Existência global para
equações da onda
semilineares

Nestor Felipe Castañeda Centurión

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Serpa Schirmer

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq.

-São Paulo, fevereiro de 2003-

Existência Global para
Equações da Onda
Semilineares

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação corrigida e defendida
por Nestor Felipe Castañeda Centurión
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, fevereiro de 2003.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Paulo Serpa Schirmer (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Mello - IME-USP
- Prof. Dr. Oscar Fotunato V. Erazo - IME-USP

Dedicado a mis padres Jorge y Esther.
Para mis hermanos Julia, Carmen, Carlos,
Jorge y Miguel.

Por todo lo que significan para mí.
Y en especial para mi hijo Cesar Levi
quien siempre estuvo en mi corazón
nutriendo mi alma para continuar.
Los Amo.

Agradecimentos

Ao Povo Brasileiro representado pelo CNPq por me permitir conhecer seu país e parte da sua cultura.

Ao Prof. Dr. Pedro Paulo Schirmer por sua orientação acadêmica e seu grande apoio pessoal.

A meu amigo Jorge Julca por sua amizade e companheirismo nestes anos de percurso juntos.

Ao Walter e ao Calixto por terem feito muito mais fácil minha adaptação no Brasil, e a Ângela por me transmitir, no dia a dia do CRUSP, seu bom astral.

A Regina e a Cida por serem pessoas tão especiais, sempre irradiando alegria e carinho; e por sua imensa colaboração na revisão ortográfica.

Finalmente aos meus queridos colegas peruanos com os quais sempre compartilhei momentos agradáveis.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de existência e unicidade para as equações da onda semilineares do tipo $\square u = F_p(u)$, com dados de Cauchy $u(0, x) = \varepsilon f(x)$ e $u_t(0, x) = \varepsilon g(x)$, considerando $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ pequeno e $|(\partial/\partial u)^j F_p(u)| \leq C_p |u|^{p-j}$ para $j = 0, 1$. O caso modelo deste problema é $\square u = |u|^p$, o qual estudamos separadamente em três dimensões espaciais.

Com base no trabalho de Georgiev, Lindblad e Sogge estabelecemos o domínio preciso de potências p , para as quais a existência de uma solução fraca global está garantida. Para isso usamos um novo tipo de estimativas de Strichartz, as quais contém pesos que envolvem potências da distancia de Lorentz.

Abstract

In this work we study the problem of existence and unicity for the semilinear wave equations of the type $\square u = F_p(u)$, with Cauchy data $u(0, x) = \varepsilon f(x)$ and $u_t(0, x) = \varepsilon g(x)$, with $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ a small number and $|(\partial/\partial u)^j F_p(u)| \leq C_p |u|^{p-j}$ for $j = 0, 1$. The model case of this problem is $\square u = |u|^p$, which is studied separately in three spacial dimensions.

Based in Georgiev, Lindblad and Sogge's work, we establish the sharp range of powers p , for which the existence of a weak global solution is warranted. For this purpose we use a new kind of Strichartz's estimates, which contains weights that involves powers of Lorentz distance.

Índice

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 A semente de Fritz John	5
1.1 Blow Up em três dimensões espaciais.	5
1.2 Existência global em três dimensões espaciais	12
2 Estimativas de Strichartz	18
2.1 Convoluções com Núcleos que possuem suas singularidades sobre a esfera	18
2.2 Estimativa a priori para a equação da onda	24
3 Existência Global em n Dimensões Espaciais	27
3.1 Formulação do Problema e o Teorema Central	27
3.2 Processo Iterativo	29
3.3 Demonstração do Teorema Central	33

<i>Índice</i>	viii
4 Estimativas de Strichartz com Pesos	36
4.1 Roteiro da Demonstração	36
4.2 Contribuição de F para tempos relativamente grandes	37
A Teoremas de Interpolação	42
A.1 Teorema de Interpolação de M. Riesz	42
A.2 Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz	43
A.3 Teorema de Interpolação de Stein	44
B Teorema de Extensão de Calderón	47
B.1 Espaços de Sobolev de Ordem Inteira	47
B.2 O Teorema de Extensão de Calderón	48
C Desigualdades e Teoremas Mencionados	50
C.1 Desigualdade de Hölder	50
C.2 Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev	50
C.3 Teorema de Plancherel	51
Referências Bibliográficas	53

Introdução

O objetivo desta dissertação consiste em estudar o problema de existência global de soluções, em n dimensões espaciais, para a equação da onda semilinear do tipo

$$\begin{cases} \square u = F_p(u), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+n} \\ u(0, x) = \varepsilon f(x) \quad , \quad \partial_t u(0, x) = \varepsilon g(x), \end{cases} \quad (1)$$

considerando $p > 1$, $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e F_p um termo não linear, tal que

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^j F_p(u) \right| \leq C_j |u|^{p-j}, \quad j = 0, 1.$$

Em outras palavras, a partir de n dado e tendo-se controle através de ε sobre os suportes dos dados iniciais, busca-se saber o domínio preciso de valores de p , para os quais este problema possui uma solução fraca global.

A condição imposta sobre F_p tem sua origem no caso modelo $F_p = |u|^p$. É justamente nesse caso que *Fritz John*, no seu trabalho pioneiro (ver [9]), demonstrou que para $n = 3$ existem sempre soluções globais do problema, se considerarmos $p > 1 + \sqrt{2}$ e ε suficientemente pequeno. Ele mostrou também que esse valor de p é crítico, no sentido que para $p < 1 + \sqrt{2}$, as soluções explodem em tempo finito, ou seja, quando isso ocorre tem lugar o fenômeno conhecido como *Blow-up*. O que acontecia no caso $p = 1 + \sqrt{2}$? Foi a pergunta que surgiu, então. A resposta foi dada tempo depois por *Schaeffer* (ver [14]), o qual demonstrou que o Blow-up pode se apresentar para ε arbitrariamente pequeno. Assim, o caso $n = 3$ resolveu-se de forma satisfatória.

O número $1 + \sqrt{2}$ aparece, pela primeira vez, no trabalho de *Strauss* sobre *teoria de espalhamento*, para equações de Schrödinger semilineares com amplitude pequena (ver [19]). Baseado nisso, ele fez sua famosa e altamente intuitiva conjectura (ver [20]):

Para $n \geq 2$ o problema (1) possui sempre soluções globais se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno e p for maior que uma potência crítica, solução da seguinte equação quadrática:

$$(n-1)p_c^2 - (n+1)p_c - 2 = 0 \quad , \quad p_c > 1. \quad (2)$$

Notemos que ao considerarmos $n = 3$ obtemos como solução de (2) a potência crítica $p_c = 1 + \sqrt{2}$, ou seja, a conjectura tinha a base da sua validade no caso $n = 3$.

Depois de colocada, a conjectura foi rapidamente verificada por *Glassey*, no caso $n = 2$ (ver [5]). Um resultado muito mais relevante foi estabelecido por *Sideris*, que estendeu os resultados sobre Blow-up de F. John, mostrando que, para todo n este fenômeno pode-se apresentar considerando dados iniciais arbitrariamente pequenos, sempre que $p < p_c$ (ver [15]). Assim, a “metade” da conjectura estava resolvida.

Em uma primeira tentativa por resolver a outra “metade” do problema, tentou-se achar uma estimativa análoga à estabelecida nessa parte por John. Muito cedo esse procedimento falhou, pois a passagem principal de John baseia-se em uma estimativa equivalente à seguinte:

$$|t(t - |x|)^{p-2}w|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^{1+3})} \leq C_p |t^p(t - |x|)^{p(p-2)}F|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^{1+3})},$$

$$\text{se } F(t, x) = 0, \quad t - |x| \leq 1, \quad \text{e } 1 + \sqrt{2} < p \leq 3,$$

onde w é solução para $n = 3$ do problema

$$\begin{cases} \square w(t, x) = F(t, x) & , \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+n} \\ 0 = w(0, \cdot) = \partial_t(0, \cdot), \end{cases} \quad (3)$$

e, infelizmente, essa estimativa pontual não pode ser estabelecida em dimensões maiores, devido ao fato de que as soluções fundamentais do operador de D'Alembert $\square$ não são mais medidas quando $n \geq 4$.

Passou-se quase uma década para que a parte de existência global fosse abordada com sucesso para $n > 3$. Os primeiros trabalhos sempre obtiveram resultados positivos, mas para casos particulares. Por exemplo, *Zhou* mostrou que quando $n = 4$, valor para o qual $p_c = 2$, sempre existem soluções globais de (1), considerando dados pequenos e $p > p_c$, (ver [23]). *Lindblad e Sogge* também demonstraram a parte de existência global agora no caso $n \leq 8$ (ver [12]). Nesse mesmo trabalho foram um pouco mais longe, pois demonstraram que sob as hipóteses de simetria esférica a conjectura de Strauss era válida para qualquer $n \geq 3$. Salientamos que tal resultado foi obtido também por *Kubo* para n ímpar (ver [10]). Outro resultado interessante alcançado por *Lindblad e Sogge* foi a obtenção de uma *potência conformemente invariante*, $p_{conf} = (n + 3)/(n - 1)$, demonstrando que a existência global sempre está garantida para $p > p_{conf}$ (ver [11]).

Novas idéias foram aparecendo. Foi assim, que *Georgiev* inicia, em seu trabalho [3], a idéia de utilizar, na demonstração da existência global, certa versão com pesos das já conhecidas estimativas de *Strichartz* para o problema (3) (ver [22]), isto é, uma versão com pesos de

$$\|w\|_{L^{2(n+1)/(n-1)}(\mathbb{R}_+^{1+n})} \leq C \|F\|_{L^{2(n+1)/(n+3)}(\mathbb{R}_+^{1+n})}.$$

A demonstração cabal da conjectura achava-se próxima e, assim, um ano depois, em um trabalho conjunto de *Georgiev, Lindblad e Sogge*, (ver [4]), foi provada a existência de uma solução fraca global u , do problema (1), com $n \geq 3$, $p_c < p < p_{conf}$, F_p fixo e ε suficientemente pequeno, a qual satisfaz

$$(1 + |t^2 - |x|^2|)^{\gamma} u \in L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n}), \quad (4)$$

para algum γ , tal que

$$\frac{1}{p(p+1)} < \gamma < \frac{(n-1)p - (n+1)}{2(p+1)}.$$

A prova deste fato está baseada, fundamentalmente, na seguinte estimativa para a solução do problema (3), considerando $n \geq 2$:

$$\|(t^2 - |x|^2)^{\gamma_1} w\|_{L^q(\mathbb{R}_+^{1+n})} \leq C_{q,\gamma} \|(t^2 - |x|^2)^{\gamma_2} F\|_{L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}_+^{1+n})}, \quad (5)$$

sempre que $2 \leq q \leq \frac{2(n+1)}{n-1}$,

$$\gamma_1 < n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2} \quad e \quad \gamma_2 > \frac{1}{q}, \quad (6)$$

e $F(t, x) = 0$ se $t - |x| \leq 1$.

Agora, passamos a descrever sucintamente a estrutura da dissertação, no primeiro capítulo será estudado o trabalho precursor de *Fritz John*, tomando-se por referência seu próprio trabalho [9].

O segundo capítulo é dedicado ao estudo das estimativas de *Strichartz* para operadores que possuem suas singularidades sobre a esfera, e a aplicação desses resultados à equação da onda. As principais referências são os livros de Bergh e Löffström [1] e Gel'fand e Silov [2]; e os trabalhos de Hörmander [7], Littman [13], Stein [18] e Strichartz [21, 22].

No capítulo seguinte será estudada a demonstração de (4) a partir de (5) e (6). As principais referências são o livro de Hörmander [8]; e os trabalhos de Georgiev, Lindblad e Sogge [4], Lindblad e Sogge [11, 12] e Strichartz [21, 22].

O quarto e último capítulo versa sobre a demonstração de (5), levando-se em consideração (6). São referências os livros de Bergh e Löffström [1] e Sogge [17]; e os trabalhos de Georgiev [3], Georgiev, Lindblad e Sogge [4], Lindblad e Sogge [11, 12], Elias Stein [18], Hörmander [6], Sogge e Stein [16] e Strichartz [21, 22].

A semente de Fritz John

Neste capítulo estudaremos o trabalho precursor de *Fritz John* feito sobre o problema de Cauchy (ver [9])

$$\begin{cases} \square u = |u|^p \\ u(0, x) = f(x) \quad , \quad u_t(0, x) = g(x) \\ f \in C^3(\mathbb{R}^3) \quad e \quad g \in C^2(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (1.1)$$

Veremos como nesse problema a potência $p = 1 + \sqrt{2}$ é crítica, no sentido que para valores maiores que $1 + \sqrt{2}$ sempre existe uma solução global do problema, e para valores menores que essa potência a solução explode em tempo finito.

1.1 Blow Up em três dimensões espaciais.

Seja $\square$ o operador de D'Alembert em três dimensões espaciais, agindo sobre funções do tipo $u(t, x)$, onde $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^3$. Abreviando-se este último escreveremos $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+3}$.

Definição 1.1 Para $(t_0, x^0) \in \mathbb{R}_+^{1+3}$, definimos os cones característicos sólidos do futuro e do passado com vértice em (t_0, x^0) :

$$\Gamma^+(t_0, x^0) = \{(t, x) : |x - x^0| \leq t - t_0, t \geq 0\}$$

$$\Gamma^-(t_0, x^0) = \{(t, x) : |x - x^0| \leq t_0 - t, t \leq 0\}.$$

Teorema 1.2 *Seja p uma constante satisfazendo $1 < p < 1 + \sqrt{2}$ e seja u uma solução global do problema (1.1).*

Além disso, para certo ponto $(t_0, x^0) \in \mathbb{R}_+^{1+3}$

$$u^0 \geq 0, \quad (t, x) \in \Gamma^+(t_0, x^0), \quad (1.2)$$

sendo u^0 a solução da equação linear homogênea $\square u^0 = 0$ com os mesmos dados iniciais f e g .

Então, u tem suporte compacto e $\text{supp}(u) \subset \Gamma^-(t_0, x^0)$.

