Mapeamento da Voltagem
na
Tomografia de Impedância Elétrica

Janaína Perez Marques de Azevedo

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de
Mestra em Ciências

Área de Concentração: Matemática Aplicada
Orientação: Prof^a Dr^a Joyce da Silva Bevilacqua

São Paulo - fevereiro - 2005

Mapeamento da Voltagem na Tomografia por Impedância Elétrica

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por
Janaína Perez Marques de Azevedo
e aprovada por comissão julgadora.

São Paulo, março de 2005.

Banca Examinadora:

Prof.^a Dr.^a Joyce da Silva Bevilacqua (Orientadora)- IME-USP

Prof. Dr. Alexandre Megiorin Roma – IME- USP

Prof. Dr. Antonio José da Silva Neto – UERJ

Dedicatória

Para Leonildo Perez Fernandez

Agradecimentos

À minha orientadora Joyce, pela paciência, confiança, dedicação, puxões de orelha e ânimo que me passava quando tudo parecia dar errado.

Aos meus pais e irmãos, principalmente por compreenderem que este trabalho me tornaria uma filha/ irmã às vezes ausente.

Aos professores que compuseram a banca examinadora, pela leitura cuidadosa deste trabalho e sugestões ou críticas decorrentes da mesma.

Aos professores do IME-USP, sejam aqueles que ministraram as disciplinas que cursei nesta etapa da minha vida acadêmica, aqueles que se dispuseram a me dar uma ajuda em momentos difíceis, aqueles que intercederam a meu favor nas reuniões da CPG ou aqueles que torciam comigo nos corredores do IME-USP para que eu chegasse até aqui: sem vocês, este trabalho seria impossível.

À toda a equipe da Comissão de Pós- Graduação do IME-USP, em especial, ao Pinho, à Patrícia e à Alessandra por esclarecerem minhas infinitas dúvidas.

Ao C.E. “Objetivo- ABC”, especialmente à Andréa, Vanessa, Priscila, Míriam, Leila, Marilda, Sérgio e aos alunos da turma 21/2004 da Unidade Ribeirão Pires: Ana Carolina, Andressa Caroline, Andrey Gustavo, Antonio Gomes, Antonio Medugno Filho, Bárbara, Bianca Condi, Bianca Lucena, Bruna, Caio César, Caio Messias, Carlos Vinícius, Carolina, Caroline Faria, Caroline Agnello, Danillo, Fernanda, Graziella, Guilherme, Helber, Igor, José Carlos, Juliana Anticaglia, Juliana Sato, Karina, Karoline, Letícia, Lucas, Luiz Henrique, Marcelo Zani, Marcelo Naves, Marcos Vinícius (*in memorian*), Marina, Michele, Rafael, Raquel, Renato, Rodolfo Henrique, Rodrigo César, Rodrigo Paulino, Suzana, Talita, Tarcila, Tatiane, Thaylim, Thais Pereira, Thais Navarro, Willian e Yang: sem o apoio de vocês, a elaboração deste trabalho estaria bastante comprometida.

Aos amigos Alexandre, Andrea, Cláudia, Cláudio, Danielle, Denise, Elisa, Érica, Fernanda, Gustavo, Helenice, Jefferson, Juliana Liziero, Juliana Serzedello, Kandy, Liana, Lícia, Lúcia, Luzia, Márcio Fabiano, Maria José, Masaishi, Nelson, Noemi, Olga, Palmira, Raquel, Ricardo, Rita, Rosemary, Rudimar, Rui, Sandra, Santos, Thiago, Thiago Rodrigo, Tiemi, Wagner e William simplesmente porque vocês existem.

À equipe do Laboratório de Investigação Médica da Faculdade de Medicina da USP, (LIM 09), liderada pelo Professor Dr. Marcelo Britto Passos Amato, pelo fornecimento de dados utilizados para a comparação de nossas simulações.

Resumo

Métodos numéricos para obtenção da distribuição de condutividades no interior de um domínio a partir de medidas de voltagens e de correntes elétricas aplicadas na borda do mesmo, utilizam direta ou indiretamente a solução do problema direto, que consiste em determinar os valores das voltagens na fronteira a partir do conhecimento da distribuição de condutividade no interior do domínio e da corrente aplicada na fronteira. Por ser o problema inverso mal-posto, o conhecimento dos fatores que alteram as medidas de voltagens podem ser utilizados para a melhoria das imagens reconstruídas.

O objetivo deste trabalho é avaliar as alterações nos valores das voltagens na fronteira do domínio, determinadas por alguns desses fatores na solução do problema direto. Esta avaliação foi feita através da simulação de distribuições de condutividades que correspondem a diferentes objetos circulares – tanto em forma quanto em valor de condutividade - colocados em diferentes posições no interior do domínio, para diferentes configurações de padrões de injeção e de modelos de eletrodos.

Abstract

Numerical methods for obtaining distribution of conductivity in the interior of a domain from voltage measures and electrical currents applied to its border, use the forward problem's solution in either a direct way or in an indirect one. The forward problem's solution consists of determining the voltage values in the boundary from the knowledge of distribution of conductivity in the interior of the domain and the electrical current applied to the boundary. As the inverse problem is ill-posed, the knowledge of factors that change the voltage measures can be used for rebuilt image improving.

The purpose of this work is to assess the changes of the voltage measures in the domain boundary resulting of some of these factors during the forward problem's resolution. This assessment has been made through of the simulation of different circular objects – that differ in shape and in conductivity values- that are situated in different positions in the interior of the domain for different configurations of current patterns and electrode models.

Índice

Introdução.....	13
Capítulo 1: Aspectos Teóricos da Reconstrução de Imagens por Corrente Aplicada.....	20
1.1 Relação entre corrente aplicada e voltagem.....	20
1.2 Modelo matemático – equações de Maxwell	22
1.3 O problema inverso	24
1.4 O problema direto em coordenadas polares.....	27
1.5 Modelos de eletrodos.....	28
1.5.1. Modelo contínuo.....	28
1.5.2. Modelo “gap”: discretização da corrente em $\partial\Omega$	29
1.5.3. Modelo Shunt.....	29
1.5.4. Modelo Completo.....	30
Capítulo 2: Padrões de Injeção e Medidas Independentes de Voltagens	31
2.1 Injeção de corrente e medidas de voltagens simultâneas.....	31
2.2 Padrão de 4 eletrodos.....	33
2.2.1. Padrão de injeção adjacente: $n = 1$ e $k = 1, 2, \dots, L$	34
2.2.2. Padrão de injeção espaçamento n , $n = 2, 3, \dots, L/2$	37
2.3 Padrões de corrente implementados.....	38
Capítulo 3: Algoritmo do Problema Direto	39
3.1 Discretização das equações.....	44
3.2 Malhas computacionais	46
3.3 Solução do sistema linear	46
3.4 Algoritmo do problema direto.....	50
3.4.1 Algoritmo estruturado.....	50
3.4.2 Validação do algoritmo do problema direto.....	52
Capítulo 4: Mapas de Voltagens e Correntes	53
4.1 Comparação: malhas de partições homogênea e não-homogênea.....	54
4.2 Sensibilidade em relação à posição do objeto.....	55
4.3 Sensibilidade em relação ao tamanho do objeto	59
4.4 Sensibilidade em relação ao valor da condutividade do objeto	63

4.5 Sensibilidade em relação à existência de mais de um objeto.....	66
4.6 Sensibilidade ao padrão de injeção.....	68
4.7 Mapas de correntes.....	69
4.8 Simulações numéricas e resultados.....	72
4.9 Conclusões das simulações.....	74
Conclusões e Trabalhos Futuros.....	75
Apêndice 1: Eletromagnetismo: algumas fórmulas, definições e principais teoremas.....	77
Apêndice 2: Potencial eletrostático para o dipolo.....	82
Apêndice 3: Equações em coordenadas polares.....	88
Referências Bibliográficas.....	91

Lista de Figuras

Figura 1: O primeiro tomógrafo da história, criado por G.N. Hounsfield.....	14
Figura 2: As experiências de Galvani com pernas de sapo.....	16
Figura 3: Esquema do tomógrafo de impedância elétrica.....	17
Figura 4: Imagens de TC e TIE para uma sequência da inspiração.....	17
Figura 1. 1: Esquema do algoritmo <i>backprojection</i>	25
Figura 1. 2 : Valores obtidos em cada par de injeção.....	26
Figura 2. 1: Padrão de injeção adjacente.....	34
Figura 2. 2: Medidas independentes para o padrão adjacente-adjacente.....	36
Figura 3. 1 : Discretização do domínio Ω para 30 eletrodos.....	44
Figura 3. 2: Partição homogênea (esquerda) e não-homogênea (direita) de Ω	46
Figura 4.1 a: Equipotenciais, em volts, obtidas no meio homogêneo com o uso da MH.....	54
Figura 4.1 b: Equipotenciais, em volts, obtidas no meio homogêneo com o uso da MNH.....	55
Figura 4.2 a: Sensibilidade em relação à posição do objeto, (MH).....	57
Figura 4.2 b: Sensibilidade em relação à posição do objeto, (MNH).....	58
Figura 4.3 a: Sensibilidade em relação ao raio do objeto quando seu centro é $C1=(0,00;0,00)$	59
Figura 4.3 b: Sensibilidade em relação ao raio do objeto quando seu centro é $C1=(0,50;0,00)$	60
Figura 4.4 a: Voltagens nos três eletrodos quando os centros dos cilindros estão em $C2=(0,5; 0,0)$	62
Figura 4.4 b: Diferenças entre voltagens nos eletrodos de cilindros de tamanhos diferentes, posicionados em $C1=(0,0; 0,0)$	62
Figura 4.4 c: Diferenças entre voltagens nos eletrodos de cilindros de tamanhos diferentes, posicionados em $C2=(0,5;0,0)$	62
Figura 4.5 a: condutividade 0,002 mho em diferentes posições.....	63
Figura 4.5 b: condutividade 0,020 mho em diferentes posições.....	64
Figura 4.5 c: condutividade 0,200 mho em diferentes posições.....	64
Figura 4.6: Diferenças entre voltagens nos eletrodos de cilindros de tamanhos diferentes, posicionados em $C1=(0,0;0,0)$	66
Figura 4.7: Sensibilidade relativa à presença de mais de um objeto.....	67
Figura 4.8: Valores das voltagens para os meios homogêneo e perturbado por cilindros cujos centros são dados por $C1=(0,5;0,0)$ e $C2=(0,0;0,0)$	68

Figura 4.9: Valores das voltagens para os meios homogêneo e perturbado por cilindros cujos centros são dados por $C1=(0,75;0,25)$ e $C2=(0,75;-0,25)$	68
Figura 4.10: Equipotenciais, em volts, para os diferentes padrões de injeção.....	69
Figura 4.11: Distribuição de corrente para o caso homogêneo.....	70
Figura 4.12: Mapas de correntes para objetos idênticos e de mesma condutividade em posições diferentes.....	71
Figura 4.13: Mapas de correntes para cilindros de mesmas dimensões e posição, com condutividades distintas.....	71
Figura 4.14: Mapa da distribuição de corrente para dois cilindros iguais localizados em posições distintas.....	72
Figura 4.15: Voltagens medidas e simuladas para o meio homogêneo.....	73
Figura 4.16: Voltagens medidas e simuladas para o caso perturbado.....	74
Figura A2.1: Distribuição de duas linhas de cargas paralelas e de sinais opostos	83
Figura A2.2: Em rosa, as equipotenciais de um dipolo. Em azul, as linhas de corrente.....	87

Lista de Tabelas

Tabela 2. 1: Medidas independentes para diferentes padrões de voltagens na injeção adjacente.....	
Tabela 3.1: Resultados da validação obtidos para a MH.....	
Tabela 3.2: Resultados da validação obtidos para a MNH.....	
Tabela 4.1: partições adotadas para as simulações para MH e MNH.....	
Tabela 4.2: Número máximo de iterações para precisão pré-fixada em 10^{-4}	
Tabela 4.3: Valores de voltagem para o caso homogêneo.....	
Tabela 4.4: Voltagens coletadas com o meio perturbado por objetos de diferentes condutividades quando o centro do cilindro é dado por $CI=(0,0;0,0)$	
Tabela 4.5: Voltagens coletadas com o meio perturbado por objetos de diferentes raios e centros $C=(0,5;0,0)$	
Tabela 4.6: Voltagens obtidas para objetos de diferentes condutividades, cujos centros dão dados por $CI=(0,0;0,0)$	
Tabela 4.7: Voltagens obtidas para objetos de diferentes condutividades, cujos centros são dados por $C2=(0.5, 0.0)$	
Tabela 4.8: Voltagens obtidas para objetos de diferentes condutividades, cujos centros são dados por $C3=(0.75, 0.00)$	

Introdução

Imagens do interior do corpo humano vêm sendo utilizadas em procedimentos médicos, cada vez mais como apoio ao diagnóstico. Nos últimos 30 anos diferentes técnicas como tomografia computadorizada (TC), ultrassonografia (US), ecografia, ressonância magnética (RM) foram introduzidas e aprimoradas tanto em relação à qualidade da imagem quanto ao tempo de aquisição de dados, permitindo com isso a visualização de um maior número de órgãos e, em alguns casos, até mesmo sua dinâmica.

Cada uma dessas técnicas têm aplicações específicas na área médica e apresentam vantagens e restrições quando aplicadas. Entre as restrições encontramos a dificuldade para utilização no monitoramento em tempo real de pacientes, exposição à radiação e aplicação de contraste. Isto indica a necessidade de desenvolver uma técnica segura e que possa ser utilizada em tempo real.

A tomografia de impedância elétrica (TIE) é uma possibilidade que vêm sendo estudada há aproximadamente 20 anos. Na prática, para se obter uma imagem de TIE, uma corrente elétrica é injetada através de eletrodos dispostos na superfície no corpo humano e, após a injeção, as diferenças de voltagens são medidas nesse mesmo conjunto de eletrodos. Com os dados de corrente e voltagem é possível reconstruir a distribuição da condutividade no interior do corpo, usando como base as equações do eletromagnetismo. Como tecidos diferentes possuem condutividades diferentes é possível identificar órgãos, tecidos ou anomalias através da obtenção da distribuição da condutividade no interior do corpo. Pelo fato de ser não-invasiva e não expor o paciente à radiação esta técnica pode ser utilizada de forma contínua em várias aplicações como, detecção de edemas pulmonares, identificação de determinados tipos de câncer de mama, monitoramento do fluxo gástrico e do fluxo sanguíneo [6, 10, 14, 17].

As técnicas utilizadas em TIE utilizam algumas idéias vindas da tomografia computadorizada, que por sua vez teve origem no raio X e que serão brevemente apresentadas.

Para realizarmos uma radiografia, a parte do corpo do paciente a ser investigada é posicionada entre uma ampola emissora de raios X e um filme fotográfico, que recebe os raios emitidos, que percorrem uma trajetória em linha reta. Cada pixel da imagem revelada representa a sensibilidade de detecção do raio X que conseguiu ultrapassar a barreira do corpo naquele ponto. A intensidade varia de acordo com a densidade do objeto posicionado entre a fonte e os receptores.

Em 1956 o físico Allan McLeod Cormack demonstrou que a qualidade da imagem de raio X poderia ser melhorada, compondo a informação de projeções feitas em diferentes direções. Para a obtenção da imagem de uma secção transversal do corpo, a ampola emissora e o receptor girariam em torno do paciente, coletando informações de diferentes ângulos. Os resultados de seu trabalho foram publicados no *Journal of Applied Physics I* em 1963 e 1964 mas, por se destinar aos físicos, não chegaram ao conhecimento dos radiologistas.

Paralelamente a este fato, o engenheiro eletrônico Godfrey N. Hounsfield, sem ter conhecimento do trabalho de Cormack, também desenvolvia essa teoria e construiu o primeiro tomógrafo da história onde o eixo de rotação da ampola emissora, gira em torno do objeto e os raios X emitidos são captados por receptores, que convertem a intensidade de raios captados em sinais digitais (**Figura 1**). Em 1979, ambos acabaram recebendo o Prêmio Nobel em Medicina e Fisiologia por estes trabalhos.

