**Estudo Qualitativo de Algumas
Equações do Tipo:**

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + \Psi(x, \dot{x}) + g(x) = 0$$

Edna Tiemi Yamagata

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Hamilton Luiz Guidorizzi

—SÃO PAULO, Julho de 1989—

*Aos meus pais
e esposo*

Agradecimentos

Aos que ajudaram na minha formação matemática.

Ao meu orientador, Professor Hamilton, pela sugestão do tema e pelo acompanhamento do desenvolvimento do mesmo.

Aos amigos do *IME-USP* pela colaboração.

O meu muito obrigado!!!

ÍNDICE

Introdução	1
Capítulo 1 Estudo da equação $\ddot{x} + \alpha g(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$ e da função V_α	
1.1 Estudo da Equação $\ddot{x} + \alpha g(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$	2
1.2 As Funções Definidas Positivas $V_\alpha, \alpha \in \mathfrak{R}$	37
1.3 Teorema de La Salle	39
1.4 Valor de $\dot{V}_\alpha$ para o sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - \psi(x, y) - g(x) \end{cases}$	41
Capítulo 2 Teorema Sobre Estabilidade Assintótica. Uma Condição Suficiente Para a Origem Ser Repulsora.	
2.1 Teoremas Sobre Estabilidade Assintótica	42
2.2 Uma Condição Suficiente para a Origem Ser Repulsora	49
Capítulo 3 Teorema Sobre a Existência de Soluções Periódicas	52
Referências	70

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estudamos qualitativamente algumas equações diferenciais de 2ª ordem, do tipo:

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + \psi(x, \dot{x}) + g(x) = 0$$

onde $f, g, \psi \in C^1$ e $xg(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

No capítulo 1, estudamos a equação:

$$\ddot{x} + \alpha g(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0 \quad (\alpha = c^{te})$$

com relação a soluções periódicas. Estudamos, ainda, neste capítulo, a função definida positiva

$$V_\alpha(x, y) = \int_0^x g(u)du + \int_0^y \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$$

No capítulo 2, utilizando a V_α , obtivemos, com relação à equação (1) uma condição suficiente para a origem ser assintoticamente estável, uma condição suficiente para não existência de órbitas periódicas e uma condição suficiente para a existência de soluções oscilantes; ainda neste capítulo, conseguimos uma condição suficiente para a origem ser repulsora.

No capítulo 3, através de comparações de equações, obtivemos condições suficientes para a existência de soluções periódicas para a equação

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + h(x)\dot{x}^{2m+1} + g(x) = 0$$

onde f, h e g são supostas ímpares e $n, m \in \mathbb{N}$.

Capítulo 1

Estudo da Equação

$$\ddot{x} + \alpha g(x) \dot{x}^{(2n+1)} + g(x) = 0$$

e da Função V_α

1.1 ESTUDO DA EQUAÇÃO

$$\ddot{x} + \alpha g(x) \dot{x}^{(2n+1)} + g(x) = 0$$

Sejam $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante.

Neste trabalho, suporemos:

- (a) g de classe C^1 ;
- (b) $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$.

A hipótese (a) garante existência e unicidade de solução para a equação:

$$(1) \quad \ddot{x} + \alpha g(x) \dot{x}^{(2n+1)} + g(x) = 0$$

No plano de fase, (1) é equivalente ao sistema:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha g(x)y^{(2n+1)} - g(x) \end{cases}$$

A hipótese (b) garante que a origem é o único ponto crítico para o sistema (2).

Toda solução de (2) é também, solução de

$$(3) \quad (\alpha y^{(2n+1)} + 1)g(x)dx + ydy = 0$$

PARA $\alpha = 0$:

A equação (3) fica: $g(x)dx + ydy = 0$

Integrando, obtemos:

$$\int_0^x g(u)du + \frac{y^2}{2} = c^{te}$$

Consideremos $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$G(x) = \int_0^x g(u)du$$

Da hipótese (b) sobre a função g , obtemos:

$$(1) \quad G(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad G \text{ é estritamente decrescente em }]-\infty, 0[\text{ e } G \text{ é estritamente crescente em }]0, \infty[.$$

Para cada $c > 0$, temos:

$$y_1 = \sqrt{2(c - G(x))}$$

com domínio $\{x \in \mathbb{R} \mid G(x) \leq c\}$.

$$y_2 = -\sqrt{2(c - G(x))}$$

y_1 é estritamente crescente em $] -\infty, 0[$ e é estritamente decrescente em $]0, \infty[$ portanto atinge o máximo em 0; y_2 é estritamente decrescente em $] -\infty, 0[$ e é estritamente crescente em $]0, \infty[$ portanto atinge o mínimo em 0.

$$(a) \int_0^{-\infty} g(x)dx = \infty, \quad \int_0^{\infty} g(x)dx = \infty$$

Para cada $c > 0$, existem e são únicos $x_1 < 0 < x_2$ tais que $G(x_1) = c = G(x_2)$. Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $[x_1, x_2]$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

(b) $\beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} g(x)dx = \infty$

Para cada $0 < c < \beta$, existem e são únicos $x_1 < 0 < x_2$ tais que $G(x_1) = c = G(x_2)$. Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $[x_1, x_2]$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

Para cada $c \geq \beta$, existe e é único $x_3 > 0$ tal que $G(x_3) = c$. Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $]-\infty, x_3[$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

(c) $\int_0^{-\infty} g(x)dx = \infty$ e $\gamma = \int_0^{\infty} g(x)dx < \infty$

Para cada $0 < c < \gamma$, existem e são únicos $x_1 < 0 < x_2$ tais que $G(x_1) = c = G(x_2)$. Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $[x_1, x_2]$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

Para cada $c \geq \gamma$, existe e é único $x_3 < 0$ tal que $G(x_3) = c$. Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $[x_3, \infty[$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

(d) $\beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx < \int_0^{\infty} g(x)dx = \gamma < \infty$

Para cada $0 < c < \beta$, existem e são únicos $x_1 < 0 < x_2$ tais que $G(x_1) = c = G(x_2)$. Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $[x_1, x_2]$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

Para cada $\beta \leq c < \gamma$, existe e é único $x_3 > 0$ tal que $G(x_3) = c$. Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $]-\infty, x_3]$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

Para cada $c \geq \gamma$, o domínio de y_1 e y_2 é $] -\infty, \infty[$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

$$e) \beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx = \int_0^{\infty} g(x)dx < \infty$$

Para cada $0 < c < \beta$, existem e são únicos $x_1 < 0 < x_2$ tais que $G(x_1) = c = G(x_2)$. Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $[x_1, x_2]$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

Para cada $c \geq \beta$, o domínio de y_1 e y_2 é $]-\infty, \infty[$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

$$f) \infty > \beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx > \int_0^{\infty} g(x)dx = \gamma$$

Para cada $0 < c < \gamma$, existem e são únicos $x_1 < 0 < x_2$ tais que $G(x_1) = c = G(x_2)$. Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $[x_1, x_2]$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

Para cada $\gamma \leq c < \beta$, existe e é único $x_3 < 0$ tal que $G(x_3) = c$.
 Neste caso, o domínio de y_1 e y_2 é $[x_3, \infty[$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

Para cada $c \geq \beta$, o domínio de y_1 e y_2 é $] -\infty, \infty[$ e o gráfico

de y_1 é:

e de y_2 é:

PARA $\alpha \neq 0$:

1º caso ($\alpha y^{(2n+1)} + 1 = 0$) :

A este caso corresponde a solução:

$$\begin{cases} y = -\alpha^{-1/(2n+1)} \\ x = -\alpha^{-1/(2n+1)}t + c^{te} \end{cases}$$

2º caso ($\alpha y^{(2n+1)} + 1 > 0$) :

A equação (3) é equivalente a:

$$g(x)dx + \frac{y}{\alpha y^{(2n+1)} + 1} dy = 0$$

Integrando, obtemos:

$$(4) \quad \int_0^x g(u)du + \int_0^y \frac{s}{\alpha s^{(2n+1)} + 1} ds = c^{te}$$

Consideramos, como no caso $\alpha = 0$, G que satisfaz as condições 1) e 2).

