OVO:
UM NOVO PROBLEMA DE
OTIMIZAÇÃO

Cibele Dunder

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. José Mario Martínez**
Co-Orientador: **Prof. Dr. Roberto Andreani**

*Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio
de FAPESP (proc. 98/03668-0)*

- São Paulo, novembro de 2002 -

OVO: Um Novo Problema de Otimização

Este exemplar corresponde à
redação final da tese devidamente
corrigida e defendida por
Cibele Dunder e aprovada
pela comissão julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa - POLI - USP
- Profa. Dra. Ana Friedlander - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Alfredo Noel Iusem - IMPA
- Profa. Dra. Susana Scheimberg de Makler - IM - UFRJ
- Prof. Dr. José Mario Martínez (Orientador) - IMECC - UNICAMP

Agradecimentos

Primeiramente, não posso deixar de ressaltar a maestria com que o Professor José Mario Martínez conduz suas orientações. Um talento que poucos têm ... Ao meu orientador, meus sinceros agradecimentos por toda atenção dada a este trabalho. Não menos importante está meu co-orientador, o Professor Roberto Andreani, a quem agradeço pelo constante entusiasmo, parceria e bom humor sempre.

Também não posso deixar de agradecer aos grupos de otimização do IME-USP e do IMECC-UNICAMP, que muitas vezes discutiram e deram valiosas sugestões sobre o problema OVO nos seminários.

Em especial, agradeço os Professores Carlos Humes Jr. e Júlio M. Stern, que me despertaram o interesse pela otimização e muito me incentivaram a chegar até a defesa desta tese.

A todos,

MUITO OBRIGADA.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Otimização do Valor Ordenado	4
2.1 Introdução	4
2.2 Reformulação do problema	5
2.3 Viabilidade do problema OVO*	8
3 Condições de Otimalidade	14
3.1 Viabilidade de OVO* a partir de OVO	15
3.2 Condições de otimalidade para OVO	17
3.3 Condição de otimalidade para OVO*	22
3.3.1 Relacionando minimizadores de OVO e OVO*	22
3.3.2 Particularidades do caso convexo	30
3.4 Restauração e conjunto tangente	31
3.4.1 Explorando o conjunto tangente	37
3.5 Gradiente Projetado Restaurado	41
4 OVO e o Problema de Desigualdade Variacional	43
4.1 Introdução	43
4.2 Um resultado para VIP	45
4.3 Extensão dos resultados ao problema OVO	49
5 Método Cauchy Primal para OVO	51
5.1 Introdução	51
5.2 O algoritmo	52
5.3 Calculando uma solução aproximada para o subproblema	59

SUMÁRIO

iii

---

6 Experimentos Numéricos	61
7 Conclusões	66
Referências Bibliográficas	68

Resumo

Definimos um novo problema problema de otimização, chamado problema de Otimização do Valor Ordenado ("Order Value Optimization" ou OVO). Este é um problema não diferenciável, não linear e, em geral, não convexo. Para lidar com estas características, reformulamos o problema OVO como um problema de programação matemática com restrições de equilíbrio. Os primeiros quatro capítulos são dedicados à análise desta equivalência. Apresentamos condições de otimalidade de primeira e segunda ordem para OVO, estabelecendo a relação entre minimizadores de OVO e sua reformulação. O quinto capítulo apresenta um algoritmo primal para o problema OVO, chamado de método do tipo Cauchy, que resolve o problema de forma que todo ponto limite satisfaz uma adequada condição de otimalidade. Alguns exemplos numéricos e aplicações do problema OVO estão no sexto capítulo. As conclusões e perspectivas futuras são dadas no capítulo 7.

Abstract

We define a new optimization problem, called Order Value Optimization Problem (OVO). This is a nonsmooth, nonlinear and, in general, nonconvex programming problem. To deal with these characteristics, we prove the equivalence between OVO and a mathematical programming problem with equilibrium constraints. The first four chapters are dedicated to the analysis of this equivalence. We also give some results about first and second order optimality conditions, making a connection between stationary points of OVO and its reformulation. The fifth chapter is devoted to the OVO problem in its primal form, that is, only with the original variables. A Cauchy-type method is introduced that solves the problem in the sense that every limit point satisfies an adequate optimality condition. Numerical examples and applications of OVO problem are given in chapter 6. Conclusions and future research are discussed in chapter 7.

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar um novo problema de otimização, que é uma generalização do clássico problema Minimax. Ao invés de otimizar o máximo (ou o mínimo) de um conjunto de funções, trabalharemos com o valor funcional que representa a p -ésima menor função neste conjunto, para algum valor inteiro p fixado a priori. Este novo problema, chamado "Otimização do Valor Ordenado", ou em inglês "Order Value Optimization" (OVO), é um problema de otimização contínua, não diferenciável e, em geral, não convexo. Estas características criam uma certa dificuldade em resolver computacionalmente o problema. Para driblar os obstáculos desenvolvemos duas linhas de pesquisa complementares. Na primeira linha, reformulamos matematicamente o problema e obtemos uma equivalência entre o problema OVO e um problema de programação matemática com restrições de equilíbrio (MPEC). Desta reformulação exploramos todas as propriedades da estrutura deste novo PNL e obtemos alguns resultados que nos permitem usar algoritmos já conhecidos e comprovadamente eficientes para resolver OVO. A segunda linha de pesquisa é uma tentativa de adaptar algoritmos clássicos de otimização para resolver diretamente o problema OVO na sua formulação primal, isto é, envolvendo somente as variáveis originais. Neste sentido um primeiro passo foi alcançado, que foi adaptar o mais clássico dos algoritmos de otimização, o método de Cauchy, ou *Steepest Descent*. Podemos mencionar algumas aplicações que motivaram esta pesquisa:

1. Suponhamos que Ω seja um espaço de decisões e, para cada variável $x \in \Omega$, $f_i(x)$ representa uma medida de risco da decisão x no cenário i . Suponhamos que os m cenários sejam igualmente prováveis, mas mesmo que não o forem podemos reavaliar as funções adaptadas aos correspondentes cenários. A decisão minimax corresponde à escolha

de x de forma a minimizar o máximo risco possível. Esta pode ser uma alternativa muito pessimista e um *trader* poderia preferir descartar as piores possibilidades, de forma a proceder de forma mais realista. Por exemplo, poderíamos descartar 10 % dos cenários menos prováveis, ou mais pessimistas. Isto corresponde a minimizar a função OVO de ordem p com $p \approx m \times 0.10$.

2. Suponhamos que temos um problema de estimação de parâmetros onde o espaço dos parâmetros é Ω e $f_i(x)$ seja o erro cometido na i -ésima observação, quando adotamos o parâmetro x . O problema minimax de estimação corresponde a minimizar o máximo erro cometido. Como sabemos, esta estimativa é muito sensível a presença de outliers. Muitas vezes queremos eliminar, digamos, 15% dos erros maiores, pois eles podem representar observações completamente erradas. Isto corresponde a minimizar a função OVO de ordem p , com $p \approx 0.85 \times m$.
3. Problema de classificação de padrões. Muitas vezes alguns objetos nos são apresentados e desejamos classificá-los de acordo com determinadas categorias $1, \dots, s$, baseados em um vetor das características y . Uma abordagem clássica do problema é utilizar a máxima probabilidade a posteriori: suponhamos que conhecemos a probabilidade $p(j|y) = P(\text{objeto } w \text{ com vetor de características } y \text{ ser da categoria } j)$. Queremos atribuir ao objeto, com vetor de características y , a categoria $j^*(y) = \operatorname{argmax}_{j=1, \dots, s} \{p(j|y)\}$. Se as probabilidades $p(j|y)$ não são conhecidas, podemos estimá-las usando funções $h_j(x_j, y)$ parametrizadas pelo vetor x_j . O objetivo, então, é obter x_j minimizando $\sum_{i=1}^m (z_j^i - h_j(x_j, y_i))^2$, onde $z_j^i = 1$ se y_i é da categoria j , e 0 caso contrário. Ou descartar algumas atribuições pouco prováveis, minimizando a função OVO de ordem p , por exemplo $p = 95\%m$, do conjunto de funções $\{f_1, \dots, f_m\}$ onde $f_i(x_j) = (z_j^i - h_j(x_j, y_i))^2$.

A tese será apresentada em 6 capítulos. No capítulo 2 formalizamos o problema OVO e apresentamos sua reformulação, denotada por OVO*, baseada na equivalência entre o problema OVO e um problema de programação matemática com restrições de equilíbrio. Analisamos a estrutura do problema reformulado e a viabilidade do uso de algoritmos já conhecidos na área de programação não linear na resolução de OVO*. No capítulo 3 derivamos condições de otimalidade de primeira e segunda ordem para o problema OVO, relacionando minimizadores de ambos os problemas. A partir desta análise sugerimos o uso de algoritmos baseados em gradiente projetado, dada a facilidade de restauração de pontos inviáveis de OVO*.

No capítulo 4 apresentamos um teorema de equivalência entre um problema MPEC e um problema de desigualdade variacional. Definimos algumas condições nas quais asseguramos que pontos estacionários de um problema de otimização não linear (PNL) sejam soluções de um problema de desigualdade variacional (VIP) e, em particular, de OVO*. O capítulo 5 apresenta o método de Cauchy primal para resolver o problema OVO. Apresentamos o algoritmo que é, em um certo sentido, uma generalização do método do gradiente, provando sua convergência a pontos estacionários de OVO. No capítulo 6 são dados alguns exemplos numéricos de todas as abordagens sugeridas para atacar o problema, fazendo uma comparação entre estas. As conclusões e pesquisas futuras estão no capítulo 7.

Capítulo 2

Otimização do Valor Ordenado

2.1 Introdução

Começaremos com a descrição do problema de Otimização do Valor Ordenado (OVO). Suponhamos que $f_1, \dots, f_m$ são funções contínuas a valores reais, definidas em um conjunto arbitrário $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in \Omega$, os valores $f_1(x), \dots, f_m(x)$ são ordenados de forma que

$$f_{i_1(x)}(x) \leq f_{i_2(x)}(x) \leq \dots \leq f_{i_m(x)}(x). \quad (2.1)$$

Para qualquer valor inteiro $p \in I = \{1, \dots, m\}$, a função OVO de ordem- p , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, é definida por

$$f(x) = f_{i_p(x)}(x). \quad (2.2)$$

A função f está bem definida, é contínua (ver Teorema 2.1.1), apesar do conjunto de índices $i_1, \dots, i_m$ não ser único. Se $p = 1$, $f(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ e se $p = m$, temos $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$.

Teorema 2.1.1. *A função OVO de ordem- p é contínua.*

Prova. Suponhamos que $x_k \rightarrow x$, e que, para todo k em alguma subsequência,

$$|f(x_k) - f(x)| \geq \delta > 0. \quad (2.3)$$

Para esta subsequência, existe um índice $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que

$$f(x_k) = f_j(x_k)$$

infinitas vezes. Portanto,

$$f_j(x_k) \geq f_\ell(x_k) \quad (2.4)$$

para no mínimo p índices $\ell \in \{1, \dots, m\}$. Mais ainda,

$$f_j(x_k) \leq f_\ell(x_k) \quad (2.5)$$

para no mínimo $m - p + 1$ índices ℓ no conjunto $\{1, \dots, m\}$. Como o número de subconjuntos de $\{1, \dots, m\}$ é finito, um conjunto de índices ℓ que verifique (2.4) é repetido infinitas vezes, e o mesmo acontece com um conjunto de índices ℓ que verifique (2.5). Portanto, tomando os limites em (2.4) e (2.5), concluímos que

$$f_j(x) \geq f_\ell(x)$$

para, no mínimo p índices $\ell \in \{1, \dots, m\}$ e

$$f_j(x) \leq f_\ell(x)$$

para, no mínimo, p índices $\ell \in \{1, \dots, m\}$. Portanto,

$$f(x) = f_j(x).$$

Mas $f_j(x_k) \rightarrow f_j(x)$, o que contradiz (2.3). $\square$

Para enxergar melhor as características de não diferenciabilidade da função f , assim como a possibilidade de haver um grande número de minimizadores locais, vejamos um exemplo gráfico. Suponhamos que $m = 4$, ou seja, temos quatro funções f_i , e que desejamos minimizar a função OVO de ordem 2, dada por $f(x)$. A curva em negrito da Figura 2.1 representa o gráfico de $f(x)$.

Nosso objetivo é resolver:

$$\text{Problema OVO: Minimizar } f(x), \quad \text{s.a. } x \in \Omega. \quad (2.6)$$

2.2 Reformulação do problema

Como foi visto na definição do problema OVO, pode ser bastante difícil lidar com tantos minimizadores locais, principalmente pelo fato de que muitos deles podem ser pontos onde a função OVO não é diferenciável. Nosso intuito agora é redefinir a função OVO de forma a tornar mais fácil sua otimização. A nova definição é uma consequência do seguinte lema. De agora em diante, denotemos $\#$ como sendo o número de elementos de um conjunto. Também denotemos $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$.

Figura 2.1: Gráfico da função OVO $f(x)$, com $m = 4$ e $p = 2$.

Lema 2.2.1. *Suponha que $z_1, \dots, z_m$ sejam números reais tais que*

$$z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_m.$$

Então, para qualquer $p \in \{1, \dots, m\}$, existem vetores $r', u', w' \in \mathbb{R}^m$ tais que (z_p, r', u', w') é uma solução do seguinte problema:

Minimizar z

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^m r_i w_i = 0 \quad (2.7a)$$

$$\sum_{i=1}^m (1 - r_i) u_i = 0 \quad (2.7b)$$

$$\sum_{i=1}^m r_i = p \quad (2.7c)$$

$$u_i - z + z_i - w_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.7d)$$

$$u \geq 0, \quad 0 \leq r \leq e \quad w \geq 0. \quad (2.7e)$$

Prova. Defina u', r' e w' por

$$\begin{aligned}
r'_i &= 1, & i &= 1, \dots, p \\
r'_i &= 0, & i &= p+1, \dots, m \\
u'_i &= z_p - z_i, & i &= 1, \dots, p \\
u'_i &= 0, & i &= p+1, \dots, m \\
w'_i &= 0, & i &= 1, \dots, p \\
w'_i &= z_i - z_p, & i &= p+1, \dots, m
\end{aligned}$$

Claramente (z_p, r', u', w') é um ponto viável de (2.7) para o qual a função objetivo é z_p . Agora, suponha que exista um ponto viável (z, r, u, w) de (2.7) tal que $z < z_p$. Então, por (2.7c) e (2.7d), (z, r, u, w) satisfaz

$$w_i = u_i - z + z_i > 0, \quad i = p+1, \dots, m.$$

Portanto, por (2.7a), temos que

$$r_i = 0, \quad i = p+1, \dots, m.$$

violando a equação (2.7c). Assim, (z, r, u, w) não pode ser viável.

