**Transformação conforme do disco unitário
como ferramenta para a resolução de
problemas do tipo Poisson**

Julieta Soledad Rodríguez

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau
de
Mestre em Matemática

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl**

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro da
CNPq

São Paulo - julho - 2005

Transformação conforme do disco unitário
como ferramenta para a resolução de
problemas do tipo Poisson

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Julieta Soledad Rodríguez e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, agosto de 2005.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl - IME-USP
- Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos - IME-USP
- Prof. Dr. Celso Pupo Pesce - EP-USP

A Marta Inés Salvarezza

Agradecimentos

Agradeço principalmente a meus pais, minha irmã, minha sobrinha, meus padrinhos e minha família em geral.

Agradeço ao Instituto de Matemática e Estadística da Universidade de São Paulo e em particular ao meu orientador o Prof. Dr. Nelson Mugayar Kuhl.

Agradeço aos meus professores da Universidad Nacional de Mar del Plata.

Agradeço em forma especial a todos meus amigos.

Resumo

No presente trabalho foram estudados métodos numéricos para a transformação conforme do disco, implementando em particular o método iterativo desenvolvido por Fornberg. Foi realizada também uma aplicação à resolução numérica de equações do tipo Poisson em domínios simplesmente conexos, obtendo uma formulação do problema similar ao correspondente caso em coordenadas polares, resultando em discretizações convenientes e utilização de métodos de resolução rápidos e eficientes.

Abstract

In the present work numerical conformal mapping methods for the disk had been studied, implementing, in particular, the iterative method developed by Fornberg. An application to numerical resolution of Poisson-type equations in simply connected regions has been carried out too, obtaining a similar formulation to the correspondent polar coordinate problem, resulting in appropriate discretizations and generation of fast and accurate method solvers.

Sumário

Introdução	1
1 Métodos numéricos para a transformação conforme	3
2 Método iterativo de Fornberg	8
2.1 Descrição do método iterativo de Fornberg	8
2.2 Relação entre os métodos iterativos de Fornberg e Wegmann .	13
2.3 Implementação	14
2.4 Testes computacionais	18
3 Aplicação	30
3.1 Resolução numérica de equações do tipo Poisson em domínios simplesmente conexos	31
3.2 Testes computacionais	35
Conclusões	39
Apêndice: Ordem de aproximação do método iterativo de Fornberg	41
Referências bibliográficas	43

Introdução

O desenvolvimento de métodos numéricos para o cálculo da transformação conforme do disco unitário tem despertado grande interesse, devido principalmente ao fato que proporciona uma ferramenta poderosa para a resolução numérica de equações diferenciais parciais em domínios bidimensionais simplesmente conexos, surgidos naturalmente em diferentes campos da ciência. Em particular, existe um grande número de problemas nos quais é útil conhecer a distribuição no tempo de certas propriedades elétricas dos materiais, como a condutividade σ e a permissividade ϵ , sob a influência de campos elétricos. O potencial elétrico ou voltagem u no corpo Ω é governado pela equação $\nabla \cdot (\gamma(x, \omega) \nabla u) = 0$, onde $x \in \Omega$, a função de admitância γ é dada por $\gamma(x, \omega) = \sigma(x, \omega) + i\omega\epsilon(x, \omega)$ e ω corresponde à frequência angular da corrente aplicada. A inversa da função γ representa a impedância elétrica, a qual mede a razão entre o campo elétrico e a corrente elétrica em cada ponto.

A tomografia por impedância elétrica (TIE) corresponde ao problema inverso da determinação da impedância no interior do domínio Ω , dadas as medições de correntes elétricas diretas ou indiretas na fronteira do domínio. Os diferentes tipos de materiais apresentam diferentes propriedades elétricas, portanto as funções σ e ϵ podem ser utilizadas para inferir a estrutura interna do domínio. Devido a isto, a TIE é uma ferramenta com importantes aplicações nas áreas de medicina, geofísica, ciências do meio ambiente e ensaios não destrutivos de materiais. Exemplos de aplicações médicas de TIE

são a detecção de embolia pulmonar, monitoramento de apnea, monitoramento do fluxo sanguíneo ao coração e detecção de câncer de mama. Em geofísica e ciências do meio ambiente, TIE pode ser utilizada na localização de depósitos minerais subterrâneos, detecção de vazamento em tanques de armazenagem subterrânea, e monitoramento de escoamento de fluidos injetados na terra, com o propósito de extração de petróleo ou limpeza do meio ambiente. Finalmente, em ensaios não destrutivos de materiais, TIE pode ser utilizada na detecção de corrosão e fraturas em metais ([CIN], [Bo]).

No Capítulo 1 do presente trabalho é apresentado um resumo das principais abordagens do problema de aproximação da transformação conforme, referenciando uma grande quantidade de trabalhos propostos na literatura para tal fim, assim como uma breve descrição dos métodos mais importantes.

Em particular, os métodos baseados na discretização da série de Fourier tem adquirido outra perspectiva desde a aparição do algoritmo para a transformada rápida de Fourier (FFT) em 1965 ([CT]). O Capítulo 2 descreve um eficiente método desenvolvido a partir da utilização da FFT: o método iterativo de Fornberg. No capítulo são descritas ainda a implementação considerada no presente trabalho e a análise dos resultados obtidos para os diferentes testes computacionais realizados.

No Capítulo 3 é apresentada uma aplicação da transformação conforme à resolução numérica de equações do tipo Poisson em domínios simplesmente conexos, e os correspondentes resultados obtidos para os testes computacionais realizados.

Finalmente, são expostas as conclusões correspondentes ao presente trabalho e o Apêndice composto de resultados relativos à ordem de aproximação do método iterativo de Fornberg.

Capítulo 1

Métodos numéricos para a transformação conforme

Existe uma grande quantidade de métodos numéricos propostos na literatura para calcular aproximações da função descrita no Teorema da Aplicação de Riemann ([Ne], [Bi]) e muitas classificações poderiam ser feitas, por exemplo, em função do tipo de domínio estudado (simples, dupla ou multiplamente conexo, poligonal, etc.) ou em função do tipo de parametrização da fronteira do domínio. A seguir apresenta-se uma classificação dos métodos a partir da escolha do domínio e do contradomínio para a transformação conforme.

Distinguem-se dois grupos: o que contém as transformações conformes que levam um domínio especificado em um domínio canônico conveniente como o disco unitário, e o grupo que considera as transformações na direção contrária.

No primeiro grupo, entre os métodos mais importantes encontram-se o desenvolvido por Symm [Sy], estudado também por Henrici [He2], Hayes, Kahaner e Kellner [HKK] e Driscoll [Dr] entre outros, o qual resolve uma equação integral linear; o processo construtivo de Chakravarthy e Anderson [CA] baseado na discretização das equações de Cauchy-Riemann e algumas

técnicas de otimização; e por último, os métodos relacionados com os núcleos de Bergman e Szego, e o método de Ritz [Be], [Tru], [Pr], [PaKo].

No segundo grupo, existe uma grande variedade de técnicas para aproximar a equação integral gerada pelo método de Theodorsen: Henrici [He2], Menikoff e Zemach [MeZ], Meiron e Orzag [MO], Gutknecht [Gu1], [Gu2], [Gu3], [Gu4], Cheng Li e Syngellakis [CLS]. Encontram-se também os métodos do tipo Newton de Fornberg [Fo1], [Fo2], [DePf], [DeHoPf], [DeEl], [De], [DeElPf], [Po] e Wegmann [We1], [We2], [We3], [We4], [We5] que essencialmente têm o propósito de aproximar os coeficientes da série truncada de Taylor da transformação conforme. O cálculo da fórmula fechada de Schwarz-Cristoffel para domínios poligonais [Tre], [FZ], [BTr], [DrTre] também poderia ser destacado neste segundo grupo.

A seguir apresenta-se uma breve descrição dos principais métodos.

Sejam Ω_z e Ω_w domínios simplesmente conexos no plano complexo limitados por C_z e C_w respectivamente. O problema consiste em determinar uma função analítica bijetora $f(z)$ de Ω_z em Ω_w .

Método de Theodorsen Ω_z é o disco unitário e Ω_w é um domínio “star-like”¹ com respeito à origem. A fronteira de C_w é dada em coordenadas polares,

$$C_w : w(\varphi) = \rho(\varphi)e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

O valor de $f(z)$ na fronteira pode ser escrito em termos da função de correspondência entre fronteiras (BCF) $\varphi(\theta)$ tal que

$$f(e^{i\theta}) = \rho(\varphi(\theta))e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

¹Todo raio a partir de um ponto fixo do interior do domínio possui uma única intersecção com a fronteira.

Foi provado [He2] que $\varphi(\theta)$ satisfaz a equação de Theodorsen

$$\varphi(\theta) - \theta = K \cdot \log \rho(\varphi(\theta)), \quad (1.1)$$

a qual possui uma única solução contínua para $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ quando $\rho(\varphi)$ é qualquer função positiva contínua de período 2π , onde o operador de conjugação K é definido por

$$K \cdot f(t) = \frac{1}{2\pi} VP \int_0^{2\pi} f(s) \cot \frac{t-s}{2} ds.$$

Existe um grande número de métodos iterativos não lineares para resolver a equação (1.1), os quais requerem a cada passo só duas aplicações da transformada rápida de Fourier (FFT) para realizar a operação de conjugação.

