**ESTUDO QUALITATIVO
DA EQUAÇÃO :**
 $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$

Rosa María García Márquez

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de concentração: Equações Diferenciais Ordinárias
Orientador: **PROF.DR. HAMILTON LUIZ
GUIDORIZZI**

São Paulo, maio de 1993

a mis padres Saúl y Elizabeth,
a mis hermanos, a Jorge,
a mis hijos Elise y Elliod

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Hamilton Luiz Guidorizzi, pela orientação, dedicação, estímulo, entusiasmo contagioso e paciência recebidos durante este curto, mas produtivo tempo.

Aos meus professores do IME, em especial ao Paulo Cordaro, ao Oscar Vilcachagua e à Maria Stela Castilla.

Aos meus amigos Fernando, pela ajuda fornecida no "latex" e apoio dado; à Elisa, pela amizade e pela redação; ao Tomás e Roselí, pelas dicas.

À Edna pelas inúmeras sugestões e pelo apoio.

Aos amigos do IME, especialmente ao Tadashi, ao Alfredo e à Angela e Alexandre.

À amiga Elizabeth Genvazoni e família, pelo estímulo e carinho recebidos durante todos estes anos.

A meus pais, irmãos e minha família, pela ajuda incondicional que me deram durante todos estes longos anos.

E principalmente, ao Jorge e aos meus adorados filhos Elise e Elliod.

Resumo

Neste trabalho, obtivemos condições suficientes para a existência de soluções oscilantes e periódicas para equações do tipo:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

bem como para algumas equações do tipo:

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0.$$

Abstract

In this work we obtained sufficient conditions for existence of oscillating and periodic solutions for equations of the type:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

as well as for any equations of the type:

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0.$$

Conteúdo

1	A Equação: $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$	1
1.1	Introdução	1
1.2	Teorema de La Salle	3
1.3	Lemas	5
1.4	Condições de Suficiência	12
1.5	Estabilidade Assintótica	15
1.6	Origem Repulsora	18
1.7	Soluções Periódicas	19
1.8	Aplicações	23
2	A Equação: $\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$	33
2.1	Introdução	33
2.2	Lemas	36
2.3	Soluções Oscilantes	39
2.4	Origem Repulsora	45
2.5	Soluções Periódicas	46
2.6	Aplicações	50
	Bibliografia	53

Prefácio

No capítulo I, estudamos a equação:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

e obtemos condições suficientes para existência de soluções oscilantes, bem como para existência de soluções periódicas.

No segundo capítulo, obtemos condições suficientes para a existência de soluções oscilantes e periódicas para a equação do tipo:

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$$

Os lemas (1.3.2), (1.3.3) e (1.3.4) são fundamentais para o nosso trabalho e nos permitirão eliminar a hipótese

$$\int_0^{\infty} g(x)dx = \int_0^{-\infty} g(x)dx = +\infty,$$

que foi essencial nos resultados obtidos em [2] e [3] pelo professor Hamilton.

A idéia de utilizar $\int_a^x f(u)du$ para "segurar" soluções já foi utilizada em vários trabalhos. Em [1], por exemplo,

Burton estudou a equação

$$\ddot{x} + f(x)h(\dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$$

com as condições $f(x) \geq 0, h(u) > 0$ e

$$\int_0^{\pm\infty} [f(x) + |g(x)|]dx = \pm\infty,$$

obtendo então condições necessárias e suficientes para as soluções e suas derivadas serem limitadas. Com a hipótese adicional $f(0) > 0$, ele estabelece condição necessária e suficiente para a origem ser global-assintoticamente estável. Em [6], Graef prova que nas condições:

$$xF(x) > 0 \text{ se } |x| \geq k > 0 \quad (F(x) = \int_0^x f(u)du)$$

$$F(x) \geq c > 0 \text{ se } x > k \text{ ou } F(x) \leq -c < 0 \text{ se } x < -k$$

$$xg(x) > 0 \text{ para } x \neq 0$$

$$f(0) < 0 \text{ e } \int_0^{\pm\infty} [f(x) + |g(x)|]dx = \pm\infty,$$

a equação admite pelo menos uma solução periódica não trivial. Prova ainda que se $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$, $f(0) < 0$ e $xF(x) > 0$ para $|x| \geq k > 0$, então

$$\int_0^{\pm\infty} [f(x) + |g(x)|]dx = \pm\infty$$

é uma condição necessária e suficiente para todas as soluções serem oscilantes.

Em 1987 [11], Villari melhora o teorema de Graef sobre soluções oscilantes provando que se

$$xF(x) < 0, 0 < |x| < \epsilon,$$

$$F(x) > -c > -\infty \text{ se } x > 0, F(x) < c < \infty \text{ se } x < 0 \text{ e}$$

$xg(x) > 0$ se $x \neq 0$,
então todas as soluções são oscilantes se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup[G(x) + F(x)] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sup[G(x) + F(x)] = \infty$$

onde $G(x) = \int_0^x g(u)du$. Neste mesmo artigo, Villari estabelece os seguintes resultados sobre existência de soluções periódicas:

Teorema 3. Dadas as condições:

- (1) $xF(x) < 0$ para $0 < |x| < \epsilon$ e $g(x)x > 0$ se $x \neq 0$
- (2) $G(x) < H$ se $x > x_0 > 0$ ou se $x < -x_0$
- (3) $F(x) \geq -c > -\infty$ se $x > 0$ $F(x) \leq c < \infty$ se $x < 0$
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup[G(x) + F(x)] = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sup[G(x) - F(x)] = \infty$

Então a equação $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ admite pelo menos uma solução periódica não trivial.

Corolário 1 Supondo que:

- (1) $xF(x) < 0$ para $0 < |x| < \epsilon$ e $xg(x) > 0$ se $x \neq 0$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \pm\infty$,

a equação $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ admite pelo menos uma solução periódica não trivial.

Corolário 2 Supondo que:

(1) $xF(x) < 0$ para $0 < |x| < \epsilon$ e $xg(x) > 0$ se $x \neq 0$

(2) $F(x) \leq c$ se $x \leq -x_0$, $F(x) \geq c$ se $x \geq x_0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup F(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \inf F(x) = -\infty$,

a equação $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ admite pelo menos uma solução periódica não trivial.

Neste nosso trabalho, obtemos condições suficientes para a existência de soluções oscilantes (não todas) bem como para existência de soluções periódicas onde poderá ocorrer $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup F(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sup F(x) = \infty$ e

$\int_0^{\pm\infty} g(x) dx < \infty$. No teorema (2.5.3) nada se exige sobre o comportamento de $F(x)$ e de $G(x)$ para $|x|$ grande, onde $F(x) = \int_0^x f_1(u) du$.

O lema (1.3.2) combina a idéia acima citada com a utilizada nos trabalhos do prof. Hamilton. Por outro lado, a idéia de utilizar $\int_m^a [f(x) - \beta g(x)] dx$ que aparece no lema (1.3.3) para "segurar" soluções parece-nos original e nos permitirá obter condições suficientes para existência de soluções periódicas onde poderá ocorrer $f(x) \leq 0$ para $x \leq \delta$, para algum $\delta > 0$, onde também não se impõe nenhuma restrição sobre o valor de $F(x)$ para $|x|$ grande.

Capítulo 1

Soluções Periódicas e Oscilantes da Equação:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

1.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a equação do tipo:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (1.1)$$

onde as funções f e g satisfazem as condições:

- $[c_1]$ f e g são funções reais de classe $\mathcal{C}^1$
- $[c_2]$ $x.g(x) > 0$ para $x \neq 0$.

A equação (1.1) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

O fato de f e g serem funções de classe $\mathcal{C}^1$, assegura a existência e unicidade das soluções do sistema acima. A

condição $[c_2]$ garante que a origem é o único ponto crítico do sistema.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Indicamos por Ω_α os seguintes conjuntos abertos:

$$\Omega_\alpha = \mathbb{R}^2, \quad \text{se } \alpha = 0,$$

$$\Omega_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -\frac{1}{\alpha}\}, \quad \text{se } \alpha > 0,$$

$$\Omega_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -\frac{1}{\alpha}\}, \quad \text{se } \alpha < 0.$$

Consideremos a seguinte função definida positiva V_α :

$$V_\alpha(x, y) = \int_0^y \frac{\tau}{\alpha\tau + 1} d\tau + \int_0^x g(u) du \quad (1.3)$$

para todo $(x, y) \in \Omega_\alpha$; a derivada de V_α em relação ao sistema (1.2) é:

$$\dot{V}_\alpha(x, y) = -\frac{(f(x) - \alpha g(x))y^2}{\alpha y + 1}, \quad (1.4)$$

para todo $(x, y) \in \Omega_\alpha$. Como $\alpha y + 1 > 0$ em Ω_α , o sinal de $\dot{V}_\alpha$ depende apenas da diferença $(f(x) - \alpha g(x))$. Observe que se $\alpha = 0$, o sinal de $\dot{V}_\alpha$ vai depender apenas de $f(x)$.

