Ciclos Canard
e
Variedades Centrais

Clayton Eduardo Lente da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo/SP

2005

Ciclos Canard
e
Variedades Centrais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Clayton Eduardo Lente da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 21 de dezembro de 2005.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo (orientador) - IME/USP

Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello - IME/USP

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva - IBILCE/UNESP

Aos meus pais e avós.

Agradecimentos

Gostaria de manifestar meus agradecimentos a algumas pessoas, que direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço

Ao Prof. Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo, pela confiança e orientação;

Aos meus pais, Rubens Izidoro da Silva e Sônia Maria Lente da Silva, pelo amor e incentivo;

Aos meus familiares, em especial Alessandra Renata Lente da Silva, Ronaldo Alves da Silva, Miguel David Lente da Silva e Silmeris Lente;

Ao meu amigo Márcio Ricardo Alves Gouveia, pelo companheirismo nesses anos;

Aos professores do IME/USP, em especial Martha Salerno Monteiro, Eduardo Colli, Jorge Sotomayor, Clodoaldo Grotta Ragazzo, Claudia Cueva Candido e Cristina Cerri;

Aos professores do IBILCE/UNESP, em especial Paulo Ricardo da Silva e Aparecida Francisco da Silva, os quais foram meu orientador e tutora, respectivamente, e aos professores Neuza Kazuko Kakuta, Claudio Aguinaldo Buzzi e Eliana Xavier Linhares de Andrade;

Aos amigos de graduação, Claudio Gomes Pessoa, Moisés Rodrigues Cirilo do Monte, Cassius Gomes de Oliveira, Ana Lúcia Gonçalves Ribeiro e Karine Bobadilha;

Aos amigos que conheci na USP, Marcone Correa Pereira, Gerard John Alva Morales, Jocirei Dias Ferreira, Cléber da Costa Figueiredo e Rogério Ferreira Lourenço;

Ao Programa Especial de Treinamento (PET), do qual fui bolsista durante a graduação, e aos amigos que fiz durante os anos nesse programa;

À **FAPESP** pelo auxílio financeiro;

A Deus, por tudo.

Resumo

Neste trabalho estudamos um fenômeno, conhecido como Fenômeno Canard, que ocorre na equação de Van der Pol singular $\epsilon \ddot{x} + (x^2 + x) \dot{x} + x - a = 0$. Para valores do parâmetro singular $\epsilon > 0$ suficientemente pequenos, quando variamos o parâmetro a , o ciclo limite que surge devido à Bifurcação de Hopf assume formas distintas quando $\epsilon \rightarrow 0$. A transição entre tais formas, para variações exponencialmente pequenas do parâmetro a , ocorre rapidamente. Isto é o que chamamos de Fenômeno Canard. Abordamos uma determinada forma e provamos, utilizando técnicas de blow-up, variedades centrais e a Integral de Melnikov, que o ciclo limite se colapsa nessa determinada forma.

Palavras-chave: Fenômeno Canard, desingularização, blow-up, bifurcação de Hopf, ciclo limite, conjunto limite periódico, forma normal, variedade central, integral de Melnikov.

Abstract

In this text the Canard Phenomenon occuring in singular Van der Pol's equation $\epsilon \ddot{x} + (x^2 + x) \dot{x} + x - a = 0$ is studied. What happens is that for sufficiently small $\epsilon > 0$ and for decreasing a , the limit cycle created in a Hopf bifurcation assume different forms, when $\epsilon \rightarrow 0$. The transition between this forms, for variations exponentially smalls of the parameter a , occur rapidly. This is what call Canard Phenomenon. We studies a determined form and proof, using technics of blow-up, center manifolds and the Melnikov's integral, what the limit cycle assume this determined form.

Keywords: Canard Phenomenon, desingularization, blow-up, Hopf bifurcation, limit cycle, limit periodic set, normal form, center manifold, Melnikov's integral.

Sumário

1	Introdução	8
2	O Fenômeno Canard para a equação de Van der Pol	11
2.1	Estudo das Singularidades e Teorema Principal	11
2.2	Bifurcação de Hopf na Família de Van der Pol	21
3	Blowing-up	25
3.1	Blowing-up em $s_0 = (0, 0, 0, 0)$	25
3.2	Blowing-up em $n_0 = (-1, 1/6, 0, 0)$	33
3.3	Blowing-up nas linhas N e S	38
4	Variedades Centrais	41
4.1	Forma Normal para X nos pontos singulares não-isolados	42
4.2	Construção de Variedades Centrais	44
5	O Fenômeno Canard	49
5.1	A Integral de Sotomayor/Melnikov	49
5.2	Cálculo para obtenção de uma órbita periódica	55
5.3	Conclusão da Demonstração do Teorema Principal	57
A	Sobre a Bifurcação de Hopf	58

Capítulo 1

Introdução

Um sistema de equações diferenciais ordinárias com perturbação singular é um sistema da forma

$$X_{\epsilon,a} : \begin{cases} \epsilon \dot{x} = f(x, y, \epsilon, a) \\ \dot{y} = g(x, y, \epsilon, a), \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $a \in \mathbb{R}^k$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (*parâmetro singular*) e f, g são funções C^∞ .

Através de uma mudança singular na escala do tempo t , é possível reescrever o sistema acima na forma

$$X_{\epsilon,a} : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \epsilon, a) \\ \dot{y} = \epsilon g(x, y, \epsilon, a). \end{cases} \quad (1.2)$$

O conjunto de singularidades do sistema $X_{\epsilon,a}$ para $\epsilon = 0$, dado por

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} / f(x, y, 0, a) = 0\}$$

é denominado *variedade lenta* de $X_{0,a}$.

Neste trabalho, vamos fazer um estudo da *Equação de Van der Pol singular*

$$\epsilon \ddot{x} + (x^2 + x) \dot{x} + x - a = 0. \quad (1.3)$$

Nosso interesse é o estudo geométrico de um fenômeno conhecido como *Canard (pato)*. Vamos descrever brevemente este fenômeno (ver o próximo capítulo para maiores detalhes).

Após a mudança de coordenadas (dita *Transformação de Liénard*), esta equação de segunda ordem assume a forma de um sistema de equações de primeira ordem do tipo (1.2),

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} = \epsilon(a - x). \end{cases} \quad (1.4)$$

A variedade lenta é a curva $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\}$ indicada na figura 1.1.

Para valores de ϵ estritamente positivos, o sistema tem no máximo um ciclo limite. Quando $\epsilon \rightarrow 0$, este ciclo se colapsa sobre conjuntos invariantes de $X_{\epsilon,a}$ que contém trechos da curva lenta. Tais conjuntos possuem as formas abaixo.

Figura 1.1: Conjuntos Invariantes de $X_{\epsilon,a}$

A transição entre tais formas (quando $\epsilon \rightarrow 0$) ocorre rapidamente, para variações exponencialmente pequenas do parâmetro a . Isto é o que chamamos de *Fenômeno Canard*. O nome foi introduzido em [BCD].

O estudo deste fenômeno necessita da análise de pontos singulares onde a matriz jacobiana possui autovalores no eixo imaginário, ou seja, a parte real é nula. Esses pontos são chamados de *pontos singulares não-elementares*.

Uma ferramenta essencial nesta análise é o *rescaling*. Geometricamente, o rescaling pode ser visto como um *blowing-up* no espaço (x, y, ϵ, a) , isto é, uma transformação do

tipo

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{S}^{n+m+k} \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+m+k+1} \\ ((\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}, \bar{a}), u) &\longmapsto (u^\alpha \bar{x}, u^\beta \bar{y}, u^\gamma \bar{\epsilon}, u^\delta \bar{a})\end{aligned}$$

onde os “pesos” $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ são escolhidos convenientemente.

Espera-se que ao escrever (1.2) nas novas coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}, \bar{a}, u)$ seja possível efetuar a divisão por u^τ para algum $\tau \in \mathbb{N}$, e desingularizar o sistema, ou seja, eliminar as singularidades não-elementares.

O plano deste trabalho é o seguinte: no próximo capítulo apresentaremos a formulação precisa do *Fenômeno Canard* e enunciaremos o resultado principal. Adiante usaremos as técnicas de blowing-up para obtermos um campo de vetores que tenha somente singularidades elementares. No penúltimo capítulo introduzimos as *formas normais* deste novo campo próximo das singularidades elementares não-isoladas para estabelecer a existência de *folheações por variedades centrais*. Finalmente concluiremos o trabalho explicando o *Fenômeno Canard* como um fenômeno de intersecção de variedades centrais.

Este trabalho baseia-se no artigo [DR]. Por razões de simplicidade, somente abordaremos determinados tipos de canard, denominados *tipo I*.

Os retratos de fase foram produzidos usando o software P4 [P4].

Capítulo 2

O Fenômeno Canard para a equação de Van der Pol

2.1 Estudo das Singularidades e Teorema Principal

Para transformarmos a *Equação de Van der Pol* (1.3) no sistema bidimensional a dois parâmetros (1.4) fazemos a mudança de variáveis $Y = \epsilon \dot{x}$ seguida de outra dada por $y = Y + F(x)$ onde $F(x) = \int_0^x (\xi + \xi^2) d\xi = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. Com isso obtemos o sistema

$$P_{\epsilon,a} : \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\epsilon}(y - F(x)) \\ \dot{y} = a - x. \end{cases} \quad (2.1)$$

Fazendo um reescalonamento do tempo $t = \epsilon\tau$, obtemos o campo $X_{\epsilon,a} = \epsilon P_{\epsilon,a}$ dado por

$$X_{\epsilon,a} : \begin{cases} \dot{x} = y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} = \epsilon(a - x). \end{cases} \quad (2.2)$$

Analisemos o retrato de fase do campo $X_{\epsilon,a}$, variando os parâmetros.

Para $\epsilon = 0$, o campo $X_{\epsilon,a}$ é dado por

$$X_{0,a} : \begin{cases} \dot{x} = y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

A variedade lenta é a curva

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\}.$$

Fazendo a análise da curva L , vemos que os pontos $s = (0, 0)$ e $n = (-1, \frac{1}{6})$ são mínimo e máximo local, respectivamente. Todos os pontos de L , exceto s e n , são pontos singulares elementares, ou seja, a matriz jacobiana avaliada nesses pontos tem um autovalor não nulo. O retrato de fase de $X_{0,a}$ está representado na figura abaixo.

Figura 2.1: Retrato de fase do campo $X_{\epsilon,a}$ para $\epsilon = 0$

As linhas L_i , $i = 1, 2, 3$, são *linhas de singularidades hiperbólicas* atratoras (L_1 e L_3) e repulsora (L_2), respectivamente.

Para $\epsilon > 0$, o campo $X_{\epsilon,a}$ possui um único ponto singular $p_a = (a, F(a))$. A matriz Jacobiana de $X_{\epsilon,a}$ é

$$DX_{\epsilon,a} = \begin{pmatrix} -x - x^2 & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Denotemos por A a matriz jacobiana avaliada na singularidade p_a . Assim

$$A = \begin{pmatrix} -a - a^2 & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Usando o fato de que os autovalores de A são dados por

$$\lambda_{\epsilon,a} = \frac{\text{tr} A \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

onde $\Delta = (tr A)^2 - 4det A$, temos

$$\lambda_{\epsilon,a} = \frac{-(a + a^2) \pm \sqrt{(a + a^2)^2 - 4\epsilon}}{2}$$

Iremos analisar os casos em que $\Delta = 0$, $\Delta > 0$ e $\Delta < 0$. Este último é o caso que nos interessa, pois, fixando-se $\epsilon > 0$ e variando a , o sistema apresentará uma *Bifurcação de Hopf*.

Estamos interessados em estudar o comportamento do ciclo limite que surgirá nesta bifurcação quando fazemos $\epsilon \rightarrow 0$. O significado e estudo da Bifurcação de Hopf será apresentado adiante.

Considerando o espaço de parâmetros (a, ϵ) vemos que Δ se anula sobre a quádrlica $\epsilon = \frac{1}{4}(a + a^2)^2$, $\Delta < 0$ acima desta quádrlica e $\Delta > 0$ abaixo da quádrlica (veja figura abaixo). A região que nos interessa é a que está acima da quádrlica.

Figura 2.2: Gráfico da quádrlica $\Delta = 0$

Veja também que $tr A = 0$ quando, e somente quando, $a = 0$ ou $a = -1$. Ao estudarmos o caso em que $\Delta < 0$, dado $\epsilon > 0$, veremos que para valores de a variando numa vizinhança de -1 e de 0 , o sistema apresentará uma *Bifurcação de Hopf*.

Denotaremos por $\lambda_{\epsilon,a}^{(1)}$ o autovalor de A correspondente ao sinal “+” e por $\lambda_{\epsilon,a}^{(2)}$ o correspondente ao sinal “-”.

1o. caso: $\Delta > 0$

Lembrando que $\Delta = (a + a^2)^2 - 4\epsilon$, no espaço de parâmetros (a, ϵ) estamos considerando a região $(a + a^2)^2 > 4\epsilon$. Nesta região, $a \neq -1$ e $a \neq 0$. Os autovalores são reais

e distintos.

(i) $a < -1$

Os autovalores $\lambda_{\epsilon,a}^{(1)}$ e $\lambda_{\epsilon,a}^{(2)}$, para este caso, são negativos e $\lambda_{\epsilon,a}^{(2)} < \lambda_{\epsilon,a}^{(1)}$. Para um dado par (a, ϵ) nesta região, o retrato de fase é um *nó atrator*, como mostra a figura abaixo.

Figura 2.3: Foco atrator

(ii) $-1 < a < 0$

Os autovalores $\lambda_{\epsilon,a}^{(1)}$ e $\lambda_{\epsilon,a}^{(2)}$ são positivos e $\lambda_{\epsilon,a}^{(2)} < \lambda_{\epsilon,a}^{(1)}$. O retrato de fase é um *nó repulsor*, como mostra a figura abaixo.

Figura 2.4: Foco repulsor

(iii) $a > 0$

Os autovalores $\lambda_{\epsilon,a}^{(1)}$ e $\lambda_{\epsilon,a}^{(2)}$ são negativos e $\lambda_{\epsilon,a}^{(2)} < \lambda_{\epsilon,a}^{(1)}$. Nesta região, o retrato de fase é um *foco atrator*, representado abaixo.

Figura 2.5: Foco atrator

2o. caso: $\Delta = 0$

Neste caso os autovalores são reais e iguais, $\lambda_{\epsilon,a}^{(1)} = \lambda_{\epsilon,a}^{(2)} = \frac{-(a + a^2)}{2} = \lambda_a$.

