dimensão finita, além de provar que o conjunto descrito é aberto e denso, conseguiremos mostrar mediante uma análise adicional, que o complementar deste conjunto tem medida de Lebesgue nula no espaço dos campos de vetores seccionalmente lineares no plano.

No capítulo 4 é provado o principal teorema deste trabalho. Adaptamos a técnica das regiões canônicas encontrada no trabalho de Peixoto e Peixoto para construir os homeomorfismos que estabelecem a equivalência topológica entre campos próximos em $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$. Por fim, através da análise do comportamento de uma família de campos dependendo de cinco parâmetros, provamos que o conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ possui medida de Lebesgue total, e em particular, é denso em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$.

No capítulo 5, fazemos uma síntese dos resultados demonstrados e apontamos possíveis linhas de estudo e trabalho a seguir.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo definimos a classe dos campos de vetores seccionalmente lineares no plano. Também apresentamos alguns resultados e construções que nos fornecerão ferramentas úteis para analisar o comportamento do retrato de fase de tais sistemas, focando nos seus elementos dinâmicos essenciais, tais como os pontos singulares, órbitas periódicas e separatrizes.

Construímos a aplicação de transição entre duas seções transversais distintas do campo, e demonstramos a fórmula para a sua derivada. Apresentamos o método da compactificação de Poincaré, ferramenta adequada para lidarmos com a não compacidade do plano.

Terminamos o capítulo fazendo o estudo do comportamento da compactificação dos campos seccionalmente lineares no plano e a mudança de seus retratos de fase através de alguns tipos de perturbações.

2.1 Campos seccionalmente lineares no plano

No plano $\mathbb{R}^2$ com as coordenadas (x, y) considere o campo de vetores

$$X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

onde P e Q são dados por

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_1 + b_{11}x + b_{12}y + \sum_{i=1}^n c_1^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_1^j |y - \delta_j|, \\ Q(x, y) &= a_2 + b_{21}x + b_{22}y + \sum_{i=1}^n c_2^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_2^j |y - \delta_j|. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Denotaremos por $\Gamma = \{\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n\}$ e $\Delta = \{\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m\}$ as sequências ordenadas de números reais que definem as retas $x = \gamma_i$ e $y = \delta_j$ fora das quais o campo de vetores X é linear e portanto suave.

No plano essas retas definem uma *grade* que será denotada por $[\Gamma, \Delta]$. Os pontos da forma (γ_i, δ_j) , $i \in \{1, \dots, n\}$; $j \in \{1, \dots, m\}$; serão chamados de pontos de *esquina* da grade. O conjunto formado por todos os pontos de esquina da grade será denotado por $\Gamma \times \Delta$.

Fixados os conjuntos Γ e Δ , denotaremos por $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ o espaço de todos os campos de vetores definidos como em 2.1, fixada a grade $[\Gamma, \Delta]$.

$\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $N(\Gamma, \Delta) = 6 + 2(n + m)$. De fato podemos naturalmente associar a cada campo de vetores em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ um elemento de

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{6+2(n+m)} = \mathbb{R}^{N(\Gamma, \Delta)}.$$

Fazemos isso usando seus parâmetros

$$(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) \in \mathbb{R}^4,$$

$$(c_1^1, c_1^2, \dots, c_1^n) \text{ e } (c_2^1, c_2^2, \dots, c_2^n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$(d_1^1, d_1^2, \dots, d_1^m) \text{ e } (d_2^1, d_2^2, \dots, d_2^m) \in \mathbb{R}^m.$$

Devido a essa natureza do espaço em questão, podemos ir mais adiante e considerá-lo como um espaço métrico com a norma euclidiana herdada de $\mathbb{R}^{N(\Gamma, \Delta)}$. Denotaremos por $B_\epsilon(X)$ a bola aberta em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ centrada em X e de raio $\epsilon > 0$.

Observe que os campos de vetores em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ são contínuos e seccionalmente lineares. A grade $[\Gamma, \Delta]$ particiona o plano $\mathbb{R}^2$ em $(n + 1)(m + 1)$ células $\Omega_{ij} = \Gamma_i \times \Delta_j$ e restrito a cada uma dessas células o campo é linear não homogêneo, ou seja

$$X(x, y)|_{\Omega_{ij}} = A_{ij}(x, y)^T + b_{ij}$$

com $A_{ij} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $b_{ij} \in \mathbb{R}^2$.

Aqui, $\Gamma_i = [\gamma_i, \gamma_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, $\Gamma_0 = [-\infty, \gamma_1]$ e $\Gamma_n = [\gamma_n, \infty]$. Analogamente, $\Delta_j = [\delta_j, \delta_{j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$, $\Delta_0 = [-\infty, \delta_1]$ e $\Delta_m = [\delta_m, \infty]$.

Por exemplo, se $(x, y) \in \Omega_{k_x, k_y}$, então temos $\gamma_1 < \dots < \gamma_{k_x} \leq x \leq \gamma_{k_x+1} < \dots < \gamma_n$ e $\delta_1 < \dots < \delta_{k_y} \leq y \leq \delta_{k_y+1} < \dots < \delta_m$.

Substituindo na expressão do campo X dado em 2.1 temos

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= \left[a_1 - \sum_{i=1}^{k_x} c_1^i \gamma_i + \sum_{i=k_x+1}^n c_1^i \gamma_i - \sum_{j=1}^{k_y} d_1^j \delta_j + \sum_{j=k_y+1}^m d_1^j \delta_j \right] + \\
 &\quad + \left[b_{11} + \sum_{i=1}^{k_x} c_1^i - \sum_{i=k_x+1}^n c_1^i \right] x + \left[b_{12} + \sum_{j=1}^{k_y} d_1^j - \sum_{j=k_y+1}^m d_1^j \right] y, \\
 Q(x, y) &= \left[a_2 - \sum_{i=1}^{k_x} c_2^i \gamma_i + \sum_{i=k_x+1}^n c_2^i \gamma_i - \sum_{j=1}^{k_y} d_2^j \delta_j + \sum_{j=k_y+1}^m d_2^j \delta_j \right] + \\
 &\quad + \left[b_{21} + \sum_{i=1}^{k_x} c_2^i - \sum_{i=k_x+1}^n c_2^i \right] x + \left[b_{22} + \sum_{j=1}^{k_y} d_2^j - \sum_{j=k_y+1}^m d_2^j \right] y.
 \end{aligned}$$

Então o campo $X(x, y)|_{\Omega_{ij}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, com os seguintes coeficientes

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= b_{11} + \sum_{i=1}^{k_x} c_1^i - \sum_{i=k_x+1}^n c_1^i, \\
 A_{12} &= b_{12} + \sum_{j=1}^{k_y} d_1^j - \sum_{j=k_y+1}^m d_1^j, \\
 A_{21} &= b_{21} + \sum_{i=1}^{k_x} c_2^i - \sum_{i=k_x+1}^n c_2^i, \\
 A_{22} &= b_{22} + \sum_{j=1}^{k_y} d_2^j - \sum_{j=k_y+1}^m d_2^j, \\
 B_1 &= a_1 - \sum_{i=1}^{k_x} c_1^i \gamma_i + \sum_{i=k_x+1}^n c_1^i \gamma_i - \sum_{j=1}^{k_y} d_1^j \delta_j + \sum_{j=k_y+1}^m d_1^j \delta_j, \\
 B_2 &= a_2 - \sum_{i=1}^{k_x} c_2^i \gamma_i + \sum_{i=k_x+1}^n c_2^i \gamma_i - \sum_{j=1}^{k_y} d_2^j \delta_j + \sum_{j=k_y+1}^m d_2^j \delta_j.
 \end{aligned}$$

As células Ω_{ij} que são limitadas serão chamadas de finitas, e as células que não são limitadas serão chamadas de infinitas.

Observe que todo $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ é um campo de vetores lipschitziano em $\mathbb{R}^2$. De fato, em cada célula Ω_{ij} o campo é linear não homogêneo, logo podemos tomar como constante de Lipschitz para X o valor

$$L = \max\{\|A_{ij}\|, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

onde estamos considerando a norma das aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$.

Logo para todo $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ existe um único fluxo do sistema, bem definido e completo. Isto é, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a curva integral do campo X passando por (x, y) está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nosso interesse no estudo desses campos é definir e analisar a estabilidade estrutural em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$, bem como encontrar quais são as condições que um campo de vetores X precisa satisfazer para que ele seja estruturalmente estável nesse conjunto.

Para tanto é de suma importância entendermos o retrato de fase de X , em particular como é o comportamento em torno de suas singularidades (ou equilíbrios), suas órbitas periódicas, suas conexões de separatrizes e o comportamento das órbitas com pontos limites no infinito.

2.2 Resultados clássicos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados clássicos da teoria qualitativa de equações diferenciais que servirão de ferramentas para analisarmos os campos de vetores seccionalmente lineares no plano.

Teorema 2.1 (Continuidade com relação aos parâmetros e condições iniciais)

Seja F uma função contínua num conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Para cada $(t_0, p_0, \lambda) \in U$ suponha que o problema de valores iniciais

$$p' = F(t, p, \lambda), \quad p(t_0) = p_0$$

tenha uma única solução $\varphi = \varphi(t; t_0, p_0, \lambda)$, definida no seu intervalo máximo

$$(\omega_-(t_0, p_0, \lambda), \omega_+(t_0, p_0, \lambda)).$$

Então

$$\mathcal{D} = \{(t, t_0, p_0, \lambda) | (t_0, p_0, \lambda) \in U \text{ e } t \in (\omega_-(t_0, p_0, \lambda), \omega_+(t_0, p_0, \lambda))\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times U$ e φ é contínua em $\mathcal{D}$.

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser vista em [Sot79].

□

Observação 2.1 O teorema 2.1 nos permite tratar os campos em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ como campos de

vetores dependendo de $N(\Gamma, \Delta)$ parâmetros.

Quando quisermos destacar que estamos usando essa propriedade escreveremos o fluxo de um campo $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ como sendo $\varphi(t, p, X)$. Para deixar claro que estamos usando o campo de vetores em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ como parâmetro iremos dizer que estamos usando a propriedade da continuidade do fluxo com relação aos *campos* ao invés de dizer com relação aos *parâmetros*.

Teorema 2.2 (Poincaré-Bendixson) *Sejam X um campo de vetores localmente lipschitziano definido em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p) | t \geq 0\}$ (respectivamente $\gamma^-(p) = \{\varphi(t, p) | t \leq 0\}$) a semi-órbita positiva (respectivamente a semi-órbita negativa) do campo X pelo ponto p . Suponha que $\gamma^+(p)$ (respectivamente $\gamma^-(p)$) está contida num subconjunto compacto de U e $\omega(p)$ (respectivamente $\alpha(p)$) tem um número finito de pontos singulares. Temos então as seguintes alternativas:*

- (a)- *Se $\omega(p)$ (respectivamente $\alpha(p)$) contém apenas pontos regulares, então $\omega(p)$ (respectivamente $\alpha(p)$) é uma órbita periódica;*
- (b)- *Se $\omega(p)$ (respectivamente $\alpha(p)$) contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ (respectivamente $\alpha(p)$) consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$;*
- (c)- *Se $\omega(p)$ (respectivamente $\alpha(p)$) não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ (respectivamente $\alpha(p)$) é um ponto singular.*

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [CL55]. Em [Sot79] encontra-se uma demonstração para o caso em que X é um campo de classe C^1 .

□

2.3 Aplicação de transição

Primeiro vamos mostrar como podemos definir uma aplicação de transição entre duas seções transversais distintas e vamos calcular a derivada dessa aplicação para o caso de campos de vetores planares. Tais aplicações são úteis pois nos permitem definir uma aplicação de retorno para as órbitas periódicas dos campos em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$.

Observação 2.2 Sejam $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ dois vetores em $\mathbb{R}^2$. Usaremos a seguinte notação

$$(\vec{v}|\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

para representar a matriz em $M_2(\mathbb{R})$ cujas colunas são os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Proposição 2.1 *Seja X um campo de vetores de classe C^1 definido no plano $\mathbb{R}^2$. Dado um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por $\varphi(t, p_0)$ a órbita de X tal que $\varphi(0, p_0) = p_0$ e vamos supor que $T_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $\varphi(T_0, p_0) = p_1$. Sejam Σ_0 e Σ_1 seções transversais de X passando pelos pontos p_0 e p_1 respectivamente. Se $\sigma_0 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\sigma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são as respectivas parametrizações de Σ_0 e Σ_1 com $\sigma_0(s_0) = p_0$ e $\sigma_1(s_1) = p_1$, então existe uma vizinhança U de p_0 e duas funções diferenciáveis*

$$\tau : U \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad \rho : U \rightarrow I_1$$

de forma que $\tau(p_0) = T_0$, $\rho(p_0) = s_1$ e

$$\varphi(\tau(p), p) = \sigma_1(\rho(p)), \quad \forall p \in U. \quad (2.2)$$

Demonstração: Considere a função $F : \mathcal{D} \times I_1 \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(p, t, s) = \varphi(t, p) - \sigma_1(s).$$

Como X é de classe C^1 , o fluxo φ também é de classe C^1 . Além do mais, como Σ_1 é uma seção transversal, então F é uma função diferenciável que satisfaz

$$F(p_0, T_0, s_1) = \varphi(T_0, p_0) - \sigma_1(s_1) = p_1 - p_1 = 0.$$

Observe que as derivadas de F com relação as variáveis t e s calculadas em (p_0, T_0, s_1) são

$$\frac{\partial}{\partial t} F(p_0, T_0, s_1) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(T_0, p_0) = X(\varphi(T_0, p_0)) = X(p_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial s} F(p_0, T_0, s_1) = -\sigma'_1(s_1),$$

resultando que a matriz

$$D_{(t,s)} F(p_0, T_0, s_1) = \left(\frac{\partial}{\partial t} F(p_0, T_0, s_1) \middle| \frac{\partial}{\partial s} F(p_0, T_0, s_1) \right)$$

é não singular, isto é, $\det D_{(t,s)} F(p_0, T_0, s_1) \neq 0$. Isso ocorre pois Σ_1 é uma seção transversal de X parametrizada por σ_1 .

Aplicando o teorema da função implícita em F deduzimos a existência de uma vizinhança U de p e de duas funções diferenciáveis

$$\tau : U \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad \rho : U \rightarrow I_1$$

tais que $\tau(p_0) = T_0$ e $\rho(p_0) = s_1$ com

$$F(p, \tau(p), \rho(p)) = 0, \quad \forall p \in U.$$

Daí concluímos

$$\varphi(\tau(p), p) = \sigma_1(\rho(p)), \quad \forall p \in U.$$

Como queríamos. □

Da relação 2.2 segue que o fluxo de X transforma pontos próximos de p_0 em pontos da seção transversal Σ_1 , o que nos permite definir a aplicação

$$\begin{aligned} \xi : U &\longrightarrow \Sigma_1 \\ p &\longmapsto \xi(p) = \varphi(\tau(p), p) \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$\xi = \sigma_1 \circ \rho. \tag{2.3}$$

A partir das funções ξ e τ podemos definir uma aplicação π entre as seções transversais Σ_0 e Σ_1 , e uma função real $\tilde{\tau}$ definida para pontos de Σ_0 próximos de p_0 .

Definição 2.1 *Nas condições da Proposição 2.1, definimos a aplicação de transição π do campo de vetores X entre as seções transversais Σ_0 e Σ_1 como a restrição de ξ à intersecção $\Sigma_0 \cap U$, ou seja*

$$\pi : \Sigma_0 \cap U \rightarrow \Sigma_1, \quad \text{onde} \quad \pi(p) = \xi(p).$$

Além disso, definiremos a função $\tilde{\tau}$ do sistema X , que exprime o tempo necessário para que um ponto p de Σ_0 chegue a Σ_1 através do fluxo de X pela primeira vez, como

$$\tilde{\tau} : \Sigma_0 \cap U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{onde} \quad \tilde{\tau}(p) = \tau(p).$$

Ficam portanto definidas as aplicações π e $\tilde{\tau}$ entre duas seções transversais do sistema X . Observe que, pelo fato de todas as funções envolvidas na construção serem diferenciáveis, essas aplicações também são diferenciáveis.

Observação 2.3 Considere $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ e suponha que γ é uma órbita que intersecta a grade $[\Gamma, \Delta]$ nos pontos $\gamma(t_0) = p_0$ e $\gamma(t_1) = p_1$ transversalmente e disjunta das esquinas da grade. Suponha ainda que $\gamma(t)$ está contida no interior de uma célula Ω_{ij} , $\forall t \in]t_0, t_1[$. Então existem L_0 e L_1 segmentos da grade $[\Gamma, \Delta]$ contendo p_0 e p_1 respectivamente e, pela observação 2.1, existe $\delta > 0$ tal que $\Sigma_0 = L_0 \times B_\delta(X)$ e $\Sigma_1 = L_1 \times B_\delta(X)$ são seções transversais para o campo

$$\Lambda(p, Y) = (Y(p), 0).$$

Podemos assim definir uma aplicação de transição $\Pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ que tem a seguinte forma

$$\Pi(p, Y) = (\pi(p, Y), Y),$$

onde a função $\pi(p, Y)$ nos dá a aplicação de transição entre as seções L_0 e L_1 para todo campo $Y \in B_\delta(X)$.

Figura 2.1: Aplicação de transição Π entre as seções Σ_0 e Σ_1

Vamos agora nos concentrar na obtenção da derivada da aplicação de transição entre duas seções transversais associadas a um campo de vetores no plano.

Para calcular a derivada vamos usar as coordenadas locais das parametrizações σ_0 e σ_1 das seções transversais Σ_0 e Σ_1 , representadas respectivamente por s e $\hat{s}$.

Com as funções dadas na Definição 2.1, podemos estabelecer o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} U \cap \Sigma_0 & \xrightarrow{\pi} & \Sigma_1 \\ \sigma_0 \uparrow & & \uparrow \sigma_1 \\ W_{s_0} \subset I_0 & \xrightarrow{\Pi} & W_{s_1} \subset I_1 \end{array}$$

onde a aplicação Π está definida em uma vizinhança W_{s_0} do ponto s_0 por $\Pi = \sigma_1^{-1} \circ \pi \circ \sigma_0$, com valores em uma vizinhança W_{s_1} do ponto s_1 .

Notemos que do Teorema da Função Implícita deduzimos que as funções ξ , π , τ , $\tilde{\tau}$ e Π são de classe C^1 em seus respectivos domínios de definição.

Por outro lado utilizando 2.3 podemos escrever $\Pi = \rho \circ \sigma_0$, e assim

$$\frac{d}{ds}\Pi(s) = \nabla\rho(\sigma_0(s))\sigma'_0(s). \quad (2.4)$$

De forma análoga podemos definir a aplicação $T = \tilde{\tau} \circ \sigma_0$, de classe C^1 em W_{s_0} , e obtemos

$$\frac{d}{ds}T(s) = \nabla\tilde{\tau}(\sigma_0(s))\sigma'_0(s). \quad (2.5)$$

Defina agora as matrizes

$$M_{\Sigma_0} = \left(X(p_0) \middle| -\sigma'_0(s_0) \right) \quad M_{\Sigma_1} = \left(X(p_1) \middle| -\sigma'_1(s_1) \right).$$

Temos então a seguinte proposição sobre o comportamento dessas funções

Proposição 2.2 *Nas condições da Proposição 2.1, se denotarmos por A a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & T'(s_0) \\ 0 & \Pi'(s_0) \end{pmatrix}$$

então é satisfeita a relação

$$M_{\Sigma_1}A = D_p\varphi(T_0, p_0)M_{\Sigma_0}. \quad (2.6)$$

Demonstração: Diferenciando a relação 2.1 com respeito a p , usando $\tilde{\tau}$ ao invés de τ , e que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tilde{\tau}(p), p) = X(\varphi(\tilde{\tau}(p), p))$ resulta

$$X(\varphi(\tilde{\tau}(p), p))\nabla\tilde{\tau}(p) + D_p\varphi(\tilde{\tau}(p), p) = \sigma'_1(\rho(p))\nabla\rho(p). \quad (2.7)$$

Substituindo na expressão p por p_0 , obtemos

$$X(p_1)\nabla\tilde{\tau}(p_0) + D_p\varphi(T_0, p_0) = \sigma'_1(\rho(p_0))\nabla\rho(p_0), \quad (2.8)$$

onde foram usadas as identidades $\tilde{\tau}(p_0) = \tau(p_0) = T_0$ e $\varphi(T_0, p_0) = p_1$.

Multiplicando os dois lados da igualdade 2.8 por $\sigma'_0(s_0)$ obtemos

$$X(p_1)\nabla\tilde{\tau}(p_0)\sigma'_0(s_0) + D_p\varphi(T_0, p_0)\sigma'_0(s_0) = \sigma'_1(\rho(p_0))\nabla\rho(p_0)\sigma'_0(s_0)$$

e utilizando as relações 2.4 e 2.5 temos que

$$X(p_1)T'(p_0) + D_p\varphi(T_0, p_0)\sigma'_0(s_0) = \sigma'_1(s_1)\Pi'(s_0).$$

Agora fazendo $A = \begin{pmatrix} 1 & T'(s_0) \\ 0 & \Pi'(s_0) \end{pmatrix}$ decorre

$$\begin{aligned} M_{\Sigma_1}A &= \left(X(p_1) \middle| -\sigma'_1(s_1) \right) \begin{pmatrix} 1 & T'(s_0) \\ 0 & \Pi'(s_0) \end{pmatrix} = \\ &= \left(X(p_1) \middle| X(p_1)T'(p_0) - \sigma'_1(s_1)\Pi'(s_0) \right) = \\ &= \left(X(p_1) \middle| -D_p\varphi(T_0, p_0)\sigma'_0(s_0) \right). \end{aligned}$$

Usando a seguinte igualdade

$$X(p_1) = D_p\varphi(T_0, p_0)X(p_0)$$

finalmente deduzimos a relação que queríamos

$$\begin{aligned} M_{\Sigma_1}A &= \left(D_p\varphi(T_0, p_0)X(p_0) \middle| -D_p\varphi(T_0, p_0)\sigma'_0(s_0) \right) = \\ &= D_p\varphi(T_0, p_0) \left(X(p_0) \middle| -\sigma'_0(s_0) \right) = D_p\varphi(T_0, p_0)M_{\Sigma_0}. \end{aligned}$$

□

2.3.1 Derivada da aplicação de transição

Com a proposição anterior podemos calcular a derivada da aplicação de transição entre duas seções transversais de um campo de vetores no plano.

Proposição 2.3 *Seja X um campo de vetores de classe C^1 definido no plano $\mathbb{R}^2$. Dado um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por $\varphi(t, p_0)$ a órbita de X tal que $\varphi(0, p_0) = p_0$ e vamos supor que $T_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $\varphi(T_0, p_0) = p_1$. Sejam Σ_0 e Σ_1 seções transversais de X passando pelos pontos p_0 e p_1 respectivamente. Se $\sigma_0 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\sigma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são as respectivas parametrizações de Σ_0 e Σ_1 com $\sigma_0(s_0) = p_0$ e $\sigma_1(s_1) = p_1$, então a derivada da aplicação de transição $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ no ponto p_0 , definida pelo fluxo de X , é dada por:*

$$\pi'(p_0) = \frac{\det \left(X(p_0) \middle| \sigma'_0(s_0) \right)}{\det \left(X(p_1) \middle| \sigma'_1(s_1) \right)} \exp \left(\int_0^{T_0} \operatorname{div} X(\varphi(t, p_0)) dt \right).$$

Demonstração: Primeiro observemos que as matrizes M_{Σ_0} e M_{Σ_1} são escritas da seguinte forma

$$M_{\Sigma_0} = \left(X(p_0) \middle| -\sigma'_0(s_0) \right) \quad M_{\Sigma_1} = \left(X(p_1) \middle| -\sigma'_1(s_1) \right)$$

e da proposição 2.2 obtemos

$$\left(X(p_1) \middle| -\sigma'_1(s_1) \right) \begin{pmatrix} 1 & T'(s_0) \\ 0 & \Pi'(s_0) \end{pmatrix} = D_p \varphi(T_0, p_0) \left(X(p_0) \middle| -\sigma'_0(s_0) \right).$$

Calculando o determinante dos dois lados da igualdade anterior encontramos

$$\det \left(X(p_1) \middle| -\sigma'_1(s_1) \right) \Pi'(s_0) = \det \left(D_p \varphi(T_0, p_0) \right) \det \left(X(p_0) \middle| -\sigma'_0(s_0) \right). \quad (2.9)$$

Dado que a matriz $D_p \varphi(t, p_0)$ é uma matriz fundamental do sistema variacional $X' = DX(\varphi(t, p_0))X$, com $D_p \varphi(0, p_0) = Id$, pela Fórmula de Liouville vale

$$\det \left(D_p \varphi(T_0, p_0) \right) = \exp \left(\int_0^{T_0} \operatorname{div} X(\varphi(t, p_0)) dt \right).$$

Como Σ_1 é uma seção transversal do sistema X , então a matriz M_{Σ_1} é não singular, e portanto $\det \left(X(p_1) \middle| -\sigma'_1(s_1) \right) = \det M_{\Sigma_1} \neq 0$. Assim, dividindo a relação 2.9 por $\det M_{\Sigma_1}$ chegamos a

$$\Pi'(s_0) = \pi'(p_0) = \frac{\det \left(X(p_0) \middle| -\sigma'_0(s_0) \right)}{\det \left(X(p_1) \middle| -\sigma'_1(s_1) \right)} \exp \left(\int_0^{T_0} \operatorname{div} X(\varphi(t, p_0)) dt \right).$$

Agora, usando o fato que $\frac{\det \left(X(p_0) \middle| -\sigma'_0(s_0) \right)}{\det \left(X(p_1) \middle| -\sigma'_1(s_1) \right)} = \frac{\det \left(X(p_0) \middle| \sigma'_0(s_0) \right)}{\det \left(X(p_1) \middle| \sigma'_1(s_1) \right)}$, temos

$$\pi'(p_0) = \frac{\det \left(X(p_0) \middle| \sigma'_0(s_0) \right)}{\det \left(X(p_1) \middle| \sigma'_1(s_1) \right)} \exp \left(\int_0^{T_0} \operatorname{div} X(\varphi(t, p_0)) dt \right).$$

Como queríamos.