Prova. Faremos uso da expressão explícita da solução global em três dimensões espaciais do problema linear $\square u = w(t, x)$, para $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+3}$ com os mesmos dados iniciais do problema (1.1) e $w \in C^2(\mathbb{R}_+^{1+3})$. Isto é, $u = u^0 + Lw$, onde

$$u^0(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} g(x + t\xi) d\omega_\xi + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + t\xi) d\omega_\xi \right\} \quad \text{e}$$

$$Lw(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t-s) ds \int_{|\eta|=1} w(s, x + (t-s)\eta) d\omega_\eta. \quad (1.3)$$

Definindo a média esférica de uma função $w(t, x)$, sobre a esfera de raio r em um ponto x^0 , como

$$\tilde{w}(t, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} w(t, x^0 + r\xi) d\omega_\xi, \quad (1.4)$$

podemos calcular a média esférica do operador Lw

$$\widetilde{Lw}(t, r) = \int_0^t ds \int_{|r-t+s|}^{r+t-s} \frac{\lambda}{2r} \tilde{w}(s, \lambda) d\lambda. \quad (1.5)$$

Expressaremos essa identidade por $\widetilde{Lw} = P\tilde{w}$, onde o operador P , agindo sobre funções $\sigma(t, r)$ com domínio $r, t \geq 0$, é definido

$$P\sigma(t, r) = \iint_{R_{r,t}} \frac{\lambda}{2r} \sigma(s, \lambda) d\lambda ds, \quad (1.6)$$

onde $R_{r,t}$ denota o conjunto

$$R_{r,t} = \{(s, \lambda) : t-r < s+\lambda < t+r, s-\lambda < t-r, 0 < s\} \quad \text{no plano } \lambda s.$$

Figura 1.1: Esboço do conjunto $R_{r,t}$ no plano λs .

Observemos que $\sigma \geq 0$ implica $P\sigma \geq 0$, pois $\lambda \geq 0$ em $R_{r,t}$. Assumamos que $u(t, x)$ é uma solução global de (1.1), e que o correspondente u^0 satisfaz (1.2) para algum (t_0, x^0) . Logo,

$$u \geq L|u|^p, \quad (t, x) \in \Gamma^+(t_0, x^0). \quad (1.7)$$

Demonstraremos nossa afirmação por contradição. Assim, negando a nossa tese, obtemos a existência de um ponto $(t_1, x^1) \in \Gamma^+(t_0, x^0)$, onde u não se anula, isto é, $u(t_1, x^1) \neq 0$. Ao chamarmos $t_2 = t_1 + |x^1 - x^0|$, decorre que $(t_2, x^0) \in \Gamma^+(t_0, x^0)$; isso associado a (1.7) nos permite concluir que $u(t_2, x^0) > 0$, pois a nossa u é contínua e não se anula em (t_1, x^1) , que pertence ao domínio de integração do operador L , o qual, agindo sobre $|u|^p$, é, obviamente, não negativo.

Como $\Gamma^+(t_2, x^0) \subset \Gamma^+(t_0, x^0)$, (1.7) é válida para $|x - x^0| < t - t_2$. Por outro lado, $|u|^p$ para $p \geq 1$ é uma função convexa em relação a u ; assim, $\widetilde{|u|^p} \geq |\widetilde{u}|^p$. Da união dessas observações com a identidade obtida em (1.5), para $0 \leq r \leq t - t_2$, temos

$$\widetilde{u}(t, r) \geq \widetilde{L|u|^p}(t, r) = P\widetilde{|u|^p}(t, r) \geq P|\widetilde{u}(t, r)|^p = \iint_{R_{r,t}} \frac{\lambda}{2r} |\widetilde{u}(s, \lambda)|^p d\lambda ds. \quad (1.8)$$

Ademais, considerando $u(t_2, x^0) > 0$ e a definição de média esférica, temos

$$\widetilde{u}(t_2, 0) > 0. \quad (1.9)$$

Veremos que (1.8) agregado a (1.9) implicam blow-up da u . Isso ocorrerá obtendo-se sucessivas cotas inferiores da $\tilde{u}$ cada vez maiores.

Por meio de (1.9) podemos achar um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que $\tilde{u}(t_2 + \delta/2, \delta/2) > 0$. A seguir, definimos as regiões

$$T = \{(s, \lambda) : t_2 + \delta \leq s + \lambda \leq t_2 + 2\delta, s - \lambda \leq t_2\}$$

e

$$S = \{(s, \lambda) : t_2 + 2\delta \leq s + \lambda, t_2 \leq s - \lambda \leq t_2 + \delta\}.$$

Figura 1.2: Esboços dos conjuntos $R_{r,t}$, T e S no plano λs .

Notemos que para $(t, r) \in S$, $T \subset R_{r,t}$ e $0 \leq r \leq t - t_2$. Isso associado a (1.8) nos leva a concluir que para $(t, r) \in S$

$$\tilde{u}(t, r) \geq \iint_T \frac{\lambda}{2r} |\tilde{u}(s, \lambda)|^p d\lambda ds = \frac{C}{r}, \quad (1.10)$$

onde C é uma constante positiva, pois $(t_2 + \delta/2, \delta/2) \in T$ e $\tilde{u}(t_2 + \delta/2, \delta/2) > 0$. Definamos o conjunto $\Sigma = \{(t, r) / 0 \leq r \leq t - t_2 - 2\delta\}$ e para qualquer $(t, r) \in \Sigma$,

definem-se os conjuntos:

$$S_{r,t} = \{(s, \lambda) : t - r < s + \lambda < t + r, t_2 < s - \lambda < t_2 + \delta\}$$

e

$$T_{r,t} = \{(s, \lambda) : t - r < s + \lambda < t + r, t_2 + 2\delta < s - \lambda < t - r\}.$$

Figura 1.3: Esboço dos conjuntos $S_{r,t}$ e $T_{r,t}$ no plano λs .

Decorre dessa definição que para $(t, r) \in \Sigma$, valem $S_{r,t} \subset R_{r,t}$, $T_{r,t} \subset R_{r,t}$, $S_{r,t} \subset S$ e $T_{r,t} \subset \Sigma$. Essas afirmações agregadas a (1.8) e (1.10) implicam

$$\tilde{u}(t, r) \geq \frac{C^p}{2r} \iint_{S_{r,t}} \lambda^{1-p} d\lambda ds, \quad (t, r) \in \Sigma.$$

Fazendo a mudança de variáveis $\alpha = s + \lambda$, $\beta = s - \lambda$ e levando-se em conta que para $p > 1$ a função $(\alpha - \beta)^{1-p}$ é decrescente em α e crescente em β , obtemos

$$\tilde{u}(t, r) \geq \delta C^p 2^{p-2} (t + r - t_2)^{1-p}, \quad (t, r) \in \Sigma. \quad (1.11)$$

Da própria definição de Σ segue que $\delta \leq t - r - t_2 \leq t + r - t_2 \leq t + r$ para qualquer $(t, r) \in \Sigma$. Essa desigualdade permite estimar por baixo $(t + r - t_2)^{1-p}$ para qualquer $p > 1$. Logo, de (1.11) chegamos a

$$\tilde{u}(t, r) \geq C_0(r + t)^{-q_0}, \quad (t, r) \in \Sigma, \quad (1.12)$$

onde C_0 e q_0 são constantes positivas que não dependem de (t, r) , e em particular

$$1 \leq q_0 = \begin{cases} 1, & 1 < p \leq 2 \\ p - 1, & 2 < p < 1 + \sqrt{2} \end{cases} \quad (1.13)$$

Veja que neste momento a inclusão do limite superior $1 + \sqrt{2}$ é artificial. De fato, (1.12) é válida se $q_0 = p - 1$ para todo $p > 2$.

Admitamos de modo geral a possibilidade de estabelecer uma estimativa da forma

$$\tilde{u}(t, r) \geq C(t + r)^{-q}(t + r - \tau)^a(t + r)^{-b}, \quad (t, r) \in \Sigma, \quad (1.14)$$

onde $\tau = t_2 + 2\delta$, $C > 0$, $q \geq 1$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Então, por (1.8) e já que $T_{r,t} \subset R_{r,t}$, obtemos uma integral sobre $T_{r,t}$ como cota inferior de $\tilde{u}(t, r)$; nessa integral fazemos a mudança de variáveis, anteriormente mencionada, para obter

$$\tilde{u}(t, r) \geq \frac{C^p(t - r - \tau)^{pa+2}}{4(pa+1)(pa+2)(t-r)^{pb}} I(t, r), \quad (t, r) \in \Sigma,$$

onde $I(t, r) = \int_{t-r}^{t+r} \alpha^{-pq} d\alpha$.

Estimando por baixo $I(t, r)$, chegamos a

$$I(t, r) \geq \begin{cases} 2^{1-pq}(t+r)^{-1}(t-r)^{1-pq}, & \frac{1}{2}(t+r) < t-r \\ \frac{1-2^{1-pq}}{2(pq-1)}(t+r)^{-1}(t-r)^{1-pq}, & 0 < t-r < \frac{1}{2}(t+r) \end{cases} \quad (1.15)$$

Juntando nossas duas últimas conclusões, chegamos a uma estimativa do tipo

$$\tilde{u}(t, r) \geq C^*(t+r)^{-1}(t-r-\tau)^{a^*}(t-r)^{-b^*}, \quad (t, r) \in \Sigma, \quad (1.16)$$

onde $a^* = pa + 2$, $b^* = pb + qp - 1$, $C^* = C^p(pa + 2)^{-2}D_q$; D_q é a quarta parte do mínimo dos coeficientes das cotas inferiores em (1.15). Usando os valores $a = b = 0$, $q = q_0$ e $C = C_0$, dados em (1.12), vemos que (1.16) é válida desde que $a^* = 2$,

$b^* = q_0 p - 1$ e $C^* = C_0^p D_{q_0}/4$.

Definimos em geral as seqüências a_k , b_k e c_k para $k = 1, 2, 3, \dots$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_1 = a^*, & b_1 = b^*, & C_1 = C^* \\ a_{k+1} = pa_k + 2, & b_{k+1} = pb_k + p - 1, & C_{k+1} = (pa_k + 2)^{-2} D_1 C_k^p. \end{cases} \quad (1.17)$$

Logo, (1.14) será verdadeira com $C = C_k$, $a = a_k$, $b = b_k$, $q = 1$ para $k \geq 1$. Resolvendo (1.17), obtemos que $a_k = 2(p^k - 1)/(p - 1)$, $b_k = q_0 p^k - 1$ e, assim,

$$C_{k+1} = (a_{k+1})^{-2} D_1 C_k^p \geq \frac{1}{4(k+1)^2 p^{2k}} D_1 C_k^p.$$

Utilizando essa estimativa reiteradas vezes até chegar a $C_1 = C^*$ e usando o fato que $e^{\log x} = x$, obtemos

$$C_k \geq \exp \left[p^k \left(\frac{1}{p} \log C^* - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2 \log(j+1) + 2j \log(p) - \log(D_1/4)}{p^{j+1}} \right) \right].$$

Segue dessa expressão que para k , suficientemente grande, $C_k \geq \exp(E p^k)$, onde

$$E = \frac{1}{p} \log C^* - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \log(j+1) + 2j \log(p) - \log(D_1/4)}{p^{j+1}}.$$

Substituindo em (1.14) C , a , b e q , por C_k , a_k , b_k e 1, respectivamente obtemos

$$\tilde{u}(t, r) \geq \frac{t - r}{(t + r)(t - r - \tau)^{2/(p-1)}} \exp[p^k J(t, r)] \quad , \quad (t, r) \in \Sigma. \quad (1.18)$$

Aqui,

$$J(t, r) = E + \frac{2}{p-1} \log(t - r - \tau) - q_0 \log(t - r). \quad (1.19)$$

Dessa desigualdade advem a importância de definir q_0 como em (1.13), pois é necessário que $2/(p-1) > q_0$. Perceba também que é neste ponto que aparece a cota superior $1 + \sqrt{2}$. Finalmente vejamos que $J(t, r) \rightarrow \infty$ quando $t - r \rightarrow \infty$. Assim, por (1.18) concluímos que quando $k \rightarrow \infty$, $\tilde{u}(t, r) \rightarrow \infty$ para todo r, t , tal que $t - r$ seja suficientemente grande. Portanto, u não é uma solução global e este fato em si é uma contradição. ■

1.2 Existência global em três dimensões espaciais

Teorema 1.3 *O problema (1.1) possui soluções globais para quaisquer dados iniciais f e g suficientemente regulares, com suporte na bola de raio ρ , sempre que $p > 1 + \sqrt{2}$, $|D^\alpha f|$ para $|\alpha| \leq 2$ e $|D^\beta f|$ para $|\beta| \leq 1$ não excedam certo número positivo δ , que somente depende de ρ .*

Prova. Admitamos que $f \in C_0^5(\mathbb{R}^3)$ e $g \in C_0^4(\mathbb{R}^3)$, e mais precisamente que para certos x^0 e ρ : $f(x) = g(x) = 0$ para $|x - x^0| > \rho$.

Sob essas hipóteses, u^0 e suas derivadas de ordem ≤ 3 decaem, tal como $1/t$ para t grande. Para esclarecer, definamos:

$$N_\nu = \sup_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 2 \\ x \in \mathbb{R}^3}} \left\{ \rho^{|\alpha|} |D^\alpha f(x)|, \rho^{|\beta|+1} |D^\beta g(x)| \right\}.$$

Logo, existe uma constante universal γ , tal que¹

$$\rho^{|\alpha|} |D^\alpha u^0(t, x)| < \gamma \frac{\rho}{\rho + t} N_\nu, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+3} \quad e \quad |\alpha| \leq \nu, \quad (1.20)$$

quando $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Mostraremos a existência de uma solução global u de (1.1), com dados iniciais f e g , impondo-se que N_0 , para p e ρ dados, seja suficientemente pequeno. Para tanto, basta encontrar uma $u(t, x)$ para a qual as expressões $D^\alpha u(t, x)$ com $|\alpha| \leq 2$ existam e sejam contínuas em $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+3}$ e $u = u^0 + L|u|^p$.