Figura 1: O primeiro tomógrafo da história, criado por G.N. Hounsfield

Por causa da posição diametralmente oposta à ampola dos receptores as imagens são radiografias transversais do corpo do paciente dadas em escala de cinza, que podem ser definidas por aproximadamente 200 tons diferentes, contra apenas 30 da radiografia convencional, permitindo assim a visualização, numa mesma imagem, de gordura, ossos e vasos sanguíneos ou a diferenciação de tecidos do fígado e dos rins [32].

Desde 1974, quando começaram a ser produzidos em escala comercial os primeiros tomógrafos, muitos avanços foram obtidos:

- Em 1987 um giro completo levava 1 s e a imagem do corte transversal podia variar de 1 a 10 mm dependendo do ajuste do operador.
- Em 1996, os diagnósticos por TC conseguem ser mais precisos, levando 0,75 s para um giro completo do tomógrafo em torno do corpo.

- Entre 1996 e 1997, detectores UFC (Ultra Fast Ceramic) são desenvolvidos, reduzindo a radiação para a obtenção de alguns tipos de imagens e as imagens passaram a ser reconstruídas em tempo real, uma imagem a cada por volta completa do aparelho.
- Em 2002, a chamada Tomografia Computadorizada por Cortes Múltiplos (TCCM) é capaz de scanear 16 secções por rotação, possibilitando uma visualização do coração em alta definição.
- Em 2004 alguns tomógrafos, além de terem reduzido substancialmente a exposição à radiação, são capazes de gerar 172 imagens por segundo.

Apesar da excelente qualidade das imagens e da velocidade de aquisição e processamento compatíveis com aplicações em tempo real, um dos inconvenientes da TC ainda é a exposição à radiação ionizante, impossibilitando monitoramentos durante um longo intervalo de tempo. Além disso, em alguns casos, a aplicação de um meio de contraste se faz necessária [31]. Outros fatores que também devem ser observados são: o alto custo do tomógrafo, a impossibilidade de deslocamento do equipamento e a exigência de isolamento do local onde será realizado o exame.

Essas mesmas características, que também são observadas na ressonância magnética, apontam para a necessidade da busca de outros meios de obtenção de imagens médicas em tempo real, que não causem danos ao paciente, que possam ser transportados e a preços menores para ampliar o número de usuários.

A tomografia por impedância elétrica possui todos esses atributos, exceto no que se refere à qualidade da imagem, que é muito inferior ao padrão da tomografia computadorizada. É uma técnica baseada na identificação de propriedades elétricas dos tecidos biológicos.

A descoberta da eletricidade animal e sua ação fisiológica é atribuída ao médico italiano Luigi Galvani em 1781. Galvani teve sua atenção chamada pelo fato de um garfo ter acidentalmente encostado nos nervos da perna de um sapo que sua esposa estava preparando para o jantar. Os músculos da perna sofreram uma contração, mesmo sem estarem conectados a um aparelho elétrico. Este acontecimento deixou o médico curioso e, após realizar diversos experimentos com pernas de sapo, que estão relatados em seu livro “*De Viribus - Electricitatis in Motu Musculari*” de 1792 (**Figura 2**), deduziu que a contração era devida ao fluxo de eletricidade – que ele chamou de “eletricidade animal”. Seus experimentos inspiraram muitos outros cientistas a explorarem as propriedades bioelétricas de tecidos [30], sendo criados diversos equipamentos como o eletrocardiograma, o pneumatógrafo de impedância elétrica, a tomografia de impedância elétrica com base nessa linha de pesquisa.

Figura 2: As experiências de Galvani com pernas de sapo.

Na tomografia de impedância elétrica, ao injetarmos corrente elétrica em eletrodos distribuídos na superfície de uma secção transversal do tórax, um campo elétrico é propagado para o interior do corpo, que é um meio não-homogêneo e dinâmico devido à movimentação de órgãos e fluidos. À medida que passa pelos diferentes tecidos a corrente provoca uma alteração nos valores de voltagens, que pode ser detectada por medidas realizadas apenas na superfície do corpo.

A partir do conhecimento da corrente aplicada e dos dados de voltagens medidos na superfície é possível calcular a distribuição de condutividade, que é o inverso da impedância, no interior do tórax. Se o tempo entre a injeção de corrente e a medida de voltagem for ínfimo quando comparado ao tempo necessário para se observar alguma variação significativa do meio, então, a distribuição de condutividades representa a imagem instantânea do tórax, no momento de injeção-aquisição.

A **Figura 3** mostra um esquema de funcionamento de um tomógrafo de impedância elétrica, desde a aplicação da corrente até a obtenção da imagem final. Eletrodos igualmente espaçados são posicionados sobre o contorno definido pela secção transversal do tórax que será reconstruído. Uma corrente é aplicada e imediatamente os valores de voltagens são medidos. O tempo para a aquisição completa de dados é de aproximadamente 0.001s. As correntes aplicadas e os dados de voltagens são processados pelo algoritmo de reconstrução que calcula a distribuição de condutividades e apresenta os resultados no monitor.

Figura 3: Esquema do tomógrafo de impedância elétrica.

Uma comparação entre as imagens produzidas pelas duas técnicas TC e TIE pode ser vista na **Figura 4**, que mostra uma seqüência de imagens obtidas em momentos diferentes da inspiração em um ciclo respiratório.

Figura 4: Imagens de TC e TIE para uma seqüência da inspiração

Na primeira linha as imagens de TC onde, mais à esquerda, temos o momento inicial do ciclo onde os pulmões estão com os alvéolos fechados e à imagem mais à direita o final da inspiração com a maioria dos alvéolos abertos. Na linha de baixo, as imagens correspondentes

reconstruídas de TIE por um método de projeção, o *backprojection*, que é baseado nas equações de um campo definido pelo dipolo elétrico [3]. A partir dessas imagens, é muito claro que o desafio do momento é aprimorar as imagens obtidas pela TIE e vários aspectos influenciam a qualidade da imagem fornecida pela TIE.

Do ponto de vista do equipamento, podemos citar: o número total de eletrodos e a distribuição dos mesmos sobre a superfície; o padrão de injeção de corrente que pode ser escolhido de diferentes formas e deve respeitar as normas de segurança em saúde; a configuração definida para as medidas de voltagens; a velocidade de aquisição e de processamento dos dados capturados.

Em relação ao algoritmo os principais são: a ordem de aproximação do modelo matemático que abrange tanto as equações que definem o fenômeno elétrico quanto a representação local eletrodo-pele; a ordem do erro de discretização do modelo matemático; a estratégia do algoritmo de reconstrução; o equilíbrio das concessões a favor da redução do tempo computacional, considerando o caso de aplicações em tempo real.

O objetivo principal deste trabalho é analisar o impacto de alguns desses aspectos sobre a imagem reconstruída. Para isso será desenvolvido um algoritmo para gerar dados de voltagens na fronteira de um domínio circular, para várias distribuições de condutividades e diferentes padrões de injeção de corrente.

Conhecendo a imagem original, ou seja, a distribuição de condutividades no interior de um domínio circular e a corrente aplicada na fronteira será possível:

- construir o mapa de voltagens no domínio todo e com isso verificar a validade do modelo matemático assumido pelo algoritmo de reconstrução.
- construir o mapa das linhas de correntes no interior do domínio e verificar se existem regiões no interior do domínio que não são atingidas pela corrente.
- utilizar os dados calculados pelo algoritmo para as voltagens na fronteira para reconstruir a imagem com o algoritmo *backprojection* e comparar com a imagem original, na tentativa de identificar os fatores que mais interferem na qualidade da imagem.
- Comparar dados de voltagens simulados e obtidos experimentalmente, para distribuições semelhantes de condutividades.

O estudo proposto poderá servir como base para definição de configurações de equipamentos como, por exemplo, indicar padrões de injeção mais adequados para detectar objetos numa determinada região do domínio, ou mesmo para sinalizar a necessidade de se trabalhar com um modelo matemático mais preciso.

No capítulo 1 são obtidas as equações que modelam o fenômeno de propagação do campo elétrico sobre um domínio fechado e as equações que representam localmente a interface eletrodo-pele. Algumas hipóteses possuem evidências observacionais do ponto de vista fisiológico ou restrições definidas pelo equipamento utilizado para gerar dados experimentais, porém algumas são de absoluta conveniência do modelo de primeira ordem. No capítulo 2 são apresentados os diferentes padrões de correntes que podem ser disponibilizados nos equipamentos e analisados como a escolha do padrão influencia a qualidade da imagem final. No capítulo 3 são apresentadas as equações discretizadas, as malhas computacionais utilizadas, a descrição e validação do método numérico implementado. O capítulo 4 exibe os resultados obtidos em nossas simulações.

Capítulo 1

Aspectos Teóricos da Reconstrução de Imagens por Corrente Aplicada

Partindo de conceitos definidos na teoria do eletromagnetismo e introduzindo algumas simplificações, serão deduzidas as relações entre corrente, voltagem e condutividade que representam a propagação de um campo elétrico em um objeto, quando correntes são aplicadas em sua superfície.[11]

Pelas diferenças entre os tempos do fenômeno fisiológico que queremos representar e o tempo entre a injeção de corrente e a aquisição de dados de voltagens o fenômeno pode ser representado por equações estáticas.

1.1 Relação entre corrente aplicada e voltagem

Quando uma corrente elétrica é aplicada na superfície de um objeto sólido, a função $\vec{J}$ que define o valor da corrente em cada ponto é chamada de densidade de corrente e é dada por:

$$\vec{J} = -e \, n_e \, \vec{v} \left(\frac{\text{unidades de carga}}{\text{unidade de tempo} \times \text{unidade de área}} \right) \quad (1.1)$$

onde $-e$ é a carga de um elétron, n_e uma constante de proporcionalidade e $\vec{v}$ a velocidade com a qual a corrente flui. A unidade de área é definida pela secção transversal perpendicular à direção do fluxo.

A corrente I está relacionada com a densidade de corrente $\vec{J}$ através da integral de superfície

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (1.2)$$

e experimentalmente, observa-se que a densidade de corrente é proporcional ao campo elétrico $\vec{E}$:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.3)$$

onde σ é a condutividade do meio e quando o meio é linear, não-dispersivo e isotrópico.

Num meio linear a condutividade e permissividade elétricas podem ser consideradas independentes do campo magnético, num meio não-dispersivo essas mesmas propriedades elétricas são independentes de frequências e, num meio isotrópico, as propriedades físicas independem do referencial adotado.

Para uma única carga puntiforme q , localizada na posição r_q do domínio, o campo elétrico gerado por ela em um ponto r é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} \quad (1.4)$$

onde ϵ_0 é uma constante fundamental definida como permissividade elétrica. O campo elétrico fica então caracterizado por um monopolo elétrico que aponta para fora, na direção radial se a carga é positiva e para dentro se a carga é negativa. Se o campo é estático, ou seja, independente do tempo, ele pode ser escrito através do gradiente ∇ de uma função u , definida como potencial elétrico (algumas vezes denotada por V e denominada voltagem):

$$\vec{E} = -\nabla u \quad (1.5)$$

e substituindo (1.5) em (1.3) obtém-se a relação entre a corrente e a voltagem

$$\vec{J} = -\sigma \nabla u \quad (1.6)$$

identificada pela Lei de Ohm.

1.2 Modelo matemático – equações de Maxwell

Ao injetarmos correntes elétricas na superfície de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, estamos provocando um evento eletromagnético que, em princípio, é representado pelas equações completas de Maxwell.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.9)$$

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0} \quad (1.10)$$

onde, $\vec{E}$ é o campo elétrico, $\vec{B}$ o campo magnético, ρ a densidade de carga elétrica, $\vec{J}$ a corrente aplicada, ε_0 a permissividade elétrica, c a velocidade da luz e t o tempo.

A equação (1.7) é a *Lei de Gauss* na forma diferencial e estabelece que o campo elétrico devido a uma carga puntiforme varia inversamente com o quadrado da distância à carga. A equação (1.8) é a *Lei de Faraday* que relaciona os campos elétrico e magnético e afirma que, quando numa região do espaço ocorre uma variação do campo magnético, uma variação do campo elétrico é induzida nessa região. A equação (1.9) estabelece que não existem monopolos magnéticos e a equação (1.10) é a *Lei de Ampère-Maxwell*.

Considerando que o tempo médio de um ciclo respiratório de um adulto normal e em repouso é de aproximadamente 4 s e que o tempo entre a injeção de corrente e o processamento da imagem de 0.001 s, podemos assumir que o fenômeno é estático:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.11)$$

e as equações ficam

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.14)$$

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} \quad (1.15)$$

Da equação (1.13) concluímos que o campo elétrico deriva de um potencial, ou seja, vale a equação (1.5) e para a equação (1.15), aplicando o divergente nos dois membros, temos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot \left(\frac{\sigma \vec{E}}{\epsilon_0 c^2} \right) \quad (1.16)$$

Substituindo (1.5) em $\vec{E}$

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad (1.17)$$

que é a equação diferencial parcial que modela o potencial eletrostático u , de um meio Ω com distribuição de condutividade σ , que no caso é uma secção transversal do tórax, submetido a uma corrente $\vec{J}$ aplicada em sua fronteira.

Associadas à equação (1.17) temos as condições sobre a fronteira $\partial\Omega$, considerada uma curva regular de classe C^2 , da região Ω que será mapeada. Assumindo que a corrente aplicada é perpendicular à superfície e que não ocorre escape da mesma nem pela fronteira nem pelos fios que conectam os eletrodos, as condições de fronteira são derivadas das igualdades (1.3) e (1.5):

$$\vec{J} = -\sigma \nabla u \Rightarrow \vec{J} \cdot \vec{n} = \sigma \nabla u \cdot \vec{n} \Rightarrow \sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\vec{J} \cdot \vec{n} \quad (1.18)$$

sendo $\vec{n}$ a normal unitária orientada para fora.

O modelo matemático é definido por uma equação diferencial parcial com condição de Neumann:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u(x, y)) = 0, & \text{para } (x, y) \in \Omega \\ \sigma \frac{\partial u(x, y)}{\partial \vec{n}} = -\vec{J} \cdot \vec{n}, & \text{para } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.19)$$

Para garantir a existência e a unicidade da solução de (1.19) duas condições de compatibilidade devem ser verificadas [25]. A existência é garantida pelo teorema da Gauss no plano, ou seja, a conservação de cargas deve ser verificada:

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad (1.20)$$

Se u é uma solução de (1.19) então $u + U_c$ também é solução se U_c é uma constante arbitrária. Para que a solução seja única, basta impor a segunda equação de compatibilidade:

$$\oint_{\partial\Omega} u \, ds = 0 \quad (1.21)$$

Todas as deduções feitas até o momento exigem apenas que o domínio Ω seja um conjunto conexo com fronteira $\partial\Omega$ definida por uma curva suave.

1.3 O problema inverso

A equação (1.19) que relaciona corrente, voltagem e condutividade permite que qualquer uma dessas grandezas possa ser determinada a partir do conhecimento das outras duas. Entretanto, a solução de (1.19) de interesse prático é aquela que, determina a distribuição de condutividade σ no interior do domínio Ω , conhecendo a corrente aplicada $\vec{J}$ e os valores de voltagens medidos na fronteira $\partial\Omega$.

Esse problema, definido como *problema inverso*, é mal-posto no sentido de Hadamard

e, a existência e unicidade da solução podem ser demonstradas apenas quando a corrente e a voltagem são funções contínuas em $\partial\Omega$, uma curva suave e Ω um domínio conexo [7, 19].

Como existe um número finito de eletrodos, apenas um número finito de informações independentes pode ser obtido na fronteira, comprometendo assim a unicidade da solução.