É importante observar que desde a aparição do algoritmo para a transformada rápida de Fourier (FFT) em 1965 ([CT]), os métodos baseados na discretização da série de Fourier e do operador de conjugação tem adquirido outra perspectiva (ver [He2]).

Método de Symm Ω_z é um domínio que contém a origem e Ω_w é o disco unitário. Seja $z = z(\tau)$, $0 \leq \tau \leq \beta$ uma parametrização para C_z . É suficiente conhecer os valores $f(z(\tau))$ na fronteira C_z de Ω_z . Como $|f(z(\tau))| = 1$, é preciso achar a função contínua $\theta(\tau) = \arg(f(z(\tau)))$. Foi provado por Gaier [He2] que $\theta'(\tau)$ satisfaz a equação integral de primeira espécie

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\beta \log |z(\sigma) - z(\tau)| \theta'(\tau) d\tau = \log |z(\sigma)|, \quad 0 \leq \sigma \leq \beta,$$

chamada equação integral de Symm. Para resolver esta equação numericamente tem sido desenvolvidos uma grande quantidade de algoritmos

utilizando a FFT, os que podem-se encontrar nas referências antes mencionadas.

Métodos variacionais Ω_w é o disco unitário e Ω_z um domínio que contém a origem. Considera-se uma aproximação de f da forma

$$f_n(z) = \sum_{j=1}^n a_j u_j(z),$$

onde $\{u_j\}$ é uma base de funções apropriada. O método de Ritz é baseado na propriedade de que a derivada f' da transformação conforme minimiza a integral

$$\int \int_{\Omega_z} |u(z)|^2 dx dy$$

sobre a classe das funções $u(z)$ analíticas em Ω_z quadrado integráveis tal que $u(0) = 1$. Os coeficientes a_j da aproximação são determinados mediante a resolução de um sistema de equações linear complexo de dimensão $(n-1) \times (n-1)$ com matriz de coeficientes de Gram. O método do núcleo de Bergman é baseado na utilização da função núcleo de Bergman em Ω_z , a qual está fortemente relacionada com a função f' que minimiza a integral e por esta razão os dois métodos são considerados teoricamente equivalentes. A aproximação no segundo método é feita mediante a construção de uma representação em série de Fourier para a função núcleo e os coeficientes são obtidos a partir de um processo de normalização, e portanto os métodos são computacionalmente diferentes.

Método de Wegmann Seja $\eta(s)$ uma função complexa periódica de período 2π , com derivada $\eta' \neq 0$ contínua satisfazendo a condição de Lipschitz, que parametriza a curva C_w , e seja Ω_z o disco unitário. O valor de $f(z)$

na fronteira pode ser escrito na forma

$$f(e^{it}) = \eta(s(t))$$

onde s representa uma função real tal que $s(t) - t$ é contínua e periódica de período 2π . O método consiste em resolver esta equação por um método do tipo Newton. Começando por uma função suficientemente suave $s_0(t)$, é construída uma seqüência de funções $f_k, s_k, k = 1, 2, \dots$ satisfazendo a equação linearizada

$$f_{k+1}(e^{it}) = \eta(s_k(t)) + U_k(t)\eta'(s_k(t)), \quad k \geq 0, \quad (1.2)$$

onde $U_k(t) = s_{k+1}(t) - s_k(t)$. A eficiência do método é baseada principalmente no fato de que U_k pode ser expressado explicitamente utilizando o operador de conjugação K .

No presente trabalho serão considerados domínios com fronteiras suaves e pouco deformados em relação ao disco. Para trabalhar com este tipo de domínios foi escolhido o método iterativo de Fornberg, apresentado no seguinte capítulo. Este método corresponde a uma versão discreta do processo iterativo de Wegmann descrito acima, é muito eficiente e de fácil implementação.

Capítulo 2

Método iterativo de Fornberg

O presente capítulo descreve o método iterativo de Fornberg apresentado em [Fo1], a sua relação com o método apresentado por Wegmann em [We1] e [We2], a implementação considerada no presente trabalho e a análise dos resultados obtidos para os diferentes testes computacionais realizados.

2.1 Descrição do método iterativo de Fornberg

Dada uma curva suave J , fronteira de um domínio simplesmente conexo que contém no seu interior a origem do plano complexo, procura-se a transformação conforme $f(z)$ do disco unitário no domínio dado tal que $f(0) = 0$. Para que a função esteja univocamente determinada é necessária mais uma condição, geralmente $f'(0) > 0$ ou a especificação do valor da função em um ponto particular. No presente trabalho vamos impor uma condição do segundo tipo.

Para $z(\theta) = e^{2\pi i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$, na circunferência unitária, a transformação $f(z(\theta))$ é uma função complexa e periódica de período 2π (a função de cor-

respondência entre fronteiras (BCF)). Portanto pode-se escrever

$$f(z(\theta)) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} e^{2\pi i \nu \theta}. \quad (2.1)$$

Considerando agora $\theta_k = k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$,

$$\xi_k = f(z(\theta_k)) = \sum_{\nu=-N/2+1}^{N/2} d_{\nu} e^{2\pi i \nu k/N} = \sum_{\nu=-N/2+1}^{N/2} d_{\nu} w^{\nu k}, \quad (2.2)$$

onde $w = e^{2\pi i/N}$.

Invertendo a transformada discreta de Fourier (DFT) em (2.2) obtemos

$$d_{\nu} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k w^{-k\nu}, \quad \nu = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

O objetivo é achar os pontos ξ_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$ na curva J , de tal forma que $d_{\nu} = 0$ para $\nu = -N/2 + 1, \dots, 0$.

Em resumo, dado um conjunto de N pontos na curva correspondente à fronteira do domínio dado, vamos descrever a estratégia apresentada por Fornberg para transladar os pontos ao longo da curva de tal forma que correspondam, pela transformação conforme, às N raízes da unidade na circunferência unitária, e calcular aproximações para os primeiros $N/2$ coeficientes de Taylor da transformação.

O método consiste em um processo iterativo de convergência quadrática, que será chamado de iteração externa e um processo que resolve a cada passo um sistema linear de equações, chamado de iteração interna.

Iteração externa

Vamos considerar os pontos ζ_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, monotonicamente distribuídos ao longo da curva J , representando aproximações dos números ξ_k 's. Para cada escolha dos pontos, consideramos a função

$$\zeta(z) = \sum_{\nu=-N/2+1}^{N/2} d_\nu z^\nu, \quad (2.3)$$

onde os coeficientes d_ν 's são obtidos mediante a aplicação da DFT aos pontos ζ_k 's, ou seja,

$$d_\nu = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_k w^{-k\nu}, \quad \nu = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (2.4)$$

Desejamos transladar estes pontos ζ_k 's sobre a curva J , de tal forma que $d_\nu = 0$ para $\nu = -N/2 + 1, \dots, 0$.

Os pontos ζ_k são trasladados em duas etapas. Em primeiro lugar, vamos trasladá-los uma distancia t_k na direção tangencial e_k correspondente a cada ponto ζ_k (com $|e_k| = 1$), de tal forma que $d_0 = d_{-1} = \dots = d_{-N/2+1} = 0$:

$$0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\zeta_k + t_k e_k) w^{-k\nu}, \quad \nu = -\frac{N}{2} + 1, \dots, 0. \quad (2.5)$$

Em segundo e último lugar, os pontos $\zeta_k + t_k e_k$ são levados de volta para a curva J . Como a curva é suave, a distancia à curva é $O(t^2)$ (ver Seção 2.3), de onde provém a convergência quadrática desta iteração externa.

Subtraindo a ν -ésima equação de (2.5) da ν -ésima equação de (2.4) obtemos $N/2$ equações lineares complexas para as N incógnitas reais t_k :

$$d_\nu = -\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} t_k e_k w^{-k\nu}, \quad \nu = -\frac{N}{2} + 1, \dots, 0, \quad (2.6)$$

ou equivalentemente em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_{-1} \\ d_{-2} \\ \vdots \\ d_{-N/2+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & \cdots & w^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N/2-1} & w^{N-2} & w^{3N/2-3} & \cdots & w^{(N/2-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 t_0 \\ e_1 t_1 \\ e_2 t_2 \\ \vdots \\ e_{N-1} t_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Agrupando as colunas de numeração par e ímpar da matriz de (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} d_0 \\ d_{-1} \\ d_{-2} \\ \vdots \\ d_{-N/2+1} \end{bmatrix} &= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{N-2} \\ 1 & w^4 & w^8 & \cdots & w^{2N-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-2} & w^{2N-4} & \cdots & w^{2(N/2-1)^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_0 & & & & \\ & e_2 & & & \\ & & e_4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e_{N-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0 \\ t_2 \\ t_4 \\ \vdots \\ t_{N-2} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{N} \begin{bmatrix} w^0 & & & & \\ & w^1 & & & \\ & & w^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & w^{N/2-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{N-2} \\ 1 & w^4 & w^8 & \cdots & w^{2N-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-2} & w^{2N-4} & \cdots & w^{2(N/2-1)^2} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} e_1 & & & & \\ & e_3 & & & \\ & & e_5 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e_{N-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_1 \\ t_3 \\ t_5 \\ \vdots \\ t_{N-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ou

$$-\mathbf{d} = \frac{1}{N} F E_0 \mathbf{t}_0 + \frac{1}{N} W F E_1 \mathbf{t}_1. \quad (2.9)$$

Nesta última equação, F representa a matriz da DFT de ordem $N/2$; as matrizes $\frac{1}{\sqrt{N/2}} F$, E_0 , E_1 e W são unitárias. O produto de um vetor por qualquer uma destas matrizes ou suas inversas requer no máximo $O(N \log N)$

operações.