Lema 1.4 *Seja $w(t, x)$ definida para $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+3}$, tal que $D^\alpha w(t, x)$ para $|\alpha| \leq 2$ existem e são contínuas nesse domínio². Então, $Lw(t, x)$ como função de x e t é de classe C^2 em $\mathbb{R}_+^{1+3}$, tem dados iniciais nulos e satisfaz $\square u = w$.*

Prova. Basta introduzir

$$M(r, t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} w(x + r\eta, t) d\omega_\eta, \quad r \geq 0, (t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+3}.$$

¹O símbolo D^α será usado para referir à diferenciação espacial $D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} D_{x_3}^{\alpha_3}$.

²Observe que não é assumida a existência das derivadas temporais de w .

Notemos que $M(r, t, x)$ é de classe C^2 em x , r , uniformemente em t . Então, as nossas afirmações decorrem da identidade de Darboux em três dimensões espaciais: $M_{rr}(r, t, x) = \Delta_x M(r, t, x)$, e que através de (1.3) tem-se $Lw(t, x) = \int_0^t M(r, t, x)$. ■ Associamos a uma função contínua $w(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+3}$ a função

$$\bar{w}(r, t) = \sup_{\substack{|x-x^0|=r \\ x \in \mathbb{R}^3}} |w(x, t)|,$$

definida para $r, t \geq 0$.

Lema 1.5 Para $|x - x^0| = r$, $t \geq 0$

$$|Lw(t, x)| \leq \int_0^t ds \int_{|r-t+s|}^{r+t-s} \frac{\lambda}{2r} \bar{w}(\lambda, s) d\lambda = \iint_{R_{r,t}} \frac{\lambda}{2r} \bar{w}(\lambda, s) d\lambda ds,$$

ou $\overline{Lw} \leq P\bar{w}$, onde P é o operador definido em (1.6).

Prova. Introduzindo $v(t, x) = \bar{w}(|x - x^0|, t)$, é fácil demonstrar que $\overline{Lw} \leq \widetilde{Lv} = P\widetilde{v} = P\bar{v} = P\bar{w}$, onde $\widetilde{v}$ foi definida em (1.4). ■

Provaremos a existência de uma solução global de (1.1) mediante um processo iterativo; para tanto, introduziremos uma norma apropriada. Assim, definimos para funções $u(t, x)$, contínuas em $\mathbb{R}_+^{1+3}$ e com suporte em $\Gamma^+(-\rho, x^0)$, a seguinte norma:

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\substack{r \geq 0 \\ t \geq 0}} \rho^{1-p} (t + r + 2\rho)(t - r + 2\rho)^{p-2} \bar{u}(r, t) \\ &= \sup_{\substack{t \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}^3}} \rho^{1-p} (t + |x - x^0| + 2\rho)(t - |x - x^0| + 2\rho)^{p-2} |u(t, x)|. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dessa definição tem-se que $D^\alpha u^0$ para $|\alpha| < 3$ tem norma finita, pois pelo *Princípio Forte de Huygens* podemos afirmar que $u^0(t, x) = 0$ a menos que $t - \rho < |x - x^0| < t + \rho$. Logo, $\rho^{1-p} (t + |x - x^0| + 2\rho)(t - |x - x^0| + 2\rho)^{p-2} \leq \rho^{1-p} (2t + 3\rho)(3\rho)^{p-2} \leq 3^{p-1} (t + \rho) \rho^{-1}$, no suporte de u^0 ; assim, aplicando (1.20), chegamos a

$$\|D^\alpha u^0\| \leq \gamma 3^{p-1} \rho^{-\nu}, \quad |\alpha| = \nu \leq 3. \quad (1.22)$$

O lema seguinte será fundamental na prova de existência.

Lema 1.6 Existe uma constante $C = C(p)$, tal que

$$\|L|u|^p\| \leq C\rho^2 \|u\|^p, \quad (1.23)$$

sendo $u(t, x)$ contínua em $\mathbb{R}_+^{1+3}$ e satisfazendo

$$u(t, x) = 0, \quad |x - x^0| > t + \rho. \quad (1.24)$$

Prova. O caso é relevante quando a norma de u é finita. Aplicando o lema 1.6 a $L|u|^p$, vemos que basta mostrar

$$\int_0^t ds \int_{|r-t+s|}^{r+t-s} \frac{\lambda}{2r} \bar{u}^p(\lambda, s) d\lambda \leq \frac{C c^p \rho^{p+1}}{(t+r+2\rho)(t-r+2\rho)^{p-2}}, \quad (1.25)$$

onde C depende unicamente de p , tendo como hipótese que

$$0 \leq \bar{u}(\lambda, s) \leq \frac{c \rho^{p-1}}{(s+\lambda+2\rho)(s-\lambda+2\rho)^{p-2}}. \quad (1.26)$$

Além disso, por (1.24)

$$\bar{u}(\lambda, s) = 0, \quad \lambda > s + \rho. \quad (1.27)$$

Em primeiro lugar demonstraremos (1.25), no caso $t - \rho < r < t + \rho$.

Nesse sentido, para (λ, s) na região de integração onde $\bar{u}(\lambda, s) \neq 0$, teremos também que $s - \rho < \lambda < s + \rho$. Segue de (1.26) que $\bar{u}(\lambda, s) \leq c\rho/(2s + \rho)$ e, portanto,

$$\int_0^t ds \int_{|r-t+s|}^{r+t-s} \frac{\lambda}{2r} \bar{u}^p(\lambda, s) d\lambda \leq c^p \rho^p \int_0^t (2s + \rho)^{-p} k(s) ds, \quad k(s) = \frac{1}{2r} \int_I \lambda d\lambda,$$

onde I é a interseção dos intervalos $[|r - t + s|, r + t - s]$ e $[|r - t + s|, s + \rho]$.

Separando os casos $r > 2\rho$ e $0 < r < 2\rho$, chegamos sempre ao resultado $k(s) \leq \frac{12\rho(s+\rho)}{t+\rho}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_{|r-t+s|}^{r+t-s} \frac{\lambda}{2r} \bar{u}^p(\lambda, s) d\lambda &\leq \frac{12c^p \rho^{p+1}}{t + \rho} \int_0^t (s + \rho)(2s + \rho)^{-p} ds \\ &\leq \frac{12c^p \rho^3}{t + \rho} \int_0^\infty (\mu + 1)^{1-p} d\mu \leq \frac{36 \cdot 3^{p-2} c^p \rho^{p+1}}{(p-2)(t+r+2\rho)(t-r+2\rho)^{p-2}}. \end{aligned}$$

Observe que aqui usamos a condição $p > 2$.

Consideraremos, agora, o outro caso, ou seja, $0 < r < t - \rho$.

Considerando-se $Q = p(p-2) - 1$, notamos que $Q > 0$, pois tal hipótese impõe $p > 1 + \sqrt{2}$. Fazendo a mudança de variáveis $\alpha = s + \lambda$, $\beta = s - \lambda$, usando (1.26) e (1.27), temos

$$\int_0^t ds \int_{|r-t+s|}^{r+t-s} \frac{\lambda}{2r} \bar{u}^p(\lambda, s) d\lambda \leq \frac{c^p \rho^{p(p-1)}}{8r} \int_{-\rho}^{t-r} d\beta \int_{t-r}^{t+r} \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + 2\rho)^p (\beta + 2\rho)^{p(p-2)}} d\alpha$$

$$\leq \frac{c^p \rho^{p(p-1)}}{8r} \int_{-\rho}^{\infty} d\beta \int_{t-r}^{t+r} \frac{d\alpha}{(\alpha + 2\rho)^{p-1}(\beta + 2\rho)^{q+1}} = \frac{c^p \rho^{p+1}}{8rQ} \int_{t-r}^{t+r} (\alpha + 2\rho)^{1-p} d\alpha.$$

Trabalhando separadamente os casos $(t - r + 2\rho) > \frac{1}{2}(t + r + 2\rho)$ e $(t - r + 2\rho) < \frac{1}{2}(t + r + 2\rho)$, sempre chegamos a

$$\int_0^t ds \int_{|r-t+s|}^{r+t-s} \frac{\lambda}{2r} \bar{u}^p(\lambda, s) d\lambda \leq \frac{2c^p \rho^{p+1}}{Q(p-2)(t+r+2\rho)(t-r+2\rho)^{p-2}}.$$

Desta forma, prova-se o lema. ■

Nossa definição de norma, aplicada a funções que satisfaçam (1.26), implica que

$$|u(t, x)| \leq \|u\| \quad (1.28)$$

$$\| |u|^\theta |v|^{1-\theta} \| \leq \|u\|^\theta \|v\|^{1-\theta} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (1.29)$$

Vejamos que (1.29) com (1.25), implicam

$$L(|u|^{\theta p} |v|^{(1-\theta)p}) \leq C\rho^2 \|u\|^{\theta p} \|v\|^{(1-\theta)p} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (1.30)$$

Denotemos por Z o espaço linear de funções $u(t, x)$, tais que $D^\alpha u(t, x)$ para $|\alpha| \leq 2$ estão definidas e são contínuas para todo $(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+3}$ e satisfaçam

$$u(t, x) = 0, \quad |x - x^0| > t + \rho$$

e

$$\|D^\alpha u\| < \infty \quad , \quad |\alpha| \leq 2.$$

Em particular percebemos de imediato que $u^0 \in Z$.

Por outro lado, se $u \in Z$, vemos que a partir de (1.23) e (1.30) (usando $\theta = (p-1)/p$)

$$\|D_k L|u|^p\| \leq p \|L(|u|^{p-1} |D_k u|)\| = p \|L(|u|^{\theta p} |D_k u|^{(1-\theta)p})\| \leq C p \rho^2 \|u\|^{p-1} \|D_k u\|. \quad (1.31)$$

Similarmente, derivando espacialmente duas vezes e aplicando em um termo o que foi feito anteriormente, e no outro termo utilizando primeiro (1.30) com $\theta = (p-2)/p$, seguido de (1.29) com $\theta = 1/2$, chegamos a

$$\|D_j D_k L|u|^p\| \leq C p \rho^2 \{(p-1) \|u\|^{p-2} \|D_j u\| \|D_k u\| + \|u\|^{p-1} \|D_j D_k u\|\}. \quad (1.32)$$

Agora, definindo $w(t, x) = \max(|u(t, x)|, |v(t, x)|)$ e $\|w\| = \max(\|u\|, \|v\|)$, para $u, v \in Z$, podemos demonstrar que

$$\|L\{|u|^p - |v|^p\}\| \leq Cp\rho^2\|w\|^{p-1}\|u - v\| \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \|D_j L\{|u|^p - |v|^p\}\| &\leq Cp(p-1)\rho^2\|w\|^{p-2}\|u - v\|\|D_j u\| \\ &+ Cp\rho^2\|w\|^{p-2}\|D_j(u - v)\| \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \|D_j D_k L\{|u|^p - |v|^p\}\| &\leq Cp(p-1)\rho^2\|w\|^{p-2} \left[\|D_j D_k u\|\|u - v\| \right. \\ &+ \|D_k u\|\|D_j(u - v)\| + \|D_j v\|\|D_k(u - v)\| \left. \right] \\ &+ Cp\rho^2\|w\|^{p-1}\|D_j D_k(u - v)\| \\ &+ Cp(p-1)\rho^2\|u - v\|^{p-2}\|D_j u\|\|D_k u\|. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Através de (1.23), (1.31) e (1.32) deduzimos diretamente que $L|u|^p \in Z$ sempre que $u \in Z$.

Chegamos à parte final da prova, pois o nosso processo iterativo mencionado será feito ao se definir a seqüência de funções $\{u_n\}$ da seguinte forma:

$$u_0 = u^0, \quad u_{n+1} = u_0 + L|u_n|^p, \quad n \geq 0. \quad (1.36)$$

A partir dessa definição com (1.23), segue que

$$\|u_{n+1}\| \leq \|u^0\| + C\rho^2\|u^n\|^p. \quad (1.37)$$

Assumamos agora que $\|u^0\|$ é tão pequena que³

$$C\rho^2\|u^0\|^{p-1} \leq \frac{1}{p2^p}, \quad \|u^0\| < \frac{1}{2}. \quad (1.38)$$

Com esta hipótese podemos aplicar indução sobre (1.37), obtendo

$$\|u^n\| \leq 2\|u^0\| < 1, \quad n \geq 0. \quad (1.39)$$

Daqui em diante $C_i, i = 1, 2, \dots$ denotarão constantes que dependem de p, ρ e $\|D^\alpha u^0\|$, para $|\alpha| \leq 2$, mas não de n .

A partir de (1.38), (1.31) e (1.39) deduzimos diretamente

$$\|D_k u_{n+1}\| \leq \|D_k u^0\| + \frac{1}{2}\|D_k u_n\|.$$

³Através de (1.22) essa condição é equivalente a que N_0 seja suficientemente pequeno.

Logo,

$$\|D_k u_n\| \leq C_1, \quad n \geq 0. \quad (1.40)$$

De (1.32) constatamos que

$$\begin{aligned} \|D_j D_k u_{n+1}\| &\leq \|D_j D_k u_0\| + Cp(p-1)\rho^2 2^{p-2} \|u^0\|^{p-2} C_1^2 + Cp\rho^2 2^{p-1} \|u^0\|^{p-1} \|D_j D_k u_n\| \\ &\leq C_2 + \frac{1}{2} \|D_j D_k u_n\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|D_j D_k u_n\| \leq C_3. \quad (1.41)$$

Por último usamos (1.33), (1.34) e (1.35) com $u = u_n$, $v = u_{n-1}$, $w = \max(|u_n|, |u_{n-1}|)$, $\|w\| \leq 2\|u_0\|$. Feito isso, para $n \geq 1$ obtemos

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq Cp\rho^2 2^{p-1} \|u^0\|^{p-1} \|u_n - u_{n-1}\| \leq \frac{1}{2} \|u_n - u_{n-1}\|,$$

e, assim,

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq 2^{-n} C_4, \quad n \geq 0. \quad (1.42)$$

Da mesma forma, para $n \geq 1$ vale

$$\begin{aligned} \|D_j(u_{n+1} - u_n)\| &\leq Cp(p-1)\rho^2 2^{p-2} \|u^0\|^{p-2} \|u_n - u_{n-1}\| \|D_j u_0\| \\ &\quad + Cp\rho^2 2^{p-1} \|u^0\|^{p-1} \|D_j(u_n - u_{n-1})\| \\ &\leq 2^{-n} C_5 + \frac{1}{2} \|u_n - u_{n-1}\|, \end{aligned}$$

$$\|D_j(u_{n+1} - u_n)\| \leq n 2^{-n} C_6, \quad n \geq 0 \quad (1.43)$$

Finalmente fazendo contas similares, chegamos a

$$\|D_j D_k(u_{n+1} - u_n)\| \leq (n 2^{-n} + 2^{-(p-2)n}) C_7 + \frac{1}{2} \|D_j D_k(u_n - u_{n-1})\|.$$

Assim,

$$\|D_j D_k(u_{n+1} - u_n)\| \leq (n^2 2^{-n} + n 2^{-(p-2)n}) C_8. \quad (1.44)$$

Dos resultados (1.42), (1.43) e (1.44) podemos concluir que $D^\alpha u_n$, para $|\alpha| \leq 2$ converge uniformemente para $D^\alpha u$, quando $n \rightarrow \infty$, sendo essas funções contínuas em t e x . Portanto, u é a solução do problema. Então, desta forma, consideramos demonstrado o teorema. ■

Estimativas de Strichartz

Neste capítulo discutiremos as estimativas integrais $L^p - L^q$ obtidas por Robert S. Strichartz relacionadas com a equação da onda (ver [21], [22]).