□

Podemos agora, enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2.4 *Seja X_λ uma família a um parâmetro de campos de classe C^1 , definidos em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Sejam Σ_0 e Σ_1 duas seções transversais para o campo X_{λ_0} , onde $\gamma_0(t) = \varphi(t, p_0, X_{\lambda_0})$, com $\gamma_0(0) = p_0 \in \Sigma_0$ e $\gamma_0(t_1) = p_1 \in \Sigma_1$. Seja $\pi(., \lambda) : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ a aplicação de transição entre as seções Σ_0 e Σ_1 para o campo de vetores X_λ . Então, se Σ_1 é normal a γ_0 , temos*

$$\frac{\partial \pi}{\partial \lambda}(p_0, \lambda_0) = \frac{\frac{\partial \pi}{\partial p}(p_0, \lambda_0)}{|X_{\lambda_0}(p_0)|} \int_0^{t_1} \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} X_{\lambda_0}(\gamma_0(u)) du\right) \det\left(X_{\lambda_0}(\gamma_0(t)) \left| \frac{\partial X_{\lambda_0}}{\partial \lambda}(\gamma_0(t)) \right.\right) dt,$$

onde $\frac{\partial \pi}{\partial p}(p_0, \lambda_0)$ é dada pela proposição 2.3.

Demonstração: A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [Sot81] e [ALGM73].

□

2.3.2 Derivada da aplicação de retorno para órbitas periódicas

Considere um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ e suponha que esse campo possui uma órbita periódica γ . Suponha também que γ intersecta a grade $[\Gamma, \Delta]$ nos pontos $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$, transversalmente e de forma disjunta das esquinas da grade.

Em volta de todo ponto E_s podemos tomar um pequeno segmento L_{E_s} da grade $[\Gamma, \Delta]$ como uma seção transversal para X . Podemos então definir uma aplicação de retorno π para a órbita γ que consiste em compor as aplicações de transição entre as seções transversais mencionadas. A figura 2.2 ilustra o que estamos descrevendo.

Proposição 2.5 *Nas condições anteriores, se a órbita γ for tal que $\gamma(t_s) = E_s$, $s \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\gamma(t_{k+1}) = E_1$ e $\gamma(t) \in \mathring{\Omega}_{i_s j_s}$ para todo $t \in]t_s, t_{s+1}[$, então a derivada da aplicação de retorno para a órbita periódica γ é*

$$\pi' = \exp\left(\sum_{s=1}^k (t_{s+1} - t_s) \operatorname{tr} A_{i_s j_s}\right).$$

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$. É fácil verificar que se $\gamma(t)$ permanece em uma célula Ω_{ij} para $t \in [t_0, t_1]$, então

 Figura 2.2: Aplicação de retorno para a órbita γ

$$\int_{t_0}^{t_1} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt = (t_1 - t_0) \operatorname{tr} A_{ij} \quad (2.10)$$

onde $X|_{\Omega_{ij}} = A_{ij}p + b_{ij}$.

Considere T_s , $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ as aplicações de transição entre as seções transversais L_{E_s} , parametrizadas por $\sigma_s : I_s \rightarrow L_{E_s}$, com $\sigma_s(u_s) = E_s$. Derivando a aplicação de retorno

$$\pi = T_k \circ \dots \circ T_1$$

e usando 2.3, encontramos

$$\pi' = \prod_{s=1}^k \frac{\det \left(X(E_s) \Big| -\sigma'_s(u_s) \right)}{\det \left(X(E_{s+1}) \Big| -\sigma'_{s+1}(u_{s+1}) \right)} \exp \left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt \right).$$

Observe agora que

$$\prod_{s=1}^k \frac{\det \left(X(E_s) \Big| -\sigma'_s(u_s) \right)}{\det \left(X(E_{s+1}) \Big| -\sigma'_{s+1}(u_{s+1}) \right)} = 1.$$

Logo, usando 2.10, concluímos que

$$\pi' = \exp \left(\sum_{s=1}^k (t_{s+1} - t_s) \operatorname{tr} A_{i_s j_s} \right).$$

□

2.4 Compactificação de Poincaré

Seja γ uma órbita do campo de vetores $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ tal que a semi-órbita γ^+ (respectivamente γ^-) está contida em um compacto. O teorema de Poincaré-Bendixson descreve os possíveis conjuntos ω -limite (respectivamente α -limite) da semi-órbita γ^+ (respectivamente γ^-). Falta, portanto, descrevermos o comportamento assintótico das semi-órbitas que não estão contidas em compactos, ou seja, o comportamento de órbitas com pontos limite no infinito.

O estudo das órbitas próximo do infinito pode ser feito através de uma técnica denominada compactificação de Poincaré. Ela recebe esse nome em homenagem ao matemático francês Henri Poincaré, que aplicou a técnica, no estudo de campos de vetores polinomiais.

Começamos definindo em $\mathbb{R}^3$ os seguintes conjuntos

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

$$\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 | x_3 = 0\},$$

$$\mathbb{H}_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 | x_3 > 0\},$$

$$\mathbb{H}_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 | x_3 < 0\},$$

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 1\}.$$

Em $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^2$ é a esfera de raio 1, sendo $\mathbb{S}^1$ seu equador. O plano $\mathcal{N}$ é um plano tangente a $\mathbb{S}^2$ no ponto $(0, 0, 1)$ que chamamos de pólo norte. Chamamos $\mathbb{H}_+$ de hemisfério norte ou hemisfério superior e $\mathbb{H}_-$ de hemisfério sul ou hemisfério inferior.

Se r é uma reta que passa pela origem $(0, 0, 0)$ e por um ponto $p_0 \in \mathcal{N}$, então ela intercepta a esfera $\mathbb{S}^2$ em dois pontos distintos p_0^+ e p_0^- , o primeiro no hemisfério superior e o segundo no hemisfério inferior.

Isto nos dá dois difeomorfismos sobrejetores $f_+ : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{H}_+$ e $f_- : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{H}_-$ cujas expressões são

$$f_+(x_1, x_2) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$f_-(x_1, x_2) = -\frac{(x_1, x_2, 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

As aplicações f_+ e f_- são as projeções centrais sobre $\mathbb{H}_+$ e $\mathbb{H}_-$ do plano $\mathcal{N}$.

Se X é um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$, os difeomorfismos f_- e f_+ induzem em $\mathbb{H}_- \cup \mathbb{H}_+$ um campo de vetores $\tilde{X}$ da seguinte maneira:

$$\tilde{X}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} Df_+(x_1, x_2)X(x_1, x_2) & \text{se } (y_1, y_2, y_3) = f_+(x_1, x_2) \in \mathbb{H}_+, \\ Df_-(x_1, x_2)X(x_1, x_2) & \text{se } (y_1, y_2, y_3) = f_-(x_1, x_2) \in \mathbb{H}_-. \end{cases}$$

Analisar o comportamento assintótico das órbitas não limitadas de X será útil estender $\tilde{X}$ para o equador $\mathbb{S}^1$, obtendo assim um campo em toda a esfera $\mathbb{S}^2$. O estudo deste campo numa vizinhança do equador fornecerá informações importantes sobre as órbitas não limitadas do sistema.

Nem sempre isso é possível, mas devido ao fato dos campos em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ serem lineares por partes conseguiremos fazer essa extensão.

Figura 2.3: Compactificação de Poincaré

Proposição 2.6 *Seja $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$. Considere $\tilde{X}$ o campo induzido em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1 = \mathbb{H}_- \cup \mathbb{H}_+$ definido como anteriormente. Então $\tilde{X}$ pode ser estendido a um campo de vetores tangente a $\mathbb{S}^1$ e analítico por partes em $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Para demonstrarmos a proposição vamos calcular o campo $\tilde{X}$ em um sistema de coordenadas conveniente de $\mathbb{S}^2$.

Sejam $\Phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$. Onde:

$$U_i = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 / y_i > 0\},$$

$$V_i = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2 / y_i < 0\}.$$

$$\begin{cases} \Phi_i(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{y_i}(y_j, y_k), & \forall (y_1, y_2, y_3) \in U_i; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad j < k, \quad i \neq j, k, \\ \Psi_i(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{y_i}(y_j, y_k), & \forall (y_1, y_2, y_3) \in V_i; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad j < k, \quad i \neq j, k. \end{cases}$$

Seja $(y_1, y_2, y_3) \in U_1 \cap \mathbb{H}_+$. Então $(y_1, y_2, y_3) = f_+(x_1, x_2)$ e

$$(\Phi_1 \circ f_+)(x_1, x_2) = \begin{cases} z_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}, \\ z_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{y_3}{y_1}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Note ainda que

$$D(\Phi_1 \circ f_+)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} D\Phi_1(y_1, y_2, y_3) \circ \tilde{X}(y_1, y_2, y_3) &= D(\Phi_1 \circ f_+)(x_1, x_2) \circ X(x_1, x_2) = \\ &= \frac{1}{x_1^2}(-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Esta é a expressão de $\tilde{X}$ em $U_1 \cap \mathbb{H}_+$. Colocando a expressão em função de z_1, z_2 obtemos:

$$z_2(-z_1 P(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) + Q(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}), -z_2 P(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2})). \quad (2.12)$$

Repetindo o processo para $y \in U_1 \cap \mathbb{H}_-$ obtemos a mesma expressão [2.12](#).

Como P e Q são funções lineares por partes, então restrito a cada célula da grade eles são polinômios de grau menor ou igual a 1. Logo [2.12](#) é a expressão de um campo analítico por partes que estende $\tilde{X}$ em U_1 .

Verifica-se analogamente que as expressões de $\tilde{X}$ em U_2 e U_3 são respectivamente:

$$z_2(P(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2}) - z_1 Q(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2}), -z_2 Q(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2})), \quad (2.13)$$

$$(P(z_1, z_2), Q(z_1, z_2)). \quad (2.14)$$

Por outro lado, as expressões de $\tilde{X}$ em V_1 , V_2 e V_3 são, respectivamente, as mesmas expressões 2.12, 2.13 e 2.14. Elas são todas compatíveis e analíticas por partes.

Dessa forma, fica claro que podemos estender o campo $\tilde{X}$ para toda a esfera $\mathbb{S}^2$. E, pelas expressões encontradas, no interior das imagens das células da grade esse campo é analítico.

Falta agora apenas mostrarmos que $\mathbb{S}^1$ é invariante pelo campo estendido.

Seja $y \in \mathbb{S}^1 \cap U_1$. Logo $y_3 = 0$, então por 2.11 temos $z_2 = \frac{y_3}{y_1} = 0$. Sendo assim a expressão do campo em y é dada por 2.12, cuja segunda componente é nula. Do mesmo modo é nula a segunda componente do campo em $\mathbb{S}^1 \cap V_1$.

Como o equador nas coordenadas (z_1, z_2) está identificado com $z_2 = 0$, concluímos portanto que $\mathbb{S}^1$ é invariante por $\tilde{X}$.

□

Assim denotemos por $X_{\mathbb{S}^2}$ o campo analítico por partes que estende $\tilde{X}$ para toda a esfera. Definimos então o campo $X_{\mathbb{S}^2}$ como a *compactificação de Poincaré de X na esfera $\mathbb{S}^2$* .

Observe que, quando restringimos $X_{\mathbb{S}^2}$ ao hemisfério superior $\mathbb{H}_+$, então pela forma como a compactificação foi construída vale

$$X_{\mathbb{S}^2}(f_+(x_1, x_2)) = Df_+(x_1, x_2)X(x_1, x_2).$$

Daí concluímos que os campos X e $X_{\mathbb{S}^2}|_{\mathbb{H}_+}$ são diferenciavelmente conjugados, sendo f_+ a conjugação. O mesmo vale quando consideramos $\mathbb{H}_-$ e f_- .

Pela observação anterior, vemos que em $\mathbb{S}^2$, temos duas cópias de X , uma no hemisfério superior e outra no hemisfério inferior.

Observe agora que se r é uma reta que passa pelo ponto $(0, 0, -1)$ e intersecta a esfera em outro ponto p_0 , então ela intercepta o plano $\mathcal{N}$ em um ponto $p_0^{\mathcal{N}}$. Isso nos dá um difeomorfismo sobrejetor $g : \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, -1) \rightarrow \pi$, cuja expressão é

$$g(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{2y_1}{y_3 + 1}, \frac{2y_2}{y_3 + 1} \right).$$

Podemos então induzir um campo de vetores $\hat{X}$ em $\mathbb{R}^2$ por

$$\hat{X}(x_1, x_2) = Dg(y_1, y_2, y_3)X_{\mathbb{S}^2}(y_1, y_2, y_3),$$

onde $g(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2)$.

Pelas mesmas observações feitas anteriormente, o campo $X_{\mathbb{S}^2}$ restrito a $\mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, -1)$

e o campo $\hat{X}$ são diferenciavelmente conjugados, sendo g a conjugação.

Então, se tomarmos o conjunto $\mathbb{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 2\}$, o campo original X e o campo $\hat{X}$ restrito a $\mathring{\mathbb{D}}$ são diferenciavelmente conjugados, sendo a conjugação $g \circ f_+$.

Por essas observações, definimos então o campo $X_{\mathbb{D}} = \hat{X}|_{\mathbb{D}}$ como a *compactificação de Poincaré de X no disco $\mathbb{D}$* .

Como $X_{\mathbb{D}}$ e $X_{\mathbb{S}^2}$ são diferenciavelmente conjugados inclusive nos conjuntos $\mathbb{S}^1$ e $\partial\mathbb{D}$, quando estivermos analisando esses campos no infinito, faremos os cálculos usando a compactificação que nos for mais apropriada.

Com a notação introduzida anteriormente, dizemos que uma singularidade é *simples* se no ponto de singularidade o campo é suave e o determinante da matriz jacobiana no ponto é não nulo, se além disso as partes reais de seus autovalores forem todas não nulas dizemos então que a singularidade é *hiperbólica*. Se o determinante do jacobiano nesse ponto for positivo, dizemos que o ponto é uma *anti-sela*, e se o determinante for negativo, dizemos que o ponto é uma *sela*.

Chamaremos de *singularidades finitas* as singularidades de $X_{\mathbb{S}^2}$, que não estão em $\mathbb{S}^1$, as singularidades em $\mathbb{S}^1$ serão chamadas de *singularidades infinitas*.

Da mesma forma uma *órbita periódica* será *finita* se não possui pontos em $\mathbb{S}^1$ e, lembrando que, como o equador é invariante por $X_{\mathbb{S}^2}$, quando $\mathbb{S}^1$ for uma órbita periódica diremos que ela é a *órbita periódica no infinito*.

Na figura 2.5, temos a representação da imagem da grade $[\Gamma, \Delta]$ pela função f_+ . Iremos nos referir a esse conjunto em $\mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{D}$ como a *grade compactificada*.

Figura 2.4: Grade compactificada

2.5 Comportamento dos campos no infinito via compactificação

Analisaremos agora com detalhes o comportamento da compactificação dos campos de $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ no infinito.

Como veremos mais adiante, é de fundamental importância entendermos a relação entre as singularidades hiperbólicas no infinito e o campo de vetores X .

Dado um campo $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$, e analisando as expressões de $X_{\mathbb{S}^2}$, é fácil vermos que o campo de vetores $X_{\mathbb{S}^2}$ é determinado em

$$\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)\}$$

pela expressão dos campos lineares não homogêneos nas células infinitas Ω_{00} , Ω_{0m} , Ω_{n0} e Ω_{nm} . A esse respeito provaremos a seguinte proposição.

Proposição 2.7 *Considere o campo de vetores linear não homogêneo*

$$X(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b},$$

então para a compactificação de Poincaré $X_{\mathbb{S}^2}$ vale

- (a)- *Se $(\text{tr}A)^2 - 4\det A < 0$, então $X_{\mathbb{S}^2}$ não possui singularidade no infinito;*
- (b)- *Se $(\text{tr}A)^2 - 4\det A = 0$ e $\text{tr}A \neq 0$, então ou todo o equador $\mathbb{S}^1$ é composto por pontos de equilíbrio, ou $X_{\mathbb{S}^2}$ possui duas singularidades não hiperbólicas no infinito;*
- (c)- *Se $(\text{tr}A)^2 - 4\det A > 0$ e $\det A < 0$, então $X_{\mathbb{S}^2}$ possui quatro singularidade no infinito, todas elas são nós hiperbólicos;*
- (d)- *Se $(\text{tr}A)^2 - 4\det A > 0$ e $\det A > 0$, então $X_{\mathbb{S}^2}$ possui quatro singularidades no infinito, duas delas são nós hiperbólicos e duas são selas. As órbitas de X que estão contidas na reta do auto espaço forte de X são separatrizes das selas no infinito;*
- (e)- *Se $(\text{tr}A)^2 - 4\det A > 0$ e $\det A = 0$, então $X_{\mathbb{S}^2}$ possui quatro singularidades não hiperbólicas no infinito. Pode existir uma reta de singularidades finitas que conecta duas singularidades infinitas;*
- (f)- *Se $\text{tr}A = 0$ e $\det A = 0$, então $X_{\mathbb{S}^2}$ possui duas singularidades não hiperbólicas no infinito. Pode existir uma reta de singularidades finitas que conecta as singularidades infinitas.*

Demonstração: É fácil verificarmos que as singularidade de $X_{\mathbb{S}^2}$ ocorrem aos pares e são antípodas em relação a origem. Além disso, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

então $(z_1, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é uma singularidade no infinito se z_1 for uma solução real de

$$-a_{12}z_1^2 + (a_{22} - a_{11})z_1 + a_{21} = 0. \quad (2.15)$$

De forma análoga, $(z_1, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é uma singularidade no infinito se z_1 é uma solução real de

$$-a_{21}z_1^2 + (a_{11} - a_{22})z_1 + a_{12} = 0. \quad (2.16)$$

Para as equações de segundo grau 2.15 e 2.16 encontramos $\Delta = (tr A)^2 - 4 \det A$.

(a) Se $\Delta < 0$, então 2.15 e 2.16 não possuem soluções reais. Portanto $X_{\mathbb{S}^2}$ não possui singularidades no infinito.

Considere então $\Delta \geq 0$. Daí as soluções da equação 2.15 são

$$z_1 = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{\Delta}}{2a_{12}}$$

e da equação 2.16 são

$$z_1 = \frac{(a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{\Delta}}{2a_{21}}.$$

Se $(z_1, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ a diferencial do campo nesse ponto é

$$\begin{pmatrix} -2a_{12}z_1 + (a_{22} - a_{11}) & b_2 - z_1b_1 \\ 0 & -a_{11} - a_{12}z_1 \end{pmatrix}$$

e se $(z_1, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ então a diferencial do campo nesse ponto é

$$\begin{pmatrix} -2a_{21}z_1 + (a_{11} - a_{22}) & b_1 - z_1b_2 \\ 0 & -a_{22} - a_{21}z_1 \end{pmatrix}.$$

Sem perda de generalidade, iremos supor a partir de agora que a matriz A está escrita na forma canônica de Jordan.

(b) Se $\Delta = 0$ e $tr A \neq 0$, precisamos considerar dois casos.

Se A for diagonalizável, então as expressões 2.15 e 2.16 se anulam para todo z_1 , logo todo ponto em $X_{\mathbb{S}^2}$ é singularidade.

Agora se A não for diagonalizável, podemos escrever

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

onde λ é o autovalor de A . Logo 2.15 é

$$-z_1^2 = 0$$

e a diferencial do campo nesse ponto fica

$$\begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

e portanto o ponto não é uma singularidade hiperbólica.

Além disso a expressão de 2.16 nunca se anula, e portanto $X_{\mathbb{S}^2}$ não possui singularidades em $\mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$.

(c) Se $\Delta > 0$ e $\det A < 0$, podemos escrever

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Assim para 2.15 temos

$$(\lambda_2 - \lambda_1)z_1 = 0$$

com a diferencial

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & b_2 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

e portanto o ponto é um nó hiperbólico, atrator se $\lambda_1 > 0$ e repulsor se $\lambda_1 < 0$.

Para 2.16 temos

$$(\lambda_1 - \lambda_2)z_1 = 0$$

com a diferencial

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & b_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$$

e portanto o ponto é um nó hiperbólico, atrator se $\lambda_2 > 0$ e repulsor se $\lambda_2 < 0$.

Assim, concluímos que $X_{\mathbb{S}^2}$ possui quatro nós hiperbólicos no infinito.

(d) Considere agora que $\Delta > 0$ e $\det A > 0$, podemos escrever

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

com $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Vamos supor que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, o outro caso pode ser tratado de forma semelhante.

Assim para 2.15 temos

$$(\lambda_2 - \lambda_1)z_1 = 0$$

com a diferencial

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & b_2 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Analisando as possibilidades para o sinal de λ_1 , concluimos que $\lambda_2 - \lambda_1$ e $-\lambda_1$ possuem sinais iguais, logo o ponto é um nó hiperbólico no infinito, atrator se $\lambda_1 > 0$ e repulsor se $\lambda_1 < 0$.

Para 2.16 temos

$$(\lambda_1 - \lambda_2)z_1 = 0$$

com a diferencial

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & b_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Novamente analisando as possibilidades para o sinal de λ_2 , concluimos que $\lambda_1 - \lambda_2$ e $-\lambda_2$ possuem sinais opostos, logo o ponto no infinito é uma sela hiperbólica.

Além disso, vemos facilmente que as órbitas de X que estão contidas na reta do auto espaço forte de A tendem para os pontos de sela no infinito quando o tempo cresce ou decresce. Logo, concluimos que a imagem dessas órbitas por f_+ são separatrizes das selas no infinito.

(e) Se $\Delta > 0$ e $\det A = 0$, podemos escrever

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Assim para 2.15 temos

$$\lambda z_1 = 0$$

com a diferencial

$$\begin{pmatrix} \lambda & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto o ponto não é uma singularidade hiperbólica infinita.

Para 2.16 temos

$$-\lambda z_1 = 0$$

com a diferencial

$$\begin{pmatrix} -\lambda & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e o ponto não é uma singularidade hiperbólica no infinito.

Além disso, se $b_1 \neq 0$, X não possui singularidades finitas, e se $b_1 = 0$, a reta $y = -\frac{b_2}{\lambda}$ é uma linha de singularidades. Essa reta de pontos singulares tende para as singularidades infinitas em $\mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$.

(f) Se $\text{tr} A = 0$ e $\det A = 0$, podemos escrever

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim para 2.15 temos

$$-z_1^2 = 0$$

com a diferencial

$$\begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo o ponto não é uma singularidade hiperbólica no infinito.

Além disso, 2.16 nunca se anula, e portanto $X_{\mathbb{S}^2}$ não possui singularidades infinitas em $\mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$.

Se $b_2 \neq 0$, X não possui singularidades finitas, e se $b_2 = 0$, então a reta $y = -b_1$ é uma linha de singularidades. Essa reta de pontos singulares tende para as singularidades infinitas de X .