Inicialmente, analisemos as seguintes integrais:

$$a) \int_0^{-\alpha^{-1/(2n+1)}} \frac{s}{\alpha s^{(2n+1)} + 1} ds$$

Fazendo a mudança de variável $u = \alpha s^{(2n+1)} + 1$ temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{-\alpha^{-1/(2n+1)}} \frac{s}{\alpha s^{(2n+1)} + 1} ds &= \int_1^0 \frac{\left(\frac{u-1}{\alpha}\right)^{1/(2n+1)}}{u} \frac{1}{\alpha(2n+1)\left(\frac{u-1}{\alpha}\right)^{2n/(2n+1)}} du = \\ &= \frac{\alpha^{-2/(2n+1)}}{2n+1} \int_0^1 (1-u)^{(1-2n)/(2n+1)} u^{-1} du = \infty \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{-\alpha^{-1/(2n+1)}} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds = \infty$$

b) $\int_0^\infty \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$ para $\alpha > 0$

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds = \int_0^1 \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds + \int_1^\infty \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$$

como $\frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1}$ é contínua em $[0,1]$, para $\alpha > 0$ temos que

$$\int_0^1 \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds < \infty$$

como $\frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} < \frac{1}{\alpha s^{2n}}$ em $[1, \infty[$ para $\alpha > 0$, temos que:

$$\int_1^\infty \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds < \int_1^\infty \frac{1}{\alpha s^{2n}} ds = \frac{s^{-2n+1}}{\alpha(-2n+1)} \Big|_1^\infty$$

para $n \geq 1$ temos que

$$\frac{1}{\alpha(-2n+1)} s^{-2n+1} \Big|_1^\infty = \frac{1}{\alpha(2n-1)} < \infty$$

Portanto,

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{s}{\alpha s^{2n+1}} ds < \infty \quad \text{para } \alpha > 0 \text{ e } n \geq 1$$

O caso $n = 0$ é estudado em [1] cap 5

Consideremos $\alpha > 0$.

Seja $H :] - \alpha^{-1/(2n+1)}, \infty[\rightarrow \mathfrak{R}$ dada por

$$H(y) = \int_0^y \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$$

De $H'(y) = \frac{y}{\alpha y^{2n+1} + 1}$ temos que:

$$H'(y) > 0, \quad \forall y \in]0, \infty[\text{ e,}$$

$$H'(y) < 0, \quad \forall y \in]-\alpha^{-1/(2n+1)}, 0[$$

Portanto, H é estritamente crescente em $[0, \infty[$ e, estritamente decrescente em $]-\alpha^{-1/(2n+1)}, 0]$.

(I) para $y \in [0, \infty[$ podemos definir a inversa H_1 de H restrita a $[0, \infty[$. Da integral b), calculada anteriormente, $\lim_{y \rightarrow \infty} H(y)$ é uma constante positiva que suporemos igual a k . Portanto,

$$H_1 : [0, k[\rightarrow [0, \infty[$$

Como H é estritamente crescente em $[0, \infty[$ temos que H_1 é estritamente crescente $[0, k[$.

Como $H \geq 0$ e $G \geq 0$ temos da equação (4) que:

$$(5) \quad y = H_1(c - G(x))$$

para cada $c > 0$, fixado.

Como o domínio de H_1 é $[0, k[$, onde H_1 é estritamente crescente e, $G(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que:

para cada $c < k$, y atinge o máximo quando $G(x) = 0$, ou seja, quando $x = 0$;

para cada $c \geq k$, y tende para ∞ quando $G(x)$ decresce para $c - k$.

Se $\int_0^\infty g(x)dx = \infty = \int_0^{-\infty} g(x)dx$ então,

para cada $c > 0$, existem e são únicos $x_0 < 0$ e $x_1 > 0$ tais que $G(x_0) = c = G(x_1)$. Neste caso, o domínio de (5) é o intervalo fechado $[x_0, x_1]$ se $c < k$ e o conjunto de

intervalos $[x_0, x_2[\cup]x_3, x_1[$ onde $x_0 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$ com $G(x_2) = c - k = G(x_3)$ se $c \geq k$ e os gráficos tem respectivamente, os seguintes aspectos:

para todo $0 < c < k$:

para todo $c \geq k$:

Suponhamos agora,

$$\beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx < \infty \text{ e } \int_0^{\infty} g(x)dx = \infty$$

Para cada $c > 0$, com $c < \beta$, existem e são únicos $x_0 < 0$ e $x_1 > 0$ tais que $G(x_0) = c = G(x_1)$

Para cada $c \geq \beta$, existe um único $x_4 > 0$ tal que $G(x_4) = c$, por outro lado, para todo $x < 0$, $G(x) < c$.

Portanto, para todo $c > 0$, com $c < \min\{\beta, k\}$ temos que o domínio de (5) é o intervalo fechado $[x_0, x_1]$ e o gráfico tem o seguinte aspecto:

No caso $\beta < k$, temos que:

para todo $\beta \leq c < k$, o domínio de (5) é $] -\infty, x_4]$ e o gráfico tem o aspecto:

para todo $c \geq k$, o domínio de (5) é $] -\infty, x_2] \cup]x_3, x_4]$ onde $x_2 < 0 < x_3 < x_4$ com $G(x_2) = c - k = G(x_3)$ e o gráfico tem o aspecto:

No caso $\beta = k$, temos:

para todo $c \geq \beta$, igual ao caso $\beta < k$ com $c \geq k$.

No caso $\beta > k$, temos que:

para todo $k \leq c < \beta$, o domínio de (5) $[x_0, x_2[\cup]x_3, x_1]$ onde $G(x_2) = c - k = G(x_3)$ e o gráfico tem o aspecto:

para todo $c \geq \beta$, igual ao caso $\beta < k$ com $c \geq k$.

De modo análogo, temos os seguintes gráficos, para:

$$\beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx < \int_0^{\infty} g(x)dx = \gamma < \infty$$

$$0 < c < \min\{k, \beta\}:$$

$$k < \beta$$

$$k = \beta$$

$$\beta < k < \gamma$$

Os outros casos, analisam-se de modo análogo.

(II) para $y \in] - \alpha^{-1/(2n+1)}, 0]$, da integral a), calculada anteriormente, temos que $\lim_{y \downarrow -\alpha^{-1/(2n+1)}} H(y) = \infty$ para qualquer n natural e o estudo é o mesmo que no caso $n = 0$ feito em [1] pgs 48,49.

O caso $\alpha < 0$, analisa-se de forma análoga.

3º caso $\alpha y^{2n+1} + 1 < 0$:

Consideremos, inicialmente, o caso $\alpha > 0$.

Procedendo como nas integrais do 2º caso temos

$$c) \int_{y_0}^{-\alpha^{-1/(2n+1)}} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds = \infty, \quad \text{para } \alpha > 0 \text{ e } y_0 < -\alpha^{-1/(2n+1)}$$

$$d) 0 > \int_{y_0}^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds > -\infty \quad \text{para } \alpha > 0 \text{ e } y_0 < -\alpha^{-1/(2n+1)}.$$

Fixado $y_0 < -\alpha^{-1/(2n+1)}$, temos:

$$T_{y_0} :] - \infty, -\alpha^{-1/(2n+1)}[\rightarrow \mathfrak{R} \text{ dada por}$$

$$T_{y_0}(y) = \int_{y_0}^y \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$$

De $T'_{y_0}(y) = \frac{y}{\alpha y^{2n+1} + 1}$ temos que: $T'_{y_0}(y) > 0, \forall y \in] - \infty, -\alpha^{-1/(2n+1)}[$.

Portanto T_{y_0} é estritamente crescente em $] - \infty, -\alpha^{-1/(2n+1)}[$ e podemos definir a inversa $T_{y_0}^{-1}$ de T_{y_0} . Das integrais c) e d), calculadas anteriormente, $\lim_{y \uparrow -\alpha^{-1/(2n+1)}} T_{y_0}(y) = \infty$ e $\lim_{y \downarrow -\infty} T_{y_0}(y)$ é uma constante negativa que suporemos igual a l . Portanto,

$$T_{y_0}^{-1} :]l, \infty[\rightarrow] - \infty, -\alpha^{-1/(2n+1)}[$$

Como T_{y_0} é estritamente crescente em $] - \infty, -\alpha^{-1/(2n+1)}[$ temos que $T_{y_0}^{-1}$ é estritamente crescente em $]l, \infty[$.

Como $T_{y_0} \geq l$ e $G \geq 0$ temos da equação (4) que:

$$(6) \quad y = T_{y_0}^{-1}(c - G(x))$$

para cada $c > l$, fixado.