2.1 Convoluções com Núcleos que possuem suas singularidades sobre a esfera

Os operadores de convolução da forma $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy$, onde K tem suas singularidades sobre a esfera unitária, aparecem naturalmente no estudo da equação da onda. Veremos agora que é possível obter estimativas desses operadores com relação à sua limitação em várias normas L^p , as quais nos proporcionarão novas informações sobre a solução dessa equação.

Especificamente, denotemos por Σ a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, x, y denotarão pontos de $\mathbb{R}^n$ e x', y' denotarão pontos de Σ . Seja também dx' a medida de Lebesgue sobre Σ , de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_\Sigma f(rx')dx'r^{n-1}dr$.

Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e k é um inteiro não negativo, definimos

$$T_{k+1}f(x) = \int_\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k f(x - ry')|_{r=1} dy'. \quad (2.1)$$

Para $0 < \alpha < 1$ definimos

$$T_\alpha f(x) = \int_{|y| \leq 1} f(x-y)(1-|y|^2)^{-\alpha} dy. \quad (2.2)$$

2.1 Convoluções com Núcleos que possuem suas singularidades sobre a esfera

Veja que a integral em (2.2) carece de sentido para $\alpha \geq 1$, pois o termo $(1 - |y|^2)^{-\alpha}$ possui uma singularidade não integrável sobre Σ . Mas, interpretando (2.2) no sentido fraco, podemos definir T_α para valores não inteiros de α em $0 < \alpha \leq (n+1)/2$. Para tanto, integramos formalmente por partes em (2.2), omitindo os termos de fronteira. Isto é, se $k < \alpha < k+1$ definimos

$$T_\alpha f = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)} \int_\Sigma \int_0^1 (1 - r^2)^{k-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}\right)^k (r^{n-1} f(x - ry')) dr dy'. \quad (2.3)$$

Para esses operadores de convolução cujos núcleos possuem singularidades sobre a esfera, podemos demonstrar o seguinte:

Teorema 2.1 *São válidas as seguintes estimativas:*

(a)

$$\|T_\alpha f\|_q \leq A_\alpha \|f\|_p \quad \text{para} \quad 0 < \alpha \leq \frac{n+1}{2},$$

sempre que

$$1 < p \leq 2 \leq q < \infty \quad e \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{n+1-2\alpha}{2n}.$$

(b)

$$\|T_\alpha f\|_{p'} \leq A_\alpha \|f\|_p \quad \text{para} \quad 0 < \alpha \leq \frac{n+1}{2},$$

sempre que

$$p = \frac{n+1}{n+1-\alpha} \quad e \quad p' = \frac{n+1}{\alpha}.$$

(c)

$$\|T_\alpha f\|_q \leq A_\alpha \|f\|_p \quad \text{para} \quad \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{n+1}{2},$$

sempre que

$$\frac{n+1}{n+1-\alpha} \leq p \leq 2 \quad e \quad \frac{n}{q} = \alpha - \frac{1}{p}, \quad (2.4)$$

ou

$$\frac{n}{n+\frac{1}{2}-\alpha} \leq p \leq \frac{n+1}{n+1-\alpha} \quad e \quad \frac{1}{q} = \alpha - \frac{n}{p'}, \quad (2.5)$$

onde p' é o exponente conjugado de p , ou seja, $1/p + 1/p' = 1$.

2.1 Convoluções com Núcleos que possuem suas singularidades sobre a esfera 20

Prova. Definindo a função

$$\phi_\alpha(y) = \begin{cases} (1 - |y|^2)^{-\alpha} & \text{se } |y| < 1 \\ 0 & \text{se } |y| \geq 1, \end{cases}$$

notamos que para $\alpha < 1$, $\phi_\alpha \in L^1$ e assim, podemos calcular sua *Transformada de Fourier*, isto é (ver [2])

$$\widehat{\phi_\alpha}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} 2^{-\alpha} \Gamma(1 - \alpha) |\xi|^{\alpha-n/2} J_{n/2-\alpha}(|\xi|). \quad (2.6)$$

A prova desse teorema baseia-se no fato de que, a partir de (2.6), a família T_α de operadores pode ser caracterizada pelas seguintes expressões:

$$\widehat{T_\alpha f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} 2^{-\alpha} \Gamma(1 - \alpha) |\xi|^{\alpha-n/2} J_{n/2-\alpha}(|\xi|) \widehat{f}(\xi) \quad \text{para } \alpha \neq 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

$$\widehat{T_k f}(\xi) = \sum_{i=1}^k c_i |\xi|^{i-n/2} J_{n/2-i}(|\xi|) \widehat{f}(\xi) \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots$$

Assim, bastará demonstrar o teorema para a família de operadores S_α , analítica na faixa $0 \leq \operatorname{Re}(\alpha) \leq \frac{n+1}{2}$

$$\widehat{S_\alpha f}(\xi) = |\xi|^{\alpha-n/2} J_{n/2-\alpha}(|\xi|) \widehat{f}(\xi), \quad (2.8)$$

com $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Notemos que é suficiente a demonstração do teorema para S_α no lugar de T_α .

Com esse objetivo utilizaremos a estimativa clássica para funções de Bessel complexas

$$|t^{-(a+ib)} J_{a+ib}(t)| \leq C_a e^{c|b|} (1+t)^{-a-1/2}, \quad (2.9)$$

válida para todo real $0 < t < \infty$.

Essa estimativa é suficiente para a demonstração da parte (a) do teorema como consequência da aplicação do teorema de Hardy e Littlewood, o qual garante que o operador $\mathcal{F}^{-1}(m(\xi) \widehat{f}(\xi))$ é limitado como operador de L^p em L^q sempre que $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ e

$$|m(\xi)| \leq c |\xi|^{-t} \quad \text{para } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{t}{n}. \quad (2.10)$$

É evidente que S_α possui essa forma sendo $m(\xi) = |\xi|^{\alpha-n/2} J_{n/2-\alpha}(|\xi|)$; logo, considerando α real e aplicando (2.9) nesse $m(\xi)$, obtemos

$$|m(\xi)| \leq c |\xi|^{-(\frac{n+1}{2}-\alpha)}.$$

2.1 Convoluções com Núcleos que possuem suas singularidades sobre a esfera 21

Portanto, (2.10) é válida para todo $t \leq \frac{n+1}{2} - \alpha$, e, assim, (a) fica satisfatoriamente demonstrado.

Na prova do item (b) usaremos o *teorema de interpolação complexa de Stein* (ver apêndice A) aplicado a S_α . Note-se que S_α é uma família analítica de operadores na faixa $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < (n+1)/2$ e que também, devido à condição (2.9), tem *crescimento admissível*. Respeitando a notação utilizada no apêndice citado, consideremos $p_1 = q_1 = 2$, $p_2 = 1$ e $q_2 = \infty$. Dessa forma os equivalentes das hipóteses (A.3) e (A.4) para esta família são

$$\|S_\alpha f\|_2 \leq c e^{c \operatorname{Im}(\alpha)} \|f\|_2, \quad \text{para } \operatorname{Re}(\alpha) = \frac{n+1}{2} \quad (2.11)$$

e

$$\|S_\alpha f\|_\infty \leq c e^{c \operatorname{Im}(\alpha)} \|f\|_1, \quad \text{para } \operatorname{Re}(\alpha) = 0, \quad (2.12)$$

sendo claro que $c e^{c \operatorname{Im}(\alpha)}$ satisfaz (A.5).

A estimativa (2.11) segue diretamente de (2.9) e da aplicação do Teorema de Plancherel (ver apêndice C).

Para provar a validade da estimativa (2.12) usamos (2.7), o fato de que $\|T_\alpha f\|_\infty \leq \|f\|_1$, pois $|\phi_\alpha(x)| \leq 1$ e a identidade $|\Gamma(1+ib)| = (\pi b / \sinh b)^{1/2}$.

Logo, todas as hipóteses do teorema de interpolação de Stein são satisfeitas. Na linguagem do apêndice referido temos $q_1 = \infty$, $p_1 = 1$, $q_2 = p_2 = 2$ e $t = 2\operatorname{Re}(\alpha)/(n+1)$.

Assim, (A.2) se transforma em

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{\operatorname{Re}(\alpha)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{\operatorname{Re}(\alpha)}{2}.$$

Daí nota-se diretamente que $q = p'$ e que substituindo o valor de t , obtemos o resultado procurado.

O item (c) é obtido como uma aplicação direta do *Teorema de Interpolação real de M. Riesz* (ver apêndice A), tendo como hipótese os itens (a) e (b), e considerando $\alpha > 1/2$.

No caso $\alpha = 1/2$ verifica-se que $T_{1/2}$ opera de L^1 em L_2^* , pois $\phi_{1/2} \in L_2^*$. Portanto, nesse caso particular, o resultado segue da aplicação do *Teorema de Interpolação real de Marcinkiewicz* (ver apêndice A).

Dessa forma, concluímos a demonstração do teorema. ■

2.1 Convoluções com Núcleos que possuem suas singularidades sobre a esfera²²

O passo seguinte consiste em aplicar esse resultado à equação da onda em n dimensões espaciais.

Sabemos que o problema de Cauchy

$$\square u(t, x) = \partial^2 u(t, x)/\partial t^2 - \Delta_x u(t, x) = 0, \quad (2.13)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \partial u(0, x)/\partial t = g(x) \quad (2.14)$$

para $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem solução única dada por

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{f}(\xi) \cos t|\xi| + \widehat{g}(\xi) \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \right), \quad (2.15)$$

onde $\mathcal{F}^{-1}$ denota a *Transformada Inversa de Fourier*.

Observando as identidades para a função de Bessel

$$J_{1/2}(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin t}{t^{1/2}} \quad e \quad J_{-1/2}(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\cos t}{t^{1/2}},$$

não é difícil ver que (2.15) pode ser escrita como

$$u(t, x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \delta(t) S_{(n+1)/2} \delta(t^{-1}) f + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} t \delta(t) S_{(n-1)/2} \delta(t^{-1}) g, \quad (2.16)$$

onde $\delta(t)$ é o operador de dilatação

$$[\delta(t)f](x) = f(tx) \quad (2.17)$$

e $S_{(n+1)/2}$ e $S_{(n-1)/2}$ são os valores em $\alpha = (n+1)/2$ e $\alpha = (n-1)/2$ respectivamente da família (2.8).

Definimos a p -energia de u por

$$E_p(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right|^p + |\nabla_x u(t, x)|^p \right\} dx. \quad (2.18)$$

Veja que $E_p(0) = \|g\|_p^p + \|\nabla f\|_p^p$.

Observemos que o princípio clássico de conservação de energia diz que $E_2(t)$ é constante. Littman demonstrou que este resultado não tem seu análogo para $p \neq 2$ (ver [13]). De fato, nesse caso existem soluções fracas com *energia finita* para $t = 0$ e *energia infinita* para todo $t \neq 0$.

O resultado seguinte nos fornece uma estimativa para a norma L^q de $u(t, x)$, em termos da p -energia no tempo $t = 0$ para certos valores de p e q .

2.1 Convoluções com Núcleos que possuem suas singularidades sobre a esfera 23

Teorema 2.2 *Seja $u(t, x)$ como em (2.15), $n \geq 2$; então, para qualquer $t \neq 0$*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x)|^q dx \right)^{1/q} \leq c(t) E_p(0)^{1/p}, \quad (2.19)$$

onde

$$\frac{n}{q} = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{p'} \quad \text{para} \quad 2 \frac{n+1}{n+3} \leq p \leq 2 \quad (2.20)$$

e

$$\frac{1}{q} = \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2} \quad \text{para} \quad 2 \frac{n}{n+2} \leq p \leq 2 \frac{n+1}{n+3}; \quad (2.21)$$

no caso $n = 2$ considerar $p > 1$.

Prova. Notemos que devido a (2.16), é suficiente provar que

$$\|S_{(n-1)/2} g\|_q \leq c \|g\|_p \quad (2.22)$$

e

$$\|S_{(n+1)/2} f\|_q \leq c \|\nabla f\|_p. \quad (2.23)$$

Agora, (2.22) é consequência do teorema (2.1), pois o valor $\alpha = (n-1)/2$, substituído em (2.4) e (2.5), reproduz as hipóteses (2.20) e (2.21), respectivamente; e como já mencionamos, as mesmas estimativas são válidas tanto para T_α como para S_α .

Veja que demonstrar (2.23) equivale a

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\cos |\xi|}{|\xi|} \widehat{f}(\xi) \right) \right\|_q \leq c \|f\|_p.$$

Nesse sentido consideramos a função de corte $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, a qual se anula em uma vizinhança da origem e é igual a um para valores grandes de ξ .

Então, novamente o *Teorema de Hardy-Littlewood* implica

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left((1 - \psi(\xi)) \frac{\cos |\xi|}{|\xi|} \widehat{f}(\xi) \right) \right\|_q \leq c \|f\|_p.$$

sempre que p e q satisfaçam $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ e $1/p - 1/q \geq 1/n$.