□

Observe que, para uma matriz A sem estar na forma canônica de Jordan, os valores de z_1 que são singularidades hiperbólicas no infinito são os coeficiente angulares das retas que contém os auto-espacos da matriz A . Logo, como as singularidades hiperbólicas de $X_{\mathbb{S}^2}$ estão associadas com as direções dos auto-espacos de A , e eles estão contidos em retas, podemos então em cada quadrante de $\mathbb{S}^1$ possuir no máximo duas singularidades infinitas hiperbólicas.

E como, para os campos em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$, as singularidades no infinito no interior de cada quadrante são determinadas por sistemas lineares não homogêneos, concluimos que tais campos podem possuir no máximo oito singularidades hiperbólicas em

$$\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)\}.$$

Introduziremos agora um outro sistema de coordenadas que facilitará nossos cálculos quando formos analisar o comportamento de $X_{\mathbb{S}^2}$ no infinito.

Considere a aplicação $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}_+^2 \setminus (0, 0, 1)$ dada por

$$S(\theta, \rho) = \frac{(\cos \theta, \sin \theta, \rho)}{\sqrt{\rho^2 + 1}}.$$

Observe que S é um recobrimento universal de $\mathbb{S}_+^2 \setminus (0, 0, 1)$. Podemos então reescrever o campo $X_{\mathbb{S}^2}$ nas coordenadas (θ, ρ) .

Figura 2.5: Mudança de coordenadas próximo do infinito

Lema 2.1 Nas coordenadas (θ, ρ) o campo de vetores $X_{\mathbb{S}^2}$ tem a seguinte expressão:

$$(A_1(\theta, \rho) + \rho A_0(\theta)) \frac{\partial}{\partial \theta} - \rho(R_1(\theta, \rho) + \rho R_0(\theta)) \frac{\partial}{\partial \rho},$$

onde

$$A_0(\theta) = a_2 \cos \theta - a_1 \sin \theta, \quad R_0(\theta) = a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} A_1(\theta, \rho) = & -\sin \theta (b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_1^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_1^j |\sin \theta - \rho \delta_j| \\ & + \cos \theta (b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_2^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_2^j |\sin \theta - \rho \delta_j|), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} R_1(\theta, \rho) = & \cos \theta (b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_1^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_1^j |\sin \theta - \rho \delta_j|) \\ & + \sin \theta (b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta + \sum_{i=1}^n c_2^i |\cos \theta - \rho \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_2^j |\sin \theta - \rho \delta_j|). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Demonstração: Levando em conta que as componentes P e Q são dadas pela equação 2.1, a prova decorre diferenciando as relações $\rho x = \cos \theta$, $\rho y = \sin \theta$ entre as coordenadas e substituindo P e Q nas expressões encontradas. Assim basta simplificar as expressões

$$\begin{cases} \theta' = \rho(-\operatorname{sen}\theta P(\frac{\cos\theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}) + \cos\theta Q(\frac{\cos\theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho})), \\ \rho' = \rho^2(-\cos\theta P(\frac{\cos\theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}) - \operatorname{sen}\theta Q(\frac{\cos\theta}{\rho}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho})). \end{cases}$$

□

Nessas coordenadas é mais simples analisarmos as condições para que o campo se anule em algum ponto do infinito, pois o equador é representado nas coordenadas (θ, ρ) pelos pontos $\rho = 0$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Assim para um ponto $p_0 \in \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{S}^2$ ser uma singularidade de $X_{\mathbb{S}^2}$ deve existir θ_0 tal que $A_1(\theta_0, 0) = 0$. Temos então o seguinte lema:

Lema 2.2 *As singularidades de $X_{\mathbb{S}^2}$ ao longo do equador $\mathbb{S}^1$ são dadas pelos zeros da componente angular $A_1(\theta, 0)$ da seguinte forma.*

No k -quadrante, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, são as soluções reais da equação $A_{1k}(\theta) = 0$ no intervalo $[(k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}]$, onde:

$$\begin{aligned} A_{11}(\theta) &= [b_{21} + c_2]\cos^2\theta + [b_{22} - b_{11} + d_2 - c_1]\operatorname{sen}\theta\cos\theta - [b_{12} + d_1]\operatorname{sen}^2\theta, \\ A_{12}(\theta) &= [b_{21} - c_2]\cos^2\theta + [b_{22} - b_{11} + d_2 + c_1]\operatorname{sen}\theta\cos\theta - [b_{12} + d_1]\operatorname{sen}^2\theta, \\ A_{13}(\theta) &= [b_{21} - c_2]\cos^2\theta + [b_{22} - b_{11} - d_2 + c_1]\operatorname{sen}\theta\cos\theta - [b_{12} - d_1]\operatorname{sen}^2\theta, \\ A_{14}(\theta) &= [b_{21} + c_2]\cos^2\theta + [b_{22} - b_{11} - d_2 - c_1]\operatorname{sen}\theta\cos\theta - [b_{12} - d_1]\operatorname{sen}^2\theta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

com

$$c_1 = \sum_{i=1}^n c_1^i, \quad c_2 = \sum_{i=1}^n c_2^i, \quad d_1 = \sum_{j=1}^m d_1^j, \quad d_2 = \sum_{j=1}^m d_2^j.$$

Demonstração: A demonstração é consequência direta de 2.17, calculada em pontos da forma $(\theta, 0)$.

□

Com as notações introduzidas anteriormente vale o seguinte corolário.

Corolário 2.1 *Uma singularidade no infinito está na direção do eixo x se e somente se:*

$$(b_{21} + c_2)(-b_{21} + c_2) = 0.$$

E uma singularidade no infinito está na direção do eixo y se e somente se:

$$(b_{12} + d_1)(-b_{12} + d_1) = 0.$$

Demonstração: Basta observar que uma singularidade na direção do eixo x acontece quando $A_{11}(0) = A_{14}(0) = 0$ ou quando $A_{12}(\pi) = A_{13}(\pi) = 0$, ou seja devemos ter $b_{21} + c_2 = 0$ ou $-b_{21} + c_2 = 0$. O mesmo vale para as singularidades na direção do eixo y , calculando as funções em $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

□

Lema 2.3 *A função $R_1(\theta, 0)$ da componente radial do campo de vetores $X_{\mathbb{S}^2}$ calculada no equador $\rho = 0$ tem a seguinte expressão. No k -quadrante, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, a função é dada por:*

$$\begin{aligned} R_{11}(\theta) &= [b_{11} + c_1]\cos^2\theta + [b_{12} + b_{21} + d_1 + c_2]\sin\theta\cos\theta + [b_{22} + d_2]\sin^2\theta, \\ R_{12}(\theta) &= [b_{11} - c_1]\cos^2\theta + [b_{12} + b_{21} + d_1 - c_2]\sin\theta\cos\theta + [b_{22} + d_2]\sin^2\theta, \\ R_{13}(\theta) &= [b_{11} - c_1]\cos^2\theta + [b_{12} + b_{21} - d_1 - c_2]\sin\theta\cos\theta + [b_{22} - d_2]\sin^2\theta, \\ R_{14}(\theta) &= [b_{11} + c_1]\cos^2\theta + [b_{12} + b_{21} - d_1 + c_2]\sin\theta\cos\theta + [b_{22} - d_2]\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Demonstração: A demonstração é consequência direta de 2.18, calculada em pontos da forma $(\theta, 0)$.

□

Além de analisar se um ponto no infinito é uma singularidade queremos também determinar se essa singularidade é ou não hiperbólica. Logo para garantirmos que uma singularidade ao longo do equador é hiperbólica precisamos analisar as derivadas do campo $X_{\mathbb{S}}$ nas coordenadas (θ, ρ) .

Dada uma singularidade no infinito $(\theta_0, 0)$, a linearização do campo de vetores $X_{\mathbb{S}}$ na singularidade é:

$$DX_{\mathbb{S}}(\theta_0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1(\theta_0, 0)}{\partial \theta} & \frac{\partial A_1(\theta_0, 0)}{\partial \rho} + A_0(\theta_0) \\ 0 & -R_1(\theta_0, 0) \end{pmatrix}.$$

Segue que a matriz da linearização em um ponto singular no infinito é sempre triangular. Portanto seus autovalores são sempre reais e iguais aos elementos na diagonal principal da matriz. Para o ponto $(\theta_0, 0)$ ser hiperbólico deve então valer:

$$\det DX_{\mathbb{S}}(\theta_0, 0) = -\left(\frac{\partial A_1(\theta_0, 0)}{\partial \theta}\right)(R_1(\theta_0, 0)) \neq 0.$$

2.5.1 Derivada da aplicação de retorno para a órbita no infinito

Com as notações introduzidas na seção anterior agora podemos encontrar uma expressão para a derivada da aplicação de retorno de uma órbita no infinito.

Proposição 2.8 *Suponha que o equador é uma órbita periódica do sistema $X_{\mathbb{S}}$. Podemos então definir a transformação de Poincaré π associada à órbita no infinito, tal transformação é analítica e sua derivada é dada por:*

$$\pi'(0) = \exp \left[\sum_{j=1}^4 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} -\frac{R_{1j}(\theta)}{A_{1j}(\theta)} d\theta \right],$$

onde

$$\theta_j = \frac{\pi}{2}j, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Demonstração: Observe que estamos supondo que o equador é uma órbita periódica do sistema $X_{\mathbb{S}^2}$. Não existem portanto singularidades no infinito e $A_1(\theta, 0) \neq 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Além disso como o equador é uma órbita periódica, então nas coordenadas (θ, ρ) a reta $\rho = 0$ é uma órbita do sistema.

Nas coordenadas (θ, ρ) a grade $[\Gamma, \Delta]$, gera curvas que são as pré-imagens das linhas $x = \gamma_i$ e $y = \delta_j$. Essas curvas são dadas pelas equações $\rho\gamma_i = \cos\theta$ e $\rho\delta_j = \sin\theta$.

Pelo fato do equador ser uma órbita periódica do sistema sabemos que o campo de vetores é paralelo ao eixo θ quando temos $\rho = 0$.

As curvas mencionadas anteriormente cortam o eixo θ transversalmente, então podemos considerar pequenos arcos dessas curvas como seções transversais do sistema numa vizinhança do eixo θ .

As curvas $\rho\gamma_i = \cos\theta$ cortam o eixo θ em um ângulo de coeficiente angular $-\frac{1}{\gamma_i}$ em $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{\gamma_i}$ em $\theta = \frac{3\pi}{2}$, e as retas $\rho\delta_j = \sin\theta$ cortam o eixo θ em um ângulo de coeficiente angular $\frac{1}{\delta_j}$ em $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$ e $-\frac{1}{\delta_j}$ em $\theta = \pi$.

Para simplificar a notação vamos denotar as seções que estão em $\rho\gamma_i = \cos\theta$ por $\Sigma_i^{\frac{\pi}{2}}$ quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\Sigma_i^{\frac{3\pi}{2}}$ quando $\theta = \frac{3\pi}{2}$, e as seções que estão em $\rho\delta_j = \sin\theta$ serão Σ_j^0 quando $\theta = 0$, Σ_j^{π} quando $\theta = \pi$ e $\Sigma_j^{2\pi}$ quando $\theta = 2\pi$.

Em cada célula definida pelas curvas previamente descritas, o campo de vetores é diferenciável. Podemos aplicar a proposição 2.3 para definir uma aplicação de transição entre os lados das célula.

No plano (θ, ρ) os pontos $(0, 0)$ e $(2\pi, 0)$ correspondem ao ponto $(1, 0, 0)$ de $\mathbb{S}^1 \cap \mathbb{S}^2$, enquanto os pontos $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, 0)$ e $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ correspondem respectivamente aos pontos

$(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$ e $(0, -1, 0)$ de $\mathbb{S}^1 \cap \mathbb{S}^2$.

Suponha agora que a órbita associada ao equador está orientada positivamente com relação a θ . Logo analisar a estabilidade da órbita é o mesmo que analisar a derivada de uma aplicação de transição entre duas seções transversais Σ_j^0 e $\Sigma_j^{2\pi}$.

Podemos então definir uma aplicação de retorno para essa órbita

$$\pi : \Sigma_j^0 \rightarrow \Sigma_j^{2\pi}$$

com

$$\pi(p) = T_{2(n+m)} \circ \cdots \circ T_2 \circ T_1(p), \quad (2.21)$$

Onde $T_k(p)$ são as aplicações de transição entre seções transversais consecutivas do sistema. A figura 2.6 ilustra a situação que estamos considerando.

Como em cada célula o sistema é analítico, então as aplicações de transição T_k são analíticas e portanto π assim definida é analítica.

Aplicando a regra da cadeia à expressão em 2.21, encontramos que a derivada da aplicação de retorno tem a seguinte forma:

$$\pi'(0) = \Pi_{l=1}^{2(n+m)} T'_k(0). \quad (2.22)$$

Observe agora que, pela proposição 2.3, a derivada da aplicação de transição entre duas seções transversais quaisquer que se intersectam $(\theta_0, 0)$ e cortam o eixo θ transversalmente com ângulos α_1 e α_2 respectivamente é igual a $\text{sen}\alpha_1/\text{sen}\alpha_2$.

Como o equador é uma órbita, nas coordenadas (θ, ρ) a solução do sistema é escrito como $\Phi(t) = (\theta(t), 0)$, onde vale que $\theta'(t) = A_1(\theta(t), 0)$.

Além disso, dada uma aplicação de transição T entre duas seções transversais Σ_1 e Σ_2 que não se intersectam e que cortam o eixo θ transversalmente respectivamente em $(\theta_1, 0)$ e $(\theta_2, 0)$ com ângulos α_1 e α_2 , onde $\theta_2 > \theta_1$, $t_2 > t_1$, $\theta(t_1) = \theta_1$ e $\theta(t_2) = \theta_2$, então por 2.3 a derivada de T é:

$$T'(0) = \frac{\det \begin{pmatrix} A_1(\theta_1, 0) & \cos\alpha_1 \\ 0 & \text{sen}\alpha_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} A_1(\theta_2, 0) & \cos\alpha_2 \\ 0 & \text{sen}\alpha_2 \end{pmatrix}} \exp \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial A_1(\theta(t), 0)}{\partial \theta} - R_1(\theta(t), 0) \right) dt \right].$$

Como $A_1(\theta, 0) \neq 0 \forall \theta \in \mathbb{R}$, então $\theta'(t) = A_1(\theta(t), 0) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Fazendo então a mudança de variáveis $\theta = \theta(t)$ temos:

$$T'(0) = \frac{A_1(\theta_1, 0) \operatorname{sen} \alpha_1}{A_1(\theta_2, 0) \operatorname{sen} \alpha_2} \exp \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\frac{\partial A_1(\theta, 0)}{\partial \theta}}{A_1(\theta, 0)} - \frac{R_1(\theta, 0)}{A_1(\theta, 0)} d\theta \right],$$

ou seja

$$T'(0) = \frac{A_1(\theta_1, 0) \operatorname{sen} \alpha_1}{A_1(\theta_2, 0) \operatorname{sen} \alpha_2} \exp \left[\ln \left(\frac{A_1(\theta_2, 0)}{A_1(\theta_1, 0)} \right) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} - \frac{R_1(\theta, 0)}{A_1(\theta, 0)} d\theta \right].$$

Daí concluímos

$$T'(0) = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} \exp \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} - \frac{R_1(\theta, 0)}{A_1(\theta, 0)} d\theta \right). \quad (2.23)$$

Agora nos resta observar que as aplicações de transição entre as seções consecutivas usadas na definição da aplicação de Poincaré apresentam simetria, ou seja, a primeira derivada dessas aplicações em pontos antipodais é recíproca. Assim os únicos termos que aparecem em 2.22 são os referentes as seções consecutivas em $\theta = \frac{\pi l}{2}$ $l = 0, 1, 2, 3$. $\square$

Figura 2.6: Aplicação de retorno para a órbita periódica no infinito

Enunciaremos aqui duas proposições que aparecerão mais tarde e indicam como dois tipos de perturbação afetam os pontos no infinito do campos seccionalmente lineares.

Proposição 2.9 *Suponha que o equador é uma órbita periódica de $X_{\mathbb{S}^2}$. Considere a família a um parâmetro $X_\nu = X + \nu(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})$. Então o equador é uma órbita periódica hiperbólica de $X_{\nu \mathbb{S}^2}$ para todo $\nu \neq 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração: Observe que para a família de campos a um parâmetro X_ν vale que

$A_{\nu 1}(\theta, 0) = A_1(\theta, 0)$ e $R_{\nu 1}(\theta, 0) = \nu + R_1(\theta, 0)$.

Usando a expressão encontrada em 2.8 temos

$$\pi'_\nu(0) = \exp \left[\sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} -\frac{R_{\nu 1,l}(\theta)}{A_{\nu 1,l}(\theta)} d\theta \right]$$

e pelas relações acima

$$\pi'_\nu(0) = \exp \left[\sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} -\frac{\nu + R_{1,l}(\theta)}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right].$$

Derivando a expressão anterior com relação a ν tem-se

$$\frac{d}{d\nu} \pi'_\nu(0) = \exp \left[\sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} -\frac{\nu + R_{1,l}(\theta)}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right] \left(- \sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} \frac{1}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right),$$

ou seja

$$\left. \frac{d}{d\nu} \pi'_\nu(0) \right|_{\nu=0} = \pi'(0) \left(- \sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} \frac{1}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right).$$

Como estamos supondo que o equador é uma órbita periódica, então $A_1(\theta, 0) \neq 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, assim $A_{1,l}(\theta) \neq 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2, 3, 4$. Por A_1 ser uma função contínua então $A_{1,l}$ possuem todas o mesmo sinal, logo concluímos que

$$\left(- \sum_{l=1}^4 \int_{\frac{\pi(l-1)}{2}}^{\frac{\pi l}{2}} \frac{1}{A_{1,l}(\theta)} d\theta \right) \neq 0$$

e portanto temos $\frac{d}{d\nu} \pi'_\nu(0) \neq 0$.

Assim a função $\pi'_\nu(0)$ é crescente ou decrescente com relação a ν e portanto podemos escolher valores de ν suficientemente pequenos para que $\pi'_\nu(0) \neq 1$.

□

Seja $X = (P, Q)$ um campo de vetores no plano $\mathbb{R}^2$. Definimos o campo $R_\omega(X)$ dado pela rotação do campo X por um ângulo ω como sendo $R_\omega(X) = (P_\omega, Q_\omega)$ com

$$\begin{pmatrix} P_\omega \\ Q_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Proposição 2.10 *Seja $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$, seja X_ω o campo X rotacionado por ω , então vale as seguintes relações:*

$$\begin{pmatrix} A_{\omega 1}(\theta) \\ R_{\omega 1}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(\theta) \\ R_1(\theta) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$, então $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$P(x, y) = a_1 + b_{11}x + b_{12}y + \sum_{i=1}^n c_1^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_1^j |y - \delta_j|,$$

$$Q(x, y) = a_2 + b_{21}x + b_{22}y + \sum_{i=1}^n c_2^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_2^j |y - \delta_j|.$$

Como

$$X_\omega(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix},$$

então o campo $X_\omega(x, y) = (P_\omega(x, y), Q_\omega(x, y))$ pode ser escrito como:

$$P_\omega(x, y) = (a_1 \cos \omega + a_2 \sin \omega) + (b_{11} \cos \omega + b_{21} \sin \omega)x + (b_{12} \cos \omega + b_{22} \sin \omega)y +$$

$$\sum_{i=1}^n (c_1^i \cos \omega + c_2^i \sin \omega) |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m (d_1^j \cos \omega + d_2^j \sin \omega) |y - \delta_j|,$$

$$Q_\omega(x, y) = (-a_1 \sin \omega + a_2 \cos \omega) + (-b_{11} \sin \omega + b_{21} \cos \omega)x + (-b_{12} \sin \omega + b_{22} \cos \omega)y +$$

$$\sum_{i=1}^n (-c_1^i \sin \omega + c_2^i \cos \omega) |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m (-d_1^j \sin \omega + d_2^j \cos \omega) |y - \delta_j|.$$

Logo, usando as equações encontradas em 2.19 e 2.20, e substituindo pelos termos equivalentes de P_ω e Q_ω encontramos a relação desejada.

□

2.6 Tangências com a grade

Introduziremos agora um conceito que será importante para a próxima seção.

Definição 2.2 *Suponha que temos uma curva no plano definida por $f(p) = 0$, onde f é uma função de classe C^1 em que vale $\nabla f(p) \neq (0, 0)$, $\forall p \in f^{-1}(0)$. Tome $\varphi(t, p)$ o fluxo do campo de vetores X . Para $p_0 \in f^{-1}(0)$, dizemos que o campo de vetores X é tangente a curva em p_0 se*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\varphi(0, p_0)) = 0,$$

ou seja

$$\langle \nabla f(p_0), X(p_0) \rangle = 0.$$

Além disso, se

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\varphi(0, p_0)) \neq 0$$

dizemos que essa tangência é parabólica ou quadrática.

No caso que estamos estudando nos interessa como são as tangências de um campo X com a grade $[\Gamma, \Delta]$.

Dessa forma podemos exprimir uma tangência vertical com a grade em pontos da forma (γ_i, y) pela função $f(x, y) = x - \gamma_i$. Analogamente, tangências com a grade em pontos (x, δ_j) são expressos por $f(x, y) = y - \delta_j$.

Vamos terminar essa seção analisando o caso das tangências verticais. Dado um campo de vetores $X = (P, Q)$, considere a reta $x = \gamma_i$. Usando a definição anterior, temos uma tangência parabólica com essa reta se

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\varphi(t, \gamma_i, y_0)) = \langle (1, 0); (P(\gamma_i, y_0), Q(\gamma_i, y_0)) \rangle = P(\gamma_i, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\varphi(t, \gamma_i, y_0)) = \langle (0, P_y(\gamma_i, y_0)); (0, Q(\gamma_i, y_0)) \rangle = P_y(\gamma_i, y_0)Q(\gamma_i, y_0) \neq 0.$$

Se eliminarmos o caso em que o ponto de tangência (γ_i, y_0) é uma singularidade na grade $[\Gamma, \Delta]$, então temos $Q(\gamma_i, y_0) \neq 0$, e logo para a tangência ser parabólica deve valer $P_y(\gamma_i, y_0) \neq 0$.

Observe também que em cada intervalo Δ_j , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, as tangências verticais são determinadas pela função linear $P(\gamma_i, y) = 0$, logo se $P_y(\gamma_i, y) \neq 0$ então existe no máximo uma tangência do campo X com a grade $[\Gamma, \Delta]$ em $\gamma_i \times \Delta_j$ e essa tangência é quadrática e isolada.

Capítulo 3

Estabilidade Estrutural

Neste capítulo definiremos estabilidade estrutural em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ e listaremos propriedades suficientes para que um campo de vetores X seja estruturalmente estável. Tais condições são baseadas nos trabalhos de M. M. Peixoto e M. C. Peixoto [PP59] e J. Sotomayor [Sot85], onde temos uma rica análise do que acontece com tais condições quando os campos sofrem pequenas perturbações.

3.1 Definição de Estabilidade Estrutural

Em geral, para definirmos estabilidade estrutural, consideramos um espaço $\mathfrak{X}$ de campos de vetores em algum subconjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{S}^2$ e dotamos esse espaço com alguma topologia. Daí, dizemos que $X \in \mathfrak{X}$ é estruturalmente estável se existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X em $\mathfrak{X}$ tal que para todo $Y \in \mathcal{U}$ existe uma equivalência topológica definida em U , entre X e Y .

Assim, como estamos considerando $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ com a topologia induzida pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}^{N(\Gamma,\Delta)}$, e devido a relação desses campos com a grade $[\Gamma, \Delta]$, usando as notações introduzidas no capítulo anterior, é natural darmos a seguinte definição de estabilidade estrutural em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$.

Definição 3.1 *Um elemento $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ é dito estruturalmente estável se existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ tal que para todo Y em $\mathcal{U}$ existe um homeomorfismo $h_Y : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ que leva órbitas orientadas de $Y_{\mathbb{D}}$ em órbitas orientadas de $X_{\mathbb{D}}$ preservando $\partial\mathbb{D}$ e também a grade compactificada $[\Gamma, \Delta]$.*

Com essas considerações, definimos $\mathcal{S}_{\Gamma,\Delta}$ como sendo o conjunto de todos os campos em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ que são estruturalmente estáveis.

3.2 Propriedades de genericidade dos sistemas seccionalmente lineares

Listaremos aqui algumas condições suficientes para que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ esteja contido em $\mathcal{S}_{\Gamma,\Delta}$.