(i) $a < -1$

O retrato de fase para esta configuração, mostrado abaixo, é um *nó impróprio atrator*, pois $\lambda_a < 0$.

Figura 2.6: Nó impróprio atrator

(ii) $-1 < a < 0$

Já nesta região temos um *nó impróprio repulsor*, visto que $\lambda_a > 0$.

Figura 2.7: Nó impróprio repulsor

(iii) $a > 0$

Neste caso, $\lambda_a < 0$ e temos um *nó impróprio atrator*.

Figura 2.8: Nó impróprio atrator

Finalmente analisaremos o caso de maior interesse:

3o. caso: $\Delta < 0$

Os autovalores são complexos e conjugados. Eles são dados por

$$\lambda_{\epsilon,a} = \frac{-(a + a^2) \pm i\sqrt{4\epsilon - (a + a^2)^2}}{2}$$

Abaixo temos um diagrama de bifurcação para a família $X_{\epsilon,a}$. Nesta região a singularidade p_a é um *foco atrator* para $a > 0$ e um *foco repulsor* para $-1 < a < 0$. Em uma

vizinhança de $a = 0$ temos uma troca de estabilidade. O mesmo ocorre para $a = -1$, como podemos observar no diagrama abaixo.

Figura 2.9: Diagrama de bifurcação para $X_{\epsilon,a}$

Pela figura vemos uma simetria em torno do ponto $a = -1/2$. De fato, o sistema (1.4) possui uma simetria dada por

$$\begin{cases} a = -1/2 - \alpha \\ x = -1/2 - x \\ y = F(-1/2) - y \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1/2 + \alpha \\ x = -1/2 + x \\ y = F(-1/2) + y \end{cases}$$

As linhas $H = \{a = 0, \epsilon > 0\}$ e $H' = \{a = -1, \epsilon > 0\}$ mostradas na figura 2.9 são chamadas *linhas de bifurcação*. Na seção 2.2 provaremos que o sistema apresenta uma bifurcação de Hopf genérica nestas linhas. Pela simetria do problema, basta estudar o que ocorre em $a = 0$.

Deste resultado segue que, para $a \in (-1, 0)$ e $\epsilon > 0$, $X_{\epsilon,a}$ possui um único ciclo limite $\Gamma_{\epsilon,a}$ atrator. Fora deste intervalo não há ciclos limite.

A questão principal do trabalho é a seguinte:

O que acontece com o ciclo limite $\Gamma_{\epsilon,a}$ quando $\epsilon \rightarrow 0$?

Mais precisamente, estamos interessados em saber o que acontece com o ciclo limite ao longo de curvas contínuas

$$\epsilon \mapsto a = c(\epsilon), \quad c(\epsilon) \in [-1, 0]$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$. Como foi dito na introdução, é possível provar que o ciclo limite vai se colapsar em uma das curvas mostradas na sequência de figuras abaixo. Tais curvas são denominadas *conjuntos periódicos limite* (lps), também chamadas *órbitas singulares*.

Mais precisamente, conjuntos periódicos limite, são subconjuntos compactos invariantes pelo fluxo de $X_{0,a}$ que são aproximados (na *métrica de Hausdorff*) por *famílias a um parâmetro* de ciclos limite $\Gamma_{\epsilon,c(\epsilon)}$, associados às *subfamílias a um parâmetro* $X_{\epsilon,c(\epsilon)}$, onde c é uma curva como acima.

A *distância de Hausdorff* acima mencionada $d(K_1, K_2)$ entre dois conjuntos compactos $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ é definida por

$$d(K_1, K_2) = \max\{\max\{d(x, K_2), x \in K_1\}, \max\{d(K_1, x), x \in K_2\}\}.$$

Como estamos considerando $a \geq -1/2$, é suficiente fazer a análise dos conjuntos periódicos limite mostrados nas figuras (1) - (5), tomando curvas $c(\epsilon)$ tais que $c(0) \in [-\frac{1}{2}, 0]$. Os outros são simetricamente equivalentes.

Figura 2.10: Conjuntos periódicos limite

Notações:

O conjunto limite periódico (lps) dado em (1) é dito “pequeno” e é denotado por Γ_0 , enquanto o dado em (5) é dito “grande” e é denotado por Γ_B .

Já os casos (2), (3) e (4), são chamados “*canards*” (patos) e usamos a seguinte terminologia (respectivamente): lps do tipo I, denotado por Γ^I , lps do tipo II, denotado

por Γ^{II} e lps do tipo III, denotado por Γ^{III} . O nome “canard” é devido ao formato do caso (4).

Introduzimos ainda a terminologia Γ_y^I e Γ_y^{III} para representar as situações da figura abaixo.

Figura 2.11: lps do tipo I e do tipo III

Observe que $\Gamma_0^I = \Gamma_0$, $\Gamma_0^{III} = \Gamma_B$ e $\Gamma_{1/6}^I = \Gamma_{1/6}^{III} = \Gamma^{II}$. Para Γ_y^I e Γ_y^{III} somente falaremos de conjuntos limite periódicos do tipo canard quando $y > 0$.

A orientação do conjunto limite periódico é a induzida pelos ciclos limite vizinhos e é naturalmente compatível com o fluxo de $X_{0,a}$.

Em [DR] prova-se o seguinte resultado:

2.1 Teorema. *Existe uma curva $C_0 = \{a = c_0(\epsilon)\}$ com $c_0(\epsilon) = \sqrt{\epsilon} \bar{a}(\sqrt{\epsilon})$ e $\bar{a} \in C^\infty$ com $\bar{a}(0) = 0$ e $\bar{a}'(0) = -1$ tal que para uma curva contínua $C = \{a = c(\epsilon)\}$ com $c(\epsilon) \leq 0$ e $c(0) \in [-1/2, 0]$, temos (tomando $y \in]0, 1/6[$):*

- (1) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_{\epsilon, c(\epsilon)} = \Gamma_0 \Leftrightarrow$
 $\forall \epsilon > 0 : c(\epsilon) > c_0(\epsilon) \text{ e } \overline{\lim}(-\epsilon \log(c(\epsilon) - c_0(\epsilon))) \leq 0$
- (2) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_{\epsilon, c(\epsilon)} = \Gamma_y^I \Leftrightarrow$
 $\forall \epsilon > 0 : c(\epsilon) \geq c_0(\epsilon) \text{ e } \lim(-\epsilon \log(c(\epsilon) - c_0(\epsilon))) = k(y)$

$$(3) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_{\epsilon, c(\epsilon)} = \Gamma^{II} \Leftrightarrow$$

$$\underline{\lim}(-\epsilon \log |c(\epsilon) - c_0(\epsilon)|) \geq k(1/6)$$

$$(4) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_{\epsilon, c(\epsilon)} = \Gamma_y^{III} \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 : c(\epsilon) \leq c_0(\epsilon) \text{ e } \lim(-\epsilon \log(c_0(\epsilon) - c(\epsilon))) = k(y)$$

$$(5) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_{\epsilon, c(\epsilon)} = \Gamma_B \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 : c(\epsilon) < c_0(\epsilon) \text{ e } \overline{\lim}(-\epsilon \log(c_0(\epsilon) - c(\epsilon))) \leq 0$$

onde $k(y)$ é dada por

$$k(y) = \int_0^{x(y)} x(1+x)^2 dx$$

sendo $x(y)$ a maior solução negativa de $\{y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\}$ e $y \in [0, \frac{1}{6}]$.

Observe que k é C^1 , $k'(y) = 1 + x(y)$, k é analítica em $]0, \frac{1}{6}[$, $k(0) = 0$ e $k(\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$.

Este teorema descreve a forma precisa do canard em função da assintótica de $c(\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

A curva C_0 tem um papel bastante importante. Veja que podemos expandir a função $\bar{a}$ em *série de Taylor de ordem 2* em torno de 0:

$$\bar{a}(x+h) = \bar{a}(x) + \bar{a}'(x)h + R(h)$$

$$\text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

Para $x = 0$ temos

$$\bar{a}(h) = \bar{a}(0) + \bar{a}'(0)h + R(h)$$

$$\text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

Daí $\bar{a}(h) \approx -h$. Assim $c_0(\epsilon) \approx -\epsilon$. As curvas $c(\epsilon)$ descritas nos itens (2), (3) e (4) tem contato flat com $c_0(\epsilon)$, conforme ilustrado na figura 2.12. Lembremos que duas curvas f e g têm contato flat, se $h(\epsilon) := f(\epsilon) - g(\epsilon)$ tem todas as derivadas nulas para $\epsilon = 0$. Para $\epsilon > 0$ fixado, a transição entre os canards grande e pequeno ocorre em um intervalo $I_\epsilon = [c(\epsilon) - a_\epsilon, c(\epsilon) + b_\epsilon] \ni a$, cujo comprimento $b_\epsilon + a_\epsilon$ vai a zero exponencialmente rápido para $\epsilon \rightarrow 0$. O ciclo limite vai se colapsar em um dos casos de (1) a (5), dependendo de qual curva $c(\epsilon)$ estivermos considerando.

Figura 2.12: A curva C_0

A prova do teorema (2.1) é muito complexa. Neste trabalho, nosso objetivo é provar a seguinte simplificação do teorema anterior:

2.2 Teorema. [Principal] *Para todo $h \in (0, \frac{1}{6})$, existe uma curva $a = c_h(\epsilon) = \epsilon^{1/2} c(\epsilon^{1/2})$ com $c \in C^\infty$, $c(0) = 0$, tal que $\Gamma_{\epsilon, c_h(\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_h$, onde Γ_h está representada abaixo.*

Figura 2.13: Representação de Γ_h para $0 < h < 1/6$

2.2 Bifurcação de Hopf na Família de Van der Pol

Vamos agora, usando os resultados do apêndice A, verificar que o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} = \epsilon(a - x) \end{cases} \quad (2.4)$$

apresenta um bifurcação de Hopf para $a = 0$ e $\epsilon > 0$.

O sistema acima tem uma única singularidade $p_a = (a, \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3})$. Como já vimos no início do capítulo, a matriz jacobiana do sistema, avaliada em p_a , é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a - a^2 & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

que tem autovalores

$$\lambda_{1,2}(a) = \frac{-(a + a^2) \pm \sqrt{(a + a^2)^2 - 4\epsilon}}{2}$$

Utilizando a notação do apêndice A, veja que $\gamma(a) = \frac{-(a + a^2)}{2}$ e que $\omega(a) = \frac{\sqrt{4\epsilon - (a^2 + a)^2}}{2}$, uma vez que estamos analisando o caso em que $(a^2 + a)^2 - 4\epsilon < 0$. Portanto $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 = \sqrt{\epsilon} > 0$. Então os autovalores são dados pela expressão

$$\lambda_0 = \lambda(0) = \pm i\sqrt{\epsilon}.$$

Ocorrem duas situações:

- (i) p_a é um foco atrator se $a > 0$ e está próximo de 0;
- (ii) p_a é um foco repulsor se $a < 0$ e está próximo de 0.

Verifica-se facilmente a condição (2) do teorema A.11, uma vez que

$$\gamma'(a) = -\frac{1}{2}(2a + 1)$$

e portanto

$$\gamma'(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Para verificar a condição (1) do teorema A.11, devemos calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov avaliado em 0. Fixando-se $a = 0$, temos $p_a = p_0 = (0, 0)$, que já é a origem, não precisando assim fazermos a translação. A matriz jacobiana agora é dada por

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, o sistema (2.4), para $a = 0$, se escreve na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A_0 \mathbf{x} + F(\mathbf{x}, 0)$$

onde $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Para simplificar as notações vamos denotar o par ordenado (x, y) por (x_1, x_2) . Deste modo

$$F(\mathbf{x}, 0) = \left(-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{3}, 0\right) = (F_1(\mathbf{x}, 0), F_2(\mathbf{x}, 0))$$

onde, expandindo $F(\mathbf{x}, 0)$, temos

$$F(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{2}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6}C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$$

com $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (B_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}), B_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}))$ e $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (C_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}), C_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}))$.

Veja que

$$B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B_i(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(z, 0)}{\partial z_j \partial z_k} \Big|_{z=0} x_j y_k$$

com $z = (z_1, z_2)$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

Portanto $B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1 y_1$ e $B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, já que $F_2(\mathbf{x}) = 0$.

Agora

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(z, 0)}{\partial z_j \partial z_k \partial z_l} \Big|_{z=0} x_j y_k v_l \quad i = 1, 2$$

e $z = (z_1, z_2)$.

Portanto $C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}) = -2x_1 y_1 v_1$ e $C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}) = 0$.

Temos então

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (-x_1 y_1, 0) \quad C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}) = (-2x_1 y_1 v_1, 0)$$

Os vetores $q = (1, i\sqrt{\epsilon})$ e $\bar{q} = (1, -i\sqrt{\epsilon})$, são autovetores associados aos autovalores da matriz A_0 . Calculando o vetor $\overline{p(\alpha)}$, cuja expressão está dada no apêndice A, temos $\bar{p} = (i\sqrt{\epsilon}, 1)$. Multiplicando $\bar{p}$ por $\frac{1}{2i\sqrt{\epsilon}}$, obtemos o vetor $p = \frac{1}{2i\sqrt{\epsilon}}\bar{p}$.

Daí

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2i\sqrt{\epsilon}}\right), (1, i\sqrt{\epsilon}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora nos resta calcularmos os termos g_{20} , g_{11} e g_{21} . Eles são dados por

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle = \langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2i\sqrt{\epsilon}}\right), (-1, 0) \rangle = -\frac{1}{2} \\ g_{11} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle = \langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2i\sqrt{\epsilon}}\right), (-1, 0) \rangle = -\frac{1}{2} \\ g_{21} &= \langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2i\sqrt{\epsilon}}\right), (-2, 0) \rangle = -1 \end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} l_1(0) &= \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}) \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \text{Re}\left(\frac{i}{4} - \sqrt{\epsilon}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\epsilon} < 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

garantindo assim que o sistema apresenta uma bifurcação de Hopf para $a = 0$. O caso em que $a = -1$ é simetricamente equivalente.

Capítulo 3

Blowing-up

A técnica de blowing-up envolve uma mudança de coordenadas que expande (ou “explode”) pontos singulares não-elementares, transformando-os em singularidades mais simples.

Em nosso caso, a família $X_{\epsilon,a}$ pode ser vista como um campo de vetores em $\mathbb{R}^4$ dado por

$$X_1 = \left(y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \epsilon(a - x), 0, 0 \right), \quad (3.1)$$

A matriz jacobiana DX_1 avaliada nos pontos $s_0 = (0, 0, 0, 0)$ e $n_0 = (-1, \frac{1}{6}, 0, 0)$ possui todos os autovalores nulos.