A solução do *problema inverso*, pode ser obtida por diferentes tipos de algoritmos. Neste trabalho, o algoritmo *backprojection*, será utilizado para a solução do *problema inverso* e como o nome diz é um método baseado em projeção. Os valores das diferenças das voltagens medidos na fronteira são projetados para o interior do domínio, segundo a curva equipotencial definida pelo modelo do dipolo elétrico, num meio homogêneo. Nesta representação, o eletrodo por onde entra a corrente é assumido como uma carga positiva e o eletrodo por onde sai a corrente como uma carga negativa, ambas sobre a superfície do corpo. Se a distância entre os eletrodos for próxima quando comparada com a distância de pontos do domínio, podemos assumir que o campo elétrico gerado é o de um dipolo elétrico, definido pelas duas cargas. A dedução dessas equações pode ser vista no **Apêndice 2**.

Considere que num domínio circular L eletrodos foram posicionados igualmente espaçados sobre a fronteira. Para cada par de eletrodos adjacentes, e_{i1} e_{i2} a corrente é aplicada e as diferenças de voltagens são medidas em todos os pares adjacentes de eletrodos, exceto aqueles pelos quais a corrente foi injetada. Esta restrição é imposta pois as medidas de voltagens feitas nos eletrodos de injeção ficam comprometidas por problemas de blindagens nos fios e devem ser descartadas. Os valores medidos de voltagens entre dois eletrodos são projetados para toda a região interior do domínio (**Figura 1.1**) e a imagem final é a média entre L valores, cada um deles obtido pela injeção de corrente em um par diferente de eletrodos adjacentes, como mostra a **Figura 1.2**.

Figura 1. 1: Esquema do algoritmo *backprojection*

Figura 1.2 : Valores obtidos em cada par de injeção

O *backprojection* utilizado neste trabalho é baseado no esquema clássico [21], que assume que o domínio Ω é circular e que a solução pode ser considerada como uma pequena perturbação da distribuição de condutividades do problema homogêneo. Isto significa que as variações de condutividades calculadas pelo método são perturbações da distribuição de condutividade constante $\sigma=1$.

Estas hipóteses parecem plausíveis no caso de dados experimentais, onde o domínio é um tanque circular preenchido por uma solução salina no qual são introduzidos diferentes objetos. O tanque, apenas com a solução salina, representa o meio homogêneo e a variação de condutividades é determinada pela variação em relação a esse meio homogêneo. Entretanto, mesmo com estas restrições o método continua eficiente, independente do domínio não ser circular ou quando não temos um “homogêneo” bem definido, como é o caso do tórax. O tórax de um adulto tem um formato trapezoidal ou elíptico e o meio homogêneo é geralmente representado pelo momento em que os pulmões estão com o mínimo de ar. A eficiência do método reside principalmente no fato de utilizar diferenças relativas de medidas de voltagens em relação a uma distribuição de referência. Isto o torna muito robusto e imune a pequenas variações que podem ocorrer na tomada de medidas, como posicionamento errado de eletrodos ou variações na impedância de contato.

1.4 O problema direto em coordenadas polares

O algoritmo desenvolvido neste trabalho resolve o que chamados de *problema direto*, cujo objetivo é determinar os valores de voltagens u na fronteira $\partial\Omega$, conhecendo a distribuição de condutividades σ e a corrente aplicada $\bar{J}$ sobre ela.

Através da implementação da solução do *problema direto*, é possível gerar dados de voltagens para estudar diferentes situações, principalmente, diferentes distribuições de condutividades e diferentes padrões de injeção de corrente. Para o estudo do impacto dessas variações sobre a imagem reconstruída o *backprojection* será utilizado a fim de que possam ser comparadas as imagens original e reconstruída, auxiliando na análise dos resultados produzidos pela solução do *problema direto*.

Para aplicações médicas reais, a distribuição de condutividades nunca é conhecida e, portanto, o algoritmo que resolve o *problema direto* é sempre utilizado de forma combinada com algum algoritmo de reconstrução, como por exemplo, em algoritmos iterativos, na determinação de soluções aproximadas ou, como é o caso do *backprojection* para a obtenção da imagem final, na qual as variações são adicionadas à uma imagem de referência.

A dedução de (1.19), tal como descrito na seção (1.2), foi feita em função de coordenadas cartesianas, para um domínio Ω , conexo, com fronteira suave $\partial\Omega$. Entretanto, como o algoritmo de reconstrução – *backprojection* – assume que o domínio é circular e, por resultados experimentais, comprova-se que esta hipótese não influencia de maneira significativa os resultados, será assumido, que o domínio Ω é um círculo de raio 1. Portanto, as equações (1.19) serão escritas em coordenadas polares, por ser um conjunto mais adequado a esse domínio.

Desse modo, o problema direto neste sistema de coordenadas é dado por (Apêndice 3):

$$\sigma \left(\frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.22)$$

para $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, onde a condição de contorno é dada por :

$$\sigma \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \bar{n}} = -\bar{J}(1, \theta) \quad (1.23)$$

para $r = 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

1.5 Modelos de eletrodos

O fenômeno elétrico que ocorre na TIE é modelado por uma equação diferencial parcial com condição de Neumann, cuja unicidade de solução está vinculada ao conhecimento de valores de corrente e voltagem em todos os pontos da fronteira. No problema ideal, a corrente é aplicada em todos os pontos da fronteira e a propagação para o interior do domínio é na direção normal à superfície, o que corresponde, tecnicamente, a termos infinitos eletrodos sobre o contorno da secção transversal, o que é fisicamente impossível.

No problema real, não é possível injetar a corrente de forma contínua e, mesmo com a introdução de blindagens nos fios e eletrodos, é impossível garantir que não haverá dispersão de corrente em direções distintas da normal. Apenas um número finito de eletrodos pode ser fixado e uma distância mínima entre eles deve ser mantida, pois quanto mais próximos melhor deve ser a blindagem de cabos para evitar o escape de corrente.

Para contemplar esses efeitos locais a passagem da corrente $\bar{J}$ pelos eletrodos deve ser modelada através da representação da interface eletrodo-pele e independente do padrão de injeção utilizado, a modelagem da região do eletrodo pode representar de modo mais fiel o evento local, melhorando assim os resultados. A seguir, serão identificados alguns dos modelos de eletrodos propostos para serem empregados no problema da TIE [4, 22]

1.5.1 Modelo contínuo

O modelo contínuo tem como hipótese o fato de a corrente elétrica ser aplicada de maneira contínua na fronteira do domínio. Por exemplo, a corrente pode ser uma função contínua definida por:

$$\vec{J} = \sum_j A_j \sin(j\theta) \vec{n} \quad (1.24)$$

para $0 \leq \theta < 2\pi$ e A_j constantes.

A principal limitação do modelo contínuo é a fraca identificação com o fenômeno real, onde a corrente nunca é injetada de forma contínua.

1.5.2 Modelo “gap”: discretização da corrente em $\partial\Omega$

O modelo conhecido como “gap” é a versão discretizada do modelo contínuo, pois considera que a corrente é injetada em pontos bem definidos da fronteira onde estão localizados os eletrodos. Denotando-se por $|e_k|$, a área ocupada pelo eletrodo e_k , ($k=1, 2, \dots, L$), a densidade de corrente elétrica aplicada é definida por:

$$\vec{J} = \begin{cases} \frac{I_k}{|e_k|}, & \text{em } e_k \\ 0 & \text{fora dos } e_k's \end{cases}, k=1,2,\dots,L \quad (1.24)$$

O modelo “gap”, no entanto, despreza o chamado efeito *shunt* dos eletrodos, ou seja, a baixa resistência elétrica oferecida pelo metal utilizado na constituição dos eletrodos não é levada em conta quando a corrente é injetada. Isto implica em uma redefinição da expressão que define a corrente elétrica, que é levada em conta no modelo descrito a seguir.

1.5.3 Modelo *Shunt*

Neste modelo a corrente elétrica é definida levando-se em conta a existência do efeito *shunt*:

$$\vec{J} = \begin{cases} \int_{e_k} \sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = I_k, k=1,2,\dots,L \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{fora dos } e_k's \end{cases} \quad (1.25)$$

Apesar de uma representação mais fiel da realidade que a dada pelos demais modelos apresentados até aqui, o modelo *shunt* despreza outros eventos eletroquímicos locais. Esses efeitos serão incorporados no modelo completo.

1.5.4 Modelo Completo

Na interface eletrodo-pele é observada a existência de uma impedância de contato, ou seja a camada de gordura do paciente, o tipo de eletrodo, o tipo de gel influenciam na forma como a corrente será propagada. Chamando de z_k essa impedância de contato, o modelo completo corrige o valor da voltagem com adição de um termo que engloba todos esses fatores. A corrente continua sendo representada pela equação (1.25), onde a voltagem U_k corrigida é dada por

$$U_k = u + z_k \sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \quad (1.26)$$

sobre os eletrodos e_k , para $k = 1, 2, \dots, L$.

Neste trabalho, para a representação da injeção da corrente na fronteira serão utilizados os modelos “*gap*” e *Shunt*, pelo fato de não termos como avaliar experimentalmente o valor de impedâncias de contato em pacientes e também, para os dados experimentais provenientes do tanque salino é assumido que a impedância de contato é desprezível.

Capítulo 2

Padrões de Injeção e Medidas Independentes de Voltagens

Dado que apenas um número finito L de eletrodos pode ser fixado sobre a fronteira, o número total de medidas de voltagens independentes também é finito. Entretanto, dependente do padrão escolhido para injetar a corrente, um maior número de medidas de voltagens independentes pode ser obtido.

Neste capítulo serão descritos os padrões de injeção mais utilizados e, para cada um deles, analisada a quantidade de medidas independentes que cada padrão de medida de voltagens pode fornecer. Alguns padrões de injeção foram implementados no algoritmo do problema direto, assim como os arquivos de saída formatados para que simulassem um determinado padrão de medida de voltagem.

A simulação de diferentes padrões para a dupla corrente-voltagem permite avaliar a forma como a corrente se propaga pelo domínio, construir o mapa de voltagens sobre Ω e $\partial\Omega$ e avaliar a influência dos diferentes padrões sobre a qualidade da imagem reconstruída.

Todos os padrões são para um domínio circular Ω , onde correntes $\vec{J}$ estão sendo aplicadas, através de L eletrodos igualmente espaçados distribuídos sobre na fronteira $\partial\Omega$.

2.1 Injeção de corrente e medidas de voltagens simultâneas

Uma das estratégias utilizadas na obtenção dos dados é de injeção de correntes e leitura de voltagens de maneira simultânea em todos os eletrodos [9, 14]. Neste padrão, para cada

eletrodo existe um gerador de corrente, abrindo com isso várias possibilidades para definir a corrente que será aplicada em cada eletrodo. A identificação do melhor padrão é feita através da função $\delta(\vec{J})$ de *distingüibilidade*, ou seja, da capacidade de um determinado padrão de corrente $\vec{J}$ distinguir duas distribuições de condutividades γ e τ diferentes, num domínio idêntico.

Seja $\vec{J}$ a corrente aplicada em um mesmo domínio, sujeito a duas distribuições de condutividades γ e τ diferentes e $\phi_\gamma = R_\gamma \vec{J}$, $\phi_\tau = R_\tau \vec{J}$, respectivamente, os potenciais elétricos definidos sobre a fronteira $\partial\Omega$. O melhor padrão de corrente $\vec{J}$ é aquele onde a função *distingüibilidade* $\delta(\vec{J})$ é máxima, desde que respeite condições de segurança, como controle da magnitude de cada corrente, da soma das correntes aplicadas e da potência:

$$\delta(\vec{J}) = \frac{\|\phi_\gamma - \phi_\tau\|}{\|\vec{J}\|} \quad (2.1)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma do sup.

A justificativa da utilização de múltiplos canais de injeção está baseada no seguinte argumento: se considerarmos a aplicação de corrente apenas em um par de eletrodos a área sobre $\partial\Omega$ onde efetivamente a corrente é aplicada é muito próxima de zero, fazendo com que a medida $\delta(\vec{J})$ também seja quase nula[13]. Ao injetarmos a corrente simultaneamente em todos os eletrodos a área coberta pela corrente injetada passa a ser significativa, se aproximando um pouco mais do modelo contínuo.

Para cada tipo de aplicação (domínio e precisão) deverá ser determinado o melhor padrão, segundo o critério de *distingüibilidade*. Por exemplo, no caso de um domínio circular de condutividade é igual a 1 mho, com exceção de uma região circular central, onde a condutividade é diferente de 1 mho, o melhor padrão é definido por [1] :

$$\vec{J}(l) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}(l-1)\right) \quad (2.2)$$

onde $\vec{J}(l)$ é a corrente aplicada ao l -ésimo eletrodo, $l=1,2,\dots,L$.

Neste esquema de injeção simultânea, só faz sentido o padrão de leitura de voltagens

também simultânea. Em geral diferenças de voltagens são obtidas através da diferença $V_l - V_0$ onde V_0 é um eletrodo extra, posicionado fora do contorno $\partial\Omega$.

2.2 Padrão de 4 eletrodos

Um outro modo de configurar o equipamento é chamado de padrão de 4 eletrodos. Neste padrão, a corrente é aplicada em um par de eletrodos, chamado de *par de injeção*: o eletrodo que recebe a carga positiva $+\bar{J}$ é denominado eletrodo de injeção e o que recebe a carga negativa, $-\bar{J}$ de eletrodo aterrado. As medidas de voltagens são coletadas através da diferença ΔV , entre 2 eletrodos quaisquer do domínio.[5, 26].

Como na fronteira estão colocados L eletrodos, o padrão de injeção define quais serão os pares de injeção e, para cada par de injeção, o padrão de voltagens define quais os pares de eletrodos serão utilizados para medidas, estabelecendo assim a configuração corrente-voltagem.

Em princípio é possível medir voltagens entre quaisquer dois eletrodos, mas em geral as medidas que envolvem os eletrodos de injeção são excluídas pois possuem erros muito maiores que os observados nas medidas que não envolvem esses eletrodos. Outro fator que deve ser observado, é a distância entre os eletrodos pois, quanto maior essa distância maior é o valor absoluto medido para os ΔV .

As configurações de corrente-voltagem que serão descritas a seguir são as mais freqüentes nos equipamentos já existentes. A notação utilizada será a seguinte:

- L total de eletrodos igualmente espaçados, posicionados sobre a fronteira do círculo Ω ;
- $\bar{J}_{k+n}$: o par de injeção é definido pelos eletrodos e_k e e_{k+n} , e a corrente $+\bar{J}$ é injetada no eletrodo de injeção e_k e e_{k+n} o eletrodo aterrado, para $k = 1, 2, \dots, L$ e $n = 1, 2, \dots, L/2$;
- $\Delta V_{s+m} = V_{s+m} - V_s$: a diferença de voltagem é realizada entre os eletrodos e_{s+m} e e_s , onde $s = 1, 2, \dots, L$ e $m = 1, 2, \dots, L/2$. Não é obrigatório que s seja diferente de k , mas em geral não são feitas medidas de voltagens envolvendo os eletrodos do par de injeção.

Nas figuras que representam os padrões de corrente-voltagem foram utilizados apenas

8 eletrodos mas os esquemas podem ser imediatamente generalizados para um número L qualquer de eletrodos.

2.2.1 Padrão de injeção adjacente: $n = 1$ e $k = 1, 2, \dots, L$

No *padrão adjacente* $n = 1$ e temos um total de L pares diferentes de injeção, pois $k = 1, 2, \dots, L$ (**Figura 2.1**), ou seja, o conjunto completo de injeção, que considera todos os pares adjacentes é que é chamado de *padrão adjacente*. A corrente sobre $\partial\Omega$ é dada por

$$\tilde{J}_{k+l} = \begin{cases} +1, & \text{em } e_k \\ -1, & \text{em } e_{k+l} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, k = 1, 2, \dots, L \quad (2.3)$$

Figura 2. 1: Padrão de injeção adjacente

Fixado o padrão de injeção, vamos analisar as possibilidades para medidas de voltagens. Considerando que para efetuar as medidas das diferenças de voltagens não são usados os

eletrodos que participaram da injeção, o número total de medidas de voltagens independentes depende do valor definido para m . Outro ponto que deve ser levado em conta é justificado pelo teorema da reciprocidade, que diz que os valores da resistência não se alteram se os pares de eletrodos de injeção de corrente e medidas de voltagens são comutados, ou seja,

$$V_{s+m} = RJ_{k+n} \Leftrightarrow V_{k+n} = RJ_{s+m} \quad (2.3)$$

Isto significa que a segunda medida V_{k+n} não é independente [2].