Sejam $\kappa = \int_0^{-\infty} g(x) dx$ e $\lambda = \int_0^{\infty} g(x) dx$. As curvas de nível de V_α tem os seguintes aspectos: (veja fig. 1.1) **(Maiores detalhes em [10])**

1.2 Teorema de La Salle

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.5)$$

sendo P e Q funções de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo a origem. Sejam $W: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida positiva e de classe $\mathcal{C}^1$ e $\dot{W}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a derivada de W em relação ao sistema (1.5), isto é:

$$\dot{W} = P\partial_x W + Q\partial_y W. \quad (1.6)$$

Seja $K = \{(x, y) \in \Omega / W(x, y) \leq L; L > 0\}$. Suponhamos K compacto e

$$\dot{W}(x, y) \leq 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in K.$$

Sejam $E = \{(x, y) \in \Omega / \dot{W}(x, y) = 0\}$ e M o maior subconjunto de K que é invariante para o sistema (1.5) e que esteja contido em E . Nestas condições, o teorema de La Salle afirma que se $\gamma(t)$ for solução de (1.5) tal que $\gamma(t_0) \in K$ para algum t_0 , então para todo $t \geq t_0$, $\gamma(t) \in K$ e $\gamma(t)$ tende a M quando $t \rightarrow \infty$.

Além disso, se $M = \{(0, 0)\}$, então a origem será assintoticamente estável.

A prova deste teorema encontra-se em [8]

Observação: Se $\gamma(t)$ for uma solução de (1.5), então

$$\frac{dW(\gamma(t))}{dt} = \dot{W}(\gamma(t)).$$

$$K < \lambda = \infty$$

$$C_1 < K$$

$$C_i \geq K \quad i=2,3,4$$

$$d > 0$$

$$K = \lambda < \infty$$

$$C_1 < K$$

$$C_2 < K$$

$$C_i \leq K \quad i=3,4$$

$$d < 0$$

$$\lambda < K < \infty$$

$$C_1 < \lambda$$

$$\lambda \leq C_2 < K$$

$$K \leq C_i \quad i=3,4$$

$$d = 0$$

$$K < \lambda < \infty$$

$$C_1 < K$$

$$K \leq C_2 < \lambda$$

$$C_i \geq \lambda \quad i=3,4$$

Figura 1.1: figura

1.3 Vejamos Alguns Lemas :

Lema 1.3.1 *As soluções do sistema (1.2) não admitem assíntotas verticais.*

Demonstração:

Veja [2], pag.85.

Lema 1.3.2 *Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma solução do sistema (1.2) tal que $\gamma(t_0) = (b, y_0)$, com $0 < y_0 < R$, para algum $R > 0$. Suponhamos que existem reais $M > b > 0$, $\alpha > 0$ tais que:*

(I) $f(x) \geq \alpha g(x)$ para todo $x \in [b, M]$,

(II) $\int_b^M f(x) dx > R$.

Então, existe um tempo $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (b, y_1)$, onde $0 > y_1 > -\frac{1}{\alpha}$.

Demonstração:

De (1.2), para $y \neq 0$ temos:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}.$$

Como $g(x) > 0$ para todo $x > 0$ e, quando $y > 0$ $-\frac{g(x)}{y} < 0$, temos

$$\frac{dy}{dx} \leq -f(x).$$

Integrando em relação a x , para $x > b$, temos:

$$y(x) \leq y_0 - \int_b^x f(u) du$$

nos pontos em que $y(x) > 0$.

Façamos $h(x) = y_0 - \int_b^x f(u) du$ para $x \geq b$.

Sendo $\gamma(t)$ solução de (1.2) com $\gamma(t_0) = (b, y_0)$, a desigualdade acima mostra que γ não cruza o teto do gráfico de h situado no semiplano $y > 0$.

Como $\int_b^x f(u) du > R$ e $y_0 < R$, existe um $x_1 \in]b, M[$ tal que $\int_b^{x_1} f(u) du = y_0$, assim, $h(x_1) = 0$. Daí, segue que a solução $\gamma(t)$ tem que cruzar o eixo x em algum $\bar{x} \in]b, x_1]$.

Agora, quando $y < 0$ temos $\dot{x} < 0$; como sabemos que o sistema (1.2) não admite assíntotas verticais, então podemos afirmar que existe um tempo $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (b, y_1)$, onde $-\frac{1}{\alpha} < y_1 < 0$. Esta última desigualdade decorre da hipótese (I) que garante $\dot{V}_\alpha(x, y) \leq 0$ quando $b \leq x \leq M$, e da condição $[c_2]$. ■

Veja a figura (1.2)

Figura 1.2: figura

Observação do lema (1.3.2)

Se, no lema (1.3.2), fizermos $M = \infty$ e $\int_b^\infty f(x) dx = \infty$ o lema continua válido para qualquer $y_0 > 0$.

Lema 1.3.3 *Suponhamos que existem $\beta > 0$ e $m < a < 0$ tais que:*

- (I) $f(x) \geq \beta g(x)$ para todo $x \in [m, a]$,
- (II) $\int_m^a (f(x) - \beta g(x)) dx > r$, com $0 < r < \frac{1}{\beta}$.

Seja $\gamma(t)$ uma solução de (1.2) tal que $\gamma(t_0) = (a, y_0)$ com $0 > y_0 > -r$. Então, existe um tempo $t_2 > t_0$ tal que $\gamma(t_2) = (a, y_2)$ sendo $0 < y_2 < s$, onde s satisfaz a igualdade $V_\beta(a, -r) = V_\beta(a, s)$.

Demonstração:

De (1.2) para $y \neq 0$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}.$$

Para $0 > y > -\frac{1}{\beta}$ e $x < a$ obtemos

$$-\frac{g(x)}{y} < \beta g(x),$$

então

$$\frac{dy}{dx} \leq -f(x) + \beta g(x)$$

e integrando:

$$\begin{aligned} y(a) - y(x) &\leq \int_x^a (-f(u) + \beta g(u)) du, \quad \text{para } x < a \\ y(x) &\geq y_0 + \int_x^a (f(u) - \beta g(u)) du \end{aligned}$$

nos pontos em que $y(x) < 0$.

Façamos $h(x) = y_0 + \int_x^a (f(u) - \beta g(u)) du$, $m \leq x \leq a$.

Sendo $\gamma(t)$ uma solução de (1.2) com $\gamma(t_0) = (a, y_0)$, a desigualdade acima mostra que γ não cruza o trecho do gráfico de h situado no semiplano $y < 0$. Como $\int_m^a (f(u) - \beta g(u)) du > r$ e $-r < y_0$, existe um $x_2 \in]m, a[$ tal que $\int_{x_2}^a (f(u) - \beta g(u)) du = y_0$, assim $h(x_2) = 0$. Segue que a solução $\gamma(t)$ tem que cruzar o eixo x em algum $\bar{x} \in [x_2, a[$.

Por outro lado, $\dot{x} > 0$ quando $y > 0$, e pelo lema (1.3.1), podemos afirmar que existe um tempo $t_2 > t_0$ tal que $\gamma(t_2) = (a, y_2)$. Considerando $[c_2]$ temos $y_2 > 0$. Por outro lado existe um nível $C > 0$ tal que:

$$C = V_\beta(a, -r) = V_\beta(a, s)$$

com $s > 0$, pois $y_0 > -r$. Como $\dot{V}_\beta(x, y) \leq 0$ quando $m < x < a$, segue-se que $y_2 < s$. ■

Veja figura (1.3).

Figura 1.3: figura

Lema 1.3.4 *Suponhamos que existem $r > 0$, $m < a \leq 0$ tais que:*

$$\int_m^a f(u) du > r.$$

Seja $\gamma(t)$ uma solução de (1.2) tal que $\gamma(t_0) = (a, y_0)$, com $0 > y_0 > -r$. Então, existe um tempo $t_2 > t_0$ tal que $\gamma(t_2) = (a, y_2)$, sendo $y_2 > 0$.

Demonstração:

De (1.2) para $y \neq 0$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}.$$

Como $g(x) < 0$ para $x < a$ e quando $y < 0$ obtemos

$$-\frac{g(x)}{y} < 0,$$

então

$$\frac{dy}{dx} \leq -f(x)$$

e integrando, temos:

$$y(a) - y(x) \leq \int_x^a -f(u) du, \quad \text{para } m < x < a$$

$$y(x) \geq y_0 + \int_x^a f(u) du$$

nos pontos em que $y(x) < 0$.