Para obtermos a condição de hiperbolicidade, precisamos fazer então a *explosão* (*blow-up*) destes pontos. A partir desta explosão obtemos um novo campo $\bar{X}$ desingularizado.

3.1 Blowing-up em $s_0 = (0, 0, 0, 0)$

Seja $\mathbb{S}_+^3 = \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}, \bar{a}) \in \mathbb{R}^4 / \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\epsilon}^2 + \bar{a}^2 = 1, \epsilon \geq 0\}$ a semi-esfera, e considere a mudança de variáveis dada pela transformação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}^3 \times [0, U[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \Lambda \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}, \bar{a}, u) &\longmapsto (u^\alpha \bar{x}, u^\beta \bar{y}, u^\gamma \bar{\epsilon}, u^\delta \bar{a}) \end{aligned}$$

onde $\Lambda = [0, +\infty[\times [-\frac{1}{2}, +\infty[$ e U é escolhido de modo que $\phi_1(T_1)$ não contenha pontos (x, y, ϵ, a) com $(x, y) \in L_1$, onde $T_1 = \mathbb{S}_+^3 \times [0, U[$.

Aplicando a transformação no sistema (3.1) podemos estimar os valores $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$ e $\delta = 1$. Assim:

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{S}^3 \times [0, U[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \Lambda \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}, \bar{a}, u) &\longmapsto (u\bar{x}, u^2\bar{y}, u^2\bar{\epsilon}, u\bar{a}).\end{aligned}$$

Vamos olhar a transformação nas cartas $\{\bar{\epsilon} = 1\}$, $\{\bar{a} = \pm 1\}$, $\{\bar{x} = \pm 1\}$ e $\{\bar{y} = 1\}$. Na primeira carta $\{\bar{\epsilon} = 1\}$, a transformação é dada por

$$\begin{aligned}\phi_1 : T_1|_{\bar{\epsilon}=1} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \Lambda \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u) &\longmapsto (u\bar{x}, u^2\bar{y}, u^2, u\bar{a}).\end{aligned}$$

Seja $q \in \mathbb{R}^2 \times \Lambda$ e considere o vetor $X_1(q)$. Tome agora um ponto $p \in T_1|_{\bar{\epsilon}=1}$ tal que $\phi_1(p) = q$. Seja $\hat{X}_1(p)$ o vetor dado por

$$\hat{X}_1(p) = (D\phi_1^{-1}(q))(X_1(q)) = (D\phi_1(p))^{-1}(X_1(\phi_1(p))).$$

Deste modo podemos calcular o campo de vetores em $T_1|_{\bar{\epsilon}=1}$. Para isto veja que a matriz jacobiana de ϕ_1 é:

$$D\phi_1 = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \bar{x} \\ 0 & u^2 & 0 & 2u\bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 2u \\ 0 & 0 & u & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Agora achamos sua inversa:

$$(D\phi_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/u & 0 & -\bar{x}/2u^2 & 0 \\ 0 & 1/u^2 & -\bar{y}/u^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{a}/2u^2 & 1/u \\ 0 & 0 & 1/2u & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$(D\phi_1)^{-1}(X_1) = \begin{pmatrix} 1/u & 0 & -\bar{x}/2u^2 & 0 \\ 0 & 1/u^2 & -\bar{y}/u^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{a}/2u^2 & 1/u \\ 0 & 0 & 1/2u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2\bar{y} - u^2\bar{x}^2/2 - u^3\bar{x}^3/3 \\ u^2(u\bar{a} - u\bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim obtemos $\hat{X}_1 = u\left(\bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2} - u\frac{\bar{x}^3}{3}, \bar{a} - \bar{x}, 0, 0\right)$. Efetuando a divisão por u obtemos o campo desingularizado

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{u}\hat{X}_1 = \left(\bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2} - u\frac{\bar{x}^3}{3}, \bar{a} - \bar{x}, 0, 0\right).$$

Para analisarmos o retrato de fase do campo $\bar{X}_1$ sobre a semi-esfera, devemos fazer $u = 0$. Daí vemos que $\phi_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, 0) = (0, 0, 0, 0)$ e $\bar{X}_1 = \left(\bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2}, \bar{a} - \bar{x}, 0, 0\right)$.

Os retratos de fases compatificados, foram obtidos com o auxílio do *programa P4*.

Figura 3.1: Retratos de fase de $\bar{X}_1$ para a carta $\bar{e} = 1$

Para $\bar{a} = 0$, $\bar{X}_1$ é simétrico com respeito ao eixo $\bar{y}$. Assim, a singularidade $(0, 0)$ é um centro. A parábola $\{\bar{y} = \bar{x}^2/2 - 1\}$ é uma curva invariante, e como vimos na figura acima, ela é uma conexão no infinito entre os pontos s_2 e s_3 , que são pontos de sela semi-hiperbólicos. Os outros pontos s_1 e s_4 são pontos hiperbólicos atrator e repulsor respectivamente. Quando $\bar{a} \neq 0$ não existe órbitas periódicas. Para verificar isto, basta escrever $\bar{X}_1$ como $\dot{\bar{u}} = y$ e $\dot{y} = -u - (a + u)y$ e ver que esta família tem uma propriedade

rotacional com respeito ao parâmetro a . O campo tem um único ponto singular $(\bar{a}, \bar{a}^2/2)$ o qual é atrator para $\bar{a} > 0$ e repulsor para $\bar{a} < 0$. Veja a figura acima.

Com cálculos análogos aos que fizemos para a carta $\{\bar{\epsilon} = 1\}$ obtemos os campos desingularizados correspondentes às outras cartas $\{\bar{a} = \pm 1\}$. Eles estão descritos abaixo.

- $\bar{a} = 1$: $\bar{X}_1 = \left(\bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2}, \bar{\epsilon}(1 - \bar{x}), 0, 0 \right).$

Figura 3.2: Retratos de fase de $\bar{X}_1$ para a carta $\bar{a} = 1$

- $\bar{a} = -1$: $\bar{X}_1 = \left(\bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2}, \bar{\epsilon}(-1 - \bar{x}), 0, 0 \right).$

Figura 3.3: Retratos de fase de $\bar{X}_1$ para a carta $\bar{a} = -1$

Para $\bar{\epsilon} = 0$ temos uma curva inteira de pontos singulares, tanto para $\bar{a} = 1$ quanto para $\bar{a} = -1$, que é a parábola $P = \{\bar{y} = \frac{\bar{x}^2}{2}\}$. Veja que fora o ponto $s_1 = (0, 0)$, todos os pontos de P são elementares, ou seja, a matriz jacobiana avaliada nesses pontos, possui um autovalor com parte real não-nula. Trata-se do ponto s_1 numa nova desingularização.

Para $\bar{\epsilon} > 0$, $\bar{X}_1$ tem um único ponto singular $(1, 1/2)$, que é um nó atrator, para $\bar{a} = 1$ e $(-1, 1/2)$, que é um nó repulsor, para $\bar{a} = -1$. O retrato de fase para $\bar{a} = 1$ é uma situação limite do retrato correspondente a $\bar{a} < 0$ na carta $\{\bar{\epsilon} = 1\}$, e o retrato de fase para $\bar{a} = -1$ é uma situação limite do outro retrato correspondente a $\bar{a} > 0$ na carta $\{\bar{\epsilon} = 1\}$.

As informações do campo $\bar{X}_1$ para $u \neq 0$ (fora da explosão) serão obtidas analisando as outras cartas $\{\bar{x} = \pm 1\}$ e $\{\bar{y} = 1\}$, ou seja, vamos analisar o campo restrito $\bar{X}_1|_{F_0}$ onde $F_0 = \{\bar{a} = \bar{\epsilon} = 0\}$.

Para $\{\bar{x} = \pm 1\}$, cálculos análogos nos levam aos seguintes campos desingularizados:

- $\bar{x} = 1$:

$$\bar{X}_1 : \begin{cases} \dot{\bar{y}} = -2\bar{y}^2 + \bar{y} + 2\bar{y}u/3 + \bar{\epsilon}(\bar{a} - 1) \\ \dot{\bar{\epsilon}} = -2\bar{\epsilon}\bar{y} + \bar{\epsilon} + 2\bar{\epsilon}u/3 \\ \dot{\bar{a}} = -\bar{a}\bar{y} + \bar{a}/2 + \bar{a}u/3 \\ \dot{u} = u\bar{y} - u/2 - u^2/3. \end{cases} \quad (3.2)$$

- $\bar{x} = -1$:

$$\bar{X}_1 : \begin{cases} \dot{\bar{y}} = 2\bar{y}^2 - \bar{y} + 2\bar{y}u/3 + \bar{\epsilon}(\bar{a} + 1) \\ \dot{\bar{\epsilon}} = 2\bar{\epsilon}\bar{y} - \bar{\epsilon} + 2\bar{\epsilon}u/3 \\ \dot{\bar{a}} = \bar{a}\bar{y} - \bar{a}/2 + \bar{a}u/3 \\ \dot{u} = -u\bar{y} + u/2 - u^2/3. \end{cases} \quad (3.3)$$

Agora fazemos $\bar{\epsilon} = \bar{a} = 0$ e obtemos:

- $\bar{x} = 1$:

$$\bar{X}_1 : \begin{cases} \dot{u} = -u\bar{y} + u/2 - u^2/3 \\ \dot{\bar{y}} = 2\bar{y}^2 - \bar{y} + 2\bar{y}u/3. \end{cases} \quad (3.4)$$

- $\bar{x} = -1$:

$$\overline{X}_1 : \begin{cases} \dot{u} = -u\overline{y} + u/2 - u^2/3 \\ \dot{\overline{y}} = 2\overline{y}^2 - \overline{y} + 2\overline{y}u/3. \end{cases} \quad (3.5)$$

Abaixo temos o retrato de fase correspondentes à estas cartas.

Figura 3.4: Retrato de fase de $\overline{X}_1$ nas cartas $\overline{x} = \pm 1$

Um autovalor de $\overline{X}_1$ é igual a $1/2$ em s_1 e $-1/2$ em s_4 . Para s_2 e s_3 os autovalores são nulos (o que está de acordo com o fato de que s_2 e s_3 são pontos finais das linhas de pontos singulares $\overline{L}_i = \phi_1^{-1}(L_i)$, $i = 2, 3$). Estas linhas agora estão desingularizadas, pois s_2 e s_3 são pontos normalmente hiperbólicos em F_0 .

Finalmente para a carta $\{\overline{y} = 1\}$, tem-se os campos

- $\overline{y} = 1$:

$$\overline{X}_1 : \begin{cases} \dot{\overline{x}} = 1 - \overline{x}^2/2 - u\overline{x}^3/3 - \overline{x}\overline{\epsilon}(\overline{a} - \overline{x})/2 \\ \dot{\overline{\epsilon}} = -\overline{\epsilon}^2(\overline{a} - \overline{x}) \\ \dot{\overline{a}} = -\overline{a}\overline{\epsilon}(\overline{a} - \overline{x})/2 \\ \dot{u} = u\overline{\epsilon}(\overline{a} - \overline{x})/2 \end{cases} \quad (3.6)$$

- $\overline{y} = -1$:

$$\overline{X}_1 : \begin{cases} \dot{\overline{x}} = -1 - \overline{x}^2/2 - u\overline{x}^3/3 + \overline{x}\overline{\epsilon}(\overline{a} - \overline{x})/2 \\ \dot{\overline{\epsilon}} = \overline{\epsilon}^2(\overline{a} - \overline{x}) \\ \dot{\overline{a}} = \overline{a}\overline{\epsilon}(\overline{a} - \overline{x})/2 \\ \dot{u} = -u\overline{\epsilon}(\overline{a} - \overline{x})/2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Das equações $ua = \bar{a}$ e $u^2\bar{\epsilon} = \epsilon$, temos as seguintes relações:

$$\frac{\dot{\bar{a}}}{\bar{a}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\epsilon}} = -\frac{\dot{u}}{u}. \quad (3.8)$$

Usando a relação (3.8) acima e substituindo nos sistemas (3.6) e (3.7), obtemos:

- $\bar{y} = 1$:

$$\bar{X}_1 : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = 1 - \bar{x}^2/2 - u\bar{x}^3/3 - \bar{x}\bar{\epsilon}(\bar{a} - \bar{x})/2 \\ \dot{u} = u\bar{\epsilon}(\bar{a} - \bar{x})/2. \end{cases} \quad (3.9)$$

- $\bar{y} = -1$:

$$\bar{X}_1 : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = -1 - \bar{x}^2/2 - u\bar{x}^3/3 + \bar{x}\bar{\epsilon}(\bar{a} - \bar{x})/2 \\ \dot{u} = -u\bar{\epsilon}(\bar{a} - \bar{x})/2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Vamos introduzir novos parâmetros A , E e a variável v de modo que

$$\begin{cases} \bar{\epsilon} = v^2 \\ \bar{a} = Av. \end{cases} \quad (3.11)$$

para $A \in [-A_0, A_0]$ onde A_0 é suficientemente grande, ou

$$\begin{cases} \bar{\epsilon} = Ev^2 \\ \bar{a} = \pm v. \end{cases} \quad (3.12)$$

para $E \in [0, E_0[$ com E_0 pequeno.

Deste modo obtemos dois tipos de cartas parametrizadas por A e E onde o campo $\bar{X}_1$, para $\bar{y} = 1$, fica:

- De (3.11):

$$\bar{X}_1 : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = 1 - \bar{x}^2/2 - u\bar{x}^3/3 - \bar{x}v^2(Av - \bar{x})/2 \\ \dot{u} = v^2(Av - \bar{x})u/2 \\ \dot{v} = -v^2(Av - \bar{x})v/2. \end{cases} \quad (3.13)$$

- E de (3.12):

$$\overline{X}_1 : \begin{cases} \dot{\overline{x}} = 1 - \overline{x}^2/2 - u\overline{x}^3/3 - Ev^2(\pm v - \overline{x})\overline{x}/2 \\ \dot{u} = Ev^2(\pm v - \overline{x})u/2 \\ \dot{v} = -Ev^2(\pm v - \overline{x})v. \end{cases} \quad (3.14)$$

As coordenadas de s_2 e s_3 são:

$$\begin{cases} s_2 = (\overline{x} = -\sqrt{2}, u = 0, v = 0) \\ s_3 = (\overline{x} = \sqrt{2}, u = 0, v = 0). \end{cases} \quad (3.15)$$

O retrato de fase de $\overline{X}_1$ nestas cartas e para $\{uv = 0\}$ está representado na figura abaixo.