Iteração interna

Consideramos a seguinte iteração: dado um vetor real arbitrário $\mathbf{t}_0^{(0)}$, resolvemos (2.9) para achar o vetor complexo $\mathbf{t}_1^{(0)}$; tomamos então a parte real deste vetor e resolvemos (2.9) para achar $\mathbf{t}_0^{(1)}$ do qual novamente tomamos a parte real. O vetor real $\mathbf{t}_0^{(1)}$ assim obtido depende linearmente do vetor $\mathbf{t}_0^{(0)}$. Portanto podemos escrever

$$\mathbf{t}_0^{(1)} = A\mathbf{t}_0^{(0)} + \mathbf{b} \quad (2.10)$$

onde a matriz A e o vetor $\mathbf{b}$ possuem as seguintes expressões:

$$A = RR^T, \text{ onde } R = \text{Real}(C), \quad C = \frac{2}{N}E_0^H F^H W F E_1 \quad (2.11)$$

e

$$\mathbf{b} = -2\text{Real}\{E_0^H F^H [\mathbf{d} - \frac{2}{N}W F E_1 \text{Real}(E_1^H F^H W^H \mathbf{d})]\}. \quad (2.12)$$

A matriz A é simétrica e semidefinida positiva e C é uma matriz complexa unitária. Como $\|A\|_2 = \|R\|_2^2 \leq \|C\|_2^2 = 1$, os valores próprios λ_i de A satisfazem

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, N/2 - 1.$$

Se existir uma solução real $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ de (2.9), $\mathbf{t}_0^{(0)} = \mathbf{t}_0$ implica que $\mathbf{t}_0^{(1)} = \mathbf{t}_0$ em (2.10). Portanto $\mathbf{t}_0$ satisfaz

$$G\mathbf{t}_0 = \mathbf{b}, \quad (2.13)$$

onde $G = I - A$ é também semidefinida positiva. Uma vez que $\mathbf{t}_0$ tenha sido calculado, $\mathbf{t}_1$ é obtido diretamente da equação (2.9).

Observe que a iteração interna foi desenhada para zerar não só os coeficientes $d_{-1}, d_{-2}, \dots, d_{-N/2+1}$ como também d_0 , obtendo portanto $\zeta(0) = 0$. Mas

a aplicação não está univocamente determinada, pois ainda não foi especificada a localização de um dos pontos. De fato, as N equações que obtemos da linearização gera um sistema de posto $N - 1$. Uma alternativa para resolver este problema seria impor $t_0 = 0$, onde t_0 representa a primeira componente do vetor $\mathbf{t}_0$ (isto significa que o ponto ζ_0 não é trasladado durante o processo) e considerar a primeira equação redundante. Portanto (2.13) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} g & \hat{\mathbf{g}}^T \\ \hat{\mathbf{g}} & \hat{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0 \\ \hat{\mathbf{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix}.$$

E assim, resolve-se simplesmente o sistema

$$\hat{G}\hat{\mathbf{t}}_0 = \hat{\mathbf{b}}. \quad (2.14)$$

A matriz G é semidefinida positiva e possui só um valor próprio igual a zero e os restantes muito próximos de $\lambda = 1$ ([Fo1], [We3]). Portanto a matriz $\hat{G}$ é definida positiva e também possui valores próprios próximos de $\lambda = 1$, o que permite utilizar o método dos gradientes conjugados (GC) sem a necessidade de um preconditionamento.

2.2 Relação entre os métodos iterativos de Fornberg e Wegmann

Foi demonstrado em [We3] que o método iterativo de Fornberg corresponde a uma versão discreta do processo iterativo apresentado por Wegmann em [We1] e [We2], descrito no Capítulo 1.

A diferença principal entre ambos, consiste na determinação de $U_k(t) = s_{k+1}(t) - s_k(t)$ no k -ésimo passo da iteração: enquanto Wegmann o representa explicitamente, Fornberg propõe a resolução da equação (1.2) na forma

discreta

$$f_{k+1}(e^{it_\nu}) = \eta(s_k(t_\nu)) + U_k(t_\nu)\eta'(s_k(t_\nu)),$$

$t_\nu = 2\pi(\nu - 1)/N$, $\nu = 1, \dots, N$, por um polinômio de grau $N/2$ determinado a partir da solução de um sistema linear de equações que envolve a matriz R (ver 2.11). Esta matriz R pode ser olhada como a discretização de um operador integral que, sob certas hipóteses, é compacto e possui uma seqüência de valores próprios reais que se acumulam na origem (único ponto de acumulação). Portanto, a matriz $G = I - RR^T$ possuirá uma seqüência de valores próprios reais acumulada entorno de $\lambda = 1$. Sendo assim, o método dos gradientes conjugados para a resolução do sistema linear de equações apresenta uma grande eficiência e, portanto, não há necessidade de um pre-condicionamento, como foi dito anteriormente.

No Apêndice pode-se encontrar um resultado correspondente à ordem de aproximação do método numérico.

2.3 Implementação

Qualquer representação da curva J pode ser utilizada na implementação deste método. Neste trabalho é assumido que J possui uma representação paramétrica

$$J : z = z(s), \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Dados os números reais $s_k \in [0, 2\pi)$, $1 \leq k \leq N$, a direção tangencial unitária em cada ponto $\zeta_k = z(s_k)$ foi calculada da seguinte forma:

$$e_k = \frac{z'(s_k)}{|z'(s_k)|}.$$

Para levar os pontos de volta à curva depois da translação na direção

tangencial, observemos que para uma constante real γ

$$z(s + \gamma) \cong z(s) + \gamma z'(s) = z(s) + \gamma |z'(s)| \mathbf{e} = z(s) + t \mathbf{e},$$

e portanto para cada valor de k , $1 \leq k \leq N$, pode ser definida a constante

$$\gamma_k = \frac{t_k}{|z'(s_k)|}$$

e os pontos trasladados ao longo da curva J como sendo

$$\zeta_k = z(s_k + \gamma_k), \quad 1 \leq k \leq N.$$

Por sua vez, o método dos gradientes conjugados para a resolução do sistema linear de equações foi implementado de acordo com a seguinte formulação, onde a notação é simplificada escrevendo (2.14) na forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. O método foi iniciado com

$$\mathbf{x}_0 = 0,$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0,$$

e as iterações para $i = 0, 1, 2, \dots$, foram calculadas utilizando as seguintes expressões

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i}{\mathbf{p}_i^T A \mathbf{p}_i},$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i \mathbf{p}_i,$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i A \mathbf{p}_i,$$

$$\beta_i = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i},$$

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_i \mathbf{p}_i.$$

A implementação apresentada nesta seção foi desenvolvida na linguagem de programação GNU¹ C utilizando precisão simples e executado num computador do IME-USP com as seguintes características: processador AMD² Opteron 242, 512Mb. de memória RAM e sistema operacional Linux, distribuição Debian³.

Os valores de N utilizados foram potências de 2, para aproveitar a eficiência do algoritmo para a FFT.

Foi realizado um grande número de testes numéricos para diferentes tipos de domínios, dos quais apenas 5 foram escolhidos para a apresentação de uma análise detalhada.

As iterações externas foram realizadas até que a norma do máximo ($\|d^-\|_\infty$) do vetor dos coeficientes correspondentes às potências negativas do polinômio gerado pelo método, foi menor que 10^{-7} ou o quociente entre duas normas consecutivas (denotado por DIV) foi menor que 2.

As iterações internas foram realizadas até que a norma do máximo do resíduo do método dos gradientes conjugados, calculada em cada passo da iteração, foi menor que 10^{-7} .

O custo computacional da iteração interna é dominado pelo custo da FFT. Para achar $\mathbf{d}$ (observar (2.4)) é preciso aplicar a transformada sobre N pontos, ou equivalentemente duas transformadas sobre $N/2$ pontos (denotadas 2 FFTs para simplificar). Para iniciar o método dos gradientes conjugados acrescentam-se 3 FFTs (para achar $\mathbf{b}$) e cada iteração requer 4 FFTs (para calcular $A\mathbf{p}_i$). Uma vez acabadas as iterações é preciso de mais 2 FFTs para achar $\mathbf{t}_1$. Portanto uma iteração externa com K iterações internas precisa $(7+4K)$ FFTs.