Somente resta estudar o seguinte operador:

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\psi(\xi) \frac{\cos |\xi|}{|\xi|} \widehat{f}(\xi) \right) \right\|_q \leq c \|f\|_p.$$

Nesse ponto somente diremos que a prova dessa estimativa é muito similar à prova do teorema (2.1), ao considerar a família analítica de operadores

$$U_\alpha^{(j)}(f) = \mathcal{F}^{-1}(\psi(\xi) \xi_j |\xi|^{\alpha-n/2-1} J_{n/2-\alpha-1}(|\xi|) \widehat{f}(\xi)).$$

■

2.2 Estimativa a priori para a equação da onda

Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < T\}$ uma bola no espaço n dimensional e seja $\Gamma = \{(t, x) : |x - x_0| < T - |t|, |t| < T\}$ a união dos cones do passado e do futuro com base em Ω . Consideraremos para $1 < p < \infty$ os *Espaços de Sobolev* de ordem inteira $W^{k,p}(\Gamma)$ definidos no apêndice B. Como Γ satisfaz as hipóteses do *Teorema de Extensão de Calderón*, (ver apêndice B), então, qualquer função em $W^{k,p}(\Gamma)$ pode ser definida fora de Γ , de tal forma que esteja em $W^{k,p}(\mathbb{R}^{1+n})$.

Nesta seção estaremos interessados na solução do seguinte tipo de problema:

$$\square u = w \quad \text{em } \Gamma \quad (2.24)$$

$$u(0, \cdot) = u_t(0, \cdot) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.25)$$

no sentido fraco, para $w \in W^{k,p}(\Gamma)$.

Teorema 2.3 *Dado $w \in W^{k,p}(\Gamma)$, existe uma única solução $u \in W^{k,q}(\Gamma)$ do problema (2.24) e (2.25), onde $p = 2(n+1)/(n+3)$, $q = 2(n+1)/(n-1)$, e*

$$\|u\|_{k,q,\Gamma} \leq M \|w\|_{k,p,\Gamma} \quad (2.26)$$

para alguma constante M .

Prova. Começemos considerando $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+n})$. Sabe-se que a solução do problema, nesse caso, pode ser expressada explicitamente através da transformada de Fourier. Assim, denotando por $\widehat{w}(t, \xi)$ e $\widehat{u}(t, \xi)$ as transformadas de Fourier de w e u respectivamente, nas variáveis espaciais para um tempo fixo t , temos que

$$\widehat{u}(t, \xi) = \int_0^t \frac{\sin(t-s)|\xi|}{|\xi|} \widehat{w}(s, \xi) ds \quad (2.27)$$

é uma solução de (2.24) e (2.25), no sentido clássico, em todo $\mathbb{R}^n$.

Na seção anterior provamos a estimativa seguinte:

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin |\xi|}{|\xi|} \widehat{f}(\xi) \right] \right\|_q \leq M_1 \|f\|_p. \quad (2.28)$$

Segue então, que

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \widehat{f}(\xi) \right] \right\|_q \leq M_1 |t|^{1+n((1/q)-(1/p))} \|f\|_p, \quad (2.29)$$

pois

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \widehat{f}(\xi) \right] = t\delta(t^{-1}) \left(\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin |\xi|}{|\xi|} \widehat{\delta(t)f}(\xi) \right\} \right),$$

onde δ é o operador de dilatação definido em (2.17), e devido a que $\|\delta(t)f\|_p = |t|^{-n/p} \|f\|_p$.

Aplicando (2.29) em (2.27) obtemos

$$\|u(t, \cdot)\|_q \leq M_1 \int_0^t |t-s|^{1+n((1/q)-(1/p))} \|w(s, \cdot)\|_p ds. \quad (2.30)$$

Por outro lado observemos que os valores de p e q satisfazem

$$1 + n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) = -\frac{n-1}{n+1} = -1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

isso nos permite aplicar o *Teorema de Integração Fracionária* devido a Hörmander (ver [7]). Logo, a convolução com $s^{1+n((1/q)-(1/p))}$ é um operador limitado de L^p em L^q . Assim, obtemos a seguinte estimativa global nas variáveis temporal e espacial:

$$\|u\|_q \leq M \|w\|_p \quad (2.31)$$

Veja que por densidade a fórmula (2.27) também faz sentido para $w \in L^p(\mathbb{R}^{1+n})$ e desta maneira nos fornece uma solução fraca de (2.24) e (2.25), a qual, pelo mesmo argumento, satisfaz (2.31). A estimativa local (2.26), para $k = 0$, é obtida extendendo w nulamente fora de Γ e aplicando a estimativa global (2.31).

Nosso objetivo então, é demonstrar (2.26) para $k > 0$. Perceba que para tanto é suficiente dominar

$$\|\partial^k u / \partial x_j^k\|_{L^q(\Gamma)} \quad \text{e} \quad \|\partial^k u / \partial t^k\|_{L^q(\Gamma)} \quad \text{por} \quad \|w\|_{k,p,\Gamma}.$$

Como $w \in W^{k,p}(\Gamma)$ vemos que trabalhar com as derivadas espaciais é fácil, pois

$$\square \partial^k u / \partial x_j^k = \partial^k w / \partial x_j^k \in L^p(\Gamma) \quad \text{e} \quad \partial^k u / \partial x_j^k$$

tem dados de Cauchy nulos. Assim, temos todas as hipóteses para aplicar (2.26) com $k = 0$.

O trabalho com as derivadas temporais não pode ser feito de modo análogo, pois essas derivadas não satisfazem mais os dados de Cauchy do problema. No entanto, a expressão do operador de D'Alembert nos proporciona uma pista de como devemos agir neste caso. Assim, já que $\partial^2 u / \partial t^2 = \Delta_x u + w$, podemos expressar qualquer derivada de ordem par, $\partial^k u / \partial t^k$, como combinação linear de derivadas espaciais de u , de ordem k , e derivadas de w de ordem $\leq k - 2$. Pela *Desigualdade de Sobolev* essas derivadas de w estão em $L^q(\Gamma)$, pois $(1/p) - (1/q) = 2/(n + 1)$. Logo, a estimativa desejada para $\partial^k u / \partial t^k$ é válida se k for par. Se k for ímpar, o argumento anterior mostra que $\partial^{k-1} u / \partial t^{k-1} = D_x u + v$ para $v \in W^{1,q}(\Gamma)$ e onde D_x representa um operador diferencial de ordem $k - 1$ nas variáveis espaciais. Como $\partial v / \partial t \in L^q(\Gamma)$ somente resta mostrar que $(\partial / \partial t) D_x u \in L^q(\Gamma)$. Pois bem, veja que $\square D_x u = D_x w \in W^{1,q}(\Gamma)$, logo, podemos estender $D_x w$ fora de Γ de tal forma que esteja em $W^{1,q}(\mathbb{R}^{1+n})$. Agora, como $D_x u$ tem dados de Cauchy nulos, podemos aplicar (2.26), assim, sendo u_0 alguma extensão de u para $\mathbb{R}^{1+n}$ obtemos

$$\widehat{D_x u_0}(t, \xi) = \int_0^t \frac{\sin(t-s)|\xi|}{|\xi|} \widehat{D_x w}(s, \xi) ds.$$

Derivando com relação a t e chamando

$$\widehat{w_0}(t, \xi) = |\xi| \widehat{D_x w}(t, \xi) \quad (2.32)$$

obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{D_x u_0}(t, \xi) = \int_0^t \frac{\cos(t-s)|\xi|}{|\xi|} \widehat{w_0}(s, \xi) ds. \quad (2.33)$$

De (2.32) segue que $w_0 \in L^q$, daí que podemos repetir o feito desde (2.26) até (2.31) para (2.33), levando em consideração que na seção anterior também foi provada uma estimativa similar à (2.28) substituindo $\sin$ por $\cos$. Portanto obtemos

$$\|(\partial / \partial t) D_x u\|_{L^q(\Gamma)} \leq M \|w_0\|_{L^q(\Gamma)}$$

com o qual completamos a prova do teorema. ■

Faremos um pequeno comentário sobre a escolha dos valores particulares de p e q no último teorema. Na seção anterior provamos (2.28) para diversos valores de p e q , aqui somente usamos aqueles valores que maximizam a diferença $(1/p) - (1/q)$, sendo esse máximo $2/(n + 1)$. Realmente é uma coincidência que com esses valores específicos seja possível aplicar o *Teorema de Integração Fracionária* à expressão (2.30).

Existência Global em n Dimensões Espaciais

3.1 Formulação do Problema e o Teorema Central

Consideraremos para uma dada potência $p > 1$ termos não lineares F_p que satisfaçam

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^j F_p(u) \right| \leq C_j |u|^{p-j}, \quad j = 0, 1. \quad (3.1)$$

De fato, o caso modelo é $F_p(u) = |u|^p$. Se $\mathbb{R}_+^{1+n} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, e se $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ são fixos, estudaremos o seguinte tipo de problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \square u = F_p(u), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+n} \\ u(0, x) = \varepsilon f(x) \quad , \quad \partial_t u(0, x) = \varepsilon g(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$ representa o operador de D'Alembert em n dimensões espaciais. Estamos interessados em achar, para n dado, o domínio preciso de potências para as quais possamos sempre obter uma solução fraca global de (3.2), se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno. A resposta está intimamente relacionada com a *potência crítica* p_c , a qual é solução da seguinte equação quadrática:

$$(n-1)p_c^2 - (n+1)p_c - 2 = 0 \quad , \quad p_c > 1. \quad (3.3)$$

Estudaremos especificamente a resposta dada por *Georgiev, Lindblad e Sogge* (ver [4]) que se resume no seguinte teorema, o qual constitui o centro desta dissertação:

Teorema 3.1 *Seja $n \geq 3$ e assumamos que F_p , satisfazendo (3.1), é fixo com $p_c < p \leq \frac{n+3}{n-1}$. Então, se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno, (3.2) tem uma única solução (fraca) global u , tal que*

$$(1 + |t^2 - |x|^2|)^{\gamma} u \in L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n}), \quad (3.4)$$

para algum γ que satisfaça

$$\frac{1}{p(p+1)} < \gamma < \frac{(n-1)p - (n+1)}{2(p+1)}. \quad (3.5)$$

Note-se que como $n \geq 3$ a parábola $y = (n-1)x^2 - (n+1)x - 2$ sempre possui duas raízes reais e distintas (uma negativa e outra estritamente maior do que um), então, a potência crítica pedida em (3.3) existe. Portanto, a condição (3.5) imposta sobre γ somente faz sentido se $p > p_c$, pois $p > 1$ e

$$\frac{1}{p(p+1)} < \frac{(n-1)p - (n+1)}{2(p+1)} \iff 0 < (n-1)p^2 - (n+1)p - 2.$$

Por outro lado, veja que no teorema são consideradas potências menores que a potência conformemente invariante $p_{conf} = \frac{n+3}{n-1}$, pois sabe-se que para potências maiores que p_{conf} , a existência global está garantida (ver [11]).

Provaremos o teorema usando certas *estimativas de Strichartz com pesos* para a solução da equação da onda não homogênea

$$\begin{cases} \square w(t, x) = F(t, x) & , \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+n} \\ 0 = w(0, \cdot) = \partial_t(0, \cdot), \end{cases} \quad (3.6)$$

as quais estão estabelecidas no seguinte teorema:

Teorema 3.2 *Suponha que $n \geq 2$ e que w resolve a equação da onda linear não homogênea (3.6), onde o termo forçante satisfaça $F(t, x) = 0$ se $t - |x| \leq 1$. Então,*

$$\|(t^2 - |x|^2)^{\gamma_1} w\|_{L^q(\mathbb{R}_+^{1+n})} \leq C_{q,\gamma} \|(t^2 - |x|^2)^{\gamma_2} F\|_{L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}_+^{1+n})}, \quad (3.7)$$

sempre que $2 \leq q \leq \frac{2(n+1)}{n-1}$, e

$$\gamma_1 < n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \gamma_2 > \frac{1}{q}. \quad (3.8)$$

A estimativa (3.7) pode ser pensada como uma versão com pesos das estimativas de *Strichartz* (ver [22]) para (3.6), isto é, uma versão com pesos de

$$\|w\|_{L^{2(n+1)/(n-1)}(\mathbb{R}_+^{1+n})} \leq C \|F\|_{L^{2(n+1)/(n+3)}(\mathbb{R}_+^{1+n})}.$$

Por ser a estimativa (3.7) justamente a chave na demonstração do teorema principal (3.1) da nossa dissertação, deixaremos sua demonstração para o capítulo seguinte.

3.2 Processo Iterativo

Reescalando a variável temporal por $R > 0$, obtemos a seguinte versão equivalente à estimativa (3.7):

$$\begin{aligned} \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma w\|_{L^q(\mathbb{R}_+^{1+n})} &\leq C_{q,\gamma} \|((t+R)^2 - |x|^2)^{\gamma_2} F\|_{L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}_+^{1+n})} \\ \text{se } F(t, x) &= 0, \quad |x| \geq t + R - 1; \end{aligned} \quad (3.9)$$

aqui, q e γ_j ($j = 1, 2$) se apresentam como no teorema (3.2).