Como o domínio de $T_{y_0}^{-1}$ é $]l, \infty[$, onde $T_{y_0}^{-1}$ é estritamente crescente e, $G(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ temos que: y atinge o máximo quando $G(x) = 0$, ou seja, quando $x = 0$.

$$\text{Se } \int_0^{\infty} g(x)dx = \infty = \int_0^{-\infty} g(x)dx$$

então, para cada $c > l$, existem e são únicos $x_5 < 0$ e $x_6 > 0$ tais que $G(x_5) = c - l = G(x_6)$. Neste caso, o domínio de (6) é o intervalo aberto $]x_5, x_6[$ e o gráfico tem o seguinte aspecto:

Suponhamos, agora,

$$\beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx < \infty \text{ e } \int_0^{\infty} g(x)dx = \infty$$

Para cada $c > l$ com $c < \beta + l$, existem e são únicos $x_5 < 0$ e x_6 tais que $G(x_5) = c - l = G(x_6)$ e neste caso, o domínio de (6) é $]x_5, x_6[$ e o gráfico tem o aspecto do anterior.

Para $c = \beta + l$, existe um único $x_7 > 0$ tal que $G(x_7) = c - l$ e $\lim_{x \downarrow -\infty} T_{y_0}^{-1}(c - G(x)) = -\infty$ e neste caso o domínio de (6) é $] -\infty, x_7[$ e o gráfico tem o seguinte aspecto:

Para $c > \beta + l$, existe um único $x_7 > 0$ tal que $G(x_7) = c - l$ e existe $y_1 \in$

$] -\infty, -\alpha^{-1/(2n+1)}[$ tal que $\lim_{x \downarrow -\infty} T_{y_0}^{-1}(c - G(x)) = y_1$ ($y = y_1$ é a assíntota horizontal) e neste caso o domínio é $] -\infty, x_7[$ e o gráfico tem o seguinte aspecto:

De modo análogo, temos os seguintes gráficos, para:

$$\beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx < \int_0^{\infty} g(x)dx = \gamma < \infty$$

$l < c < \beta + l$:

$c = \beta + l$:

$$\beta + l < c < \gamma + l:$$

$$c = \gamma + l:$$

$$c > \gamma + l:$$

Os outros casos, analisam-se de modo análogo.

O caso $\alpha < 0$, analisa-se de modo análogo.

As figuras que apresentamos a seguir são esboços, no plano de fase, das trajetórias das soluções da equação

$$\ddot{x} + \alpha g(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

Caso $\int_0^{+\infty} g(x)dx = \infty$ e $\int_0^{-\infty} g(x)dx = \infty$

$$\alpha = 0$$

$$c > 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < k \\ c_2 &= k \\ c_3 &> k \\ c_4 &> l \end{aligned}$$

$$\alpha < 0$$

Caso $\beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx < \infty$ e $\int_0^{+\infty} g(x)dx = \infty$

$$\alpha = 0$$

$$0 < c_1 < \beta$$

$$c_2 \geq \beta$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta < k$$

$$0 < c_1 < \beta$$

$$\beta \leq c_2 < k$$

$$c_3 = k$$

$$c_4 > k$$

$$l < c_5 < \beta + l$$

$$c_6 = \beta + l$$

$$c_7 > \beta + l$$

$$\alpha < 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta = k$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ c_2 &= \beta \\ c_3 &> \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_5 < \beta + l \\ c_6 &= \beta + l \\ c_7 &> \beta + l \end{aligned}$$

$$\alpha < 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta > k$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < k \\ c_2 &= k \\ k < c_3 < \beta \\ c_4 &\geq \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_5 < \beta + l \\ c_6 &= \beta + l \\ c_7 &> \beta + l \end{aligned}$$

$$\alpha < 0$$

Caso $\int_0^{-\infty} g(x)dx = \infty$ e $\int_0^{+\infty} g(x)dx = \beta < \infty$

$$\alpha = 0$$

$$0 < c_1 < \beta$$

$$c_2 \geq \beta$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta < k$$

$$0 < c_1 < \beta$$

$$\beta \leq c_2 < k$$

$$c_3 = k$$

$$c_4 > k$$

$$l < c_5 < \beta + l$$

$$c_6 = \beta + l$$

$$c_7 > \beta + l$$

$$\alpha < 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta = k$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ c_2 &= \beta \\ c_3 &> \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_5 < \beta + l \\ c_6 &= \beta + l \\ c_7 &> \beta + l \end{aligned}$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta > k$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < k \\ c_2 &= k \\ k < c_3 < \beta \\ c_4 &\geq \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_5 < \beta + l \\ c_6 &= \beta + l \\ c_7 &> \beta + l \end{aligned}$$

Caso $\beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx < \int_0^{+\infty} g(x)dx = \gamma < \infty$

$$\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ \beta \leq c_2 < \gamma \\ c_3 \geq \gamma \end{aligned}$$

$$\alpha > 0$$

$$\gamma < k$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ \beta \leq c_2 < \gamma \\ \gamma \leq c_3 < k \\ c_4 = k \\ c_5 > k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \beta + l \\ c_7 = \beta + l \\ \beta + l < c_8 < \gamma + l \\ c_9 = \gamma + l \\ c_{10} > \gamma + l \end{aligned}$$

$$\alpha < 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\gamma = k$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ \beta \leq c_2 < \gamma \\ c_3 &= \gamma \\ c_4 &> \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \beta + l \\ c_7 &= \beta + l \\ \beta + l < c_8 < \gamma + l \\ c_9 &= \gamma + l \\ c_{10} &> \gamma + l \end{aligned}$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta < k < \gamma$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ \beta \leq c_2 \leq \gamma \\ c_3 &= k \\ k < c_4 < \gamma \\ c_5 &\geq \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \beta + l \\ c_7 &= \beta + l \\ \beta + l < c_8 < \gamma + l \\ c_9 &= \gamma + l \\ c_{10} &> \gamma + l \end{aligned}$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta = k$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ \beta &= c_2 \\ \beta < c_3 < \gamma \\ c_4 &\geq \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \beta + l \\ c_7 &= \beta + l \\ \beta + l < c_8 < \gamma + l \\ c_9 &= \gamma + l \\ c_{10} &> \gamma + l \end{aligned}$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta > k$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < k \\ c_2 &= k \\ k < c_3 < \beta \\ \beta &\leq c_4 < \gamma \\ c_5 &\geq \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \beta + l \\ c_7 &= \beta + l \\ \beta + l < c_8 < \gamma + l \\ c_9 &= \gamma + l \\ c_{10} &> \gamma + l \end{aligned}$$

Caso $\gamma = \int_0^{+\infty} g(x)dx < \int_0^{-\infty} g(x)dx = \beta < \infty$

$$\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \gamma \\ \gamma &\leq c_2 < \beta \\ c_3 &\geq \beta \end{aligned}$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta < k$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \gamma \\ \gamma &\leq c_2 < \beta \\ \beta &\leq c_3 < k \\ c_4 &= k \\ c_5 &> k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \gamma + l \\ c_7 &= \gamma + l \\ \gamma + l &< c_8 < \beta + l \\ c_9 &= \beta + l \\ c_{10} &> \beta + l \end{aligned}$$

$$\alpha < 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta = k$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \gamma \\ \gamma \leq c_2 < \beta \\ c_3 &= \beta \\ c_4 &> \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \gamma + l \\ c_7 &= \gamma + l \\ \gamma + l < c_8 < \beta + l \\ c_9 &= \beta + l \\ c_{10} &> \beta + l \end{aligned}$$

$$\alpha < 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\gamma < k < \beta$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \gamma \\ \gamma \leq c_2 < k \\ c_3 &= k \\ k < c_4 < \beta \\ c_5 &\geq \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \gamma + l \\ c_7 &= \gamma + l \\ \gamma + l < c_8 < \beta + l \\ c_9 &= \beta + l \\ c_{10} &> \beta + l \end{aligned}$$

$$\alpha < 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\gamma = k$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \gamma \\ c_2 &= \gamma \\ \gamma < c_3 < \beta \\ c_4 &\geq \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \gamma + l \\ c_7 &= \gamma + l \\ \gamma + l < c_8 < \beta + l \\ c_9 &= \beta + l \\ c_{10} &> \beta + l \end{aligned}$$

$$\alpha > 0$$

$$\gamma > k$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < k \\ c_2 &= k \\ k < c_3 < \gamma \\ \gamma &\leq c_4 < \beta \\ c_5 &\geq \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_6 < \gamma + l \\ c_7 &= \gamma + l \\ \gamma + l < c_8 < \beta + l \\ c_9 &= \beta + l \\ c_{10} &> \beta + l \end{aligned}$$