Isto significa que, para todo ponto viável (z, r, u, w) , temos que $z \geq z_p$. Desde que (z_p, u', r', w') é viável, a prova está completa. $\square$

Pelo Lema 2.2.1, dado $x \in \Omega$, $f(x)$ é o valor de z que resolve o problema (2.7). Como o problema OVO é dado por

$$\text{Minimizar}_{x \in \Omega} f(x), \quad (2.8)$$

a reformulação proposta para resolver este problema é dada por

$$\text{OVO}^* \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } z \\ \text{Sujeito a} \\ \sum_{i=1}^m r_i w_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m (1 - r_i) u_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m r_i = p \\ u_i - z + f_i(x) - w_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ u \geq 0, \quad 0 \leq r \leq e \quad w \geq 0, x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Chamaremos, daqui por diante, o problema reformulado de OVO*.

Observe que, em (2.7), x tem valor fixo e $f(x)$ resolve o problema de minimização. Em (2.9) o minimizador é encontrado entre todos os valores possíveis de x . Claramente, (2.7) é um problema contínuo mas, em

princípio, (2.9) não o é, pois x pode ser tomado em um conjunto arbitrário Ω .

Note que se $p = m$ então a reformulação do problema OVO é equivalente a formulação usual do problema *MinMax*. De fato, da terceira restrição de (2.9) e pelo fato de $0 \leq r \leq e$ temos $r = e$. Com isso a igualdade $\sum_{i=1}^m u_i(1 - r_i) = 0$ é trivialmente satisfeita. E ainda pelo fato de $\sum_{i=1}^m r_i w_i = 0$ e de $w \geq 0$, $r = e$ implica que $w = 0$. Assim, o problema (2.9) torna-se

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } z \\ \text{s.a. } \begin{cases} -z + f_i(x) + u_i = 0 & i = 1, \dots, m \\ w \geq 0 \\ x \in \Omega \end{cases} \end{array}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } z \\ \text{s.a. } \begin{cases} z \geq f_i(x) & i = 1, \dots, m \\ x \in \Omega \end{cases} \end{array}$$

2.3 Viabilidade do problema OVO*

Nesta seção estudaremos a viabilidade do problema (2.9). A reformulação a ser usada aqui é baseada no quadrado das restrições de OVO*, mantendo a positividade das variáveis. Provaremos que pontos estacionários desta soma de quadrados são pontos viáveis para (2.9).

Para isso, considere o caso onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e as funções f_i são continuamente diferenciáveis. Mais ainda, suponha que o conjunto Ω é definido por

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } h(x) = 0, l_b \leq x \leq u_b\}, \quad (2.10)$$

onde, eventualmente, alguns limitantes possam ser infinitos e h é uma função vetorial continuamente diferenciável. Praticamente todo algoritmo razoável de programação matemática para PNL tem a propriedade de que todo ponto limite é um ponto estacionário da soma dos quadrados das inviabilidades. Para o nosso problema, todo ponto limite será um ponto estacionário de primeira ordem de

$$\text{Minimize } \left[\sum_{i=1}^m r_i w_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^m (1 - r_i) u_i \right]^2 \quad (2.11)$$

$$+[(\sum_{i=1}^m r_i) - p]^2 + \sum_{i=1}^m [u_i - z + f_i(x) - w_i]^2 + \sum_{i=1}^m h_i^2(x) \quad (2.12)$$

$$\text{s.t. } u \geq 0, \quad 0 \leq r \leq e, \quad w \geq 0, \quad l_b \leq x \leq u_b. \quad (2.13)$$

Portanto, é natural questionar se pontos estacionários de (2.11-2.13) representam pontos viáveis de (2.9). No próximo lema destacamos uma simples propriedade que será útil nas nossas análises.

Lema 2.3.1. *Suponha que $x \in \Omega$. Então, (z, r, u, w) satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem de*

$$\text{Minimize } [\sum_{i=1}^m r_i w_i]^2 + [\sum_{i=1}^m (1 - r_i) u_i]^2 \quad (2.14)$$

$$+[(\sum_{i=1}^m r_i) - p]^2 + \sum_{i=1}^m [u_i - z + f_i(x) - w_i]^2 \quad (2.15)$$

$$\text{s.t. } u \geq 0, \quad 0 \leq r \leq e, \quad w \geq 0. \quad (2.16)$$

se e somente se (x, z, r, u, w) satisfaz as condições de primeira ordem de (2.11-2.13).

Prova. Basta escrever as condições de otimalidade de (2.11-2.13) e compará-las com (2.14-2.16), considerando o fato de que $x \in \Omega$. $\square$

Devido ao Lema 2.3.1, nossa questão agora é saber se, dado $x \in \Omega$, os pontos que satisfazem as condições de otimalidade de (2.14-2.16) satisfazem as restrições de (2.9). Em outras palavras, queremos saber se com um ponto viável $x \in \Omega$ e um ponto estacionário (z, r, u, w) de (2.11-2.13) podemos assegurar que $z = f_{i_p}(x)$. A resposta é positiva, e será estabelecida no próximo teorema.

Teorema 2.3.2. *Suponha que Ω seja dado por (2.10), as funções f_i e h sejam continuamente diferenciáveis, $x \in \Omega$ e $(x_*, z_*, r_*, u_*, w_*)$ seja um ponto estacionário de (2.11-2.13). Então, $(x_*, z_*, r_*, u_*, w_*)$ satisfaz as restrições de (2.9).*

Prova. Defina

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^m [r_*]_i [w_*]_i$$

$$\theta_2 = \sum_{i=1}^m (1 - [r_*]_i) [u_*]_i$$

$$\theta_3 = \sum_{i=1}^m [r_*]_i - p$$

Se $(x_*, r_*, u_*, z_*, w_*)$ é um ponto de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de (2.11-2.13), então existem $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ tais que

$$2\theta_1[w_*]_i - 2\theta_2[u_*]_i + 2\theta_3 - [\mu_1]_i + [\mu_2]_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.17)$$

$$2\theta_2(1 - [r_*]_i) + 2([u_*]_i - z_* + f_i(x_*) - [w_*]_i) - [\mu_3]_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.18)$$

$$-2 \sum_{i=1}^m ([u_*]_i - z_* + f_i(x_*) - [w_*]_i) = 0 \quad (2.19)$$

$$2\theta_1[r_*]_i - 2([u_*]_i - z_* + f_i(x_*) - [w_*]_i) - [\mu_4]_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.20)$$

$$[\mu_1]_i[r_*]_i = [\mu_2]_i[1 - [r_*]_i] = [\mu_3]_i[u_*]_i = [\mu_4]_i[w_*]_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.21)$$

$$u_* \geq 0, \quad 0 \leq r_* \leq e, \quad w_* \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0, \mu_4 \geq 0. \quad (2.22)$$

- (a) Suponha que $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Então (2.17)-(2.22) são as condições de KKT do seguinte problema convexo:

$$\text{Min } ((\sum_{i=1}^m r_i) - p)^2 \quad \text{s.a. } 0 \leq r \leq e.$$

Como $p \in [1, m]$, temos que $\theta_3 = 0$, e a prova está completa.

- (b) Suponha que $\theta_1 = 0$. Então, por (2.20) e (2.22), segue que

$$2([u_*]_i - z_* + f_i(x_*) - [w_*]_i) = -[\mu_4]_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

De (2.19) conclui-se que

$$[u_*]_i - z_* + f_i(x_*) - [w_*]_i = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Multiplicando (2.18) por $[u_*]_i$ e considerando (2.21), temos

$$2\theta_2[u_*]_i(1 - [r_*]_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Portanto, pela definição de θ_2 e por (2.22), segue que $\theta_2 = 0$. O restante da demonstração segue de maneira análoga a prova feita em (a).

(c) Suponha que $\theta_2 = 0$. Então, por (2.19) e (2.22), segue que

$$2([u_*]_i - z_* + f_i(x_*) - [w_*]_i) = [\mu_3]_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Da igualdade (2.19) conclui-se que

$$[u_*]_i - z_* + f_i(x_*) - [w_*]_i = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Multiplicando (2.20) por $[w_*]_i$ e considerando (2.21), temos que

$$2\theta_2[w_*]_i[r_*]_i = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Logo, pela definição de θ_1 e por (2.22), temos que $\theta_1 = 0$. O restante da prova segue os passos do item (a).

(d) Suponha que $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 > 0$.

Da definição de θ_1 segue que existe um índice k tal que $[r_*]_k > 0$ e $[w_*]_k > 0$. Por (2.20) e (2.21),

$$2\theta_1[r_*]_k = 2([u_*]_k - z_* + f_k(x_*) - [w_*]_k) > 0$$

e $[\mu_1]_k = 0$.

De (2.18) e do fato de $\theta_2 > 0$, temos que

$$2\theta_2(1 - [r_*]_k) = -2([u_*]_k - z_* + f_k(x_*) - [w_*]_k) + [\mu_3]_k = 0.$$

Isto implica que $[\mu_3]_k > 0$ e, considerando (2.21), conclui-se que $[u_*]_k = 0$. Assim,

$$[\mu_1]_k = 0, [w_*]_k > 0, \text{ and } [u_*]_k = 0.$$

e usando (2.17) temos

$$2\theta_1[w_*]_k + 2\theta_3 + [\mu_2]_k = 0$$

o que implica que

$$\theta_3 < 0 \tag{2.23}$$

Por outro lado, pela definição de θ_2 , existe k tal que $1 - [r_*]_k > 0$ e $[u_*]_k > 0$. Por (2.18) e (2.21),

$$-2\theta_2(1 - [r_*]_k) = ([u_*]_k - z_* + f_k(x_*) - [w_*]_k) < 0$$

e $[\mu_2]_k = 0$. Por (2.20) e pelo fato de $\theta_2 > 0$, temos que

$$2\theta_2(1 - [r_*]_k) = 2([u_*]_k - z_* + f_k(x_*) - [w_*]_k) + [\mu_4]_k$$

Isto implica em $[\mu_4]_k > 0$. Por (2.21), $[w_*]_k = 0$ e, assim,

$$[w_*]_k = 0 \text{ e } [\mu_2]_k = 0$$

podem ser usados juntamente com (2.17) para concluir que

$$-2\theta_2[u_*]_k + 2\theta_3 - [\mu_1]_k = 0$$

Isto implica que $\theta_3 > 0$, o que contradiz (2.23), completando a prova.
□

Nosso interesse é usar algoritmos de programação não linear para resolver (2.9). De acordo com o teorema 2.3.2, minimizar a soma dos quadrados das restrições, mantendo as restrições de caixa, nos garante que pontos estacionários desta soma são necessariamente pontos viáveis de OVO*. Portanto, não é difícil encontrar um método que convirja a pontos viáveis de (2.9). Mas a pergunta agora é saber a que classe pertencem estes pontos obtidos por algum algoritmo de PNL.

Suponhamos que temos um método que convirja para pontos viáveis de (2.9). Há algumas propriedades, já bastante exploradas por muitos autores, que a maioria dos algoritmos de PNL possuem. Entre elas destacamos:

Propriedade 1 Se o ponto limite é viável e os gradientes das restrições ativas são LI (linearmente independentes), então este ponto satisfaz as condições de KKT (Karush-Kuhn-Tucker) do PNL.

Propriedade 2 Se um ponto limite é viável, então ele satisfaz as condições de Fritz-John do PNL.

Os gradientes das restrições ativas de OVO* são LD (linearmente dependentes) em todos os pontos viáveis, como já havia sido observado. Portanto, um algoritmo que satisfaz a propriedade 1 não diz nada sobre convergência para OVO*. Outra característica do problema é o fato da condição Mangasarian-Fromovitz (MF) não ser satisfeita em nenhum ponto viável. Portanto, algoritmos que satisfazem a propriedade 2 não são satisfatórios.

Ou seja, no caso de problemas com restrições de equilíbrio, qualquer ponto viável pode ser ponto de acumulação de algoritmos com as propriedades acima.

Para recordar a condição de qualificação mencionada, considere o problema de programação não linear da forma

Minimizar $f(x)$

Sujeito a

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l,$$

onde todas as funções são a valores reais e de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Para um ponto viável $\bar{x}$, a condição de regularidade de Mangasarian-Fromovitz é a seguinte:

(i) Existe um vetor $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nabla g_i(\bar{x})^T \bar{y} < 0, \quad i \in I(\bar{x}) = \{i | g_i(\bar{x}) = 0\},$$

$$\nabla h_j(\bar{x})^T \bar{y} = 0, \quad j = 1, \dots, l.$$

(ii) Os gradientes $\{\nabla h_j(\bar{x})\}$, $j = 1, \dots, l$ são linearmente independentes.

No trabalho [12] de Martínez-Svaiter, uma nova condição de otimalidade que não depende de qualificação de restrições é analisada. Foi identificada em muitos algoritmos de PNL uma propriedade de convergência que diz, em poucas palavras, que o “gradiente projetado aproximado (AGP) tende a zero”, projeção essa feita no conjunto tangente às restrições. Esta condição de otimalidade aliada às características do problema OVO* nos sugere o uso de algoritmos que satisfaçam esta condição AGP. Também nos sugere o uso de métodos baseados em gradientes projetados, já que é fácil, a partir de um ponto $x \in \Omega$, obter um ponto viável de (2.9). Em particular, no próximo capítulo, esta última sugestão será explorada.

Capítulo 3

Condições de Otimalidade

Neste capítulo formularemos condições de otimalidade para os problemas OVO e OVO*, explorando um pouco mais as características das restrições de (3.2). Apresentaremos condições necessárias e suficientes de otimalidade para os problemas OVO e para sua reformulação, relacionando seus respectivos minimizadores. Veremos que a partir de um ponto viável $x \in \Omega$, é possível definir um ponto y viável para OVO* através de uma restauração natural. Este fato nos permitirá pensar em algoritmos baseados em gradiente projetado, já que se torna simples a tarefa da restauração exata. Analisaremos em que circunstâncias esta projeção poderá gerar direções de descida para a função objetivo de (3.2), e assim associá-la a uma condição de otimalidade de primeira ordem. Esboçaremos um algoritmo baseado em gradiente projetado restaurado, sem no entanto provar sua convergência, mas sugerindo uma linha de futuras pesquisas no assunto.