Nos exemplos para os quais existe uma expressão analítica da função de correspondência entre fronteiras, foi calculada a norma do máximo (NE) da

¹www.gnu.org

²www.amd.com

³www.debian.org

diferença entre os valores dos parâmetros $s_1, \dots, s_N$ achados com o método e os valores exatos.

Foram realizados testes duplicando sucessivamente o valor de N , desde $N = 8$ até $N = 4096$, e a comparação na fronteira foi feita a partir dos seguintes cálculos: em primeiro lugar o da norma do máximo (NP) da diferença entre os parâmetros $s_1, \dots, s_N$ correspondentes às raízes da unidade pela transformação conforme para $N/2$ e N respectivamente; em segundo lugar o da norma do máximo ($NF1$) da diferença entre os pontos da fronteira do domínio dado, achados a partir dos polinômios gerados com o método para $N/2$ e N respectivamente (calculada só nos valores $s_1, \dots, s_N$) e, em terceiro e último lugar, o da norma do máximo ($\|d^+\|_\infty$) do vetor dos coeficientes correspondentes às potências positivas do polinômio gerado pelo método a partir da duplicação do valor de N .

Também foi calculada a norma do máximo ($NF2$) da diferença entre os pontos da fronteira correspondentes à parametrização z nos valores $s_1, \dots, s_N$, e os correspondentes ao polinômio gerado com o método para cada valor de N .

Para cada valor de N a aproximação inicial dos parâmetros $s_1, \dots, s_N$ foi calculada a partir das raízes da unidade e da utilização da solução do problema para $N/2$.

Um esquema resumido do processo iterativo, poderia ser escrito da seguinte forma: seja N uma potência de 2, $k = 1$, e os N números reais $s_1, \dots, s_N$ no intervalo $[0, 2\pi)$ a aproximação inicial dos parâmetros correspondentes às raízes da unidade pela transformação conforme. Calcula-se $d^- = FFT_N(z(s))$ e $\|d^-\|_\infty$ e procede-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Enquanto } (\|d^-\|_\infty > 10^{-7}) \text{ e } (DIV > 1.85) \\
& t = \hat{G}^{-1}b(GC) \\
& \gamma = \frac{t}{|z'(s)|} \\
& s = s + \gamma \\
& d = FFT_N(z(s)) \\
& \text{calcula-se } \|d^-\|_\infty \\
& k = k + 1
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

Após o calculo $s = s + \gamma$ em cada passo da iteração, foi feita uma normalização e uma re-ordenação dos parâmetros no intervalo $[0, 2\pi)$, observação que condiz com a propriedade de preservação de orientação da transformação conforme.

2.4 Testes computacionais

A parametrização das curvas das fronteiras correspondentes aos domínios escolhidos para a apresentação da análise na presente seção foi a seguinte:

$$z(s) = e^{is}(a_{-1}e^{is} + a_0 + a_1e^{-is} + a_2e^{-2is} + a_3e^{-3is} + a_4e^{-4is})$$

onde $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, e a_4$ são constantes reais.

Teste 1 (ellipse) Fronteira do domínio parametrizada por

$$z(s) = e^{is} + a_2e^{-is}, \text{ ou seja } a_{-1} = 0, a_0 = 1, a_1 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0.$$

A expressão analítica da função de correspondência entre fronteiras $\theta(s)$ (do domínio dado na circunferência unitária) está dada por

$$\theta(s) = s + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{(2a_2)^m}{1 + (2a_2)^{2m}} \sin(2ms).$$

A Tabela 2.1 exibe os resultados obtidos para as normas $NF1$, $NF2$, NE , $\|d^-\|_\infty$ e $\|d^+\|_\infty$ correspondentes a $a_2 = 0.30$. Esta última expressão representa a norma do máximo do vetor dos coeficientes correspondentes às potências positivas do polinômio gerado pelo método a partir da duplicação do valor de N .

A Figura 2.1, apresenta o domínio correspondente; onde foram desenhadas só as curvas correspondentes às imagens pela transformação conforme de 10 raios uniforme-mente distribuídos e 10 circunferências concêntricas igualmente espaçadas.

N	NP	$NF1$	$NF2$	NE	$\ d^-\ _\infty$	$\ d^+\ _\infty$
8	—	—	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$	—
16	$6.4 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$9.2 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-1}$
32	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$8.0 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$9.2 \cdot 10^{-2}$
64	$9.5 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-2}$
128	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$
256	$5.8 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$
512	$9.5 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$8.5 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-8}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$
1024	$4.7 \cdot 10^{-7}$	$8.3 \cdot 10^{-7}$	$9.3 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$
2048	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$3.7 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
4096	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$5.9 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-8}$	$1.0 \cdot 10^{-8}$

Tabela 2.1: Teste 1, $a_2 = 0.30$

Teste 2 (triângulo arredondado) Fronteira do domínio parametrizada por

$$z(s) = e^{is} + a_3 e^{-2is}, \text{ ou seja } a_{-1} = 0, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_4 = 0.$$

A Tabela 2.2 exibe os resultados correspondentes a $a_3 = 0.20$.

A Figura 2.2 apresenta o domínio correspondente.

Figura 2.1: Transformação conforme do Teste 1, $a_2 = 0.30$.

N	NP	$NF1$	$NF2$	$\ d^-\ _\infty$	$\ d^+\ _\infty$
8	—	—	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	—
16	$2.0 \cdot 10^{-1}$	$2.8 \cdot 10^{-1}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$9.2 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-1}$
32	$1.3 \cdot 10^{-1}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$7.6 \cdot 10^{-6}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$5.7 \cdot 10^{-2}$
64	$5.9 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$5.6 \cdot 10^{-7}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$
128	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-7}$	$9.8 \cdot 10^{-8}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$
256	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$9.8 \cdot 10^{-8}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$
512	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$8.9 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$
1024	$5.7 \cdot 10^{-6}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$8.6 \cdot 10^{-8}$	$2.8 \cdot 10^{-5}$
2048	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$5.9 \cdot 10^{-7}$	$3.0 \cdot 10^{-6}$	$8.3 \cdot 10^{-8}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$
4096	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$4.2 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$8.3 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$

Tabela 2.2: Teste 2, $a_3 = 0.20$

Teste 3 (quadrado arredondado) Fronteira do domínio parametrizada por

$$z(s) = e^{is} + a_4 e^{-3is}, \text{ ou seja } a_{-1} = 0, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0.$$

A Tabela 2.3 exibe os resultados correspondentes a $a_4 = -0.10$.

Figura 2.2: Transformação conforme do Teste 2, $a_3 = 0.20$.

A Figura 2.3 apresenta o domínio correspondente.

N	NP	$NF1$	$NF2$	$\ d^-\ _\infty$	$\ d^+\ _\infty$
8	—	—	$1.0 \cdot 10^{-1}$	$9.9 \cdot 10^{-2}$	—
16	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-1}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$
32	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$4.3 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-2}$
64	$9.7 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$
128	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$
256	$8.3 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$3.2 \cdot 10^{-7}$	$8.6 \cdot 10^{-4}$
512	$4.7 \cdot 10^{-6}$	$7.5 \cdot 10^{-7}$	$5.0 \cdot 10^{-6}$	$4.8 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-5}$
1024	$3.5 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$4.5 \cdot 10^{-8}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$
2048	$3.8 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-7}$	$5.2 \cdot 10^{-6}$	$4.6 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$
4096	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$

Tabela 2.3: Teste 3, $a_4 = -0.10$

Figura 2.3: Transformação conforme do Teste 3, $a_4 = -0.10$.

Teste 4 (cardióide) Fronteira do domínio parametrizada por

$$z(s) = e^{is} + a_{-1}e^{2is}, \text{ ou seja } a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0.$$

A expressão analítica da função de correspondência entre fronteiras $\theta(s)$ (do domínio dado na circunferência unitária) está dada por

$$\theta(s) = s.$$

A Tabela 2.4 exibe os resultados correspondentes a $a_{-1} = 0.38$. A Tabela 2.5, foi confeccionada com o objetivo de mostrar o número de iterações internas (*IGC*) e externas requeridas pelo método quando não é imposta a condição $DIV > 1.85$. O número de iterações externas decresce ao aumentar o valor de N (a partir de $N = 128$) como era esperado.

A Figura 2.4 apresenta o domínio correspondente.

N	NP	$NF1$	$NF2$	NE	$\ d^-\ _\infty$	$\ d^+\ _\infty$
8	—	—	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-5}$	—
16	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$6.0 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$3.8 \cdot 10^{-6}$	$3.7 \cdot 10^{-6}$
32	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$
64	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$6.9 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$7.0 \cdot 10^{-5}$	$6.0 \cdot 10^{-7}$	$5.3 \cdot 10^{-7}$
128	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$5.9 \cdot 10^{-6}$	$9.1 \cdot 10^{-6}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$4.6 \cdot 10^{-8}$
256	$6.6 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$4.9 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
512	$3.8 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$
1024	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$9.5 \cdot 10^{-6}$	$6.7 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$
2048	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$9.7 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$8.1 \cdot 10^{-6}$	$6.0 \cdot 10^{-8}$	$1.6 \cdot 10^{-8}$
4096	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$9.0 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$	$9.6 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$

Tabela 2.4: Teste 4, $a_{-1} = 0.38$ Figura 2.4: Transformação conforme do Teste 4, $a_{-1} = 0.38$.