Caso $\int_0^{+\infty} g(x)dx = \beta = \int_0^{-\infty} g(x)dx = \infty$

$$\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ c_2 &\geq \beta \end{aligned}$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta < k$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ \beta &\leq c_2 < k \\ c_3 &= k \\ c_4 &> k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_5 < \beta + l \\ c_6 &= \beta + l \\ c_7 &> \beta + l \end{aligned}$$

$$\alpha < 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta = k$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < \beta \\ c_2 &= \beta \\ c_3 &> \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_5 < \beta + l \\ c_6 &= \beta + l \\ c_7 &> \beta + l \end{aligned}$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta > k$$

$$\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} 0 < c_1 < k \\ c_2 &= k \\ k < c_3 < \beta \\ c_4 &\geq \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l < c_5 < \beta + l \\ c_6 &= \beta + l \\ c_7 &> \beta + l \end{aligned}$$

1.2 AS FUNÇÕES DEFINIDAS POSITIVAS $V_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Para $\alpha = 0$, $\Omega_\alpha = \mathbb{R}^2$

Para $\alpha \neq 0$, seja Ω_α o semi-plano dado por:

$$\Omega_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -\alpha^{-1/(2n+1)}\} \text{ se } \alpha > 0$$

ou

$$\Omega_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -\alpha^{-1/(2n+1)}\} \text{ se } \alpha < 0$$

A função $V_\alpha : \Omega_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$V_\alpha(x, y) = \int_0^x g(u) du + \int_0^y \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$$

será fundamental para o que segue.

Temos $V_\alpha(0, 0) = 0$ e, para todo (x, y) em Ω_α , com $(x, y) \neq (0, 0)$, $V_\alpha(x, y) > 0$. Logo, V_α é definida positiva. A função V_α , é, evidentemente de classe C^1 .

Pelo que vimos na seção anterior, V_α é uma integral primeira para o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(\alpha y^{2n+1} + 1)g(x) \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega_\alpha$$

Evidentemente, o mapa das curvas de nível de V_α coincide com o mapa da trajetória deste sistema. Observamos que $V_\alpha(x, y)$ cresce à medida que (x, y) se afasta da origem.

Sejam $L > 0$ um real dado e

$$K_\alpha = \{(x, y) \in \Omega_\alpha \mid V_\alpha(x, y) \leq L\}$$

É de imediata verificação que K_α é compacto para todo

versão gráfica!

$$L < \min\left\{\int_0^{-\infty} g(x)dx, \int_0^{\infty} g(x)dx, \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds\right\} \quad \text{para } \alpha > 0 \text{ e}$$

$$L < \min\left\{\int_0^{-\infty} g(x)dx, \int_0^{\infty} g(x)dx, \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds\right\} \quad \text{para } \alpha < 0 .$$

É ainda de imediata verificação que:

toda solução deste sistema que passa por $(0, y)$ com $y > 0$, no caso $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$, para $\alpha > 0$, é periódica;

toda solução deste sistema que passa por $(0, y)$ com $y < 0$, no caso $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$, para $\alpha < 0$, é periódica;

e toda solução deste sistema que passa por $(0, y)$ com $y \in \mathbb{R}$, no caso $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = \infty$, para $\alpha = 0$ é periódica.

1.3 TEOREMA DE LA SALLE

Consideremos o sistema:

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

com P e Q de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo a origem e seja $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida positiva e de classe C^1 . Seja

$$\dot{W} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

a derivada de W em relação ao sistema (1), isto é,

$$\dot{W} = P \frac{\partial W}{\partial x} + Q \frac{\partial W}{\partial y} .$$

Seja $L > 0$ um real e seja $K = \{(x, y) \in \Omega \mid W(x, y) \leq L\}$

Suponhamos K compacto e

$\dot{W}(x, y) \leq 0$ para todo $(x, y) \in K$. Seja

$$E = \{(x, y) \in \Omega \mid \dot{W}(x, y) = 0\}$$

Seja M o maior subconjunto de K que seja invariante para o sistema (1) e que esteja contido em E . Nestas condições, o teorema de La Salle afirma que se $\gamma(t)$ for solução de (1) tal que $\gamma(t_0) \in K$, para algum t_0 , então para todo $t \geq t_0$, $\gamma(t) \in K$ e $\gamma(t)$ tende a M quando $t \rightarrow \infty$.

Além disso, se $M = \{(0, 0)\}$ então a origem será *assintoticamente estável*

(Para a demonstração do teorema de La Salle veja [4]).

Para finalizar, observamos que se $\gamma(t)$ for solução de (1), então

$$\frac{d}{dt}(W(\gamma(t))) = \dot{W}(\gamma(t))$$

1.4 VALOR DE $\dot{V}_\alpha$ PARA O SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - \psi(x, y) - g(x) \end{cases}$$

equivalente à equação

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + \psi(x, \dot{x}) + g(x) = 0 .$$

Temos:

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x} = g(x) \text{ e } \frac{\partial V_\alpha}{\partial y} = \frac{y}{\alpha y^{2n+1} + 1}$$

Portanto

$$\dot{V}_\alpha(x, y) = \frac{(\alpha g(x) - f(x))y^{2n+2} - \psi(x, y)y}{\alpha y^{2n+1} + 1}$$

Observe que se tivermos $\psi(x, \dot{x}) \equiv 0$ teremos

$$\dot{V}_\alpha(x, y) = \frac{(\alpha g(x) - f(x))y^{2n+2}}{\alpha y^{2n+1} + 1}$$

Observe ainda que , como em Ω_α , $\alpha y^{2n+1} + 1 > 0$ temos que o sinal de $\dot{V}_\alpha$ é determinado pelo sinal de $\alpha g(x) - f(x)$ e de $\psi(x, \dot{x})\dot{x}$.

Capítulo 2

Teoremas sobre Estabilidade Assintótica.

Uma Condição Suficiente para a Origem ser Repulsora

2.1 TEOREMAS SOBRE ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções, que neste trabalho, suporemos de classe C^1 . Estas hipóteses e mais a (a) da seção (1) do capítulo anterior garantem unicidade e existência de solução para as equações:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

e

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + \psi(x, \dot{x}) + g(x) = 0$$

Teorema 01: Seja a equação:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

Suponhamos que existam reais α e $a < 0 < b$ tais que, para todo $x \in]a, b[$, com $x \neq 0$, $f(x) > \alpha g(x)$.

Então, a origem será assintoticamente estável.

Demonstração:

Consideremos a função definida positiva V_α de classe C^1 do capítulo anterior.

Pelo estudo feito das curvas de níveis de V_α , temos que existe $L > 0$ tal que

$$K = \{(x, y) \in \Omega_\alpha \mid V_\alpha(x, y) \leq L\} \subset]a, b[\times \mathbb{R}$$

é compacto.

Pelo cálculo feito anteriormente temos que

$$\dot{V}_\alpha(x, y) = \frac{(\alpha g(x) - f(x))y^{2n+2}}{\alpha y^{2n+1} + 1}$$

Logo, para todo $(x, y) \in K$, temos $\dot{V}_\alpha(x, y) \leq 0$.

É imediato que a origem é o maior conjunto invariante contido em $E = \{(x, y) \in \Omega_\alpha \mid \dot{V}_\alpha(x, y) = 0\}$.

Pelo teorema de La Salle, a origem é assintoticamente estável.

□

Teorema 02: Seja a equação:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + \psi(x, \dot{x}) + g(x) = 0$$

Suponhamos que existam reais α , $a < 0 < b$ e $c < 0 < d$ tais que, para todo $x \in]a, b[$, com $x \neq 0$, $f(x) > \alpha g(x)$ e para todo $(x, \dot{x}) \in]a, b[\times]c, d[$ com $x \neq 0$ e $\dot{x} \neq 0$, $\psi(x, \dot{x})\dot{x} \geq 0$.

Então, a origem será assintoticamente estável.

Demonstração:

Análoga à demonstração do teorema anterior.

□

OBSERVAÇÃO 1:

A hipótese $f(x) > \alpha g(x)$ pode ser enfraquecida. Basta supormos $f(x) \geq \alpha g(x)$ em $]a, b[$ com a condição de que a origem seja o maior conjunto invariante contido em

$$E = \{(x, y) \in \Omega_\alpha \mid \dot{V}_\alpha(x, y) = 0\}$$

OBSERVAÇÃO 2:

As hipóteses $f(x) > \alpha g(x)$ e $\psi(x, \dot{x})\dot{x} \geq 0$ podem ser trocadas por $f(x) \geq \alpha g(x)$ e $\psi(x, \dot{x})\dot{x} > 0$.