Suponhamos que $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, para todo $i = 1, \dots, m$, e relembremos que

$$f(x) = f_{i_p(x)}(x)$$

para todo $x \in \Omega$, onde

$$f_{i_1(x)}(x) \leq \dots \leq f_{i_m(x)}(x).$$

O problema **OVO** considerado aqui é:

$$\text{Minimizar } f(x) \quad \text{s.a. } x \in \Omega. \quad (3.1)$$

e sua respectiva reformulação é o problema **OVO***:

$$\text{Minimizar } z$$

$$s.a. \begin{cases} (a) & \sum_{i=1}^m r_i w_i = 0 \\ (b) & \sum_{i=1}^m (1 - r_i) u_i = 0 \\ (c) & \sum_{i=1}^m r_i = p \\ (d) & u_i - z + f_i(x) - w_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ (e) & u \geq 0, \quad 0 \leq r \leq e \quad w \geq 0, \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1 Viabilidade de OVO* a partir de OVO

Dado $x \in \Omega$, se definirmos $z = f_{i_p}(x)$ torna-se simples a tarefa de encontrar valores para u', r', w' de forma a obter um ponto viável de (3.2). De fato, ordenando os valores $f_1(x), \dots, f_m(x)$ e fazendo

$$\begin{aligned} r'_j &= 1, & j &= 1, \dots, p \\ r'_j &= 0, & j &= p+1, \dots, m \\ u'_j &= f_{i_p}(x) - f_{i_j}(x), & j &= 1, \dots, p \\ u'_j &= 0, & j &= p+1, \dots, m \\ w'_j &= 0, & j &= 1, \dots, p \\ w'_j &= f_{i_j}(x) - f_{i_p}(x), & j &= p+1, \dots, m \end{aligned}$$

é fácil ver que o ponto (x, z, r', u', w') é um ponto viável de (3.2).

Formalizemos este procedimento. Dado $x \in \Omega$, considere o seguinte ordenamento

$$\begin{aligned} f_{i_1(x)}(x) &\leq \dots \leq f_{i_s(x)}(x) < f_{i_{s+1}(x)}(x) = \dots = f_{i_p(x)}(x) = \\ &= \dots = f_{i_\ell(x)}(x) < f_{i_{\ell+1}(x)}(x) \leq \dots \leq f_{i_m(x)}(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Quando não houver dúvidas quanto a variável x em questão, abreviaremos os índices $i_1(x), \dots, i_m(x)$ por $i_1, \dots, i_m$, a fim de não sobrecarregar a notação.

Para facilidade de notação, defina os conjuntos

$$\begin{aligned} L(x) &= \{i \in \{i_1(x), \dots, i_s(x)\}\} \\ E(x) &= \{i \in \{i_{s+1}(x), \dots, i_\ell(x)\}\} \\ G(x) &= \{i \in \{i_{\ell+1}(x), \dots, i_m(x)\}\} \end{aligned}$$

Veremos que é natural a escolha de (r', u', w') acima. Dado $x \in \Omega$ e atribuindo o valor $z = f_{i_p}(x)$, de acordo com as restrições

$$u_i - z + f_i(x) - w_i = 0, \quad w_i \geq 0, \quad u_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{i=1}^m u_i(1 - r_i) = 0, \quad r_i \in [0, 1]$$

$$\sum_{i=1}^m w_i r_i = 0$$

concluimos o seguinte:

- a. se $i \in L(x)$ então $-z + f_i(x) < 0 \Rightarrow u_i > w_i \geq 0$. Logo $u_i > 0$. Mas como $u_i(1 - r_i) = 0$, segue que $r_i = 1$.
- b. se $i \in G(x)$ então $-z + f_i(x) > 0 \Rightarrow w_i > 0$. Mas como $w_i r_i = 0$, segue que $r_i = 0$.

Portanto, dado um ponto x viável, um vetor y viável para (3.2) é dado pela seguinte

RESTAURAÇÃO:

$$z = f_{i_p}(x) \tag{3.4}$$

$$w_i = \begin{cases} f_i(x) - f_{i_p}(x) & \text{se } i \in G(x) \\ 0 & \text{se } i \in E(x) \cup L(x) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$u_i = \begin{cases} f_{i_p}(x) - f_i(x) & \text{se } i \in L(x) \\ 0 & \text{se } i \in E(x) \cup G(x) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$r_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in L(x) \\ 0 & \text{se } i \in G(x) \\ a_i \in [0, 1] & \text{se } i \in E(x) \end{cases} \tag{3.7}$$

de forma que $\sum_{i=1}^m r_i = p$.

Feita uma escolha de r satisfazendo (3.7), decomponemos o conjunto $E(x)$ em 3 conjuntos disjuntos

$$E^0(x) = \{i \in E(x) \mid r_i = 0\}$$

$$E^1(x) = \{i \in E(x) \mid r_i = 1\}$$

$$E^*(x) = \{i \in E(x) \mid r_i \in (0, 1)\}$$

onde, claramente, $E(x) = E^0(x) \cup E^1(x) \cup E^*(x)$.

De acordo com esta restauração, a partir de $\bar{x}$ é imediato gerar pontos viáveis $\bar{u}$ e $\bar{w}$, mas dependendo dos valores dos índices s, p, l do ordenamento (3.3) existem diversas formas de restaurar r . Os pontos r que satisfazem a condição

$$\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_m\}} r_i = p, \quad \sum_{i \in \{i_{s+1}, \dots, i_\ell\}} r_i = p - s, \quad 0 \leq r_i \leq 1.$$

geram $(\bar{x}, \bar{u}, r, \bar{w}, \bar{z})$ viável para (3.2).

Veremos que esta variável r tem um importante papel na obtenção de conjuntos tangentes às restrições de 3.2 e de possíveis direções de descida para a sua função objetivo $g(y) = z$.

3.2 Condições de otimalidade para OVO

O objetivo desta seção é provar condições necessárias e suficientes de otimalidade para o problema OVO.

De agora em diante, suponhamos que as todas as funções f_i são contínuas em Ω .

Definição 3.2.1. Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$ é viável se $\{x_k\} \subset \Omega$.

Definição 3.2.2. Dado $x \in \Omega$, dizemos que uma sequência viável é uma sequência de descida para a função ϕ em relação à x se existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi(x_k) < \phi(x) \quad \forall \quad k \geq k_0.$$

Denotaremos, como de costume, $\#A$ como sendo o número de elementos do conjunto A .

Definição 3.2.3. Dizemos que $x^* \in \Omega$ é um ponto estacionário do problema OVO se, para toda sequência viável $\{x_k\}$ que converge para x^* ,

$$\#\{i \in E(x^*) \mid \{x_k\} \text{ é uma sequência de descida para } f_i\} < p - \#L(x^*) \quad (3.8)$$

Teorema 3.2.1. Suponhamos que $x \in \Omega$. Então, x é um minimizador local do problema OVO (3.1) se, e somente se, x é um ponto estacionário.

Prova. Suponhamos que x seja um minimizador local, mas que não seja um ponto estacionário. Então, existe uma sequência viável $\{x_k\}$ que é uma sequência de descida para todo $i \in D \subset E(x)$, onde

$$\#D \geq p - \#L(x).$$

Por continuidade, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f_i(y) < f(x) \quad \forall i \in L(x), \quad \|y - x\| \leq \varepsilon.$$

Mais ainda, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_i(x_k) < f(x) \quad \forall k \geq k_0, \quad i \in D.$$

Se $k_1 \geq k_0$ for grande o suficiente, $\|x_k - x\| \leq \varepsilon$, e portanto

$$f_i(x_k) < f(x) \quad \forall k \geq k_1, \quad i \in D \cup L(x).$$

Mas $\#D \cup L(x) \geq p$, portanto

$$f(x_k) = f_{i_p(x_k)}(x_k) < f(x) \quad \forall k \geq k_1.$$

Isto implica que x não é um minimizador local.

Agora, suponhamos que x não seja um minimizador local de (3.1). Portanto, existe uma sequência viável $\{x_k\}$ tal que

$$f(x_k) < f(x) \text{ para } k \text{ suficientemente grande.}$$

Portanto, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_{i_1(x_k)}(x_k) \leq \dots \leq f_{i_p(x_k)}(x_k) = f(x_k) < f(x) \quad (3.9)$$

para todo $k \geq k_2$.

Pelo fato do número de diferentes conjuntos $\{i_1(x_k), \dots, i_p(x_k)\}$ ser finito, um deles é repetido infinitas vezes em (3.9). Denotemos este conjunto por $\{i_1, \dots, i_p\}$. Portanto, tomando uma apropriada subsequência (que é também uma sequência viável), segue que:

$$f_{i_1}(x_k) \leq \dots \leq f_{i_p}(x_k) = f(x_k) < f(x)$$

para todo $k \geq k_2$.

Como $f_i(x) > f(x)$ para todo $i \in G(x)$, a continuidade das funções implica que o conjunto $\{i_1, \dots, i_p\}$ não contém elementos de $G(x)$. Assim,

$$\{i_1, \dots, i_p\} \subset L(x) \cup E(x).$$

Portanto, para no mínimo $p - \#L(x)$ elementos de $E(x)$, temos que

$$f_i(x_k) < f(x)$$

se k for suficientemente grande. Dessa forma, a sequência x_k é de descida para no mínimo $p - \#L(x)$ funções do conjunto $E(x)$. Isto completa a prova. $\square$

Definição 3.2.4. Dizemos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção tangente ao conjunto Ω no ponto $x \in \Omega$ se existe uma sequência viável $\{x_k\}$ que converge para x tal que

$$d = \|d\| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|}.$$

Os próximos teoremas estabelecem condições de otimalidade para o problema OVO usando o conceito de direções tangentes.

Teorema 3.2.2. Suponhamos que x seja um minimizador local de (3.1) e que f_i tenha derivadas de primeira ordem contínuas numa vizinhança de x , para todo $i \in E(x)$. Então, para toda direção tangente d ,

$$\#\{i \in E(x) \mid \langle d, \nabla f_i(x) \rangle < 0\} < p - \#L(x).$$

Prova. Suponhamos que a tese não seja verdadeira. Então existe uma direção tangente d e um conjunto $D_1 \subset E(x)$, tais que $\#D_1 \geq p - \#L(x)$ e

$$\langle d, \nabla f_i(x) \rangle < 0$$

para todo $i \in D_1$. Defina $\{x_k\}$ uma sequência viável que convirja para x de forma que

$$d = \|d\| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|}$$

Pela diferenciabilidade de f_i , para todo $i \in D_1$, temos que:

$$f_i(x_k) = f_i(x) + \langle \nabla f_i(x), x_k - x \rangle + o(\|x_k - x\|).$$

Portanto,

$$\|d\| \frac{f_i(x_k) - f_i(x)}{\|x_k - x\|} \leq \langle \nabla f_i(x), \|d\| \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|} \rangle + \|d\| \frac{o(\|x_k - x\|)}{\|x_k - x\|}.$$

Tomando os limites, temos que, para k suficientemente grande,

$$\|d\| \frac{f_i(x_k) - f_i(x)}{\|x_k - x\|} \leq \frac{\langle \nabla f_i(x), d \rangle}{2} < 0.$$

Logo, para k suficientemente grande e para todo $i \in D_1$,

$$f_i(x_k) < f_i(x).$$

Isto contradiz o Teorema 3.2.1. □

Teorema 3.2.3. *Suponhamos que x seja um minimizador local de (3.1) e que f_i tenha derivadas contínuas de primeira e segunda ordem numa vizinhança de x , para todo $i \in E(x)$. Para toda direção tangente d , definamos*

$$D' = \{i \in E(x) \mid \langle d, \nabla f_i(x) \rangle < 0\}$$

e

$$D'' = \{i \in E(x) \mid \nabla f_i(x) = 0 \text{ and } d^T \nabla^2 f_i(x) d < 0\}.$$

Então,

$$\#(D' \cup D'') < p - \#L(x).$$

Prova. Suponhamos que a tese não seja verdadeira. Então, existe $d \in \mathbb{R}^n$ uma direção tangente tal que

$$\#(D' \cup D'') \geq p - \#L(x).$$

Defina $\{x_k\}$ uma sequência viável que convirja para x e

$$d = \|d\| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|},$$

Se $i \in D'$, a argumentação da prova do Teorema 3.2.2 mostra que $\{x_k\}$ é uma direção de descida. Suponhamos, agora, que $i \in D''$.

Pelo fato de f_i ter derivadas de segunda ordem contínuas, segue que

$$\begin{aligned} f_i(x_k) &= f_i(x) + \langle \nabla f_i(x), x_k - x \rangle + \frac{1}{2} (x_k - x)^T \nabla^2 f_i(x) (x_k - x) + o(\|x - x_k\|^2) \\ &= f_i(x) + \frac{1}{2} (x_k - x)^T \nabla^2 f_i(x) (x_k - x) + o(\|x - x_k\|^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{[f_i(x_k) - f_i(x)] \|d\|^2}{\|x - x_k\|^2} = \|d\|^2 \frac{1}{2} \frac{(x_k - x)^T}{\|x - x_k\|} \nabla^2 f_i(x) \frac{x_k - x}{\|x - x_k\|} + \frac{o(\|x - x_k\|^2)}{\|x - x_k\|^2}.$$

Tomando os limites, temos que, para k suficientemente grande, $f_i(x_k) < f_i(x)$. Portanto, $\{x_k\}$ é uma direção de descida para f_i . Isto contradiz o Teorema 3.2.1. $\square$

Teorema 3.2.4. *Suponha que $x \in \Omega$ e f_i tenha derivadas de segunda ordem contínuas para todo $i \in E(x)$. Para todo vetor tangente d , defina $S(d) = S_1(d) \cup S_2(d) \subset E(x)$ por*

$$S_1(d) = \{i \in E(x) \mid \langle d, \nabla f_i(x) \rangle > 0\},$$

e

$$S_2(d) = \{i \in E(x) \mid \nabla f_i(x) = 0 \text{ and } d^T \nabla^2 f_i(x) d > 0\}.$$

Suponhamos que, para todo vetor tangente d ,

$$\#S(d) > \#L(x) + \#E(x) - p,$$

Então, x é um minimizador local.