N	16	32	64	128	256
$\ d^-\ _\infty(IGC)$	$4.8 \cdot 10^{-4}(4)$	$2.3 \cdot 10^{-4}(4)$	$1.1 \cdot 10^{-4}(4)$	$5.9 \cdot 10^{-5}(4)$	$2.9 \cdot 10^{-5}(3)$
	$1.6 \cdot 10^{-4}(4)$	$7.9 \cdot 10^{-5}(3)$	$3.9 \cdot 10^{-5}(3)$	$1.9 \cdot 10^{-5}(3)$	$9.8 \cdot 10^{-6}(3)$
	$5.5 \cdot 10^{-5}(3)$	$2.7 \cdot 10^{-5}(3)$	$1.3 \cdot 10^{-5}(3)$	$6.8 \cdot 10^{-6}(3)$	$3.3 \cdot 10^{-6}(3)$
	$2.4 \cdot 10^{-5}(3)$	$1.2 \cdot 10^{-5}(3)$	$6.3 \cdot 10^{-6}(3)$	$3.1 \cdot 10^{-6}(3)$	$1.5 \cdot 10^{-6}(3)$
	$9.9 \cdot 10^{-6}(3)$	$7.1 \cdot 10^{-6}(3)$	$3.4 \cdot 10^{-6}(3)$	$1.7 \cdot 10^{-6}(3)$	$8.7 \cdot 10^{-7}(3)$
	$5.4 \cdot 10^{-6}(3)$	$3.7 \cdot 10^{-6}(3)$	$1.8 \cdot 10^{-6}(2)$	$9.4 \cdot 10^{-7}(3)$	$4.6 \cdot 10^{-7}(2)$
	$3.3 \cdot 10^{-6}(3)$	$2.1 \cdot 10^{-6}(3)$	$1.0 \cdot 10^{-6}(3)$	$5.1 \cdot 10^{-7}(3)$	$2.5 \cdot 10^{-7}(2)$
		$1.2 \cdot 10^{-6}(3)$	$5.9 \cdot 10^{-6}(2)$	$2.9 \cdot 10^{-7}(2)$	$1.4 \cdot 10^{-7}(3)$
			$3.4 \cdot 10^{-6}(3)$	$1.8 \cdot 10^{-7}(3)$	

Tabela 2.5: Número de iterações correspondentes ao Teste 4.

512	1024	2048	4096
$1.4 \cdot 10^{-5}(3)$	$7.4 \cdot 10^{-6}(3)$	$3.7 \cdot 10^{-6}(3)$	$1.8 \cdot 10^{-6}(2)$
$4.9 \cdot 10^{-6}(3)$	$2.4 \cdot 10^{-6}(3)$	$1.2 \cdot 10^{-6}(2)$	$6.1 \cdot 10^{-7}(2)$
$1.7 \cdot 10^{-6}(3)$	$8.5 \cdot 10^{-7}(3)$	$4.2 \cdot 10^{-7}(2)$	$2.0 \cdot 10^{-7}(2)$
$7.8 \cdot 10^{-7}(2)$	$3.8 \cdot 10^{-7}(2)$	$1.9 \cdot 10^{-7}(2)$	$9.7 \cdot 10^{-8}(2)$
$4.4 \cdot 10^{-7}(2)$	$2.1 \cdot 10^{-7}(2)$	$1.0 \cdot 10^{-7}(2)$	
$2.3 \cdot 10^{-7}(2)$	$1.1 \cdot 10^{-7}(2)$	$5.6 \cdot 10^{-8}(2)$	
$1.2 \cdot 10^{-7}(2)$			

Tabela 2.6: Continuação da Tabela 2.5

Teste 5 Fronteira do domínio parametrizada por

$$z(s) = a_{-1}e^{2is} + a_2e^{-is} + a_3e^{-2is} + a_4e^{-3is} \text{ ou seja } a_0 = 1, a_1 = 0.$$

A Tabela 2.7 exhibe os resultados correspondentes a $a_{-1} = 0.09$, $a_2 = -0.30$, $a_3 = 0.09$, $a_4 = -0.05$.

A Figura 2.5 apresenta o domínio correspondente.

N	NP	$NF1$	$NF2$	$\ d^-\ _\infty$	$\ d^+\ _\infty$
8	—	—	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$	—
16	—	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$6.4 \cdot 10^{-1}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$
32	—	$3.9 \cdot 10^{-1}$	$2.5 \cdot 10^{-1}$	$5.6 \cdot 10^{-2}$	$9.0 \cdot 10^{-2}$
64	$4.0 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$
128	$2.7 \cdot 10^{-1}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$9.6 \cdot 10^{-3}$
256	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-3}$
512	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$6.5 \cdot 10^{-5}$	$4.4 \cdot 10^{-6}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$
1024	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-8}$	$9.9 \cdot 10^{-5}$
2048	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-6}$
4096	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$6.2 \cdot 10^{-8}$	$2.9 \cdot 10^{-8}$

Tabela 2.7: Transformação conforme do Teste 5, $a_{-1} = 0.09$, $a_2 = -0.30$, $a_3 = 0.09$, $a_4 = -0.05$.

Observações

- Foram testados diferentes critérios de parada, utilizando erros relativos e $\|\cdot\|_2$, entre outros cálculos, e os resultados obtidos não apresentaram diferenças significativas em relação aos critérios descritos na Seção 2.3, os quais requerem um baixo custo computacional.
- O número de iterações internas oscilou entre 2 e 7.
- O número de iterações externas foi menor que 10.

Figura 2.5: Transformação conforme do Teste 5, $a_{-1} = 0.09$, $a_2 = -0.30$, $a_3 = 0.09$, $a_4 = -0.05$.

- O método produz uma aproximação uniforme dos coeficientes $d_1, d_2, \dots, d_{N/2}$.
- Nos testes para os quais foi realizada uma comparação com a solução exata, a norma NE atingiu um valor mínimo da ordem de 10^{-6} (ver Figura 2.6).
- A norma NP atingiu um valor mínimo da ordem de 10^{-7} no Teste 1, 10^{-6} nos Teste 2 e 3 e 10^{-5} nos Testes 4 e 5 (ver Figura 2.7).
- As normas $NF1$ e $NF2$ apresentam uma estabilização a partir de $N = 256$ na maioria dos testes, correspondente ao momento em que os

Figura 2.6: Norma NE .

novos coeficientes calculados (a partir da duplicação do valor de N) deixam de ser significativos ($\|d^+\|_\infty$ da ordem de 10^{-7} aproximadamente).

- Nos Testes 1, 3 e 5 a norma $\|d^-\|_\infty$ começa a se aproximar do valor esperado 10^{-7} só a partir de $N = 256$; pode-se observar que o tamanho do erro calculado para os coeficientes omitidos $d_{-N/2+1}, \dots, d_1, d_0$ é comparável com o erro calculado para os coeficientes $d_1, d_2, \dots, d_{N/2}$ (ver Figura 2.8).
- O tempo computacional médio requerido pelo código para realizar o processo completo (desde $N = 8$ até $N = 4096$) foi 0.786 seg. para o Teste 1, 1.563 seg. para o Teste 2, 1.515 seg. para o Teste 3, 0.935 seg. para o Teste 4 e 2.028 seg. para o Teste 5.

Figura 2.7: Norma NP .

Figura 2.8: Norma $\|d^-\|_\infty$.

Capítulo 3

Aplicação

O uso de sistemas de coordenadas ajustados à fronteira de um domínio tem aplicações em vários ramos da ciência. O objetivo da técnica é construir um sistema de coordenadas curvilíneo em domínios físicos bi ou tridimensionais com uma linha ou superfície do sistema de coordenadas coincidindo com a fronteira do domínio. Os problemas considerados podem ser reformulados em termos das novas coordenadas e espera-se que com isso as soluções possam ser calculadas de forma mais simples ([TWM]). Equivalentemente, a técnica pode ser vista como uma maneira de se transformar um domínio arbitrário em um domínio canônico simples, como por exemplo um retângulo ou o disco unitário. A solução do problema no domínio canônico, em geral mais fácil de ser calculada, é então transformada de volta ao domínio original.

Um procedimento importante em dimensão dois é baseado no uso de transformação conforme numérica (ver [MO]), a qual define um sistema curvilíneo similar a uma malha cartesiana. Normalmente, equações diferenciais parciais são pouco distorcidas e, em particular, a equação de Laplace é invariante sob transformações conformes.