Tais condições estão no trabalho de J. Sotomayor e R. Garcia [SG03], e são remi-niscentes das condições que aparecem no teorema de Andronov - Pontryagin - Peixoto. Usaremos a notação introduzida no capítulo anterior.

Definição 3.2 *Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ satisfaz as $[\Gamma, \Delta]$ -condições para as singularidades se:*

1. *Todas as singularidades no infinito são hiperbólicas e disjuntas da direção dos eixos x e y ,*
2. *(respectivamente 2') Todas as suas singularidades finitas são hiperbólicas (respectivamente simples) e disjuntas das linhas $\Gamma \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \Delta$,*
3. *Todas as tangências com as linhas $\Gamma \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \Delta$ são quadráticas e disjuntas das esquinas $\Gamma \times \Delta$ da grade.*

Definição 3.3 *O conjunto dos campos de vetores satisfazendo as três condições será denotado por $\Sigma_{\Gamma,\Delta}(1)$, quando somente uma das condições for satisfeita (digamos a primeira), escreveremos $\Sigma_{\Gamma,\Delta}(1;1)$, quando duas condições forem satisfeitas (digamos a primeira e a terceira), escreveremos $\Sigma_{\Gamma,\Delta}(1;1,3)$, e assim em diante.*

Definição 3.4 *Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ satisfaz as $[\Gamma, \Delta]$ -condições para órbitas periódicas se:*

1. *Todas as suas órbitas periódicas finitas são hiperbólicas e disjuntas das esquinas $\Gamma \times \Delta$ da grade e das tangências com as linhas $\Gamma \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \Delta$,*
2. *A órbita periódica no infinito é hiperbólica.*

Definição 3.5 *O conjunto dos campos de vetores satisfazendo essas duas condições será denotado por $\Sigma_{\Gamma,\Delta}(2)$, quando somente uma dessas condições for satisfeita será escrito $\Sigma_{\Gamma,\Delta}(2;1)$ ou $\Sigma_{\Gamma,\Delta}(2;2)$, e assim por diante.*

Definição 3.6 Uma $[\Gamma, \Delta]$ -conexão de separatrizes de X é uma órbita finita de $X_{\mathbb{D}}$ que conecta:

1. dois pontos de sela que podem coincidir, nesse caso dizemos que temos uma conexão de selas ou, no caso de coincidência, um laço de sela,
2. um ponto de sela e um ponto de tangência, nesse caso dizemos que temos uma conexão de sela-tangência,
3. um ponto de sela e uma esquina da grade, nesse caso dizemos que temos uma conexão de sela-esquina,
4. dois pontos de tangência que podem coincidir, nesse caso dizemos que temos uma conexão de tangências ou, no caso de coincidência, um laço de tangência (o que é o mesmo que uma órbita periódica passando por uma tangência),
5. um ponto de tangência e uma esquina da grade, nesse caso dizemos que temos uma conexão de tangência-esquina,
6. dois pontos de esquina de grade que podem coincidir, nesse caso dizemos que temos uma conexão de esquinas ou, no caso de coincidência, um laço de esquina (o que é o mesmo que uma órbita periódica passando por uma esquina).

Definição 3.7 O conjunto dos campos de vetores que não possuem $[\Gamma, \Delta]$ -conexões de separatrizes será denotado por $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(3)$.

Observação 3.1 Note que as conexões de sela contidas no infinito não foram consideradas conexões de separatrizes, isso ocorre pelo fato de que $\partial\mathbb{D}$ é invariante por $X_{\mathbb{D}}$, o que implica que essas conexões de sela persistem por pequenas perturbações.

3.3 Teorema de Estabilidade e Genericidade

Definidas essas condições e usando a notação da seção anterior podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.1 Para o conjunto

$$\Sigma_{\Gamma, \Delta} = \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1) \cap \Sigma_{\Gamma, \Delta}(2) \cap \Sigma_{\Gamma, \Delta}(3)$$

valem as seguintes afirmações:

Figura 3.1: Exemplos de $[\Gamma, \Delta]$ -conexões de separatrizes

1. $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ é aberto em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$,
2. $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ está contido no conjunto $\mathcal{S}_{\Gamma, \Delta}$,
3. $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ é denso em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$.

A demonstração da abertura no primeiro item e a construção do homeomorfismo no segundo item serão feitos pelo método das regiões canônicas com alguns ajustes necessários para garantir as condições relativas à grade $[\Gamma, \Delta]$.

A prova do terceiro item do teorema 3.1 será consequência do teorema 3.2, que garante que o complementar do conjunto $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$, chamado de conjunto de bifurcação, tem medida de Lebesgue nula.

Teorema 3.2 *O conjunto aberto $\Sigma_{\Gamma, \Delta} = \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1) \cap \Sigma_{\Gamma, \Delta}(2) \cap \Sigma_{\Gamma, \Delta}(3)$ possui medida de Lebesgue total, em particular $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ é denso em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$.*

Para provar o teorema anterior estudaremos o complementar do conjunto $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$.

Teorema 3.3 *Para todo $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ a família a cinco parâmetros definida por*

$$X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega}(x, y) = R_\omega[X(x, y) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \nu(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + \beta(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y})]$$

intersecta o conjunto fechado $\mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta} = \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma,\Delta}$ em um conjunto de medida de Lebesgue nula.

A demonstração desses teoremas serão feitas no próximo capítulo.

3.4 Lemas

Apresentaremos agora alguns lemas que serão importantes para a demonstração da abertura do conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ e para a construção do homeomorfismo através do método das regiões canônicas.

Lema 3.1 *Seja $X \in \Sigma_{\Gamma,\Delta}$ e seja p_E um ponto singular finito hiperbólico de X . Então existem $\delta > 0$ e uma vizinhança $\mathcal{V}_{p_E}$ de p_E tal que essa vizinhança é um disco com bordo suave disjunto da grade $[\Gamma, \Delta]$. Todo $Y \in B_\delta(X)$ tem em $\mathcal{V}_{p_E}$ uma única singularidade $p_E(Y)$ do mesmo tipo que p_E em X , isto é, uma sela, um nó ou um foco, atrator ou repulsor. Além disso, se p_E não é uma sela, podemos tomar $\mathcal{V}_{p_E}$ tal que todo $Y \in B_\delta(X)$ é transversal a $\partial\mathcal{V}_{p_E}$.*

Demonstração: Seja $X \in \Sigma_{\Gamma,\Delta}$ e tome p_E um ponto singular finito de X . Como o campo está no conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$, garantimos que existe uma célula Ω_{ij} tal que p_E está no interior dessa célula.

Considere a função

$$f : \mathbb{R}^{N(\Gamma,\Delta)} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

onde

$$f(Y, q) = Y(q).$$

Como o ponto p_E é um ponto de equilíbrio de X , vale

$$f(X, p_E) = X(p_E) = 0.$$

Note também que, pelo fato de p_E estar contido no interior de Ω_{ij} , podemos, para todo $q \in \mathring{\Omega}_{ij}$, escrever

$$f(Y, q) = A_{ij}(Y)q + b_{ij}(Y),$$

onde $A_{ij}(Y) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $b_{ij}(Y) \in \mathbb{R}^2$ dependem continuamente de Y . Na verdade, com valores de q restritos a célula Ω_{ij} , f é uma função analítica nas duas variáveis.

Logo, diferenciando f com relação a q e avaliando a diferencial no ponto (X, p_E) , temos

$$D_q f(X, p_E) = A_{ij}(X)$$

e como p_E é um ponto singular hiperbólico de X , garantimos que $\det A_{ij}(X) \neq 0$.

Aplicando então o teorema da função implícita a f , temos que existe $\delta > 0$, uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p_E e uma função $p_E : B_\delta(X) \rightarrow \mathcal{U}$ tal que

$$f(Y, p_E(Y)) = Y(p_E(Y)) = 0, \quad \forall Y \in B_\delta(X).$$

Diminuindo a vizinhança caso seja necessário, podemos considerar que $\mathcal{U}$ está contida no interior de Ω_{ij} , e portanto é disjunta da grade $[\Gamma, \Delta]$.

Dessa forma provamos a existência e a unicidade do ponto singular $p_E(Y)$.

A hiperbolicidade e o tipo do ponto singular $p_E(Y)$ decorrem do fato de que as funções $\det A_{ij}(Y)$ e $\text{tr} A_{ij}(Y)$ dependem continuamente de Y . Logo, diminuindo δ caso seja necessário, garantimos que $p_E(Y)$ é hiperbólico e do mesmo tipo que p_E , isto é, uma sela, um nó ou um foco. Além disso, se p_E não for uma sela, $p_E(Y)$ tem o mesmo critério de estabilidade de p_E , ou seja, é um ponto atrator ou repulsor.

Suponha agora que p_E não é uma sela. Vamos escolher $\mathcal{V}_{p_E}$ de tal forma que todo campo em $B_\delta(X)$ seja transversal ao bordo dessa vizinhança. Como enunciado em [Sot79, p.74], pelo fato do campo X ser linear em Ω_{ij} , existe uma forma quadrática, a saber

$$\mathcal{Q}(q) = \int_0^\infty \langle e^{tA_{ij}} q, e^{tA_{ij}} q \rangle dt,$$

que é uma função de Lyapunov estrita para o campo X em uma vizinhança de p_E . Como essa função é contínua e $\mathcal{Q}(p_E) = 0$, podemos então escolher um dos níveis dessa forma quadrática como $\partial\mathcal{V}_{p_E}$ com $\mathcal{V}_{p_E} \subset \mathcal{U}$.

A transversalidade de Y a $\partial\mathcal{V}_{p_E}$ resultará da estabilidade assintótica do ponto singular p_E de X (ou $-X$). De fato, como p_E é assintoticamente estável e $\mathcal{Q}$ é uma função de Lyapunov estrita para p_E , então para todo $q \in \partial\mathcal{V}_{p_E}$, vale

$$\langle \nabla \mathcal{Q}(q), X(q) \rangle < 0.$$

Considere a função $\mathcal{G}(q, Y) = \langle \nabla \mathcal{Q}(q), Y(q) \rangle$. Essa função é contínua nas duas variáveis. Por $\partial\mathcal{V}_{p_E}$ ser compacto, tomemos

$$\max\{\mathcal{G}(q, X) | q \in \partial\mathcal{V}_{p_E}\} = M < 0. \quad (3.1)$$

Diminuindo δ caso seja necessário, para todo $Y \in B_\delta(X)$, $\mathcal{G}(q, Y) < 0$, $\forall q \in \partial\mathcal{V}_{p_E}$, ou

seja, todo Y em $B_\delta(X)$ é transversal ao bordo de $\mathcal{V}_{p_E}$.

De fato, se isso não ocorresse, existiriam sequências $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de campos em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ e $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos em $\partial \mathcal{V}_{p_E}$ tal que

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$$

e

$$q_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tilde{p}$$

com $\tilde{p} \in \partial \mathcal{V}_{p_E}$, onde

$$\mathcal{G}(q_n, Y_n) \geq 0.$$

Mas, como $\mathcal{G}$ é contínua e vale 3.1, temos

$$\mathcal{G}(q_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{G}(\tilde{p}, X) \leq M < 0,$$

o que é uma contradição.

Isso termina a demonstração do lema. □

Os campos em $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ possuem no máximo $(n+1)(m+1)$ singularidades finitas. Logo, se $p_{E_1}, p_{E_2}, \dots, p_{E_k}$ são os pontos singulares finitos de X , podemos escolher $\delta > 0$ e vizinhanças $\mathcal{V}_{p_{E_s}}$ de p_{E_s} tal que o enunciado do lema anterior seja válido para todo campo $Y \in B_\delta(X)$ e todo ponto singular finito p_{E_s} .

Lema 3.2 *Seja $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ e seja γ uma órbita periódica finita de X . Então existem $\delta > 0$ e uma vizinhança $\mathcal{V}_\gamma$ de γ tal que $\mathcal{V}_\gamma$ é uma coroa com bordo suave disjunta das esquinas da grade $[\Gamma, \Delta]$ e transversal a Y para todo $Y \in B_\delta(X)$. Cada $Y \in B_\delta(X)$ tem em $\mathcal{V}_\gamma$ uma única órbita periódica $\gamma(Y)$ do mesmo tipo que γ de X , isto é, hiperbólica atratora ou repulsora de acordo com o caso de γ . Além disso todas as órbitas de Y em $\mathcal{V}_\gamma$ são transversais à grade $[\Gamma, \Delta]$.*

Demonstração: Considere $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ e seja γ uma órbita periódica finita de X . Como o campo está no conjunto $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$, garantimos que a órbita periódica γ é hiperbólica e não possui pontos de esquina nem pontos de tangência com a grade $[\Gamma, \Delta]$.

Seja

$$d = d(\gamma, \Gamma \times \Delta)$$

a distância entre o conjunto dos pontos de esquina da grade $\Gamma \times \Delta$ e a órbita γ . Pelas considerações anteriores concluímos que $d > 0$.

Tome

$$V_\epsilon = \{p \in \mathbb{R}^2 | d(p, \gamma) < \epsilon\},$$

onde $0 < \epsilon < d$. Se ϵ for pequeno o suficiente, V_ϵ é uma vizinhança de γ que não possui outras órbitas periódicas de X nem pontos de esquina da grade.

Considere agora a família de campos rotacionados dada por

$$X_\omega = R_\omega(X).$$

Aplicando os resultados de [Duf53] sobre famílias de campos vetoriais rotacionados, concluímos que, por γ ser hiperbólica existem, C_1 e C_2 órbitas periódicas dos campos $R_{\omega_1}(X)$ e $R_{\omega_2}(X)$ obtidas rotacionando o campo de vetores X em sentidos opostos, ou seja, $\omega_1 < 0 < \omega_2$, uma dessas órbitas está contida no interior de γ e a outra contém γ , e C_1 e C_2 estão contidos em V_ϵ .

Observemos ainda que o campo X é transversal às curvas C_1 e C_2 . De fato, os campos X e X_{ω_1} formam um ângulo constante ω_1 sobre a curva C_1 e X e X_{ω_2} formam um ângulo constante ω_2 sobre a curva C_2 .

De forma análoga a demonstração no lema anterior, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que todo Y em $B_\delta(X)$ seja transversal as curvas C_1 e C_2 .

Tome como vizinhança $\mathcal{V}_\gamma$ o anel cujo bordo é formado pelas curvas C_1 e C_2 .

Vamos mostrar que, diminuindo δ caso seja necessário, todo $Y \in B_\delta(X)$ tem em $\mathcal{V}_\gamma$ uma única órbita periódica hiperbólica do mesmo tipo que γ .

Seja L_0 uma seção transversal para o γ em p_0 . Podemos considerar que L_0 está inteiramente contido em uma célula da grade $[\Gamma, \Delta]$.

Pelas observações 2.3 e 2.8, se definirmos o campo de vetores $\Lambda : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N(\Gamma, \Delta)} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N(\Gamma, \Delta)}$ por

$$\Lambda(p, Y) = (Y(p), 0)$$

diminuindo δ caso seja necessário, encontramos uma aplicação de retorno Π para um ponto (p_0, X) da órbita periódica $\Phi(t) = (\gamma(t), X)$, com Π definida na seção transversal $\Sigma_0 = L_0 \times B_\delta(X)$.

Facilmente vemos que essa aplicação de retorno tem a seguinte forma

$$\Pi(s, Y) = (\pi(s, Y), Y),$$

supondo que L_0 é parametrizado por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $0 \in I$ e $\sigma(0) = p_0$. Sendo que $\pi(s, X)$ é a aplicação de retorno de γ em L_0 .

Como γ é uma órbita periódica hiperbólica

$$\frac{\partial}{\partial s} \pi(0, X) \neq 1. \tag{3.2}$$

Aplicando o teorema da função implícita para

$$f(s, X) = \pi(s, X) - s$$

encontramos, que diminuindo δ caso seja necessário, existem J vizinhança de 0 e uma função $s : B_\delta(X) \rightarrow J$ tal que $\delta(s(Y))$ é um ponto em L_0 que pertence a uma órbita periódica de Y inteiramente contida em $\mathcal{V}_\gamma$, sendo essa órbita periódica a única de Y em $\mathcal{V}_\gamma$.

Chame de $\gamma(Y)$ a órbita de Y em $\mathcal{V}_\gamma$. Falta mostrarmos que para todo Y essas órbitas são hiperbólicas e possuem o mesmo caráter de estabilidade que γ .

Para isso vamos encontrar uma fórmula para a derivada da aplicação de retorno para cada uma dessas órbitas.

Sabemos que a órbita periódica γ está contida em um número finito de células da grade $[\Gamma, \Delta]$. Sejam então $\{\Omega_{i_0 j_0}, \Omega_{i_1 j_1}, \dots, \Omega_{i_k j_k}\}$ as células da grade que contém pontos da órbita γ .

Como os campos em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ são lineares em cada célula Ω_{ij} , dado X , temos que $\text{div} X(\varphi(t))$ é igual a $\text{tr} A_{ij}(X)$, enquanto a curva $\varphi(t)$ permanecer em Ω_{ij} .

Pela proposição 2.5, sabemos que a derivada da aplicação de retorno é

$$\pi'(X, 0) = \exp\left(\sum_{r=0}^k \text{tr} A_{i_r j_r}(X)(t_{r+1} - t_r)\right) \neq 1, \quad (3.3)$$

onde a expressão de $\text{tr} A_{ij}(Y)$ é

$$\text{tr} A_{ij}(Y) = b_{11} + b_{22} + \sum_{i'=1}^i c_1^{i'} - \sum_{i'=i+1}^n c_1^{i'} + \sum_{j'=1}^j d_2^{j'} - \sum_{j'=j+1}^m d_2^{j'}.$$

Considerando as aplicações de transição entre a seção transversal e os lados da grade $[\Gamma, \Delta]$, pelo teorema 2.1, concluímos que existem funções contínuas $\tilde{\tau}_r$, $r = 1, 2, \dots, k$, que determinam o tempo mínimo necessário para que a órbita, ao passar por um ponto da grade, intersecte a grade novamente.

Todas essas funções são contínuas, logo fazendo a composição $\tilde{\tau}_r$ com a função $s(Y)$ encontramos o tempo $\tau_r(Y)$ que um ponto da órbita periódica $\gamma(Y)$ leva para ir de um lado da grade para outro, assim, podemos escrever a derivada da transformação de retorno para $\gamma(Y)$ como

$$\pi'(Y, s(Y)) = \exp\left(\sum_{r=0}^k \text{tr} A_{i_r j_r}(Y)(\tau_{r+1}(Y) - \tau_r(Y))\right).$$

Observe que essa função é contínua, pois $\text{tr} A_{ij}(Y)$ e $\tau_r(Y)$ são contínuas, logo diminuindo δ caso seja necessário, para todo $Y \in B_\delta(X)$, temos que $\pi'(Y, s(Y)) \neq 1$, e

portanto $\gamma_k(Y)$ é hiperbólica e tem o mesmo caráter de estabilidade que γ .

Isso termina a demonstração do lema. □

Observe que os campos em $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ possuem um número finito de órbitas periódicas finitas. Logo, se $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j$ são as órbitas periódicas finitas de X , podemos tomar $\delta > 0$ e vizinhanças $\mathcal{V}_{\gamma_s}$ de γ_s tal que vale o enunciado do lema anterior para todo $Y \in B_\delta(X)$ e toda órbita periódica finita γ_s .

Lema 3.3 *Seja $X \in \Sigma_{\Gamma,\Delta}$ e seja p_I uma singularidade hiperbólica infinita de X . Então existe $\delta > 0$ e uma vizinhança $\mathcal{V}_{p_I}$ de p_I tal que $\mathcal{V}_{p_I}$ é um disco com bordo suave disjunto da grade $[\Gamma, \Delta]$. Todo $Y \in B_\delta(X)$ tem em $\mathcal{V}_{p_I}$ uma única singularidade $p_I(Y)$, sendo ela infinita, do mesmo tipo que p_I em X . Além disso se p_I não é uma sela podemos tomar $\mathcal{V}_{p_I}$ tal que todo $Y \in B_\delta(X)$ é transversal ao bordo de $\mathcal{V}_{p_I}$*

Demonstração: A demonstração desse lema é semelhante a demonstração do lema 3.1. De fato se $p_I = (\theta_I, 0)$ é um ponto singular infinito de X basta analisar o campo nas coordenadas (θ, ρ) e observar que a equação para as singularidades hiperbólicas no infinito são dadas pelas funções

$$A_1(Y)(\theta, 0) = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} A_1(Y)(\theta, 0) \right) R_1(Y)(\theta, 0) \neq 0.$$

Como em pontos próximos de p_I essas funções são diferenciáveis em θ e Y , garantimos a existência, a unicidade e o tipo do ponto hiperbólico $p_I(Y)$.

Se p_I não for uma sela basta usarmos a forma quadrática

$$Q(p) = \int_0^\infty \langle e^{Mt} p, e^{Mt} p \rangle dt,$$

onde $M = DX(\theta_i, 0)$ para garantir que Y é transversal ao bordo de $\mathcal{V}_{p_I}$. □

Pela proposição 2.7, concluímos que um campo X em $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ possui no máximo 8 singularidades no infinito, podendo ser 2 em cada quadrante. Logo, se $p_{I_1}, \dots, p_{I_k}$ são as singularidades no infinito de X , podemos tomar $\delta > 0$ tal que o lema anterior seja válido para todo $Y \in B_\delta(X)$ e toda singularidade infinita p_{I_s} .

Lema 3.4 *Seja $X \in \Sigma_{\Gamma,\Delta}$ e seja ψ a órbita periódica no infinito de X . Então existe*

 Figura 3.2: Vizinhança $\mathcal{V}_{P_I}$ da singularidade no infinito

$\delta > 0$ e uma vizinhança $\mathcal{V}_\psi$ de ψ tal que todo $Y \in B_\delta(X)$ é transversal ao bordo de $\mathcal{V}_\psi$ e tem a órbita no infinito ψ_Y como única órbita periódica em $\mathcal{V}_\psi$ mantendo o seu caráter de estabilidade.

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ e suponha que o infinito é uma órbita periódica hiperbólica para o campo. Observe que para termos uma órbita periódica no infinito devemos ter $A_1(X)(\theta, 0) \neq 0, \forall \theta \in [0, 2\pi]$. Como a função $A_1(Y)(\theta, 0)$ é contínua em Y e θ , e $[0, 2\pi]$ é compacto, garantimos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $Y \in B_\delta(X)$ vale $A_1(Y)(\theta, 0) \neq 0, \forall \theta \in [0, 2\pi]$.

Logo ψ_Y é uma órbita periódica para Y . A estabilidade de ψ_Y decorre do fato de que

$$\pi'_Y(0) = \exp \left[\sum_{j=1}^4 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} -\frac{R_{1j}(Y)(\theta)}{A_{1j}(Y)(\theta)} d\theta \right]$$

é uma função contínua para $Y \in B_\delta(X)$, logo, diminuindo δ caso seja necessário, temos $\pi'_Y(0) \neq 1$. Assim garantimos o critério de estabilidade de ψ_Y .

Para encontrarmos a vizinhança $\mathcal{V}_\psi$, basta considerarmos o campo $X_{\mathbb{D}}$. Assim, se tomarmos um campo rotacionado $R_\omega(X_{\mathbb{D}})$, pela teoria de campos rotacionados [Duf53], existe um ω próximo de zero, e uma curva C contida no interior de $\partial\mathbb{D}$, tal que C é uma órbita periódica de $R_\omega(X_{\mathbb{D}})$, e $X_{\mathbb{D}}$ é transversal a C . Logo, analogamente ao que fizemos nos lemas anteriores, existe um $\delta > 0$ tal que todo $Y \in B_\delta(X)$ é transversal a C . Assim, podemos tomar como vizinhança de ψ a região que está contida no exterior de C e no interior $\mathbb{D}$. Como queríamos.

□

Figura 3.3: Vizinhança da órbita periódica no infinito

Lema 3.5 *Seja $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$. Se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno e $Y \in B_\delta(X)$, então todo ponto singular de Y está no interior das vizinhanças dadas por 3.1 e 3.3 e toda órbita periódica de Y está no interior das vizinhanças dadas por 3.2 e 3.4.*

Demonstração: A primeira afirmação do lema é facilmente verificada levando em consideração a continuidade do fluxo com relação aos campos e condições iniciais.