OBSERVAÇÃO 3:

Seja l o supremo dos $L > 0$ para os quais

$$K = \{(x, y) \in \Omega_\alpha \mid V_\alpha(x, y) \leq L\} \subset]a, b[\times]c, d[$$

seja compacto.

Seja

$$B = \{(x, y) \in \Omega_\alpha \mid V_\alpha(x, y) < l\}.$$

Então, toda solução $x = x(t)$ satisfazendo as condições iniciais

$x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t_0) = y_0$ com $(x_0, y_0) \in B$, tende para a origem quando $t \rightarrow \infty$.

OBSERVAÇÃO 4 :

Na observação 3, se $a = c = -\infty$ e $b = d = \infty$ então:

$$l = \min\left\{\int_0^{-\infty} g(x)dx, \int_0^{\infty} g(x)dx, \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds\right\} \quad \text{para } \alpha > 0$$

$$l = \min\left\{\int_0^{-\infty} g(x)dx, \int_0^{\infty} g(x)dx, \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds\right\} \quad \text{para } \alpha < 0.$$

Para $\alpha = 0$, se $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = \infty$ então $\{0\} \times \mathbb{R} \subset B$.

Para $\alpha > 0$, se $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$ então $\{0\} \times]y_0, \infty[\subset B$ onde $y_0 < 0$ e $\int_0^{y_0} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds = \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$.

Para $\alpha < 0$, se $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$ então $\{0\} \times]-\infty, y_0[\subset B$ onde $y_0 > 0$ e $\int_0^{y_0} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds = \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds$.

Teorema 03: Seja a equação :

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + \psi(x, \dot{x}) + g(x) = 0$$

Suponhamos que as seguintes hipóteses estejam verificadas:

a) existe um real α tal que, para todo real x , com $x \neq 0$,

$$f(x) > \alpha g(x);$$

b)

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = \infty \quad \text{se } \alpha = 0,$$

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds \quad \text{se } \alpha > 0$$

e

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds \quad \text{se } \alpha < 0;$$

c) $\psi(x, \dot{x})\dot{x} \geq 0$ para todo $(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$ com $x \neq 0$ e $\dot{x} \neq 0$.

Então, a equação acima não admitirá órbitas periódicas.

Demonstração:

Basta olhar a demonstração do teorema 1 e as observações 3 e 4 do teorema 2 e utilizar o fato de que dentro de uma órbita periódica deve ter ponto crítico (veja [5] pg 254) e que $(0,0)$ é o único ponto crítico do sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - \psi(x, y) - g(x) \end{cases}$$

equivalente à equação dada.

□

Teorema 04: Seja a equação:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

Suponhamos que estejam verificadas as seguintes hipóteses:

a) existe α real tal que, para todo x real,

$$f(x) \geq \alpha g(x)$$

b) existem reais $r > 0$ e $a > 0$ tais que, para todo x em $] -a, a[$, com $x \neq 0$,

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \geq r.$$

Então, toda solução satisfazendo as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0 \text{ e } \dot{x}(t_0) = y_0 \text{ com } (x_0, y_0) \in B,$$

$$B = \{(x, y) \in \Omega_\alpha \mid V_\alpha(x, y) < l\}$$

onde

$$l = \min\left\{\int_0^{-\infty} g(x)dx, \int_0^{\infty} g(x)dx, \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds\right\} \quad \text{para } \alpha > 0$$

$$l = \min\left\{\int_0^{-\infty} g(x)dx, \int_0^{\infty} g(x)dx, \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds\right\} \quad \text{para } \alpha < 0,$$

será oscilante.

Observe que no caso $\alpha = 0$ e $\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = \infty$ temos $B = \mathbb{R}^2$.

Demonstração: Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - g(x) \end{cases}$$

Segue da hipótese b) que $f(0) = 0$ e que existe $L > 0$ tal que, para todo $x \in]-a, a[$ com $x \neq 0$, o ponto

(x, y) , com $y = -\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)^{1/(2n+1)}$ não pertence ao compacto

$$K = \{(x, y) \in \Omega_\alpha \mid V_\alpha(x, y) \leq L\}$$

Em K , $\dot{y} = 0$ apenas para $x = 0$; $\dot{x} = 0$ apenas para $y = 0$. A hipótese $f(x) \geq \alpha g(x)$, para x em $\mathbb{R}$, implica $\dot{V}_\alpha(x, y) \leq 0$ em Ω_α . Logo, toda solução que passa por um ponto de K é oscilante. Portanto, toda solução $x = x(t)$ da equação satisfazendo as condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t_0) = y_0$, com $(x_0, y_0) \in B$, é oscilante.

□

2.2 UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA A ORIGEM SER REPULSORA

Teorema 01: Seja a equação:

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

Suponhamos que existem reais α e $a < 0 < b$ tais que, para todo $x \in]a, b[$, com $x \neq 0$,

$$f(x) < \alpha g(x).$$

Então, a origem será repulsora. Além disso, para $a = -\infty, b = \infty$ e

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = \infty \quad \text{se } \alpha = 0,$$

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds \quad \text{se } \alpha > 0$$

e

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds \quad \text{se } \alpha < 0$$

temos a equação (1) não admitirá órbitas periódicas.

Demonstração:

Fazendo $z(t) = x(-t)$, obtemos:

$$(2) \quad \ddot{z} - f(z)\dot{z}^{2n+1} + g(z) = 0.$$

Pelo que vimos na seção anterior, a origem será assintoticamente estável para (2) ; logo, repulsora para (1).

Segue, ainda, da seção anterior que se $a = -\infty, b = \infty$ e

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = \infty \quad \text{se } \alpha = 0 ,$$

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds \quad \text{se } \alpha > 0$$

e

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds \quad \text{se } \alpha < 0$$

então a equação (2) não admitirá soluções periódicas; logo (1) não admitirá, também soluções periódicas.

□

Teorema 02: Seja a equação:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + \psi(x, \dot{x}) + g(x) = 0.$$

Suponhamos que existam reais α , $a < 0 < b$ e $c < 0 < d$ tais que, para todo $x \in]a, b[$ com $x \neq 0$, $f(x) < \alpha g(x)$ e para todo $(x, \dot{x}) \in]a, b[\times]c, d[$, com $x \neq 0$ e $\dot{x} \neq 0$, $\psi(x, -\dot{x})\dot{x} \leq 0$.

Então, a origem será repulsora. Além disso, para $a = c = -\infty$ e $b = d = \infty$ e,

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx = \infty \quad \text{se } \alpha = 0 ,$$

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds \quad \text{se } \alpha > 0$$

e

$$\int_0^{\pm\infty} g(x)dx \geq \int_0^{-\infty} \frac{s}{\alpha s^{2n+1} + 1} ds \quad \text{se } \alpha < 0$$

temos que a equação acima não admitirá órbitas periódicas.

Demonstração:

Análoga ao do teorema 1, utilizando os resultados da seção anterior.

□

Capítulo 3

Teoremas Sobre a Existência de Soluções Periódicas

Teorema 01: Seja a equação:

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

satisfazendo:

- a) f e g ímpares
- b) $f(x) \geq 0, \forall x > 0$
- c) $\exists \alpha > 0$ e $a > 0$ tal que $f(x) < \alpha g(x), \forall x \in]0, a[$

então, a origem é um centro. Além disso, toda solução que passa por $(0, y_0)$ com $y_0 > 0$ e $y_0 < (2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$ é periódica.

Demonstração:

A equação (1) é equivalente ao sistema

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - g(x) . \end{cases}$$

Para $y \neq 0$, temos que o sistema (2) é equivalente à

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = -f(x)y^{2n} - \frac{g(x)}{y} .$$

De a) temos que se $y(x)$ é solução de (3) então $y(-x)$ é solução de (3).

De b) temos que toda solução de (2) que passa por $(0, y_0)$, onde $y_0 > 0$ e $y_0 < (2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$, não pode sair (veja o sentido do campo) do compacto

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid V_0(x, y) \leq \frac{y_0^2}{2} \}$$

pela curva

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid V_0(x, y) = \frac{y_0^2}{2} \} .$$

De c) temos que as soluções não podem tender à origem pelo semiplano $x > 0$.

Portanto, a solução que passa por $(0, y_0)$, onde $y_0 > 0$ e $y_0 < (2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$ deve cortar o semi-eixo $y < 0$ e, é então, periódica.