Os trabalhos mais importantes relativos a esta matéria tem sido desenvolvidos principalmente na área de dinâmica de fluidos computacionais, devido

a que uma grande quantidade de problemas nesta área são resolvidos por técnicas de diferenças finitas, que não são facilmente adaptáveis a condições de fronteira complexas. Portanto a transformação do domínio pode simplificar consideravelmente os códigos para este tipo de problemas ([Iv], [Fo1], [MO]).

3.1 Resolução numérica de equações do tipo Poisson em domínios simplesmente conexos

A técnica de transformação conforme numérica pode ser usada para transformar um domínio bidimensional simplesmente conexo qualquer em um disco unitário. Isto permite, por exemplo, usar as fórmulas de Poisson ou Dini para se resolver os problemas de Dirichlet ou Neumann para a equação de Laplace. Um outro aspecto interessante deriva do fato de que equações do tipo Poisson são transformadas em equações cuja estrutura é similar à formulação do problema em coordenadas polares. Usando-se o disco unitário como domínio computacional, podem ser utilizadas discretizações com estruturas bem definidas e técnicas muito eficientes para a resolução do problema.

Considere o problema elíptico

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f \text{ em } \Omega \quad (3.1)$$

onde Ω é um domínio bidimensional limitado e simplesmente conexo, $\sigma(x, y) \geq \sigma_0 > 0$ para $(x, y) \in \bar{\Omega}$, e condições de contorno de Dirichlet

$$u|_{\partial\Omega} = g_D$$

ou de Neumann

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = g_N.$$

Denote por

$$x(r, \theta), \quad y(r, \theta)$$

as componentes de uma transformação conforme do disco unitário em Ω , e por $v(r, \theta)$ a composição

$$v(r, \theta) = u(x(r, \theta), y(r, \theta)).$$

Então, o problema (3.1) é transformado no problema

$$-\frac{1}{\rho(r, \theta)} \frac{1}{r} \left[(r \tilde{\sigma} v_r)_r + \frac{1}{r} (\tilde{\sigma} v_\theta)_\theta \right] = F, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (3.2)$$

com

$$\rho(r, \theta) = x_r^2(r, \theta) + y_r^2(r, \theta) = \frac{1}{r^2} [x_\theta^2(r, \theta) + y_\theta^2(r, \theta)],$$

$\tilde{\sigma}(r, \theta) = \sigma(x(r, \theta), y(r, \theta))$ e $F(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$. As condições de contorno são levadas em

$$v(1, \theta) = g_D(x(1, \theta), y(1, \theta))$$

para o problema de Dirichlet e

$$\frac{1}{\sqrt{\rho(1, \theta)}} \tilde{\sigma}(1, \theta) v_r(1, \theta) = g_N(x(1, \theta), y(1, \theta))$$

para o problema de Neumann. Note que se multiplicarmos (3.2) por $\rho(r, \theta)$ (e se, no caso do problema de Neumann, multiplicarmos a condição de contorno por $\sqrt{\rho(1, \theta)}$) temos uma estrutura análoga à formulação do problema (3.1) no disco unitário usando-se coordenadas polares.

O problema transformado pode ser discretizado, por exemplo, usando-se esquemas-padrão de diferenças finitas ou volumes finitos e o sistema linear resultante pode ser resolvido de maneira eficiente usando-se, por exemplo, o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento ou métodos “multigrid” .

A fim de ilustrar o tipo de estrutura envolvida, o problema (3.2) com condição de contorno de Dirichlet será discretizado por diferenças finitas. Seguindo [Lai], será usada uma malha conveniente que evita a especificação de uma condição para o pólo. Fixados inteiros positivos M e N , defina

$$\Delta r = \frac{2}{2M+1}, r_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta r, r_{i-1/2} = r_i - \frac{\Delta r}{2}, 1 \leq i \leq M+1, \quad (3.3)$$

e

$$\Delta \theta = \frac{2\pi}{N}, \quad \theta_j = j\Delta \theta, \quad \theta_{j-1/2} = \theta_j - \frac{1}{2}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.4)$$

Usando diferenças centradas obtemos

$$(r\tilde{\sigma}v_r)_r|_{(r_i, \theta_j)} \simeq \frac{r_{3/2}\tilde{\sigma}_{3/2,j}(v_r)_{3/2,j} - r_{1/2}\tilde{\sigma}_{1/2,j}(v_r)_{1/2,j}}{\Delta r} \simeq \frac{r_{3/2}\tilde{\sigma}_{3/2,j}(v_{2j} - v_{1j})}{\Delta r^2}$$

e

$$(r\tilde{\sigma}v_r)_r|_{(r_i, \theta_j)} \simeq \frac{r_{i+1/2}\tilde{\sigma}_{i+1/2,j}(v_{i+1,j} - v_{ij}) - r_{i-1/2}\tilde{\sigma}_{i-1/2,j}(v_{ij} - v_{i-1,j})}{\Delta r^2}, i \geq 2,$$

onde os sub-escritos denotam valores nos pontos da malha. Note que como $r_{1/2} = 0$, não há necessidade de se usar valores na origem e portanto não é necessário especificar uma condição de pólo.

Analogamente,

$$(\tilde{\sigma}v_\theta)_\theta|_{(r_i, \theta_j)} \simeq \frac{\tilde{\sigma}_{i,j+1/2}(v_{i,j+1} - v_{ij}) - \tilde{\sigma}_{i,j-1/2}(v_{ij} - v_{i,j-1})}{\Delta \theta^2}.$$

Usando-se as notações

$$A_{ij} = \frac{r_{i+1/2}\tilde{\sigma}_{i+1/2,j}}{\Delta r^2}, \quad B_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{i,j+1/2}}{r_i\Delta\theta^2}$$

e

$$C_{1j} = A_{1j} + B_{1,j-1} + B_{1j}, \quad C_{ij} = A_{i-1,j} + A_{ij} + B_{i,j-1} + B_{ij} \quad (i \geq 2)$$

obtemos o seguinte sistema linear para aproximar uma solução de (3.2):

$$-B_{1,j-1}v_{1,j-1} + C_{1j}v_{1j} - B_{1j}v_{1,j+1} - A_{1j}v_{2j} = r_1\rho_{1j}F_{1j}$$

para $1 \leq j \leq N$ e

$$-A_{i-1,j}v_{i-1,j} - B_{i,j-1}v_{i,j-1} + C_{ij}v_{ij} - B_{ij}v_{i,j+1} - A_{ij}v_{i+1,j} = r_i\rho_{ij}F_{ij}$$

para $2 \leq i \leq M$ e $1 \leq j \leq N$. Nas expressões acima devemos usar a condição de contorno para $v_{M+1,j}$ e periodicidade em θ .

A discretização obtida tem ordem de consistência 2 e a matriz do sistema linear resulta simétrica definida positiva. Além disso, ela é uma M-matriz, o que torna adequado o uso da fatoração de Cholesky incompleta como pré-condicionador para o método dos gradientes conjugados [MV].

Para o problema de Neumann, pode-se usar diferenças centradas com a malha radial definida por $\Delta r = 1/M$ e $r_i = (i - 1/2)\Delta r$, $1 \leq i \leq M$. A matriz da discretização resulta simétrica semidefinida positiva, sendo que o seu núcleo é o espaço unidimensional gerado pelo vetor constante. A matriz satisfaz as condições apresentadas em [Ka], o que permite usar o método dos gradientes conjugados pré-condicionado com a fatoração de Cholesky incompleta.

Na próxima seção, será feita uma aplicação para a equação de Poisson

usando a transformada rápida de Fourier, conforme descrito em [LW].

3.2 Testes computacionais

Foi implementado o problema (3.1), para $\sigma(x, y) = 1$, em $\bar{\Omega}$, com condição de contorno de Dirichlet, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g_D \end{cases} \quad (3.5)$$

Como foi exposto na seção prévia, utilizando a transformação conforme o problema (3.5) é transformado no problema equivalente

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \left[(rv_r)_r + \frac{1}{r} (v_\theta)_\theta \right] = F(r, \theta), & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ v(1, \theta) = G(1, \theta) \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $F(r, \theta) = \rho(r, \theta)f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ e $G(1, \theta) = g_D(x(1, \theta), y(1, \theta))$, com o disco unitário como novo domínio.

Como a função $v(r, \theta)$ no disco é periódica em θ , pode-se aproximar a solução utilizando a transformada discreta de Fourier

$$v(r, \theta) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{v}_n(r) e^{in\theta},$$

onde

$$\hat{v}_n(r) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} v(r, \theta_j) e^{-in\theta_j},$$

com a discretização descrita em (3.4) para θ_j .

Esta transformação é realizada de forma eficiente por meio da transformada rápida de Fourier, com um número de operações aritméticas $O(N \log_2 N)$.

Substituindo as correspondentes expansões na equação (3.6), e igualando os coeficientes de Fourier correspondentes, é obtida a seguinte equação diferencial ordinária para a função $\hat{v}_n(r)$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} [r(\hat{v}_n)_r]_r + \frac{n^2}{r^2} \hat{v}_n = \hat{F}_n, & 0 < r < 1, \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ \hat{v}_n(1) = \hat{G}_n, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $\hat{F}_n$ e $\hat{G}_n$ representam os coeficientes de Fourier complexos das funções F e G respectivamente.