Com raciocínio análogo ao lema anterior segue a tese.

■

Lema 1.3.5 *Suponhamos que existem $\delta_1 > 0$ e $\alpha_1 > 0$ tais que para $0 < x < \delta_1$, $f(x) < \alpha_1 g(x)$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma solução de (1.2) tal que $\gamma(t_0) = (x_1, 0)$, com $x_1 > 0$. Então, existe um $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (0, y_1)$, sendo $y_1 < 0$.*

Demonstração:

É imediata, basta observar que para $0 < x < \delta_1$, temos $\dot{V}_{\alpha_1}(x, y) > 0$, assim a solução $\gamma(t)$ não pode tender à origem pelo semiplano $x > 0$. ■

Veja fig.1.4-a.

Lema 1.3.6 *Suponhamos que existem $\delta_2 > 0$ e $\alpha_2 > 0$ tais que para $-\delta_2 < x < 0$, $f(x) < \alpha_2 g(x)$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma solução de (1.2) tal que $\gamma(t_0) = (x_2, 0)$, com $x_2 < 0$. Então, existe um $t_2 > t_0$ tal que $\gamma(t_2) = (0, y_2)$ sendo $y_2 > 0$.*

Demonstração:

Análoga à do teorema anterior. ■

Veja fig.1.4-b.

Observação :

Consideremos a equação (1.1). Suponhamos que existem reais $\alpha > 0, \delta > 0$ tais que $f(x) < \alpha|g(x)|$ com $0 < |x| < \delta$. Então a solução de (1.1) que parte do ponto $(0, x_1)$, com $x_1 > 0$, cruza o eixo y em um ponto $(0, y_1)$, $y_1 < 0$; e a solução que parte do ponto $(0, x_2)$, $x_2 < 0$, cruza o eixo y em um ponto $(0, y_2)$, sendo $y_2 > 0$.

Figura 1.4: figura(a)

figura(b)

1.4 Condições Suficientes para Soluções Oscilantes

Definição: A solução $x(t)$ da equação (1.1) com intervalo maximal I é dita *oscilante* se para todo $t \in I$, tal que $x(t) = 0$, existe um tempo $\bar{t} \in I$ com $\bar{t} > t$, tal que $x(\bar{t}) = 0$.

Teorema 1.4.1 *Suponhamos que existem reais $\alpha > 0$, $\alpha_1 > 0$ e $m < a < 0 < b$ tais que:*

(I) $\int_m^a f(x) dx > r$ onde $r \geq \frac{1}{\alpha} + (A + \alpha B)(b - a)$,
sendo $A \geq \max_{[a,b]} |f(x)|$ e $B \geq \max_{[a,b]} |g(x)|$,

- (II) $f(x) < \alpha_1 |g(x)|$ com $0 < |x| < \delta$ para algum $\delta > 0$,
 (III) $f(x) \geq \alpha g(x)$ para todo $x \geq b$,
 (IV) $\int_b^\infty f(x) dx = +\infty$.

Então toda solução de (1.1) com condições iniciais

$$x(0) = x_0, \quad \text{com } x_0 \text{ real e } \dot{x}(0) = 0$$

é oscilante.

Demonstração:

Em [2] está provado que a solução de (1.2) que parte de $(b, -\frac{1}{\alpha})$ ou cruza o eixo x no ponto $(a_1, 0)$, com $a < a_1 < 0$ ou cruza pela primeira vez a reta $x = a$ em um ponto (a, y_1) com $0 > y_1 > -r$.

Suponhamos $x_0 > 0$ e denotemos por $\gamma(t)$ a solução de (1.2) tal que $\gamma(t_0) = (x_0, 0)$. Como $\dot{x} < 0$, quando $y < 0$, e da hipótese (II) junto com o lema (1.3.1) podemos afirmar que existe $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (a, y_1)$ com $y_1 < 0$ ou $\gamma(t_1) = (\bar{x}, 0)$, com $a < \bar{x} < 0$. Da hipótese (III) e do que observamos acima resulta $y_1 > -r$.

Logo, dos lemas (1.3.1) e (1.3.4) e da hipótese (II) segue a existência de um $y_2 = y(t_2) > 0$ com $t_2 > t_1$, tal que $\gamma(t_2) = (b, y_2)$. Como $\int_b^\infty f(x) dx = +\infty$ e pela observação do lema (1.3.2), existe um $t_3 > t_2$ tal que $\gamma(t_3) = (x_1, 0)$ com $x_1 > 0$.

No caso que $x_0 < 0$, , denotemos por $\gamma(t)$ a solução de (1.2), com $\gamma(t_0) = (x_0, 0)$. De modo análogo, conclui-se que existe $t_1 > t_0$, tal que $\gamma(t_1) = (x_1, 0)$ com $x_1 > 0$. Portanto, tem-se a tese. ■

Teorema 1.4.2 *Suponhamos que existem reais $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha_1 > 0$ e $m < a < 0 < b$ tais que*

(I) $f(x) \geq \beta g(x)$ para todo $x \in [m, a]$ com

$$\frac{1}{\beta} > r \geq \frac{1}{\alpha} + (A + \alpha B)(b - a),$$

onde $A \geq \max_{[a,b]} |f(x)|$ e $B \geq \max_{[a,b]} |g(x)|$,

(II) $\int_m^a (f(x) - \beta g(x)) dx > r$,

(III) $f(x) < \alpha_1 |g(x)|$ com $0 < |x| < \delta$ para algum $\delta > 0$,

(IV) $f(x) \geq \alpha g(x)$ para todo $x \geq b$,

(V) $\int_b^\infty f(x) dx = +\infty$.

Então toda solução de (1.1) com condições iniciais $x(0) = x_0$, com x_0 real, e $\dot{x}(0) = 0$ é oscilante.

Demonstração:

Em [2] está provado que a solução de (1.2) que parte de $(b, -\frac{1}{\alpha})$ ou cruza o eixo x no ponto $(a_1, 0)$, com $a < a_1 < 0$ ou cruza pela primeira vez a reta $x = a$ em um ponto $(a, \bar{y}_1)$ com $0 > \bar{y}_1 > -r$.

Suponhamos $x_0 > 0$ e denotemos por $\gamma(t)$ solução de (1.2) tal que $\gamma(t_0) = (x_0, 0)$. Como $\dot{x} < 0$ quando $y < 0$ e do lema (1.3.1) e da hipótese (IV) podemos afirmarmos que existe um $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (a, y_1)$ com $y_1 < 0$ ou

$\gamma(t_1) = (\bar{x}, 0)$; com $a < \bar{x} < 0$. Da hipótese (III), e do que observamos acima resulta $y_1 > -r$. Dos lemas (1.3.1) e (1.3.3) e da hipótese (III), segue a existência de um $t_2 > t_1$ tal que $\gamma(t_2) = (b, y_2)$ com $0 < y_2$. Pela hipótese (V) existe $t_3 > t_2$ tal que $\gamma(t_3) = (x_1, 0)$, $x_1 > 0$.

No caso que $x_0 < 0$, denotemos por $\gamma(t)$ a solução de (1.2) com $\gamma(t_0) = (x_0, 0)$. Com raciocínio análogo ao do teorema anterior, conclue-se que existe $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (x_2, 0)$ com $x_2 > 0$. Portanto, tem-se a tese. ■

Observação:

Se no teorema (1.4.2), substituirmos as condições (IV) e (V) por:

(IV') $f(x) \geq \alpha g(x)$ para todo $b \leq x \leq M$, $M > b$,

(V') $\int_b^M f(x) dx > R > s + (A + \frac{1}{s}B)(b - a)$, sendo $s > 0$ tal que:

$$V_\beta(a, -r) = V_\beta(a, s) = V_\beta(m_1, 0),$$

$m_1 < a$, $A \geq \max_{[a,b]} |f(x)|$ e $B \geq \max_{[a,b]} |g(x)|$, então, toda solução $\gamma(t)$ tal que $\gamma(t_0) = (x_0, 0)$ é oscilante, desde que $\bar{m} < x_0 < M$, sendo $\bar{m} = \max\{m, m_1\}$, se m_1 existir (veja fig. 1.5a); caso contrário, $\bar{m} = m$ (veja fig. 1.5b).