Utilizaremos esta versão na demonstração do teorema (3.1) mediante a prova de um *processo iterativo*, assim resumido:

Lema 3.3 *Seja $u_{-1} \equiv 0$, e para $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, definamos u_m recursivamente por*

$$\begin{cases} \square u_m = F_p(u_{m-1}) \\ u_m(0, x) = \varepsilon f(x) \quad , \quad \partial_t u_m(0, x) = \varepsilon g(x), \end{cases} \quad (3.10)$$

onde $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ são fixos e se anulam fora da bola de raio $R - 1$ ($R > 1$), com centro na origem. Ademais, considerando $p_c < p \leq \frac{n+3}{n-1}$, γ tal que $\frac{1}{p(p+1)} < \gamma < \frac{(n-1)p - (n+1)}{2(p+1)}$ e definindo

$$\begin{aligned} A_m &= \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_m\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n})} \\ B_m &= \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_m - u_{m-1})\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n})}; \end{aligned}$$

então, existe $\varepsilon_0 > 0$ que depende de p, F_p, γ e dos dados f, g , tal que para $m = 0, 1, 2, \dots$

$$A_m \leq 2A_0 \quad \text{e} \quad 2B_{m+1} \leq B_m, \quad \text{se } \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (3.11)$$

Prova. Devido às condições impostas sobre o suporte dos dados, considerações sobre o domínio de dependência implicam que u_m e também $F_p(u_m)$ devem se anular se $|x| > t + R - 1$. Sabe-se também que a solução u_0 da equação da onda $\square u_0 = 0$ com os dados anteriores (ver [8]), satisfaz

$$u_0 = O\left(\varepsilon(1+t)^{-(n-1)/2}(1+|t-|x||)^{-(n-1)/2}\right)$$

designando por $\Gamma = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^{1+n} / |x| \leq t + R - 1\}$, temos

$$\begin{aligned} A_0 &= \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_0\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n})} \\ &= \left[\int_0^\infty \int_\Gamma \left\{ |(t+R)^2 - |x|^2|^\gamma |u_0(t, x)| \right\}^{p+1} dx dt \right]^{1/(p+1)} \\ &\leq M\varepsilon \left[\int_0^\infty \int_\Gamma \left\{ |(t+R)^2 - |x|^2|^\gamma (1+t)^{-(n-1)/2} (1+|t-|x||)^{-(n-1)/2} \right\}^{p+1} dx dt \right]^{1/(p+1)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, é fácil verificar que para $(t, x) \in \Gamma$ são válidas

$$\begin{aligned} (t+R)^2 - |x|^2 &\geq 1, \\ (1+t)^{-(n-1)/2} &< C_1(t+R+|x|)^{-(n-1)/2}, \\ (1+|t-|x||)^{-(n-1)/2} &< C_2(t+R-|x|)^{-(n-1)/2}, \end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes que dependem de R e n .

Também sabemos que $\gamma < \frac{(n-1)p-(n+1)}{2(p+1)}$. Logo, existe um $\delta > 0$, tal que $\gamma = \frac{(n-1)p-(n+1)}{2(p+1)} - \delta$. Isso somado ao que foi exposto anteriormente nos leva à

$$A_0 \leq MC_1 C_2 \varepsilon \underbrace{\left[\int_0^\infty \int_\Gamma (t+R-|x|)^{-n-\delta(p+1)} (t+R+|x|)^{-n-\delta(p+1)} dx dt \right]}_I^{1/(p+1)}.$$

Fazendo uma mudança de variável para coordenadas polares $x = r\omega$, $\omega \in S^{n-1}$ e $dx = r^{n-1} dr d\omega$ e estimando superiormente obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} \int_0^{t+R-1} (t+R-r)^{-n-\delta(p+1)} (t+R+r)^{-n-\delta(p+1)} r^{n-1} dr d\omega dt \\ &= \int_{|\omega|=1} \int_0^\infty \int_0^{t+R-1} \frac{r^{n-1}}{(t+R+r)^{n-1}} \cdot \frac{1}{(t+R+r)^{1+\delta(p+1)} (t+R-r)^{n+\delta(p+1)}} dr dt d\omega \\ &\leq \int_{|\omega|=1} \int_0^\infty \frac{1}{(t+R)^{1+\delta(p+1)}} \int_0^{t+R-1} \frac{dr}{(t+R-r)^{n+\delta(p+1)}} dt d\omega. \end{aligned}$$

Na última integral em r fazemos $\xi = t + R - r - 1$, resultando

$$\int_0^{t+R-1} \frac{dr}{(t+R-r)^{n+\delta(p+1)}} = \int_0^{t+R-1} \frac{d\xi}{(1+\xi)^{n+\delta(p+1)}} \leq \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1+\xi)^{n+\delta(p+1)}} = K.$$

Assim, a integral I é convergente, pois a esfera S^{n-1} é compacta, e a integral $\int_0^\infty \frac{dt}{(t+R)^{1+\delta(p+1)}}$ é, de fato, convergente.

Concluindo, chegamos à importante estimativa

$$A_0 \leq C_0 \varepsilon. \quad (3.12)$$

Para $j, m > 0$ vale

$$\begin{aligned} \square(u_{m+1} - u_{j+1}) &= \square u_{m+1} - \square u_{j+1} = F_p(u_m) - F_p(u_j) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} F_p(\tau u_m + (1-\tau)u_j) d\tau \\ &= (u_m - u_j) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} F_p(\tau u_m + (1-\tau)u_j) d\tau \\ &= (u_m - u_j) V_p(u_m, u_j). \end{aligned}$$

Pois bem, lembrando a condição (3.1) imposta sobre F_p , concluímos que

$$\square(u_{m+1} - u_{j+1}) = V_p(u_m, u_j)(u_m - u_j), \quad \text{onde } V_p(u_m, u_j) = O(|u_m| + |u_j|)^{p-1}.$$

Este problema tem dados de Cauchy iguais a zero devido aos dados de Cauchy do problema (3.10). Além disso, fazendo $q = p+1$, nossas hipóteses sobre γ e p , resultam em

$$\begin{cases} \gamma > \frac{1}{p(p+1)} & \implies \gamma p > \frac{1}{q} \\ \gamma < \frac{(n-1)p-(n+1)}{2(p+1)} & \implies \gamma_1 < n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2} \\ 1 \leq p \leq \frac{n+3}{n-1} & \implies 2 \leq q \leq \frac{2(n+1)}{n-1}. \end{cases}$$

É evidente que podemos aplicar a este problema o teorema (3.2) na versão (3.9) com $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma p$ e $q = p+1$, já que para todo m e j , $u_m - u_j$ anula-se quando $|x| > t + R - 1$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} &\|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_{m+1} - u_{j+1})\|_{L^{p+1}} \\ &\leq C_1 \|((t+R)^2 - |x|^2)^{p\gamma} V_p(u_m, u_j)(u_m - u_j)\|_{L^{(p+1)/p}} \\ &= C_1 \|((t+R)^2 - |x|^2)^{(p-1)\gamma} V_p(u_m, u_j)((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_m - u_j)\|_{L^{(p+1)/p}} \\ &\leq C_1 \|((t+R)^2 - |x|^2)^{(p-1)\gamma} V_p(u_m, u_j)\|_{L^{(p+1)/(p-1)}} \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_m - u_j)\|_{L^{p+1}}. \end{aligned}$$

A passagem anterior resultou de uma aplicação direta da *Desigualdade de Hölder* (ver Apêndice C), pois $\frac{p}{p+1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p+1}$ implica $r = \frac{p+1}{p-1}$. Agora, estimando a primeira norma e lembrando que $V_p(u_m, u_j) = O(|u_m| + |u_j|)^{p-1}$, chegamos a

$$\begin{aligned} & \|((t+R)^2 - |x|^2)^{(p-1)\gamma} V_p(u_m, u_j)\|_{L^{(p+1)/(p-1)}} \\ & \leq C_2 \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma |u_m| + ((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma |u_j|\|_{L^{(p+1)/(p-1)}}^{p-1} \\ & \leq C_2 \left(\|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_m\|_{L^{p+1}} + \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_j\|_{L^{p+1}} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Substituindo essa estimativa pela principal resulta

$$\begin{aligned} & \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_{m+1} - u_{j+1})\|_{L^{p+1}} \\ & \leq C \left(\|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_m\|_{L^{p+1}} + \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_j\|_{L^{p+1}} \right)^{p-1} \\ & \quad \times \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_m - u_j)\|_{L^{p+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, pela definição de A_m , essa estimativa se resume em

$$\|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_{m+1} - u_{j+1})\|_{L^{p+1}} \leq C \left(A_m + A_j \right)^{p-1} \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_m - u_j)\|_{L^{p+1}}. \quad (3.13)$$

A partir desse resultado, demonstraremos a primeira parte do lema por indução. Para $m = 0$ é óbvio que $A_0 \leq 2A_0$; só resta provar que se $A_k \leq 2A_0$, então $A_{k+1} \leq 2A_0$, para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Como $u_{-1} \equiv 0$, temos que $A_{-1} = 0$; assim, fazendo $j = -1$ em (3.13) é válida

$$\|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_{k+1} - u_0)\|_{L^{p+1}} \leq C A_k^{p-1} \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_k\|_{L^{p+1}}.$$

Daí, $A_{k+1} \leq A_0 + C A_k^{p-1} A_k$; mas pela nossa hipótese indutiva $A_k \leq 2A_0$. Além disso, como (3.12), afirma que $A_0 \leq C_0 \varepsilon$, podemos tomar um ε_0 , tal que para $\varepsilon < \varepsilon_0$: $A_k^{p-1} \leq (2C_0 \varepsilon_0)^{p-1}$. Porém, esse ε_0 pode ser tão pequeno que $C(2C_0 \varepsilon_0)^{p-1} \leq 1/2$; assim, $A_{k+1} \leq A_0 + \frac{1}{2} 2A_0 = 2A_0$. Demonstramos, dessa forma, a primeira parte do lema.

Provemos a segunda parte. Considerando em (3.13), $j = k-1$ e $m = k$ temos

$$\|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_{k+1} - u_k)\|_{L^{p+1}} \leq C \left(A_k + A_{k-1} \right)^{p-1} \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_k - u_{k-1})\|_{L^{p+1}},$$

ou seja, $B_{k+1} \leq C(A_k + A_{k-1})^{p-1} B_k$. Pela primeira parte do lema, já provada, tem-se que existe ε_0 , tal que para $\varepsilon < \varepsilon_0$, $A_k \leq 2A_0 \leq 2C_0 \varepsilon_0$, logo $B_{k+1} \leq C(4C_0 \varepsilon_0)^{p-1} B_k$.

3.3 Demonstração do Teorema Central

33

Por último, podemos tomar ε_0 suficientemente pequeno, tal que $C(4C_0\varepsilon_0)^{p-1} \leq \frac{1}{2}$, para assim concluir, como queríamos demonstrar, que $2B_{k+1} \leq B_k$.

Assim, o lema fica integralmente demonstrado. ■

3.3 Demonstração do Teorema Central

Veremos nesta seção como é possível a demonstração do teorema (3.1) a partir do lema (3.3).

Prova. Começemos provando a parte de existência.

Se $\varepsilon > 0$ em (3.2) for pequeno, os u_m forem como em (3.10) e considerando $m > n$, $m = n + k$, temos

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_{L^{p+1}} &\leq \|u_{n+k} - u_{n+k-1}\|_{L^{p+1}} + \dots + \|u_{n+1} - u_n\| \\ &\leq B_{n+k} + \dots + B_{n+1} \quad \text{pois } ((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma \geq 1. \end{aligned}$$

Conforme provamos antes $2B_{m+1} \leq B_m$ e $B_0 = A_0 \leq C_0\varepsilon_0$; logo, para $\varepsilon < \varepsilon_0$ é fácil deduzir que $B_m \leq \frac{1}{2^m} A_0$. Tal dedução, ligada à estimativa anterior, nos fornece

$$\|u_m - u_n\|_{L^{p+1}} \leq \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} \right) C_0\varepsilon_0.$$

Isto é, $\{u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n})$, o qual é um espaço completo, daí existir um $u \in L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n})$, tal que $u_m \rightarrow u$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n})$; e é claro que essa convergência também se dá no sentido fraco.

Vimos que $F_p(u_{m+1}) - F_p(u_m) = V_p(u_{m+1}, u_m)(u_{m+1} - u_m)$, onde $V_p(u_{m+1}, u_m) = O(|u_{m+1}| + |u_m|)^{p-1}$, então

$$|F_p(u_{m+1}) - F_p(u_m)| \leq C_1(|u_{m+1}| + |u_m|)^{p-1} |u_{m+1} - u_m|.$$

Com isso podemos estimar a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \|F_p(u_{m+1}) - F_p(u_m)\|_{L^{(p+1)/p}} \\
& \leq C_1 \|(|u_{m+1}| + |u_m|)^{p-1} (u_{m+1} - u_m)\|_{L^{(p+1)/p}} \\
& \leq C_1 \|(|u_{m+1}| + |u_m|)^{p-1}\|_{L^{(p+1)/p}} \|u_{m+1} - u_m\|_{L^{p+1}} \\
& \leq C_1 \| |u_{m+1}| + |u_m| \|_{L^{p+1}}^{p-1} \|u_{m+1} - u_m\|_{L^{p+1}} \\
& \leq C_1 \left(\|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_{m+1}\|_{L^{p+1}} + \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u_m\|_{L^{p+1}} \right)^{p-1} \\
& \quad \times \|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma (u_{m+1} - u_m)\|_{L^{p+1}} \\
& \leq C_1 \left(A_{m+1} + A_m \right)^{p-1} B_{m+1}.
\end{aligned}$$

Nesse cálculo usamos tanto a desigualdade de Hölder como o fato $((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma \geq 1$. Logo, utilizando as já conhecidas estimativas para A_m e B_m , obtemos

$$\|F_p(u_{m+1}) - F_p(u_m)\|_{L^{(p+1)/p}} = O\left(\frac{1}{2^m}\right).$$

Essa última, por sua vez, nos leva a concluir que

$$\|F_p(u_m) - F_p(u_n)\|_{L^{(p+1)/p}} \leq K \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} \right).$$

Assim, provamos que a seqüência $\{F_p(u_m)\}$ é de Cauchy em $L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}_+^{1+n})$, o qual é um espaço completo; isto é, existe $V \in L^{(p+1)/p}$, tal que $F_p(u_m) \rightarrow V$. Portanto, passando ao limite em (3.10) e considerando ε suficientemente pequeno, provamos a existência da solução fraca.

Provaremos a unicidade dessa solução e deixaremos para o final a demonstração de que essa, de fato, satisfaz (3.4).

Demonstraremos, então, que $V = F_p(u)$. Como vimos anteriormente, podemos chegar à expressão

$$|F_p(u_m) - F_p(u)| \leq C(|u_m| + |u|)^{p-1} |u_m - u|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|F_p(u_m) - F_p(u)\|_{L^{(p+1)/p}} & \leq C \|(|u_m| + |u|)^{p-1} (u_m - u)\|_{L^{(p+1)/p}} \\
& \leq C \left(\| |u_m| \|_{L^{p+1}} + \| |u| \|_{L^{p+1}} \right)^{p-1} \|u_m - u\|_{L^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Assim, como $u_m \rightarrow u$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n})$, temos também que $F_p(u_m) \rightarrow F_p(u)$ em $L^{(p+1)/p}(\mathbb{R}_+^{1+n})$ e, portanto, $V = F_p(u)$, como queríamos demonstrar.