A fim de evitar a especificação de uma condição no pólo, foi utilizada a discretização em r descrita em (3.3).

Portanto, multiplicando a equação (3.7) por r e utilizando a notação $V_i = \hat{v}_n(r_i)$ para a aproximação correspondente, $1 \leq i \leq M$, obtemos o seguinte esquema de diferenças de ordem 2:

$$\begin{cases} \left(r_{3/2} + \frac{n^2}{r_1} \Delta r^2 \right) V_1 - r_{3/2} V_2 = -\Delta r^2 r_1 \hat{F}_1 \\ -r_{i-1/2} V_{i-1} + \left(r_{i-1/2} + r_{i+1/2} + \frac{n^2}{r_i} \Delta r^2 \right) V_i - r_{i+1/2} V_{i+1} = -\Delta r^2 r_i \hat{F}_i, \\ \text{para } 2 \leq i \leq M-1, \\ \text{e} \\ -r_{M-1/2} V_{M-1} + \left(r_{M-1/2} + r_{i+1/2} + \frac{n^2}{r_M} \Delta r^2 \right) V_M = -\Delta r^2 r_M \hat{F}_M + r_{M+1/2} \hat{G}_n. \end{cases}$$

Este esquema corresponde a um sistema linear de equações tridiagonal para $V_i, i = 1, \dots, M$ que pode ser resolvido com um número de operações aritméticas $O(M)$.

Uma vez obtidos, os coeficientes de Fourier $\hat{v}_n$ são transformados de volta utilizando a transformada rápida de Fourier para obter a solução do problema (3.6).

O custo computacional total do algoritmo é $O(MN \log_2 N)$ operações aritméticas para uma malha de pontos de tamanho $M \times N$.

Resultados numéricos

Foram realizados testes computacionais para diferentes valores de N , M e L , sendo $L/2$ o número de coeficientes correspondentes à aproximação da transformação conforme obtida com o método iterativo de Fornberg.

Foi observado que para $N > 32$ o erro provém principalmente da discretização radial, pois para funções suficientemente suaves não é preciso utilizar um número muito grande de coeficientes de Fourier para representá-la corretamente. Portanto, nos experimentos numéricos foi fixado $N = 64$ e variado M de 16 até 128, como foi sugerido na literatura.

A fim de testar a eficiência do método foram rodados 3 exemplos diferentes para cada um dos 3 domínios escolhidos (elipse, triângulo arredondado e quadrado arredondado).

O número de coeficientes da aproximação da transformação conforme utilizado foi fixado em $L = 64$.

Os problemas são simplesmente descritos por meio da solução $u(x, y)$ em coordenadas cartesianas, a partir das quais podem ser obtidas facilmente as funções f e g_D .

A tabela 3.1 exibe os resultados obtidos para a norma do máximo da diferença entre a solução aproximada e a solução exata (NE) para as 3 soluções nos 3 domínios diferentes, e a taxa de convergência correspondente (Taxa).

A fim de mostrar o comportamento do método e a ordem de aproximação no caso do disco, e comparar com os resultados obtidos para os outros domínios escolhidos, foram acrescentadas as colunas 2 e 3 na Tabela 3.1.

Nesta Tabela pode-se observar como as normas dos erros decrescem na taxa correspondente à ordem (de aproximação) 2 do método.

M	Disco		Elipse		Triângulo		Quadrado	
	NE	Taxa	NE	Taxa	NE	Taxa	NE	Taxa
$u(x, y) = e^{x+y}$								
16	$7.8 \cdot 10^{-4}$		$7.9 \cdot 10^{-4}$		$7.5 \cdot 10^{-4}$		$7.4 \cdot 10^{-4}$	
32	$2.0 \cdot 10^{-4}$	3.90	$2.0 \cdot 10^{-4}$	3.91	$1.9 \cdot 10^{-4}$	3.91	$1.9 \cdot 10^{-4}$	3.89
64	$5.3 \cdot 10^{-5}$	3.78	$5.4 \cdot 10^{-5}$	3.75	$5.1 \cdot 10^{-5}$	3.78	$4.9 \cdot 10^{-5}$	3.84
128	$1.4 \cdot 10^{-5}$	3.77	$1.5 \cdot 10^{-5}$	3.71	$1.4 \cdot 10^{-5}$	3.67	$1.4 \cdot 10^{-5}$	3.48
$u(x, y) = 3e^{x+y}(x - x^2)(y - y^2) + 5$								
16	$1.1 \cdot 10^{-3}$		$1.1 \cdot 10^{-3}$		$1.4 \cdot 10^{-3}$		$9.6 \cdot 10^{-4}$	
32	$2.8 \cdot 10^{-4}$	3.88	$2.9 \cdot 10^{-4}$	3.86	$3.6 \cdot 10^{-4}$	3.87	$2.5 \cdot 10^{-4}$	3.89
64	$7.3 \cdot 10^{-5}$	3.90	$7.4 \cdot 10^{-5}$	3.99	$9.3 \cdot 10^{-5}$	3.93	$6.4 \cdot 10^{-5}$	3.90
128	$2.2 \cdot 10^{-5}$	3.34	$2.1 \cdot 10^{-5}$	3.44	$2.6 \cdot 10^{-5}$	3.62	$2.0 \cdot 10^{-5}$	3.20
$u(x, y) = \frac{e^x + e^y}{1 + xy}$								
16	$7.8 \cdot 10^{-3}$		$7.9 \cdot 10^{-3}$		$9.9 \cdot 10^{-3}$		$6.0 \cdot 10^{-3}$	
32	$2.0 \cdot 10^{-3}$	3.84	$2.0 \cdot 10^{-3}$	3.84	$2.6 \cdot 10^{-3}$	3.82	$1.5 \cdot 10^{-3}$	3.85
64	$5.2 \cdot 10^{-4}$	3.91	$5.3 \cdot 10^{-4}$	3.92	$6.7 \cdot 10^{-4}$	3.91	$4.0 \cdot 10^{-4}$	3.92
128	$1.2 \cdot 10^{-4}$	4.16	$1.3 \cdot 10^{-4}$	4.14	$1.6 \cdot 10^{-4}$	4.00	$9.7 \cdot 10^{-5}$	4.10

Tabela 3.1: Norma do erro do máximo (NE) para diferentes soluções do problema de Dirichlet (3.5), com $N=64$

Conclusões

Neste trabalho foram estudadas técnicas numéricas para o cálculo da transformação conforme do disco unitário em um domínio bidimensional simplesmente conexo. Em particular, foi analisado em detalhe e implementado um método baseado no uso da transformada rápida de Fourier devido a Fornberg. Este método foi testado em alguns domínios, e pôde-se observar a sua viabilidade e eficiência.

Discutiram-se também o uso de transformações conformes numéricas para a resolução de equações diferenciais parciais do tipo Poisson. A estrutura similar à formulação do problema em coordenadas polares permite o uso de discretizações que levam à resolução de sistemas lineares com estrutura bem definida, bem como o uso de técnicas eficientes para sua resolução. O caso particular da equação de Poisson foi testado com um método espectral, e pôde-se verificar a eficácia do uso conjunto de transformações conformes com técnicas para a resolução de equações diferenciais parciais no disco.

Futuramente, pretende-se aprofundar este estudo para equações do tipo Poisson, implementando-se a discretização apresentada na Seção 3.1 em conjunto com métodos rápidos usados em coordenadas polares. Também pretende-se estender este estudo para domínios cilíndricos em dimensão três, onde a seção transversal é um domínio simplesmente conexo bidimensional.

Outros desenvolvimentos consistem no aproveitamento da simetria de certos domínios para se reduzir o custo computacional, no estudo de possíveis

abordagens na utilização de transformação conforme para geometrias mais complexas, envolvendo o fenômeno de “crowding” ([PaKo], [Pa], [DeEl], [De]), e também a modelagem e resolução numérica de fenômenos concretos utilizando as técnicas descritas no trabalho.

Apêndice

Ordem de aproximação do método iterativo de Fornberg

O método iterativo de Fornberg corresponde a uma versão discreta do método iterativo de Wegmann como foi observado na seção 2.2. Portanto os resultados relativos à convergência e à ordem de aproximação apresentados em ([We1]) e ([We3]) são válidos para o primeiro método também.

Vamos estabelecer a seguir, as definições preliminares.

Definição 1 (Espaço L^2) *Espaço das funções f complexas, periódicas de período 2π , satisfazendo $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$.*

A norma neste espaço é definida por

$$\|f\|_2 := \left[\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Definição 2 (Espaço W) *Espaço das funções f complexas, periódicas de período 2π , absolutamente contínuas, com derivada $f' \in L^2$.*

A norma neste espaço é definida por

$$\|f\|_W := \|f\|_\infty + \|f'\|_2,$$

onde $\|f\|_\infty = \max_s |f(s)|$.