Para a segunda afirmação considere C como sendo o fecho do conjunto

$$\mathbb{D} - [\mathcal{V}_\psi \cup (\bigcup_{j=1}^k \mathcal{V}_{\gamma_j})],$$

onde ψ é a órbita periódica no infinito, γ_j , $j = 1, 2, \dots, k$ as órbitas periódicas finitas de X e $\mathcal{V}_{\gamma_j}$ e $\mathcal{V}_\psi$ são as vizinhanças dadas pelos lemas 3.2 e 3.4.

Em virtude dos lemas 3.2 e 3.4 nós temos apenas que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que qualquer trajetória de $Y \in B_\delta(X)$ passando por um ponto de C não é fechada.

Primeiro considere $C' \subset C$ o conjunto obtido de C retirando o interior de todas as vizinhanças $\mathcal{V}_{p_s}$ contendo pontos de sela de X . Esse conjunto é fechado em $\mathbb{D}$ e portanto compacto.

Afirmamos que para δ suficientemente pequeno, $Y \in B_\delta(X)$ não possui órbitas periódicas em C' . De fato, se isso não ocorresse existiriam seqüências $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que

$$Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$$

e

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{p}$$

com $\tilde{p} \in C'$, tal que $\varphi(t, p_n, Y_n)$ é uma órbita periódica contida em C' .

Seja $\varphi(t, \tilde{p}, X)$ a trajetória de X passando por $\tilde{p}$. Sabemos que $\varphi(t, \tilde{p}, X)$ não é fechada, dado que estamos assumindo que todas as órbitas periódicas de X estão contidas em $\mathcal{V}_\psi \cup (\bigcup_{j=1}^k \mathcal{V}_{\gamma_j})$.

Então $\tilde{p}$ divide a trajetória em duas partes, e como estamos supondo que $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$, pelo menos uma dessas semi-órbitas não tende para um ponto de sela. Essa semi-órbita tende para um ciclo limite, um foco ou um nó. Pela continuidade do fluxo com relação aos campos e condições iniciais, para p_n próximo de $\tilde{p}$ a órbita $\varphi(t, p_n, Y_n)$ entrará numa vizinhança $\mathcal{V}_\lambda$, onde λ é um foco, nó ou ciclo limite, e permanecerá nessa vizinhança, pois o bordo da região é transversal a Y . Como a outra semi-órbita não pode entrar na mesma vizinhança, concluímos que essa trajetória não é fechada. Isso gera uma contradição.

Então existe $\delta > 0$ tal que toda trajetória de $Y \in B_\delta(X)$ através de pontos de C' não é fechada.

Vemos facilmente também que qualquer trajetória de Y através de um ponto de $C \setminus C'$ não é fechada. De fato seja $\varphi(t, q, Y)$ uma trajetória de Y através de $q \in \mathcal{V}_{p_S}$, onde $\mathcal{V}_{p_S}$ contém um ponto de sela. Se essa trajetória fosse fechada deveria estar contida em $\mathcal{V}_{p_S}$, mas nessa vizinhança o campo é linear não homogêneo com sua única singularidade sendo um ponto de sela, logo não existem órbitas periódicas em $\mathcal{V}_{p_S}$.

Isso termina a demonstração do lema. □

Observação 3.2 Podemos escolher as vizinhanças dadas pelos lemas 3.1 e 3.3 pequenas o suficiente tal que se p_S é um ponto de sela de X então nenhuma outra separatriz de um outro ponto de sela de X intersecta a vizinhança de $\mathcal{V}_{p_S}$.

Observação 3.3 Seja agora p_{T_i} , $i = 1, 2, 3, \dots, k$ os pontos de tangência de X com a grade compactificada $[\Gamma, \Delta]$. Para todo p_{T_i} , escolhemos um pequeno arco aberto λ_i de $[\Gamma, \Delta]$ contendo p_{T_i} tal que todos esses arcos são disjuntos e não contém nenhum ponto relativo às outras separatrizes do sistema X . Isso é possível pois estamos considerando $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$. Seja K o fecho da grade compactificada em $\mathbb{D}$.

Considere agora o conjunto compacto

$$L = K - \bigcup_{i=1}^n \lambda_i.$$

Pela forma como esse conjunto é construído, garantimos que X é transversal a L em todos os pontos.

Pela continuidade do fluxo com relação aos parâmetros e condições iniciais e por L ser compacto, podemos então escolher $\delta > 0$ tal que todo $Y \in B_\delta(X)$ é transversal ao conjunto L .

De agora em diante sempre que tomarmos $\delta > 0$, estaremos considerando que esse valor é tal que sejam válidos os lemas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5, bem como a observação anterior.

Definição 3.8 *Uma fonte (respectivamente um poço) de $X_{\mathbb{D}}$ em $\mathbb{D}$ é um nó, um foco ou uma órbita periódica, tal que órbitas próximas tendem para esse conjunto quando $t \rightarrow -\infty$ (respectivamente $t \rightarrow \infty$).*

Analisaremos a seguir o comportamento das órbitas de X que passam por pontos de tangência, pontos de esquina ou são separatrizes de sela do sistema.

É de fundamental importância entendermos como tais órbitas se comportam quando consideramos campos em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ próximos de X , pois como veremos mais adiante, essas trajetórias são importantes para a determinação das regiões canônicas e a construção do homeomorfismo que conjuga os campos.

Observação 3.4 Considere X um campo em $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ e φ uma órbita que liga uma fonte α com um poço ω , sendo neste caso esses últimos formados por pontos singulares hiperbólicos ou órbitas periódicas hiperbólicas do campo. Considere $\mathcal{V}_\alpha$ e $\mathcal{V}_\omega$ respectivamente as vizinhanças da fonte e do poço dados pelos lemas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.

O conjunto $[\Gamma, \Delta] \cup \partial\mathcal{V}_\alpha \cup \partial\mathcal{V}_\omega$ formado pelos pontos da grade $[\Gamma, \Delta]$ que não estão no interior de $\mathcal{V}_\alpha \cup \mathcal{V}_\omega$ particiona a órbita φ em um número finito de arcos. De fato, se percorrermos a órbita φ no sentido positivo, vemos facilmente que existe uma sequência finita de pontos $E_1, E_2, \dots, E_n$, com $E_1 \in \partial\mathcal{V}_\alpha$, $E_n \in \partial\mathcal{V}_\omega$ e $E_j \in [\Gamma, \Delta]$, $j = 2, 3, \dots, n-1$, de forma que os arcos mencionados são os arcos de trajetória com extremos em E_j e E_{j+1} .

No máximo um ponto E_j pode ser um ponto de tangência ou esquina da grade. Em todos os outros pontos φ intersecta o conjunto $[\Gamma, \Delta] \cup \partial\mathcal{V}_\alpha \cup \partial\mathcal{V}_\omega$ transversalmente.

Na figura 3.4 temos as órbitas φ e $\tilde{\varphi}$ ilustrando essa situação.

Observação 3.5 O mesmo vale para órbitas que são separatrizes de sela, se considerarmos que, nesse caso, para uma separatriz instável $p_S = E_1$ e para uma separatriz estável $p_S = E_n$, onde p_S é o ponto de sela.

Lema 3.6 *Seja $X \in \Sigma_{\Gamma,\Delta}$, p_T um ponto de tangência com a grade $[\Gamma, \Delta]$ e λ o arco contendo p_T escolhido como na observação 3.3. Então existe $\delta > 0$ tal que todo $Y \in B_\delta(X)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) - Y tem em λ um único ponto de tangência parabólica $p_T(Y)$ com a grade e do mesmo tipo que p_T , isto é, externa ou interna com relação a alguma célula de $[\Gamma, \Delta]$;

Figura 3.4: Casos com tangência e pontos de esquina

- (b) - Se $\varphi(t, p_T, X)$ liga uma fonte α_X com um poço ω_X , então $\varphi(t, p_T(Y), Y)$ liga uma fonte α_Y e um poço ω_Y contidos respectivamente nas vizinhanças $\mathcal{V}_{\alpha_X}$ e $\mathcal{V}_{\omega_X}$;
- (c) - A órbita $\varphi(t, p_T(Y), Y)$ não contém pontos de esquina de $[\Gamma, \Delta]$ e contém somente $p_T(Y)$ como ponto de tangência;
- (d) - Se E_j , $j = 1, 2, \dots, n$, são os pontos descritos na observação 3.4, com $E_{j_0} = p_T$, então $\varphi(t, p_T(Y), Y)$ intersecta o conjunto $[\Gamma, \Delta] \cup \partial\mathcal{V}_{\alpha_X} \cup \partial\mathcal{V}_{\omega_X}$ em pontos $E_j(Y)$, $j = 1, 2, \dots, n$, com $E_j(Y)$ próximo de E_j , e com exceção de $E_{j_0}(Y) = p_T(Y)$, sempre o faz transversalmente e disjunto das esquinas da grade.

Demonstração: Seja p_T um ponto de tangência de X com a grade $[\Gamma, \Delta]$. Sem perda de generalidade podemos supor $p_T = (x_T, \delta_j)$ uma tangência horizontal com a reta $y = \delta_j$.

Como p_T é uma tangência parabólica, temos

$$Q(x_T, \delta_j, X) = 0$$

e

$$Q_x(x_T, \delta_j, X) \neq 0.$$

Se $Q_x(x_T, \delta_j, X) > 0$ (respectivamente $Q_x(x_T, \delta_j, X) < 0$), então para valores pequenos de t , $\varphi(t, p_T, X)$ está contida na célula abaixo (respectivamente acima) da reta $y = \delta_j$.

No arco λ os pontos de tangência de Y com a grade são dados pelos zeros da função

$$f(x, Y) = Q(x, \delta_j, Y).$$

Aplicando o teorema da função implícita em f no ponto (x_T, X) concluímos que existe $\delta > 0$ tal que todo $Y \in B_\delta(X)$ tem uma única tangência $p_T(Y) = (x_T(Y), \delta_j)$ em λ . Se $Q_x(x_T, \delta_j, X) > 0$ (respectivamente < 0), então $Q_x(x_T(Y), \delta_j, Y) > 0$ (respectivamente < 0).

Isso é suficiente para provarmos o item (a).

Vamos mostrar agora que diminuindo δ caso seja necessário, $\varphi(t, T(Y), Y)$ irá satisfazer (b), (c) e (d).

Considere o ponto de tangência $p_T = E_{j_0}$. Tome agora E_{j_0+1} . O arco de trajetória $E_{j_0}E_{j_0+1}$ está inteiramente contido em uma célula da grade $[\Gamma, \Delta]$. Sabemos que ou E_{j_0+1} pertence a $[\Gamma, \Delta]$ ou E_{j_0+1} pertence a $\partial\mathcal{V}_{\omega_X}$. Vamos supor que $E_{j_0+1} \in [\Gamma, \Delta]$, o outro caso é semelhante a esse.

Podemos então tomar um pequeno arco $L_{E_{j_0+1}}$ de $[\Gamma, \Delta] - (\Gamma \times \Delta)$ em volta de E_{j_0+1} como seção transversal para o sistema X . Para valores pequenos de δ , $L_{E_{j_0+1}}$ também é uma seção transversal para $Y \in B_\delta(X)$. Logo, pela continuidade do fluxo com relação as condições iniciais e aos campos, para todo $Y \in B_\delta(X)$, $\varphi(t, T(Y), Y)$ intersecta $L_{E_{j_0+1}}$ em um ponto $E_{j_0+1}(Y)$, e o arco de trajetória $p_T(Y)E_{j_0+1}(Y)$ está contido na célula e próximo do arco de trajetória $E_{j_0}E_{j_0+1}$, não contendo pontos de esquina da grade ou outro ponto de tangência além de $p_T(Y)$.

Considere agora os pontos E_j , $j = j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, n$. Podemos tomar para cada ponto E_j , $j = j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, n - 1$ um pequeno arco L_{E_j} de $[\Gamma, \Delta] - (\Gamma \times \Delta)$ em volta de E_j como seção transversal de X . Para E_n tomamos L_{E_n} um pequeno arco em $\partial\mathcal{V}_{\omega_X}$. Cada arco de trajetória E_jE_{j+1} está inteiramente contido em uma célula e não contém pontos de tangência ou de esquina da grade. Podemos então, para cada um desses pontos e arcos, definir uma aplicação de transição entre as seções transversais em questão.

De fato considere E_{j_0+1} , então pela continuidade do fluxo com relação as condições iniciais e aos campos, existe δ_{j_0+1} e uma aplicação de transição $\Pi_{j_0+1} : L_{E_{j_0+1}} \times B_{\delta_{j_0+1}} \rightarrow L_{E_{j_0+2}}$. Assim para toda órbita de $Y \in B_{\delta_{j_0+1}}$ passando por um ponto próximo de E_{j_0+1} em $L_{E_{j_0+1}}$ ficará próximo do arco de trajetória $E_{j_0+1}E_{j_0+2}$ e irá intersectar $L_{E_{j_0+1}}$ em um ponto próximo de E_{j_0+2} . Em particular, se tomarmos $E_{j_0+2}(Y) = \Pi_{j_0+1}(E_{j_0+1}(Y), Y)$, então $E_{j_0+1}(Y)E_{j_0+2}(Y)$ é um arco de trajetória de $\varphi(t, p_T(Y), Y)$, que está próximo de $E_{j_0+1}E_{j_0+2}$ e não contém pontos de tangência ou esquina com a grade.

Podemos repetir o processo para todos os pontos E_j até chegarmos em E_n , tomando o cuidado de tomarmos $\delta_j > 0$ pequeno o suficiente para que a composição das aplicações de transição estejam bem definidas. Dessa forma, encontramos pontos $E_{j+1}(Y) = \Pi_j(E_j(Y), Y)$, com $E_j(Y)$ próximo de E_j , e os arcos de trajetória $E_j(Y)E_{j+1}(Y)$ estão suficientemente próximos de E_jE_{j+1} de forma que eles não possuam ponto de tangência ou esquina com a grade. E como $E_n(Y) \in \partial\mathcal{V}_{\omega_X}$, e Y é transversal a $\partial\mathcal{V}_{\omega_X}$ garantimos que $\varphi(t, p_T(Y), Y)$ tende para um poço ω_Y contido em $\mathcal{V}_{\omega_X}$.

Podemos repetir o mesmo processo para os pontos E_j , $j = 1, 2, \dots, j_0 - 1$, percorrendo

a órbita no sentido negativo. Assim, como na análise anterior tomamos um número finito de δ 's, podemos escolher então $\delta > 0$ pequeno o suficiente para que todo $Y \in B_\delta(Y)$, a órbita $\varphi(t, p_T(Y), Y)$ não possua pontos de esquina com a grade, tenha $p_T(Y)$ como seu único ponto de tangência com $[\Gamma, \Delta]$, sendo que $\varphi(t, p_T(Y), Y)$ liga uma fonte $\alpha_Y \in \mathcal{V}_{\alpha_X}$ com um poço $\omega_Y \in \mathcal{V}_{\omega_X}$, e intersecta o conjunto $[\Gamma, \Delta] \cup \partial\mathcal{V}_\alpha \cup \partial\mathcal{V}_\omega$ em pontos $E_j(Y)$, $j = 1, 2, \dots, n$, com $E_j(Y)$ próximo de E_j .

Isso demonstra a proposição. □

Figura 3.5: Órbitas $\varphi(t, p_T, X)$ e $\varphi(t, p_T(Y), Y)$

Lema 3.7 *Seja $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ e $e_{ij} = (\gamma_i, \delta_j)$ um ponto de esquina da grade $[\Gamma, \Delta]$. Então existe $\delta > 0$ tal que todo $Y \in B_\delta(X)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) - *A órbita $\varphi(t, e_{ij}, Y)$ tem o mesmo comportamento que $\varphi(t, e_{ij}, X)$, isto é, ela intersecta a grade $[\Gamma, \Delta]$ transversalmente e percorre as mesmas células que $\varphi(t, e_{ij}, X)$;*
- (b) - *Se $\varphi(t, e_{ij}, X)$ liga uma fonte α_X com um poço ω_X , então $\varphi(t, e_{ij}, Y)$ liga uma fonte α_Y e um poço ω_Y contidos respectivamente nas vizinhanças $\mathcal{V}_{\alpha_X}$ e $\mathcal{V}_{\omega_X}$;*
- (c) - *A órbita $\varphi(t, e_{ij}(Y), Y)$ não contém pontos de tangência com a grade $[\Gamma, \Delta]$ e contém somente e_{ij} como ponto de esquina;*
- (d) - *Se E_j , $j = 1, 2, \dots, n$, são os pontos descritos na observação 3.4, com $E_{j_0} = e_{ij}$, então $\varphi(t, e_{ij}, Y)$ intersecta o conjunto $[\Gamma, \Delta] \cup \partial\mathcal{V}_{\alpha_X} \cup \partial\mathcal{V}_{\omega_X}$ em pontos $E_j(Y)$, $j = 1, 2, \dots, n$, com $E_j(Y)$ próximo de E_j , e com exceção de $E_{j_0}(Y) = e_{ij}$, sempre o faz transversalmente e disjunto das esquinas da grade.*

Demonstração: Observe que o ponto $e_{ij} = (\gamma_i, \delta_j)$ de esquina com a grade $[\Gamma, \Delta]$ está contido no bordo de quatro células. Como $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$, sabemos que $\varphi(t, e_{ij}, X)$ para valores pequenos de t , deve estar contido em $\Omega_{(i-1)(j-1)} \cup \Omega_{ij}$ ou $\Omega_{(i-1)j} \cup \Omega_{i(j-1)}$. Isso ocorre pois no ponto e_{ij} o campo X não é tangente as retas $x = \gamma_i$ e $y = \delta_j$.

O primeiro caso ocorre quando $P(\gamma_i, \delta_j, X)Q(\gamma_i, \delta_j, X) > 0$ e o segundo caso ocorre quando $P(\gamma_i, \delta_j, X)Q(\gamma_i, \delta_j, X) < 0$. Logo, pela continuidade de P e Q com relação aos campos é claro que podemos escolher $\delta > 0$ tal que a órbita $\varphi(t, e_{ij}, Y)$ de $Y \in B_{\delta_1}(X)$ tenha o mesmo comportamento local que $\varphi(t, e_{ij}, X)$.

A demonstração dos itens (b), (c) e (d) é idêntica a demonstração dos mesmos itens do lema anterior. De fato basta observar que podemos definir o ponto $E_{j_0+1}(Y)$ de forma análoga ao que fizemos no lema anterior, e garantimos que o arco de trajetória $e_{ij}E_{j_0+1}(Y)$ possui somente e_{ij} como ponto de esquina, não possui pontos de tangência e intersecta $L_{E_{j_0+1}}$ em $E_{j_0+1}(Y)$ próximo de E_{j_0+1} . O resto da demonstração é análogo ao feito no lema anterior.

□

Figura 3.6: Órbitas $\varphi(t, e_{ij}, X)$ e $\varphi(t, e_{ij}, Y)$

Lema 3.8 *Seja $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ e p_S um ponto de sela de X . Se γ_X é uma separatriz de p_S , então existe $\delta > 0$ tal que todo $Y \in B_\delta(X)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) - *Se γ_X é uma separatriz instável (respectivamente estável) que tende para um poço ω_X (respectivamente vem de uma fonte α_X), então a separatriz equivalente γ_Y de $p_S(Y)$ tende para um poço ω_Y contido na vizinhança $\mathcal{V}_{\omega_X}$ (respectivamente vem de uma fonte α_Y contida na vizinhança $\mathcal{V}_{\alpha_X}$);*

Figura 3.7: Separatrizes de sela

- (b) - A órbita γ_Y não contém pontos de tangência ou de esquina da grade $[\Gamma, \Delta]$;
- (c) - Se $E_j, j = 1, 2, \dots, n$, são os pontos descritos na observação 3.5, então γ_Y intersecta o conjunto $[\Gamma, \Delta] \cup \partial V_{\alpha_X} \cup \partial V_{\omega_X}$ em pontos $E_j(Y), j = 1, 2, \dots, n$, com $E_j(Y)$ próximo de E_j , sempre o faz transversalmente e disjunto das esquinas da grade.

Demonstração: Seja X um campo em $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$. Suponha que p_S é um ponto de sela finito. Localmente as separatrizes de sela de X são dadas pelos auto-espacos da matriz $A_{ij}(X)$. Por exemplo, se escrevermos a matriz

$$A_{ij}(X) = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(X) & a_{12}^{ij}(X) \\ a_{21}^{ij}(X) & a_{22}^{ij}(X) \end{pmatrix}$$

e se supusermos $a_{12}^{ij}(X) \neq 0$, então como $A_{ij}(Y)$ depende continuamente de Y podemos escrever o coeficiente angular dos auto-espacos de $A_{ij}(Y)$ como

$$m_i(Y) = \frac{(a_{11}^{ij}(Y) - \lambda_i(Y))}{a_{12}^{ij}(Y)},$$

onde $\lambda_i, i = 1, 2$, são os autovalores de $A_{ij}(Y)$ que podem ser expressos por

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} A_{ij}(Y) \pm \sqrt{(\text{tr} A_{ij}(Y))^2 - 4 \det A_{ij}(Y)}}{2a_{12}^{ij}(Y)}.$$

Como essas funções são todas contínuas, dada uma separatriz γ_X que intercepta um

lado da grade Ω_{ij} num ponto E_1 , então para δ suficientemente pequeno, a separatriz equivalente de Y interceptará o mesmo lado da grade em um ponto $E_1(Y)$ próximo de E_1 .

O mesmo acontece para separatrizes de pontos de sela no infinito, pois basta observarmos que essas separatrizes são dadas pelos auto-espacos de nós na célula infinita que contém p_S . Logo podemos fazer a mesma análise que no caso de uma célula finita, pois esses auto-espacos dependem continuamente de Y .

O resto da demonstração é semelhante a dos lemas anteriores, pois basta compormos as aplicações de transição entre os lados da grade $[\Gamma, \Delta]$ até chegarmos em $\mathcal{V}_{\omega_X}$ ou $\mathcal{V}_{\alpha_X}$. □

Capítulo 4

Abertura, Densidade e Estabilidade Estrutural de $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$

Neste capítulo demonstraremos o teorema 3.1, o qual é o resultado principal deste trabalho.

Dividiremos sua demonstração em três partes: primeiro vamos demonstrar que o conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é aberto em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$; depois vamos, através do método das regiões canônicas, construir os homeomorfismos necessários para mostrarmos que os campos que estão em $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ são estruturalmente estáveis; e por fim vamos demonstrar o teorema 3.3, o que implicará que o conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é denso em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$.

Usaremos os métodos assimilados de [SG03, PP59, Sot81, Sot85, Duf53], com as alterações e observações necessárias para sua aplicação aos campos aqui considerados.

4.1 Abertura

Proposição 4.1 *O conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta} = \Sigma_{\Gamma,\Delta}(1) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(2) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(3)$ é aberto em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$.*

Demonstração: É uma consequência direta dos lemas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8. De fato, dado $X \in \Sigma_{\Gamma,\Delta}$, basta tomarmos $\delta > 0$ pequeno o suficiente para que os lemas mencionados anteriormente sejam válidos, garantindo assim que todo $Y \in B_\delta(X)$ satisfaz as condições para estar no conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$.

□

4.2 Regiões canônicas

Seja $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ e considere o campo de vetores compactificado $X_{\mathbb{D}}$.

Definição 4.1 *Uma trajetória γ do campo de vetores $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ é dita uma separatriz do sistema se ela for de um dos seguintes tipos:*

- (a) *Ponto singular,*
- (b) *Órbita periódica,*
- (c) *Trajetória contendo um ponto de tangência com a grade $[\Gamma, \Delta]$,*
- (d) *Trajetória contendo um ponto de esquina da grade $[\Gamma, \Delta]$,*
- (e) *Separatrizes de sela,*
- (f) *Trajetória no infinito.*

Dizemos que uma trajetória de X é *ordinária* se ela não for uma separatriz. Chamaremos de S_X o conjunto fechado em $\mathbb{D}$ formado pelo fecho da união de todas as separatrizes de X .

Definição 4.2 *Dizemos que uma sub-região R de $\mathbb{D}$ é uma região paralela relativa ao campo X se o conjunto de trajetórias de $X_{\mathbb{D}}$ em R é equivalente a um dos casos seguintes:*

- (i) *O conjunto de segmentos de reta horizontais preenchendo uma faixa vertical aberta, semi-aberta ou fechada, limitada por duas linhas paralelas,*
- (ii) *O conjunto de todos os raios em um disco aberto ou fechado, excluindo o centro,*
- (iii) *O conjunto de circunferências concêntricas, excluindo o centro.*

Sejam agora $\mathcal{V}_{p_{E_1}}, \mathcal{V}_{p_{E_2}}, \dots, \mathcal{V}_{p_{E_k}}$ as vizinhanças dos pontos singulares hiperbólicos atratores ou repulsores de X dadas pelos lemas 3.1 e 3.3 e $\mathcal{V}_{\gamma_1}, \mathcal{V}_{\gamma_2}, \dots, \mathcal{V}_{\gamma_l}$ as vizinhanças das órbitas periódicas hiperbólicas de X dadas pelos lemas 3.2 e 3.4.