Finalmente como $A_m \leq 2A_0 \leq 2C_0\varepsilon_0$, tomando limite na expressão do A_m , tem-se que

$$\|((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u\|_{L^{p+1}} \leq 2C_0\varepsilon_0.$$

Isso relacionado ao fato de que $1 + |t^2 - |x|^2| \leq |(t+R)^2 - |x|^2|$ para $R > 1$, demonstra que, para ε suficientemente pequeno, existe uma única solução fraca global do problema (3.2), tal que

$$((t+R)^2 - |x|^2)^\gamma u \in L^{p+1}(\mathbb{R}_+^{1+n}).$$

Eis, portanto, a nossa demonstração cabal do teorema principal. ■

Estimativas de Strichartz com Pesos

Neste capítulo daremos as idéias principais para a demonstração do Teorema (3.2). Para isso devemos centrar nosso trabalho na prova da estimativa (3.4).

4.1 Roteiro da Demonstração

Notemos que devido ao *Teorema de Interpolação complexa de Stein* (ver apêndice A), basta provar tal estimativa para os casos $q = 2(n+1)/(n-1)$ e $q = 2$. Observemos que para esses valores $q/(q-1)$ vale $2(n+1)/(n+3)$ e 2 respectivamente. Especificando, devemos provar que para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \|(t^2 - |x|^2)^{\gamma_1} w\|_{L^{2(n+1)/(n-1)}(\mathbb{R}_+^{1+n})} &\leq C_\gamma \|(t^2 - |x|^2)^{\gamma_2} F\|_{L^{2(n+1)/(n+3)}(\mathbb{R}_+^{1+n})}, \\ &\text{se } \gamma_1 < (n-1)/2(n+1) < \gamma_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

e que

$$\|(t^2 - |x|^2)^{-\gamma} w\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{1+n})} \leq C_\gamma \|(t^2 - |x|^2)^\gamma F\|_{L^2(\mathbb{R}_+^{1+n})}, \quad \text{se } \gamma > 1/2, \quad (4.2)$$

sempre que $F(t, x) = 0$ quando $t - |x| < 1$.

Observemos que (4.1) é uma versão com pesos da *Desigualdade de Strichartz* (2.26).

A estimativa L^2 seguirá essencialmente de uma dupla aplicação do *Teorema do Traço*

de Sobolev.

Para a prova de (4.1) aproveitaremos as hipóteses feitas sobre os suportes de w e F e o fato de que os pesos são bem comportados. Desta maneira, temos que sobre as hipóteses anteriores $t^2 - |x|^2 \geq t$. Com esse fato, concluiremos que basta demonstrar uma variante de (4.1) na qual a norma da esquerda é tomada sobre faixas diádicas, onde $T/2 \leq t \leq T$ para T grande. Fazendo isso, temos que nossa estimativa se divide em duas partes. A parte mais simples está relacionada com a contribuição da F para w em, digamos, $t \geq T/10$. Neste caso, usando geometria elementar e o fato de que os pesos são invariantes por *Transformações de Lorentz*, é possível reduzir esse problema à demonstração de uma estimativa que segue diretamente do cálculo em L^2 de *Operadores Integrais de Fourier* (ver [6]). A análise sobre as contribuições da F para tempos relativamente pequenos é muito mais complexo, pois os operadores integrais de Fourier que nela aparecem, se degeneram progressivamente a medida que $T \rightarrow \infty$, assim, nesse caso, não é possível aplicar o teorema de Hörmander. Afortunadamente, esses operadores têm sido estudados por Sogge e Stein em [16], trabalho no qual os pesos são usados para compensar a degeneração desses operadores. Estes resultados somente podem ser usados no trabalho com a alta frequência desses operadores, e é por isso que a demonstração da segunda parte é mais complexa do que a primeira. Para trabalhar com a baixa frequência são usadas algumas propriedades geométricas e estimativas de *fase estacionária*.

A continuação, somente estudaremos a parte mais simples, antes mencionada, da demonstração de (4.1), sugerindo ao leitor interessado a revisão de [4] para os outros casos.

4.2 Contribuição de F para tempos relativamente grandes

Como mencionamos na seção anterior, devido a que os pesos que aparecem na parte esquerda de (4.1) são menores que os pesos da direita, podemos reduzir nosso problema a demonstrar estimativas onde as normas da esquerda sejam tomadas sobre

conjuntos, para os quais t e $t - |x|$ estejam em intervalos diádicos. Assim, consideremos o caso para o qual $T/2 \leq t \leq T$, para algum $T \geq 2$, e tal que (t, x) satisfaça $|x| \leq t/2$. Nosso primeiro passo será estabelecer a validade de uma variante da estimativa (4.1).

Proposição 4.1 *Sejam $n \geq 2$ e $q = 2(n+1)/(n-1)$, e assumamos que $F(t, x) = 0$ quando $t^2 - |x|^2 \leq 1$. Então se w é a solução da equação da onda não homogênea $\square w = F$ em $\mathbb{R}_+^{1+n}$ com dados de Cauchy nulos em $t = 0$,*

$$\|(t^2 - |x|^2)^{1/q} w\|_{L^q(\{(t,x): |x| \leq t/2, T/2 \leq t \leq T\})} \leq C(\log T)^{1/q} \|(t^2 - |x|^2)^{1/q} F\|_{L^{q/(q-1)}}, \quad (4.3)$$

onde C depende somente da dimensão e $T \geq 2$.

Prova. Nesta demonstração apenas levaremos em conta a dimensão espacial ímpar. A demonstração para dimensões pares requer algumas formalidades adicionais, mas os resultados também são válidos.

Sejam $w_T(t, x) = w(Tt, Tx)$ e $F_T(t, x) = T^2 F(Tt, Tx)$, dessa forma obtemos $\square w_T = F_T$. De fato, provar (4.3) é equivalente a provar

$$\|w_T\|_{L^q(\{(t,x): |x| \leq t/2, 1/2 \leq t \leq 1\})} \leq C(\log T)^{1/q} \|(t^2 - |x|^2)^{1/q} F_T\|_{L^{q/(q-1)}}. \quad (4.4)$$

Notemos que $F_T = 0$ se $t^2 - |x|^2 \leq 1/T^2$, também levando em consideração o domínio de dependência, podemos assumir que $F_T(t, x) = 0$ se $t < 1/8$. Devido às considerações realizadas, basta mostrar (4.4) assumindo que F_T se anula para $t^2 - |x|^2 \leq 1/T^2$ ou $t \leq 1/8$. As dificuldades na demonstração aparecem no momento em que consideramos (t, x) perto do *cone de luz*, pois nesse caso os pesos na direita da estimativa são pequenos. Ademais, ao considerar $t - |x| \geq 1/8$ no suporte de F_T , vemos que a estimativa segue diretamente da versão sem pesos das estimativas de *Strichartz* (2.26). Portanto, podemos assumir para provar (4.3) que

$$F_T(t, x) = 0 \text{ se } t \leq 1/8, \text{ ou } t^2 - |x|^2 \leq 1/T^2, \text{ ou } t - |x| \geq 1/8. \quad (4.5)$$

Estabelecemos a última hipótese com o intuito de garantir que a diferença $t - s$ seja limitada inferiormente quando $t \geq s$, $(s, y) \in \text{supp}(F_T)$ e tomando (t, x) como no

lado esquerdo de (4.4).

Agora, demonstraremos a parte principal da estimativa. Lembrando que $\widehat{F}(s, \xi)$ representa a transformada de Fourier na variável espacial, temos

$$w_T(t, x) = (2\pi)^{-n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} |\xi|^{-1} \sin((t-s)|\xi|) \widehat{F}_T(s, \xi) d\xi ds.$$

Logo, se considerarmos a família

$$(W^z F_T)(t, x) = (z - (n+1)/2) e^{z^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} |\xi|^{-z} \sin((t-s)|\xi|) \widehat{F}_T(s, \xi) d\xi ds.$$

por interpolação complexa, será suficiente demonstrar

$$\|W^z F_T\|_{L^\infty(|x| \leq t/2, 1/2 \leq t \leq 1)} \leq C \|F_T\|_{L^1}, \quad \operatorname{Re}(z) = (n+1)/2, \quad (4.6)$$

e

$$\|W^z F_T\|_{L^2(|x| \leq t/2, 1/2 \leq t \leq 1)} \leq C (\log(T))^{1/2} \|(t^2 - |x|^2)^{1/2} F_T\|_{L^2}, \quad \operatorname{Re}(z) = 0. \quad (4.7)$$

Como $t-s$ é limitada inferiormente, a estimativa (4.6) segue diretamente da seguinte:

$$\left| y e^{-y^2} \int e^{ix \cdot \xi + it|\xi|} |\xi|^{-(n+1)/2 + iy} d\xi \right| \leq C_n t^{-(n-1)/2}. \quad (4.8)$$

Na prova da estimativa L^2 note-se que $W^z = (W_+^z - W_-^z)/2i$, onde

$$\begin{aligned} (W_\pm^z F)(t, x) &= (z - (n+1)/2) e^{z^2} \\ &\quad \times \iiint e^{i(x-y) \cdot \xi \pm i(t-s)|\xi|} F_T(s, y) |\xi|^{-z} d\xi dy ds \\ &= (z - (n+1)/2) e^{z^2} \\ &\quad \times \int_{1/T}^{1/8} \iint e^{i(x-y) \cdot \xi \pm i(t-\tau-|y|)|\xi|} F_T(|y| + \tau, y) |\xi|^{-z} d\xi dy d\tau. \end{aligned}$$

Aqui, estamos assumindo que (t, x) é tomado como no lado esquerdo de (4.7), logo, s é menor que t no suporte do primeiro integrando. Além disso, pela desigualdade de Hölder (ver apêndice C), a última expressão é dominada por $(\log T)^{1/2}$ vezes

$$\left(\int \left| \tau^{1/2} (z - (n+1)/2) e^{z^2} \iint e^{i(x-y) \cdot \xi \pm i(t-\tau-|y|)|\xi|} F_T(|y| + \tau, y) |\xi|^{-z} d\xi dy \right|^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Já que $\tau = t - |y|$ concluímos que é suficiente provar que para $\tau \leq 1/8$ e $1/2 \leq t \leq 1$ são válidas as seguintes cotas uniformes:

$$\|\widetilde{W}_\pm^z f(t - \tau, \cdot)\|_{L^2(\{x: |x| \leq t/2\})} \leq C \|f\|_{L^2}, \quad \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{supp}(f) \subset \{y: 1/8 \leq |y| < t - \tau\}, \quad (4.9)$$

se

$$(\widetilde{W}_\pm^z f)(t - \tau, x) = (z - (n + 1)/2) e^{z^2} \iint e^{i(x-y) \cdot \xi \pm i(t-\tau-|y|)|\xi|} f(y) |\xi|^{-z} d\xi dy.$$

Devido a (4.5) assumimos que f se anula para $|y| < 1/8$.

Como a fase

$$\varphi_\pm = (x - y) \cdot \xi \pm (t - \tau - |y|)|\xi|,$$

satisfaz para $\xi \neq 0$

$$\det \partial^2 \varphi_\pm / \partial y_j \partial \xi_k \neq 0 \text{ e } \nabla_y \varphi_\pm \neq 0, \text{ se } \nabla_\xi \varphi_\pm = 0.$$

a estimativa (4.9) deriva de uma aplicação direta do *teorema de Hörmander* (ver [6]).

Com isso demonstramos a proposição. ■

Vejamos como é possível usar (4.3) para estimar w se a norma é tomada sobre o conjunto onde $T/2 \leq t \leq T$ e $F(t, x)$ se anula quando t for menor que algum múltiplo prefixado de T . Lembremos que na hipótese do teorema (3.2) vale a condição $|x| < t - 1$ no suporte da F .

Especificando, se $w = w^1 + w^0$, onde $\square w^1 = F^1$ com dados de Cauchy nulos, e se $F^1(t, x) = F(t, x)$ para $t \geq T/10$ e zero em outro caso, afirmamos que, para $q = 2(n + 1)/(n - 1)$,

$$\begin{aligned} & \| (t^2 - |x|^2)^{1/q-\varepsilon} w^1 \|_{L^q(\{(t,x): T/2 \leq t \leq T\})} \\ & \leq CT^{-2\varepsilon} (\log T)^{2/q} \| (t^2 - |x|^2)^{1/q+\varepsilon} F^1 \|_{L^{q/(q-1)}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notemos que tanto w^1 e F^1 como w e F se anulam quando $t - |x| \leq 1$.

Procedemos a refinar a estimativa na variável $t - |x|$. Nesse sentido percebamos que (4.10) é consequência da desigualdade:

$$\| (t^2 - |x|^2)^{1/q} w^1 \|_{L^q(T/2 \leq t \leq T, 2^{k-1} \leq t - |x| \leq 2^k)} \leq C (\log T)^{1/q} \| (t^2 - |x|^2)^{1/q} F^1 \|_{L^{q/(q-1)}}, \quad (4.11)$$

aqui é necessário impor que $2^k \leq 4T$.

Por sua vez mostrar (4.11) é equivalente a provar

$$\| (t^2 - |x|^2)^{1/q} w_k^1 \|_{L^q(T_k/2 \leq t \leq T_k, 1/2 \leq t - |x| \leq 1)} \leq C (\log T)^{1/q} \| (t^2 - |x|^2)^{1/q} F_k^1 \|_{L^{q/(q-1)}}. \quad (4.12)$$

onde $T_k = T/2^k$, $w_k^1(t, x) = w^1(2^k t, 2^k x)$ e $F_k^1(t, x) = 2^{2k} F^1(2^k t, 2^k x)$.

Finalmente diremos que (4.12) é obtida como resultado da aplicação de certas estimativas, as quais provêm de propriedades da solução fundamental do *Operador de D'Alembert* e da métrica Lorentziana.