Prova. Suponhamos que x não seja um minimizador local. Então, pelo Teorema 3.2.1, existe uma sequência de descida $\{x_k\}$ para, no mínimo, $p - \#L(x)$ funções do conjunto $E(x)$. Definamos $S_3 \subset E(x)$ por

$$i \in S_3 \text{ se e somente se } \{x_k\} \text{ é uma sequência de descida para } f_i.$$

Então $\#S_3 \geq p - \#L(x)$.

Tomemos uma subsequência convergente de $(x_k - x)/\|x_k - x\|$ e uma subsequência de $\{x_k\}$ tal que, para esta subsequência,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|} = d.$$

Então, d é um vetor tangente. Consideremos os conjuntos $S_1(d)$ e $S_2(d)$ associados a d .

Se $i \in S_1(d)$, então $\langle d, \nabla f_i(x) \rangle > 0$, e portanto:

$$f_i(x_k) - f_i(x) = \langle \nabla f_i(x), x_k - x \rangle + o(\|x_k - x\|)$$

e

$$\frac{f_i(x_k) - f_i(x)}{\|x_k - x\|} = \langle \nabla f_i(x), \frac{x - x_k}{\|x - x_k\|} \rangle + \frac{o(\|x_k - x\|)}{\|x_k - x\|}.$$

Logo, tomando os limites, observamos que $f_i(x_k) > f_i(x)$ para k suficientemente grande. Portanto, $\{x_k\}$ não é uma sequência de descida.

Analogamente, se $i \in S_2(d)$,

$$\begin{aligned} f_i(x_k) - f_i(x) &= \langle \nabla f_i(x), x_k - x \rangle + \frac{1}{2}(x_k - x)^T \nabla^2 f_i(x)(x_k - x) + o(\|x_k - x\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(x_k - x)^T \nabla^2 f_i(x)(x_k - x) + o(\|x_k - x\|^2). \end{aligned}$$

Dividindo por $\|x_k - x\|^2$, pegando uma subsequência convergente de $(x_k - x)/\|x_k - x\|$ e tomando os limites, concluímos que $f_i(x_k) > f_i(x)$ para k suficientemente grande. Assim, $\{x_k\}$ não é uma sequência de descida.

Logo, $(S_1 \cup S_2) \cap S_3 = \emptyset$, o que é impossível visto que $\#E(x) \geq \#S(d) + \#S_3 > \#L(x) + \#E(x) - p + p - \#L(x) = \#E(x)$ é uma contradição. $\square$

3.3 Condição de otimalidade para OVO*

Agora uma questão interessante é saber qual é a relação entre minimizadores locais do problema OVO original (3.1) e minimizadores locais do problema reformulado (3.2). Os próximos teoremas nos dizem um pouco a respeito dessa relação.

3.3.1 Relacionando minimizadores de OVO e OVO*

Suponha que x^* seja um ponto viável de OVO. Defina o seguinte conjunto:

$$S(x^*) = \{(z, x^*, r, u, w) \text{ viável para OVO}^* \text{ tal que } z = f(x^*)\} \quad (3.10)$$

onde $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_{i_p}(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Teorema 3.3.1. *O ponto $x^* \in \Omega$ é um minimizador local do problema 3.1 se e somente se todos os pontos do conjunto $S(x^*)$ são minimizadores locais do problema reformulado 3.2.*

Prova. Suponha que exista algum ponto $y \in S(x^*)$ que não seja mínimo local da reformulação (3.2), onde definimos $y = (z^*, x^*, \bar{r}, \bar{u}, \bar{w})$. Então existe uma sequência de pontos viáveis $\{(z^k, x^k, r^k, u^k, w^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(z^k, x^k, r^k, u^k, w^k) \longrightarrow (z^*, x^*, \bar{r}, \bar{u}, \bar{w}) \text{ e que } z^k < z^* \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Defina o conjunto $I(x^k) = \{i \mid f_i(x^k) \leq z^k\}$.

Se temos $r_i^k > 0$ então, da igualdade (a) em (3.2) segue que $w_i^k = 0$. Já da equação (d) segue que

$$u_i^k - z^k + f_i(x^k) = 0 \Rightarrow f_i(x^k) \leq z^k$$

Assim, das restrições (c) e (e) de 3.2 temos que

$$\#I(x^k) \geq p$$

o que implica em $f(x^k) \leq z^k$. Portanto x^* não é um minimizador local de OVO, contradizendo a hipótese.

Reciprocamente, suponha que x^* não seja um minimizador local do problema OVO. Então $\exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que $x^k \longrightarrow x^*$ e $f(x^k) < f(x^*)$ para todo k .

Defina o conjunto $I(x^k) = \{i \mid f_i(x^k) \leq f(x^k)\}$. É fácil ver que $\#I(x^k) \geq p$, pois a sequência x^k , sendo infinita, nos possibilita escolher um conjunto de índices J de forma que $\#J = p$ e tomar uma subsequência x^k , $k \in K_1 \subset \mathbb{N}$, tal que $J \subset I(x^k)$ para todo $k \in K_1$. Desta forma, definimos a seguinte sequência $\{y^k = (z^k, x^k, r^k, u^k, w^k)\}$ para $k \in K_1$:

$$\begin{aligned} r_i^k &= 1 & \text{se } i \in J \\ r_i^k &= 0 & \text{se } i \notin J \\ u_i^k &= f(x^k) - f_i(x^k) & \text{se } i \in J \\ u_i^k &= 0 & \text{se } i \notin J \\ w_i^k &= 0 & \text{se } i \in J \\ w_i^k &= f_i(x^k) - f(x^k) & \text{se } i \notin J \end{aligned}$$

Estes pontos y^k definidos acima são viáveis para o problema 3.2. Pela continuidade da função OVO, estes pontos convergem para:

$$\begin{aligned} x^k &\longrightarrow x^*, & z^k &\longrightarrow z^* = f(x^*) \\ r_i^k &\longrightarrow \bar{r}_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in J \\ 0 & \text{se } i \notin J \end{cases} \end{aligned}$$

$$u_i^k \rightarrow \bar{u}_i = \begin{cases} f(x^k) - f_i(x^k) & \text{se } i \in J \\ 0 & \text{se } i \notin J \end{cases}$$

$$w_i^k \rightarrow \bar{w}_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin J \\ f_i(x^k) - f(x^k) & \text{se } i \in J \end{cases}$$

Portanto, $y = (z^*, x^*, \bar{r}, \bar{u}, \bar{w}) \in S(x^*)$, onde $z^* = f(x^*)$. Mas $z^k < z^*$, $\forall k \in K_1$. Logo y não é um minimizador local, o que contradiz a hipótese. $\square$

Veja que o fato de existir $y = (z, x, r, u, w) \in \Gamma$ ponto estacionário de (3.2) não implica que x seja um minimizador local de (3.1). Veja um exemplo deste fato.

EXEMPLO: Considere as seguintes funções

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 2x, \quad f_3(x) = 3x$$

no intervalo $x \in [-10, 10]$. Neste caso, o problema OVO* usando $p = 2$ é o seguinte:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } z \\ & \begin{aligned} (1) \quad & r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 = 0 \\ (2) \quad & (1 - r_1)u_1 + (1 - r_2)u_2 + (1 - r_3)u_3 = 0 \\ (3) \quad & r_1 + r_2 + r_3 = 2 \\ (4) \quad & u_1 - z + x - w_1 = 0 \\ (5) \quad & u_2 - z + 2x - w_2 = 0 \\ (6) \quad & u_3 - z + 3x - w_3 = 0 \\ (7) \quad & u_i \geq 0, \quad 0 \leq r_i \leq 1, \quad w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ (8) \quad & x \in [-10, 10] \end{aligned} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Considere o ponto $\bar{y} = (\bar{x}, \bar{z}, \bar{r}, \bar{u}, \bar{w}) = (0, 0, (1, 0, 1), (0, 0, 0), (0, 0, 0))$, onde claramente $\bar{x}$ não é um minimizador local de OVO. Porém, provaremos que $\bar{y}$ é um minimizador local de (3.11).

Considere a sequência $y^k = (x_k, z_k, r_k, u_k, w_k) \rightarrow \bar{y}$. Dado que $\bar{r}_1 = \bar{r}_3 = 1$, segue que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$r_1^k + r_3^k \geq 1.5, \quad r_1^k > 0 \quad \text{e} \quad r_3^k > 0 \quad \forall k \geq k_0$$

Da equação (1), temos que

$$w_1^k = w_3^k = 0, \quad \forall k \geq k_0$$

De (3) e do fato de $r_1^k + r_3^k \geq 1.5$, segue que $r_2^k < 1, \forall k \geq k_0$. Considerando (2) temos que $u_2^k = 0, \forall k \geq k_0$. Com estas informações e considerando as equações (4), (5) e (6) concluímos que

$$\begin{aligned} (9) \quad & u_1^k - z^k + x^k = 0 \\ (10) \quad & -z^k + 2x^k - w_2^k = 0 \\ (11) \quad & u_3^k - z^k + 3x^k = 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} (12) \quad & x^k = -u_1^k + z^k \\ (13) \quad & z^k = 2x^k - w_2^k \\ (14) \quad & x^k = \frac{1}{3}(u_3^k - z^k) \end{aligned}$$

Substituindo (12) em (13) e (14) em (11), segue que

$$\begin{aligned} z^k &= 2z^k - 2u_1^k - w_2^k \Rightarrow z^k = 2u_1^k + w_2^k \text{ e} \\ z^k &= \frac{2}{3}z^k - \frac{2}{3}u_3^k - w_2^k \Rightarrow z^k = -2u_3^k - 3w_2^k \\ &\Rightarrow z^k = 0 \quad \forall k \geq k_0. \end{aligned}$$

o que termina a prova. $\square$

Analisemos agora o caso específico de haver uma única função f_i tal que $f_i(x^*) = f(x^*)$. Vejamos que neste caso o conjunto $S(x^*)$ é formado por um único ponto.

Lema 3.3.2. *Considere o ponto $x^* \in \Omega$ tal que $\#E(x^*) = 1$, ou seja, $\{i \in \{1, \dots, m\} \mid f_i(x^*) = f(x^*)\} = \{i_p\}$. Então, $\#S(x^*) = 1$.*

Prova. Seja $z^* = f(x^*)$ e considere o conjunto

$$\mathcal{I} = L(x^*) \cup E(x^*) = \{i \mid f_i(x^*) \leq f(x^*)\}$$

Como $\#\mathcal{I} = p$, segue que

$$\begin{aligned} u_i^* - z^* + f_i(x^*) - w_i^* &= 0 \Rightarrow u_i^* > 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} \setminus \{i_p\} \\ &\Rightarrow r_i^* = 1, \quad \forall i \in \mathcal{I} \setminus \{i_p\} \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} u_i^* - z^* + f_i(x^*) - w_i^* &= 0 \Rightarrow w_i^* > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{I} \\ &\Rightarrow r_i^* = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{I} \Rightarrow r_{i_p}^* = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a única escolha para r é dada por

$$r_i^* = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \mathcal{I} \\ 0 & \text{se } i \in \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{I} \end{cases}$$

Consequentemente, pela viabilidade de y^* para OVO*,

$$u_i^* = \begin{cases} z^* - f_i(x^*) & \text{se } i \in \mathcal{I} \\ 0 & \text{se } i \in \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{I} \end{cases}$$

e

$$w_i^* = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in \mathcal{I} \\ f_i(x^*) - f(x^*) & \text{se } i \in \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{I} \end{cases}$$

Portanto, $y^* = (z^*, x^*, r^*, u^*, w^*)$ é o único ponto do conjunto $S(x^*)$. $\square$

Derivaremos agora uma condição de otimalidade de segunda ordem, baseado no comportamento das hessianas das funções pertencentes ao conjunto de empates $E(x)$. Para prová-la, entretanto, precisaremos do seguinte teorema de alternativa (ver [11]).

Teorema 3.3.3 (Gale). *Dada uma matriz $l \times n$ e dado um vetor $c \in \mathbb{R}^l$, uma e apenas uma das seguintes proposições é verdadeira:*

- I. $Ax \leq c$ tem um solução $x \in \mathbb{R}^n$.
- II. $A^T y = 0$, $cy = -1$, $y \geq 0$ tem uma solução $y \in \mathbb{R}^l$.

Teorema 3.3.4. *Suponha que o ponto $x^* \in \Omega = \mathbb{R}^n$ seja um ponto estacionário de (3.1). Então, um ponto da forma $y^* = (z^*, x^*, r, u, w)$ com $z^* = f(x^*)$, viável para o problema (3.2), satisfaz as condições de KKT de (3.2).*

Prova. Começemos reescrevendo o problema 3.2 a fim de facilitar referência:

Minimizar z

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^m r_i w_i = 0 \quad (3.12a)$$

$$\sum_{i=1}^m (1 - r_i) u_i = 0 \quad (3.12b)$$

$$\sum_{i=1}^m r_i = p \quad (3.12c)$$

$$u_i - z + f_i(x) - w_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12d)$$

$$u \geq 0, \quad 0 \leq r \leq e \quad w \geq 0. \quad (3.12e)$$

Devemos provar que existem multiplicadores γ, β, ρ reais, associados às restrições (3.12a), (3.12b) e (3.12c), respectivamente, vetor $\lambda \in \mathbb{R}^m$, associado às restrições (3.12d), e $\theta, \pi, \mu^1, \mu^2 \in \mathbb{R}_+^m$ referentes às restrições de caixa e sinal (3.12e), de forma que satisfaçam as seguintes equações:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \\ (2) \quad & \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f(x^*) = 0 \\ (3) \quad & w_i \gamma - u_i \beta + \rho - \mu_i^1 + \mu_i^2 = 0 \\ (4) \quad & (1 - r_i) \beta + \lambda_i - \theta_i = 0 \\ (5) \quad & r_i \gamma - \lambda_i - \pi_i = 0 \\ (6) \quad & u_i \theta_i = w_i \pi_i = r_i \mu_i^1 = (1 - r_i) \mu_i^2 = 0 \\ & \theta \geq 0, \pi \geq 0, \mu^1 \geq 0, \mu^2 \geq 0 \end{aligned}$$

A viabilidade de y^* implica em específicos valores para suas componentes r, u e w nos conjuntos $L(x^*), E^*(x^*), E^0(x^*), E^1(x^*)$ e $G(x^*)$ da seguinte forma:

- Se $i \in L(x^*)$, então, por (3.12d),

$$u_i = w_i + z^* - f_i(x^*) = u_i + f(x^*) - f_i(x^*) > 0, \quad \text{pois } w_i \geq 0.$$

Por (3.12b) temos que $u_i(1 - r_i) = 0$, e portanto, considerando que $u_i > 0$, temos que $r_i = 1$. Então, por (3.12a) temos que

$$w_i r_i = 0 \Rightarrow w_i = 0.$$

- Se $i \in G(x^*)$, então, por (3.12d),

$$w_i = u_i - z^* + f_i(x^*) = u_i - f(x^*) + f_i(x^*) > 0$$

Por (3.12a) temos que $r_i w_i = 0$, e portanto, considerando que $w_i > 0$, temos que $r_i = 0$. Então, por (3.12b) temos que

$$u_i(1 - r_i) = 0 \Rightarrow u_i = 0.$$

- Se $i \in E(x^*)$, então, por (3.12d),

$$w_i = u_i - z^* + f_i(x^*) = u_i$$

Agora, suponha que $w_i > 0$. Por (3.12a) temos que $r_i w_i = 0$, e portanto, $r_i = 0$. Assim, por (3.12b) segue que $u_i = 0$, o que contradiz o fato de $w_i = u_i$. Portanto, $u_i = w_i = 0$.