Assim podemos esboçar o retrato de fase de $\overline{X}_1$ nas cartas estudadas acima:

Figura 3.5: Retrato de fase de $\overline{X}_1$ na carta $\overline{y} = 1$

3.2 Blowing-up em $n_0 = (-1, 1/6, 0, 0)$

Considere a mudança de variáveis dada por

$$x = -1 + \underline{x} \quad e \quad y = \frac{1}{6} + \underline{y}$$

Com isto estamos trasladando a origem do sistema para o ponto $(-1, 1/6)$.

Substituindo esses valores no campo X dado por (3.1) obtemos o seguinte campo:

$$X = \left(\underline{y} + \frac{1}{2}\underline{x}^2 - \frac{1}{3}\underline{x}^3, \epsilon(1 + a - \underline{x}), 0, 0 \right),$$

onde $X = X(\underline{x}, \underline{y}, \epsilon, a)$.

Para facilitar a notação vamos voltar às variáveis originais x e y . Assim o campo acima fica escrito como:

$$X = \left(y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3, \epsilon(1 + a - x), 0, 0 \right), \quad (3.16)$$

com $X = X(x, y, \epsilon, a)$.

Seja, como antes, $\mathbb{S}_+^3 = \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}, \bar{a}) \in \mathbb{R}^4 / \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\epsilon}^2 + \bar{a}^2 = 1, \epsilon \geq 0\}$ a semi-esfera, e considere a mudança de variáveis dada pela transformação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}^3 \times [0, U' [&\longrightarrow M_0 \setminus \{s_0\} \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}, \bar{a}, u) &\longmapsto (u^\alpha \bar{x}, u^\beta \bar{y}, u^\gamma \bar{\epsilon}, u^\delta \bar{a}) \end{aligned}$$

onde os números U e U' são suficientemente pequenos de modo que $\overline{\phi_2(T_2)}$ não tenha intersecção com $\overline{\phi_1(T_1)}$, sendo $T_2 = \mathbb{S}_+^3 \times [0, U' [$ e $M_0 = \mathbb{R}^2 \times \Lambda$.

Aplicando a transformação no sistema (3.16) podemos determinar os valores $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = 6$ e $\delta = 3$. Assim:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}^3 \times [0, U' [&\longrightarrow M_0 \setminus \{s_0\} \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}, \bar{a}, u) &\longmapsto (u^2 \bar{x}, u^4 \bar{y}, u^6 \bar{\epsilon}, u^3 \bar{a}). \end{aligned}$$

De maneira análoga à que fizemos anteriormente vamos olhar a transformação nas cartas $\{\bar{\epsilon} = 1\}$, $\{\bar{a} = \pm 1\}$, $\{\bar{x} = \pm 1\}$ e $\{\bar{y} = -1\}$.

Na primeira carta $\{\bar{\epsilon} = 1\}$, a transformação é o difeomorfismo

$$\begin{aligned}\phi_2 : T_2|_{\bar{\epsilon}=1} &\longrightarrow M_0 \setminus \{s_0\} \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u) &\longmapsto (u^2\bar{x}, u^4\bar{y}, u^6, u^3\bar{a}).\end{aligned}$$

Do mesmo modo seja $q \in M_0 \setminus \{s_0\}$, $X_2(q)$ um vetor de $M_0 \setminus \{s_0\}$ e um ponto $p \in T_2|_{\bar{\epsilon}=1}$ tal que $\phi_2(p) = q$. Seja $\hat{X}_2(p)$ o vetor dado por

$$\hat{X}_2(p) = (D\phi_2^{-1}(q))(X_2(q)) = (D\phi_2(p))^{-1}(X_2(\phi_2(p))).$$

Assim podemos calcular o campo de vetores em $T_2|_{\bar{\epsilon}=1}$. A matriz jacobiana de ϕ_2 é:

$$D\phi_2 = \begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 & 2u\bar{x} \\ 0 & u^4 & 0 & 4u^3\bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 6u^5 \\ 0 & 0 & u^3 & 3u^2\bar{a} \end{pmatrix}$$

Agora achamos sua inversa:

$$(D\phi_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/u^2 & 0 & -\bar{x}/3u^6 & 0 \\ 0 & 1/u^4 & -2\bar{y}/3u^6 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{a}/2u^6 & 1/u^3 \\ 0 & 0 & 1/6u^5 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$(D\phi_2)^{-1}(X_2) = \begin{pmatrix} 1/u^2 & 0 & -\bar{x}/3u^6 & 0 \\ 0 & 1/u^4 & -2\bar{y}/3u^6 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{a}/2u^6 & 1/u^3 \\ 0 & 0 & 1/6u^5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^4\bar{y} - u^4\bar{x}^2/2 - u^6\bar{x}^3/3 \\ u^6(u^3\bar{a} - u^2\bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E assim obtemos $\hat{X}_2 = u^2\left(\bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2} - u^2\frac{\bar{x}^3}{3}, 1 + u^3\bar{a} - u^2\bar{x}, 0, 0\right)$. Efetuando a divisão por u^2 obtemos o campo desingularizado

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{u^2}\hat{X}_2 = \left(\bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2} - u^2\frac{\bar{x}^3}{3}, 1 + u^3\bar{a} - u^2\bar{x}, 0, 0\right).$$

Figura 3.6: Retrato de fase de $\overline{X}_2$ na carta $\bar{e} = 1$

Fazemos $u = 0$ para analisarmos o retrato de fase do campo $\overline{X}_2$ sobre a semi-esfera, e vemos que $\overline{X}_2 = \left(\bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2}, 1, 0, 0 \right)$.

Abaixo tem-se o retrato de fase correspondente à carta $\{\bar{e} = 1\}$.

Nesta carta, o campo $\overline{X}_2$ não possui singularidades.

Procedendo-se de modo análogo, obtemos os campos desingularizados correspondentes às outras cartas $\{\bar{a} = \pm 1\}$, descritos abaixo.

- $\bar{a} = 1$: $\overline{X}_2 = \left(\bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2}, \bar{e}, 0, 0 \right)$.

Figura 3.7: Retratos de fase de $\overline{X}_2$ na carta $\bar{a} = 1$

- $\bar{a} = -1$: $\overline{X}_2 = \left(\bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2}, \bar{e}, 0, 0 \right)$.

O retrato de fase é o mesmo para a carta $\{\bar{a} = 1\}$.

Para $\bar{\epsilon} = 0$ temos uma curva de pontos singulares, tanto para $\bar{a} = 1$ quanto para $\bar{a} = -1$, que é a parábola $P = \{\bar{y} = -\frac{\bar{x}^2}{2}\}$. Fora o ponto $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ da parábola, todas as outras singularidades são elementares. Trata-se do ponto $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ numa nova desingularização. É válido observar que o ponto $(0, 0)$ é o ponto correspondente a $(-1, 1/6)$ através da mudança de coordenadas que fizemos.

Quando $\bar{\epsilon} > 0$, $\bar{X}_2$ também não possui singularidades.

As informações do campo $\bar{X}_2$ para $u \neq 0$ (fora da explosão) serão obtidas analisando as outras cartas $\{\bar{x} = \pm 1\}$ e $\{\bar{y} = -1\}$, ou seja, vamos analisar o campo restrito $\bar{X}_2|_{F_0}$ onde $F_0 = \{\bar{a} = \bar{\epsilon} = 0\}$.

Para $\{\bar{x} = \pm 1\}$, temos os seguintes campos desingularizados:

- $\bar{x} = 1$:

$$\bar{X}_2 : \begin{cases} \dot{u} = u\bar{y}/2 + u/4 - u^3/6 \\ \dot{\bar{y}} = \bar{\epsilon}(1 + u^3\bar{a} - u^2) - 2\bar{y}^2 - \bar{y} + 2u^2\bar{y}/3 \\ \dot{\bar{\epsilon}} = -3\bar{y}\bar{\epsilon} - 3\bar{\epsilon}/2 + u^2\bar{\epsilon} \\ \dot{\bar{a}} = -3\bar{y}\bar{a}/2 - 3\bar{a}/4 + u^2\bar{a}/2. \end{cases} \quad (3.17)$$

- $\bar{x} = -1$:

$$\bar{X}_2 : \begin{cases} \dot{u} = -u\bar{y}/2 - u/4 - u^3/6 \\ \dot{\bar{y}} = \bar{\epsilon}(1 + u^3\bar{a} + u^2) + 2\bar{y}^2 + \bar{y} + 2u^2\bar{y}/3 \\ \dot{\bar{\epsilon}} = 3\bar{y}\bar{\epsilon} + 3\bar{\epsilon}/2 + u^2\bar{\epsilon} \\ \dot{\bar{a}} = 3\bar{y}\bar{a}/2 + 3\bar{a}/4 + u^2\bar{a}/2. \end{cases} \quad (3.18)$$

E, fazendo $\bar{\epsilon} = \bar{a} = 0$, obtemos:

- $\bar{x} = 1$:

$$\bar{X}_2 : \begin{cases} \dot{u} = u\bar{y}/2 + u/4 - u^3/6 \\ \dot{\bar{y}} = -2\bar{y}^2 - \bar{y} + 2u^2\bar{y}/3. \end{cases} \quad (3.19)$$

- $\bar{x} = -1$:

Figura 3.8: Retrato de fase de $\overline{X}_2$ nas cartas $\overline{x} = \pm 1$

$$\overline{X}_2 : \begin{cases} \dot{u} = -u\overline{y}/2 - u/4 - u^3/6 \\ \dot{\overline{y}} = 2\overline{y}^2 + \overline{y} + 2u^2\overline{y}/3. \end{cases} \quad (3.20)$$

Abaixo temos o retrato de fase correspondentes à estas cartas.

Um autovalor de $\overline{X}_2$ é $-1/4$ em n_1 e $1/4$ em n_4 . Para n_2 e n_3 os autovalores são nulos. Eles correspondem aos pontos finais das linhas $\overline{L}_i = \phi_2^{-1}(L_i)$, $i = 1, 2$.

Para a carta $\{\overline{y} = -1\}$, tem-se o campo

- $\overline{y} = -1$:

$$\overline{X}_2 : \begin{cases} \dot{\overline{x}} = u^2\overline{y} + u^2\overline{x}^2/2 - u^4\overline{x}^3/3 + \overline{x}\epsilon u^2(1 + u^3\overline{a} - u^2\overline{x})/2 \\ \dot{\epsilon} = 3\epsilon^2 u^2(1 + u^3\overline{a} - u^2\overline{x})/2 \\ \dot{\overline{a}} = 3\overline{a}\epsilon u^2(1 + u^3\overline{a} - u^2\overline{x})/4 \\ \dot{u} = -u^3\epsilon(1 + u^3\overline{a} - u^2\overline{x})/4. \end{cases} \quad (3.21)$$

Das equações $a = u^3\overline{a}$ e $\epsilon = u^6\overline{\epsilon}$, temos as seguintes relações:

$$\frac{\dot{\overline{a}}}{\overline{a}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = -3 \frac{\dot{u}}{u}. \quad (3.22)$$

Usando esta relação e substituindo no sistema (3.21), obtemos:

- $\overline{y} = -1$:

$$\overline{X}_2 : \begin{cases} \dot{\overline{x}} = -1 + \overline{x}^2/2 - u^2\overline{x}^3/3 + \overline{x}\epsilon(1 - u^2\overline{x} + u^3\overline{a})/2 \\ \dot{u} = -\epsilon(1 - u^2\overline{x} + u^3\overline{a})u/4. \end{cases} \quad (3.23)$$

Introduzindo os parâmetros A e E , como na explosão de s_0 , obtemos duas famílias:

- De (3.11):

$$\overline{X}_2 : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = -1 + \bar{x}^2/2 - u^2\bar{x}^3/3 + \bar{x}v^2(1 - u^2\bar{x} + Au^3v)/2 \\ \dot{u} = -v^2(1 - u^2\bar{x} + Au^3v)u/4 \\ \dot{v} = 3v^2(1 - u^2\bar{x} + Au^3v)v/4. \end{cases} \quad (3.24)$$

- E de (3.12):

$$\overline{X}_2 : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = -1 + \bar{x}^2/2 - u^2\bar{x}^3/3 + E\bar{x}v^2(1 - u^2\bar{x} \pm u^3v)/2 \\ \dot{u} = -Ev^2(1 - u^2\bar{x} \pm u^3v)u/4 \\ \dot{v} = 3Ev^2(1 - u^2\bar{x} \pm u^3v)v/4. \end{cases} \quad (3.25)$$

Abaixo está representado o retrato de fase para o campo X_2 próximo de $L_2 \cup \{s_0, n_0\}$.

3.3 Blowing-up nas linhas N e S

As linhas N e S possuem duas componentes conexas, N_1, N_2 e S_1, S_2 , respectivamente. Tais linhas são formadas por pontos singulares não-elementares, obtidos quando se varia o parâmetro a , tomando $\epsilon = 0$. Abaixo temos a representação dessas linhas, no espaço M_3 , obtido após o processo de blow-up nos pontos n e s .

Vamos denotar por s_{11}, s_{12}, n_{21} e n_{22} os pontos finais das linhas S_1, S_2, N_1 e N_2 , respectivamente, contidos nos divisores excepcionais dos blow-ups já efetuados.

O estudo para cada uma das quatro componentes conexas N_1, N_2, S_1 e S_2 , é similar. Portanto vamos descrever o estudo somente para S_1 .

Ao longo da linha S_1 , a família é descrita por dois campos de vetores equivalentes: $X_{\epsilon,a}$ nas coordenadas originais e $\overline{X}_1$ após o blow-up, próximo do ponto s_{11} com $\bar{a} = 1$.

Figura 3.9: Representação das linhas N e S

$$X_{\epsilon,a} : \begin{cases} \dot{x} = y - x^2/2 - x^3/3 \\ \dot{y} = \epsilon(a - x) \end{cases} \quad \overline{X}_1 : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} - \bar{x}^2/2 - u\bar{x}^3/3 \\ \dot{\bar{y}} = \bar{\epsilon}(-1 - \bar{x}) \end{cases}$$

Nas coordenadas originais (x, y, ϵ, a) temos $S_1 = \{x = y = \epsilon = 0\}$. Nas coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\epsilon}, u)$ temos $S_1 = \{\bar{x} = \bar{y} = \bar{\epsilon} = 0\}$.