Teoremas de Interpolação

A.1 Teorema de Interpolação de M. Riesz

Seja (U, μ) um espaço de medida, sendo μ sempre uma medida positiva. Denotamos por $L_p(U, d\mu)$ o espaço de Lebesgue de todas as classes de equivalência de funções μ -mensuráveis de valores complexos sobre U , tais que

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_U |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

é finita. Aqui $1 \leq p < \infty$. No caso limite, $p = \infty$, L_p está formado por todas as funções μ -mensuráveis e limitadas. Assim, escrevemos

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_U |f(x)|.$$

Seja T um operador linear de $L_p = L_p(U, d\mu)$ em $L_q = L_q(V, d\nu)$. Isso significa que $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$. Escreveremos

$$T : L_p \rightarrow L_q$$

se, em adição, T é limitado, isto é, se

$$M = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{L_q}}{\|f\|_{L_p}}$$

é finita. Chama-se M a norma do operador T .

Teorema A.1 *Assuma que $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ e que*

$$T : L_{p_0}(U, d\mu) \rightarrow L_{q_0}(V, d\nu)$$

com norma M_0 , e que

$$T : L_{p_1}(U, d\mu) \rightarrow L_{q_1}(V, d\nu)$$

com norma M_1 . Então,

$$T : L_p(U, d\mu) \rightarrow L_q(V, d\nu)$$

com norma

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

sempre que $0 < \theta < 1$ e

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

A.2 Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz

Considere novamente o espaço de medida $(U, d\mu)$. Se f é uma função μ -mensurável de valores complexos (ou reais) finita, exceto em um conjunto de medida nula, introduzimos a *função de distribuição* $m(\sigma, f)$ definida por

$$m(\sigma, f) = \mu(\{x : |f(x)| > \sigma\}).$$

Desde que assumamos que μ é positiva, $m(\sigma, f)$ será uma função de valores reais (ou reais estendidos) de σ , definida sobre o eixo real positivo $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Está claro que $m(\sigma, f)$ é não crescente. Além disso, temos

$$\|f\|_{L_p} = \left(p \int_0^\infty m(\sigma, f) \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf\{\sigma : m(\sigma, f) = 0\}.$$

Usando essa função de distribuição, introduzimos os *espaços L_p fracos* denotados por L_p^* . O espaço L_p^* , $1 \leq p < \infty$ está formado por todas as f , tais que

$$\|f\|_{L_p^*} = \sup_\sigma \sigma m(\sigma, f)^{1/p} < \infty.$$

No caso limite $p = \infty$, tomamos $L_\infty^* = L_\infty$. Note-se que $\|f\|_{L_p^*}$ não é uma norma se $1 \leq p < \infty$. No entanto, para $p > 1$ é possível definir uma *norma* em L_p^* que o torna um *Espaço de Banach* (ver [1]). A relação

$$\|f\|_{L_p} = \sup_{\sigma} \left(\int_{|f(x)| > \sigma} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \geq \sup_{\sigma} \sigma m(\sigma, f)^{1/p} = \|f\|_{L_p^*}$$

implica diretamente que $L_p \subset L_p^*$.

Por um operador linear limitado de L_p em L_q^* entenderemos um operador linear entre esses espaços que satisfaz $\|Tf\|_{L_q^*} \leq C\|f\|_{L_p}$ e chamaremos *norma de T* ao ínfimo do conjunto de todas aquelas constantes C . Todo esse comentário resume-se em $T : L_p \rightarrow L_q^*$.

Teorema A.2 *Consideremos $p_0 \neq p_1$ e que*

$$T : L_{p_0}(U, d\mu) \rightarrow L_{q_0^*}(V, d\nu)$$

com norma M_0^ , e que*

$$T : L_{p_1}(U, d\mu) \rightarrow L_{q_1^*}(V, d\nu)$$

com norma M_1^ .*

Para $0 < \theta < 1$ consideremos

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

e assumamos que

$$p \geq q.$$

Então,

$$T : L_p(U, d\mu) \rightarrow L_q(V, d\nu)$$

com norma M , tal que

$$M \leq C_\theta (M_0^*)^{1-\theta} (M_1^*)^\theta.$$

A.3 Teorema de Interpolação de Stein

Enunciaremos o célebre resultado obtido por Elias M. Stein (ver [18]).

Diremos que uma função $\Phi(z)$ analítica na faixa aberta $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ e contínua na

faixa fechada tem crescimento admissível se

$$\sup_{|y| \leq r} \sup_{0 \leq x \leq 1} \log |\Phi(x + iy)| \leq Ae^{ar}, \quad \text{para } a < \pi. \quad (\text{A.1})$$

Dados dois espaços de medida M e N com medidas dm e dn respectivamente e uma família de operadores lineares T_z (z é um parâmetro complexo), diremos tratar-se de uma *família analítica de operadores* se ela tiver as seguintes propriedades:

- Para cada z , T_z é um operador linear de *funções simples* sobre M em funções mensuráveis sobre N . Entenda-se por função simples sobre M aquelas funções que possuem no máximo um número finito de valores não nulos quando atuam sobre conjuntos de medida finita de M .
- Sendo ψ uma função simples sobre M e ϕ uma função simples sobre N , então, $\Phi(z) = \int T_z(\psi)\phi dn$ é analítica em $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ e contínua em $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$.

Também diremos que a família T_z tem crescimento admissível, se $\Phi(z) = \int T_z(\psi)\phi dn$ tem crescimento admissível no sentido de (A.1). Esclarecemos, no entanto, que as constantes A e a podem depender de ψ e ϕ .

Teorema A.3 *Seja T_z uma família analítica de operadores lineares com crescimento admissível definida na faixa $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$. Suponhamos que*

$$1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty,$$

e que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2} \quad \text{onde } 0 \leq t \leq 1. \quad (\text{A.2})$$

Ademais, para qualquer função simples f são válidas

$$\|T_{iy}(f)\|_{q_1} \leq A_0(y)\|f\|_{p_1}, \quad (\text{A.3})$$

e

$$\|T_{1+iy}(f)\|_{q_2} \leq A_1(y)\|f\|_{p_2}. \quad (\text{A.4})$$

Finalmente impomos que

$$\log |A_i(y)| \leq Ae^{a|y|}, \quad a < \pi \text{ para } i = 0, 1. \quad (\text{A.5})$$

Daí, podemos concluir que

$$\|T_t(f)\|_q \leq A_t \|f\|_p, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\log A_t = \int_{-\infty}^{+\infty} w(1-t, y) \log A_0(y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} w(t, y) \log A_1(y) dy$$

e w é definido por

$$w(t, y) = \frac{1/2 \tan(\pi t/2)}{[\tan^2(\pi t/2) + \tanh^2(\pi y/2)] \cosh^2(\pi y/2)}.$$

Teorema de Extensão de Calderón

B.1 Espaços de Sobolev de Ordem Inteira

Definiremos estes espaços sobre um domínio arbitrário $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como subespaços de diversos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição B.1 *Dado um número inteiro não negativo m e $1 \leq p \leq \infty$, definimos o funcional $\|\cdot\|_{m,p}$, como segue:*

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &= \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{m,\infty} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty, \end{aligned}$$

onde u é qualquer função para a qual o lado direito da definição faz sentido e $\|\cdot\|_p$ representa a norma em $L^p(\Omega)$.

Notemos que em ambos os casos estamos definindo uma norma sobre qualquer espaço vetorial de funções, onde o lado direito é finito, lembrando que funções nesses espaços devem ser identificadas no sentido μ -q.s..

Definição B.2 *Definimos o espaço*

$$W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde as derivadas são tomadas no sentido fraco.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da sua respectiva norma, dada na definição (B.1), é chamado de *Espaço de Sobolev*.

Pode-se demonstrar que $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach* e, caso for necessário, sua norma será denotada por $\|u\|_{m,p,\Omega}$ no lugar de $\|u\|_{m,p}$.

Definição B.3 *Dados m e p , diremos que um operador El , agindo de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, é um (m,p) -operador de extensão simples para Ω , se existir uma constante $K = K(m,p)$, tal que para qualquer $u \in W^{m,p}(\Omega)$, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $Eu(x) = u(x) \quad \mu\text{-q.s. em } \Omega,$
2. $\|Eu\|_{m,p,\mathbb{R}^n} \leq K\|u\|_{m,p,\Omega}.$

A existência de um (m,p) -operador de extensão simples para um domínio Ω , garante que $W^{m,p}(\Omega)$ herde várias das propriedades que $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ possui. Por exemplo, se conhecemos a imersão $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, então podemos inferir a imersão $W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ pelo cálculo seguinte:

$$\|u\|_{0,q,\Omega} \leq \|Eu\|_{0,p,\mathbb{R}^n} \leq K_1 \|Eu\|_{m,p,\mathbb{R}^n} \leq K_1 K \|u\|_{m,p,\Omega}.$$

B.2 O Teorema de Extensão de Calderón

Definição B.4 *Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, uma bola aberta B_1 com centro em x e uma bola aberta B_2 que não contém ao ponto x , definimos o cone finito com vértice em x , como o conjunto*

$$C_x = B_1 \cap \{x + \lambda(y - x) : y \in B_2, \lambda > 0\}.$$

Denotaremos por $x + C_0 = \{x + y : y \in C_0\}$ o cone finito com vértice em x obtido da translação *paralela* de um cone finito C_0 com vértice na origem.

Um cobrimento aberto $\mathcal{O}$ de um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é chamado *localmente finito*, se qualquer conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ intersecta no máximo um número finito de elementos de $\mathcal{O}$.

Agora definimos uma *propriedade de regularidade* para um Ω aberto.

Definição B.5 Diremos que Ω possui a *propriedade uniforme de cone*, se existir um *cobrimento aberto localmente finito* $\{U_j\}$ da fronteira $\partial\Omega$, de Ω , e uma correspondente *seqüência de cones finitos* $\{C_j\}$, cada um deles congruente com um cone finito C fixo, tal que

1. para alguma constante M , qualquer U_j tem diâmetro menor que M ;
2. para algum $\delta > 0$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \supset \Omega_\delta \equiv \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$;
3. para qualquer j , $\bigcup_{x \in \Omega \cap U_j} (x + C_j) \equiv Q_j \subset \Omega$;
4. para alguma constante R , qualquer coleção de $R + 1$ dos conjuntos Q_j têm interseção vazia.

Teorema B.6 (de Extensão de Calderón)

Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ que possui a *propriedade uniforme de cone*, modificada como segue:

1. o *cobrimento* $\{U_j\}$ da $\partial\Omega$ é *finito*, e
2. os conjuntos U_j não necessariamente são limitados.

Então, para qualquer $m \in \{1, 2, \dots\}$ e qualquer p , $1 < p < \infty$, existe um (m, p) -operador de extensão simples E , para Ω .

Desigualdades e Teoremas Mencionados

C.1 Desigualdade de Hölder

Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tais que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $fg \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Além disso

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

C.2 Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev

Consideremos a seguinte família de *operadores de integração fraccionária*:

$$I_r f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{n/r} f(y) dy.$$

Se $r > 1$ e

$$\frac{1}{r} = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

para alguns $1 < p < q < \infty$, então

$$\|I_r f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

C.3 Teorema de Plancherel

Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|\widehat{u}\|_2^2 = (2\pi)^n \|u\|_2^2.$$

Referências Bibliográficas

- [1] J. Bergh e J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, 1976.
- [2] M. Gel'fand e G. E. Šilov, Generalized functions, *Vol. I: Operations on them*, Fizmatgiz, Moscow, 1958; English transl., Academic Press, New York, 1964.
- [3] V. Georgiev, Weighted estimate for the wave equation, *Nonlinear waves*, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute, vol. 1, Hokkaido Univ., 1996, pp. 71–80.
- [4] V. Georgiev, H. Lindblad e C. D. Sogge, Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations, *Amer. J. Math.* **119** (1997), no. 6, 1291–1319.
- [5] R. Glassey, Existence in the large for $\square u = f(u)$ in two dimensions, *Math. Z.* **178** (1981), 233–261.
- [6] L. Hormander, Fourier integrals i, *Acta Math* **127** (1971), 79–183.
- [7] Lars Hörmander, Estimatives for translation invariant operators in l^p spaces, *Acta. Math.* **104** (1960), 93–140.
- [8] ———, Lectures in nonlinear hyperbolic differential equations, 117–130, Springer-Verlag, 1997, pp. 117–130.
- [9] F. John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math.* **28** (1979), 235–265.

- [10] H. Kubo, On the critical decay and power for semilinear wave equations in odd space dimensions, *Nonlinear Anal.* **28** (1997), no. 2, 327–357.
- [11] H. Lindblad e C. D. Sogge, On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations., *J. Func. Anal.* **130** (1995), 357–426.
- [12] ———, Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations, *Amer. J. Math.* **118** (1996), 1047–1135.
- [13] W. Littman, The wave operator and L_p norms, *J. Math. Mech.* **12** (1963), 55–68.
- [14] J. Schaeffer, The equation $\square u = |u|^p$ for the critical value of p , *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A* **101** (1985), 31–44.
- [15] T. Sideris, Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **12** (1987), 378–406.
- [16] C. D. Sogge e E. M. Stein, Averages of functions over hypersurfaces: Smoothness of generalized Radon transforms, *J. Anal. Math.* **54** (1990), 165–188.
- [17] Christopher D. Sogge, *Fourier Integrals in Classical Analysis*, Cambridge, 1993.
- [18] Elias M. Stein, Interpolation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **83** (1956), 482–492.
- [19] W. Strauss, Nonlinear scattering theory, *Scattering Theory in Mathematical Physics*, Reidel, Dordrecht, 1979, pp. 53–79.
- [20] ———, Nonlinear scattering at low energy, *J. Func. Anal.* **41** (1981), 110–133.
- [21] R. Strichartz, Convolutions with kernels having singularities on a sphere, *Trans. Amer. Math. Soc.* **148** (1970), 461–471.
- [22] ———, A priori estimates for the wave equation and some applications, *J. Func. Anal.* **41** (1981), 110–133.
- [23] Y. Zhou, Cauchy problem for semilinear wave equations with small data in four space dimensions, *J. Differential Equations* **8** (1995), 135–144.