Um resumo dos valores das componentes de y^* estão na Tabela 3.1.

	$i \in L(x^*)$	$i \in E^*(x^*)$	$i \in E^1(x^*)$	$i \in E^0(x^*)$	$i \in G(x^*)$
r_i	1	1	$(0, 1)$	0	0
u_i	$(0, \infty)$	0	0	0	0
w_i	0	0	0	0	$(0, \infty)$

Tabela 3.1: Possíveis valores das variáveis.

Seja λ_i^* , $i \in E^1(x^*) \cup E^*(x^*)$ solução do seguinte sistema:

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad \sum_{i \in E^1(x^*) \cup E^*(x^*)} \lambda_i^* = 1, \quad \sum_{i \in E^1(x^*) \cup E^*(x^*)} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0 \quad (3.13)$$

Tal solução λ^* existe, pois, caso contrário, pelo Teorema 3.3.3, existiria um vetor d tal que

$$\nabla f_i(x^*)^T d \leq -1 < 0, \quad \forall i \in E^*(x^*) \cup E^1(x^*)$$

Assim sendo, de acordo com o teorema 3.2.1, essa afirmação contradiria a hipótese de x^* ser ponto estacionário de OVO.

Agora, a partir destes valores de λ^* , definiremos os multiplicadores

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in L(x^*) \cup G(x^*) \cup E_0(x^*) \\ \lambda_i^* & \text{se } i \in E^1(x^*) \cup E^*(x^*) \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\gamma = \max_{i \in E^1(x^*) \cup E^*(x^*)} \frac{\lambda_i}{r_i}$$

$$\beta = 0$$

$$\rho = 0$$

e os demais de acordo com a Tabela 3.2.

Vejamos que com estas definições podemos garantir a existência de um ponto KKT.

	$i \in L(x^*)$	$i \in E^1(x^*)$	$i \in E^*(x^*)$	$i \in E^0(x^*)$	$i \in G(x^*)$
μ_i^1	0	0	0	0	$w_i\gamma \geq 0$
μ_i^2	0	0	0	0	0
θ	0	$\lambda_i \geq 0$	$\lambda_i \geq 0$	0	0
π	γ	$\gamma - \lambda_i \geq 0$	$r_i\gamma - \lambda_i \geq 0$	0	0

Tabela 3.2: Valores dos multiplicadores.

Por (3.13) e (3.14) segue que as equações (1) e (2) são satisfeitas.

Pelas Tabelas 3.2 e 3.1 as equações de complementaridade (6) se cumprem, para todo $i \in L(x^*) \cup E^1(x^*) \cup E^*(x^*) \cup E^0(x^*)$.

Analisemos as outras equações.

(i) Equação (3):

- $i \in L(x^*)$

$$w_i\gamma - u_i\beta + \rho - \mu_i^1 + \mu_i^2 = 0\gamma - u_i(0) + 0 - 0 + 0 = 0$$

- $i \in E(x^*)$

$$w_i\gamma - u_i\beta + \rho - \mu_i^1 + \mu_i^2 = (0)\gamma - 0 + 0 - 0 + 0 = 0$$

- $i \in G(x^*)$

$$w_i\gamma - u_i\beta + \rho - \mu_i^1 + \mu_i^2 = w_i(0) - 0 + 0 - 0 + 0 = 0$$

(ii) Equação (4):

- $i \in L(x^*)$

$$(1 - r_i)\beta + \lambda_i - \theta_i = (0)(0) + (0) - (0) = 0$$

- $i \in E^1(x^*) \cup E^*(x^*)$

$$(1 - r_i)\beta + \lambda_i - \theta_i = (1 - r_i)(0) + \lambda_i - \lambda_i = 0$$

- $i \in E^0(x^*)$

$$(1 - r_i)\beta + \lambda_i - \theta_i = (1 - 0)(0) + \lambda_i - \lambda_i = 0$$

- $i \in G(x^*)$

$$(1 - r_i)\beta + \lambda_i - \theta_i = (1 - 0)(0) + 0 - 0 = 0$$

(iii) Equação (5):

- $i \in L(x^*)$

$$r_i\gamma - \lambda_i - \pi_i = \gamma - 0 - \gamma = 0$$

- $i \in E^1(x^*) \cup E^*(x^*)$

$$r_i\gamma - \lambda_i - \pi_i = r_i\gamma - \lambda_i - (r_i\gamma - \lambda_i) = 0$$

- $i \in E^0(x^*) \cup G(x^*)$

$$r_i\gamma - \lambda_i - \pi_i = (0)\gamma - 0 - 0 = 0$$

Com isso terminamos a prova. $\square$

3.3.2 Particularidades do caso convexo

Uma questão interessante é considerar o caso onde todas as funções f_i , $i \in I = \{1, \dots, m\}$, são convexas e Ω também é um conjunto convexo. Nestas condições gostaríamos de saber se a função OVO de ordem p tem minimizadores locais, para algum valor de $p \in I$. Para esta pergunta temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.5. *Suponha que todas as funções f_i , $i \in I$, sejam convexas, e todas possuem um minimizador global comum, o ponto $x^* \in \Omega$. Então todo minimizador local estrito da função OVO de ordem- p é também um minimizador global, para todo $p \in I$.*

Prova. Defina a função

$$\phi(\lambda) = f(x^* + \lambda d), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geq 0$$

onde d é uma direção arbitrária. Provemos que $\phi(\lambda)$ é não-decrescente. Com efeito, suponha que a conjectura não seja verdadeira, ou seja, $\phi(\cdot)$ é crescente. Então existe um ponto μ tal que, para $t \geq 0$ suficientemente pequeno,

$$\phi(\mu + t) < \phi(\mu)$$

Considere $\delta > 0$ suficientemente pequeno para garantir que as funções que definem $f(x^*)$ sejam as únicas funções que podem definir $f(x)$ na vizinhança δ de $x(\lambda) = x^* + \lambda d$, ou seja, $\{i \mid f_i(x) = f(x), x \in B_\delta(x^*)\} \subset \{i \mid f_i(x^*) = f(x^*)\}$. Com esta vizinhança, pela continuidade e convexidade de ϕ , segue que $\phi(\mu + t) \geq \phi(\mu)$. Portanto, a hipótese é absurda.

Como ϕ é não decrescente em todas as direções d , em particular ela é não decrescente na direção definida por um eventual minimizador local estrito diferente de x^* . Isto contradiz a definição de minimizador local estrito. $\square$

Observe que se considerarmos minimizadores não estritos no teorema 3.3.5, a conjectura não é verdadeira. Isto é facilmente verificado se considerarmos $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1$ e $p = 1$. Todos os pontos tais que $|x| > 1$ são minimizadores locais não-globais de $f(x)$.

A seguir, um exemplo geométrico do resultado do teorema 3.3.5. Considere o problema de minimizar a função OVO de ordem 2 em $\mathbb{R}^2$, dados que as funções envolvidas são:

$$f_1(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2 - 7)^2$$

$$f_2(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2 - 1)^2$$

$$f_3(x_1, x_2) = (-2x_1 - 5x_2 + 7)^2$$

Observe que todas as funções possuem o mesmo minimizador global, o ponto $x^* = (1, 1)$. Na Figura 3.1 temos as curvas de nível da função OVO de ordem 2.

A solução do problema é o mínimo global $x^* = (1, 1)$.

3.4 Restauração e conjunto tangente

A facilidade de restauração de um vetor y a partir de sua componente x , como visto na seção 3.1, nos motiva a usar algoritmos baseados em gradiente projetado no conjunto tangente à (3.2), já que se torna fácil restaurar um ponto neste conjunto. Veremos que existe uma relação direta entre esta análise e as condição de otimalidade de primeira ordem, dada na seção 3.2. Mais ainda, é fácil caracterizar o conjunto tangente às restrições de (3.2) em um ponto y obtido a partir de uma restauração.

Para começar, defina $C(y) = C(x, z, r, u, w)$ como sendo:

Domínio graficado:

$$\Omega = [-10.00, 10.00] \times [-10.00, 10.00]$$

1

Figura 3.1: Curvas de Nível da função OVO, onde $m = 3$ e $p = 2$.

$$C(y) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m r_i w_i \\ \sum_{i=1}^m (1 - r_i) u_i \\ \sum_{i=1}^m r_i - p \\ u_1 - z + f_1(x) - w_1 \\ \vdots \\ u_m - z + f_m(x) - w_m \end{bmatrix}$$

e fixe um ponto viável restaurado $\bar{y} = (\bar{x}, \bar{z}, \bar{r}, \bar{u}, \bar{w})^T$.

Queremos caracterizar o plano Π definido por

$$\Pi(\bar{y}) = \{y \in \Gamma \mid C'(\bar{y})(y - \bar{y}) = 0\}$$

onde C' é o Jacobiano de $C(y)$ e $\Gamma = \{(x, z, r, u, w) \in \mathbb{R}^{n+3m+1} \mid x \in \Omega, 0 \leq r \leq e, u \geq 0, w \geq 0\}$.

Lema 3.4.1. *O conjunto tangente às restrições de (3.2) em um ponto $\bar{y}$ viável obtido por (3.4-3.7) é dado pela seguinte região poliedral:*

$$\Pi(\bar{y}) = \left\{ y \in \Gamma \mid \begin{array}{l} z = f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}) - w_i, \quad u_i = 0 \quad i \in G(\bar{x}) \cup E^0(\bar{x}) \\ z = f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + u_i, \quad w_i = 0 \quad i \in L(\bar{x}) \cup E^1(\bar{x}) \\ z = f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \quad u_i = 0, \quad w_i = 0 \quad i \in E^*(\bar{x}) \\ r^T e = p \\ r_i = 1, \quad i \in L(\bar{x}) \\ r_i = 0, \quad i \in G(\bar{x}) \end{array} \right\}$$

Prova:

As equações do plano tangente $C'(\bar{y})(y - \bar{y}) = 0$ no ponto $\bar{y}$ são:

$$\bar{w}^T(r - \bar{r}) + \bar{r}^T(w - \bar{w}) = 0 \quad (3.15)$$

$$-\bar{u}^T(r - \bar{r}) + (e - \bar{r})^T(u - \bar{u}) = 0 \quad (3.16)$$

$$e^T(r - \bar{r}) = 0 \quad (3.17)$$

$$\nabla f_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}) - z + \bar{z} + u_i - \bar{u}_i - w_i + \bar{w}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.18)$$

$$u \geq 0, \quad w \geq 0, \quad 0 \leq r \leq e \quad (3.19)$$

onde $\bar{z} = f_{i_p}(\bar{x})$.

De (3.18) temos que

$$z = \bar{z} + \nabla f_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + u_i - \bar{u}_i - w_i + \bar{w}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20)$$

De (3.17) segue que $e^T r = p$.

A igualdade (3.15) é válida se e somente se $\bar{w}_i r_i = 0$ e $\bar{r}_i w_i = 0$, que implica em

$$r_i = 0, \quad i \in G(\bar{x}) \quad (3.21)$$

$$w_i = 0, \quad i \in E^1(\bar{x}) \cup E^*(\bar{x}) \cup L(\bar{x}) \quad (3.22)$$

pois $w \geq 0$, $\bar{w} \geq 0$, $r \in [0, 1]$ e $\bar{r} \in [0, 1]$.

Como $\bar{y} \in \Gamma$, segue que

$$\bar{u}^T(e - \bar{r}) = 0 \Rightarrow \bar{u}^T e = \bar{u}^T \bar{r}$$

De (3.16) temos

$$\begin{aligned} -\bar{u}^T(r - \bar{r}) + (e - \bar{r})^T(u - \bar{u}) &= -\bar{u}^T r + \bar{u}^T \bar{r} + (e - \bar{r})^T(u - \bar{u}) \\ &= \bar{u}^T(e - r) + u^T(e - \bar{r}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_i(1 - r_i) = 0, \quad u_i(1 - \bar{r}_i) = 0, \quad \forall i \quad (3.23)$$

$$\Leftrightarrow r_i = 1, i \in L(\bar{x}) \text{ e } u_i = 0, i \in G(\bar{x}) \cup E^*(\bar{x}) \cup E^0(\bar{x}) \quad (3.24)$$

Substituindo (3.21-3.23) em (3.20) temos:

1. Se $i \in G(\bar{x}) \cup E^0(\bar{x})$ então

$$z = f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}) - w_i$$

2. Se $i \in L(\bar{x}) \cup E^1(\bar{x})$ então

$$z = f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + u_i$$

3. Se $i \in E^*(\bar{x})$ então

$$z = f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T(x - \bar{x})$$

o que completa a prova. $\square$

Observe que o fato da componente r poder assumir diferentes valores viáveis, dependendo dos índices s , p e l do ordenamento 3.3, faz com que tenhamos, para cada r , um respectivo plano tangente $\Pi(y)$. Felizmente não teremos infinitos planos tangentes passíveis de análise, pois veremos que a

escolha de r tal que $r_i \in \{0, 1\}$ já nos fornece toda informação necessária para encontrar direções de descida, se existirem. Além disso, a escolha $r_i \in (0, 1)$ pode gerar planos tangentes formados por um único ponto, e portanto inúteis para projeção.