□

OBSERVAÇÃO 1:

Podemos trocar as hipóteses b) e c) por:

$$b') \quad f(x) \leq 0, \quad \forall x > 0$$

$$c') \quad \exists \alpha < 0 \text{ e } a > 0 \text{ tal que } f(x) > \alpha g(x), \quad \forall x \in]0, a[$$

e teremos que toda solução de (2) que passa por $(0, y_0)$ com $0 > y_0 > -(2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$

é periódica. A demonstração é análoga à do teorema, bastando notar que de b') temos $f(y) \geq 0, \forall y < 0$ e de c') temos $f(y) < \alpha g(y), \forall y \in]-a, 0[$.

OBSERVAÇÃO 2:

Podemos trocar as hipóteses a) e b) por:

existe $b > 0$, tal que

a'') f e g são ímpares em $[-b, b]$

b'') $f(x) \geq 0, \forall x \in]0, b]$

e teremos que a origem é um centro.

OBSERVAÇÃO 3:

Se acrescentarmos, no teorema, a hipótese *existem $\beta > 0$ e $c > 0$ tais que $f(x) \geq \beta g(x), \forall x > c$* , teremos que nem todas as órbitas são periódicas. Para isto, basta observar que a solução de (2) que passa por $(c, -\beta^{-1/(2n+1)})$ não pode ser periódica, pois toda solução que começa em (c, y_0) , com $y_0 > 0$, não pode deixar o conjunto

$$\{ (x, y) \in [c, +\infty[\times \mathbb{R} \mid V_\beta(x, y) \leq V_\beta(c, y_0) \}$$

através da curva de nível

$$\{ (x, y) \in [c, +\infty[\times \mathbb{R} \mid V_\beta(x, y) = V_\beta(c, y_0) \}$$

Lema 01: Sejam os sistemas:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - g(x) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -h(x)y^{2n+1} - g_1(x) \end{cases}$$

tais que $f(x) < h(x)$ e $g(x) = g_1(x)$, $\forall x > 0$.

Então, se γ é solução de (1) e ϕ é solução de (2), tais que $\gamma(0) = (0, y_0)$ e $\phi(0) = (0, y_1)$, com $y_0 > y_1 > 0$, temos que γ não cruza a imagem de ϕ em $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que o primeiro encontro das imagens de γ e ϕ é um ponto $M = (x_1, y_2)$ com $x_1 > 0$ (veja o sentido do campo).

Caso em que $y_2 \neq 0$:

O vetor $\vec{n} = [h(x_1)y_2^{2n+1} + g_1(x_1)]\vec{i} + y_2\vec{j}$ é normal à curva ϕ no ponto M e o vetor

$$\vec{T} = y_2\vec{i} + [-f(x_1)y_2^{2n+1} - g(x_1)]\vec{j}$$

é tangente à curva γ no ponto M então

$$\vec{n} \cdot \vec{T} = [h(x_1) - f(x_1)]y_2^{2n+2} > 0,$$

o que é impossível. (Veja a figura)

Analiticamente, para $y \neq 0$, temos que (1) e (2) são equivalentes à

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = -f(x)y^{2n} - \frac{g(x)}{y} .$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = -h(x)y^{2n} - \frac{g_1(x)}{y} .$$

respectivamente.

Existem $y_3(x)$ solução de (3) e $y_4(x)$ solução de (4) com $y_3(x_1) = y_4(x_1) = y_2$ tais que os gráficos de y_3 e y_4 são imagens de γ e ϕ em torno de (x_1, y_2) , respectivamente.

De $\gamma(0) = (0, y_0)$ e $\phi(0) = (0, y_1)$ com $y_0 > y_1 > 0$ e de (x_1, y_2) ser o primeiro encontro das imagens de γ e ϕ , temos que para todo $x < x_1$, $y_3(x) > y_4(x)$, quando $y_2 > 0$ e para todo $x > x_1$, $y_3(x) < y_4(x)$, quando $y_2 < 0$.

$$\frac{d}{dx}(y_3(x) - y_4(x))|_{x=x_1} = (h(x_1) - f(x_1))y_2^{2n} > 0 ,$$

isto é, $y_3(x) - y_4(x)$ é estritamente crescente perto de x_1 , como $y_3(x_1) - y_4(x_1) = 0$, tem-se que $y_3(x) - y_4(x) < 0$ para $x < x_1$ e, $y_3(x) - y_4(x) > 0$ para $x > x_1$, o que é absurdo!!

Caso em que $y_2 = 0$:

Neste caso, existe uma outra solução de (1) diferente de γ que começa em $(0, y_3)$ com $y_0 > y_3 > y_1$ que cruza ϕ também em $(x_1, 0)$, ou seja cruza γ em $(x_1, 0)$, o que não pode ocorrer por unicidade da solução da equação (1).

□

Teorema 02: Sejam as equações

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + h(x)\dot{x}^{2n+1} + g_1(x) = 0$$

tais que:

- a) f e g são ímpares ;
- b) $f(x) \geq 0, \forall x > 0$;
- c) $f(x) < h(x)$ e $g_1(x) = g(x), \forall x > 0$;
- d) existe ϕ solução do sistema equivalente à equação (2) tal que $\phi(0) = (0, y_1)$ com $y_1 > 0$ e que intercepta o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$.

Então, toda solução da equação (1) que passa por $(0, y_0)$ com $y_0 > y_1$ e $y_0 < (2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$ é periódica.

Demonstração:

Seja γ uma solução do sistema equivalente à equação (1), tal que $\gamma(0) = (0, y_0)$ com $y_0 > y_1$ e $y_0 < (2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$

De b) temos que γ não pode sair do compacto

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid V_0(x, y) \leq \frac{y_0^2}{2} \}$$

pela curva

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid V_0(x, y) = \frac{y_0^2}{2} \}.$$

Do lema 1), temos que γ não cruza a imagem de ϕ em $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Portanto, usando d), temos que γ cruza o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$.

Como f e g são ímpares, γ é solução periódica da equação (1).

OBSERVAÇÃO 4:

No teorema 02, se as hipóteses b), c) e d) forem substituídas por:

- b') $f(x) \geq 0, \forall x < 0$

c') $f(x) < h(x)$ e $g_1(x) = g(x)$, $\forall x < 0$

d') existe ϕ solução do sistema equivalente à equação (2) tal que $\phi(0) = (0, y_1)$ com $y_1 < 0$ e que intercepta o semi-eixo $y > 0$ em algum instante $t > 0$.

teremos que toda a solução da equação (1) que passa por $(0, y_0)$ com $y_0 < y_1$ e $y_0 > -(2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$ é periódica.

OBSERVAÇÃO 5:

No Teorema 02, se a hipótese d) for substituída por:

d'') existe $a > 0$ tal que toda solução do sistema equivalente à equação (2) que começa em $(0, y)$ com $y \in]0, a]$ corta o semi-eixo $y < 0$,

teremos que todas as soluções do sistema associado à equação (1) que começam no semi-eixo $y > 0$ com $y < (2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$ são periódicas.

OBSERVAÇÃO 6:

No teorema 02, se as hipóteses a), b), c) e d) forem substituídas por:

existem $a > 0$, $b > 0$ tais que:

a''') f e g são ímpares em $[-b, b]$;

b''') $f(x) \geq 0$, $\forall x \in]0, b]$;

c''') $f(x) < h(x)$ e $g_1(x) = g(x)$, $\forall x \in]0, b]$;

d''') toda solução do sistema equivalente à equação (2) que começa em $(0, y)$ com $y \in]0, a]$ intercepta o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$;

teremos que a origem é um centro para o sistema equivalente à equação (1).

Teorema 03: Sejam as equações :

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + h(x)\dot{x} + g_1(x) = 0$$

tais que:

a) f e g são ímpares

b) $f(x) > 0, \forall x > 0$

c) $f(x) = h(x)$ e $g(x) = g_1(x), \forall x > 0$

d) $\exists a > 0$ tal que as soluções de (2) que começam em $(0, y)$, com $y \in]0, a]$ cortam o semi-eixo $y < 0$, em algum instante $t > 0$.

Então, toda solução do sistema equivalente à equação (1) que começa no semi-eixo $y > 0$ com $y < (2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$ é periódica.

Demonstração:

A equação (1) é equivalente ao sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - g(x) . \end{cases}$$

A equação (2) é equivalente ao sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -h(x)y - g_1(x) . \end{cases}$$

Seja γ solução de (3) tal que $\gamma(0) = (0, y_0)$ com $1 > y_0 > 0$ e $y_0 < (2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$.