1.5 Condições Suficientes para Estabilidade Assintótica

Figura 1.5: figura(a)

figura(b)

Teorema 1.5.1 *Suponhamos que existem reais $m < 0$, $\alpha > 0, \beta > 0$, tais que:*

- (I) $f(x) > \alpha g(x)$ para $x > m$ e $x \neq 0$,
- (II) $\int_m^0 [f(x) - \alpha g(x)] dx \geq r$ sendo $r \geq \frac{1}{\alpha}$,
- (III) $\int_0^\infty f(x) dx = \infty$

Então, a origem é assintoticamente estável. Além disso, toda solução que começa no eixo x ou no ponto $(0, y_0)$, sendo $y_0 > -\frac{1}{\alpha}$, tende para a origem quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração

Decorre dos lemas (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) e do teorema de La Salle. Basta observar que a origem é o maior conjunto invariante contido em $E = \{(x, y) \in \Omega_\alpha / \dot{V}_\alpha(x, y) =$

$0\}.$ (veja fig. 1.6) ■

Figura 1.6: figura

Observação :

Se no teorema (1.5.1) acrescentarmos a hipótese:

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \infty,$$

então, a origem é global-assintoticamente estável.

1.6 Condição Suficiente para a Origem ser Repulsora

A demonstração do teorema abaixo encontra-se em [4]

Teorema 1.6.1 *Suponhamos que existem reais α , $r_2 < 0 < r_1$ tais que:*

*(I) $f(x) < \alpha g(x)$ para todo $x \in]r_2, r_1[$, $x \neq 0$
então, a origem é repulsora. Além disso, se $r_2 = -\infty$, $r_1 = \infty$ e $\int_0^{-\infty} g(x)dx = \int_0^{\infty} g(x)dx = \infty$, então a equação (1.1) não admitirá órbitas periódicas.*

1.7 Condições Suficientes para a Existência de Soluções Periódicas

Teorema 1.7.1 *Suponhamos que existem reais $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $m < a < 0 < b$ tais que:*

- (I) $f(x) \geq \alpha g(x)$, para $x \in [b, \infty[$,
 - (II) $\int_b^\infty f(x)dx = \infty$
 - (III) A origem é repulsora,
 - (IV) $f(x) \geq \beta g(x)$, para $x \in [m, a]$ sendo $\frac{1}{\beta} > r \geq \frac{1}{\alpha} + (A + \alpha B)(b - a)$, onde $A \geq \max_{[a,b]} |f(x)|$, $B \geq \max_{[a,b]} |g(x)|$,
 - (V) $\int_m^a (f(x) - \beta g(x)) dx > r$,
- Então, o sistema (1.2) admitirá pelo menos uma órbita periódica não trivial.*

Demonstração:

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma solução de (1.2) com a condição inicial $\gamma(t_0) = (b, -\frac{1}{\alpha})$ para algum $t_0 \geq 0$. Seja $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (0, y_1)$, $y_1 < 0$. Seguindo o raciocínio utilizado no teorema (1.4.1) conclui-se que γ cruzará novamente o semi-eixo $y < 0$ em um ponto $(0, y_2)$, com $0 > y_2 > y_1$. Da hipótese (III), temos que a origem é repulsora. Logo, pelo teorema de Poincaré-Bendixson, segue a tese. (veja fig. 1.7)

■

Figura 1.7: figura

Teorema 1.7.2 *Suponhamos que existem reais $\alpha > 0$ e $m < a < 0 < b$ tais que:*

- (I) $f(x) \geq \alpha g(x)$, para $x \in [b, \infty[$,
- (II) $\int_b^\infty f(x) dx = \infty$
- (III) A origem é repulsora,
- (IV) $\int_m^a f(x) dx > r$ sendo $r \geq \frac{1}{\alpha} + (A + \alpha B)(b - a)$,
onde $A \geq \max_{[a,b]} |f(x)|$ e $B \geq \max_{[a,b]} |g(x)|$.

Então o sistema (1.2) admitirá pelo menos uma órbita periódica não trivial.

Demonstração:

Análoga à do teorema (1.7.1).

Observação [1]:

As hipóteses dos teoremas (1.7.1) e (1.7.2) podem ser substituídas por:

Suponhamos que existem reais $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\rho_2 < m < a < 0 < b < \rho_1$ tais que:

$$(I) f(x) \geq \alpha g(x), \text{ para } x \in [b, \rho_1[,$$

$$(II) \int_b^{\rho_1} f(x) dx = \infty.$$

Observação [2]:

As hipóteses (IV) e (V) do teorema (1.7.1) podem ser substituídas pela condição 3 do teorema 1, de [2] ou pela condição 3 de teorema 2, de [2]; desde que $\int_0^{-\infty} g(x) dx = \infty$ (i.e. $f(x) \geq 0$, $V_0(c, 0) = V_0(a, r)$; $r = \frac{1}{\alpha} + (A + \alpha B)(b - a)$, $x \in [c, a]$)

Observação [3]:

A condição (IV) do teorema (1.7.1) pode ser substituída por:

$$(IV) f(x) \geq \beta g(x), \text{ para } x \in [m, a] \text{ sendo } \frac{1}{\beta} > r \geq \frac{1}{\alpha} + \int_a^b [|f(x)| + \alpha |g(x)|] dx.$$

Observação [4]:

A condição (IV) do teorema (1.7.2) pode ser substituída por:

(IV') $\int_m^a f(x)dx > r$ sendo

$$r \geq \frac{1}{\alpha} + \int_a^b [|f(x)| + \alpha|g(x)|]dx.$$

1.8 Exemplos

Exemplo 1

Considerando a equação:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.7)$$

onde:

$$f(x) = (x + 9)(x + 6)(x + 1)(x + \frac{1}{10})(x - \frac{1}{2})$$

$$g(x) = 20xe^{-x^2}$$

temos:

$$(I) \quad f(x) \geq \alpha g(x) \text{ para } x \geq b, \text{ onde } \alpha = 1 \text{ e } b = 0.62$$

$$(II) \quad \int_b^\infty f(x) dx = \infty,$$

(III) Como $f(0) < 0$, então pelo teorema da conservação do sinal temos $f(x) < 0$ para $|x| < \delta$, para algum $\delta > 0$. Logo a origem é repulsora.

$$(IV) \quad \text{Sejam } a = -\frac{1}{10}, m = -9, \max_{[a,b]} |f(x)| \leq 43/50,$$

$$\max_{[a,b]} |g(x)| \leq 43/50. \text{ Sejam } A = 43/50, B = 43/50,$$

assim:

$$\frac{1}{\alpha} + (A + \alpha B)(b - a) = 16.14 \leq r = 17$$

Por outro lado:

$$\int_{-1}^{-0.1} f(x) dx = 5.8 < r$$

e

$$\int_{-9}^{-0.1} f(x) dx = 272 > r. \text{ Por este motivo, escolhemos}$$

$$m = -9.$$

Logo, do teorema (1.4.1), podemos concluir que a solução da equação (1.7) com condição inicial $x(0) = x_0$, com x_0 real e $\dot{x}(0) = 0$ é oscilante. Observemos que neste caso não se aplica o teorema (1.4.2), pois a integral $\int_{-\infty}^a g(x) dx$ é insignificante, e será ainda mais, se a multiplicarmos por um $\beta > 0$, com $\frac{1}{\beta} > r$.

Também não podemos utilizar [2] pois $\int_0^{-\infty} g(x) dx$ é menor que infinito.

Pelo teorema (1.7.2) a equação (1.7) admite pelo menos uma órbita periódica não trivial. Veja figura a seguir.

Figura 1.8: figura

Exemplo 2

Consideremos a equação:

$$\ddot{x} + M(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.8)$$

onde:

$M(x) = -(x+4)(x+1)(x+0.4)(x-0.3)(x+1.25)(x-6),$
 e
 $g(x) = 50x.$
 Sejam $a = -0.32, b = 0.7, m = -4.008, \alpha = 1,$

 $\max_{[a,b]} |M(x)| \leq 4, \text{ com } A = 4, \max_{[a,b]} |g(x)| \leq 16 \text{ com } B = 16.$
 Como

$$\frac{1}{\alpha} + (A + \alpha B)(b) = 12.6 \leq r, \text{ escolhemos } r = 13.$$

(I) $M(x) \geq \beta g(x)$, e $\beta = 0.06$, (observe que $\frac{1}{\beta} > r$) e para $m \leq x \leq a$

$$(II) \int_{-4.008}^{-0.32} [M(x) - \beta g(x)] dx = 437.554 > r,$$

(III) $M(x) < \alpha_1 g(x)$ quando $-0.4 < x < 0.31$ e $\alpha_1 = 1$, logo a origem é repulsora.