Considere D o conjunto fechado formado retirando-se de $\mathbb{D}$ o interior das vizinhanças $\mathcal{V}_{p_{E_r}}$ e $\mathcal{V}_{\gamma_s}$. Tome também o conjunto aberto $D' = \overset{\circ}{D} \setminus S_X$.

Com essa notação introduzimos a seguinte definição.

Definição 4.3 *R é uma região canônica de X se for a intersecção de uma componente conexa do aberto D' com o interior de uma célula Ω_{ij} .*

Observação 4.1 A nossa definição de região canônica é baseada na definição de região canônica que aparece no artigo [PP59]. Acrescentamos somente a exigência de que a região canônica R esteja inteiramente contida em alguma célula Ω_{ij} . Isso porquê devemos levar em consideração que a grade $[\Gamma, \Delta]$ deve ser invariante pelo homeomorfismo que dá a equivalência topológica entre os campos. Dessa forma as regiões canônicas que aparecem nesse trabalho são as mesmas existentes no caso de campos de vetores de classe C^1 se considerarmos que o conjunto compacto onde o campo está definido é uma célula da grade compactificada $[\Gamma, \Delta]$.

Observação 4.2 É fácil ver que o interior das regiões canônicas que aparecem associadas aos campos em $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ são somente regiões paralelas do tipo (i) e (ii).

Chamaremos de conjunto α_R o arco contido em $[\Gamma, \Delta]$ ou em $\mathcal{V}_\alpha$, onde α é uma fonte do campo de vetores, por onde as órbitas de X entram na região canônica R .

De forma semelhante chamaremos de conjunto ω_R o arco contido em $[\Gamma, \Delta]$ ou $\mathcal{V}_\omega$, onde ω é um poço do campo de vetores, por onde as órbitas de X deixam a região canônica R .

Esses arcos são determinados pelas separatrizes S_X do sistema, logo é fácil observar que para toda região canônica R não existem pontos de alguma separatriz de X no interior dos conjuntos α_R ou ω_R .

Listaremos agora os possíveis tipos de regiões canônicas de X em $\mathbb{D}$. Da forma como essas regiões foram definidas, fica claro que a fronteira de cada região canônica possui exatamente um conjunto α_R e um conjunto ω_R . Além disso, como X está em $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$, sabemos que em cada célula finita o campo de vetores possui no máximo um ponto singular e ainda, em cada célula infinita, podemos ter no máximo um ponto de sela. Logo o bordo de uma região canônica R do campo de vetores X poderá ter no máximo um ponto de sela.

Podemos portanto classificar as regiões canônicas de acordo com o número e tipos de separatrizes em seu bordo. Os possíveis tipos de regiões canônicas estão esquematizados na figura 4.1 e descritos mais adiante. Nas figuras p_S representa um ponto de sela e em todos os casos os conjuntos α_R e ω_R podem ser permutados.

Possíveis regiões canônicas:

- I - A fronteira de R consiste de um conjunto α_R e um conjunto ω_R . Exemplo: (a) Se o sistema possui apenas um ponto singular que é um foco e a grade $[\Gamma, \Delta]$ é vazia, então α_R e ω_R são os bordos das vizinhanças do foco e da órbita no infinito.
- II - A fronteira de R consiste de uma sela p_S com duas separatrizes tendendo a ela, um conjunto α_R , um conjunto ω_R e um arco de separatriz γ , que pode ser somente um ponto. Exemplos: (a) Em uma célula Ω_{ij} temos um ponto de sela p_S , a separatriz

Figura 4.1: Regiões canônicas esquematizadas do tipo I, II e III respectivamente

γ é um ponto de tangência com a grade $[\Gamma, \Delta]$, α_R e ω_R são arcos na fronteira de Ω_{ij} . (b) Em uma célula Ω_{ij} temos um ponto sela p_S , a separatriz γ é uma órbita passando por uma esquina da grade $[\Gamma, \Delta]$, α_R e ω_R são arcos na fronteira de Ω_{ij} . (c) Em uma célula infinita Ω_{ij} temos um ponto de sela p_S , a separatriz γ é um arco no infinito, α_R e ω_R são nós no infinito.

Figura 4.2: Exemplos regiões canônicas tipo II

III - A fronteira consiste de um conjunto α_R , um conjunto ω_R e arcos de duas separatrizes γ_1 e γ_2 . Exemplos: (a) A fronteira da região tem duas órbitas passando por esquinas de Ω_{ij} e tendendo para um poço, sendo α_R um arco da fronteira de Ω_{ij} e ω_R um arco na vizinhança do poço. (b) A fronteira da região tem duas órbitas tangentes a grade em Ω_{ij} e tendendo para um poço, sendo α_R um arco da fronteira de Ω_{ij} e ω_R um arco na vizinhança do poço.

Dado um campo X em $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$, tome S_X o conjunto de todas as separatrizes de X . Para todo Y próximo de X considere S_Y seu conjunto de separatrizes. Vale então o seguinte teorema.

Teorema 4.1 *Se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno e $Y \in B_\delta(X)$, então existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos S_X e S_Y de forma que:*

Figura 4.3: Exemplos regiões canônicas tipo III

- *Separatrizes correspondentes são do mesmo tipo,*
- *Um subconjunto de S_X limita uma região canônica de X se e somente se o subconjunto correspondente de S_Y limita uma região canônica equivalente em Y .*

Demonstração: Isso é uma consequência dos lemas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8. De fato, suponha $\delta > 0$ pequeno o suficiente tal que os lemas sejam válidos para todos os pontos singulares de X , finitos ou infinitos, todas as órbitas periódicas, todos os pontos de tangência e esquina com a grade $[\Gamma, \Delta]$. Tome agora um campo de vetores $Y \in B_\delta(X)$.

Pelos lemas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5, nós garantimos a correspondência um a um entre os conjuntos de pontos singulares e órbitas periódicas de X e Y . Esta correspondência preserva o tipo e a estabilidade desses pontos e órbitas, bem como a maneira que esses conjuntos intersectam a grade $[\Gamma, \Delta]$.

Os lemas 3.6, 3.7 e 3.8 garantem a correspondência entre as separatrizes de X e de Y que são do mesmo tipo, isto é, as separatrizes que tendem para pontos de sela, possuem pontos de tangência ou passam por pontos de esquina com a grade. Essa correspondência é tal que separatrizes associadas conectam fontes, poços e selas associadas, e cortam a grade $[\Gamma, \Delta]$ de uma forma equivalente.

Daí é claro que se algum conjunto limita uma região canônica R_X de X , então as separatrizes correspondentes de Y limitam uma região canônica R_Y equivalente. Isso demonstra o teorema. □

De fato, as regiões canônicas junto com as vizinhanças das fontes e dos poços de X particionam $\mathbb{D}$ em um número finito de sub-regiões. Pelo teorema anterior, se Y estiver próximo o suficiente de X , então as regiões canônicas de Y e as vizinhanças das fontes e poços particionam $\mathbb{D}$ em sub-regiões equivalentes às de X , inclusive em quantidade. Logo para construirmos o homeomorfismo h_Y entre os campos de vetores X e Y basta construirmos os homeomorfismos para as vizinhanças das fontes e dos poços e para as

regiões canônicas equivalentes dos campos.

Porém, devemos tomar o cuidado para estendermos coerentemente esses homeomorfismos para os bordos dessas regiões de modo que quando juntarmos todos eles consigamos um homeomorfismo $h_Y : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$.

É importante notar que, quando temos um campo de vetores X e duas regiões canônicas adjacentes, então é possível que o conjunto ω de uma região seja também o conjunto α da outra região. Assim devemos tomar o cuidado de construirmos os homeomorfismos na ordem correta.

Por exemplo, se R e $\tilde{R}$ são duas regiões canônicas de X e $\omega_R = \alpha_{\tilde{R}}$, então devemos primeiro construir o homeomorfismo para a região R e somente depois construir o homeomorfismo para a região $\tilde{R}$, levando em consideração que os valores do homeomorfismo em $\alpha_{\tilde{R}}$ já estão determinados e são iguais aos valores em ω_R do homeomorfismo definido na região canônica R .

A figura 4.4 ilustra algumas regiões canônicas adjacentes. Para definirmos os homeomorfismos para as regiões ilustradas na figura devemos primeiro construir o homeomorfismo para a região adjacente a $\mathcal{V}_\alpha$ e prosseguirmos sucessivamente até definirmos o homeomorfismo para a região adjacente a $\mathcal{V}_\omega$.

Figura 4.4: Regiões canônicas adjacentes

4.2.1 Construção do homeomorfismo

Para a construção do homeomorfismo precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 4.1 *Seja p_S um ponto de sela de $X_{\mathbb{D}}$ para o qual tendem duas separatrizes γ_1 ($t \rightarrow \infty$) e γ_2 ($t \rightarrow -\infty$). Nos pontos $M_1 \in \gamma_1$ e $M_2 \in \gamma_2$ considere duas seções transversais, L_1 e L_2 . Chame de N_2 o ponto onde a trajetória através de $N_1 \in L_1$ intersecta L_2 . Então quando $N_1 \rightarrow M_1$, temos que $|N_1 N_2| \rightarrow |M_1 p_S| + |p_S M_2|$.*

Demonstração: A demonstração desse lema pode ser vista em [PP59]. □

Lema 4.2 *Seja AB um arco e $(A_n B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de arcos convergindo uniformemente para AB de forma que $|A_n B_n| \rightarrow |AB|$ quando $n \rightarrow \infty$. Então:*

- (a)- *Uma sequência de pontos $M_n \in A_n B_n$ com $z_n = \frac{A_n M_n}{A_n B_n}$ converge para um ponto $M \in AB$ se, e somente se, $z_n \rightarrow z = \frac{AM}{AB}$,*
- (b)- *Os pontos em $A_n B_n$ convergem uniformemente para pontos em AB com iguais coordenadas z .*

Demonstração: A demonstração desse lema pode ser vista em [PP59]. □

Proposição 4.2 *Seja $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$. Então existe $\delta > 0$ tal que se $Y \in B_\delta(X)$, existe um homeomorfismo $h_Y : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ que transforma trajetórias de X em trajetórias de Y preservando a grade compactificada $[\Gamma, \Delta]$ e a fronteira $\partial \mathbb{D}$.*

Demonstração: Considere um campo de vetores $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ fixado e seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que o teorema 4.1 seja satisfeito. Vamos construir o homeomorfismo h_Y para todo $Y \in B_\delta(X)$.

Observe que, pelo teorema 4.1, existe uma correspondência um a um entre as regiões canônicas de X e Y . Como todas essas regiões canônicas são regiões paralelas é claro que existe um homeomorfismo que preserva trajetórias transformando uma região em outra. Mas, como observado anteriormente, precisamos estender coerentemente estes homeomorfismos para os respectivos bordos dessas regiões para obtermos h_Y .

Primeiro vamos construir o homeomorfismo no conjunto fechado D .

Para isso sejam R_X e R_Y duas regiões canônicas correspondentes de X e Y . Construiremos o homeomorfismo $f : R_X \rightarrow R_Y$.

Faremos isso para cada tipo de região canônica que apresentamos anteriormente.

Primeiro suponha que R_X é uma região canônica do tipo I. Nesse caso temos $R_X = R_Y$. Essa região é limitada por duas curvas fechadas α_R e ω_R que são curvas limitando vizinhanças de uma fonte e um poço respectivamente.

Tome agora um homeomorfismo g de α_R em um círculo, isto é, $0 \leq u \leq 1$ com os pontos 0 e 1 identificados. Então para todo M em R_X , $M \in AB$, nos fazemos $\Phi_X(M) = (u, v)$, onde $u = g(A)$ e

$$v = \frac{|AM|}{|AB|}.$$

Isto define um homeomorfismo de R_X no produto do círculo pelo intervalo $0 \leq v \leq 1$. Fazendo o mesmo para R_Y e identificando os pontos com mesma coordenada (u, v) temos o homeomorfismo desejado $f : R_X \rightarrow R_Y$.

Suponha agora que R_X é uma região canônica do tipo II. Então R_X será limitado por duas curvas $A_0 p_X B_0$ e $A_1 B_1$, sendo a primeira formada por uma sela p_X e dois arcos de separatrizes, e a segunda sendo uma separatriz do campo X . O resto da fronteira de R_X é formado por um conjunto $\alpha_{R_X} = A_0 A_1$ e por um conjunto $\omega_{R_X} = B_0 B_1$, cada um sendo um arco de $[\Gamma, \Delta]$ ou de uma curva que limita uma vizinhança de um poço ou uma fonte.

De forma análoga, R_Y será limitado por duas curvas $\tilde{A}_0 p_Y \tilde{B}_0$ e $\tilde{A}_1 \tilde{B}_1$, sendo p_Y um ponto de sela, e por conjuntos $\alpha_{R_Y} = \tilde{A}_0 \tilde{A}_1$ e $\omega_{R_Y} = \tilde{B}_0 \tilde{B}_1$ que são arcos das mesmas curvas que α_{R_X} e ω_{R_X} respectivamente.

Para a construção do homeomorfismo, vamos supor que nos segmentos $A_1 B_1$ e $\tilde{A}_1 \tilde{B}_1$ nos temos dois pontos de tangência com a grade t e $\tilde{t}$ respectivamente. Os outros casos que aparecem em regiões canônicas do tipo II são tratados de forma semelhante.

Definimos então uma aplicação $\Phi_X : R_X \rightarrow U$, $U = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 1 \text{ e } 0 \leq v \leq 2\}$, da seguinte maneira:

O arco $A_0 A_1$ é levado em $\{(u, 0) | 0 \leq u \leq 1\}$ por um homeomorfismo g . Assim se $A \in A_0 A_1$, $\Phi_X(A) = (g(A), 0)$.

Estenda agora Φ_X de forma que o arco $A_0 p_X$ seja levado em $\{(0, v) | 0 \leq v \leq 1\}$ por

razão do comprimento de arco. Ou seja, se $A \in A_0 p_X$, então $\Phi_X(A) = (0, v)$, onde

$$v = \frac{|A_0 A|}{|A_0 p_X|}.$$

Da mesma forma estenda Φ_X por razão do comprimento de arco tal que $\Phi_X(p_X B_0) = (0, 1 \leq v \leq 2)$, $\Phi_X(A_1 t) = (1, 0 \leq v \leq 1)$ e $\Phi_X(t B_1) = (1, 1 \leq v \leq 2)$.

Para estender Φ_X para as partes restantes de R_X , seja $\mu_0 = \frac{|A_0 p_X|}{|A_0 B_0|}$ e $\mu_1 = \frac{|A_1 t|}{|A_1 B_1|}$. Em cada trajetória AB começando em um ponto A tal que $g(A) = u$, consideramos um ponto M tal que

$$\frac{|AM|}{|AB|} = (1 - u)\mu_0 + u\mu_1$$

e definimos $\Phi_X(M) = (u, 1)$.

Se $P \in AB$ definimos $\Phi_X(P) = (u, v)$, onde

$$v = \frac{|AP|}{|AM|}$$

quando $P \in AM$ e

$$v = 1 + \frac{|MP|}{|MB|}$$

quando $P \in MB$.

Como por todo ponto de R_X onde Φ_X não estava definido passa uma trajetória AB , Φ_X fica então definida em todo R_X .

Claramente Φ_X é bijetora. A continuidade de Φ_X em R_X segue da continuidade do fluxo com relação às condições iniciais junto com os lemas 4.2 e 4.1. Da mesma forma podemos concluir que Φ_X^{-1} é contínua, sendo portanto Φ_X um homeomorfismo entre R_X e U .

Analogamente podemos construir um homeomorfismo $\Phi_Y : R_Y \rightarrow U$. Portanto se tomarmos $f = \Phi_Y^{-1} \circ \Phi_X : R_X \rightarrow R_Y$ temos o homeomorfismo desejado entre R_X e R_Y .

As regiões canônicas do tipo III podem ser tratadas da mesma forma que as regiões do tipo II. De fato, dada a construção que fizemos para as regiões do tipo II, fica claro como devem ser construído o homeomorfismo para tais regiões.

Da forma como os homeomorfismos foram construídos, dadas duas regiões canônicas adjacentes, fica claro que as funções são iguais na parte comum de seus domínios de definição. De fato, se os homeomorfismos forem construídos na ordem correta as funções coincidem nos conjuntos α e ω que pertencem a mais de uma região canônica, além disso, nos arcos das separatrizes do campo sempre definimos as funções pela razão de comprimento de arco.

Isso garante que, quando juntamos todos os homeomorfismos definidos nas regiões canônicas dos campos X e Y , obtemos um homeomorfismo $f_D : D \rightarrow D$ que leva órbitas de X em órbitas de Y e preserva a grade compactificada e o conjunto $\partial\mathbb{D}$.

Devemos agora definir o homeomorfismo f para as vizinhanças $\mathcal{V}_\alpha$ e $\mathcal{V}_\omega$ associadas a fontes e poços do campo de vetores.

Sem perda de generalidade faremos as construções dos homeomorfismos supondo que $\mathcal{V}_\omega$ é vizinhança de um poço. A construção para as vizinhanças das fontes é análoga. As seguintes construções se aplicam tanto para poços finitos quanto para poços infinitos.

Suponha que o poço $\omega = p_X$ é um ponto singular atrator de X , portanto um nó ou um foco atrator.

Seja p_Y o ponto singular atrator de Y em $\mathcal{V}_{p_X}$. Tome o homeomorfismo f_D restrito a $\partial\mathcal{V}_\omega$.

Claramente, todo ponto M de $\mathcal{V}_\omega \setminus \{p_X\}$ está contido em uma órbita $\varphi(t, p, X)$, $0 \leq t < \infty$, $p \in \partial\mathcal{V}_{p_X}$, com $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p, X) = p_X$.

O mesmo vale para o campo Y em $\mathcal{V}_\omega \setminus \{p_Y\}$.

Defina então $f : \mathcal{V}_\omega \rightarrow \mathcal{V}_\omega$ da seguinte maneira:

$$f(p_X) = p_Y$$

e se $M = \varphi(t, p, X)$, então

$$f(M) = \varphi(t, f_D(p), Y).$$

Claramente f é uma função sobrejetora em $\mathcal{V}_\omega$. A continuidade de f em $\mathcal{V}_\omega \setminus \{p_X\}$ e de f^{-1} em $\mathcal{V}_\omega \setminus \{p_Y\}$ é consequência da dependência contínua do fluxo com relação às condições iniciais e aos campos.

Falta apenas mostrar que f é continua em p_X . De fato, suponha que isso não fosse verdade.

Então existiria uma sequência de pontos $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p_X$$

e

$$f(M_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M_Y \neq p_Y.$$

Logo $f^{-1}(M_Y) = M_X \neq p_X$, e pela continuidade de f^{-1} em M_Y , temos

$$f^{-1}(f(M_n)) = M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M_X \neq p_X,$$

o que é uma contradição.

Assim f é contínua em $\mathcal{V}_\omega$ e de forma análoga o mesmo vale para f^{-1} . Daí f é um homeomorfismo de $\mathcal{V}_\omega$ nele mesmo que leva órbitas de X em órbitas de Y e que coincide com f_D no bordo $\partial \mathcal{V}_\omega$.

Vamos agora definir o homeomorfismo f para uma vizinhança $\mathcal{V}_\omega$ onde $\omega = \gamma_X$ é uma órbita periódica atratora de X . Faremos a construção para uma região contendo uma órbita periódica finita, mas o procedimento para a construção do homeomorfismo para uma região contendo uma órbita periódica infinita é essencialmente o mesmo.

Seja γ_Y a órbita periódica atratora de Y contida em $\mathcal{V}_\omega$. Sejam C_1 e C_2 as curvas que formam o bordo de $\mathcal{V}_\omega$.

Considere os arcos da grade $[\Gamma, \Delta]$ que estão contidos no interior de $\mathcal{V}_\omega$ e são seções transversais para os campos X e Y . Nomeie essas seções por $L_0, L_1, \dots, L_m$.

Tome então pontos E_w , $w \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, em γ_X , com $E_{m+1} = E_0 = L_0 \cap \gamma_X$ e $E_j = L_j \cap \gamma_X$, $j = 1, 2, \dots, m$.

De forma análoga teremos pontos F_u , $u \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, em C_1 e G_v , $v \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, em C_2 .

É fácil ver que da forma como as regiões canônicas são definidas e os homeomorfismos construídos, que dado f_D o homeomorfismo definido em D , então esse homeomorfismo restrito as curvas C_1 e C_2 é tal que $f_D(F_u) = F_u$ e $f_D(G_v) = G_v$, para $u, v \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Nós queremos definir um homeomorfismo f que coincida com f_D em C_1 e C_2 e que leve γ_X em γ_Y . Vemos que com essas condições, f deve levar o anel aberto limitado por C_1 e γ_X no anel aberto limitado por C_1 e γ_Y , e deve levar o anel aberto limitado por C_2 e γ_X no limitado por C_2 e γ_Y .

Defina então o homeomorfismo como $f(M) = f_D(M)$ se $M \in C_1 \cup C_2$. Vamos definir f no anel limitado por C_1 e γ_X .

Seja $\varphi(t, M, X)$ a trajetória de X por $M \in C_1$. Conforme t aumenta, a trajetória corta cada uma dessas seções transversais L_j uma quantidade enumerável de vezes em

uma sequência monótona $(M_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$, onde

$$M_n^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_j.$$

Assim a trajetória $\varphi(t, M, X)$ está particionada em um número infinito de arcos $\gamma_n^j = M_n^j M_n^{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, m$ e $\gamma_n^{m+1} = M_n^{m+1} M_n^0$.

Faça o mesmo para $\varphi(t, f_D(M), Y)$ e sejam $\tilde{M}_n^j$, $\tilde{\gamma}_n^j$ e $\tilde{E}_j$.

Defina agora f de forma que o arco fechado γ_n^j seja levado em $\tilde{\gamma}_n^j$ pela razão comprimento de arco, isto é, se $M \in \gamma_n^j$, então $f(M) = \tilde{M}$ onde $\tilde{M} \in \tilde{\gamma}_n^j$ e

$$\frac{|M M_n^{j+1}|}{|M_n^j M_n^{j+1}|} = \frac{|\tilde{M} \tilde{M}_n^{j+1}|}{|\tilde{M}_n^j \tilde{M}_n^{j+1}|}.$$

Dessa forma definimos f no disco limitado por C_1 e γ_X . Analogamente definimos f para o disco limitado por C_2 e γ_X .

Para estender f para a curva γ_X , parametrizamos γ_X e γ_Y por razão de comprimento de arco da seguinte maneira: para todo ponto $M \in E_j E_{j+1}$, definimos $f(M) = \tilde{M}$, onde $\tilde{M} \in \tilde{E}_j \tilde{E}_{j+1}$ com

$$\frac{|E_j M|}{|E_j E_{j+1}|} = \frac{|\tilde{E}_j \tilde{M}|}{|\tilde{E}_j \tilde{E}_{j+1}|}.$$

Precisamos agora mostrar que f é um homeomorfismo em $\mathcal{V}_{\gamma_X}$. Claramente f é sobrejetora. O fato de que f e f^{-1} são contínuas decorre do seguinte.

Cada ponto M de $\mathcal{V}_{\gamma_X}$ pertence a algum arco de trajetória do campo X em $\mathcal{V}_{\gamma_X}$. Sem perda de generalidade vamos supor $M \in \gamma_{n_0}^{j_0} = M_{n_0}^{j_0} M_{n_0}^{j_0+1}$ e que existe uma sequência de pontos $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que

$$N_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M$$

e $(M_n^{j_0} M_n^{j_0+1})_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência de arcos correspondentes a N_n .

Por continuidade, é claro que

$$|M_n^{j_0} M_n^{j_0+1}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |M_{n_0}^{j_0} M_{n_0}^{j_0+1}|.$$

Logo, pelo lema 4.2 concluímos que $f(N_n) \rightarrow f(M)$ quando $n \rightarrow \infty$. O mesmo vale para f^{-1} .

Isso prova que f é um homeomorfismo em $\mathcal{V}_{\gamma_X}$ que leva órbitas de X em órbitas de Y e que coincide com f_D em $\partial\omega$. Como queríamos provar.