Por exemplo, se as diferenças de voltagens são tomadas também em eletrodos adjacentes, para o primeiro par $\vec{J}_{1+l}$ o número de medidas independentes para as voltagens é de $L-3$.

À medida que o par de injeção vai efetuando a rotação, $\vec{J}_{k+l}$, $k = 2, 3, \dots, L$, o número de medidas independentes diminui, pois vão sendo excluídas as que verificam o teorema da reciprocidade.

A **Figura 2.2** mostra um mapa das medidas independentes de voltagens que podem ser obtidas pela configuração adjacente-adjacente para corrente-voltagem. Os dois primeiros números dentro dos círculos representam os índices dos eletrodos do par de injeção e os dois últimos os índices dos eletrodos que foi tomada a diferença de voltagem. Os símbolos $\oplus$, $\ominus$ e $\diamond$, representam os eletrodos de injeção, aterrado e de medida de voltagem, respectivamente.

Ainda no padrão adjacente, outras possibilidades para as medidas de voltagens podem ser exploradas, variando o valor de m , ou seja, o espaçamento entre os eletrodos. Na **Tabela 2.1** estão listados para diferentes valores de m o número de medidas independentes, quando o padrão de injeção é adjacente.

Tabela 2. 1: Medidas independentes para diferentes padrões de voltagens na injeção adjacente

padrão de voltagem		medidas independente s	$L = 16$	$L = 30$	$L = 32$	$L = 64$
adjacente	$(m = 1)$	$L(L-3)/2$	104	405	464	1952
espaçamento 1	$(m = 2)$	$L(L-4)$	192	780	896	3840
espaçamento 2	$(m = 3)$	$L(L-5)$	176	750	864	3776
90 °	$(m = L / 4)$	$L(3L / 4 - 2)$	160	615	704	2944
diametral	$(m = L / 2)$	$L(L / 2 - 2)$	96	390	448	1920

Figura 2. 2: Medidas independentes para o padrão adjacente-adjacente: ⊕ eletrodo de injeção; ⊗ eletrodo aterrado; ♦ eletrodos das medidas de voltagens.

Apesar da diferença do número de medidas independentes ser significativa, não é só este número que é utilizado para a definição de um equipamento. A razão sinal-ruído também deve ser levada em conta, o que significa que nem sempre o padrão que fornece o maior número de

medidas independentes é o que implementado.

2.2.2 Padrão de injeção espaçamento n , $n = 2, 3, \dots, L/2$

No *padrão espaçamento n* o eletrodo de injeção é e_k e o aterrado é o e_{k+n} . Alguns padrões são mais usuais, como o *espaçamento 2*, o *padrão 90°* onde $n = L/4$ e o *padrão diametral*, onde $n = L/2$. Exceto para o padrão diametral, que apenas $L/2$ pares diferentes de injeção podem ser definidos, para os outros padrões temos L pares distintos de eletrodos de injeção. A corrente sobre $\partial\Omega$ é dada por

$$\vec{J}_{k+n} = \begin{cases} +1, & \text{em } e_k \\ -1, & \text{em } e_{k+n} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, k = 2, \dots, L^* \quad (2.4)$$

onde $L^* = L, L/4 (90^\circ)$ ou $L/2$ (*diametral*).

Os *padrões 90°* e *diametral* possuem uma vantagem física em relação aos padrões nos quais os eletrodos de injeção estão mais próximos, pois a corrente, para atingir o eletrodo aterrado deve percorrer um caminho maior pelo interior do domínio. Entretanto, quanto menor a distância entre os eletrodos do par de injeção, a configuração fica mais próxima da representação do dipolo elétrico, que demonstrou ser uma representação bastante satisfatória para o fenômeno. Além disso no caso do *diametral*, temos ainda que o número de medidas independentes diminui significativamente.

No caso do protótipo que foi desenvolvido pelo Laboratório de Investigação Médica da FMUSP utiliza 30 eletrodos e os padrões adotados foram *espaçamento_1*, tanto para a injeção quanto para as medidas de voltagens. Fazendo a contagem, temos um total de 375 medidas independentes.

Apesar da perda significativa de medidas de voltagens independentes, se comparado com os padrões adjacente-espaçamento_1, que fornecem 780 medidas independentes, a opção foi feita em função da relação sinal-ruído, que ficou em torno de 1/20000.

2.3 Padrões de corrente implementados

No algoritmo que foi implementado para o problema direto qualquer padrão de injeção de espaçamento n pode ser simulado, $n = 1, 2, \dots, L/2$, bastando definir o valor de n na entrada. Também pode ser simulado um número qualquer de eletrodos L sobre $\partial\Omega$ e os modelos *gap* e *shunt*.

Ao resolver o problema direto os valores das voltagens podem ser determinados para qualquer ponto da malha computacional. Para os valores sobre a fronteira, os valores absolutos de voltagens são manipulados de forma a gerar qualquer padrão de medida de diferença de voltagens.

No próximo capítulo as equações do problema serão discretizadas e apresentado o algoritmo de resolução do problema direto.

Capítulo 3

Algoritmo do Problema Direto

Considerando que o domínio Ω é um círculo de raio 1, a equação diferencial parcial será discretizada em coordenadas polares, usando o esquema de diferenças finitas de cinco pontos.

Duas malhas computacionais serão implementadas e comparadas. Uma chamada de *malha polar de partição homogênea (MH)*, que utiliza como o nome diz partições homogêneas nas direções radial e angular. A outra, chamada de *malha polar de partição não-homogênea (MNH)* introduz mais partições angulares em regiões do domínio mais próximas da fronteira.

3.1 Discretização das equações

Considere o domínio Ω , uma região circular de raio $r = 1$. O modelo matemático que vincula potencial elétrico, corrente e condutividades, deriva das equações da eletrostática e é dado, em coordenadas polares pelas equações (1.22) e (1.23), obtidas no capítulo 1:

$$\sigma \left(\frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0$$

e

$$\sigma \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \vec{n}} = -\vec{J}(1, \theta)$$

para $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Sejam M e N dois inteiros maiores que zero e vamos denotar por Δr e $\Delta \theta$,

respectivamente, as partições radiais e azimutais de Ω :

$$\Delta r = r/N \quad \text{e} \quad \Delta \theta = 2\pi/M \quad (3.1)$$

logo, um ponto na posição (r_i, θ_j) na malha é identificado por:

$$r_i = i \Delta r, i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad \theta_j = (j-1) \Delta \theta, j = 1, \dots, M \quad (3.2)$$

A posição $j = 1$ identifica o primeiro eletrodo que recebe a injeção de corrente, ou seja onde é iniciado um conjunto completo de medidas. No caso teórico, a posição desse eletrodo não é significativa, mas para aplicações médicas, os eletrodos devem ser posicionados sempre da mesma forma. Qualquer monitoramento deve seguir um protocolo pré-estabelecido, o que implica na definição de vários procedimentos, inclusive a posição dos eletrodos e o sentido de rotação da injeção, evitando que a imagem reconstruída sofra rotações na tela apresentada ao médico. Isso poderia também ser corrigido por um algoritmo, mas implica no aumento do tempo computacional desnecessariamente. Assumiremos que a posição $j = 1$ corresponde ao ângulo $\theta = 0^\circ$, ou seja, no domínio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, corresponderia à posição $(1,0)$.

Vamos supor que o potencial $u(r, \theta)$, é de classe C^4 , com as derivadas de ordens 2, 3 e 4 limitadas e que $\sigma(r, \theta)$, que representa a condutividade, é uma função de classe C^2 , com as derivadas de ordem 2 também limitadas. Desenvolvendo $u(r, \theta)$ em Série de Taylor em torno de Δr e truncando no termo de 4ª ordem temos:

$$u(r + \Delta r, \theta) = u(r, \theta) + \Delta r \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} + \frac{(\Delta r)^2}{2!} \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{(\Delta r)^3}{3!} \frac{\partial^3 u(r, \theta)}{\partial r^3} + \frac{(\Delta r)^4}{4!} \frac{\partial^4 u(r + \zeta_1, \theta)}{\partial r^4} \quad (3.3)$$

$$u(r - \Delta r, \theta) = u(r, \theta) - \Delta r \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} + \frac{(\Delta r)^2}{2!} \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial r^2} - \frac{(\Delta r)^3}{3!} \frac{\partial^3 u(r, \theta)}{\partial r^3} + \frac{(\Delta r)^4}{4!} \frac{\partial^4 u(r + \zeta_2, \theta)}{\partial r^4} \quad (3.4)$$

com $0 < \zeta_1, \zeta_2 < 1$.

Somando as equações (3.3) e (3.4), obtemos uma aproximação para a 2ª derivada parcial em relação à r :

$$\frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial r^2} = \frac{u(r+h, \theta) - 2u(r, \theta) + u(r-h, \theta)}{(\Delta r)^2} + E_1 \quad (3.5)$$

onde

$$E_1 = -\frac{(\Delta r)^2}{4!} \left[\frac{\partial^4 u(r+\zeta_1, \theta)}{\partial r^4} + \frac{\partial^4 u(r+\zeta_2, \theta)}{\partial r^4} \right] \quad (3.6)$$

Analogamente, realizando o desenvolvimento em Série de Taylor em torno de $\Delta \theta$ e truncando no termo de 4ª ordem, obtemos a aproximação para a 2ª derivada parcial de θ :

$$\frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{u(r, \theta + \Delta \theta) - 2u(r, \theta) + u(r, \theta - \Delta \theta)}{(\Delta \theta)^2} + E_2 \quad (3.7)$$

onde

$$E_2 = -\frac{(\Delta \theta)^2}{4!} \left[\frac{\partial^4 u(r, \theta + \varpi_1)}{\partial r^4} + \frac{\partial^4 u(r, \theta + \varpi_2)}{\partial r^4} \right] \quad (3.8)$$

com $0 < \varpi_1, \varpi_2 < 2\pi$.

Para os termos que envolvem as derivadas de 1ª ordem, utilizaremos esquemas de diferenças centradas com erros de truncamento de ordem 2. Na direção de r , a expressão é obtida a partir da subtração de (3.3) da equação (3.4) truncadas no termo de 3ª ordem:

$$\frac{\partial F(r, \theta)}{\partial r} = \frac{F(r + \Delta r, \theta) - F(r - \Delta r, \theta)}{2\Delta r} + E_3 \quad (3.9)$$

$$E_3 = -\frac{(\Delta r)^2}{3!} \left[\frac{\partial^3 F(r + \zeta_3, \theta)}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 F(r + \zeta_4, \theta)}{\partial r^3} \right] \quad (3.10)$$

com $0 < \zeta_3, \zeta_4 < 1$, e, de forma análoga para a direção θ , tomando-se as expressões da série de Taylor desenvolvida em torno de $\Delta \theta$, truncando no termo de 3ª ordem:

$$\frac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{F(r, \theta + \Delta \theta) - F(r, \theta - \Delta \theta)}{2\Delta \theta} + E_4 \quad (3.11)$$

$$E_4 = -\frac{k^2}{3!} \left[\frac{\partial^3 F(r, \theta + \varpi_3)}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 F(r, \theta + \varpi_4)}{\partial r^3} \right] \quad (3.12)$$

com $0 < \varpi_3, \varpi_4 < 2\pi$.

Em todas as aproximações o erro é de ordem 2 em Δr ou $\Delta \theta$. Substituindo todas as aproximações nas equações (1.22) e (1.23), no ponto (r_i, θ_j) as equações discretizadas são:

$$a_{i,j}u_{i-1,j} + b_{i,j}u_{i+1,j} + c_{i,j}u_{i,j-1} + d_{i,j}u_{i,j+1} + e_{i,j}u_{i,j} = 0 \quad (3.13)$$

para $i = 1, 2, \dots, N-1$ e $j = 1, 2, \dots, M-1$ e os coeficientes dados por

$$a_{i,j} = -\frac{\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j}}{4(\Delta r)^2} + \sigma_{i,j} \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2(\Delta r)r_i} \right) \quad (3.14)$$

$$b_{i,j} = \frac{\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j}}{4(\Delta r)^2} + \sigma_{i,j} \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2(\Delta r)r_i} \right) \quad (3.15)$$

$$c_{i,j} = -\frac{1}{r_i^2} \left(\frac{\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1}}{4(\Delta \theta)^2} \right) + \frac{\sigma_{i,j}}{r_i^2(\Delta \theta)^2} \quad (3.16)$$

$$d_{i,j} = \frac{1}{r_i^2} \left(\frac{\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1}}{4(\Delta \theta)^2} \right) + \frac{\sigma_{i,j}}{r_i^2(\Delta \theta)^2} \quad (3.17)$$

$$e_{i,j} = -2\sigma_{i,j} \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_i^2(\Delta \theta)^2} \right) \quad (3.18)$$

A equação (3.13) não pode ser usada para calcular as soluções na origem. Em nosso trabalho, para a posição (0,0) é definido o ponto u_0 utilizando o esquema descrito a seguir [24]. Partindo da equação de Poisson:

$$\sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = f(r, \theta)$$

e integrando sobre um disco D de raio ε , obtemos:

$$\iint_D f r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sigma \frac{\partial u}{\partial r} \varepsilon \, d\theta \quad (3.19)$$

Escolhendo-se $\varepsilon = \Delta r/2$ e aproximando-se (3.19) por:

$$f(0) = \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \cdot \pi = \sum_{j=1}^M \sigma_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{0,j}}{\Delta r} \frac{\Delta r}{2} \Delta\theta \quad (3.20)$$

Como $\Delta\theta = 2\pi/M$, temos:

$$u_{0,j} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M u_{i,j} - f(0) \cdot \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \quad (3.21)$$

Como estamos resolvendo o Laplaciano, $f(0)=0$ e na origem como índice j não é necessário para a variável $u_{0,j}$ será descartado, ficando identificado pela variável u_0 representada por:

$$u_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M u_{i,j} \quad (3.22)$$

Resta obtermos a discretização dos pontos localizados na fronteira $\partial\Omega$, quando $i = n$:

$$\sigma(1, \theta_j) \frac{\partial u(1, \theta_j)}{\partial \vec{n}} = -\bar{J}(1, \theta_j) \quad (3.23)$$

para $j = 0, 1, \dots, M$ e a corrente aplicada onde $\bar{J}$ é dada por um dos modelos de representação local, o *gap* ou o *shunt*. Substituindo a derivada na direção normal pela aproximação de ordem 2:

$$\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \vec{n}} = \frac{u(r + \Delta r, \theta) - u(r - \Delta r, \theta)}{2\Delta r} \quad (3.24)$$

onde $u(1 + \Delta r, \theta_j)$ representam nós fictícios, uma vez que, neste caso, tais pontos estão localizados

fora do domínio. Na **Figura 3.1** os nós fictícios estão representados pelos losangos.

Figura 3.1 : Discretização do domínio Ω para 30 eletrodos

Substituindo (3.24) em (3.23) e lembrando que $i = N$, a discretização para os pontos sobre $\partial\Omega$ é:

$$u_{N,j} = -\frac{2\Delta\theta}{\sigma_{N-1,j}} \vec{J}(1, \theta_j) + u_{N-2,j} \quad (3.25)$$

3.2 Malhas Computacionais

A escolha de coordenadas polares está vinculada ao formato circular do domínio. Uma *partição homogênea* definida pelos inteiros M e N , onde, $\Delta r = 1/N$ e $\Delta = 2\pi/M$, implica em uma distribuição não-homogênea de pontos na malha computacional, com uma maior concentração de pontos na região central (**Figura 3.1**). Como a corrente elétrica é aplicada somente na fronteira do domínio, os pontos próximos à superfície são, de fato, os pontos onde a perturbação provocada pela corrente é percebida com maior intensidade e experimentalmente, comprova-se que nas regiões próximas ao centro do domínio o campo elétrico é muito fraco. Se aumentarmos os valores de N e M com o objetivo de melhor representar o fenômeno na fronteira, o que se observa é uma

diminuição dos valores das voltagens calculadas a medida que aumentamos os valores de N e M [13]. Isso significa que, para se garantir uma densidade de pontos adequada na região próxima à fronteira, um número muito grande de pontos se acumulará no centro, justamente onde a corrente é praticamente nula.