(IV) $M(x) \geq \alpha g(x)$ para todo $b \leq x \leq M$, sendo $M = 5.98$

(V) Seja $R = 127$. Assim, $R > s + (A + \frac{1}{s}B)(b - a) = 64.5$, onde $s = 29.055$

tal que :

$$V_{\beta}(a, -r) = V_{\beta}(a, s) = V_{\beta}(m_1, 0), \text{ com } -2.86 = m_1 < a$$

Logo:

$$\int_b^M M(x) dx = 21249.2 > R.$$

Então, toda solução $\gamma(t)$ tal que $\gamma(t_0) = (x_0, 0)$ é oscilante, desde que $\bar{m} < x_0 < M$, onde $\bar{m} = \max\{m_1, m\} = -2.86$, com $m_1 = -2.86, m = -4.008$, e $M = 5.98$.

Logo pelos teoremas (1.4.2) e (1.7.1), mais a observação que segue o teorema (1.4.2), podemos concluir que a solução $\gamma(t)$ da equação (1.8), com condição inicial $\gamma(t_0) = (x_0, 0)$, com $\bar{m} < x_0 < M$, onde $\bar{m}, M$ é oscilante. E como a origem é repulsora, então a equação (1.8) admite pelo menos uma solução periódica.

Figura 1.9: figura

Exemplo 3

Considerando a equação:

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.9)$$

onde:

$h(x) = x + kx^2(x + 1)$, com $k \geq 12$ e $g(x) = x$.

Considerando $k = 12$ temos:

(I) $h(x) > \alpha g(x)$ para $m < x < \infty$ e $x \neq 0$, onde $\alpha = 1, m = -1$.

(II) Calculando:

$$\int_{-1}^0 [h(x) - \alpha g(x)] dx = 1 = r \geq \frac{1}{\alpha}$$

(III) $\int_0^\infty h(x) dx = \infty,$

(IV) $h(x) < \alpha_1 g(x)$ para $-0.0917 < x < 0$ e $\alpha_1 = 0$.
 $h(x) < \alpha_2 g(x)$, quando $0 < x < 0.035$ e $\alpha_2 = 1.5$

Então do teorema (1.4.2) e do teorema (1.5.1) segue que a solução de (1.9) que começa no eixo x ou no ponto $(0, \dot{x}(0))$, sendo $\dot{x}(0) > -r$, é oscilante e ainda mais, a solução se aproxima da origem quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, neste exemplo a origem é um foco atrator. (veja fig. 1.9)

Figura 1.10: figura

Exemplo 4

Considerando a equação:

$$\ddot{x} + H(x)\dot{x} + g(x) = 0, \text{ onde} \quad (1.10)$$

$H(x) = (x + 2)(x + 1/2)(x - 1/4)$ e $g(x) = x$.

temos:

(I) $H(x) \geq \alpha g(x)$ para $x \geq b$, onde $\alpha = 1$ e $b = 1/2$

(II) $\int_b^\infty f(x) dx = \infty$,

(III) $f(x) < \alpha_1 g(x)$ para $\delta_2 < x < \delta_1$, onde $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 0.4$ e $\delta_2 = \frac{-1}{5}$. Assim pelo teorema (2.5.1), a origem é repulsora.

(IV) Sejam $a = -0.22$, $m = -2.45$, $\max_{[a,b]} |H(x)| \leq 43/50$ com $A = 0.5$, $\max_{[a,b]} |g(x)| \leq 43/50$ com $B = 0.5$.

Assim:

$$\frac{1}{\alpha} + (A + \alpha B)(b - a) = 1.72 \leq r = 1.78.$$

Seja também $\beta = 0.56 > \frac{1}{r}$.

Por outro lado, calculando as integrais, temos:

$$1) \int_{-2}^{-0.5} H(x) dx = 0.844 < r, \text{ mas...}$$

$$2) \int_{-2.45}^{-0.22} H(x) - \beta g(x) dx = 2.01 > r.$$

Por este motivo, escolhemos o teorema (1.4.2).

Logo, podemos concluir que a solução da equação (1.10) com condição inicial $x(0) = x_0$, com x_0 real e $\dot{x}(0) = 0$ é oscilante. E como a origem é repulsora, pelo teorema (1.7.1), a equação admite uma solução periódica não trivial.

Exemplo 5

Figura 1.11: figura

Exemplo 5

Consideremos a equação:

$$\ddot{x} + F(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.11)$$

onde:

$$F(x) = \frac{-1}{4-x^2} - 1 \text{ e } g(x) = \frac{x}{x+2}$$

temos:

(I) $F(x) \geq \alpha g(x)$ para $x \geq b$, onde $\alpha = 1, b = \sqrt{3}$,

(II) $\int_b^\infty F(x) dx = \infty$,

(III) $F(0) < 0$, então pelo teorema da conservação do sinal temos $F(x) < 0$ quando $|x| < \delta$, para algum $\delta > 0$. Logo a origem é repulsora.

(IV) Para $a = -\sqrt{3}$, sejam $\max_{[a,b]} |F(x)| = 0.75 = A$, $\max_{[a,b]} |g(x)| = 5.1 = B$. Assim:

$$\frac{1}{\alpha} + (A + \alpha B)(b - a) = 21.24 \leq 22 = r.$$

Por outro lado, calculando a integral temos:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{-2} F(x) dx = \infty.$$

Então, do teorema (1.7.2) e observação [1] que o segue, a equação (1.11) admite pelo menos uma solução periódica não trivial. Neste exemplo observe que $\rho_1 = 2$ e $\rho_2 = -2$. (Veja figura (1.11)).

Figura 1.12: figura

Exemplo 6

Considerando a equação:

$$\ddot{x} + I(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1.12)$$

onde:

$$I(x) = (x + \frac{1}{2})^2(x - \frac{1}{4}) \text{ e } g(x) = xe^{-x}.$$

Escolhemos $a = -0.07, b = 0.55, m = -7, \alpha = 1$. Como

$$\frac{1}{\alpha} + \int_a^b [|I(x)| + \alpha|g(x)|] dx = 1.16, \text{ escolhemos } r = 1, 2.$$

Então temos:

$$(I) \quad I(x) \geq \alpha g(x), \text{ para } x \in [b, \infty[,$$

$$(II) \quad \int_b^\infty f(x) dx = \infty,$$

(III) $I(0) < 0$, mas como $I \in \mathcal{C}^1$, existe uma vizinhança v_0 , tal que $I(x) < 0$ para todo $x \in v_0$. Logo a

origem é repulsora.

(IV) $I(x) \geq \beta g(x)$, para $\beta = 0.8$ (observe que $\frac{1}{\beta} > r$) e para $m \leq x \leq a$,

(V) $\int_{-7}^{-0.07} [I(x) - \beta g(x)] dx = 4749.7$, valor que é superior a r , mas poderíamos também ter escolhido outro m , desde que $m \leq -1.22$. Observe que foi muito útil, ter considerado neste exemplo o teorema (1.7.1),

Então, a equação (1.12) admitirá pelo menos uma órbita periódica não trivial. Observe que $I(x) < 0$, para todo $x < -\frac{1}{2}$, por este motivo não podemos usar o teorema (1.7.2).

Neste exemplo, também poderíamos ter usado [2].

Figura 1.13: figura

Capítulo 2

Estudo da Equação

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$$

2.1 Introdução

Nesta seção, estudaremos a equação do tipo:

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0 \quad (2.1)$$

onde as funções f_1 , f_2 e g satisfazem as condições:

- $[c_1]$ f_1 , f_2 e g são funções reais de classe $\mathcal{C}^1$
- $[c_2]$ $x.g(x) > 0$, para todo $x \neq 0$.

A equação (2.1) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f_1(x)y - f_2(x)y^2 - g(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

O fato de f_1 , f_2 e g serem funções de classe $\mathcal{C}^1$ assegura a existência e unicidade das soluções do sistema acima. E a condição $[c_2]$ garante que a origem é o único ponto crítico do sistema.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Indicamos por $\Omega_{\alpha\beta}$ o seguinte conjunto aberto:

$$\Omega_{\alpha\beta} = \mathbb{R}^2, \text{ se } \beta^2 - 4\alpha < 0$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > \rho_1\}, \text{ se } \beta^2 - 4\alpha \geq 0, \\ \beta > 0, \alpha > 0$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < \rho_2\}, \text{ se } \beta^2 - 4\alpha \geq 0, \\ \beta < 0, \alpha > 0$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \rho_1 < y < \rho_2\}, \text{ se } \alpha < 0, \beta \in \mathbb{R}$$

e em dados os casos:

$$\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2\alpha} \text{ e } \rho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2\alpha}.$$

Consideremos a seguinte função definida positiva:

$$V_{\alpha\beta}(x, y) = \int_0^y \frac{\tau}{\alpha\tau^2 + \beta\tau + 1} d\tau + \int_0^x g(u) du \quad (2.3)$$

para todo $(x, y) \in \Omega_{\alpha\beta}$. A derivada de $V_{\alpha\beta}(x, y)$ em relação ao sistema (2.2) é:

$$\dot{V}_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{y^2([\beta g(x) - f_1(x)] + y[\alpha g(x) - f_2(x)])}{\alpha y^2 + \beta y + 1} \quad (2.4)$$

para todo $(x, y) \in \Omega_{\alpha\beta}$.