Fica então dessa forma definido um homeomorfismo para cada vizinhança de uma fonte ou de um poço em $\mathbb{D}$ que coincide com f_D em seu pontos comuns..

Chame então de h_Y o homeomorfismo de $\mathbb{D}$ nele mesmo obtido juntando os homeomorfismos f_D com todos os homeomorfismos definidos nas vizinhanças das fontes e dos poços.

Portanto h_Y é um homeomorfismo de $\mathbb{D}$ nele mesmo, que leva órbitas de X em órbitas de Y , preserva a grade $[\Gamma, \Delta]$ e o bordo $\partial\mathbb{D}$.

□

Com a proposição acima provamos que todo $X \in \Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é estruturalmente estável, o que concluí a demonstração do item (2) do teorema 3.1.

4.3 Densidade

As duas proposições apresentadas a seguir nos auxiliarão na demonstração do teorema 3.3.

Proposição 4.3 *Para todo $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ a família a quatro parâmetros $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ definida por*

$$X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}(x, y) = X(x, y) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \nu(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + \beta(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y})$$

intersecta o conjunto $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma,\Delta}(1;1,2',3) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(2;2)$ em um conjunto de medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^4$.

Demonstração: Vamos analisar o efeito dos parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta$ no retrato de fase de um campo $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ alterando suas singularidades, tangências e órbita periódica no infinito.

Analisaremos primeiro as singularidades no infinito. Considere a expressão do campo de vetores $X_{\nu,\beta}$ nas coordenadas (θ, ρ)

$$(A_1^{\nu,\beta}(\theta, \rho) + \rho A_0^{\nu,\beta}(\theta)) \frac{\partial}{\partial \theta} - \rho(R_1^{\nu,\beta}(\theta, \rho) + \rho R_0^{\nu,\beta}(\theta)) \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

As singularidades no infinito de $X_{\beta,\nu}$ são os pontos da forma $(\theta, 0)$ onde

$$A_1^{\nu,\beta}(\theta, 0) = 0.$$

Suponha agora que $(\theta_0, 0)$ é uma singularidade no infinito para o campo com $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}z$, $z \in \mathbb{Z}$. Calculando o jacobiano do campo no ponto encontramos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} A_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) & \frac{\partial}{\partial \rho} A_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) + A_0^{\nu,\beta}(\theta_0) \\ 0 & -R_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) \end{pmatrix}.$$

Como a matriz acima é triangular, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, portanto, para a singularidade no infinito $(\theta_0, 0)$ ser hiperbólica, devemos ter

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} A_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) \right) R_1^{\nu,\beta}(\theta_0, 0) \neq 0. \quad (4.1)$$

As funções $A_1(\theta, 0)$ e $R_1(\theta, 0)$ de X se relacionam com as funções $A_1^{\nu,\beta}(\theta, 0)$ e $R_1^{\nu,\beta}(\theta, 0)$ de $X_{\nu,\beta}$ da seguinte maneira

$$A_1^{\nu,\beta}(\theta, 0) = \beta + A_1(\theta, 0),$$

$$R_1^{\nu,\beta}(\theta, 0) = \nu + R_1(\theta, 0),$$

o que nos garante a seguinte relação

$$A_1^{\nu,\beta}(\theta, 0) = 0 \Leftrightarrow \beta = -A_1(\theta, 0),$$

$$R_1^{\nu,\beta}(\theta, 0) = 0 \Leftrightarrow \nu = -R_1(\theta, 0).$$

Considere agora no espaço tridimensional (ν, β, θ) a superfície formada pelas singula-

ridades no infinito de $X_{\nu, \beta}$, ou seja

$$S(\nu, \theta) = (\nu, -A_1(\theta, 0), \theta).$$

Contida nessa superfície nós temos a curva

$$C(\theta) = (-R_1(\theta, 0), -A_1(\theta, 0), \theta)$$

formada pelas singularidades não hiperbólicas no infinito tais que $R_1^{\beta, \nu}(\theta, 0)$ se anula.

As funções $A_1(\theta, 0)$ e $R_1(\theta, 0)$ são contínuas e, restritas a cada intervalo da forma $[(k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}]$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, são quadráticas com suas expressões dadas por 2.19 e 2.20.

Portanto os pontos onde $\frac{\partial}{\partial \theta} A_1^{\beta, \nu}(\theta, 0) = 0$ equivalem aos pontos críticos das funções $A_{1k}(\theta)$ em cada intervalo $](k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}[$.

Verifica-se facilmente que cada função $A_{1k}(\theta)$ tem no máximo um ponto crítico em $](k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}[$. Logo a função $A_1(\theta, 0)$ tem no máximo quatro valores críticos no conjunto $]0, 2\pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}$.

Como queremos evitar também que as singularidades no infinito estejam localizadas na direção dos eixos x e y devemos desconsiderar os valores $\beta = A_1(\theta, 0)$ quando $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}$.

Assim os valores de (ν, β) para os quais temos uma singularidade não hiperbólica no infinito ou na direção dos eixos definem nove curvas na superfície S .

Projetando essas curvas no plano (ν, β) encontramos no máximo oito retas paralelas ao eixo ν e uma curva que é a projeção de C . Essa curva que é a projeção de C é composta por quatro arcos de curvas analíticas, cada um correspondendo a um intervalo $[(k-1)\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}]$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Chame de $c_1, c_2, \dots, c_9$ essas retas e a curva que é projeção de C .

Observe agora que, para $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ e $X_{\nu, \beta}$, vale

$$A_1^{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}(\theta, 0) = A_1^{\nu, \beta}(\theta, 0),$$

$$R_1^{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}(\theta, 0) = R_1^{\nu, \beta}(\theta, 0).$$

Logo, os pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ para os quais $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} \notin \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1, 1)$ estão contidos na união finita de conjuntos de medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^4$, cada um desses conjuntos sendo da forma $\{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in \mathbb{R}^4 | (\nu, \beta) \in c_k\}$, $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Vamos analisar agora a órbita no infinito. Um campo $X_{\nu, \beta}$ possui uma órbita periódica no infinito se $A_1^{\nu, \beta}(\theta, 0) \neq 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. Sejam M e m o máximo e o mínimo respectivamente da função $-A_1(\theta, 0)$ restrita ao compacto $[0, 2\pi]$. Para todo $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \notin [m, M]$, o a função $A_1^{\nu, \beta}$ não se anula em $[0, 2\pi]$, logo $X_{\nu, \beta}$ possui uma órbita periódica no infinito.

Para todo $(\nu, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\beta \notin [m, M]$, temos que a aplicação de retorno associada à órbita

no infinito de $X_{\nu,\beta}$ é

$$\pi'_{\nu,\beta}(0) = \exp \left[\sum_{j=1}^4 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} -\frac{\nu + R_{1j}(\theta)}{\beta + A_{1j}(\theta)} d\theta \right].$$

Pela proposição 2.9, concluímos que $\frac{\partial}{\partial \nu} \pi'_{\nu,\beta}(0) \neq 0$. Fixado β a função $\pi'_{\nu,\beta}(0)$ é crescente ou decrescente quando variamos ν , logo existe no máximo um valor de ν tal que a órbita periódica no infinito não é hiperbólica. Aplicando o teorema da função implícita para $\pi'_{\nu,\beta}(0) = 1$ encontramos que os pontos (ν, β) onde $X_{\nu,\beta}$ tem uma órbita periódica não hiperbólica no infinito estão contidos em uma curva regular da forma $(\nu(\beta), \beta)$, com $\beta \notin [m, M]$.

Assim, da mesma forma como analisamos as singularidades no infinito, concluímos que os $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ tal que $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} \notin \Sigma_{\Gamma, \Delta}(2; 2)$ estão contidos no conjunto $\{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in \mathbb{R}^4 | \nu = \nu(\beta)\}$, que é um conjunto de medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^4$.

Para as tangências do sistema com a grade faremos a análise somente para uma tangência vertical, pois as tangências horizontais geram um resultado semelhante.

Fixe uma linha vertical $x = \gamma_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Para termos uma tangência vertical a primeira componente do campo de vetores $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ deve se anular num ponto da forma (γ_i, y) . Logo

$$\alpha_1 + \nu\gamma_i - \beta y + P(\gamma_i, y) = 0.$$

Assim, para cada y_0 fixado, os valores de $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ para os quais $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ tem uma tangência vertical em (γ_i, y_0) estão contidos no hiperplano H_{y_0} dado por

$$\alpha_1 + \nu\gamma_i - \beta y_0 + P(\gamma_i, y_0) = 0.$$

Portanto, para evitarmos as que as tangências ocorram nas esquinas da grade $[\Gamma, \Delta]$, devemos desconsiderar os $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ contidos nos hiperplanos H_{δ_j} , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Além disso, para termos sempre tangências parabólicas, considerando $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in H_y$, deve valer

$$\frac{d}{dt}(\alpha_1 + \nu\gamma_i - \beta y + P(\gamma_i, y)) \neq 0,$$

ou seja

$$P_y(\gamma_i, y) \neq \beta.$$

Mas $P(\gamma_k, y)$ é uma função linear em cada segmento Δ_j , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Logo $P_y(\gamma_i, y)$ assume no máximo $m+1$ valores. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_{m+1}$ os valores que $P_y(\gamma_i, y)$ pode assumir. Assim, se desconsiderarmos os pontos na reta $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, v_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, m+1\}$, garantimos que o campo $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ possui somente tangências parabólicas com a reta da grade $x = \gamma_i$.

Fazendo esse processo para todas as retas verticais e horizontais, encontramos que os

pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ tais que $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} \notin \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 3)$ estão contidos em um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^4$, pois ele é a união finita de retas e hiperplanos.

Para as singularidades finitas, considere uma célula Ω_{ij} . Nela o campo de vetores é escrito como

$$X(x, y) = A_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_{ij}.$$

Escreva

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} & a_{12}^{ij} \\ a_{21}^{ij} & a_{22}^{ij} \end{pmatrix}, \quad b_{ij} = \begin{pmatrix} b_1^{ij} \\ b_2^{ij} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, na célula Ω_{ij} , o campo de vetores $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ é

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij} + \nu & a_{12}^{ij} - \beta \\ a_{21}^{ij} + \beta & a_{22}^{ij} + \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{ij} + \alpha_1 \\ b_2^{ij} + \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Para termos singularidades não simples em Ω_{ij} , devemos ter

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} + \nu & a_{12}^{ij} - \beta \\ a_{21}^{ij} + \beta & a_{22}^{ij} + \nu \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja

$$f_{ij}(\nu, \beta) = \nu^2 + \beta^2 + \text{tr} A_{ij} \nu + (a_{21}^{ij} - a_{12}^{ij})\beta + \det A_{ij} = 0. \quad (4.2)$$

Essa é a equação de uma seção cônica, logo os valores (ν, β) que satisfazem a equação 4.2 podem estar contidos em uma elipse, uma parábola, uma hipérbole, retas, um ponto, ou ser o conjunto vazio. Em todos os casos, quando fixamos (ν, β) , e tomamos a imagem de Ω_{ij} por $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$, encontramos um ponto, um segmento de reta ou uma semirreta. Logo, os valores de $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ para os quais o campo de vetores $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ possui uma singularidade não simples em Ω_{ij} está contido no conjunto $\{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) | f_{ij}(\nu, \beta) = 0\}$, que é um conjunto de medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^4$.

Tome agora os pontos (ν, β) fora do conjunto $f_{ij}(\nu, \beta) = 0$. Queremos evitar que apareçam singularidade em $\partial\Omega_{ij}$. Vamos fazer a análise supondo que estamos em uma célula finita, o outro caso é idêntico.

Tome (γ_i, δ_j) e (γ_i, δ_{j+1}) pontos de esquina da grade contidos em Ω_{ij} . Para termos uma singularidade no segmento de reta da grade delimitado por esses pontos deve valer

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij} + \nu & a_{12}^{ij} - \beta \\ a_{21}^{ij} + \beta & a_{22}^{ij} + \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \delta_j + t(\delta_{j+1} - \delta_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{ij} + \alpha_1 \\ b_2^{ij} + \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para $t \in [0, 1]$.

Se fizermos

$$\alpha_1(\nu, \beta, t) = -(b_1^{ij} + (a_{11}^{ij} + \beta)\gamma_i + (a_{12}^{ij} + \nu)[\delta_j + t(\delta_{j+1} - \delta_j)]),$$

$$\alpha_2(\nu, \beta, t) = -(b_2^{ij} + (a_{21}^{ij} + \beta)\gamma_i + (a_{22}^{ij} + \nu)[\delta_j + t(\delta_{j+1} - \delta_j)]),$$

os $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ tais que $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}$ possui uma singularidade no segmento de reta da grade delimitado por (γ_i, δ_j) e (γ_i, δ_{j+1}) estão contidos na superfície regradada

$$Z(\nu, \beta, t) = (\alpha_1(\nu, \beta, t), \alpha_2(\nu, \beta, t), \nu, \beta),$$

que é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^4$.

Repetindo o processo para os outros lados da célula e para as outras células, concluimos que os pontos $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)$ tais que $X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} \notin \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 2')$ estão contidos em um conjunto de medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^4$.

Para terminarmos a demonstração do lema, basta tomarmos a união de todos conjuntos de medida nula encontrados.

□

Proposição 4.4 *Para todo $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1, 2', 3) \cap \Sigma_{\Gamma, \Delta}(2; 2)$ o campo vetorial rotacionado*

$$X_\omega(x, y) = R_\omega X(x, y)$$

intersecta o conjunto $\mathfrak{X}'_{\Gamma, \Delta} = \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma, \Delta}$ em um conjunto de medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos analisar como a rotação por ω age nos campos de vetores em questão.

Primeiro observe que as singularidades finitas não se alteram quando aplicamos uma rotação no campo de vetores X . Portanto os pontos singulares de X e X_ω são os mesmos.

Além disso se escrevermos $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, então para (x_0, y_0) um ponto singular finito, temos

$$DX(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} P_x(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

E para o campo $X_\omega(x, y)$, vale

$$DX_\omega(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Aplicando o determinante na igualdade acima, concluímos que

$$\det DX(x_0, y_0) = \det DX_\omega(x_0, y_0).$$

Logo depois de uma rotação por ω , selas do campo X continuam sendo selas e anti-selas continuam sendo anti-selas.

Se $\det DX_\omega(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é uma singularidade hiperbólica.

Agora, se $\det DX_\omega(x_0, y_0) > 0$, devemos analisar $\text{tr} DX_\omega(x_0, y_0)$ para podermos garantir a hiperbolicidade do ponto.

Observe que

$$\text{tr} DX_\omega(x_0, y_0) = \cos\omega(P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0)) + \sin\omega(P_y(x_0, y_0) - Q_x(x_0, y_0)),$$

que pode ser reescrito como

$$\text{tr} DX_\omega(x_0, y_0) = \langle (\cos\omega, \sin\omega); (P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0), P_y(x_0, y_0) - Q_x(x_0, y_0)) \rangle.$$

Vamos mostrar que $(P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0), P_y(x_0, y_0) - Q_x(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$. Suponha o contrário, assim temos

$$\begin{aligned} P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0) &= 0, \\ P_y(x_0, y_0) - Q_x(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira linha por $P_x(x_0, y_0)$, a segunda linha por $P_y(x_0, y_0)$ e somando as duas encontramos

$$(P_x(x_0, y_0))^2 + (P_y(x_0, y_0))^2 + P_x(x_0, y_0)Q_y(x_0, y_0) - P_y(x_0, y_0)Q_x(x_0, y_0) = 0,$$

ou

$$(P_x(x_0, y_0))^2 + (P_y(x_0, y_0))^2 + \det DX_\omega(x_0, y_0) = 0. \quad (4.3)$$

Como $(P_x(x_0, y_0))^2 + (P_y(x_0, y_0))^2 \geq 0$ e estamos supondo $\det DX_\omega(x_0, y_0) > 0$, a igualdade 4.3 nunca é satisfeita, logo

$$(P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0), P_y(x_0, y_0) - Q_x(x_0, y_0)) \neq (0, 0).$$

Daí, existem apenas dois valores de ω em $[0, 2\pi[$ para os quais $\text{tr} DX_\omega(x_0, y_0) = 0$.

Isso pode ser visto geometricamente como os dois ângulos ω_1 e ω_2 em $[0, 2\pi[$ tais que

$(\cos\omega_i, \sin\omega_i)$, $i = 1, 2$; são perpendiculares ao vetor

$$(P_x(x_0, y_0) + Q_y(x_0, y_0), P_y(x_0, y_0) - Q_x(x_0, y_0)).$$

Concluimos portanto que devemos remover apenas uma quantidade enumerável de valores de ω , todos da forma $\omega_i + 2k\pi$, $i = 1, 2$; $k \in \mathbb{Z}$, para garantir que todas as singularidades finitas de X_ω são hiperbólicas.

Vamos agora estudar as tangências do campo com a grade $[\Gamma, \Delta]$. Analisaremos apenas as tangências com as linhas verticais da grade, a análise das tangências com as linhas horizontais é análoga.

Primeiro observe que se $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$, quando aplicamos a rotação no campo obtemos um novo campo $X_\omega = (P_\omega, Q_\omega)$, onde

$$P_\omega(x, y) = \cos\omega P(x, y) + \sin\omega Q(x, y).$$

Logo dada uma linha vertical da grade $x = \gamma_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, para que ocorra uma tangência devemos ter $P_\omega(\gamma_i, y) = 0$ para algum $y \in \mathbb{R}$. Ou seja

$$\cos\omega P(\gamma_i, y) + \sin\omega Q(\gamma_i, y) = 0.$$

Como $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1, 2', 3)$, não existem pontos singulares na grade $[\Gamma, \Delta]$. Concluimos então que se $Q(\gamma_i, y) = 0$, então $P(\gamma_i, y) \neq 0$ e

$$P_\omega(\gamma_i, y) = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Considere agora $\omega \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e $Q(\gamma_k, y) \neq 0$. Assim, a equação anterior pode ser reescrita como

$$P(\gamma_i, y) + \tan\omega Q(\gamma_i, y) = 0$$

ou ainda

$$\tan\omega = -\frac{P(\gamma_i, y)}{Q(\gamma_i, y)}.$$

Observe que $Q(\gamma_i, y)$ é uma função linear por partes tendo como conjunto de descontinuidade de sua derivada os pontos $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$. Como a função é linear em cada intervalo Δ_j , $j = 0, 1, \dots, m$, concluimos que em cada um desses intervalos a função $Q(\gamma_j, y)$ pode: ser nula em todo ponto, ter um único zero isolado ou nunca se anular. O conjunto $V = \{y \in \mathbb{R} | Q(\gamma_k, y) = 0\}$ é então a união finita de intervalos fechados e pontos isolados, e portanto fechado.

Para todo $y \in U = \mathbb{R} \setminus V$ os valores

$$\omega = \arctg\left(-\frac{P(\gamma_i, y)}{Q(\gamma_i, y)}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

são tais que X_ω possui uma tangência com a reta $x = \gamma_i$ em (γ_i, y) . Para evitarmos tangências com as esquinas da grade devemos remover os valores de $\omega(\delta_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, que nesse caso é um conjunto enumerável de pontos.

Fazendo isso para todas as retas da grade $[\Gamma, \Delta]$, garantimos que a menos de um conjunto enumerável de pontos em $\mathbb{R}$, $X_\omega \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 3)$.

No equador, as singularidades no infinito são dadas pela equação

$$A_{\omega 1}(\theta, 0) = \cos \omega A_1(\theta, 0) - \sin \omega R_1(\theta, 0) = 0.$$

Tome então a função

$$f(\omega, \theta) = \cos \omega A_1(\theta, 0) - \sin \omega R_1(\theta, 0)$$

se $f(\omega_0, \theta_0) = 0$, então, pelo fato de $(A_1(\theta, 0), R_1(\theta, 0)) \neq (0, 0)$ vale

$$\frac{\partial}{\partial \omega} f(\omega, \theta) = -\sin \omega A_1(\theta, 0) - \cos \omega R_1(\theta, 0) \neq 0,$$

aplicando o teorema da função implícita em f , encontramos que existe uma função diferenciável $\omega(\theta)$ tal que $f(\omega(\theta), \theta) = 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$.

Na verdade, temos uma quantidade enumerável de funções que satisfazem isso, dado que se fizermos $\omega_k(\theta) = \omega(\theta) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então $f(\omega_k(\theta), \theta) = 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$.

Diferenciando $f(\omega(\theta), \theta)$ com relação a θ , encontramos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \omega} f(\omega(\theta), \theta) \right) \omega'(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} f(\omega(\theta), \theta) = 0,$$

e usando que $\frac{\partial}{\partial \omega} f(\omega(\theta), \theta) \neq 0$ e $\frac{\partial}{\partial \theta} f(\omega(\theta), \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} A_{1\omega(\theta)}(\theta, 0)$ concluímos

$$\frac{\partial}{\partial \theta} A_{1\omega(\theta)}(\theta, 0) = 0 \Leftrightarrow \omega'(\theta) = 0.$$

Assim as singularidades infinitas não hiperbólicas de X_ω aparecem nos pontos em que $\omega'(\theta) = 0$.

Observe ainda que não teremos singulares infinitas de X_ω tais que $R_{1\omega}(\theta, 0) = 0$, pois isso forçaria o surgimento de um segmento de reta de singularidades em uma célula infinita limitada por um dos quadrantes.

Como $X \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1, 2', 3)$, então para todo $\theta \in \mathbb{R}$ vale

$$(A_1(\theta, 0), R_1(\theta, 0)) \neq (0, 0),$$

assim, se $R_1(\theta, 0) = 0$, então

$$A_{\omega 1}(\theta, 0) = \cos \omega A_1(\theta, 0) = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Considere então $\omega \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $R_1(\theta, 0) \neq 0$, podemos então escrever

$$A_1(\theta, 0) - tg\omega R_1(\theta, 0) = 0 \Leftrightarrow tg\omega = \frac{A_1(\theta, 0)}{R_1(\theta, 0)}.$$

Assim os valores de ω para os quais X_ω tem uma singularidade infinita em $(\theta, 0)$ são

$$\omega_k(\theta) = \arctg\left(\frac{A_1(\theta, 0)}{R_1(\theta, 0)}\right) + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Usando as expressões dadas em 2.19 e 2.20, e diferenciando a expressão anterior com relação a θ , encontramos que, em cada quadrante, $\omega'(\theta) = 0$ no máximo em dois pontos.

Como não queremos, que as singularidades estejam nas direções dos eixos x e y , devemos também remover os valores

$$\omega(\theta) = \arctg\left(\frac{A_1(\theta, 0)}{R_1(\theta, 0)}\right) + k\pi,$$

$$\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}\}.$$

Concluimos portanto, que a menos de um conjunto enumerável de pontos ω , $X_\omega \in \Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1)$.

Vamos analisar agora a órbita no infinito.

O infinito é uma órbita periódica se, e somente se, $A_{\omega 1}(\theta, 0) \neq 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Pela expressão

$$A_{\omega 1}(\theta, 0) = \cos \omega A_1(\theta, 0) - \sin \omega R_1(\theta, 0)$$

é fácil observar que o conjunto

$$W = \{\omega \in \mathbb{R} | A_{\omega 1}(\theta, 0) \neq 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}\}$$

ou é vazio ou é formado pela união enumerável de intervalos abertos disjuntos.

Se W não for vazio, tome I um dos intervalos que está contido no conjunto. Para todo $\omega \in I$ podemos então calcular a derivada da aplicação de retorno para a órbita periódica no infinito.

Pelas proposições 2.8 e 2.10, temos a seguinte expressão para a derivada da aplicação de retorno

$$\pi'_\omega(0) = \exp \left[\sum_{j=1}^4 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} -\frac{R_{\omega 1j}(\theta)}{A_{\omega 1j}(\theta)} d\theta \right],$$

que podemos escrever como

$$\pi'_\omega(0) = \exp \left[\sum_{j=1}^4 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} - \frac{\sin \omega A_{1j}(\theta) + \cos \omega R_{1j}(\theta)}{\cos \omega A_{1j}(\theta) - \sin \omega R_{1j}(\theta)} d\theta \right].$$

Diferenciando essa expressão com relação a ω encontramos

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \pi'_\omega(0) = \pi'_\omega(0) \left(\sum_{j=1}^4 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} - \frac{(A_{1j}(\theta))^2 + (R_{1j}(\theta))^2}{(\cos \omega A_{1j}(\theta) - \sin \omega R_{1j}(\theta))^2} d\theta \right),$$

e dado que o campo $X \in \Sigma_{\Gamma,\Delta}(1; 1, 2', 3)$, então para $i = 1, 2, 3, 4$, vale

$$(A_{1j}(\theta))^2 + (R_{1j}(\theta))^2 \neq 0,$$

donde concluímos que no intervalo I a expressão $\frac{\partial}{\partial \omega} \pi'_\omega(0)$ não se anula.