Para minimizar esse efeito introduzimos uma *partição não-homogênea* do domínio. Seja $\wp(r) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p\}$, uma partição do raio r , $0 < \xi_1 < \dots < \xi_p < 1$, p inteiro. A partição de $r=1$, é definida por $\Delta r = 1/N$, logo, $r_i = i \Delta r$, para $i = 1, 2, \dots, N$.

$$\Delta\theta = \begin{cases} \frac{2\pi}{M}, & \text{se } \xi_p < r_i < 1 \\ \frac{2\pi}{(M/2)}, & \text{se } \xi_{p-1} < r_i < \xi_p \\ \dots & \\ \frac{2\pi}{(M/2^p)}, & \text{se } \xi_1 < r_i < \xi_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

É importante observar que se para algum nível $(M/2^q)$ é um número ímpar, para $q = 1, 2, \dots, p$, então a próxima subdivisão será dada por $((M/2^q)+1)/2$.

A **Figura 3.2** mostra as duas partições para um domínio circular, onde 16 eletrodos igualmente espaçados estão sobre a fronteira. Na imagem da esquerda a partição homogênea da malha, com $M=16$ e $N = 10$. Na imagem à direita a partição não-homogênea com $\wp(r) = \{0.4, 0.7\}$.

As subdivisões são definidas a priori e não foi implementado um algoritmo adaptativo. Além da melhor distribuição de pontos no domínio, outras vantagens observadas foram a diminuição do tempo computacional e os valores encontrados para as voltagens. O fenômeno descrito anteriormente sobre os valores das voltagens tenderem a zero com a diminuição de Δr e $\Delta\theta$ fica retardado com a introdução da malha não-homogênea. No próximo capítulo serão detalhadas algumas comparações.

Figura 3. 2: Partição homogênea (esquerda) e não-homogênea (direita) de Ω

3.3 Solução do sistema linear

A solução do sistema linear

$$G u = B \quad (3.27)$$

de ordem $(N \times M + 1)$ e definido pela equação (3.13) é o vetor dos valores das voltagens em cada posição do domínio computacional:

$$u = (u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,M}, \dots, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{2,M}, u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,M}, u_0)^T \quad (3.28)$$

onde o vetor B armazena em seus primeiros M elementos os valores definidos pela condição de Neumann. Como nossa matriz G é não singular e esparsa o método iterativo adotado foi o método de Gauss-Seidel [12, 20].

A malha computacional tem formato circular e como a injeção de corrente ocorre da borda para o centro do domínio, tivemos que tomar alguns cuidados na implementação do método. O primeiro foi o de varrer a malha da borda para o centro, no sentido anti-horário, de modo a

concordar com as imposições de caráter físico do problema: o nó $u_{N,1}$, que está na posição (1,0) é o primeiro a ser calculado. Na sequência calculam-se todos os valores da circunferência de raio 1, $u_{N,2}, u_{N,3}, \dots u_{N,M}$. A partir daí inicia-se o cálculo dos valores da circunferência de índice $N-1$, e $u_{N-1,j}$, até atingir o ponto central.

O segundo cuidado foi relativo à atualização dos valores no método de Gauss-Seidel, já que temos situações especiais para o ponto central, pontos da fronteira e dos que envolvem os índices $j = 1$ e $j = M$. Para o cálculo das soluções em $u_{i,j}$ com $i=1,2,\dots, N-1$ e $j=2,3,\dots, M-1$ na iteração de ordem $v+1$, utilizamos as soluções obtidas em $u_{i+1,j}$ e $u_{i,j-1}$ da iteração de mesma ordem e as obtidas em $u_{i-1,j}$ e $u_{i,j+1}$ da iteração de ordem v .

Assumindo que a iteração que está sendo realizada é a de ordem $v+1$, descreveremos a seguir como foram implementadas essas atualizações.

1. atualização do ponto central:

$$u_{0,j}^{v+1} = \sum_{j=1}^M u_{i,j}^{v+1} \quad (3.28)$$

2. atualizações dos pontos da fronteira

$$u_{n,j}^{v+1} = -\frac{2\Delta r}{\sigma_{n-1,j}} \vec{J}(l, \theta_j) + u_{n-2,j}^v \quad (3.29)$$

3. atualizações dos pontos quando $j=1$

$$u_{i,j}^{v+1} = e_{i,j}^{-1} (a_{i,j} \cdot u_{i-1,j}^v + b_{i,j} \cdot u_{i+1,j}^{v+1} + c_{i,j} \cdot u_{i,j-1}^v + d_{i,j} \cdot u_{i,j+1}^v) \quad (3.30)$$

4. atualizações dos pontos para $j=M$

$$u_{i,j}^{v+1} = e_{i,j}^{-1} (a_{i,j} \cdot u_{i-1,j}^v + b_{i,j} \cdot u_{i+1,j}^{v+1} + c_{i,j} \cdot u_{i,j-1}^{v+1} + d_{i,j} \cdot u_{i,j+1}^{v+1}) \quad (3.31)$$

5. atualizações dos pontos onde $j = 1$ e $j = M$:

$$u_{i,j}^{v+1} = e_{i,j}^{-1} (a_{i,j} \cdot u_{i-1,j}^v + b_{i,j} \cdot u_{i+1,j}^{v+1} + c_{i,j} \cdot u_{i,j-1}^{v+1} + d_{i,j} \cdot u_{i,j+1}^v) \quad (3.32)$$

Note que na equação (3.30) apenas uma informação atualizada é utilizada no cálculo da solução, ao contrário do usual, onde pelo menos duas informações atualizadas são utilizadas.

Neste caso, uma estratégia de correção seria calcularmos novamente a solução em $u_{i,1}$ assim que todos os nós de índice i fossem percorridos, usando, portanto, a informação atualizada em $u_{i,M}$. No caso particular de nosso problema, no entanto, a mudança observada na solução obtida foi insignificante quando comparada à conseguida com uso da equação (3.30), e, por este motivo, optamos por utilizarmos apenas esta equação no cálculo das soluções em $u_{i,1}$, $i=1,2,\dots, N-1$.

Na implementação da *Malha Polar de Partição Não- Homogênea* algumas modificações foram necessárias: os nós localizados nas fronteiras que delimitam os anéis onde a partição da malha é diminuída tiveram que ser tratados de modo distinto, bem como o tamanho do passo dado pelo índice j nas regiões onde a partição azimutal foi diminuída. A variação da malha em qualquer uma das partições sempre teve início no índice $j=1$. Além disso, em nossas implementações, a malha foi dividida em três partes, sendo os termos em (3.26) dados por: $j_1=0,5$ e $j_2=0,25$.

Assim, as soluções $u_{i,j}$ para $i= N/2, (N/2)+1,\dots, N$ e $j= 1, 2, \dots, M$ são calculadas do mesmo modo que as da malha de partição homogênea, (ou seja, utilizando-se as equações (3.30), (3.31) e (3.32)).

Já as soluções onde $i= (N/2)-1$, (ou seja, as que estão localizadas no primeiro anel que limita as partições distintas), são calculadas como na malha homogênea se o índice j for um número ímpar. Como no anel seguinte a malha sofre redução em seu número de partições na direção azimutal, o tamanho do passo j é dobrado, dessa forma, as equações (3.31) e (3.32) se tornam inviáveis se j é par, pois não existe o nó $u_{i-1,j}$. Neste caso a estratégia adotada foi modificar tais equações de modo que o termo $c_{i,j}$ multiplicasse a média entre $u_{i-1,j-1}$ e $u_{i-1,j+1}$ no caso em que $j=30$, e entre $u_{i-1,j-1}$ e $u_{i-1,j+1}$ nos demais casos.

Quando $i=(N/2)-2$, a partição é diminuída e dessa forma o tamanho do passo j é aumentado no cálculo de $u_{i,j}$, $i= (N/4)+1,\dots,(N/2)-2$ e $j= 1, 2, \dots, M$, de forma que as soluções são dadas pelas equações a seguir:

6. atualizações dos pontos quando $j=1$:

$$u_{i,j}^{v+1} = e_{i,j}^{-1} (a_{i,j} \cdot u_{i-1,j}^v + b_{i,j} \cdot u_{i+1,j}^{v+1} + c_{i,j} \cdot u_{i,M-1}^v + d_{i,j} \cdot u_{i,j+2}^v) \quad (3.33)$$

7. atualizações dos pontos onde $j=1$ e $j=M$:

$$u_{i,j}^{v+1} = e_{i,j}^{-1} (a_{i,j} \cdot u_{i-1,j}^v + b_{i,j} \cdot u_{i+1,j}^{v+1} + c_{i,j} \cdot u_{i,j-2}^{v+1} + d_{i,j} \cdot u_{i,j+2}^v) \quad (3.34)$$

No caso de nosso trabalho, não definimos uma equação para o caso em que $j=M$, uma vez que trabalharemos sempre M par, logo, as soluções em $u_{i,M}$ não são calculadas nesta região da malha.

Se $i=N/4$, novamente estamos num anel que delimita a região onde a malha é reduzida, e, pensando de maneira análoga ao caso em que $i=(N/2)-1$, notamos que, como o valor do passo j é novamente dobrado no anel seguinte, as equações (3.33) e (3.34) podem ser utilizadas se j é congruente a 1 módulo 4. Mas, se j é congruente a 3 módulo 4, não temos informação em $u_{i-1,j}$ e assim o termo $c_{i,j}$ deve multiplicar a média entre $u_{i-1,j-2}$ e $u_{i-1,j+2}$.

Finalmente quando $i=(N/4)-2, (N/4)-3, \dots, 1$, o índice j é novamente aumentado, sendo as soluções calculadas por:

8. atualizações dos pontos quando $j=1$:

$$u_{i,j}^{v+1} = e_{i,j}^{-1} (a_{i,j} \cdot u_{i-1,j}^v + b_{i,j} \cdot u_{i+1,j}^{v+1} + c_{i,j} \cdot u_{i,M-3}^v + d_{i,j} \cdot u_{i,j+4}^v) \quad (3.35)$$

9. atualizações dos pontos onde $j \neq 1$ e $j \neq M$:

$$u_{i,j}^{v+1} = e_{i,j}^{-1} (a_{i,j} \cdot u_{i-1,j}^v + b_{i,j} \cdot u_{i+1,j}^{v+1} + c_{i,j} \cdot u_{i,j-4}^{v+1} + d_{i,j} \cdot u_{i,j+4}^v) \quad (3.36)$$

Os pontos centrais foram tratados da mesma forma que a proposta no caso da malha polar de partição homogênea, sendo que o tamanho do passo j é o mesmo definido para $i=(N/4)-2, (N/4)-3, \dots, 1$.

Os critérios de parada adotados durante a implementação do método foram o número máximo de iterações ou a imposição que o erro máximo na iteração k dado fosse menor que um certo valor $\varepsilon > 0$, imposto pela precisão do problema. O erro foi calculado através da variação relativa:

$$erro^{(v)} = \max |var_{i,j}^{(v)}|, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad e \quad j = 1, 2, \dots, M$$

onde:

$$var_{i,j}^{(v)} = \begin{cases} \frac{|u_{i,j}^{(v)} - u_{i,j}^{(v-1)}|}{|u_{i,j}^{(v)}|}, & se \quad u_{i,j}^{(v)} \neq 0 \\ 0, & se \quad u_{i,j}^{(v)} = u_{i,j}^{(v-1)} = 0 \\ 1, & caso \quad contrario \end{cases} \quad (3.37)$$

3.4 Algoritmo do problema direto

Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos a partir da implementação, em linguagem C, do algoritmo do problema direto que será apresentado nesta seção. O mesmo foi usado como referência na resolução do problema com o uso das duas malhas apresentadas neste capítulo, que é encerrado com a validação do programa implementado

3.4.1 Algoritmo estruturado

O algoritmo que resolve o problema direto tem como ponto de partida os seguintes dados : quantidade de eletrodos utilizada (**L**), número de partições radiais (**N**) e azimutais (**M**), condutividade do meio homogêneo (**σ**), configuração de corrente-voltagem (**padrão**), modelo de eletrodo utilizado (**modelo**) e os seguintes dados do(s) objeto(s) caso o meio seja perturbado: tamanho(s) do(s) raio(s) (**raios_i**), coordenadas do(s) centro(s) do(s) objeto(s) (**xc_i**, **yc_i**), valor(es) da (s) condutividade(s) interna(s) do(s) mesmo(s) (**σ'_i**), tipo de malha utilizada (**tipo**). A partir do conhecimento desses valores o algoritmo particiona o domínio, verifica se o(s) objeto(s) inserido(s) está(ão) de fato no interior do domínio e, no caso da presença de mais um objeto, de não há intersecção entre os mesmos. Passada essa etapa, o algoritmo define o sistema linear $Gu = B$ a ser resolvido, observando, na construção do lado direito do mesmo, a configuração de corrente-

voltagem, e o modelo de eletrodo utilizado, e resolve o mesmo utilizando o método iterativo de Gauss-Seidel, respeitando o erro (*tol*) e o número de iterações (*itmax*) pré-fixados, cuja solução ($u_{j,k}$) representa a voltagem em cada ponto do domínio. Finalizando, a partir da solução obtida e das condutividades dadas, o algoritmo calcula a corrente ($J_{j,k}$) propagada pelo domínio através da aplicação da 1ª Lei de Ohm, ($u=RJ$). O algoritmo esquematizado é apresentado a seguir:

-
1. Input:
 1. $L, N, M, \sigma, padrão, modelo, raios_i, xc_i, yc_i, \sigma'_i, tipo$.
 2. verificação de inconsistências (intersecção de objetos e escape do domínio).
 2. cálculos das estruturas envolvidas:
 1. coeficientes do sistema linear dados pelas equações (3.14)-(3.18).
 2. lado direito do sistema linear
 3. inicialização da matriz $u_{j,k}$ que armazena as voltagens, bem como das soluções localizadas nos nós fictícios.
 4. inicialização do contador de iterações (*cont*) e da variável *erro*, que armazena o erro obtido a cada iteração.
 5. Enquanto ($cont \leq itmax$ ou $erro > tol$) faça:
 1. cálculo das soluções $u_{N+1,j}$, (localizadas nos nós fictícios).
 2. cálculo das soluções $u_{N,j}$, (fronteira do domínio), respeitando as condições de Neumann.
 3. resolução do sistema linear pelo método de Gauss-Seidel, respeitando o tipo de malha adotada.
 4. cálculo das soluções $u_{0,j}$ (centro do domínio) a partir da equação (3.28)
 5. cálculo e atualização ou não de *erro*, conforme as condições (3.37)
 6. atualização de *cont*.
 7. comparação dos parâmetros *cont* e *itmax*, *erro* e *tol*.
 8. final das iterações caso a comparação satisfaça ($cont \leq itmax$ ou $erro > tol$)
 6. Output: $u_{j,k}$
 7. Cálculo da corrente propagada pelo domínio.
 8. Output: $J_{j,k}$
-

3.4.2 Validação do algoritmo

Como o problema direto não tem solução analítica conhecida, a validação do algoritmo através da resolução da seguinte equação de Poisson no círculo unitário:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 2, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \vec{n}} = 0, & r = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

onde:

$$u(r, \theta) = r^2$$

$\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ é o vetor normal a $\partial\Omega$.