Podemos escrever as famílias de campos acima como campos em $\mathbb{R}^4$:

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y - x^2/2 - x^3/3 \\ \dot{y} = \epsilon(a - x) \\ \dot{\epsilon} = 0 \\ \dot{a} = 0 \end{cases} \quad \overline{X}_1 : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} - \bar{x}^2/2 - u\bar{x}^3/3 \\ \dot{\bar{y}} = \bar{\epsilon}(-1 - \bar{x}) \\ \dot{\bar{\epsilon}} = 0 \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$$

Lembremos que a mudança de coordenadas é dada por

$$x = u\bar{x}, y = u^2\bar{y}, a = -u, \epsilon = u^2\bar{\epsilon}$$

As famílias acima são equivalentes por tais mudanças (mesma situação encontrada no blow-up do ponto n_0). Os blow-ups

$$x = \omega x'', y = \omega^2 y'', \epsilon = \omega^3 \epsilon''$$

ao longo de $\{a \in [-1/2, a_0]\}$ para o campo X e

$$\bar{x} = \omega_1 x'', \bar{y} = \omega_1^2 y'', \bar{\epsilon} = \omega_1^3 \epsilon''$$

ao longo de $\{u \in [0, U[\}$ para o campo $\overline{X_1}$, desingularizam localmente os campos definidos ao longo da linha S_1 .

Um problema técnico que resta é o de estudar a possibilidade de construir um blow-up global no espaço M_3 .

Esta questão da colagem de blow-ups realizado em diferentes cartas, é tratada em detalhes em [DeR].

Capítulo 4

Variedades Centrais

O campo X introduzido no capítulo 2 possui pontos singulares não-isolados. Denotemos o conjunto destes pontos por $Z_d(X)$. Com a desingularização, todas estas singularidades são elementares (a matriz jacobiana tem um autovalor não-nulo e três autovalores nulos). Veja que $Z_d(X) \subset \partial M$, onde M está representada tridimensionalmente na figura abaixo.

Neste capítulo deduziremos a forma normal de classe C^k para o campo X próximo de pontos de $Z_d(X)$. Em seguida, estas formas normais serão usadas para estabelecer a existência das folheações C^∞ por variedades centrais.

4.1 Forma Normal para X nos pontos singulares não-isolados

4.1 Teorema. *Seja $X(y, x, z, a)$ um campo C^∞ em $\mathbb{R}^4$ com as seguintes propriedades:*

- (i) *X é tangente à folheação $da = 0$;*
- (ii) *X é tangente à folheação $dF(x, z) = 0$, onde $F(x, z) = x^p z^q$ para $(p, q) = (0, 1)$ ou $p, q \in \mathbb{N}$ relativamente primos;*
- (iii) *DX_0 tem exatamente um autovalor não-nulo e o respectivo autoespaço é dado por $\{x = z = a = 0\}$.*

Seja W^c uma variedade central C^k do campo X em 0, com $k \in \mathbb{N}$. Então existe uma mudança de coordenadas C^k local dada por

$$\phi(y, x, z, a) = (\phi_1(y, x, z, a), \phi_2(y, x, z, a), \phi_3(y, x, z, a), a)$$

com $F(\phi_2(y, x, z, a), \phi_3(y, x, z, a)) = F(x, z)$, e uma função de classe C^k estritamente positiva $f(y, x, z, a)$ tal que

$$[f\phi_*X](y, x, z, a) = \pm y \frac{\partial}{\partial y} + Y(x, z, a)$$

com Y de classe C^k , $Y \cdot a = 0$, $Y \cdot F = 0$ e $\phi(W^c) = \{y = 0\}$.

Demonstração. Ver [DR], Teorema 3, página 36, e [Bon]. □

Este teorema diz que a mudança de coordenadas ϕ preserva as integrais primeiras. Isto é, o conjunto $S_{\alpha, \beta} = \{a = \alpha, F(x, z) = \beta\}$ é ϕ -invariante, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Também leva a variedade central W^c no plano $\{y = 0\}$.

Retornemos aos pontos em $Z_d(X)$. Para entender a estrutura de $Z_d(X)$ é conveniente olhar a figura anterior, tendo em mente que as dimensões reais são uma unidade maiores. O conjunto $Z_d(X)$ está contido em ∂M , e é um conjunto algébrico contido no

fecho de $\partial M - (\Sigma_2 \cup \Sigma_1 \cup_i \hat{N}_i \cap_j \hat{S}_j)$. Contém estratos de dimensões 2, 1 e 0. Estudaremos abaixo os estratos de dimensão 2 e dimensão 1.

Os estratos de dimensão 2 são de dois tipos:

Tipo α : São as componentes conexas da união de $\text{int}(\bar{L}_i)$ para as linhas $\bar{L}_i$ contidas em $\hat{F}_{(0,a)}$ com $a \neq 0$.

Tipo α' : São as componentes conexas da união de $\text{int}(\bar{L}_i)$ para as linhas $\bar{L}_i$ em $\tilde{F}_0$.

Os estratos de dimensão 1 que precisaremos estudar são:

Tipo β : São as componentes conexas da união do ponto final das linhas $\bar{L}_i$ do caso α . Estão contidas no interior de $\cup_i \partial \hat{N}_i \cup_j \partial \hat{S}_j$.

Tipo β' : São as componentes conexas da união do ponto final das linhas $\bar{L}_i$ do caso β .

No caso α o campo X é representado pela família $X_{\epsilon,a}$ para (ϵ, a) em uma vizinhança de $(0, a_0)$ com $a_0 \neq 0$ e (x, y) em uma vizinhança de $(x_0, y_0) \in \cup_i \text{int}(L_i)$, ou seja, $x_0 \neq 0, -1$ e $y_0 = \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^3}{3}$. Já no caso α' o campo X é representado pela família a 2 parâmetros dada por $a = \tilde{v}\tilde{a}$, $\epsilon = \tilde{v}^2\tilde{\epsilon}$ na carta $\tilde{\epsilon} = 1$ e $\tilde{v} \in [0, \tilde{V}[$. O campo fica

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} = \tilde{v}^2(\tilde{v}\tilde{a} - x), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\tilde{v}$ está em uma vizinhança de 0 e (x, y) em uma vizinhança de $(x_0, y_0) \in \cup_i \text{int} L_i^-$.

No caso β as equações locais são produzidas pelos blow-ups nas linhas N e S . No caso β' o campo é o campo local X na família de espaços P_{λ_0} , próximo dos pontos s_2, s_3 e n_2, n_3 . Eles são representados pela família a um parâmetro (parâmetro A) dado em (3.13) para s_2, s_3 e em (3.24) para n_2, n_3 .

4.2 Proposição. *No caso α , para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma vizinhança da singularidade na qual o germe de X é C^k -equivalente a $X_\epsilon^N = \pm y \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x}$. No caso α' , para todo $k \in \mathbb{N}$ existe uma vizinhança da singularidade na qual o germe de X é C^k -equivalente a $X_v^N = \pm y \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{v}^2 \frac{\partial}{\partial x}$.*

Demonstração. Seja $X(y, x, \epsilon, a) = (\epsilon(a - x), y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, 0, 0)$. Queremos verificar as hipóteses do teorema (4.1) para aplicá-lo. Neste caso $F(x, \epsilon) = \epsilon$. Calculando a matriz

jacobiana deste campo na singularidade $(x_0, y_0, 0, a_0)$ encontramos um único autovalor não-nulo $\lambda_0 = -x_0 - x_0^2$, já que $x_0 \neq 0, -1$. Pelo teorema existe um difeomorfismo ϕ de classe C^k tal que

$$[f\phi_*X](y, x, \epsilon, a) = \pm y \frac{\partial}{\partial y} + Y(x, \epsilon, a)$$

onde $f > 0$, de classe C^k , e $Y(x, \epsilon, a) = g(x, \epsilon, a) \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial \epsilon} + 0 \frac{\partial}{\partial a}$, com g de classe C^k .

Daí $X_1^N = [f\phi_*X] = \pm y \frac{\partial}{\partial y} + g(x, \epsilon, a) \frac{\partial}{\partial x}$. Podemos escrever $g(x, \epsilon, a) = \epsilon \bar{g}(x, \epsilon, a)$ com $\bar{g}(0, 0, 0) \neq 0$ pois ϵ divide $g(x, \epsilon, a)$, com $\bar{g}$ de classe C^k . Supomos $\bar{g}(0, 0, 0) > 0$. Assim $X_1^N = \pm y \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \bar{g}(x, \epsilon, a) \frac{\partial}{\partial x}$. Pelo Teorema do Fluxo Tubular $\bar{g}(x, \epsilon, a) \frac{\partial}{\partial x}$ é C^k -equivalente a $1 \frac{\partial}{\partial x}$, por uma transformação da forma $x \mapsto x \cdot U(x, \epsilon, a)$. Portanto X é C^k -conjugado a $X_\epsilon^N = \pm y \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x}$. $\square$

4.3 Proposição. *No caso β' , para todo $k \in \mathbb{N}$, o germe de X nos pontos s_i , $i = 2, 3$ e para $A = A_0$ é localmente C^k -equivalente à família $X_A = \pm(z \frac{\partial}{\partial z} + v^2 f(u, v, A)(u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v}))$ em alguma vizinhança de $(u, v, z, A) = (0, 0, 0, A_0)$. A função f é C^k e estritamente positiva. O sinal é positivo para s_2 e negativo para s_3 . Além disso, para cada A , os planos $\{v = 0\}$ e $\{u = 0\}$ estão respectivamente contidos em $\hat{F}_0$ e no disco $D_{\bar{\lambda}}$ (lembre que se $\bar{\lambda} = (\bar{\epsilon}, \bar{a})$, $A = \frac{\bar{a}^2}{\bar{\epsilon}^2}$). Para todo $k \in \mathbb{N}$, o germe de X nos pontos n_i , $i = 1, 2$ e para $A = A_0$ é localmente C^k -equivalente à família $X_A = \pm(z \frac{\partial}{\partial z} + v^2 f(u, v, A)(u \frac{\partial}{\partial u} - 3v \frac{\partial}{\partial v}))$, com propriedades similares às anteriores. No caso β , obtemos uma família a um parâmetro similar a X_A .*

Demonstração. A prova é semelhante ao caso anterior (ver [DR], Proposição 5, página 39). $\square$

4.2 Construção de Variedades Centrais

Construiremos variedades centrais que correspondem a um determinado tipo de canard, o conjunto limite periódico de tipo I.

A existência de variedades centrais de classe C^k em cada ponto $p \in Z_d(X)$ segue de

Figura 4.1: Variedade Central $C_\gamma(A)$

teoremas gerais (ver [K, HPS, V]). Usando as proposições anteriores podemos dar uma construção mais precisa.

Estamos interessados na construção de variedades centrais em uma região $K = \cup_{\lambda_0} \{P_{\lambda_0} : -A_0 \leq A \leq A_0, A = \frac{\bar{a}_0^2}{\bar{\epsilon}_0}\}$ com A_0 pequeno.

Seja $\tilde{v} \mapsto (x, y, \epsilon) = (x(\tilde{v}), y(\tilde{v}), \tilde{v}^2)$ um arco C^∞ na carta dada por $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{n_0, s_0\}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ver figura acima).

Seja $C_\gamma(A)$ o fecho da união de segmentos de órbitas de X_A através dos pontos do gráfico de γ , tomado entre a primeira intersecção desta trajetória com uma seção transversal T , como na figura, em tempo negativo e em tempo positivo.

4.4 Teorema. $C_\gamma(A)$ está bem definida para $-A_0 \leq A \leq A_0$ com A_0 e $\tilde{v}_0$ suficientemente pequenos e é uma variedade C^∞ (com fronteira) a menos de dois pontos $\alpha(\gamma) \in \bar{L}_2$ e $\beta(\gamma) \in \bar{L}_3$ que são pontos limite da trajetória de $X_{(0,0)}$ passando por $(x(0), y(0)) \in C_1 = \{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} < y < \frac{1}{6}, x > -1\}$.

Demonstração. Ao longo de cada órbita contida em $C_\gamma(A)$ que passa através de pontos do gráfico de γ , com $\tilde{v} > 0$, a variedade $C_\gamma(A)$ é C^∞ . Temos que provar que $C_\gamma(A)$ é

C^∞ ao longo dos segmentos $]\alpha(\gamma), s_2] \subset L_2^-$, $]\beta(\gamma), s_3] \subset L_3^-$ e ao longo dos segmentos de separatrizes $\Gamma_2(A)$, $\Gamma_3(A)$ de s_2 e s_3 ($\Gamma_2(0) \cup \Gamma_3(0) = \Gamma$). Vamos olhar primeiramente para os pontos em $]\alpha(\gamma), s_2[$. Para provar que $C_\gamma(A)$ é C^k ao longo deste segmento usaremos o seguinte lema:

4.5 Lema. *Considere um sistema de coordenadas C^k , $(x, y, \tilde{v}, A)$, em uma vizinhança U de um ponto $p \in]\alpha(\gamma), s_2[$ onde X_A tem a expressão $X_A = y \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{v}^2 \frac{\partial}{\partial x}$. Seja $\tilde{\gamma}(\tilde{v}, A) = (\tilde{v}, x(\tilde{v}, A), y(\tilde{v}, A))$ uma família de arcos de classe C^k com $(\tilde{v}, A) \in [0, \tilde{v}_1] \times [-A_0, A_0]$, $\tilde{v}_1 > 0$ suficientemente pequeno (tal que a imagem de $\tilde{\gamma}$ está em U). Então o conjunto $C_{\tilde{\gamma}}(A)$ obtido como o fecho da saturação do gráfico de $\tilde{\gamma}$ pelas órbitas de $-X_A$, é de classe C^k em $\{y = 0, x < x(0, A)\}$ e sempre é C^k , exceto em $\{x(0, A), 0\}$.*

Demonstração. Para $\tilde{v} > 0$, o gráfico de $C_{\tilde{\gamma}}(A)$ é explicitamente dado por

$$y = \begin{cases} 0, \tilde{v} = 0 \\ y(\tilde{v}, A) e^{\frac{x - x(\tilde{v}, A)}{\tilde{v}^2}}, \tilde{v} > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

que é uma função de classe C^k para $x < x(0, A)$.

Veja que para cada ponto $p \in]\alpha(\gamma), s_2[$ (tipo α) podemos descrever $C_\gamma(A) \cap U$, onde U é uma vizinhança desse ponto, usando as coordenadas da forma normal. $\square$

Figura 4.2: Representação de $C_\gamma(A) \cap U$

O ponto s_2 é um ponto do tipo β , logo, aplicamos a forma normal da proposição 4.3.

4.6 Lema. Seja $X_A = z \frac{\partial}{\partial z} + v^2 f(u, v, A) [u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v}]$ e tome uma função de classe C^k , $z(v, A)$, representando uma curva $\tilde{\gamma}$ em $\{u = u_1\}$. O conjunto $C_{\tilde{\gamma}}$ obtido como o fecho da saturação do gráfico de $\tilde{\gamma}$ pelas órbitas de $-X_A$ é C^k no conjunto $\{u = z = 0\}$.