Como $\alpha y^2 + \beta y + 1 > 0$ em $\Omega_{\alpha\beta}$, o sinal de $\dot{V}_{\alpha\beta}$ depende de $[\beta g(x) - f_1(x)] + y[\alpha g(x) - f_2(x)]$.

Sejam $\kappa = \int_0^{-\infty} g(x) dx$ e $\lambda = \int_0^{\infty} g(x) dx$.

As curvas de nível de $V_{\alpha\beta}$ têm os seguintes aspectos:

$$c_1 < k < \lambda < \infty$$

$$k \leq c_2 < \lambda$$

$$\lambda \leq c_3$$

$$\lambda < c_4$$

$$\beta^2 - 4\alpha \geq 0$$

$$\infty = k > \lambda$$

$$c_1 < \lambda$$

$$\lambda \leq c_2 < k$$

$$\lambda < c_i \quad i=3,4$$

$$\beta^2 - 4\alpha \geq 0$$

$$k = \lambda < \infty$$

$$c_i < k \quad i=1,2$$

$$c_j \geq k \quad j=3,4$$

$$\beta^2 - 4\alpha \geq 0$$

$$k = \lambda = \infty$$

$$\beta^2 - 4\alpha < 0$$

Figura 2.1: figura

2.2 Vejamos alguns lemas:

A demonstração do lema abaixo encontra-se em [2]

Lema 2.2.1 *As soluções do sistema (2.2) não admitem assíntotas verticais.*

Lema 2.2.2 *Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma solução do sistema (2.2) tal que $\gamma(t_0) = (b, y_0)$ com $0 < y_0 < R$, para algum $R > 0$. Suponhamos que existem reais $M > b > 0$, $\alpha > 0, \beta > 0$ com $\beta^2 - 4\alpha \geq 0$ tais que:*

- (I) $f_1(x) \geq \beta g(x)$ para todo x tal que $b \leq x \leq M$,
- (II) $0 \leq f_2(x) \leq \alpha g(x)$ para todo x tal que $b \leq x \leq M$,
- (III) $\int_b^M f_1(x) dx > R$ para algum $R > 0$.

Então existe um tempo $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (b, y_1)$, onde $0 > y_1 > \rho_1$, sendo $\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2\alpha}$.

Demonstração:

É análoga à do lema (1.3.2), basta observar que enquanto $y > 0$, temos $-f_2(x)y \leq 0$ e $\frac{-g(x)}{y} < 0$, então $\frac{dy}{dx} \leq -f_1(x)$. E o fato de ser $0 > y_1 > \rho_1$ decorre das hipóteses (I) e (II) que garantem $\dot{V}_{\alpha\beta}(x, y) \leq 0$ quando $\rho_1 < y < 0, b \leq x \leq M$ e da condição $[c_2]$. ■

Observação :

Se, no lema (2.2.2) fizermos $M = \infty$ e

$$\int_b^{\infty} f_1(x) dx = +\infty,$$

o lema continua válido para qualquer $y_0 > 0$.

Lema 2.2.3 *Suponhamos que existem reais $m < a < 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\eta > 0$ tais que:*

(I) $f_1(x) \geq \eta g(x)$ para todo $x \in [m, a]$,

(II) $f_2(x) \leq \alpha g(x)$ para $x \in [m, a]$,

(III) $\int_m^a [f_1(x) - \eta g(x)] dx > r$ com $0 < r < |\sigma_1|$ sendo

$$\sigma_1 = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\alpha}}{2\alpha}$$

Seja $\gamma(t)$ uma solução de (2.2) tal que $\gamma(t_0) = (a, y_0)$ com $0 > y_0 > -r$. Então, existe um tempo $t_2 > t_0$ tal que $\gamma(t_2) = (x_1, 0)$, $m < x_1 < a$.

Demonstração:

A demonstração é análoga à do lema (1.3.3). Basta observarmos que

$$\frac{dy}{dx} = -f_1(x) - f_2(x)y - \frac{g(x)}{y}$$

$$= -[f_1(x) - \eta g(x)] - y[f_2(x) - \alpha g(x)] - \frac{g(x)}{y}[1 + \eta y + \alpha y^2].$$

Como $(1 + \eta y + \alpha y^2) > 0$ para todo $(x, y) \in \Omega_{\alpha\eta}$, implica

$$y(f_2(x) - \alpha g(x)) \geq 0 \text{ e } \frac{g(x)}{y} > 0$$

quando $\sigma_1 < y < 0, m \leq x \leq a$, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} \leq f_1(x) - \eta g(x) \text{ quando } y < 0 \text{ e } x \leq a. \blacksquare$$

Lema 2.2.4 *Suponhamos que existem reais $m < a < 0, \alpha < 0$, e $\eta > 0$ tais que:*

$$(I) \int_m^a f_1(x) dx > r.$$

$$(II) f_2(x) \leq 0,$$

Seja $\gamma(t)$ uma solução de (2.2) tal que $\gamma(t_0) = (a, y_0)$ com $0 > y_0 > -r$. Então, existe $t_2 > t_0$, tal que $\gamma(t_2) = (a, y_2)$, $y_2 > 0$.

Demonstração:

Basta observar que $f_2(x)y \geq 0$ e $\frac{g(x)}{y} > 0$ quando $\sigma_1 < y < 0, m \leq x \leq a$. $\blacksquare$

Lema 2.2.5 *Suponhamos que existem $\delta > 0$ e $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ tais que para $0 < x < \delta$,*

$$(I) f_1(x) \leq \beta g(x),$$

$$(II) f_2(x) \geq \alpha g(x).$$

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma solução de (2.2) tal que $\gamma(t_0) = (x_1, 0)$, com $x_1 > 0$. Então, existe um $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (0, y_1)$ sendo $y_1 < 0$.

Demonstração:

Basta observar que $\dot{V}_{\alpha\beta}(x, y) \geq 0$ quando $y < 0$ e $0 < x < \delta$. ■

Lema 2.2.6 *Suponhamos que existem $\delta < 0$ e $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ tais que para $\delta < x < 0$,*

$$(I) f_1(x) \leq \beta g(x),$$

$$(II) f_2(x) \leq \alpha g(x).$$

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma solução de (2.2) tal que $\gamma(t_0) = (x_1, 0)$, com $x_1 < 0$. Então, existe um $t_1 > t_0$ tal que $\gamma(t_1) = (0, y_1)$ sendo $y_1 > 0$.

Demonstração:

Basta observar que $\dot{V}_{\alpha\beta}(x, y) \geq 0$ quando $y > 0$ e $\delta < x < 0$. ■

2.3 Condições Suficientes para Soluções Oscilantes

Teorema 2.3.1 *Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

(I) *Existem $b > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ com $\beta^2 - 4\alpha \geq 0$ tal que para todo $x \geq b$,*

$$f_1(x) \geq \beta g(x)$$

$$0 \leq f_2(x) \leq \alpha g(x),$$

$$(II) \int_b^{\infty} f_1(x) dx = +\infty,$$

(III) *Existem $\beta_1 > 0, \alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$ tais que*

$$f_1(x) \leq \beta_1 |g(x)| \quad \text{se } 0 < |x| < \delta,$$

$$f_2(x) \geq \alpha_1 g(x) \quad \text{se } 0 < x < \delta,$$

$$f_2(x) \leq \alpha_2 g(x) \quad \text{se } -\delta < x < 0,$$

$$(IV) \int_m^a f_1(x) dx \geq r \quad \text{onde}$$

$$r > \left| \rho_1 e^{\int_a^b |f_2(x)| dx} - e^{\int_0^a |f_2(x)| dx} \int_a^b H(x) e^{\int_0^x |f_2(s)| ds} dx \right|$$

$$\text{onde } H(x) = |f_1(x)| + \frac{|g(x)|}{|\rho_1|} \text{ com } \rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2\alpha},$$

$$(V) f_2(x) \leq 0 \quad \text{para } m \leq x \leq a.$$

Então, toda solução de (2.1) com condições iniciais $x(0) = x_0$, com x_0 real, e $\dot{x}(0) = 0$ é oscilante.