Sendo assim, temos o número exato de possíveis valores para a restauração do vetor r . De acordo com a notação pré-estabelecida para o ordenamento (3.3), a restauração de r limita-se a atribuir valores $r_i = 0$ e $r_i = 1$ para $i \in i_{s+1}, \dots, i_l$ de forma a valer

$$\sum_{i \in \{i_{s+1}, \dots, i_l\}} r_i = p - s$$

já que, de (3.7), $r_i = 1$ para $i = i_1, \dots, i_s$. Logo, o número de restaurações de r a ser analisado, N_r , é a combinação

$$N_r = \binom{l-s}{p-s}$$

Baseado na possibilidade de existência de mais de um vetor r restaurado, definiremos o seguinte conjunto

$$E^+(\bar{x}, r) = \{i \in E(\bar{x}) \mid r_i > 0, (\bar{z}, \bar{x}, r, \bar{u}, \bar{w}) \text{ é viável de (3.2)}\}$$

Lembrando que a função objetivo de OVO* é dada por $g(y) = z$, dado $\bar{y}$ viável de (3.2), estamos interessados em projetar o ponto $y = \bar{y} - \nabla g(\bar{y}) = \bar{y} - e_z$ no plano tangente $\Pi(\bar{y})$, onde $e_z = (1, 0, \dots, 0)$. Denote esta projeção por $\tilde{y} = (\bar{z}, \bar{x}, \bar{r}, \bar{u}, \bar{w}) \in \Pi(\bar{y})$, ou seja,

$$\tilde{y} = P_{\Pi(\bar{y})} \{\bar{y} - e_z\}$$

Portanto $\tilde{y}$ é solução do seguinte problema:

$$\text{Minimizar } \|y - \bar{y} + e_z\| \quad \text{s.a. } y \in \Pi(\bar{y}) \quad (3.25)$$

ou, equivalentemente,

$$\text{Minimizar } h(y) \quad \text{s.a. } y \in \Pi(\bar{y})$$

onde

$$h(y) = (z - \bar{z} + 1)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^m (r_i - \bar{r}_i)^2$$

$$+ \sum_{i=1}^m (u_i - \bar{u}_i)^2 + \sum_{i=1}^m (w_i - \bar{w}_i)^2$$

Da caracterização do conjunto tangente dada no lema 3.4.1, sabemos que

$$\tilde{w}_i = 0 \quad i \in E^+(\bar{x}, r), \quad (3.26)$$

$$\nabla f_i(\bar{x})^T(\tilde{x} - \bar{x}) = -\tilde{u}_i + (\tilde{z} - \bar{z}), \quad i \in E^+(\bar{x}, r). \quad (3.27)$$

Como $\bar{y} \in \Pi(\bar{y})$, $y = \bar{y}$ é um ponto viável para o problema (3.25), com valor da função objetivo $g(y) = 1$.

Mas se qualquer outro ponto viável $y = (z, x, r, u, w)$ para o problema (3.25) satisfizer $z > \bar{z}$, então $z - \bar{z} + 1 > 1$ e, portanto, y não é solução do problema, já que $h(y) > 1$. Logo concluímos que a solução do problema de projeção deve satisfazer $z < \bar{z}$. Com isso, da igualdade (3.27), segue que

$$\begin{aligned} 0 > \tilde{z} - \bar{z} &= \nabla f_i(\bar{x})^T(\tilde{x} - \bar{x}) + \tilde{u}_i \geq \nabla f_i(\bar{x})^T(\tilde{x} - \bar{x}) \\ \Rightarrow \nabla f_i(\bar{x})^T(\tilde{x} - \bar{x}) &< 0, \quad \forall i \in E^+(\bar{x}, r) \end{aligned}$$

Estes cálculos indicam que se não existir uma direção de descida das funções pertencentes a algum conjunto $E^+(\bar{x}, r)$, então a projeção será o próprio ponto em questão. Ou seja, $\bar{x}$ é um ponto estacionário, de acordo com a definição 3.2.3.

Essa direção de descida, se existir, depende da escolha da variável r , que pode assumir infinitos valores se procurarmos pontos viáveis $r \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo $\{r_i \in [0, 1], i \in E(\bar{x}) \text{ e } \sum_{i \in E} r_i = p - s\}$. Felizmente, basta escolher $r_i \in \{0, 1\}$ para encontrar, se existir, tal direção de descida. Para confirmarmos tal afirmação, defina o conjunto

$$E_{\{0,1\}}(\bar{x}, r) = \{i \in E(\bar{x}) \mid r_i = 1, (\bar{z}, \bar{x}, r, \bar{u}, \bar{w}) \text{ é viável de (3.2)}\}.$$

É fácil ver que $E_{\{0,1\}}(\bar{x}, r) \subseteq E^+(\bar{x}, r)$.

Lema 3.4.2. *Se $\exists d \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f_i(\bar{x})^T d < 0, \forall i \in E^+(\bar{x}, r)$ então $\exists E_{\{0,1\}}(\bar{x}, r)$ tal que $\nabla f_i(\bar{x})^T d < 0, \forall i \in E_{\{0,1\}}(\bar{x}, r)$.*

Prova: Basta redefinir o valor das componentes $i \in E^+(\bar{x}, r)$ de forma que $r_i \in \{0, 1\}$ e $\sum_{i \in E^+} r_i = p - s$. O conjunto dos novos índices $i \in E(\bar{x})$ tal que $r_i = 1$ formam o conjunto $E_{\{0,1\}}(\bar{x}, r)$. $\square$

O conjunto $E^+(\bar{x}, r)$ é de fundamental importância na projeção. Como já dissemos, o plano tangente depende da variável r . Por isso, baseado

no lema 3.4.2, basta considerar $r_i \in \{0, 1\}$. Mesmo tomando este cuidado podem existir conjuntos $E^+(\bar{x}, r)$ que possibilitam a obtenção de pontos estacionários indesejáveis, como é o caso do seguinte exemplo.

Exemplo: Seja $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = x^2$, onde queremos minimizar a função OVO de ordem 2, representada por $f(x)$. Evidentemente, $x = 0$ não é um “bom” ponto estacionário, pois não é nem máximo nem mínimo local de $f(x)$. Se a escolha de r é tal que $r_3 = 0$ então teremos uma direção de descida, mas se $r_3 = 1$ então $x = 0$ será um ponto estacionário (veja Figura 3.4).

3.4.1 Explorando o conjunto tangente

Nossa intenção aqui é interpretar o conjunto tangente às restrições de OVO* no espaço das variáveis do problema original OVO.

Para simplificar a notação, quando não houver dúvida quanto ao ponto x usado, denotaremos os conjuntos $E(x)$, $L(x)$, $G(x)$, $E^1(x)$, $E^0(x)$ e $E^*(x)$, por E , L , G , E^1 , E^0 e E^* , respectivamente.

A projeção de $\Pi(\bar{y})$ no eixo (x, z) é dada pelo seguinte conjunto:

$$\pi(\bar{x}) = \left\{ (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \begin{array}{ll} z \geq f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}), & i \in L(\bar{x}) \cup E^1(x) \\ z \leq f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}), & i \in G(\bar{x}) \cup E^0(x) \\ z = f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T (x - \bar{x}), & i \in E^*(\bar{x}) \end{array} \right\}$$

Observando $\pi(\cdot)$, no caso onde há empates é conveniente escolher $E^* = \emptyset$, pois esse seria o primeiro passo para evitar casos de planos tangentes degenerados, ou seja, $\pi(\bar{x}) = (\bar{x}, f_{i_p}(\bar{x}))$. Entretanto essa escolha não é suficiente para evitar degeneração, como veremos nos exemplos a seguir. Este é o motivo pelo qual devemos considerar os N_r possíveis valores da variável $r \in E^+(x, r)$, dado por $N_r = \binom{l-s}{p-s}$, no momento de resolver o problema de projeção (3.25), pois poderíamos estar projetando sobre um único ponto.

Exemplo 1. Considere as funções

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x + 2, \quad f_3(x) = 0.5x + 2$$

e $p = 2$. Analisaremos qual é o conjunto $\pi(\bar{x})$ em determinados pontos viáveis $\bar{x}$.

- $\bar{x} = 2$:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f_1(\bar{x}) \\ L(\bar{x}) &= \{2\} \Rightarrow \bar{r}_2 = 1 \\ G(\bar{x}) &= \{3\} \Rightarrow \bar{r}_3 = 0 \\ E(\bar{x}) &= \{1\} \end{aligned}$$

Como $\bar{r}^T e = p = 2$, segue que $\bar{r}_1 = 1$. Logo $E^1 = \{1\}$ e $E^0 = \emptyset$.

Pelo lema 3.4.1, o poliedro é dado por

$$\pi(\bar{x}) = \left\{ (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} z \geq -x + 2 \\ z \leq 0.5x + 2 \\ z \geq x \end{array} \right\}$$

Figura 3.2: Plano tangente no caso de não haver empate ($\bar{x} = 2$).

Esta região está representada na figura 3.2.

- $\bar{x} = 1$:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x}) \Rightarrow E(\bar{x}) = \{1, 2\} \\ L(\bar{x}) &= \emptyset \\ G(\bar{x}) &= \{3\} \Rightarrow \bar{r}_3 = 0 \\ e^T \bar{r} &= 2 \Rightarrow E^1(\bar{x}) = \{1, 2\}, \quad E^0(\bar{x}) = \emptyset \end{aligned}$$

Neste caso, $\bar{r} = [1, 1, 0]$ e a figura representando $\pi(\bar{x})$ é idêntica à figura 3.2.

- $\bar{x} = 0$:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f_2(\bar{x}) = f_3(\bar{x}) \\ G(\bar{x}) &= \emptyset, \quad E(\bar{x}) = \{2, 3\} \\ L(\bar{x}) &= \{1\} \Rightarrow \bar{r}_1 = 1 \end{aligned}$$

Neste caso há três possibilidades de escolha para $\bar{r}$:

- a. $\bar{r} = [1, 0, 1]$

Neste caso, $E^0(\bar{x}) = \{2\}$, $E^1(\bar{x}) = \{3\}$

O conjunto $\pi(\bar{x})$ é dado por

$$\pi(\bar{x}) = \left\{ (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} z \leq -x + 2 \\ z \geq 0.5x + 2 \\ z \geq x \end{array} \right\}$$

O respectivo conjunto tangente está representado na figura 3.3.

- b. $\bar{r} = [1, 1, 0]$

Neste caso $E^0(\bar{x}) = \{3\}$, $E^1(\bar{x}) = \{2\}$

O conjunto $\pi(\bar{x})$ é dado por

$$L(\bar{x}) = \left\{ (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} z \geq -x + 2 \\ z \leq 0.5x + 2 \\ z \geq x \end{array} \right\}$$

A figura do conjunto tangente é idêntica a figura 3.2.

Figura 3.3: Plano tangente no caso de haver empate ($\bar{x} = 0$), com $\bar{r} = [1, 0, 1]$.

c. $\bar{r} = [1, a, 1 - a]$, $a \in (0, 1)$

Neste caso $E^*(\bar{x}) = \{2, 3\}$, $E^1(\bar{x}) = \emptyset$, $E^0(\bar{x}) = \emptyset$

O conjunto $\pi(\bar{x})$ é dado por

$$\pi(\bar{x}) = \left\{ (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} z = -x + 2 \\ z = 0.5x + 2 \\ z \geq x \end{array} \right\} = \{(0, 2)\}$$

Neste caso, o conjunto $\pi(\bar{x})$ é degenerado.

Os traços em negrito nas figuras representam a função objetivo $f(x)$.

Exemplo 2: Considere as funções

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 2x, \quad f_3(x) = x^2$$

e $p = 2$. Se $\bar{x} = 0$, temos $E^1 = \{1, 2, 3\}$, $L(\bar{x}) = G(\bar{x}) = \emptyset$. Há 3 possibilidades de escolha para $L(\bar{x})$:

- $\bar{r} = [1, 1, 0] \Rightarrow L(0) = \text{região } A \text{ do gráfico 3.4;}$

- $\bar{r} = [1, 0, 1] \Rightarrow L(0) = \text{região } B \text{ do gráfico 3.4;}$
- $\bar{r} = [0, 1, 1] \Rightarrow L(0) = \{(0, 0)\}.$

Figura 3.4: Plano tangente no caso de haver empate ($\bar{x} = 0$).

3.5 Gradiente Projetado Restaurado

Nesta seção sugerimos um algoritmo para resolver OVO* usando uma sequência de passos de projeção e restauração exata do gradiente, com a condição de otimalidade dada por 3.2.1.

Nas seções anteriores caracterizamos o poliedro definido pelo hiperplano tangente as restrições de OVO* mais as restrições de caixa Γ , denotado por $\Pi(\bar{y})$. Após projetarmos o vetor $\bar{y} - e_z$ em $\Pi(\bar{y})$ obtemos $\tilde{y}$, que não necessariamente é viável para o problema OVO*. Neste caso, podemos restaurá-lo usando (3.4)-(3.7), como vemos na Figura 3.5.

Um critério de parada para tal algoritmo poderia ser verificar se a projeção é o mesmo ponto $\bar{y}$, significando que a condição de otimalidade dada em 3.2.1 estaria satisfeita.