De b) temos que γ não pode sair do compacto

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid V_0(x, y) \leq \frac{y_0^2}{2} \}$$

pela curva

$$\{ (x, y) \in \mathfrak{R}_+^* \times \mathfrak{R} \mid V_0(x, y) = \frac{y_0^2}{2} \}.$$

Sejam $a > y_1 > 0$ com $y_0 > y_1$.

De d) temos que existe ϕ solução de (4) tal que $\phi(0) = (0, y_1)$ e que cruza o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$.

γ não cruza a imagem de ϕ em $\mathfrak{R}_+^* \times \mathfrak{R}$, pois se ela cruzasse em $M = (x_1, y_3)$ com $x_1 > 0$ e $y_3 \neq 0$ teríamos que o vetor

$$\vec{n} = [h(x_1)y_3 + g_1(x_1)]\vec{i} + y_3\vec{j}$$

normal à curva ϕ em M e

$$\vec{T} = y_3\vec{i} - [f(x_1)y_3^{2n+1} + g(x_1)]\vec{j},$$

tangente à curva γ em M seriam tais que

$$\vec{n} \cdot \vec{T} = f(x_1)y_3^2(1 - y_3^{2n}),$$

como $|y_3| < y_0$, pois $(x_1, y_3) \in K$ e, $y_0 < 1$ temos $y_3 < 1$ e portanto : $\vec{n} \cdot \vec{T} > 0$, o que é impossível; e se γ cruza a imagem de ϕ , em $(x_1, 0)$ com $x_1 > 0$, temos que uma outra solução de (3) diferente de γ que começa em $(0, y_4)$ com $y_0 > y_4 > y_1$ cruza ϕ também em $(x_1, 0)$, ou seja cruza γ em $(x_1, 0)$, o que não pode ocorrer por unicidade da solução da equação (3).

Portanto, γ cruza o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$.

De f e g serem ímpares temos que γ é periódica.

Tomando η solução de (3) tal que $\eta(0) = (0, z_0)$ com $z_0 \geq 1$ e $z_0 < (2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$ temos que η não pode cruzar γ , por unicidade da solução da equação (3) e, pelo mesmo estudo feito para γ temos que η é periódica.

□

OBSERVAÇÃO 7:

No teorema 03, se as hipóteses b), c), d) forem substituídas por:

$$b') f(x) > 0, \forall x < 0;$$

$$c') f(x) = h(x) \text{ e } g(x) = g_1(x), \forall x < 0;$$

d') $\exists a < 0$ tal que as soluções de (2) que começam em $(0, y)$, com $y \in [a, 0[$ cortam o semi-eixo $y > 0$, em algum instante $t > 0$;

teremos que toda solução do sistema equivalente à (1) que começa no semi-eixo $y < 0$ com $y > -(2 \int_0^\infty g(x) dx)^{1/2}$ é periódica.

OBSERVAÇÃO 8:

No teorema 03, se as hipóteses a), b), c) forem substituídas por:

existe $b > 0$ tal que

$$a'') f \text{ e } g \text{ são ímpares em } [-b, b];$$

$$b'') f(x) > 0, \forall x \in]0, b];$$

$$c'') f(x) = h(x) \text{ e } g(x) = g_1(x), \forall x \in]0, b];$$

teremos que a origem é um centro para o sistema equivalente à equação (1).

Teorema 04: Sejam as equações

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + h(x)\dot{x}^{2m+1} + g_1(x) = 0$$

tais que:

a) f e h são ímpares

b) $f(x) > 0$ e $h(x) < 0, \forall x > 0$

c) $\exists a > 0$ tal que as soluções de (1) e (2) que começam em $(0, y)$ com $y \in]0, a]$ cortam o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$.

Então, toda solução de

$$(3) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + h(x)\dot{x}^{2m+1} + g_2(x) = 0$$

que começa em $(0, y_0)$, com $y_0 \in]0, a[$ é periódica, desde que g_2 seja ímpar e $g(x) = g_1(x) = g_2(x), \forall x > 0$.

Demonstração:

A equação (1) é equivalente ao sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - g(x) . \end{cases}$$

A equação (2) é equivalente ao sistema

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -h(x)y^{2m+1} - g_1(x) . \end{cases}$$

A equação (3) é equivalente ao sistema

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - h(x)y^{2m+1} - g_2(x) . \end{cases}$$

Sejam $0 < y_0 < a$ e γ solução de (6) tais que $\gamma(0) = (0, y_0)$.

Sejam $0 < y_3 < y_0 < y_1 < a$. De c), temos que existe η solução de (5) e

ϕ solução de (4), que começam em $(0, y_1)$ e $(0, y_3)$, respectivamente e que cruzam o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$.

A imagem de γ não cruza a imagem de ϕ em $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, pois se ela cruzasse em $M = (\tilde{x}, \tilde{y})$ com $\tilde{x} > 0$ e $\tilde{y} \neq 0$ teríamos que o vetor $\vec{n} = (f(\tilde{x})\tilde{y}^{2n+1} + g_1(\tilde{x})\vec{i} + \tilde{y}\vec{j})$, normal à curva ϕ em M e $\vec{T} = \tilde{y}\vec{i} - [f(\tilde{x})\tilde{y}^{2n+1} + h(\tilde{x})\tilde{y}^{2m+1} + g_2(\tilde{x})]\vec{j}$ tangente à γ em M seriam tais que

$$\vec{n} \cdot \vec{T} = -h(\tilde{x})\tilde{y}^{2m+2} > 0,$$

o que é impossível; e, se γ cruza a imagem de ϕ , em $(\tilde{x}, 0)$ com $\tilde{x} > 0$, temos que uma outra solução de (6), que começa em $(0, y_2)$ com $y_3 < y_2 < y_0$ cruza ϕ , também em $(\tilde{x}, 0)$, ou seja, cruza a γ em $(\tilde{x}, 0)$, o que não pode ocorrer, pela unicidade da solução de (6). Utilizando o mesmo tipo de argumento e que $f(x) > 0$ para $x > 0$ temos que γ não poderá cruzar a imagem de η em $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Portanto, γ cruza o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$.

Pelo fato de f , g e g_2 serem ímpares temos que γ é periódica.

□

OBSERVAÇÃO 9: No teorema 04, substituindo as hipóteses a) e b) por:

existe $b > 0$ tal que

a') f e h são ímpares em $[-b, b]$;

b') $f(x) > 0$ e $h(x) < 0, \forall x \in]0, b]$

e a imposição:

g_2 ímpar e $g(x) = g_1(x) = g_2(x), \forall x > 0$ por:

g_2 ímpar em $[-b, b]$ e $g(x) = g_1(x) = g_2(x), \forall x \in]0, b]$

teremos que a origem é centro de (3).

Teorema 05: Sejam as equações

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + h(x)\dot{x}^{2n+1} + g_1(x) = 0$$

tais que:

a) f e g são ímpares ;

b) $f(x) \geq 0, \forall x > 0$;

c) $g(x) > g_1(x)$ e $f(x) = h(x), \forall x > 0$;

d) existe $a > 0$ tal que toda solução de (2) que começa em $(x, 0)$ com $x \in]0, a]$, corta o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$;

então, toda solução da equação (1) que começa em $(0, y_0)$ com $0 < y_0$ e $y_0 < (2 \int_0^\infty g(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ é periódica.

Demonstração:

A equação (1) é equivalente ao sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y^{2n+1} - g(x) \end{cases}$$

A equação (2) é equivalente ao sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -h(x)y^{2n+1} - g_1(x) \end{cases}$$

Fixemos $y_0 > 0$ com $y_0 < (2 \int_0^\infty g(x)dx)^{\frac{1}{2}}$.

Seja γ solução de (3) tal que $\gamma(0) = (0, y_0)$.

De b) temos que γ não pode sair do compacto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid V_0(x, y) \leq \frac{y_0^2}{2}\}$$

pela curva $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid V_0(x, y) = \frac{y_0^2}{2}\}$.

Como no semi-plano $y > 0$, temos $\dot{x} > 0$, temos que γ não pode tender para a origem no semi-plano $y > 0$. Portanto, γ cruza o semi-eixo $x > 0$. Supomos $(x_0, 0)$, o cruzamento.

Tomemos ϕ solução de (2) que começa em $(x_1, 0)$ com $x_1 \in]0, a]$ e $x_1 < x_0$.

De d) temos que ϕ cruza o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$.