A precisão utilizada foi a mesma precisão adotada para as simulações dos problema direto, apresentadas no Capítulo 4, ou seja, 10^{-4} . Os resultados obtidos para as malhas MH e MNH são dados pelas Tabelas 3.1 e 3.2 respectivamente:

Tabela 3.1: Resultados da validação obtidos para a MH

<i>Partição da Malha</i>	<i>nº de iterações</i>	<i>erro</i>
10X30	1301	9,773 E 10 ⁻⁵
20X60	4023	1,716 E 10 ⁻⁵
40X120	11110	inferior a E 10 ⁻²⁰
80X240	25442	inferior a E 10 ⁻²⁰

Tabela 3.2: Resultados da validação obtidos para a MNH

<i>Partição da Malha</i>	<i>nº de iterações</i>	<i>erro</i>
10X30	1189	9,983 E10 ⁻⁵
20X60	3486	4,818 E10 ⁻⁵
40X120	7616	1,353 E10 ⁻⁵
80X240	13853	0,364 E10 ⁻⁵

Como esperado, a MNH atinge a precisão com um número muito menor de iterações. Entretanto, embora para a MNH fosse esperada uma convergência quadrática, o resultado obtido reflete na necessidade de uma melhor estratégia de interpolação no momento em que a malha é refinada.

Capítulo 4

Mapas de Voltagens e Correntes

Dada uma distribuição de condutividades no interior de um domínio circular e um padrão de corrente que utiliza um dos esquemas de 4 eletrodos, o problema direto será resolvido, fornecendo um conjunto de medidas de voltagens que poderão ser utilizadas como dados simulados para o problema inverso bem como para gerar mapas de voltagens e correntes para o domínio completo.

A partir desses mapas é possível avaliar algumas hipóteses restritivas introduzidas na modelagem matemática ou técnicas computacionais, tais como, a degeneração da configuração das linhas equipotenciais quando o meio não é homogêneo, a necessidade de utilização de modelos mais complexos para os eletrodos, a influência dos padrões de injeção na qualidade dos dados de voltagens nos pontos da fronteira e o impacto de pequenas perturbações na distribuição de condutividade no interior do domínio.

As simulações restringem-se à distribuição de condutividades de objetos circulares em diferentes posições do domínio com diferentes valores de condutividade. Algumas destas simulações foram também realizadas em testes de bancada sendo possível comparar os resultados das voltagens obtidas numericamente com os efetivamente medidos, a menos de fatores de escala. Para as reconstruções foi utilizado o *backprojection* clássico [28].

4.1 Comparação: malhas de partições homogênea e não-homogênea

A comparação entre o desempenho das malhas de partição homogênea (MH) e não-homogênea (MNH) foi feita inicialmente para uma distribuição de condutividade constante e igual a 1 mho, para os seguintes valores de partição do raio N e partição angular M :

Tabela 4.1: partições adotadas para as simulações para MH e MNH

<i>partição</i>	N	M
1	10	30
2	20	60
3	40	120

Utilizando a partição 2 da **Tabela 4.1** o algoritmo foi rodado para as duas partições. Em relação ao traçado esperado para as curvas equipotenciais, as duas malhas apresentaram resultados compatíveis com os resultados teóricos, entretanto, as curvas traçadas a partir dos dados obtidos pelo uso da malha adaptativa são mais suaves que no caso da malha de partição homogênea, como mostram as **Figuras 4.1**, onde as imagens correspondem ao 1º par de injeção.

Figura 4.1 a: Equipotenciais, em volts, obtidas no meio homogêneo com o uso da MH.

Figura 4.1 b: Equipotenciais, em volts, obtidas no meio homogêneo com o uso da MNH.

O número de iterações necessárias para que o sistema linear associado ao problema direto atinja a precisão pré-fixada de 10^{-4} também foi avaliado em ambos casos. A MNH se mostrou significativamente mais rápida que a MH em todos os casos estudados. Os dados obtidos estão dispostos na **Tabela 4.2**:

Tabela 4.2: Número máximo de iterações para precisão pré-fixada em 10^{-4}

<i>Partição</i>	<i>Nº de iterações- MH</i>	<i>Nº de iterações- MNH</i>
1	6676	452
2	32189	1954
3	158077	16243

As voltagens medidas em cada eletrodo também foram comparadas. As voltagens máximas, mínimas e médias foram computadas para cada simulação. A média é a mesma para as duas malhas, entretanto, apesar de uma pequena diferença, observamos que para MNH os valores de voltagens obtidos são maiores que os correspondentes na MH. Pelo fato do problema ser mal-posto os algoritmos de reconstrução são muito sensíveis em relação aos dados de entrada. Portanto, valores maiores em módulo podem implicar num melhor resultado de reconstrução. Os valores, em volts, encontrados estão apresentados na **Tabela 4.3**, para cada partição definida na **Tabela 4.2**.

Tabela 4.3: Valores de voltagem para o caso homogêneo

<i>Malha</i>	<i>Partição</i>	<i>Módulo da Voltagem Máxima</i>	<i>Módulo da Voltagem Mínima</i>	<i>Módulo da Voltagem Média</i>
MH	1	0,126875	0,012009	0,000409
MNH	1	0,127115	0,013712	0,000409
MH	2	0,098761	0,013014	0,001598
MNH	2	0,099317	0,015049	0,001598
MH	3	0,057715	0,004470	0,000985
MNH	3	0,057995	0,005984	0,000985

4.2 Sensibilidade em relação à posição do objeto

Será avaliada a sensibilidade das duas malhas quando um cilindro de raio 0,2 e condutividade em seu interior igual a 0,002 mho é inserido no meio homogêneo em diferentes posições.

Nas simulações realizadas, as duas malhas detectam objetos posicionados no interior do domínio, mesmo para a partição 1. A malha não-homogênea em todos os casos forneceu curvas equipotenciais mais suaves que a malha homogênea e valores maiores para o máximo e o mínimo de voltagens. Para qualquer caso, o centro de objetos posicionados próximos à fronteira são melhor detectados que dos objetos posicionados em regiões centrais, pois aumenta o número de equipotenciais detectáveis, entretanto na reconstrução o espalhamento do objeto é observado em todas as imagens.

Nas **Figuras 4.2a e 4.2b**, respectivamente, observando a sequência que representa diferentes posições de um mesmo objeto, um cilindro de raio 0,20, condutividade 0,002, são mostradas, respectivamente, para MH e MNH. Na primeira linha as posições do centro do objeto, $C = (x_o, y_o) = \{ (0;0), (0,25;0), (0,5;0), (0,75;0) \}$. Na segunda linha os mapas correspondentes de voltagens (em volts) relativos ao 1º par de injeção obtidos com a solução do problema direto e, na terceira linha, as condutividades correspondentes reconstruídas pelo *backprojection* (em mhos), utilizando-se modelo adjacente para corrente voltagem e considerando a contribuição de todos os 30 pares de injeção.

Figura 4.2 a: Sensibilidade em relação à posição do objeto, (MH).

Figura 4.2 b: Sensibilidade em relação à posição do objeto, (MNH).

Para as duas malhas observa-se um espalhamento em torno do cilindro na imagem reconstruída. Nos dois casos, da MH e MNH, a reconstrução foi feita utilizando-se apenas 30 eletrodos, sem interpolação ou aplicação de filtros. Na região central o espalhamento da imagem reconstruída e dados da MNH é significativamente menor que os da MH. Próximo à borda ocorre uma degeneração na imagem reconstruída. Esse fenômeno pode ser justificado pelo modelo de eletrodo utilizado.

Nas simulações que se seguirão somente a MNH será utilizada pois ela demonstrou ser superior à MH em relação ao espalhamento nas regiões centrais e em relação ao número de iterações para atingir a precisão pré-fixada.

4.3 Sensibilidade em relação ao tamanho do objeto

Este estudo tem por finalidade verificar a sensibilidade do algoritmo para detectar cilindros de diferentes tamanhos colocados em diferentes regiões do domínio. A condutividade interna do cilindro é igual a 0,002 mho, num meio onde a condutividade é igual a 1 mho e a configuração corrente-voltagem é a adjacente-adjacente. Para testar essa sensibilidade, cilindros de

vários tamanhos foram dispostos sobre o domínio e calculados os valores de voltagens, A partir desses valores a imagem original foi reconstruída com o *backprojection*. As conclusões ilustradas através das **Figuras 4.3a** e **4.3b** podem ser estendidas para qualquer cilindro em qualquer posição do domínio.

Na primeira linha das **Figuras 4.3a** e **4.3b**, temos uma sequência que representa os cilindros com diferentes raios, cujos centros estão localizados, respectivamente, em $C1=(0,0;0,0)$ e $C2=(0,50;0,00)$. Da esquerda para a direita os valores dos raios são 0,05, 0,10 e 0,20. As segunda e terceira linhas mostram os mapas de voltagens determinados pela solução do problema direto e a distribuição de condutividades reconstruídas com o *backprojection*.

Podemos notar, na terceira linha da **Figura 4.3 a** que o espalhamento de informações está mais de acordo com o tamanho do raio do objeto, para o objeto de maior raio. Na **Figura 4.3 b** a informação sobre a presença do objeto é melhor distribuída quanto maior o raio do copo.

Figura 4.3 a: Sensibilidade em relação ao raio do objeto quando seu centro é $C1=(0,00;0,00)$

Figura 4.3 b: Sensibilidade em relação ao raio do objeto quando seu centro é $C1=(0,50;0,00)$

Na **Figura 4.3 a**, os valores das voltagens e as próprias não equipotenciais variam de forma significativa quando o tamanho do objeto varia. Nas imagens reconstruídas o objeto maior possui a maior condutividade nas duas posições e o menos espalhamento. As perturbações nos valores reconstruídos são observados quando o objeto se aproxima da borda.

As **Tabelas 4.4 e 4.5** mostram os valores máximos e as médias das voltagens para cada cilindro em cada posição. Os maiores valores são encontrados para os maiores cilindros, o que é consistente com a teoria.

Tabela 4.4: Voltagens coletadas com o meio perturbado por objetos de diferentes condutividades quando o centro do cilindro é dado por $C1=(0,0;0,0)$

<i>Raio do Objeto</i>	<i>Voltagem Máxima (v)</i>	<i>Voltagem Média(v)</i>
0,05	0,085651237080	0,007572458442
0,10	0,085652186409	0,007575019589
0,20	0,085657861675	0,00758055194

Tabela 4.5: Voltagens coletadas com o meio perturbado por objetos de diferentes raios e centros $C=(0,5;0,0)$

<i>Raio do objeto</i>	<i>Voltagem Máxima</i>	<i>Voltagem Média</i>
0,05	0,086735652825	0,007559403820
0,10	0,089876086458	0,007732035334
0,20	0,101751878252	0,008314271284

A **Figura 4.4a** mostra as voltagens em cada eletrodo para os três cilindros posicionados em $C2=(0,5;0,0)$.

Nas **Figuras 4.4b e 4.4c**, respectivamente, estão representadas as diferenças entre as voltagens calculadas para os cilindros de raios 0,05 e 0,1 e entre os de raios 0,05 e 0,2, posicionados em $C1=(0,0;0,0)$ e $C2=(0,5;0,0)$. Observa-se que o algoritmo é sensível ao tamanho de objetos.

Figura 4.4a: Voltagens nos eletrodos para os 3 cilindros posicionados em $CI=(0.5;0.0)$.

Figura 4.4b: Diferenças entre voltagens nos eletrodos de cilindros de tamanhos diferentes, posicionados em $CI=(0,0;0.0)$.

Figura 4.4c: Diferenças entre voltagens nos eletrodos de cilindros de tamanhos diferentes, posicionados em $C2=(0,5;0.0)$.

4.4 Sensibilidade em relação ao valor da condutividade do objeto

Nesse estudo, será avaliada a sensibilidade do algoritmo para detectar mudanças de condutividade no meio homogêneo. Desta vez, o tamanho do objeto será mantido fixo, um cilindro de raio 0.20. O centro do objeto será colocado em diferentes posições no tanque: $\{(0;0), (0,5;0), (0,75;0)\}$ variando também os valores de condutividade: 0,002; 0,020 e 0,200 mho. Os resultados obtidos pelas diferentes condutividades estão representados nas Figuras 4.5 a, 4.5b e 4.5c.

Figura 4.5 a:condutividade 0,002 mho em diferentes posições.

Figura 4.5 b: condutividade 0,020 mho em diferentes posições.

Figura 4.5 c: Condutividade 0,200 mho em diferentes posições.

A sensibilidade é muito pequena para objetos na região central e para objetos muito próximos à borda a perturbação é muito significativa. A avaliação dos valores máximo, mínimos e médios das tensões pode ser visto nas Tabelas 4.6, 4.7 e 4.8:

Tabela 4.6: Tensões dos objetos de diferentes condutividades, com centros em $C1=(0,0;0,0)$

<i>Condutividade (mho)</i>	<i>Tensão Máxima</i>	<i>Tensão Média</i>
0,002	0,085657861675	0,007580595194
0,020	0,085657860827	0,007580594297
0,200	0,085657850279	0,007580583122

Nota: na tabela acima os valores mínimos não foram exibidos por serem inferiores a 10^{-12} .

Tabela 4.7: Tensões dos objetos de diferentes condutividades, com centros em $C2= (0.5, 0.0)$

<i>Condutividade (mho)</i>	<i>Tensão Máxima</i>	<i>Tensão Média</i>	<i>Tensão Mínima</i>
0,002	0,101751878252	0,008314271284	0,000020683998
0,020	0,107550717424	0,008314339999	0,000020689988
0,002	0,103499289150	0,008365706993	0,000001361200

Tabela 4.8: Tensões dos objetos de diferentes condutividades, com centros em $C3= (0.75, 0.0)$

<i>Condutividade (mho)</i>	<i>Tensão Máxima</i>	<i>Tensão Média</i>	<i>Tensão Mínima</i>
0,002	0,088198096248	0,008000804916	0,000023071456
0,020	0,00897621273	0,008000784439	0,000023083935
0,002	0,088191695624	0,008000530447	0,000023243072

A **Figura 4.6** mostra as diferenças entre voltagens dos cilindros de condutividade 0,002 e 0,02, representada por V1 e entre os de condutividade 0,02 e 0,2, representada por V2, para os cilindros em diferentes posições, $C1=(0,0;0,0)$, à esquerda, $C2=(0,5;0,0)$ ao meio e à direita temos $C3=(0,75;0,0)$.

Figura 4.6: Diferenças entre voltagens de objetos de diferentes condutividades em diferentes posições

Estes dados mostram que houve diferença, com exceção ao caso em que as voltagens medidas foram inferiores a 10^{-12} , ainda que pequena, nas medidas efetuadas nos eletrodos. As mudanças mais significativas foram notadas quando os centros dos cilindros estavam localizados em $(0,5; 0,0)$. É possível também distinguir condutividades diferentes já as diferenças entre as voltagens cresce à medida que a condutividade no interior do objeto aumenta.

4.5 Sensibilidade em relação à existência de mais de um objeto

O objetivo deste estudo é verificar a sensibilidade do algoritmo quanto à presença de mais que um cilindro em seu interior. Neste caso as simulações levaram em conta dois cilindros $C1$ e $C2$, de raios iguais a 0,2 e condutividades internas iguais a 0,002 mho, cujos centros estão localizados, respectivamente, em $C1=(x1,y1)$ e $C2=(x2,y2)$. A **Figura 4.7** mostra na imagem superior esquerda os cilindros localizados em $C1(0.5;0,0)$ e $C2=(0,0;0,0)$ e na superior direita em $C1=(0.75, 0.25)$ e $C2=(0.75, -0,25)$.

As curvas equipotenciais correspondentes apontam uma diferenciação entre as duas configurações que é refletida nas imagens reconstruídas

Mesmo assim o espalhamento é bastante significativo.

Figura 4.7: Sensibilidade relativa à presença de mais de um objeto.

Os valores das voltagens (em volts) e das diferenças de voltagens entre o meio homogêneo e o perturbado apenas são mostrados para cada configuração nas **Figuras 4.8 e 4.9.**

A configuração de dois cilindros posicionados em $C1=(0,5;0,0)$ e $C2=(0;0)$ é apresentada na **Figura 4.8**, que à esquerda tem os valores de voltagem em cada eletrodo nos meios homogêneo e perturbado pela presença de dois cilindros. Nessa mesma figura, à direita, a diferença entre essas voltagens.

De maneira similar a **Figura 4.9** apresenta as mesma curvas para a configuração dos cilindros posicionados em $C1=(0,75; 0,25)$ e $C2=(0,75; -0,25)$.