No intervalo I a função $\pi'_\omega(0)$ é portanto crescente ou decrescente, e temos no máximo um valor de ω onde a órbita periódica no infinito não é hiperbólica.

Como W é formado pela união enumerável de intervalos abertos disjuntos, então devemos remover no máximo uma quantidade enumerável de valores de ω para garantir que a órbita periódica no infinito seja hiperbólica.

Considere agora as $[\Gamma, \Delta]$ -conexões de separatrizes. Sejam p_{S_1} e p_{S_2} um par de pontos de sela de X_{ω_0} com uma conexão de selas φ_{ω_0} , onde uma separatriz instável de p_{S_1} e uma estável de p_{S_2} coincidem. Existe então um intervalo aberto I_{ω_0} , com ω_0 no interior desse intervalo, tal que para todo $\omega \in I_{\omega_0}$, a separatriz instável de p_{S_1} para X_ω não mais encontra a separatriz estável de p_{S_2} se $\omega \neq \omega_0$. Logo os valores de ω para os quais existe uma conexão entre as selas p_{S_1} e p_{S_2} formam um conjunto discreto em $\mathbb{R}$, e portanto enumerável.

O mesmo processo pode ser feito quando consideramos $[\Gamma, \Delta]$ -conexões de separatrizes que conectam pontos de esquina, pontos de tangência e pontos de sela. Como temos uma quantidade finita desses pontos, então os valores de ω para os quais X_ω possui uma $[\Gamma, \Delta]$ -conexão de separatrizes estão contidos na união finita de conjuntos enumeráveis em $\mathbb{R}$.

Analisaremos agora as órbitas periódicas finitas. Sabemos, pela teoria de campos rodados [Duf53], que os pontos $p \in \mathbb{R}^2$ tais que $\varphi(t, p_0, X_\omega)$ é uma órbita periódica, formam regiões anulares no plano. Além disso, para cada ponto p_0 contido nessas regiões, existe um único $\omega_0 \in [0, \pi[$ tal que $\varphi(t, p_0, X_{\omega_0})$ é periódica.

Como o conjunto $\Gamma \times \Delta$ dos pontos de esquina da grade possui nm elementos, então devemos retirar no máximo nm valores de ω em $[0, \pi[$ para garantir que X_ω não possui órbitas periódicas passando por pontos de esquina. Logo, a menos de um conjunto enumerável de pontos ω em $\mathbb{R}$, X_ω possui todas as suas órbitas periódicas disjuntas de

Figura 4.5: Desaparecimento de conexões de separatrizes através de uma rotação

$\Gamma \times \Delta$.

Pela análise que fizemos anteriormente para as $[\Gamma, \Delta]$ -conexões de separatrizes, a menos de um conjunto enumerável de valores de ω , garantimos que o campo rotacionado não possui conexões de tangência, e em particular, não possui órbitas periódicas tangenciando a grade $[\Gamma, \Delta]$.

Nos resta então analisar as órbitas periódicas que são transversais a grade $[\Gamma, \Delta]$ e que não possuem pontos de esquina.

Tome p_0 em $\mathbb{R}^2$ e ω_0 em $\mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, p_0, X_{\omega_0})$ é uma órbita periódica que não possui pontos de esquina ou de tangência com a grade $[\Gamma, \Delta]$. Sem perda de generalidade, podemos supor que p_0 está contido em um pequeno segmento de reta L_0 em $[\Gamma, \Delta] \setminus \Gamma \times \Delta$ e $\omega_0 = 0$. O segmento L_0 é uma seção transversal para os campos X_ω , para valores de ω pequenos.

Pela observação 2.3, podemos então definir uma função

$$\Pi : L_0 \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow L_0$$

tal que para todo $\omega \in [-\epsilon, \epsilon]$

$$\Pi(p, \omega)$$

é a aplicação de retorno do campo X_ω associada a seção transversal L_0 . A função Π é obtida compondo as aplicações de transição entre os lados das células, levando em consideração a órbita periódica $\varphi(t, p_0, X)$. De fato, se essa órbita corta a grade em pontos $p_0 = E_0, E_1, \dots, E_k$, tomando pequenos segmentos de reta L_j em $[\Gamma, \Delta] \setminus \Gamma \times \Delta$, $E_j \in L_j$ e as aplicações de transição

$$\pi_j : L_j \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow L_{j+1}$$

dadas pela observação 2.3, então

$$\Pi(p, \omega) = \pi_k \circ \pi_{k-1} \circ \dots \circ \pi_0(p, \omega).$$

 Figura 4.6: Aplicação Π

Como cada uma dessas funções é analítica, então Π é uma função analítica. Vamos mostrar agora que $\frac{\partial}{\partial \omega} \Pi(p, 0) \neq 0$.

Primeiro, vamos analisar a derivada da aplicação de transição π_j com relação ao parâmetro ω . Considere a órbita $\varphi(t, p_0, X)$, entrando na célula da grade transversalmente através do ponto $\varphi(t_0, p_0, X) = q_0 \in L_j$ e saindo dessa célula transversalmente pelo ponto $\varphi(t_1, p_0, X) = q_1 \in L_{j+1}$. Tome sobre a órbita $\varphi(t, p_0, X)$ a normal $\vec{n}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, orientada positivamente com relação ao campo X .

Ao longo da normal $\vec{n}(t_1)$, tomamos coordenadas s , de modo que quando pensamos na aplicação de transição entre as seções transversais dadas pelos vetores $\vec{n}(t_0)$ e $\vec{n}(t_1)$, a imagem de q_0 por essa aplicação de transição é $q_1 + s(\omega)\vec{n}(t_1)$. Logo, para chegarmos até a seção transversal L_1 , ainda precisamos percorrer um tempo $\tau(s(\omega))$, onde essa função é dada pela definição 2.1.

Assim, temos que a aplicação de transição $\pi_j(q_0, \omega)$ pode ser escrita como

$$\varphi(\tau(s(\omega)), q_1 + s(\omega)\vec{n}(t_1), X_\omega).$$

Derivando essa expressão com relação a ω nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} [\varphi(\tau(s(\omega)), q_1 + s(\omega)\vec{n}(t_1), X_\omega)] &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau(s(\omega)), q_1 + s(\omega)\vec{n}(t_1), X_\omega) \frac{\partial \tau}{\partial s}(s(\omega)) \frac{\partial s}{\partial \omega}(\omega) \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\tau(s(\omega)), q_1 + s(\omega)\vec{n}(t_1), X_\omega) \frac{\partial s}{\partial \omega}(\omega) \vec{n}(t_1) \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(\tau(s(\omega)), q_1 + s(\omega)\vec{n}(t_1), X_\omega). \end{aligned}$$

Figura 4.7: Aplicação π_j

Calculando para $\omega = 0$, temos

$$\frac{\partial}{\partial \omega}[\varphi(\tau(s(0)), q_1 + s(0)\vec{n}(t_1), X)] = [X(q_1)\frac{\partial \tau}{\partial s}(s(\omega)) + \vec{n}(t_1)]\frac{\partial s}{\partial \omega}(\omega),$$

onde usamos que $\frac{\partial \varphi}{\partial p}(0, q_1, X) = Id$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(0, q_1, X) = 0$.

Agora observe que $X(q_1)\frac{\partial \tau}{\partial s}(s(\omega)) + \vec{n}(t_1)$ é um vetor não nulo e colinear a seção L_1 . Observe também que, calculando a derivada com relação a ω da função $s(\omega)$, considerando a família a um parâmetro X_ω , a proposição 2.4 nos dá $\frac{\partial s}{\partial \omega}(\omega) > 0$. Disso, concluímos que nessas condições, $\frac{\partial \pi_j}{\partial \omega}(q_0, 0) > 0$.

Se considerarmos

$$T_{j-1}(p, \omega) = \pi_{j-1} \circ \dots \circ \pi_0(p_0, \omega),$$

então para a composição $\pi_j(T_{j-1}(p, \omega), \omega)$ vale

$$\frac{\partial}{\partial \omega}[\pi_j(T_{j-1}(p_0, \omega), \omega)] = \pi'_j(T_{j-1}(p_0, \omega), \omega)\frac{\partial}{\partial \omega}[T_{j-1}(p_0, \omega)] + \frac{\partial \pi_1}{\partial \omega}(T_{j-1}(p_0, \omega), \omega),$$

onde π'_j é a derivada da aplicação de transição dada pela proposição 2.3.

Como $\pi'_j > 0$ sempre, então se $\frac{\partial}{\partial \omega}[T_{j-1}(p_0, \omega)] > 0$ e $\frac{\partial \pi_1}{\partial \omega}(T_{j-1}(p_0, \omega), \omega) > 0$, podemos

concluir que

$$\frac{\partial}{\partial \omega}[\pi_j(T_{j-1}(p_0, \omega), \omega)] > 0, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, k\}$$

e, em particular

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\Pi(p, 0) > 0.$$

Mas isso é facilmente verificado aplicando o princípio da indução finita às funções $\pi_j(T_{j-1}(p, \omega), \omega)$, levando em consideração que $\pi'_j > 0$ e $\frac{\partial \pi_j}{\partial \omega}(q_0, 0) > 0$.

Assim, se tomarmos $\sigma_0 : I \rightarrow L_0$ uma parametrização da seção transversal L_0 com $\sigma_0(0) = p_0$, usando as coordenadas locais s , e aplicando o teorema da função implícita em

$$\Pi(s, \omega) - s$$

como $\Pi(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial \Pi}{\partial \omega}(0, 0) \neq 0$, temos que existe uma função analítica $\omega(s)$, definida em uma vizinhança J de 0, tal que

$$\Pi(s, \omega(s)) - s = 0$$

para todo $s \in J$. Além disso, se derivarmos a expressão anterior com relação a s , vale

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s}(s, \omega(s)) + \frac{\partial \Pi}{\partial \omega}(s, \omega(s))\omega'(s) = 1,$$

e como $\frac{\partial \Pi}{\partial \omega}(s, \omega(s)) \neq 0$, concluímos

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s}(s, \omega(s)) = 1 \Leftrightarrow \omega'(s) = 0.$$

Ou seja, os valores de ω para os quais $\varphi(t, \gamma_0(s), X_{\omega(s)})$ é uma órbita periódica não hiperbólica, correspondem aos valores críticos da função $\omega(s)$. Como essa função é analítica, concluímos que a menos de um conjunto enumerável de valores de ω , X_ω não possui órbitas periódicas finitas não hiperbólicas.

Finalizamos a demonstração tomando a união finita de todos os conjuntos encontrados anteriormente. Logo, a menos de um conjunto enumerável de valores de ω , temos $X_\omega \notin \mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta}$.

□

Com as duas proposições anteriores podemos demonstrar o teorema 3.3.

Teorema 3.3 *Para todo $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ a família a cinco parâmetros definida por*

$$X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega}(x, y) = R_\omega[X(x, y) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \nu(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + \beta(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y})]$$

intersecta o conjunto fechado $\mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta} = \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma,\Delta}$ em um conjunto de medida de Lebesgue nula.

Demonstração: Tome $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ e considere o conjunto

$$\mathcal{U}(X) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega) \in \mathbb{R}^5 \mid R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}) \in \mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta}\}.$$

Precisamos mostrar que $m_5(\mathcal{U}(X)) = 0$, onde m_5 representa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^5$. Observe que o conjunto $\mathcal{U}(X)$ é fechado e portanto Lebesgue mensurável. De fato, se tomarmos a função contínua

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R}^{N(\Gamma,\Delta)} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega) &\longmapsto R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}), \end{aligned}$$

então $\mathcal{U}(X) = F^{-1}(\mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta})$, onde $\mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta}$ é um conjunto fechado. Assim, temos

$$m_5(\mathcal{U}(X)) = \int_{\mathbb{R}^5} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X)) dm_5,$$

onde $\mathcal{X}(A)$ denota a função característica do conjunto A . Aplicando o teorema de Fubini, [Rud87], para a função $\mathcal{X}(\mathcal{U}(X))$, temos

$$m_5(\mathcal{U}(X)) = \int_{\mathbb{R}^4} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X; \alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)) dm_1 \right) dm_4,$$

onde m_1 e m_4 são respectivamente a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^4$, e

$$\mathcal{U}(X; \alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) = \{\omega \in \mathbb{R} \mid R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}) \in \mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta}\}.$$

Se tomarmos

$$\mathcal{V}(X) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta} \in \mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta} \setminus \Sigma_{\Gamma,\Delta}(1; 1, 2', 3) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(2; 2)\},$$

então temos que $m_5(\mathcal{U}(X))$ é igual a

$$\int_{\mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{V}(X)} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X; \alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)) dm_1 \right) dm_4 + \int_{\mathcal{V}(X)} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}(\mathcal{U}(X; \alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta)) dm_1 \right) dm_4.$$

Pela proposição 4.3, a segunda integral se anula, e pela proposição 4.4, a primeira integral se anula. Concluimos portanto que $m_5(\mathcal{U}(X)) = 0$, como queríamos.

□

Teorema 3.2 *O conjunto aberto $\Sigma_{\Gamma,\Delta} = \Sigma_{\Gamma,\Delta}(1) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(2) \cap \Sigma_{\Gamma,\Delta}(3)$ possui medida de Lebesgue total, em particular $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é denso em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$.*

Demonstração: Vamos mostrar que $m_N(\mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta}) = 0$, onde m_N representa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^{N(\Gamma,\Delta)}$. Considere a função contínua

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{N(\Gamma,\Delta)} \times \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R}^{N(\Gamma,\Delta)} \\ (X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) &\longmapsto R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}), \end{aligned}$$

e defina a função

$$G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) = \mathcal{X}(\mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta}) \circ F(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)).$$

Usando o teorema 3.2, temos

$$\int_{\mathbb{R}^{N(\Gamma,\Delta)}} \left(\int_{\mathbb{R}^5} G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) dm_5 \right) dm_N = 0.$$

Assim, aplicando o teorema de Fubini para a função G , concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^5} \left(\int_{\mathbb{R}^{N(\Gamma,\Delta)}} G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) dm_N \right) dm_5 = 0.$$

Logo, a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^5$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^{N(\Gamma,\Delta)}} G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) dm_N = 0. \quad (4.4)$$

Fixe $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega) \in \mathbb{R}^5$ tal que a expressão anterior seja válida. Agora observe que

$$G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)) = 1 \Leftrightarrow R_\omega(X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta}) = Y,$$

com $Y \in \mathfrak{X}'_{\Gamma,\Delta}$. Ou equivalentemente

$$X(x, y) = R_{(-\omega)}(Y)(x, y) - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} - \nu \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \beta \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (4.5)$$

Seja X_0 o campo de vetores em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ com a seguinte expressão

$$X_0(x, y) = -\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} - \nu \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) - \beta \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Então, com essa notação, 4.5 é escrita

$$X = R_{(-\omega)}(Y) + X_0.$$

Disso concluímos que, para o ponto $(\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega)$ fixado, $G(X, (\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega))$ é a função característica do conjunto $R_{(-\omega)}(\mathfrak{X}'_{\Gamma, \Delta}) + X_0$, onde estamos considerando $R_{(-\omega)}$ uma transformação linear em $\mathbb{R}^{N(\Gamma, \Delta)}$.

Como a medida de Lebesgue é invariante por translações e vale 4.4, concluímos

$$0 = m_N(R_{(-\omega)}(\mathfrak{X}'_{\Gamma, \Delta}) + X_0) = |\det R_{(-\omega)}| m_N(\mathfrak{X}'_{\Gamma, \Delta})$$

e como $|\det R_{(-\omega)}| \neq 0$ vale

$$m_N(\mathfrak{X}'_{\Gamma, \Delta}) = 0.$$

Isso prova que o conjunto $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ possui medida de Lebesgue total e em particular é denso em $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$. De fato, se $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$ não fosse denso, existiriam $X \in \mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$ e $\delta > 0$ tal que $B_\delta(X) \subseteq \mathfrak{X}'_{\Gamma, \Delta}$. Mas isso geraria uma contradição com o fato de $\mathfrak{X}'_{\Gamma, \Delta}$ ter medida nula. Como queríamos.

□

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho estudamos a classe $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ de campos de vetores seccionalmente lineares no plano. Fixados os conjuntos $\Gamma = \{\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n\}$ e $\Delta = \{\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m\}$, $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$ é um espaço vetorial de dimensão finita, cujos elementos são campos de vetores cujas componentes possuem as seguintes expressões

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_1 + b_{11}x + b_{12}y + \sum_{i=1}^n c_1^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_1^j |y - \delta_j|, \\ Q(x, y) &= a_2 + b_{21}x + b_{22}y + \sum_{i=1}^n c_2^i |x - \gamma_i| + \sum_{j=1}^m d_2^j |y - \delta_j|. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Através do método da compactificação de Poincaré, ver proposição 2.6, construção apropriada para lidar com a não compacidade do plano, demos uma definição precisa de estabilidade estrutural para campos em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$, ver definição 3.1.

Baseados no artigo de Jorge Sotomayor e Ronaldo Garcia [SG03], e inspirados pelas condições encontradas no teorema de Andronov-Pontryagin-Peixoto, apresentamos, na seção 3.2, condições suficientes para que um campo de vetores seja estruturalmente estável em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$, impondo condições sobre as órbitas periódicas, as singularidades e as separatrizes dos sistemas 5.1, finitas e infinitas.

Os campos que satisfazem essas condições definem um conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$. Demonstramos, ver teorema 3.1, que esse conjunto é aberto e denso em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$.

Para a demonstração da abertura, usamos o método das regiões canônicas para campos suaves encontrado no artigo [PP59] e o adaptamos para a classe de campos seccionalmente lineares 5.1. Vimos que apenas três dos cinco tipos de regiões canônicas encontradas por Maurício Peixoto aparecem nos campos em $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$.

No teorema 4.2, construímos detalhadamente os homeomorfismos para todos os tipos de regiões canônicas, observando que devemos defini-los em uma sequência adequada,

para enfim obtermos os homeomorfismos que estabelecem a equivalência topológica entre campos de vetores próximos a X em $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$.

Através do estudo da família a cinco parâmetros

$$X_{\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega}(x, y) = R_\omega[X(x, y) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \nu(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) + \beta(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y})]$$

pelo teorema 3.3, usando os métodos encontrados em [Sot81], provamos que o conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é denso em $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$. Para tanto, construímos algumas funções dependendo dos parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \nu, \beta, \omega$ e estimamos a medida do conjunto de seus valores críticos. Devido ao fato dessas funções serem seccionalmente analíticas, provamos que tais conjuntos possuem medida nula sem recorrer ao Teorema de Sard.

Neste trabalho, devido a estrutura de $\mathfrak{X}_{\Gamma,\Delta}$, fomos mais adiante e provamos que $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é um conjunto de medida de Lebesgue total.

Alguns aspectos abordados no artigo [SG03] não foram analisados nesse trabalho, como por exemplo, a demonstração de que o conjunto $\Sigma_{\Gamma,\Delta}$ é igual ao conjunto $\mathcal{S}^r$ dos campos ditos regularmente estruturalmente estáveis, ficando ainda em aberto demonstrar que $\mathcal{S}_{\Gamma,\Delta} = \Sigma_{\Gamma,\Delta}$.

Acreditamos que este trabalho seja uma referência útil e um convite para estudos futuros sobre as bifurcações de sistemas seccionalmente lineares no plano. Assunto que é de interesse tanto matemático teórico quanto aplicado, e já possui uma vasta literatura, como por exemplo os trabalhos [Gom00, Ter00, FPMT98, FPMT02, BM13, Pan02, LP12, LP99].

Referências Bibliográficas

- [ALGM73] A. Andronov, E. Leontovich, I. Gordon, e G. Maier, *Theory of bifurcations of dynamical systems on a plane*, Israel Program for Scientific Translations, John Wiley, 1973.
- [BM13] D. C. Braga e L. F. Mello, *Limit cycles in a family of discontinuous piecewise linear differential systems with two zones in the plane*, Nonlinear Dynamics **73** (2013), 1283–1288.
- [CL55] E. A. Coddington e N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, 1955.
- [CL91] L. Chua e R. Lum, *Generic properties of continuous piecewise-linear vector field in $\mathbb{R}^2$* , IEEE Trans. Circuits Systems **38** (1991), no. 9, 1043–1066.
- [Duf53] G. F. D. Duff, *Limit-cycles and rotated vector fields*, Annals of Mathematics (1953), 15–31.
- [FPMT98] E. Freire, E. Ponce, F. R. Muñoz, e F. Torres, *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*, International Journal of Bifurcation and Chaos **8** (1998), no. 11, 2073–2097.
- [FPMT02] ———, *Bifurcation sets of symmetrical continuous piecewise linear systems with three zones*, International Journal of Bifurcation and Chaos **12** (2002), no. 8, 1675–1702.
- [Gom00] A. J. Gomes, *Seleção contínua de campos de vetores*, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Goiás, 2000.
- [LP99] J. Llibre e E. Ponce., *Bifurcation of a periodic orbit from infinity in planar piecewise linear vector fields*, Nonlinear Anal. **36** (1999), no. 5, 623–653, Ser. B: Real World Appl.
- [LP12] ———, *Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones*, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems (2012), no. 19, 325–335, Ser. B.

-
- [Pan02] D. Panazzolo, *Tame semiflows for piecewise linear vector fields*, Ann. de L’Institut Fourier **52** (2002), no. 6, 1593–1628.
- [Pei62] M. M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology **1** (1962), 101–120.
- [PP59] M. M. Peixoto e M. C. Peixoto, *Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*, Anais da Academia Brasileira de Ciências **31** (1959), no. 9, 135–160.
- [Rud87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3 ed., McGraw Hill, 1987.
- [SG03] J. Sotomayor e R. Garcia, *Structural stability of piecewise-linear vector fields*, Journal of Differential Equations **192** (2003), 553–565.
- [Sot79] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [Sot81] ———, *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*, Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981.
- [Sot85] ———, *Stable planar polynomial vector fields*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985).
- [Ter00] A. E. Teruel, *Clasificación topológica de una familia de campos vectoriales lineales a trozos simétricos en el plano*, Tese de doutorado, Universitat Autònoma de Barcelona, 2000.

Índice Remissivo

- $[\Gamma, \Delta]$, [6](#)
- $\Gamma \times \Delta$, [6](#)
- $\Sigma_{\Gamma, \Delta}$, [39](#)
- $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(1)$, [38](#)
 - $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1)$, [38](#)
 - $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 1, 2', 3)$, [38](#)
 - $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 2)$, [38](#)
 - $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(1; 3)$, [38](#)
- $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(2)$, [38](#)
 - $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(2; 1)$, [38](#)
 - $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(2; 2)$, [38](#)
- $\Sigma_{\Gamma, \Delta}(3)$, [39](#)
- $\mathbb{D}$, [22](#)
- $\mathbb{H}_+$, [18](#)
- $\mathbb{H}_-$, [18](#)
- $\mathbb{S}^1$, [18](#)
- $\mathbb{S}^2$, [18](#)
- $\mathcal{N}$, [18](#)
- $\mathfrak{X}_{\Gamma, \Delta}$, [6](#)
- $\mathcal{S}_{\Gamma, \Delta}$, [37](#)
- π , [11](#)
- τ , [10](#)
- $\tilde{\tau}$, [11](#)
- órbita periódica
 - finita, [22](#)
 - infinita, [22](#)
- aplicação de transição, [11](#)
- célula Ω_{ij} , [6](#)
- compactificação Poincaré
 - na esfera, [21](#)
 - no disco, [22](#)
- conexões de separatrizes, [38](#)
- conjunto de bifurcação, [40](#)
- continuidade do fluxo
 - com relação aos campos, [9](#)
 - com relação aos parâmetros, [8](#)
 - com relação as condições iniciais, [8](#)
- estabilidade estrutural, [37](#)
- grade compactificada, [22](#)
- pontos de esquina, [6](#)
- regiões canônicas, [58](#)
 - tipos de, [59](#)
- rotação
 - campo de vetores, [34](#)
- separatrizes, [58](#)
- singularidade
 - anti-sela, [22](#)
 - finita, [22](#)
 - hiperbólica, [22](#)
 - infinita, [22](#)
 - sela, [22](#)
 - simples, [22](#)