Algoritmo (Método do Gradiente Projetado Restaurado)

Encontre um ponto inicial $x^0 \in \Omega$;

Figura 3.5: Passos do gradiente projetado restaurado.

```

for  $k = 0, 1, \dots$ 
  Defina  $d = 0$ .
  Restaure  $x^k$  usando 3.4 - 3.7, obtendo  $(z^k, x^k, u^k, w^k)$ ;
  while não achar um valor de  $r^k$  adequado, faça:
    Projete  $y^k - e_z$  no hiperplano  $\Pi(y^k)$ , obtendo o ponto  $\tilde{y} = (\tilde{z}, \tilde{x}, \tilde{r}, \tilde{u}, \tilde{w})$ ;
    Se  $\tilde{z} \geq z^k$ , então  $y^k$  é solução provisória. Tente outro  $r^k$ , se houver. Senão pare;
    Se  $\tilde{z} < z^k$  então a direção  $d = \tilde{y} - y^k$  é uma direção de descida de  $z$ ;
  fim (while)
  Se  $d = 0$  pare. Retorne  $y^k$  como solução.
  Senão escolha  $y = y^k + \alpha d$  viável para 3.2, tal que  $f_p(x) < f_p(x^k)$ ;
   $x^{k+1} \leftarrow x$ .
end (for)

```

A dificuldade neste tipo de algoritmo reside na tarefa de projetar um vetor em um conjunto como $\Pi(y)$. Observe que a intenção aqui é somente deixar o tema "gradiente projetado" como uma possível linha de estudo para atacar o problema 3.1, seguindo as idéias gerais de Rom e Avriel nos trabalhos [13] e [14].

Capítulo 4

OVO e o Problema de Desigualdade Variacional

Neste capítulo exploramos uma equivalência entre o problema OVO* e um problema de desigualdade variacional, conhecido como VIP. O propósito desta relação é reduzir um problema de desigualdade variacional a um problema de otimização com função objetivo diferenciável e restrições de caixa. Na seção 1 definimos o problema de desigualdade variacional geral. Na seção 2 apresentamos um resultado teórico importante, estabelecendo condições para que pontos estacionários de um PNL sejam soluções do VIP. Na seção 3 veremos que o problema OVO* satisfaz essas condições e, portanto, podemos resolvê-lo através de algoritmos já conhecidos da literatura para PNL.

4.1 Introdução

Problemas de complementaridade passaram a ser alvo de muita pesquisa principalmente após o aparecimento das condições de otimalidade para problemas não lineares de otimização contínua, envolvendo restrições de desigualdade. A princípio, o estudo do problema de complementaridade linear (LCP) derivou das condições de otimalidade de KKT para problemas lineares e quadráticos. Depois foram introduzidos os problemas de complementaridade não linear (NCP), por Cottle [5], e posteriormente os problemas de desigualdade variacional (VIP), por Hartman e Stampacchia [7]. Com o intuito de introduzir o leitor no assunto, definiremos os problemas aqui mencionados, dando ênfase posteriormente ao estudo de um específico VIP, relacionado ao problema OVO.

O caso mais simples de LCP pode ser descrito da seguinte forma: dados

$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q \in \mathbb{R}^n$, encontre vetores w e z de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$w - Mz = q, \quad w \geq 0, \quad z \geq 0, \quad w^T z = 0. \quad (4.1)$$

Denotamos este problema por $LCP(q, M)$. Este problema é dito ser monótono se a matriz M for semidefinida positiva.

Uma primeira generalização de LCP é o chamado LCP misto, ou $MLCP$: dados $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, encontre $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$\begin{aligned} a + Au + Cv &= 0 \\ b + Du + Bv &\geq 0, \quad v \geq 0 \\ v^T(b + Du + Bv) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Este problema é um misto de LCP e um sistema de equações lineares com variáveis livres de sinal.

Agora definiremos duas generalizações não lineares de (4.1). A primeira é conhecida como NCP : dado o mapeamento $F(y) = (F_i(y)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, encontre um vetor $y \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$y \geq 0, \quad F(y) \geq 0, \quad y^T F(y) = 0. \quad (4.3)$$

Se F é função afim $q + My$, então (4.3) torna-se o $LCP(q, M)$.

Uma generalização mais complexa de (4.3) é o problema de desigualdade variacional: dado o mapeamento $F(y) = (F_i(y)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$, encontre um vetor $x^* \in K$ tal que

$$(y - x^*)^T F(x^*) \geq 0, \quad \text{para todo } y \in K. \quad (4.4)$$

denotado por $VIP(K, F)$. Se $K = \{z : z \geq 0\}$, então o vetor x^* que resolve (4.3) também resolve (4.4). Além disso, se K é um poliedro e F é uma função afim, pode-se provar que $VIP(K, F)$ é um particular LCP . Quando K é definido por caixas $\Pi_{i=1}^n [l_i, u_i]$, $-\infty \leq l_i < u_i \leq \infty$, $i = 1, \dots, n$, o problema é conhecido como um problema de complementaridade (não linear) misto, chamado de MCP .

Uma estratégia atrativa para resolver o VIP é usar reformulações baseadas na transformação deste em um problema de otimização global. Como a maioria dos algoritmos usados para resolver problemas de programação não lineares encontram pontos estacionários, é natural perguntar em que condições podemos garantir que um ponto estacionário, solução do PNL, resolve também o VIP . É o que faremos na próxima seção para um específico MCP , que nos será útil na resolução do problema OVO.

4.2 Um resultado para VIP

Defina o conjunto $\mathcal{B}$ por

$$\mathcal{B} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} y_i \geq a_i, \quad i = 1, \dots, s_1 \\ a_i \leq y_i \leq b_i, \quad i = s_1 + 1, \dots, s_2 \\ y_i \leq b_i, \quad i = s_2 + 1, \dots, s_3 \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Considere o VIP definido pelo operador linear $F(y) = My + q$ no conjunto $\mathcal{B}$. Na notação já inserida, este VIP será denotado por $\text{VIP}(My + q, \mathcal{B})$. Dizemos que o VIP é *viável* se existe $y \in \mathcal{B}$ tal que

$$\begin{aligned} [My + q]_i &\geq 0, & \text{se } i = 1, \dots, s_1 \\ [My + q]_i &\leq 0, & \text{se } i = s_2 + 1, \dots, s_3, \\ [My + q]_i &= 0, & \text{se } i = s_3 + 1, \dots, n \end{aligned}$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} m_1^T \\ m_2^T \\ \vdots \\ m_n^T \end{bmatrix}.$$

Defina a função R por:

$$\begin{aligned} R(y, \varrho, \beta) &= \sum_{i=1}^{s_1} (m_i^T y + q_i - \varrho_i)^2 + \sum_{i=s_1+1}^{s_2} (m_i^T y + q_i - \varrho_i + \beta_i)^2 \\ &+ \sum_{i=s_2+1}^{s_3} (m_i^T y + q_i + \beta_i)^2 + \sum_{i=s_3+1}^n (m_i^T y + q_i)^2 \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{s_2} (y_i - a_i)^{\nu_1} \varrho_i^{\nu_1} \right)^{\nu_2} + \left(\sum_{i=s_1+1}^{s_3} (b_i - y_i)^{\nu_1} \beta_i^{\nu_1} \right)^{\nu_2}. \end{aligned}$$

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\text{Min } R(y, \varrho, \beta) \quad \text{s.t. } y \in \mathcal{B}, \quad \varrho \geq 0, \quad \beta \geq 0. \quad (4.6)$$

Relembremos que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é coluna-suficiente (ou “column-sufficient”) (veja [5]) se para todo $u \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$[u]_i [Au]_i \geq 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n$$

temos necessariamente que

$$[u]_i[Au]_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Uma matriz A é linha-suficiente (ou “row-sufficient”) se A^T é coluna-suficiente (ou “column-sufficient”), e A é suficiente (ou “sufficient”) se ela é tanto linha-suficiente como coluna-suficiente.

Toda matriz semidefinida positiva é linha-suficiente, mas o oposto não é verdade (ver [5]). Por outro lado, um operador linear é monótono se, e somente se, sua matriz Jacobiana é semidefinida positiva.

Teorema 4.2.1. *Se M é linha-suficiente, se o problema $VIP(My + q, \mathcal{B})$ é viável, $\nu_1 \geq 1, \nu_2 \geq 1, \nu_1 + \nu_2 > 2$, então todo ponto estacionário de (4.6) é uma solução de $VIP(My + q, \mathcal{B})$.*

Prova. Defina $\xi \in \mathbb{R}^n$, θ_1 e θ_2 tais que

$$\xi_i = \begin{cases} m_i^T y + q_i - \varrho_i & \text{se } i = 1, \dots, s_1 \\ m_i^T y + q_i - \varrho_i + \beta_i & \text{se } i = s_1 + 1, \dots, s_2 \\ m_i^T y + q_i + \beta_i & \text{se } i = s_2 + 1, \dots, s_3 \\ m_i^T y + q_i & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{s_2} (y_i - a_i)^{\nu_1} \varrho_i^{\nu_1},$$

$$\theta_2 = \sum_{i=s_1+1}^{s_3} (b_i - y_i)^{\nu_1} \beta_i^{\nu_1},$$

As condições KKT de (4.6) são as seguintes:

$$\begin{aligned} 2 [M^T \xi]_i + \nu_2 \nu_1 \theta_1^{\nu_2-1} (y_i - a_i)^{\nu_1-1} \varrho_i^{\nu_1} - \mu_i &= 0 & \text{se } i = 1, \dots, s_1 \\ 2 [M^T \xi]_i + \nu_2 \nu_1 \theta_1^{\nu_2-1} (y_i - a_i)^{\nu_1-1} \varrho_i^{\nu_1} \\ - \nu_2 \theta_2^{\nu_2-1} (b_i - y_i)^{\nu_1-1} \beta_i^{\nu_1} \nu_1 - \mu_i + \gamma_i &= 0 & \text{se } i = s_1 + 1, \dots, s_2 \\ 2 [M^T \xi]_i - \nu_2 \nu_1 \theta_2^{\nu_2-1} (b_i - y_i)^{\nu_1-1} \beta_i^{\nu_1} + \gamma_i &= 0 & \text{se } i = s_2 + 1, \dots, s_3 \\ 2 [M^T \xi]_i &= 0 & \text{se } i = s_3 + 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$-2\xi_i + \nu_2 \nu_1 \theta_1^{\nu_2-1} (y_i - a_i)^{\nu_1} \varrho_i^{\nu_1-1} - \lambda_i = 0, \text{ se } i = 1, \dots, s_2 \quad (4.8)$$

$$2\xi_i + \nu_2\nu_1\theta_2^{\nu_2-1}(b_i - y_i)^{\nu_1}\beta_i^{\nu_1-1} - \pi_i = 0, \text{ se } i = s_1 + 1, \dots, s_3 \quad (4.9)$$

$$(y_i - a_i)\mu_i = \varrho_i\lambda_i = 0 \text{ se } i = 1, \dots, s_2 \quad (4.10)$$

$$(b_i - y_i)\gamma_i = \beta_i\pi_i = 0 \text{ se } i = s_1 + 1, \dots, s_3 \quad (4.11)$$

$$y \in B, \varrho \geq 0, \beta \geq 0, \lambda \geq 0, \pi \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0. \quad (4.12)$$

(I) Para $i = 1, \dots, s_1$

Por (4.8) temos:

$$2\xi_i = \nu_2\nu_1\theta_1^{\nu_2-1}(y_i - a_i)^{\nu_1}\varrho_i^{\nu_1-1} - \lambda_i. \quad (4.13)$$

Por (4.7) e (4.10), premultiplicando por $2\xi_i$, obtemos:

$$4\xi_i [M^T\xi]_i + (\nu_2\nu_1)^2\theta_1^{2\nu_2-2}((y_i - a_i)\varrho_i)^{2\nu_1-1} + \lambda_i\mu_i = 0. \quad (4.14)$$

(II) Para $i = s_2 + 1, \dots, s_3$

Por (4.9) temos:

$$2\xi_i = -\nu_2\nu_1\theta_2^{\nu_2-1}(b_i - y_i)^{\nu_1}\beta_i^{\nu_1-1} + \pi_i \quad (4.15)$$

De (4.7) e (4.11), premultiplicando por $2\xi_i$, obtemos:

$$4\xi_i [M^T\xi]_i + (\nu_2\nu_1)^2\theta_2^{2\nu_2-2}((b_i - y_i)\beta_i)^{2\nu_1-1} + \gamma_i\pi_i = 0, \quad (4.16)$$

(III) Para $i = s_1 + 1, \dots, s_2$

Como em (4.8), por (4.9)

$$2\xi_i = -\nu_2\nu_1\theta_2^{\nu_2-1}(b_i - y_i)^{\nu_1}\beta_i^{\nu_1-1} + \pi_i = \nu_2\nu_1\theta_1^{\nu_2-1}(y_i - a_i)^{\nu_1}\varrho_i^{\nu_1-1} - \lambda_i \quad (4.17)$$

Premultiplicando (4.7) por $2\xi_i$, para $i = s_1 + 1, \dots, s_2$, de (4.10) e (4.11) temos:

$$4\xi_i [M^T\xi]_i + (\nu_2\nu_1)^2\theta_1^{2\nu_2-2}((y_i - a_i)\varrho_i)^{2\nu_1-1} + (\nu_1\nu_2)^2\theta_2^{2\nu_2-2}((b_i - y_i)\beta_i)^{2\nu_1-1} + \lambda_i\mu_i + \gamma_i\pi_i = 0, \quad (4.18)$$

(IV) Para $i = s_3, \dots, n$

Analogamente, de (4.7), concluímos que

$$4\xi_i [M^T \xi]_i = 0 \quad (4.19)$$

De (4.14), (4.16), (4.18) e (4.19), levando em conta os sinais das variáveis em (4.12), obtemos:

$$\xi_i [M^T \xi]_i \leq 0 \text{ se } i = 1, \dots, n \quad (4.20)$$

De (4.20), e do fato da matriz ser linha suficiente, temos:

$$\xi_i [M^T \xi]_i = 0 \text{ se } i = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

Lembrando que $\nu_1 \geq 1, \nu_2 \geq 1$ concluímos que

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \quad (4.22)$$

Desde que $\nu_1 + \nu_2 > 2$, as condições de KKT podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2 [M^T \xi]_i - \mu_i &= 0 & \text{se } i = 1, \dots, s_1 \\ 2 [M^T \xi]_i - \mu_i + \gamma_i &= 0 & \text{se } i = s_1 + 1, \dots, s_2 \\ 2 [M^T \xi]_i + \gamma_i &= 0 & \text{se } i = s_2 + 1, \dots, s_3 \\ 2 [M^T \xi]_i &= 0 & \text{se } i = s_3 + 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$-2\xi_i - \lambda_i = 0, \text{ se } i = 1, \dots, s_2 \quad (4.24)$$

$$2\xi_i - \pi_i = 0, \text{ se } i = s_1 + 1, \dots, s_3 \quad (4.25)$$

$$(y_i - a_i)\mu_i = \varrho_i \lambda_i = 0 \text{ se } i = 1, \dots, s_2 \quad (4.26)$$

$$(b_i - y_i)\gamma_i = \beta_i \pi_i = 0 \text{ se } i = s_1 + 1, \dots, s_3 \quad (4.27)$$

$$y \in B, \varrho \geq 0, \beta \geq 0, \lambda \geq 0, \pi \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0. \quad (4.28)$$

Mas (4.23)-(4.28) são as condições de KKT do problema convexo:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{s_1} (m_i^T y + q_i - \varrho_i)^2 + \sum_{i=s_1+1}^{s_2} (m_i^T y + q_i - \varrho_i + \beta_i)^2$$

$$+ \sum_{i=s_2+1}^{s_3} (m_i^T y + q_i + \beta_i)^2 + \sum_{i=s_3+1}^n (m_i^T x + q_i)^2$$

$$\text{s.t. } y \in \mathcal{B}, \quad \varrho \geq 0, \beta \geq 0.$$

Agora, pela viabilidade do problema, concluímos que $\xi = 0$, o que completa a prova. $\square$

O teorema 4.2.1 nos permite resolver um problema de complementaridade misto do tipo $VIP(My + q, \mathcal{B})$, dado que as condições do teorema sejam satisfeitas, com qualquer algoritmo razoável de PNL aplicado ao problema (4.6), já que um ponto estacionário de (4.6) é uma solução de $VIP(My + q, \mathcal{B})$. Na próxima seção aplicaremos este resultado ao problema OVO.