Figura 4.8: Valores das voltagens nos eletrodos para os meios homogêneo e perturbado por cilindros cujos centros são dados por $C1=(0,5;0,0)$ e $C2=(0;0)$.

Figura 4.9 : Voltagens nos eletrodos para o meio homogêneo e o perturbado por cilindros cujos centros são dados por $C1=(0,75;0,25)$ e $C2=(0,75;-0,25)$

Observa-se que o algoritmo é sensível a objetos em seu interior e que detecta variações de posição no domínio.

4.6 Sensibilidade em relação ao padrão de injeção

Este teste avaliou a sensibilidade do modelo quanto aos padrões de injeção adjacente e de s-espacamentos, $n=1, \dots, 16$. O meio foi perturbado pela presença de um cilindro de raio 0,20 e condutividade interna igual a 0,002, sendo seu centro coincidente com o ponto $C=(0,75;0,00)$. A

Figura 4.10, exibe as equipotenciais (em volts), da esquerda para direita, obtidas com o uso dos seguintes padrões: *adjacente*, *espaçamento 2*, *espaçamento 7* e *espaçamento 16*

Figura 4.10: Equipotenciais, em volts, para os diferentes padrões de injeção.

A **Figura 4.10** nos permite afirmar que a malha é sensível ao padrão de injeção, mostrando ainda que a configuração do par de injeção tem influência forte nos dados coletados. No caso do padrão adjacente observa-se a estrutura do modelo do dipolo sendo preservada, enquanto que, para o padrão s-espaçamentos, essa estrutura é destruída completamente. Para padrões de injeção p-espaçamento, quanto maior p que 1 esta degeneração do modelo fica mais acentuada.

4.7 Mapas das correntes

A corrente elétrica aplicada na superfície, segundo o modelo de Maxwell, se propaga para o interior do domínio seguindo linhas de campo que são perpendiculares às linhas equipotenciais. Além disso, sua intensidade é proporcional à variação do campo elétrico, ou seja, ao inverso da distância de um ponto no domínio ao dipolo. Próximo ao dipolo este valor é muito grande – tende para infinito – portanto, é necessário fazer um tratamento local, isolando uma região próxima ao dipolo, para evitar a divisão por zero. Observa-se também que o valor da corrente decresce muito rapidamente, o que significa que para pontos próximos ao centro do domínio este valor é praticamente nulo. Assim, a percepção de objetos localizados próximos ao centro é sempre inferior àquela observada nos localizados próximos ao contorno. Os mapas a seguir registram essas observações. Os valores positivos e negativos da corrente estão representados por quadrados e círculos, sobre as linhas de corrente.

Caso 1: mapa da distribuição de corrente, em mA, no interior do domínio circular, para o caso homogêneo (Figura 4.11).

Figura 4.11: Distribuição de corrente para o caso homogêneo.

Caso 2: mapas das distribuições de correntes, em mA, para o mesmo cilindro, de raio 0,2 e condutividade igual a 0,002 mho, quando o mesmo migra da posição central $C1=(0;0)$ para a borda, $C3=(0,75;0,0)$ passando pela posição intermediária $C2=(0,5;0,0)$. A Figura 4.12 mostra essa sequência.

Figura 4.12: Mapas de correntes para objetos idênticos e de mesma condutividade em posições diferentes.

Caso 3: mapas das distribuições de correntes, em mA, para 3 cilindros de mesmo tamanho - raio 0,20 - na posição $C=(0,50; 0,00)$, com diferentes condutividades. A **Figura 4.13** mostra da esquerda para direita, respectivamente, as condutividades 0,002, 0,020 e 0,200.

Figura 4.13: Mapas de correntes para cilindros de mesmas dimensões e posição, com condutividades distintas.

Caso 4: mapas das distribuições de correntes quando são colocados dois objetos iguais, de raio 0,2 e condutividade 0,002 mho no domínio. Duas posições relativas estão representadas na **Figura**

4.14 a seguir. À esquerda os cilindros estão nas posições $C1 = (0,5; 0,0)$ e $C2 = (0,0;0,0)$ e à direita, estão nas posições $C1 = (0,75; 0,25)$ e $C2 = (0,75; -0,25)$.

Figura 4.14: Mapa da distribuição de corrente para dois cilindros iguais localizados em posições distintas.

De acordo com as figuras precedentes, notamos que quanto mais próximo à fronteira estiver o objeto, maior a sensibilidade à propagação de corrente. Além disso, o valor da condutividade interna de cada objeto também influencia essa propagação, sendo mais sensível quanto maior for a condutividade.

4.8 Simulações numéricas e dados experimentais

Uma bancada experimental montada no Laboratório de Investigação Médica da FMUSP, constando de uma cuba de 15 cm de raio, com solução salina, onde estão colocados 30 eletrodos igualmente espaçados e cilindros de acrílico de diferentes raios e mesma altura fornecem os dados experimentais. A corrente aplicada é de 1mA, com padrão de 1-espacamento e medidas de

voltagens são coletadas também no padrão de 1-espçamento. A **Figura 4.15** mostra, à esquerda, os valores das diferenças de voltagens $V_{k+1} - V_k$ para o caso homogêneo, para os valores medidos (V_m) e os simulados (V_s), e o módulo dessas diferenças (V) em cada eletrodo é mostrado pelo gráfico à direita.

Figura 4.15 : Voltagens medidas e simuladas para o meio homogêneo

De modo análogo os mesmos dados são apresentados na **Figura 4.16** para o caso de um cilindro de raio 3 cm cujo centro está posicionado em $CI=(6,0;0,0)$;

Figura 4.16: Voltagens medidas e simuladas para o caso perturbado.

As figuras nos permitem concluir que os dados simulados apresentam comportamento parecido com os dos dados experimentais, sendo que a maior diferença entre os valores obtidos

encontra-se próxima à região do par de injeção, o que era de se esperar, pois é nessa região que se comete o maior erro de medida, devido à presença do par de injeção.

4.9 Conclusão das Simulações

Durante as simulações, algumas dificuldades foram notadas. A primeira se deve à dificuldade de controlar o declínio dos valores de voltagem, que tendiam a zero, com o aumento das partições M e N , não havendo uma determinada partição em que esse declínio se estabiliza.

Outra dificuldade seria o modo de interpolar a fronteira das malhas, (que atualmente é linear), de modo que a convergência do método fosse a espera mesmo para malhas mais grossas.

Quanto às simulações em si, podemos afirmar que o algoritmo é mais sensível a objetos situados mais próximos à fronteira, sensibilidade essa é que acentuada com o aumento do tamanho do objeto. Variações na condutividade dos objetos são pouco percebidas pelo algoritmo. Quando se trata da propagação de corrente, as mesmas observações são válidas, no entanto, a sensibilidade do algoritmo para este caso é muito menor que no caso da reconstrução de voltagens.

Finalmente, o uso do algoritmo de reconstrução aponta para o fato de que a MNH produz resultados mais consistentes que a MH, visto que o espalhamento de informações sobre a região perturbada é menor que o apresentado pela MH.

Conclusões e Trabalhos Futuros

O objetivo de nosso trabalho era implementar a resolução numérica do *problema direto* para obter o mapa de voltagens para diferentes situações.

As simulações executadas foram as seguintes:

- comparação entre as malhas de partição homogênea e não homogênea;
- estudo da sensibilidade do programa em relação à:
 1. variação da posição de objetos no interior do domínio;
 2. variação do tamanho do objeto no interior do domínio;
 3. variação da condutividade do objeto no interior do domínio;
 4. variação do número de objetos no interior do domínio;
 5. à variação do padrão de injeção;

Quanto à avaliação das malhas pudemos notar que as duas malhas são sensíveis à variações na distribuição de condutividade do meio, sejam elas decorrentes de qualquer tipo de variação que o objetos inseridos pudessem sofrer: tamanho, posição, condutividade.

A MNH é significativamente muito rápida que a MH e além disso a mesma forneceu valores de voltagem maiores, o que pode implicar numa melhor visualização dos resultados, além de propiciar curvas mais suaves.

As perturbações realizadas no centro do domínio quase não causam efeito no comportamento das curvas de voltagem e tanto maior é esse efeito quanto maior for o tamanho do objeto inserido. Perturbações realizadas em outras regiões poderão ser notadas de acordo com a posição, tamanho, quantidade e valor de condutividade interna dos objetos.

Quanto às linhas de corrente, pudemos notar que são pouco sensíveis à ocorrência ou não de objetos próximos à região central do domínio e são pouco sensíveis à variação de condutividade no interior dos objetos. No caso do padrão adjacente, as linhas obtidas não apresentaram o padrão esperado para o modelo do dipolo.

Falando agora de trabalhos futuros, uma primeira investigação seria a implementação de outros padrões de injeção de corrente e modelos de eletrodos, como injeção em todos os

eletrodos simultaneamente ou combinação de diferentes padrões. O modelo completo de eletrodo também poderia ser implementado e injeções de corrente de acordo com os parâmetros definidos pela Organização Mundial de Saúde deveriam ser introduzidas.

Do ponto de vista ainda do algoritmo, outras maneiras de distribuição de condutividade deveriam ser exploradas, como, por exemplo, objetos de formatos distinto ao circular e, posteriormente, diferentes distribuições de condutividade no interior de um mesmo objeto.

A forma do domínio também poderia ser modificada de circular para elíptica e desta para outra que se aproximasse ao formato de uma secção transversal do tórax, (trapezoidal).

Finalmente poderíamos implementar métodos numéricos mais rápidos como o Método dos Gradientes Conjugados e desenvolver malhas com os formatos de acordo com os dos domínios explorados.

Eletromagnetismo: algumas definições, fórmulas e principais teoremas

- **Campo de intensidade magnética** $\vec{H}$: grandeza vetorial que permite que a *Lei de Ampère* seja escrita, num *dielétrico*, somente em termos da *densidade de carga livre* $\vec{J}_l$ como:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_l$$

tendo uma densidade de corrente no contorno $\vec{J}_c$ expressa por:

$$\vec{J}_c = \nabla \times \vec{M}$$

onde $\vec{M}$ é a *magnetização*.

- **Campo Elétrico** $\vec{E}$: Para uma carga pontual q localizada num ponto r' , o *Campo Elétrico* $\vec{E}$ no ponto r é definido como:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r - r'}{|r - r'|^3}$$

onde a constante ϵ_0 é a *permissividade do espaço livre*.

- **Campo Magnético** $\vec{B}$: é o campo provocado pelo movimento de cargas. Pode ser definido, em particular, pela *4ª Equação de Maxwell*:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

onde c é a *velocidade da Luz* e J é a *densidade de carga*.

- **Carga elétrica:** quantidade, positiva ou negativa de eletricidade existente num corpo.
- **Carga elétrica pontual (ou puntiforme) q :** carga elétrica hipotética localizada num ponto isolado do espaço.
- **Condutividade σ :** Para um corpo de comprimento p , *resistência* R e secção transversal A , a condutividade elétrica é definida como

$$\sigma = \frac{p}{RA}$$

- **Corrente elétrica $\vec{I}$:** fluxo de *carga elétrica* q que passa por um determinado ponto durante um certo intervalo de tempo, definido como:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

onde dq/dt é a derivada parcial da carga elétrica em relação ao tempo.

- **Densidade de carga elétrica ρ :** é a quantidade de *carga elétrica* por unidade de volume, dada, numa região R , por:

$$\rho = \int_R \rho(r) d^3r$$

- **Deslocamento elétrico $\vec{D}$:** é a grandeza vetorial definida por:

$$D = \epsilon_0 \cdot E$$

onde ϵ_0 é a *permissividade do espaço livre* e E é o *campo elétrico*.

- **Dielétrico:** material que se caracteriza por isolar *corrente elétrica*.
- **Dipolo elétrico:** Um conjunto formado por duas *cargas elétricas puntiformes* é denominado um *dipolo elétrico* se existir um meio físico que mantenha constante o afastamento entre as cargas.
- **Eletricidade animal (bioeletricidade):** eletricidade produzida pelos corpos de animais.
- **Eletromagnetismo:** Ramo da física que investiga a interação entre os *campos elétrico e magnético*, cuja unificação é expressa pelas *Equações de Maxwell*.

- **Equações de Maxwell:** conjunto de quatro equações que relacionam os campos elétrico e magnético, dadas por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\epsilon_0}$$

onde, $\vec{E}$ é o campo elétrico, $\vec{B}$ o campo magnético, ρ a densidade de carga elétrica, $\vec{J}$ a densidade de corrente aplicada, ϵ_0 a permissividade elétrica, c a velocidade da luz e t o tempo.

- **Equipotencial:** lugar geométrico de todos os pontos do que se encontram ao mesmo potencial. As linhas equipotenciais são perpendiculares às linhas de força.
- **Força elétrica $\vec{F}$:** é a grandeza definida por:

$$\vec{F} = \epsilon_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

onde q_1, q_2 são duas cargas elétricas puntiformes, r é a distância entre as duas cargas e ϵ_0 é a permissividade do espaço livre.

- **Impedância elétrica Z :** se a corrente elétrica I e a voltagem V são tratadas como números complexos então a impedância elétrica Z é definida como:

$$Z \equiv \frac{V}{I}$$

- **Lei de Ampère- Maxwell:** Lei definida pela 4ª Equação de Maxwell, que representa os efeitos eletromagnéticos causados pela variação do campo elétrico.

- **Lei de Coulomb:** Lei que estabelece que a força de interação entre duas *cargas puntiformes* postas em presença uma da outra é diretamente proporcional ao produto das quantidades de carga e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as mesmas.
- **Lei de Faraday:** Lei expressa pela 2ª Equação de Maxwell, relacionando os campos elétrico e magnético e afirma que, quando numa região do espaço ocorre uma variação do campo magnético, uma variação do campo elétrico é induzida nessa região.
- **Lei de Gauss:** Lei expressa pela 1ª Equação de Maxwell e que estabelece que o campo elétrico devido a uma carga puntiforme varia inversamente com o quadrado da distância à carga.
- **Linhas de Campo (ou linhas de força):** As linhas de campo são também chamadas linhas de força, pois mostram, em cada ponto, a direção da força que se exerce sobre uma carga. As linhas de campo principiam nas cargas positivas (ou no infinito) e terminam nas cargas negativas (ou no infinito).
- **Magnetizabilidade β :** Se B é o campo magnético e M é a magnetização, então a magnetizabilidade β é a constante que relaciona as duas grandezas da seguinte forma:

$$M = \beta B$$

- **Magnetização M :** Grandeza definida por

$$M = \beta B$$

onde β é a magnetizabilidade e B é o campo magnético.

- **Monopolo:** o mesmo que carga elétrica puntiforme.
- **N :** abreviação do número total de eletrodos empregado na modelagem do problema direto.
- **Permeabilidade magnética do meio μ :** é a quantidade definida de forma que:

$$B = \mu H$$

onde B é o *campo magnético* e H é o *campo de indução magnética*.

- **Permissividade elétrica do espaço livre ϵ_0 :** Quantidade definida no sistema MKS como:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$$

onde c é a *velocidade da luz* e μ_0 é a *permeabilidade magnética do espaço livre*.

- **Potencial elétrico φ :** é a quantidade definida pela seguinte integral de linha:

$$\varphi = - \int E \cdot ds$$

onde E é o *campo elétrico*.

- **Primeira Lei de Ohm:** Lei que estabelece que

$$V = RI$$

onde V é a *voltagem*, R é a *resistência elétrica* e I é a *corrente elétrica*.

- **Resistência R :** A *resistência* de um condutor elétrico, de comprimento p e secção transversal A é definida por

$$R = \frac{\rho_e p}{A} = \frac{p}{\sigma A}$$

onde ρ_e é a *resistividade* e σ a *condutividade elétrica*.

- **Resistividade ρ_e :** A *resistividade* ρ_e é definida como o inverso da *condutividade* σ .

$$\rho_e = \frac{1}{\sigma}$$

- **Velocidade da luz:** constante definida como:

$$c \equiv 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- **Voltagem V :** o mesmo que *potencial elétrico*.