Demonstração:

Decorre dos lemas anteriores, com a observação que segue o lema (2.2.2) e do lema (2.2.4). ■

Teorema 2.3.2 *Suponhamos que existem reais $m < a < 0 < b$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0, \alpha_3 > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e $\eta > 0$ com $\beta^2 - 4\alpha_3 > 0$ e sejam $\sigma_1 = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\alpha}}{2\alpha}$ e $\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha_3}}{2\alpha_3}$, tais que:*

$$(I) \begin{aligned} f_1(x) &\geq \eta g(x) \text{ para todo } x \text{ tal que } m \leq x \leq a, \\ f_2(x) &\leq \alpha g(x) \text{ para } m \leq x \leq a, \end{aligned}$$

$$(II) \int_m^a [f_1(x) - \eta g(x)] dx > r \text{ com}$$

$$\begin{aligned} |\sigma_1| &> r \\ &> |\rho_1| e^{\int_a^b |f_2(x)| dx} - e^{\int_0^a |f_2(x)| dx} \int_a^b H(x) e^{\int_0^x |f_2(s)| ds} dx \end{aligned}$$

onde:

$$H(x) = |f_1(x)| + \frac{|g(x)|}{|\rho_1|} \text{ com } \rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha_3}}{2\alpha_3},$$

$$\begin{aligned} (III) \quad &f_1(x) \leq \beta_1 |g(x)|, \text{ se } 0 < |x| < \delta \\ &f_2(x) \geq \alpha_1 g(x), \text{ para } 0 < x < \delta \\ &f_2(x) \leq \alpha_2 g(x), \text{ para } \delta < x < 0, \text{ para algum } \delta > 0, \\ (IV) \quad &f_1(x) \geq \beta g(x) \text{ para } x \geq b, \end{aligned}$$

$$0 \leq f_2(x) \leq \alpha_3 g(x), \text{ para } x \geq b,$$

$$(V) \int_b^\infty f_1(x) dx = +\infty$$

Então, toda solução de (2.1) com a condição inicial $x(0) = x_0$, x_0 real e $\dot{x}(0) = 0$ é oscilante.

Demonstração:

Decorre dos anteriores lemas com a observação de lema (2.2.2). ■

Teorema 2.3.3 Suponhamos que existem reais $m < a < 0 \leq b < M$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_2' < 0$, $\beta > 0$, $\alpha_3 < 0$ com $\beta^2 - 4\alpha_1 \geq 0$, $\beta_2 > 0$ tais que:

(I) Para todo $b \leq x \leq M$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq \beta g(x) \\ \alpha_2 g(x) &\leq f_2(x) \leq \alpha_1 g(x), \end{aligned}$$

(II) $\int_b^M f_1(x) dx > R$, sendo

$$R > \rho_2 e^{-\int_a^b |f_2(x)| dx} + e^{\int_0^a |f_2(x)| dx} \int_a^b H(x) e^{-\int_0^x |f_2(s)| ds} dx$$

onde $H(x) = |f_1(x)| + \frac{|g(x)|}{|\rho_2|}$ com $\rho_2 = \frac{-\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2'}}{2\alpha_2'}$,

(III) Existem $\beta_1 > 0$, $\alpha_4 < 0$, $\alpha_5 < 0$ tais que

$$\begin{aligned} f_1(x) &\leq \beta_1 |g(x)| \quad \text{se } 0 < |x| < \delta, \\ f_2(x) &\geq \alpha_4 g(x) \quad \text{se } 0 < x < \delta, \\ f_2(x) &\leq \alpha_5 g(x) \quad \text{se } -\delta < x < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (IV) f_1(x) &\geq \beta_2 g(x) \quad \text{para } m \leq x \leq a \\ \alpha_2' g(x) &\leq f_2(x) \leq \alpha_3 g(x) \quad \text{para } m \leq x \leq a \end{aligned}$$

$$(V) \int_m^a (f_1(x) - \beta_2 g(x)) dx > r \text{ sendo}$$

$$|\rho_3| > r > |\rho_1| e^{\int_a^b |f_2(x)| dx} - e^{\int_0^a |f_2(x)| dx} \int_a^b H(x) e^{\int_0^x |f_2(s)| ds} dx$$

onde

$$H(x) = |f_1(x)| + \frac{|g(x)|}{|\rho_1|};$$

$$\rho_3 = \frac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_3}}{2\alpha_3}$$

$$\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha_1}}{2\alpha_1}.$$

Então, toda solução de (2.1) com condição inicial $x(0) = b$ e $\dot{x}(0) = y_0$, com $\rho_1 < y_0 < R$, ou com condição inicial $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$, com $m < x_0 < M$ é oscilante.

Demonstração:

Seja $\gamma(t)$ uma solução de (2.2) tal que $\gamma(t_0) = (b, y_0)$ com $0 < y_0 < R$. Das hipóteses (I) e (II), com $f_2(x) \leq \alpha_1 g(x)$ e do lema (2.2.2) mais a observação [2], temos que existe um $t_1 > 0$ tal que $\gamma(t_1) = (b, y_1)$ sendo $0 > y_1 > \rho_1$ onde $\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha_1}}{2\alpha_1}$. Da hipótese (III) e do lema (2.2.1), podemos afirmar que existe um $t_2 > t_1$ tal que $\gamma(t_2) = (a, y_2)$, sendo $y_2 < 0$; mas observemos que $y_2 > -r$, (veja [2]) assim, da hipótese (V) e lema (2.2.3), existe um $t_3 > t_2$ tal que $\gamma(t_3) = (a, y_3)$ com $y_3 > 0$. Mas $y_3 < \rho_2$, isto decorre da hipótese (IV) (considerando que $\alpha'_2 g(x) \leq f_2(x)$). Novamente da hipótese (III) e do lema (2.2.1) existe um $t_4 > t_3$ tal que $\gamma(t_4) = (b, y_4)$, sendo $0 < y_4 < R$. Logo, a solução é oscilante. ■

2.4 Uma Condição Suficiente para a Origem ser Repulsora

A condição :

Existe $r > 0$ tal que, para $0 < |x| < r$, $f_1(x) < 0$, é uma condição suficiente para a origem seja repulsora. Pois é suficiente observar que a derivada da função definida positiva $V(x, y)$ dada por:

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} \exp\left[2 \int_0^x f_2(s) ds\right] + \int_0^x \exp\left[2 \int_0^s f_2(u) du\right] g(s) ds$$

em relação ao sistema (2.2) é:

$$\dot{V}(x, y) = -f_1(x) y^2 \exp\left[2 \int_0^x f_2(s) ds\right].$$

2.5 Condições Suficientes para a Existência de Soluções Periódicas

Teorema 2.5.1 *Suponhamos que existem reais $m < a < 0 < b$, $\alpha > 0, \beta > 0$ com $\beta^2 - 4\alpha \geq 0$, tais que:*

(I) *Para todo $b \leq x$:*

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq \beta g(x) \\ 0 \leq f_2(x) &\leq \alpha g(x), \end{aligned}$$

(II) $\int_b^\infty f_1(x) dx = \infty$

(III) *A origem é repulsora*

(IV) $\int_m^a f_1(x) dx > r$, sendo

$$r > \left| \rho_1 e^{\int_a^b |f_2(x)| dx} - e^{\int_0^a |f_2(x)| dx} \int_a^b H(x) e^{\int_0^x |f_2(s)| ds} dx \right|$$

onde $H(x) = |f_1(x)| + \frac{|g(x)|}{|\rho_1|}$ com $\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2\alpha}$,

(V) $f_2(x) \leq 0$ para $m \leq x \leq a$.

Então o sistema (2.2) admitirá pelo menos uma órbita periódica não trivial.

Demonstração:

Do teorema (2.3.1) temos que qualquer solução não trivial da equação (2.1) é oscilante. Do lema (2.2.2) e da hipóteses (I), toda solução de (2.2) começando em (b, y_0)

com $y_0 > 0$, cruza novamente a reta $x = b$ no ponto (b, y_1) , sendo $\rho_1 < y_1 < 0$.

Do teorema de Poincaré-Bendixson o sistema (2.2) admitirá pelo menos uma órbita periódica não trivial. ■

Observação:

Se nos teoremas (2.3.2) e (2.3.3) substituirmos a hipótese (III) por:

(III') A origem é repulsora, então, a equação (2.1) admite pelo menos uma solução periódica não trivial.