Demonstração. Vamos procurar uma expressão para $C_{\tilde{\gamma}}$, denotada por $Z(u, v, A)$ com u e v estritamente positivos. Multiplicando o campo X_A pelo fator $-\frac{1}{v^2 f}$ e resolvendo as equações diferenciais resultante, obtemos a expressão

$$Z(u, v, A) = z\left(\frac{uv}{u_1}, A\right) e^{[-(\frac{u_1}{uv})^2 \int_0^{\frac{u}{u_1}} e^{-2\tau} F(u_1 e^{-\tau}, \frac{uv}{u_1} e^{-\tau}, A) d\tau]}$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = e^{-\tau}$ obtemos

$$Z(u, v, A) = z\left(\frac{uv}{u_1}, A\right) e^{[-(\frac{u_1}{uv})^2 \int_{\frac{u}{u_1}}^1 s F(u_1 s, \frac{uv}{u_1 s}, A) ds]}$$

Agora fazemos a extensão $Z(0, v) = Z(u, 0) = 0$. Temos que verificar que Z é C^k , $\forall v \geq 0$, $u_1 > u \geq 0$. Para isto basta verificarmos que todas as derivadas parciais de ordem até k tem uma extensão contínua por 0 em $\{uv = 0\}$. Primeiro, se $F_0 = \inf\{|F(u, v, A)| : (u, v, A) \in U\} > 0$, temos para $0 < u < \bar{u}_1 < u_1$ que existe uma constante $c > 0$ dependente de u_1 com

$$|Z(u, v, A)| \leq |z\left(\frac{uv}{u_1}, A\right)| e^{-c F_0 (\frac{u_1}{uv})^2}.$$

Observe que $Z(u, v, A) = \bar{Z}(u, w, A)$ com

$$\bar{Z}(u, w, A) = z(w, A) e^{[-\frac{1}{w^2} \int_{\frac{u}{u_1}}^1 s F(u, s, \frac{w}{s}, A) ds]}$$

e $w = \frac{uv}{u_1}$. É suficiente provar a propriedade que cada derivada de $\bar{Z}$, até ordem k , tende a zero quando u tende a zero.

Podemos supor que $u \geq w$, isto é, $v \leq 1$. Verifica-se que

$$\frac{\partial^{l_1+l_2+l_3}}{\partial w^{l_1} \partial u^{l_2} \partial A^{l_3}} \left[\int_{u/u_1}^1 s F ds \right] \leq \frac{*}{w^{l_1-1}}$$

onde $*$ simboliza uma constante dependendo da k -norma de F em U . Denotemos por $|z|$ a l -norma de z . Uma indução, usando a desigualdade acima, sobre a forma da derivada nos dá a propriedade requerida. $\square$

Provamos que $C_\gamma(A)$ é C^k em s_2 e assim ao longo de um intervalo da separatriz $\Gamma_2(A)$ de s_2 , chegando em s_2 .

A C^k suavidade de $C_\gamma(A)$ para a parte restante de $\Gamma_2(A)$ segue do fato de que o restante de $C_\gamma(A)$ é obtido da saturação pelo fluxo regular C^∞ de $-X_A$.

A prova da C^k suavidade da parte de $C_\gamma(A)$ obtida da saturação pelo fluxo de X_A ($t > 0$) é similar à anterior ($t < 0$). Finalmente $C_\gamma(A)$ é C^k , $\forall k$, exceto em $\alpha(\gamma), \beta(\gamma)$. Portanto $C_\gamma(A)$ é uma variedade C^∞ a menos destes dois pontos. $\square$

Capítulo 5

O Fenômeno Canard

5.1 A Integral de Sotomayor/Melnikov

Nesta seção faremos a dedução da Integral de Sotomayor/Melnikov. Seguiremos a exposição feita em [C].

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{u} = f(u, \lambda) \quad (5.1)$$

onde $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda = (\epsilon, a) \in \Lambda = (\epsilon, +\infty) \times [-1/2, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$ e $f(u, \lambda) = (y - x^2/2 - x^3/3, \epsilon(a - x))$.

Seja $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto regular do sistema não-perturbado

$$\dot{u} = f(u, 0), \quad (5.2)$$

e denotemos por $u(t, \xi, \lambda)$ a solução de (5.1) com condição inicial $u(0, \xi_0, \lambda) = \xi_0$.

Vamos definir $g(u) = Rf(u, 0)$, onde $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e seja $\psi(t, \xi)$ o fluxo do sistema ortogonal

$$\dot{u} = g(u)$$

A órbita $\psi(t, \xi_0)$ é transversal à solução $u(t, \xi_0, 0)$ do sistema (5.1).

Definimos a seção transversal

$$\Sigma = \{\psi(t, \xi_0)/t \in \mathbb{R}\}. \quad (5.3)$$

Vamos admitir que existam duas famílias de soluções $\gamma^1(t, \lambda)$, $\gamma^2(t, \lambda)$, do sistema (5.1), cada uma delas parametrizadas por $\lambda = (\epsilon, a)$, que são transversais a Σ . Além disso, vamos supor que para $\lambda = 0$, as soluções correspondentes coincidem com a solução do sistema não-perturbado (5.2) com $\xi = \xi_0$.

Nosso objetivo é obter informações sobre a função que mede a distância entre as duas famílias citadas acima.

Seja

$$\begin{aligned} \rho^i : \Lambda \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \rho^i(\lambda) \end{aligned}$$

onde $\rho^i(0) = 0$, com $\rho^i(\lambda)$ denotando o ponto de intersecção da família γ^i com a seção transversal Σ , para $i = 1, 2$. Tal ponto é medido pela parametrização de Σ dada por (5.3).

Assim, podemos escrever

$$\gamma^i(t, \lambda) = u(t, \psi(\rho^i(\lambda), \xi_0), \lambda) \quad i = 1, 2 \quad (5.4)$$

Podemos ver estas famílias como variações da solução do sistema não-perturbado (5.2).

Veja que $\gamma^i(t, 0) = u(t, \xi_0, 0)$ já que $\rho^i(0) = 0$ e $\psi(0, \xi_0) = \xi_0$ para $i = 1, 2$. Além disso, como $\gamma^i(0, \lambda) = \psi(\rho^i(\lambda), \xi_0)$, então $\gamma^i(0, \lambda) \in \Sigma$.

Agora definimos a função

$$\begin{aligned} \Delta : \Lambda \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \Delta(\lambda) = \rho^1(\lambda) - \rho^2(\lambda). \end{aligned}$$

A função Δ mede a distância entre os pontos onde as famílias cruzam Σ . Lembre que $\gamma^i(t, \lambda) \cap \Sigma = \rho^i(\lambda)$, $i = 1, 2$.

Observação importante: Em um problema de perturbação é muito improvável que se obtenha explicitamente as funções ρ^1 e ρ^2 . A existência de tais funções, em uma vizinhança de $(t, \lambda) = (0, 0)$ é assegurada pelo *Teorema das Funções Implícitas*.

Para λ em uma vizinhança da origem, a função $\Delta(\lambda)$ é equivalente à função

$$\begin{aligned} sep : \Lambda \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto sep(\lambda) = \langle \psi(\rho^1(\lambda), \xi_0) - \psi(\rho^2(\lambda), \xi_0), g(\xi_0) \rangle \end{aligned}$$

Veja que a função sep pode ser escrita como

$$sep(\lambda) = f(\xi_0, 0) \wedge (\psi(\rho^1(\lambda), \xi_0) - \psi(\rho^2(\lambda), \xi_0))$$

onde $\wedge$ é o produto vetorial em $\mathbb{R}^2$, definido por $u \wedge v = u_1 v_2 - v_2 u_1$, com $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$.

Esta função é conhecida como *função separação*.

Veja que $sep(0) = 0$ e $sep(\lambda) = 0$, se as soluções $\gamma^1(t, \lambda)$ e $\gamma^2(t, \lambda)$ forem idênticas.

Vamos definir $S = \{\lambda \in \Lambda / sep(\lambda) = 0\}$.

Para λ pequeno a função sep é equivalente à função Δ e o nosso problema agora é estudar o conjunto de zeros de sep , por meio do Teorema das Funções Implícitas.

Para identificarmos as derivadas parciais da função separação, vamos usar a equação variacional associada a(5.1). Mas para obter uma equação variacional não-trivial devemos ter alguma dependência do tempo na função separação. Isto motiva a definição da função separação dependendo do tempo

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} \times \Lambda &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \lambda) &\longmapsto S(t, \lambda) = \langle \gamma^1(t, \lambda) - \gamma^2(t, \lambda), g(\phi_t(\xi_0)) \rangle \end{aligned}$$

Ou ainda $S(t, \lambda) = f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge (\gamma^1(t, \lambda) - \gamma^2(t, \lambda))$, onde ϕ_t é o fluxo do sistema (5.2).

Uma vez que $S(0, \lambda) = sep(\lambda)$, a técnica que utilizaremos será a de calcular as derivadas parciais da função $sep(\lambda)$ a partir das derivadas parciais correspondentes da função $S(t, \lambda)$.

Se definirmos $S^i(t, \lambda) = \langle \gamma^i(t, \lambda), g(\phi_t(\xi_0)) \rangle = f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge \gamma^i(t, \lambda)$, $i = 1, 2$, a função S pode ser expressa como $S(t, \lambda) = S^1(t, \lambda) - S^2(t, \lambda)$.

Temos que

$$S_{\lambda_j}^i(t, 0) = f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge \gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) \quad (5.5)$$

Como a função $\gamma^i(t, \lambda)$ é solução de (5.1) então $\dot{\gamma}^i(t, \lambda) = f(\gamma^i(t, \lambda), \lambda)$.

Portanto

$$\dot{\gamma}_{\lambda_j}^i(t, \lambda) = f_u(\gamma^i(t, \lambda), \lambda)\gamma_{\lambda_j}^i(t, \lambda) + f_{\lambda_j}(\gamma^i(t, \lambda), \lambda)$$

e assim

$$\dot{\gamma}_{\lambda_j}^i(t, 0) = f_u(\gamma^i(t, 0), 0)\gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) + f_{\lambda_j}(\gamma^i(t, 0), 0)$$

Lembrando que $\gamma^i(t, 0) = u(t, \xi_0, 0)$, podemos escrever

$$\dot{\gamma}_{\lambda_j}^i(t, 0) = f_u(u(t, \xi_0, 0), 0)\gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) + f_{\lambda_j}(u(t, \xi_0, 0), 0)$$

o que nos dá

$$\dot{\gamma}_{\lambda_j}^i(t, 0) = f_u(\phi_t(\xi_0), 0)\gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) + f_{\lambda_j}(\phi_t(\xi_0), 0) \quad (5.6)$$

Da equação (5.5) vem que

$$\dot{S}_{\lambda_j}^i(t, 0) = f_u(\phi_t(\xi_0), 0)\dot{u}(t, \xi_0, 0) \wedge \gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) + f(\phi_t(\xi_0)) \wedge \dot{\gamma}_{\lambda_j}^i(t, 0)$$

Usando a equação (5.6) podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\lambda_j}^i(t, 0) &= f_u(\phi_t(\xi_0), 0)f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge \gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) \\ &+ f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge (f_u(\phi_t(\xi_0), 0)\gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) + f_{\lambda_j}(\phi_t(\xi_0), 0)) \end{aligned}$$

Usando a notação $f_u(\phi_t(\xi_0), 0) = A(t)$, temos

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\lambda_j}^i(t, 0) &= A(t)f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge \gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) + f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge A(t)\gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) \\ &+ f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_t(\xi_0), 0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Usando a proposição abaixo, cuja verificação pode ser encontrada em livros de análise vetorial, podemos simplificar a fórmula acima.

5.1 Proposição. *Se A é matriz 2×2 e $v, w \in \mathbb{R}^2$ então $Av \wedge w + v \wedge Aw = (tr A)v \wedge w$.*

Assim

$$\dot{S}_{\lambda_j}^i(t, 0) = (tr A(t))f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge \gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) + f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_t(\xi_0), 0)$$

e como $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$, onde $f(u, 0) = (f_1(u, 0), f_2(u, 0))$, concluímos que $tr A(t) = \text{div} f(\phi_t(\xi_0), 0)$.

Então

$$\dot{S}_{\lambda_j}^i(t, 0) = \operatorname{div} f(\phi_t(\xi_0), 0) f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge \gamma_{\lambda_j}^i(t, 0) + f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_t(\xi_0), 0).$$

e agora, usando (5.5) obtemos

$$\dot{S}_{\lambda_j}^i(t, 0) = \operatorname{div} f(\phi_t(\xi_0), 0) S_{\lambda_j}^i(t, 0) + f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_t(\xi_0), 0). \quad (5.8)$$

A equação acima é uma equação diferencial linear para $t \mapsto S_{\lambda_j}^i(t, 0)$. Para resolvê-la, vamos assumir que sabemos o comportamento de $\gamma^1(t, 0)$ quando $t \rightarrow -\infty$ e de $\gamma^2(t, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Vamos definir

$$K(t) = e^{-\int_0^t \operatorname{div} f(\phi_s(\xi_0), 0) ds}.$$

De (5.8), vemos que

$$K(t) \dot{S}_{\lambda_j}^i(t, 0) - K(t) \operatorname{div} f(\phi_t(\xi_0), 0) S_{\lambda_j}^i(t, 0) = K(t) f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_t(\xi_0), 0),$$

e como

$$\frac{d}{dt}[K(t) S_{\lambda_j}^i(t, 0)] = K(t) \dot{S}_{\lambda_j}^i(t, 0) - K(t) \operatorname{div} f(\phi_t(\xi_0), 0) S_{\lambda_j}^i(t, 0),$$

é possível escrever

$$\frac{d}{dt}[K(t) S_{\lambda_j}^i(t, 0)] = K(t) f(\phi_t(\xi_0)) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_t(\xi_0), 0).$$

Integrando ambos os lados da equação acima obtemos

$$K(t) S_{\lambda_j}^i(t, 0) = \int_0^t K(s) f(\phi_s(\xi_0)) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_s(\xi_0), 0) ds + S_{\lambda_j}^i(0, 0)$$

pois quando $t = 0$ obtemos a identidade $S_{\lambda_j}^1(0, 0) = S_{\lambda_j}^2(0, 0) = \operatorname{sep}(0) = 0$.