A imagem de γ não cruza a imagem de ϕ em $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*$, pois se ela cruzasse em $M = (x_2, y_2)$ com $x_2 > 0$ e $y_2 < 0$ teríamos que o vetor $\vec{n} = [h(x_2)y_2^{2n+1} + g_1(x_2)]\vec{i} + y_2\vec{j}$, normal à curva ϕ em M e $\vec{T} = \dot{y}_2\vec{i} - [f(x_2)y_2^{2n+1} + g(x_2)]\vec{j}$, tangente à γ em M seriam tais que $\vec{n} \cdot \vec{T} = (g_1(x_2) - g(x_2))y_2 > 0$, o que é impossível.

Portanto, γ cruza o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$.

De a) temos que γ é periódica.

□

OBSERVAÇÃO 10:

No teorema 05, se as hipóteses b), c) e d) forem substituídas por:

b') $f(x) \geq 0, \forall x < 0$;

c') $g(x) < g_1(x)$ e $h(x) = f(x), \forall x < 0$;

d') existe $a < 0$ tal que toda solução de (2) que começa em $(x, 0)$ com $x \in [a, 0[$ corta o semi-eixo $y > 0$ em algum instante $t > 0$;

teremos que toda solução de (3) que começa em $(0, y_0)$ com $0 > y_0 > -(2 \int_0^\infty g(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ é periódica.

OBSERVAÇÃO 11:

No teorema 05, se as hipóteses a), b) e c) forem substituídas por: existe $b > 0$ tal que

a") f e g são ímpares em $[-b, b]$;

b") $f(x) \geq 0, \forall x \in]0, b]$;

c") $g(x) > g_1(x)$ e $f(x) = h(x), \forall x \in]0, b]$;

teremos que a origem é um centro para (3).

Teorema 06: Sejam as equações

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + h(x)\dot{x}^{2n+1} + g_1(x) = 0$$

satisfazendo: existe $b > 0$ tal que:

a) f, g e h são ímpares em $[-b, b]$;

b) $f(x) \geq 0, \forall x \in]0, b]$;

c) $f(x) < h(x)$ e $g(x) > g_1(x), \forall x \in]0, b]$; e

d) existe $a > 0$ tal que toda solução de (2) que começa em $(x, 0)$ com $x \in]0, a]$, corta o semi-eixo $y < 0$ em algum instante $t > 0$;

então, a origem é centro de (1).

Demonstração:

Pela observação 11 do teorema 5 temos que a origem é centro para

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

Pela observação 6 do teorema 2 temos que a origem é centro de (1).

□

EXEMPLOS

1) $\ddot{x} + cx^{2i+1}\dot{x}^{2n+1} + x^{2j+1} = 0, \quad i \geq j \geq 0$

- para $i = j$: pelo estudo feito no capítulo 1, temos que toda solução que passa por $(0, y_0)$, com $y_0 > 0$ para $c > 0$ e $y_0 < 0$ para $c < 0$ é periódica; e para $c = 0$ todas as soluções são periódicas, pois $\int_0^{\pm\infty} x^{2j+1} dx = \infty$
- para $i > j$: como cx^{2i+1} e x^{2j+1} são ímpares ;
 para $c > 0$: $cx^{2i+1} \geq 0, \quad \forall x > 0$;
 $cx^{2i+1} < cx^{2j+1}, \quad \forall x \in]0, 1[$;
 para $c < 0$: $cx^{2i+1} \leq 0, \quad \forall x > 0$;
 $cx^{2i+1} > cx^{2j+1}, \quad \forall x \in]0, 1[$;
 e $\int_0^{\infty} x^{2j+1} dx = \infty, \quad \forall j \geq 0$

temos que todas as soluções que começam no semi-eixo $y > 0$ para $c > 0$ e no semi-eixo $y < 0$ para $c < 0$, são periódicas.

Como $cx^{2i+1} > cx^{2j+1}, \quad \forall x > 1$ para $c > 0$
 $cx^{2i+1} < cx^{2j+1}, \quad \forall x > 1$ para $c < 0$

temos que nem todas as órbitas são periódicas para $c \neq 0$.

2) $\ddot{x} + c_1x^{2i+1}\dot{x}^{2n+1} + c_2x^{2l+1}\dot{x}^{2m+1} + x^{2j+1} = 0, \quad i, l \geq j \geq 0 \quad c_1c_2 < 0$

Como c_1x^{2i+1}, c_2x^{2l+1} e x^{2j+1} são ímpares ;
 $(c_1x^{2i+1} > 0 \text{ e } c_2x^{2l+1} < 0)$ ou $(c_1x^{2i+1} < 0 \text{ e } c_2x^{2l+1} > 0), \quad \forall x > 0$;
 a origem é centro para as equações $\ddot{x} + c_1x^{2i+1}\dot{x}^{2n+1} + x^{2j+1} = 0$ e
 $\ddot{x} + c_2x^{2l+1}\dot{x}^{2m+1} + x^{2j+1} = 0$;

temos pelo teorema 4 que a origem é centro para a equação 4).

$$3) \quad \ddot{x} + dx^{2r+1}\dot{x}^{2m+1} + x^{4r+3} = 0$$

Do trabalho de Guidorizzi em [2] temos que

$$\ddot{x} + dx^{2r+1}\dot{x} + x^{4r+3} = 0$$

tem todas as soluções periódicas, quando $|d| < 2\sqrt{2(r+1)}$.

- para $d = 0$: todas as órbitas são periódicas.
- para $0 < d < 2\sqrt{2(r+1)}$: temos pelo teorema 3 que toda solução do sistema equivalente à equação (5) que começa no semi-eixo $y > 0$ é periódica.
- para $-2\sqrt{2(r+1)} < d < 0$: temos pela observação 7 do teorema 3 que toda solução do sistema equivalente à equação (5) que começa no semi-eixo $y < 0$ é periódica.

$$4) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2m+1} + x^{4r+3} = 0$$

onde f é ímpar ;
 $f(x) \geq 0, \quad \forall x > 0$
 $\exists a > 0$ tal que $f(x) < x^{2r+1}, \quad \forall x \in]0, a]$;

temos pelo teorema 2 que toda solução de (6) que começa no semi-eixo $y > 0$ é periódica.

Se existe $b > 0$ tal que:

f é ímpar em $[-b, b]$;

$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in]0, b]$;

existe $a > 0$ tal que $f(x) < x^{2r+1}, \quad \forall x \in]0, a]$;

temos pela observação 6 do teorema 2 que a origem é centro de (6).

Em particular, se $f(x) = cx^i$, $c =$ constante positiva, com i ímpar e $i > 2r + 1$, teremos que toda solução de (6) que começa no semi-eixo $y > 0$ é periódica.

$$5) \quad \ddot{x} + e_1 x^i \dot{x}^{2n+1} + e_2 x^j \dot{x}^{2m+1} + x^{4r+3} = 0 \quad \text{com } i, j \geq 2r+1 \text{ e } e_1 e_2 < 0$$

No caso $i = 2r+1$ devemos restringir $|e_1| < 2\sqrt{2(r+1)}$

No caso $j = 2r+1$ devemos restringir $|e_2| < 2\sqrt{2(r+1)}$

Pelo teorema 4, a origem é um centro para a equação (7)

$$6) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x}^{2n+1} + g(x) = 0$$

Se f e g são ímpares e existe $a > 0$ tal que

$$0 \leq f(x) < dx^{2r+1} \text{ e } g(x) > x^{4r+3}, \forall x \in]0, a]$$

onde $0 < d < 2\sqrt{2(r+1)}$ temos pelo teorema 6 e exemplo 5 que a origem é centro de (8).

REFERÊNCIAS

- [1] Guidorizzi, Hamilton Luiz. (1988)
Contribuições ao Estudo das Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª ordem.
Tese de Doutorado – IME - USP.

- [2] Guidorizzi, Hamilton Luiz. (1989)
Sobre Existência de Soluções Periódicas da Equação
 $\ddot{x} + \alpha x_{2n+1}\dot{x} + x_{4n+3} = 0$
29º Seminário Brasileiro de Análise, 273 – 277.

- [3] Villari, Gabriele. (1983)
On the Existence of Periodic Solutions for Liénard Equation.
Nonlinear Anal. 7, 71 – 78.

- [4] La Salle, Joseph and Lefschetz, Solomon. (1964)
Stability by Liapunov's Direct Method, With Applications.
Academic Press.

- [5] Sotomayor, Jorge. (1979)
Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.
Projeto euclides – IMPA.