Apêndice 2

O potencial eletrostático para o dipolo

A força elétrica exercida por uma carga elétrica puntiforme q_1 sobre uma outra carga q_2 é dada pela *Lei de Coulumb*, que estabelece que “a força que uma carga puntiforme exerce sobre outra orienta-se segundo a reta que une as duas cargas. É uma força repulsiva, quando as cargas têm o mesmo sinal, e atrativa, se os sinais são opostos. O módulo da força varia com o inverso do quadrado da distância que separa as duas cargas e é proporcional à grandeza de cada uma delas” [11]. Em notação vetorial:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (\text{A2.1})$$

onde:

$\vec{F}_{12}$: é a força elétrica exercida por q_1 sobre q_2 .

$\vec{F}_{21}$: é a força elétrica exercida por q_2 sobre q_1 .

K : é a constante de proporcionalidade.

r_{12} : é a distância entre q_1 e q_2 .

$\vec{e}_{12}$: é o vetor unitário na direção de q_1 para q_2 .

A definição de força elétrica nos leva a introduzir o conceito de *campo elétrico*. O campo elétrico $\vec{E}_1$ é a força por unidade de carga em q_1 , devido a outras cargas. Esta definição, aplicada em (A1.1) resulta em:

$$\vec{E}_1 = \frac{Kq_2}{r_{12}} \vec{e}_{12} \quad (\text{A2.2})$$

Quando há mais de duas cargas em um sistema, a força e, por consequência o campo elétrico, são definidos pelo *Princípio da Superposição*, que estabelece que a força em qualquer carga é dada pela soma vetorial das forças de Coulomb exercidas por esta carga sobre as outras. Portanto, essa definição de campo pode ser estendida para qualquer distribuição de cargas em um meio Ω .

Pela *Lei de Gauss* a intensidade do campo elétrico $\vec{E}$ a uma distância r da carga é dado por:

$$E_{1,r} = \frac{Kq_1}{r} \quad (\text{A2.3})$$

e a relação entre o potencial elétrico u e o campo elétrico $\vec{E}$, para um meio linear, não dispersivo, isotrópico, onde o campo elétrico não varia com o tempo (considerando que a carga é constante), é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = -\left(\frac{Kq}{r}\right) \Rightarrow u(r) = -Kq \ln(r) \quad (\text{A2.4})$$

Considere agora, duas retas Q_+ e Q_- , paralelas ao eixo z , (Figura A2.1) que passam sobre a fronteira de um domínio conexo Ω , que possuem a mesma densidade de cargas ρ , diferindo apenas no sinal, positivo Q_+ em e negativo em Q_- .

Figura A2.1: Distribuição de duas linhas de cargas paralelas e de sinais opostos

Seja um cilindro S de raio r_s , co-axial à uma das retas, por exemplo Q_+ . Pela simetria do problema o campo elétrico $\vec{E}$ é perpendicular à lateral do cilindro e paralelo nas bases. Portanto, o campo elétrico é nulo na direção do eixo z . Em coordenadas cilíndricas

$$\vec{E} = \left(-\frac{K\rho}{r}, 0, 0 \right) \quad (\text{A2.5})$$

Considerando um ponto localizado a uma distância r de Q_+ , de (A2.4) e (A2.5) o potencial em coordenadas cilíndricas se escreve como

$$\vec{E} = -\nabla u \Rightarrow \left(-\frac{K\rho}{r}, 0, 0 \right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (\text{A2.6})$$

portanto

$$u(r) = K\rho \ln(r) \quad (\text{A2.7})$$

onde ρ é a densidade de corrente.

O campo elétrico gerado por essas duas linhas de cargas é definido pela superposição dos campos gerados por cada uma delas e é equivalente ao gerado por duas cargas puntiformes $+q$ e $-q$, localizadas sobre um plano paralelo ao plano xy , onde q é definido pela *Lei de Gauss*, como

$$q = \int_V \rho dV \quad (\text{A2.8})$$

Sem perda de generalidade, vamos fixar o plano xy como referência, e considerar duas cargas puntiformes $+q$ e $-q$ sobre o contorno de um círculo de raio 1 contido em xy . Seja $2d$ a distância entre $+q$ e $-q$ e X_m o ponto médio entre as cargas, com a carga positiva localizada em $X_m + d$ e a carga negativa em $X_m - d$. Logo, o potencial num ponto $X \in \mathbb{R}^2$ é dado por

$$u(X) = u_+(X) + u_-(X) \quad (\text{A2.9})$$

onde

$$u_+(X) = -Kk\rho \ln \|X - X_m - d\| \quad \text{e} \quad u_-(X) = K\rho \ln \|X - X_m + d\| \quad (\text{A2.10})$$

são, respectivamente, os potenciais gerados pelas cargas positiva e negativa.

Introduzindo variáveis complexas ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto z = x + iy \in \mathbb{C} \\ X_m = (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto z_m = x_m + iy_m \in \mathbb{C} \\ d_m = (x_d, y_d) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto t = x_d + iy_d \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

O potencial complexo associado a (A2.10) é definido por $U(z)$ e se escreve como:

$$U(z) = -2kp \cdot [\text{Ln}(z - z_d - t) - \text{Ln}(z - z_d + t)] \quad (\text{A1.12})$$

onde Ln é o ramo principal do logaritmo complexo. Das propriedades dos logaritmos, temos:

$$\text{Ln}(z - z_m - t) = \text{Ln}\left((z - z_m)\left(1 - \frac{t}{z - z_m}\right)\right) = \text{Ln}(z - z_m) + \text{Ln}\left(1 - \frac{t}{z - z_m}\right) \quad (\text{A2.13})$$

Se a distância entre as cargas é pequena quando comparada com a distância entre elas e um ponto do interior do domínio que quer ser determinada a condutividade, podemos assumir que:

$$\left\| \frac{t}{z - z_m} \right\| \ll 1 \quad (\text{A2.14})$$

e, desenvolvendo (A2.13) em série de Taylor na vizinhança de $\text{Ln}(1+z)$, na vizinhança de $z = 0$, temos:

$$\text{Ln}(z - z_m - t) = \text{Ln}(z - z_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(-\frac{t}{z - z_m} \right)^n \quad (\text{A2.15})$$

Procedendo do mesmo modo para $\text{Ln}(z - z_m + t)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
Ln(z - z_m + t) &= Ln\left((z - z_m)\left(1 + \frac{t}{z - z_m}\right)\right) = Ln(z - z_m) + Ln\left(1 + \frac{t}{z - z_m}\right) = \\
&= Ln(z - z_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{t}{z - z_m}\right)^n
\end{aligned}
\tag{A2.16}$$

Após a substituição de (A1.14) e (A1.15) e truncando no termo de primeira ordem da série, o potencial fica:

$$U(z) = 4K\rho \left(\frac{t}{z - z_m}\right) \tag{A2.17}$$

A parte real de (A2.17) representa o potencial do fenômeno que estamos modelando e é dado por:

$$u(X) = 4k\rho \frac{d \cdot (X - X_m)}{\|X - X_m\|^2} \tag{A2.18}$$

onde $d^\perp = (-y_d, x_d)$.

Como o potencial é uma função harmônica, temos que $-v(X)$ é a função harmônica conjugada a $u(X)$, sendo a função $v(X)$ dada por:

$$v(X) = 4k\rho \frac{d^\perp \cdot (X - X_m)}{\|X - X_m\|^2} \tag{A2.19}$$

Na **Figura A2.2** estão representadas as duas funções $u(X)$ e $v(X)$.

Figura A2.2: Em rosa, as equipotenciais de um dipolo. Em azul, as linhas de corrente.

Apêndice 3

Equações em Coordenadas Polares

Este apêndice tem por objetivo expressar a equação (1.19) em função de coordenadas polares. Aplicando o gradiente temos:

$$\nabla(\sigma \nabla u(x, y)) = \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A3.1})$$

Introduzindo-se as coordenadas polares através da transformação:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (\text{A3.2})$$

com $r \in [0, 1]$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. As derivadas primeiras de uma função $f(r(x, y), \theta(x, y))$ são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{A3.3})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \cdot \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cdot \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{A3.4})$$

Somando (A2.3) multiplicada por $(r \cos \theta)$ com (A2.4) multiplicada por $(-\sin \theta)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\text{A3.5})$$

Analogamente, somando (A3.3) multiplicada por $(r \sin \theta)$ com (A3.4) multiplicada

por $\cos\theta$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\text{A3.6})$$

Para as segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (\text{A3.7})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = r^2 \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2r^2 \sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - r \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{A3.8})$$

Somando (A3.7) multiplicada por r^2 com (A3.8) multiplicada por $\cos^2\theta$ temos, para o 1º termo da equação (A3.1):

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - r \cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin\theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

Portanto:

$$\sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (\text{A3.9})$$

Para o último termo de (A3.1):

$$\nabla \sigma \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\nabla \sigma \cdot \nabla u = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{A3.10})$$

Agora resta expressar a condição de contorno em coordenadas polares.

Pela definição de $\vec{n}$, temos :

$$\sigma \frac{\partial u(x, y)}{\partial \vec{n}} = -\vec{J}(x, y) \cdot \vec{n} \Rightarrow \sigma \frac{\partial u(x, y)}{\partial \vec{n}} = -\vec{J}(1, \theta) \quad (\text{A3.11})$$

Dessa forma o problema direto expresso em função de coordenadas polares é dado por:

$$\sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \sigma \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial \vec{n}} = -\vec{J}(1, \theta), \quad (\text{A3.12})$$

para

$$0 < r \leq 1; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Referências Bibliográficas

- [1] **ALLERS, A., SANTOSA, F. ,** *Stability and resolution analysis of a linearized problem in electrical impedance tomography*, Inverse Problems, 7, IOP, 1991.
- [2] **BARBER, D. C.,** *Quantification in Impedance Imaging*, Clin. Physiol. Meas., 11 (1990), Suppl A, 45-46.
- [3] **BARBER, D. C., BROWN, B. H.,** *Applied Potencial Tomography*, J. Phys. E: Sci. Instrum., 17 (1984), 723-733.
- [4] **BEVILACQUA, J. S., GUEDES, C. L. C., RAFIKOV, M.,** *Modelagem em Biomatemática*, XXVII CNMAC, São José do Rio Preto, 2003.
- [5] **BEVILACQUA, J. S., YOSHIKAWA, R. M. S.,** *Monitoring Lungs with Electrical Impedance Tomography*, aceito para o ICIAM, Julho 2003.
- [6] **BORCEA, L. ,** *Electrical impedance tomography*, Inverse Problems, 18 (2002), R99- R136.
- [7] **CALDERÓN, A. P.,** *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analysis and its applications to Continuum Physics, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1980, pp 65-73.
- [8] **CHENEY, M., ISAACSON, D.,** *Distinguishability in Impedance Imaging*, IEE Transactions on Biomedical Engineering, vol 30, nº8, New York, 1992.
- [9] **CHENEY, M., ISAACSON D., NEWELL, J. C.,** *Electrical Impedance Tomography*, SIAM, Review, vol. 41, nº1, pp 85-101, 1999.
- [10] **CHEREPENIN, V., KARPOV, A., KORJENEVSKY, A., KORNIEENKO, V., MAZALETSKAYA, A., MAZOUROV, D., MEISTER, D.,** *A 3D electrical impedance tomography (EIT) system for breast cancer detection*, Physiol. Meas., Vol 22 (1), pp 9-18, 2001.
- [11] **FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M. L.,** *The Feynman lectures on Physics- The Electromagnetic Field*, vol. 2, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1963-1965.
- [12] **GERALD, C. F., WHEATLEY, P. O.,** *Applied Numerical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1994.
- [13] **GISSER, D. G., ISAACSON, D., NEWELL, J. C.,** *Electric Current Tomography and Eingevalues*, SIAM, J. Appl. Math., vol. 50, nº 6, 1623-1634, 1990.

- [14] **GRAY, G. A.**, *A Study of Variational Methods for the Electric Impedance Tomography*, Tese de Doutorado, Rice University, Houston, 2001.
- [15] **GUARDO, R., BOULAY, C., MURRAY, B., BERTRAND, M.**, *An Experimental Study in Electrical Impedance Tomography Using Backprojection Reconstruction*, IEEE Trans. on Biom. Engin, vol. 38, nº 7, 616-627, 1991.
- [16] **KELLOG, O. D.**, *Foundations of potencial theory*, J. Springer, Berlin, 1929.
- [17] **MAC ARDLE, F. J., SUGGET, A. J., BROWN, B. H., BARBER, D. C.**, *An Assessment of Dynamic Images by Applied Potencial Tomography for Monitoring Pulmonary Perfusion*, Clin. Physiol. Meas., vol. 9., Suppl A, pp 87-91., 1988.
- [18] **METHERALL, P.**, *Three Dimensional Electrical Impedance Tomography of the Human Thorax*, Tese de Doutorado, University of Sheffield, 1998.
- [19] **NACHMANN**, *Reconstructions from Boundary Measurements*, Annals of Mathematics, 128, 531-576, 1988.
- [20] **PRESS, W. H., et all.**, *Numerical recipes in C: the art of computing*, Cambridge University, Press, New York, 2ª Edição, 1994.
- [21] **SANTOSA, F., VOGELIUS, M.**, *A backprojection algorithm for electrical impedance image*, SIAM J. Appl. Math., vol 50, nº 1, pp 216- 243, 1990.
- [22] **SOMERSALO, E., CHENEY, M.**, *Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography*, SIAM, J. Appl. Math., vol. 52, nº 4, 1023-1040, 1992.
- [23] **STRATTON, J. A.**, *Electromagnetic Theory*, Mc Graw-Hill book company, New York, 1941.
- [24] **STRIKWERDA, J. C.**, *Finite Difference schemes and partial differential equations*, Wadsworth & Brooks/ Cole Advanced Books and Software, New York, 1989.
- [25] **SYLVESTER, J., UHLMANN, G.**, *A global uniqueness theorem for an Inverse Boundary Value Problem*, Annals of Mathematics, 125, 153-169, 1987.
- [26] **TANG, M., WANG, W., WHEELER, J., MC CORMICK, M., DONG, X.**, *The number of electrodes and basis functions in EIT image reconstruction*, Physiol. Meas., vol 23, pp 129-140, 2002,
- [27] **TIPLER, P. A., MACEDO, H.**, (tradução), *Física*, Guanabara 2, Rio de Janeiro, 1978.
- [28] **YOSHIKAWA, R. M. S.**, *Imagens de Tomografia por Potencial Aplicado em Tempo Real*, Dissertação de Mestrado, (versão preliminar), Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo, 2005.

Páginas Consultadas na Internet

- [29] *Exame Médico de Tórax*, disponível na internet em 25 de setembro de 2004,
[/www.pucpr.br/saude/laboratorios/pneumologia/trabalhos/exame_fisico_de_torax.doc](http://www.pucpr.br/saude/laboratorios/pneumologia/trabalhos/exame_fisico_de_torax.doc)
- [30] *Galvani's Frog Experiment*, disponível na internet em 25 de setembro de 2004,
<http://www.iee.org/TheIEEE/Research/Archives/Features/Galvani.cfm>
sítio disponível na internet em 25 de setembro de 2004.
- [31] *CT, History and Technology*, disponível na internet em 25 de setembro de 2004,
www.mediaibox.siemens.com.br
- [32] www.raiox.com, sítio disponível na internet em 25 de setembro de 2004.
- [33] scienceworld.wolfram.com/, sítio disponível na internet em 21 de março de 2005.
- [34] www.cerebromente.org.br/n6/historia/bioelectr2.htm, sítio disponível na internet em 21 de março de 2005.
- [35] [groups.tagus.ist.pt/ gaef/web/e_Cfisic@eletromanestism/dipole/Dipole_legi.html35](http://groups.tagus.ist.pt/gaef/web/e_Cfisic@eletromanestism/dipole/Dipole_legi.html35), sítio disponível na internet em 21 de março de 2005.
- [36] myspace.emg.br/fis/elettr/elettr2.asp36, disponível na internet em 21 de março de 2005.

Obs.: As páginas de números [33] a [36] foram utilizadas na redação do **Apêndice 1**.