Assim obtemos

$$S_{\lambda_j}^1(0, 0) = K(t) S_{\lambda_j}^1(t, 0) + \int_t^0 K(s) f(\phi_s(\xi_0)) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_s(\xi_0), 0) ds$$

e

$$-S_{\lambda_j}^2(0, 0) = -K(t) S_{\lambda_j}^2(t, 0) + \int_0^t K(s) f(\phi_s(\xi_0)) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_s(\xi_0), 0) ds$$

Veja que o lado direito de cada identidade acima é constante em t . Sendo assim, a derivada parcial desejada é dada por

$$\begin{aligned} sep_{\lambda_j}(0) = & \lim_{t \rightarrow -\infty} [K(t)f(\phi_t(\xi_0)) \wedge \gamma_{\lambda_j}^1(t, 0) + \int_t^0 K(s)f(\phi_s(\xi_0)) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_s(\xi_0), 0)ds] \\ & + \lim_{t \rightarrow +\infty} [-K(t)f(\phi_t(\xi_0)) \wedge \gamma_{\lambda_j}^2(t, 0) + \int_0^t K(s)f(\phi_s(\xi_0)) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_s(\xi_0), 0)ds] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Os limites existem pois os termos entre colchetes são constantes.

Vamos aplicar a fórmula (5.9) para o caso de perturbações de conexões de selas.

Para isso suponhamos que ξ_0 denota um ponto regular na órbita do sistema (5.2), que conecta dois pontos de sela hiperbólicos p_0 e q_0 , isto é, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\xi_0) = p_0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\xi_0) = q_0$.

Seja $\sum$ como definidos em (5.3). Pelo teorema das Funções Implícitas, se λ está em uma vizinhança da origem, então o sistema (5.1) tem pontos de sela hiperbólicos perturbados $p_\lambda = p_0 + O(\lambda)$ e $q_\lambda = q_0 + O(\lambda)$.

Definimos $\gamma^1(t, \lambda)$ como sendo a solução de (5.1) com condições iniciais em $\sum$ que permanece na variedade instável de p_λ e $\gamma^2(t, \lambda)$ a solução correspondente na variedade estável do ponto de sela hiperbólico de q_λ .

A proposição a seguir fornece uma equação explícita para $sep_{\lambda_j}(0)$ neste caso.

5.2 Proposição. *Se o sistema (5.1) com $\lambda = 0$ tem uma conexão de sela e se γ^i dada por $\gamma^i(t, \lambda) = u(t, \psi(\rho^i(\lambda), \xi_0), \lambda)$, $i = 1, 2$, são soluções nas variedades instável ($i = 1$) e estável ($i = 2$) do ponto de sela perturbado, então*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} K(t)f(\phi_t(\xi_0)) \wedge \gamma_{\lambda_j}^1(t, 0) = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} K(t)f(\phi_t(\xi_0)) \wedge \gamma_{\lambda_j}^2(t, 0) = 0$$

Além disso,

$$sep_{\lambda_j}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\int_0^t \text{div} f(\phi_s(\xi_0), 0) ds} f(\phi_t(\xi_0), 0) \wedge f_{\lambda_j}(\phi_t(\xi_0), 0) dt.$$

A integral acima é conhecida como Integral de Sotomayor/Melnikov.

Para demonstração, ver [C], página 400, proposição 6.2.

Observação: Tal integral foi deduzida de forma independente em [S].

5.2 Cálculo para obtenção de uma órbita periódica

Nesta seção vamos estudar a existência de uma órbita periódica aproximando um conjunto periódico limite do tipo I. A principal ferramenta é a integral da proposição 5.2.

Considere a família dada por

$$\overline{X}_1 : \begin{cases} \dot{\overline{x}} = \overline{y} - \overline{x}^2/2 \\ \dot{\overline{y}} = (\overline{a} - \overline{x}). \end{cases}$$

Tal família expressa o campo de vetores explodido $\overline{X}_1$ obtido na carta $\{\overline{\epsilon} = 1\}$ do blow-up em s_0 . (Ver seção 3.1).

Podemos multiplicar ambas as equações pelo fator integrante e^{-y} . Assim temos

$$\overline{Y}_1 : \begin{cases} \dot{\overline{x}} = e^{-\overline{y}}(\overline{y} - \overline{x}^2/2) \\ \dot{\overline{y}} = e^{-\overline{y}}(A - \overline{x}). \end{cases}$$

Observe que para $A = 0$, este campo tem como integral primeira a função $H = -e^{-y}(\overline{y} - \frac{\overline{x}^2}{2} + 1)$.

Consideremos a seção transversal T , como na figura abaixo:

Seja $C_\gamma(A)$ a variedade central construída no teorema 4.4, e sejam ρ_1 e ρ_2 as curvas em T definidas pela intersecção $C_\gamma(A) \cap T$.

Parametrizando a seção T por $(u, h = H(0, \overline{y})) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, podemos escrever ρ_1 e ρ_2 como gráficos de funções C^∞ :

$$\rho_1 = \text{graf}\{h = F(u, A)\} \quad e \quad \rho_2 = \text{graf}\{h = B(u, A)\}.$$

Vamos definir a função $\Delta(u, A) = F(u, A) - B(u, A)$. Veja que $\Delta(0, 0) = 0$. Por construção, as soluções da equação $\Delta(u, A) = 0$, correspondem à intersecção de órbitas periódicas de $\overline{Y}_1$ com a seção T .

Veja que $\Delta \in C^\infty$ pois $F, B \in C^\infty$. Se verificarmos que $\frac{\partial \Delta}{\partial A}(0, 0) \neq 0$, o Teorema das Funções Implícitas garante a existência de um único $A = c(u)$ tal que $c(0) = 0$ e $\Delta(u, c(u)) = 0$.

Utilizando a proposição 5.2, obtemos

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A}(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\int_0^t \text{div} \bar{Y}_1(\bar{x}, \bar{y}, 0) ds} \bar{Y}_1(\bar{x}, \bar{y}, 0) \wedge \bar{Y}_{1A}(\bar{x}, \bar{y}, 0) dt,$$

onde $\bar{Y}_1(A) = D_A \bar{Y}_1$.

Esta é a *Integral de Sotomayor/Melnikov*.

Considerando as equações $\bar{Y}_1(\bar{x}, \bar{y}, 0) = (e^{-\bar{y}}(\bar{y} - \bar{x}^2/2), -e^{-\bar{y}}\bar{x})$, $\bar{Y}_{1A}(\bar{x}, \bar{y}, A) = (0, e^{-\bar{y}})$, $\text{div} \bar{Y}_1(\bar{x}, \bar{y}, A) = -\bar{x}e^{-\bar{y}} + \bar{x}e^{-\bar{y}} = 0$ e $\bar{Y}_1(\bar{x}, \bar{y}, A) \wedge \bar{Y}_{1A}(\bar{x}, \bar{y}, A) = e^{-2\bar{y}}(\bar{y} - \bar{x}^2/2)$, obtemos que $\frac{\partial \Delta}{\partial A}(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\bar{y}}(\bar{y} - \bar{x}^2/2) dt$. Utilizando a primeira equação de $\bar{Y}_1$, temos que $dt = \frac{d\bar{x}}{(\bar{y} - \bar{x}^2/2)e^{-\bar{y}}}$, e daí $\frac{\partial \Delta}{\partial A}(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\bar{y}} d\bar{x}$.

Como a integral está calculada ao longo de $\Gamma = \{\bar{y} = \bar{x}^2/2 - 1\}$, vemos que $\frac{\partial \Delta}{\partial A}(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-\bar{x}^2/2} d\bar{x} > 0$. Portanto $\frac{\partial \Delta}{\partial A} \neq 0$.

5.3 Conclusão da Demonstração do Teorema Principal

Fixado $h \in (0, 1/6)$, vamos considerar a curva em $\mathbb{R}^4$ dada por $\gamma_h = \{(x, y, \epsilon, a) = (0, h, s, 0), s \in [0, s_0]\}$, onde $s_0 > 0$ é uma constante fixada. Seja $C_{\gamma_h}(A)$ a variedade central associada. Utilizando o resultado da seção 5.2, sabemos que, pelo teorema 4.4, existe uma única curva $A = c(u)$ no espaço do blow-up $\{(\bar{x}, \bar{y}, u, A)\}$ tal que $\Delta(u, c(u)) = 0$. Retornando aos parâmetros originais, podemos escrever

$$a = \bar{u}\bar{a} = \epsilon^{1/2}c(\epsilon^{1/2}) := c_h(\epsilon).$$

Logo, ao longo da curva $a = c_h(\epsilon)$, a família induzida $X_{\epsilon, a=c_h(\epsilon)}$ possui uma sequência de ciclos limites $\Gamma_{\epsilon, c_h(\epsilon)}$ que converge para Γ_h quando $\epsilon \rightarrow 0$. Isso prova o teorema.

Apêndice A

Sobre a Bifurcação de Hopf

O objetivo dessa seção é justificar o surgimento da Bifurcação de Hopf para valores do parâmetro a em uma vizinhança de 0 e de -1 , e $\epsilon > 0$. Pela simetria do problema vamos analisar apenas em uma vizinhança de 0.

Considere um sistema genérico

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad (\text{A.1})$$

onde $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e $f \in C^n(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$.

Vamos denotar $x = (x_1, x_2)^T$ e considerar a família a um parâmetro

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$ é uma singularidade de (A.2).

A matriz quadrada de ordem dois que aparece acima é a matriz jacobiana avaliada na singularidade $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$, que possui autovalores $\lambda_1 = \alpha + i$ e $\lambda_2 = \alpha - i$.

Vamos trabalhar no plano complexo, introduzindo assim a variável

$$z = x_1 + ix_2$$

Desta expressão obtemos

$$\dot{z} = z(\alpha + i) \pm z|z|^2 \quad (\text{A.3})$$

onde $|z|$ é a norma do número complexo z .

Escrevendo z em coordenadas polares

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \rho > 0,$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha \pm \rho^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Considerando o sistema acima com o sinal “-”, vemos que

- (1) para $\alpha < 0$, ρ é decrescente pois $\dot{\rho} < 0$;
- (2) para $\alpha = 0$, ρ também é decrescente pois $\dot{\rho} < 0$;
- (3) para $\alpha > 0$, ρ é decrescente se for maior que $\sqrt{\alpha}$ e é crescente se for menor que $\sqrt{\alpha}$. Não há variação quando $\rho = \sqrt{\alpha}$ ou $\rho = 0$.

Abaixo temos a representação para estes três casos.

Considerando agora o sistema com o sinal “+”, a análise fica

- (1) para $\alpha < 0$, ρ é crescente se for maior que $\sqrt{-\alpha}$ e é decrescente se for menor que $\sqrt{-\alpha}$. Da mesma forma, não há variação quando $\rho = \sqrt{-\alpha}$ ou $\rho = 0$.
- (2) para $\alpha = 0$, ρ crescente pois $\dot{\rho} > 0$;
- (3) para $\alpha > 0$, ρ também é crescente pois $\dot{\rho} > 0$.

Abaixo temos a representação para estes três casos.

Este fenômeno é uma *Bifurcação de Hopf*. Ela pode ser representada no espaço (x_1, x_2, α) . A família de ciclos limite forma um parabolóide. Veja as figuras abaixo.

Figura A.1: Bifurcação supercrítica (esq.) e subcrítica (dir.)

Na figura à esquerda a bifurcação recebe o nome de *supercrítica* e na figura à direita a bifurcação é chamada *subcrítica*.

A.1 Definição. O sistema (A.2), ou equivalentemente (A.3) e (A.4) serão denominados *Forma Normal da Bifurcação de Hopf*.

Enunciaremos a seguir um lema importante que diz que em torno da singularidade, em nosso caso a origem, o retrato de fase de um sistema com termos de ordem 4 tem o mesmo comportamento se desprezarmos estes termos.

A.2 Lema. O sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4) \quad (\text{A.5})$$

onde $x = (x_1, x_2)^T$ e $O(\|x\|^4)$ representa os termos de ordem 4 e dependem suavemente de α , é localmente topologicamente equivalente em torno da origem ao sistema (A.2).

Demonstração. Ver [K]. □

Considere uma família $\dot{x} = f(x, \alpha)$ tal que para $\alpha = 0$, $f(0, 0) = 0$, e a matriz jacobiana $Jf(0, 0)$ possua autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$, o sistema pode ser

escrito como

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha) \quad (\text{A.6})$$

onde $A(\alpha) = Jf(0, \alpha)$ e $F(x, \alpha) = (F_1(x, \alpha), F_2(x, \alpha))$ é de classe C^n , $F_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2$, e F tem expansão de Taylor iniciando com termos de $O(\|x\|^2)$.

A matriz $A(\alpha)$ tem autovalores $\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha)$ e $\lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}$ onde $\lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$. Queremos que $\lambda(0) = \gamma(0) + i\omega(0) = 0 + i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$.

Seja $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ um autovetor complexo de $A(\alpha)$ associado a $\lambda(\alpha)$, isto é,

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha)$$

Seja $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ tal que

$$A(\alpha)^T p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)} \overline{p(\alpha)}$$

É sempre possível escolher $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ de tal modo que $\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1$ onde o produto interno aqui usado é dado por $\langle p, q \rangle = \overline{p_1}q_1 + \overline{p_2}q_2$ com $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$.

Dado qualquer vetor x em $\mathbb{R}^2$ sempre podemos escrever

$$x = zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha)$$

para algum $z \in \mathbb{C}$.

Logo

$$\begin{aligned} \langle p(\alpha), x \rangle &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) + \overline{z}q(\alpha) \rangle \\ &= \langle p(\alpha), zq(\alpha) \rangle + \langle p(\alpha), \overline{z}q(\alpha) \rangle \\ &= z \langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \overline{z} \langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle \\ &= z + \overline{z} \langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Mas

$$\overline{q(\alpha)} = \frac{1}{\overline{\lambda(\alpha)}} A(\alpha) \overline{q(\alpha)}$$

pois $q(\alpha)$ é um autovetor complexo de $A(\alpha)$ associado a $\lambda(\alpha)$.