Teorema 2.5.2 *Suponhamos que existem reais $m < a < 0 < b$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_3 > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e $\eta > 0$ com $\beta^2 - 4\alpha_3 \geq 0$ e existem $\sigma_1 = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\alpha}}{2\alpha}$ e $\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha_3}}{2\alpha_3}$ tais que:*

(I) *Para todo $m \leq x \leq a$:*

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq \eta g(x), \\ f_2(x) &\leq \alpha g(x) \end{aligned}$$

(II) $\int_m^a [f_1(x) - \eta g(x)] dx > r$, sendo:

$$|\sigma_1| > r > |\rho_1| e^{\int_a^b |f_2(x)| dx} - e^{\int_0^a |f_2(x)| dx} \int_a^b H(x) e^{\int_0^x |f_2(s)| ds} dx$$

onde

$$H(x) = |f_1(x)| + \frac{|g(x)|}{|\rho_1|}; \rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha_3}}{2\alpha_3},$$

(III) A origem é repulsora,

(IV) $f_1(x) \geq \beta g(x)$ para $x \geq b$,

$0 \leq f_2(x) \leq \alpha_3 g(x)$, para $x \geq b$,

(V) $\int_b^{\infty} f_1(x) dx = +\infty$

Então, o sistema (2.2) admitirá pelo menos uma órbita periódica não trivial.

Demonstração:

Análoga à do teorema (2.5.1) ■

Teorema 2.5.3 Suponhamos que existem reais $m < a < 0 \leq b < M$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_2' \alpha_3 < 0$, $\beta > 0$ e $\beta_2 > 0$ com $\beta^2 - 4\alpha_1 \geq 0$ tais que:

(I) Para todo $b \leq x \leq M$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq \beta g(x), \\ \alpha_2 g(x) &\leq f_2(x) \leq \alpha_1 g(x), \end{aligned}$$

(II) $\int_b^M f_1(x) dx > R$, sendo:

$$R > \rho_2 e^{-\int_a^b |f_2(x)| dx} + e^{\int_0^a |f_2(x)| dx} \int_a^b H(x) e^{-\int_0^x |f_2(s)| ds} dx$$

onde $H(x) = |f_1(x)| + \frac{|g(x)|}{|\rho_2|}$ com $\rho_2 = \frac{-\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2'}}{2\alpha_2'}$,

(III) A origem é repulsora,

(IV) $f_1(x) \geq \beta_2 g(x)$ para $m \leq x \leq a$

$\alpha_2 g(x) \leq f_2(x) \leq \alpha_3 g(x)$ para $m \leq x \leq a$

(V) $\int_m^a [f_1(x) - \beta_2 g(x) dx] > r$, sendo:

$$|\rho_3| > r > |\rho_1| e^{\int_a^b |f_2(x)| dx} - e^{\int_0^a |f_2(x)| dx} \int_a^b H(x) e^{\int_0^x |f_2(s)| ds} dx$$

onde $H(x) = |f_1(x)| + \frac{|g(x)|}{|\rho_1|}$ com $\rho_3 = \frac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_3}}{2\alpha_3}$; $\rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha_1}}{2\alpha_1}$.

Então o sistema (2.2) admitirá pelo menos uma órbita periódica não trivial.

Demonstração:

Análoga à do teorema (2.3.3). veja figura a seguir. ■

Para finalizar esta seção, temos a seguinte observação:

Observação:

Consideremos os sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f_1(x)y - f_2(x)y^2 - g(x) \end{cases} \quad (2.5)$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f_1(x)y - f_2(x)y^2 - h(x, y) - g(x) \end{cases} \quad (2.6)$$

onde a função h satisfaz a seguinte condição:

$$h(x, y)y > 0 \quad \text{para } x \neq 0, y \neq 0$$

Suponhamos que a origem para equação (2.6) é repulsora e que a equação (2.5) admite uma solução periódica não trivial γ_p . Então a equação (2.6) também admite pelo menos uma solução periódica não trivial.

2.6 Exemplo

Exemplo 1

Considerando o sistema (2.6) onde:

$$f_1(x) = x^2 - 1,$$

$$f_2(x) = x,$$

$$h(x, y) = [(x + 9)(x + 5)(x + 3)(x - 1) + 143.865].y^3,$$

$$g(x) = x.$$

Temos:

(I) $f_1(x) \geq \beta g(x)$ e $0 \leq f_2(x) \leq \alpha g(x)$ para todo $x \geq 2.5$, e $\beta = 2, \alpha = 1$,

(II) $\int_b^\infty f_1(x) dx = \infty,$

(III) A origem é repulsora, pois $f_1(0) < 0$,
 (IV) $\int_m^a f_1(x)dx = 163.33 > r$ onde $m = -8, a = -1$
 e $r \simeq 135$. Observe que neste caso poderíamos ter dado
 outro valor para m , desde que $m \leq -8$.

Logo pelo teorema (2.5.1) e pela última observação feita, o sistema (2.2) admite pelo menos uma solução periódica não trivial.

Exemplo 2

Dada a equação:

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$$

onde:

$$f_1(x) = (x+3)(x+2)(x+1)(x+\frac{1}{5})(x-\frac{1}{4})$$

$$f_2(x) = 2e^{-x^2}(x-\frac{3}{10})(x+\frac{1}{2})(x-1)(x-\frac{1}{2})$$

$$g(x)=2x$$

temos:

(I) para $m = -3.73, a = -0.0065, \alpha = -8, \eta = 6$;

$$f_1(x) \geq \eta g(x)$$

$$f_2(x) \leq \alpha g(x)$$

(II) $\int_m^a [f_1(x) - \eta g(x)]dx = 73.03 > r$, sendo

$$|\sigma_1| > r > |\rho_1| e^{\int_a^b |f_2(x)| dx} - e^{\int_0^a |f_2(x)| dx} \int_a^b H(x) e^{\int_0^x |f_2(s)| ds} dx$$

onde

$$H(x) = |f_1(x)| + \frac{|g(x)|}{|\rho_1|}; \rho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha_3}}{2\alpha_3} \text{ e } \sigma_1 = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\alpha}}{2\alpha}$$

(III) $f_1(x) < 0$ para $-1/5 < x < 1/4$, porém a origem
 é repulsora

(IV) Para $b = 1, \beta = 3, \alpha_3 = 1$ temos:

$$f_1(x) \geq \beta g(x), \text{ para } x \geq b$$

$$0 \leq f_2(x) \leq \alpha_3 g(x)$$

$$(V) \int_b^{\infty} f_1(x) dx = +\infty.$$

Logo, pelo teorema (2.5.2) a equação dada admite pelo menos uma órbita periódica não trivial.

Exemplo 3

Considerando a equação:

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$$

onde:

$$f_1(x) = x^2 - 1$$

$$f_2(x) = -x^3$$

$$g(x) = x$$

temos:

Existem reais $m, a, b, M, \alpha_1, \alpha_2, \alpha'_2, \beta, \beta_3$ tais que as condições do teorema (2.5.3) são satisfeitas.

Bibliografia

- [1] BURTON, T.A. *On the equation $\ddot{x} + f(x)h(\dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t)$* . Ann. Mat. Pura et Appl.(1970), pag. 277-286.
- [2] GUIDORIZZI, H. L. *On the Existence of Periodic Solutions for the Equation: $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$* . Bol.Soc.Bras.Mat., Vol 22, N°1, (1991), 81-92.
- [3] GUIDORIZZI, H. L. *Oscillating and Periodic Solutions of Equations of the Type: $\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$* . To appear in Journal of Mathematical Analysis and Applications.
- [4] GUIDORIZZI, H. L. *Contribuições ao Estudo das Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª Ordem*. Tese de Doutorado, IME-USP (1988).
- [5] GUIDORIZZI, H. L. *On the Qualitative Behavior of the Solutions of the Equation of the Type: $\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$* . 35º Seminário Brasileiro de Análise, (1991), 107-123.
- [6] GRAEF J.R. *On the Generalized Liénard Equation*

- with negative damping* . J. Differential Equations, 12, (1972), 34-62
- [7] HARA J. and YONEYAMA T. *On the Global Center of Generalized Liénard Equation and its application to stability problems*. Funkciloj Ekvacioj, 28, (1985), 171-192.
- [8] LA SALLE, J. and LEFSCHETZ, S. *Stability by Liapunov's Direct Method, With Applications*. Academic Press, (1964).
- [9] UTZ, W. R. *Periodic Solutions of a nonlinear second order differential equation*. SIAM J. APPL. MATH. 19 (1970), 56-59.
- [10] YAMAGATA, E.T. *Estudo Qualitativo de Algumas Equações do tipo: $\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + \Psi(x, \dot{x}) + g(x) = 0$* . Dissertação de Mestrado, IME-USP, (1989).
- [11] VILLARI, G. *On the Qualitative Behavior of Solutions of Liénard Equation*. J. Differential Equations, 67 (1987).