Seja μ um número real tal que $0 \leq \mu \leq 1$, e f uma função Hölder continua com expoente μ . O coeficiente de Hölder de f é definido por

$$[f]_\mu = \sup \left\{ \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\mu}, \quad s \neq t \right\}.$$

Definição 3 (Espaço $C^{l+\mu}$) Espaço das funções f complexas, periódicas de período 2π , l vezes diferenciáveis, que possuem derivada $f^{(l)}$ Hölder continua com expoente de Hölder μ .

A norma neste espaço é definida por

$$\|f\|_{l+\mu} := \|f\|_\infty + [f^{(l)}]_\mu.$$

Seja agora $s_0, s_1, s_2, \dots$ a seqüência de funções gerada pelo método (contínuo) de Wegmann, definida no Capítulo 1, e seja $\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots$ a seqüência gerada pelo método numérico apresentado em ([We2]). Vamos enunciar a seguir o teorema que mostra como o erro numérico $\tilde{s}_k - s_k$ pode ser limitado em termos do número de pontos N .

Teorema 1 1. Se $\eta \in C^{l+1+\nu}$, $0 < \nu < 1$, e $\|s_k - s\|_{l+\nu} \rightarrow 0$, então existem constantes C_k tal que para N suficientemente grande

$$\|\tilde{s}_k - s_k\|_W \leq C_k N^{1-(l+\nu)}.$$

2. Se $\eta(s)$ é uma função analítica para $|Im(s)| \leq \sigma$ e $s_k(t) - s(t) \rightarrow 0$ uniforme-mente em $|Im(t)| \leq \tau$, e $|Im(s_k(t))| \leq \sigma$ então existem constantes C_k tal que para N suficientemente grande

$$\|\tilde{s}_k - s_k\|_V \leq C_k e^{-\tau N/4}.$$

Referências Bibliográficas

- [Be] S. Bergman. *The kernel function and conformal mapping*. Math. Surveys 5, A.M.S. 2nd ed., 1970.
- [Bi] L. Bieberbach. *Conformal mapping*. Chelsea Publishing Company, 1953.
- [Bo] L. Borcea. *Electrical impedance tomography*. Inverse Problems 18, 99-136, 2002.
- [BTr] L. Banjai, L. N. Trefethen. *A multipole method for Schwarz-Christoffel mapping of polygons with thousands of sides*. SIAM J. Sci. Comput. 25(3), 1042-1065, 2002.
- [CA] S. Chakravarthy, D. Anderson. *Numerical conformal mapping*. Mathematics of Computations 33(147), 953-969, 1979.
- [CIN] M. Cheney, L. D. Isaacson, J. C. Newell. *Electrical impedance tomography*. SIAM Review 41(1), 85-101, 1999.
- [CLS] B. Cheng Li, S. Syngellakis . *Numerical conformal mapping based on the generalised conjugation operator*. Mathematics of Computations 67(222), 619-639, 1998.
- [CT] J. W. Cooley, J. W. Tukey. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*. Mathematics of Computation, 19 (90), 297-301, 1965.

- [De] T. Delillo. *The accuracy of numerical conformal mapping methods*. SIAM Journal on Numerical Analysis 31(3), 788-812, 1994.
- [DeEl] T. K. Delillo, A. R. Elcrat. *A Fornberg-like conformal mapping method for slender regions*. Journal of Computational and Applied Mathematics 46, 49-64, 1993.
- [DeElPf] T. K. Delillo, A. R. Elcrat, J. Pfaltzgraff. *Numerical conformal mapping methods based on Faber series*. Journal of Computational and Applied Mathematics 83, 205-236, 1997.
- [DeHoPf] T. Delillo, M. Horn, J. Pfaltzgraff. *Numerical conformal mapping of multiply connected regions by Fornberg-like method*. Numer. Math. 83, 205-230, 1999.
- [DePf] T. Delillo, J. Pfaltzgraff. *Numerical conformal mapping methods for simply and doubly connected regions*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 19(1), 155-171, 1998.
- [Dr] T. A. Driscoll. *A nonoverlapping domain decomposition method for Symm's equation for conformal mapping*. SIAM Journal on Numerical Analysis 36(3), 922-934, 1999.
- [DrTre] T. A. Driscoll, L. N. Trefethen. *Schwarz-Christoffel mapping*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics 8, 2002.
- [Fo1] B. Fornberg. *A numerical method for conformal mapping*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1(3), 386-400, 1980.
- [Fo2] B. Fornberg. *A numerical method for conformal mapping of doubly connected regions*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 5(4), 771-783, 1984.
- [FZ] J. M. Floryan, C. Zemach. *Schwarz-Christoffel mappings: a general approach*. Journal of Computational Physics 72, 347-371, 1987.

- [Gu1] M. H. Gutknecht. *Existence of a solution to the discrete Theodorsen equation for conformal mappings*. Mathematics of Computations 31(138), 478-480, 1977.
- [Gu2] M. Gutknecht. *Solving Theodorsen's integral equation for conformal maps with the Fast Fourier Transform and various nonlinear iterative methods*. Numer. Math. 36, 405-429, 1981.
- [Gu3] M. Gutknecht. *Numerical experiments on solving Theodorsen's integral equation for conformal maps with the Fast Fourier Transform and various nonlinear iterative methods*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 4(1), 1-30, 1983.
- [Gu4] M. Gutknecht. *Numerical conformal mapping methods based on function conjugation*. Journal of Computational and Applied Mathematics 14, 31-77, 1986.
- [He1] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis (Vol I)*. John Wiley & Sons, 1974.
- [He2] P. Henrici. *Fast Fourier methods in computational complex analysis*. SIAM Review 21(4), 481-527, 1979.
- [He3] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis (Vol III)*. John Wiley & Sons, 1986.
- [HKK] J. Hayes, D. Kahaner, R. Kellner. *An improved method for numerical conformal mapping*. Math. Comp. 26, 327-334, 1972.
- [Iv] D. C. Ives. *A modern look at conformal mapping including multiply connected regions*. AIAA. 14, 1006-1011, 1976.
- [Ka] E. F. Kaasschieter. *Preconditioned conjugate gradients for solving singular systems*. Journal of Computational and Applied Mathematics 24, 265-275, 1988.

- [Lai] M.-C. Lai. *A note on finite difference discretizations for Poisson equation on a disk*. Numerical Methods for Partial Differential Equations 17(3), 199-203, 2001.
- [LW] M.-C. Lai, W.-C. Wang. *Fast direct solvers for Poisson equation on 2D polar and spherical geometries*. Numerical Methods for Partial Differential Equations 18, 56-68, 2002.
- [MeZ] R. Menikoff, C. Zemach. *Methods for numerical conformal mapping*. Journal of Computational Physics 36, 366-410, 1980.
- [MO] D. I. Meiron, S. A. Orszag. *Applications of numerical conformal mapping*. Journal of Computational Physics 40, 345-360, 1981.
- [MV] J. A. Meijerink, H. A. van der Vorst. *An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix*. Mathematics of Computation 31(137), 148-162, 1977.
- [Ne] Z. Nehari. *Conformal mapping*. Dover Publications, 1975.
- [Pa] N. Papamichael. *Numerical conformal mapping onto a rectangle with applications to the solution of Laplacian problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics 28, 63-83, 1989.
- [PaKo] N. Papamichael, C. A. Kokkinos. *Two numerical methods for the conformal mapping of simply-connected domains*. Computed Methods in Applied Mechanics and Engineering 28, 285-307, 1981.
- [Po] R. M. Porter. *An interpolating polynomial method for numerical conformal mapping*. SIAM J. Sci. Comput. 23(3), 1027-1041, 2001.
- [Pr] I. E. Pritsker. *Approximation of conformal mapping via the Szego Kernel method*. Computational Methods and Function Theory 3(1), 79-94, 2003.

- [Sy] G. T. Symm. *An integral equation method in conformal mapping*. Numer. Math. 9, 250-258, 1966.
- [Tre] L. N. Trefethen. *Numerical Computation of the Schwarz-Christoffel Transformation*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1, 82-102, 1980.
- [Tru] M. R. Trummer. *An efficient implementation of a conformal mapping method based on the Szego Kernel*. SIAM Journal on Numerical Analysis 23(4), 853-872, 1986.
- [TWM] J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin. *Boundary-fitted coordinate systems used for numerical solution of partial differential equations*. Journal of Computational Physics Review 47, 1-108, 1982.
- [We1] R. Wegmann. *Convergence proofs and error estimates for an iterative method for conformal mapping*. Numer. Math. 44, 435-461, 1984.
- [We2] R. Wegmann. *An iterative method for conformal mapping*. Journal of Computational and Applied Mathematics 14, 7-18, 1986.
- [We3] R. Wegmann. *On Fornberg's numerical method for conformal mapping*. SIAM Journal on Numerical Analysis 23(6), 1199-1213, 1986.
- [We4] R. Wegmann. *Discrete Riemann-Hilbert problems, interpolation of simply closed curves, and numerical conformal mapping*. Journal of Computational and Applied Mathematics 23, 323-352, 1988.
- [We5] R. Wegmann. *Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping*. Journal of Computational and Applied Mathematics 29, 207-224, 1990.