Logo, por outro lado

$$\begin{aligned}
\langle p(\alpha), x \rangle &= z + \bar{z} \langle p(\alpha), \frac{1}{\lambda(\alpha)} A(\alpha) \overline{q(\alpha)} \rangle \\
&= z + \bar{z} \frac{1}{\lambda(\alpha)} \langle p(\alpha), A(\alpha) \overline{q(\alpha)} \rangle \\
&= z + \frac{\bar{z}}{\lambda(\alpha)} \langle A(\alpha)^T p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\
&= z + \frac{\bar{z}}{\lambda(\alpha)} \langle \overline{\lambda(\alpha)} p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle \\
&= z + \frac{\bar{z}}{\lambda(\alpha)} \lambda(\alpha) \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Agora, de (A.7) e de (A.8), temos

$$\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = \frac{\lambda(\alpha)}{\lambda(\alpha)} \langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle$$

Uma vez que $\lambda(\alpha) \neq \overline{\lambda(\alpha)}$, temos

$$\langle p(\alpha), \overline{q(\alpha)} \rangle = 0$$

E portanto

$$\langle p(\alpha), x \rangle = z$$

A.3 Lema. *O sistema*

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha) \tag{A.9}$$

pode ser escrito, para α suficientemente pequeno, na forma

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha)$$

onde $g = O(|z|^2)$ é uma função C^n dada por

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z} \overline{q(\alpha)}, \alpha) \rangle$$

Demonstração. De $z = \langle p(\alpha), x \rangle$ e de (A.9) conclui-se diretamente o resultado. $\square$

A expansão em Taylor de $g(z, \bar{z}, \alpha)$ em torno de α é dada por

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l$$

onde $g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z} \overline{q(\alpha)}, \alpha) \rangle|_{z=0}$
para $k+l \geq 2$, $k, l = 0, 1, 2, \dots$

Suponha que para $\alpha = 0$, $F(x, \alpha)$ seja representada por

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4)$$

onde $B(x, y)$ e $C(x, y, u)$ são multilineares simétricas, com $x, y, u \in \mathbb{R}^2$.

Temos

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \Big|_{\eta=0} x_j x_k, \quad i = 1, 2$$

e

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \Big|_{\eta=0} x_j y_k u_l \quad i = 1, 2$$

Desta maneira observe que

$$\begin{aligned} B(x, x) &= B(zq + \bar{z} \bar{q}, zq + \bar{z} \bar{q}) \\ &= B(zq, zq + \bar{z} \bar{q}) + B(\bar{z} \bar{q}, zq + \bar{z} \bar{q}) \\ &= B(zq, zq) + B(zq, \bar{z} \bar{q}) + B(\bar{z} \bar{q}, zq) + B(\bar{z} \bar{q}, \bar{z} \bar{q}) \\ &= z^2 B(q, q) + z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}z B(\bar{q}, q) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}) \\ &= z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}) \end{aligned} \tag{A.10}$$

uma vez que $B(q, \bar{q}) = B(\bar{q}, q)$, já que B é simétrica. Estamos denotando $q = q(0)$ e $p = p(0)$.

Sendo assim, os termos quadráticos em

$$g(z, \bar{z}, 0) = g_{11}(0)z\bar{z} + \frac{1}{2!}[g_{20}(0)z^2 + g_{02}(0)\bar{z}^2] + \frac{1}{2!}[g_{21}(0)z^2\bar{z} + g_{12}(0)z\bar{z}^2] + \dots$$

podem ser expressos por

$$g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle$$

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle$$

$$g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle$$

Se fizermos cálculos similares com $C(x, x, x) = C(zq + \bar{z} \bar{q}, zq + \bar{z} \bar{q}, zq + \bar{z} \bar{q})$ obtemos os coeficientes dos termos de ordem 3 e

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle$$

A.4 Lema. *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

onde $\lambda = \lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \quad (\text{A.11})$$

para $|\alpha| \ll 1$, na equação sem termos quadráticos

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3)$$

Demonstração. Consideremos a mudança de coordenadas inversa dada por

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

Assim

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11} (\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) - h_{02} \bar{z} \dot{\bar{z}} + O(|z|^3) \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{z}^2 + O(|z|^3) \\ &= \lambda w + \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w} + \frac{1}{2} (g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}) \bar{w}^2 + O(|w|^3) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Para eliminarmos os termos de ordem 2 fazemos $g_{20} - \lambda h_{20} = 0$, $g_{11} - \bar{\lambda} h_{11} = 0$ e $g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02} = 0$, que respectivamente nos dá $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$, $h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}$ e $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$.

Isto é sempre possível, pois para $|\alpha| \ll 1$, $\lambda(\alpha) \neq 0$ e $\lambda(\alpha) \neq \overline{\lambda(\alpha)}$ pois $\lambda(0) = i\omega_0 \neq 0$. $\square$

A.5 Lema. *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + O(|z|^4) \quad (\text{A.13})$$

onde $\lambda = \lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pode ser transformada pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3$$

para $|\alpha| \ll 1$, na equação somente com termos cúbicos

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4)$$

onde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demonstração. Considerando a transformação inversa

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4)$$

procede-se de maneira análoga à demonstração anterior, observando que um candidato para eliminarmos o termo $w^2\bar{w}$ seria $h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$. Veja que isto é possível para $\alpha \neq 0$, mas para $\alpha = 0$, $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$. Então escolhemos $h_{21} = 0$ e denota-se $\frac{g_{21}}{2} = c_1$. $\square$

A.6 Definição. O termo $w^2\bar{w}$ é chamado termo ressonante.

O seu coeficiente é o mesmo coeficiente do termo cúbico $z^2\bar{z}$ na equação (A.13).

A.7 Lema. A equação

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + O(|z|^4) \quad (\text{A.14})$$

pode ser transformada, pela mudança de coordenadas

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3$$

para $|\alpha| \ll 1$, na equação com apenas um termo cúbico

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4) \quad (\text{A.15})$$

onde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Demonstração. Aplicamos o lema (A.4) para eliminarmos os termos quadráticos. Veja que a transformação alterará os termos cúbicos. Representemos o coeficiente de $w^2\bar{w}$ por $\frac{1}{2}g_{21}^*$. Quando aplicamos o lema (A.5) eliminamos os termos de ordem 3, exceto o termo $\frac{1}{2}g_{21}^*$, que é o termo ressonante. $\square$

A.8 Lema. O coeficiente $c_1(\alpha)$ da equação (A.15), para $\alpha = 0$, é dado por

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2} \quad (\text{A.16})$$

Demonstração. Diferenciando $z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2$ obtemos $\dot{z} = \dot{w} + h_{20}w\dot{w} + h_{11}(w\dot{\bar{w}} + \bar{w}\dot{w}) + h_{02}\bar{w}\dot{\bar{w}}$.

Substituindo $\dot{w}$ e $\dot{\bar{w}}$, usando (A.15), obtemos

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}g_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{6}g_{30}z^3 + \frac{1}{2}g_{21}z^2\bar{z} + \frac{1}{2}g_{12}z\bar{z}^2 + \frac{1}{6}g_{03}\bar{z}^3 + O(|z|^4)$$

Substituindo z e $\bar{z}$, dados por (A.11), e escrevendo apenas os termos de interesse obtemos

$$\begin{aligned} \dot{z} = \lambda z + \frac{1}{2}(\lambda h_{20} + g_{20})w^2 + (\lambda h_{11} + g_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(\lambda h_{02} + g_{02})\bar{w}^2 + \\ + [g_{20}h_{11} + g_{11}(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11}) + \frac{g_{02}\bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2}]w^2\bar{w} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Comparando os coeficientes do termo cúbico $w^2\bar{w}$ nas duas equações obtidas acima, e utilizando $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$, $h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}$ e $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$ temos

$$\begin{aligned} c_1(\alpha) &= g_{20}h_{11} + g_{11}(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11}) + \frac{g_{02}\bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{g_{20}g_{11}}{\lambda} + g_{11}(\frac{g_{20}}{2\lambda} + \frac{\bar{g}_{11}}{\lambda}) + \frac{g_{02}\bar{g}_{02}}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{g_{20}g_{11}}{\lambda} + \frac{g_{11}g_{20}}{2\lambda} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Para $\alpha = 0$ temos

$$\begin{aligned} c_1(0) &= \frac{g_{20}g_{11}(2i\omega_0 - i\omega_0)}{2\omega_0^2} + \frac{|g_{11}|^2}{i\omega_0} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2i\omega_0 + i\omega_0)} + \frac{g_{21}}{2} \\ &= \frac{i}{2\omega_0}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A.9 Lema. *Considere a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\gamma(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4) \quad (\text{A.20})$$

onde $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suponha que $\gamma'(0) \neq 0$ e que $\text{Re}[c_1(0)] \neq 0$, onde $\text{Re}[c_1(0)]$ significa a parte real de $c_1(0)$. Então a equação acima pode ser transformada, por mudança de coordenada, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\chi + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4) \quad (\text{A.21})$$

onde u é a nova coordenada complexa, θ e χ são os novos tempos e parâmetros, respectivamente, e $s = \text{sign}[\text{Re}[c_1(0)]] = \pm 1$.

Demonstração. Introduzindo o novo tempo $\tau = \omega(\alpha)t$, que preserva a direção, pois $\omega(\alpha) > 0$, $\forall |\alpha| \ll 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= [(\gamma(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w^2\bar{w} + O(|w|^4)] \frac{1}{\omega(\alpha)} \\ &= \frac{\gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)}{\omega(\alpha)}w + \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)}w|w|^2 + O(|w|^4) \\ &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

onde $\chi = \chi(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha)}{\omega(\alpha)}$ e $d_1(\chi) = \frac{c_1(\alpha(\chi))}{\omega(\alpha(\chi))}$.

Podemos considerar χ como nosso parâmetro já que $\chi(0) = 0$, $\chi'(0) = \frac{\gamma'(0)}{\omega(0)} \neq 0$, e, portanto, o *Teorema da Função Inversa* nos garante a existência local e suave de α como função de χ .

Vamos agora, reparametrizar novamente o tempo com a nova mudança $\theta = \theta(\tau, \chi)$ onde $d\theta = (1 + e_1(\chi)|w|^2)d\tau$, com $e_1(\chi) = \text{Im}[d_1(\chi)]$, sendo $\text{Im}[d_1(\chi)]$ a parte imaginária de $d_1(\chi)$.

Assim obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} \\
&= [(\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4)] \frac{1}{1 + e_1(\chi)|w|^2} \\
&= [(\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4)][1 - e_1(\chi)|w|^2 + e_1^2(\chi)|w|^4 + \dots]
\end{aligned} \tag{A.23}$$

onde consideramos a expansão de $\frac{1}{1 + e_1(\chi)|w|^2}$ para w próximo de 0. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\theta} &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 - (\chi + i)e_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4) \\
&= (\chi + i)w + \operatorname{Re}[d_1(\chi)]w|w|^2 + i\operatorname{Im}[d_1(\chi)]w|w|^2 - \chi e_1(\chi)w|w|^2 \\
&\quad - ie_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4) \\
&= (\chi + i)w + [\operatorname{Re}[d_1(\chi)] - \chi e_1(\chi)]w|w|^2 + O(|w|^4)
\end{aligned} \tag{A.24}$$

pois $e_1(\chi) = \operatorname{Im}[d_1(\chi)]$.

Portanto

$$\frac{dw}{d\theta}(\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

onde

$$l_1(\chi) = \operatorname{Re}[d_1(\chi)] - \chi e_1(\chi) \tag{A.25}$$

Veja que $l_1(\chi) \in \mathbb{R}$ com $l_1(0) = \operatorname{Re}[d_1(0)]$, o que nos dá

$$l_1(0) = \operatorname{Re}\left(\frac{c_1(\alpha(0))}{\omega(\alpha(0))}\right) = \frac{\operatorname{Re}c_1(0)}{\omega(0)} \tag{A.26}$$

Finalmente, introduzindo a nova variável complexa u , dada pela expressão

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}}$$

que é possível, pois $\operatorname{Re}[c_1(0)] \neq 0$, e, portanto, $l_1(0) \neq 0$, a equação se escreve como

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{du} \frac{du}{d\theta} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} \frac{du}{d\theta} \\
&= (\chi + i) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} + l_1(\chi) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} \left| \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}} \right|^2 + \dots
\end{aligned} \tag{A.27}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\theta} &= (\chi + i)u + \frac{l_1(\chi)}{|l_1(\chi)|} u|u|^2 + O(|u|^4) \\
&= (\chi + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)
\end{aligned} \tag{A.28}$$

onde $s = \text{sign}[l_1(0)] = \text{sign}[\text{Re}[c_1(0)]] = \pm 1$. □

A.10 Definição. A função $l_1(\chi)$ é chamada de primeiro coeficiente de Liapunov.

De (A.26) temos que

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}) \tag{A.29}$$

Observação: Note que se a equação (A.21), com $s = -1$, for escrita na sua forma real, coincidirá com o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - (x^2 + y^2)x + O(\|x\|^4) \\ \dot{y} = x + \alpha y - (x^2 + y^2)y + O(\|x\|^4) \end{cases} \tag{A.30}$$

Reunindo os resultados anteriores, podemos enunciar o

A.11 Teorema. [Forma Normal da Bifurcação de Hopf] *Qualquer sistema bidimensional*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \tag{A.31}$$

com $f \in C^n(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, tendo a singularidade $x = 0$, $\forall |\alpha| \ll 1$, com autovalores $\lambda_{1,2}(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha)$, onde $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, satisfazendo as condições

- (1) $l_1(0) \neq 0$ (não degenerescência);
- (2) $\gamma'(0) \neq 0$ (transversalidade)

é localmente topologicamente equivalente em torno da origem, a uma das seguintes formas normais

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 - y_2 \pm (y_1^2 + y_2^2)y_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 + \alpha y_2 \pm (y_1^2 + y_2^2)y_2 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Referências Bibliográficas

- [BCD] Benoit E., Callot J. L., Diener F., Diener M. *Chasse au canard*. Colectanea Mathematica, 31-32 (1-3), 37-119, 1981.
- [Bon] Bonckaert P. *Partially hyperbolic fixed points with constraints*, Trans. Amer. Math. Soc.
- [C] Chicone C. *Ordinary Differential Equations with Applications*, texts in Applied Mathematics 34, Springer, USA, 1999.
- [DeR] Denkowska Z., Roussarie R. *A Method of desingularization for analytic two-dimensional vector field families*, Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 22, No 1, 93-126, 1991.
- [DR] Dumortier F., Roussarie R. *Canard cycles and center manifolds*. With an appendix by Cheng Zhi Li. Mem. Amer. Math. Soc. 121 (1996), no. 577.
- [E] Eckhaus W. *Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks*, in Asymptotic Analysis II, Springer Lect. Notes in Math. 985, 449-494, 1983.
- [K] Kusnetzov Y. A., *Elements of applied bifurcation theory*, in Applied Mathematics Sciences, 112, Springer, USA, 1998.
- [P4] Software Matemático, veja o site <http://mat.uab.es/~artes/p4/p4.htm>
- [S] Sotomayor J. *Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds*, in Publications Mathématiques de l'IHÉS, 43 (1974), p. 5-46.