4.3 Extensão dos resultados ao problema OVO

Nesta seção aplicaremos os resultados anteriores ao problema OVO. Em particular veremos que as restrições de OVO* possuem propriedades que garantem as hipóteses do teorema 4.2.1.

Dado $x \in \Omega$, defina $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$ e $T : \mathbb{R}^{m+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+m+1}$ ($T = T(r, u, z)$) por

$$T(x; r, u, z) = \begin{bmatrix} u - ze + F(x) \\ e - r \\ \langle r, e \rangle - (p - 1) \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Defina também $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+m+1}$ por

$$\Gamma = \{(r, u, z) \in \mathbb{R}^{m+m+1} \mid r \geq 0, u \geq 0\}.$$

(Por abuso de notação, escreveremos (r, u, z) ao invés de $(r^T, u^T, z^T)^T$ quando não houver perigo de confusão). Dizemos que (r, u, z) resolve o problema VIP associado ao operador T e ao conjunto Γ ($VIP(x, T, \Gamma)$ de agora em diante) se

$$\langle T(r, u, z), (r' - r, u' - u, z' - z) \rangle \geq 0 \text{ para todo } (r', u', z') \in \Gamma.$$

O conjunto de soluções (r, u, z) do $VIP(x, T, \Gamma)$ será chamado de $SOLVIP(x, T, \Gamma)$.

O próximo teorema 4.3.2 nos mostra que as restrições de OVO* pode ser formuladas como a solução de um $VIP(x, T, \Gamma)$. Antes, porém, segue um teorema já conhecido na literatura (ver [2]).

Teorema 4.3.1. *Sejam $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ i = 1, \dots, p\}$. Então $x^* \in \Omega$ satisfaz*

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

se e somente se

$$f_i(x^*) \geq 0, \quad x_i^* f_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$f_i(x^*) = 0, \quad i = p + 1, \dots, m.$$

Teorema 4.3.2. *Dado $x \in \Omega$, (r, u, z) satisfaz as restrições (2.9) se e somente se (r, u, z) resolve $VIP(x, T, \Gamma)$.*

Prova. A prova segue imediatamente do teorema 4.3.1. $\square$

De acordo com o teorema 4.3.2, o problema OVO* pode ser reformulado como sendo o seguinte MPEC:

$$\text{Minimize } z \quad \text{s.t. } (r, u, z) \in \text{SOLVIP}(x, T, \Gamma), \quad x \in \Omega. \quad (4.30)$$

Observe que o operador T é linear para todo $x \in \Omega$ fixado. Seu Jacobiano $J_T(r, u, z)$ é dado por

$$J_T(r, u, z) = \begin{bmatrix} 0 & I & e \\ -I & 0 & 0 \\ e^T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Um cálculo direto nos mostra que $\langle J_T(r, u, z)(r, u, z), (r, u, z) \rangle = 0$ para todo $(r, u, z) \in \mathbb{R}^{m+m+1}$. Portanto, o operador é monótono e, consequentemente, linha-suficiente, onde $M = J_T(r, u, z)$. O teorema 4.3.2 nos garante que um ponto estacionário solução de (4.6) é solução de $VIP(My + q, \Gamma)$. Isto nos permite obter solução de OVO usando algoritmos para PNL aplicados ao problema (4.30).

Capítulo 5

Método Cauchy Primal para OVO

5.1 Introdução

Relembrando, dadas m funções contínuas $f_1, \dots, f_m$, definidas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e um inteiro $p \in \{1, \dots, m\}$, a função OVO de ordem (p) $f(x)$ é dada por

$$f(x) = f_{i_p(x)}(x),$$

onde

$$f_{i_1(x)}(x) \leq f_{i_2(x)}(x) \leq \dots \leq f_{i_p(x)}(x) \leq \dots \leq f_{i_m(x)}(x).$$

Já vimos que f é contínua. Entretanto, mesmo que as funções f_i sejam diferenciáveis, a função OVO pode não ser diferenciável em alguns pontos.

O problema OVO consiste na minimização da função Order-Value:

$$\text{Minimizar } f(x) \text{ s.a. } x \in \Omega. \quad (5.1)$$

que já vimos ser equivalente a

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } z \\ \text{s.a. } & \begin{cases} \sum_{i=1}^m r_i(u_i - z + f_i(x)) = 0 \\ \sum_{i=1}^m (1 - r_i)u_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m r_i = p \\ u_i - z + f_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ u \geq 0, \quad 0 \leq r \leq e, \\ x \in \Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

A principal desvantagem desta abordagem é o aumento significativo do número de variáveis. Neste capítulo introduziremos um método "primal" para OVO, de forma que somente as variáveis x estão envolvidas. O algoritmo será apresentado na seção 2, onde um teorema de convergência é provado. Na seção 3 descrevemos uma maneira de resolver aproximadamente os subproblemas, satisfazendo as hipóteses teóricas.

5.2 O algoritmo

Suponha que Ω seja um conjunto fechado e convexo, e $f_1, \dots, f_m$ tenham derivadas parciais contínuas em um conjunto aberto contendo Ω . Denote, daqui por diante, $g_j = \nabla f_j$.

Para todo $x, y \in \Omega$, $j = 1, \dots, m$, assumiremos que

$$\|g_j(x)\|_\infty \leq c,$$

e

$$\|g_j(y) - g_j(x)\|_\infty \leq L\|y - x\|_\infty.$$

Consequentemente, para todo $x, y \in \Omega$, $j = 1, \dots, m$,

$$|f_j(y) - f_j(x)| \leq c\|y - x\|_\infty \quad (5.3)$$

e

$$f_j(y) \leq f_j(x) + g_j(x)^T(y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|_\infty^2. \quad (5.4)$$

Dado $\varepsilon \geq 0$, $x \in \Omega$, definimos

$$I_\varepsilon(x) = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid f(x) - \varepsilon \leq f_j(x) \leq f(x) + \varepsilon\}. \quad (5.5)$$

O teorema abaixo nos fornece uma condição necessária de otimalidade para o problema OVO.

Teorema 5.2.1. *Se $x_* \in \Omega$ é um minimizador local de $f(x)$ sujeito a $x \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$, então*

$$\mathcal{D} \equiv \{d \in \mathbb{R}^n \mid x_* + d \in \Omega \text{ e } g_j(x_*)^T d < 0 \ \forall j \in I_\varepsilon(x_*)\} = \emptyset. \quad (5.6)$$

Prova. Suponha, por absurdo, que (5.6) seja falso. Então, existe $d \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{\alpha} > 0$ tais que $x_* + d \in \Omega$ e

$$f_j(x_* + \alpha d) < f_j(x_*) \ \forall \ \alpha \in (0, \bar{\alpha}]. \quad (5.7)$$

para todo $j \in I_\varepsilon(x_*)$.

Em particular, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $f_j(x_*) = f(x_*)$, vale (5.7).

Defina

$$\varepsilon_1 = \min_{j : f_j(x_*) < f(x_*)} \{f(x_*) - f_j(x_*)\} \in (0, \infty],$$

$$\varepsilon_2 = \min_{j : f_j(x_*) > f(x_*)} \{f_j(x_*) - f(x_*)\} \in (0, \infty],$$

Seja $\tilde{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ tal que

$$|f_j(x_* + \alpha d) - f_j(x_*)| < \frac{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}{2}$$

para todo $j = 1, \dots, m$, $\alpha \in (0, \tilde{\alpha}]$.

Portanto, para todo $\alpha \in (0, \tilde{\alpha}]$, um índice j tal que

$$f(x_* + \alpha d) = f_j(x_* + \alpha d)$$

é um dos índices j tal que $f(x_*) = f_j(x_*)$. Em outras palavras, este índice pertence a $I_0(x_*) \subset I_\varepsilon(x_*)$. Mas, por (5.7),

$$f_j(x_* + \alpha d) < f_j(x_*)$$

para todo $\alpha \in (0, \tilde{\alpha}]$. Logo, x_* não é um minimizador local. $\square$

Descrevemos abaixo o algoritmo principal. Ele é chamado de método primal porque somente as variáveis primais x são manipuladas e atualizadas a cada iteração. O algoritmo encontra uma sequência decrescente de valores funcionais usando direções originárias da solução (inexata) de um problema de programação convexa.

Algoritmo 2.1

Seja $x_0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Seja $\theta \in (0, 1)$, $\Delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < \sigma_{\min} < \sigma_{\max} < 1$, $\eta \in (0, 1]$.

Dado $x_k \in \Omega$ os passos da k -ésima iteração são:

Passo 1. (Resolvendo o subproblema)

Defina

$$M_k(d) = \max_{j \in I_\varepsilon(x_k)} g_j(x_k)^T d. \quad (5.8)$$

Considere o subproblema

$$\text{Minimizar}_d M_k(d) \text{ s.a. } x_k + d \in \Omega, \|d\|_\infty \leq \Delta. \quad (5.9)$$

Observe que (5.9) é equivalente ao problema de otimização convexo

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } w \\ & g_j(x_k)^T d \leq w \quad \forall j \in I_\varepsilon(x_k), \\ & x_k + d \in \Omega, \quad \|d\|_\infty \leq \Delta. \end{aligned}$$

Seja $\bar{d}_k$ a solução de (5.9). (Veremos depois que não precisaremos calculá-lo.) Seja d_k tal que $x_k + d_k \in \Omega$, $\|d_k\| \leq \Delta$ e

$$M_k(d_k) \leq \eta M_k(\bar{d}_k). \quad (5.10)$$

Se $M_k(d_k) = 0$ pare.

Passo 2. (Calculo do tamanho de passo)

Seja $\alpha \leftarrow 1$.

Se

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \theta \alpha M_k(d_k) \quad (5.11)$$

defina $\alpha_k = \alpha$, $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ e termine a iteração. Senão, escolha $\alpha_{new} \in [\sigma_{min}\alpha, \sigma_{max}\alpha]$, defina $\alpha \leftarrow \alpha_{new}$ e repita o teste (5.11).

O lema a seguir é um lema técnico que será útil na prova de convergencia.

Lema 5.2.2. *Suponha que $a_1, \dots, a_r$ são números reais tais que*

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_q \leq \dots \leq a_r.$$

Suponha que $\beta > 0$ e $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R}$ satisfaçam

$$b_j \leq a_j - \beta \quad \forall j = 1, \dots, r$$

e

$$b_{i_1} \leq b_{i_2} \leq \dots \leq b_{i_q} \leq \dots \leq b_{i_r}.$$

Então,

$$b_{i_q} \leq a_q - \beta.$$

Prova. Claramente,

$$b_{i_q} \leq a_{i_q} - \beta, \quad b_{i_q} \leq b_{i_{q+1}} \leq a_{i_{q+1}} - \beta, \dots, b_{i_q} \leq b_{i_r} \leq a_{i_r} - \beta.$$

Portanto,

$$b_{i_q} \leq \min\{a_{i_{q+1}}, \dots, a_{i_r}\} - \beta.$$

Mas, como $a_1 \leq \dots \leq a_q \leq \dots \leq a_r$, segue que

$$\min\{a_{i_{q+1}}, \dots, a_{i_r}\} \leq a_q.$$

Logo,

$$b_{i_q} \leq a_q - \beta$$

como queríamos provar. $\square$

No próximo teorema estabeleceremos que, se o iterado x_k não for ε -ótimo, então x_{k+1} está bem definido e α_k é limitado, e diferente de zero.

Teorema 5.2.3. *Suponha que $x_k \in \Omega$ é o k -ésimo iterado do Algoritmo 2.1. Então:*

- (a) *O algoritmo pára em x_k se, e somente se, x_k for ε -ótimo.*
- (b) *Se o algoritmo não parar em x_k , então a iteração está bem definida*

e

$$\alpha_k \geq \min\left\{\frac{2\sigma_{\min}\gamma_k(1-\theta)}{L\Delta^2}, \frac{\varepsilon\sigma_{\min}}{3c\Delta}\right\}, \quad (5.12)$$

onde

$$\gamma_k = -\max_{j \in I_\varepsilon(x_k)} \{g_j(x_k)^T d_k\} > 0. \quad (5.13)$$

Prova. Se o algoritmo parar em x_k , então $M_k(d_k) = 0$. Portanto, por (5.10), $M_k(\bar{d}_k) = 0$. Com isso, $M_k(d) \geq 0$ para todo $d \in \mathcal{D}$ tal que $\|d\|_\infty \leq \Delta$. Assim, $M_k(d) \geq 0$ para todo $d \in \mathcal{D}$. Isto implica que x_k é ε -ótimo.

Reciprocamente, se x_k for ε -ótimo, é necessário que $M_k(\bar{d}_k) = 0$, e então $M_k(d_k) = 0$ e o algoritmo pára em x_k .

Se o algoritmo não parar em x_k , então $M_k(d_k) < 0$. Logo,

$$-\gamma_k = \max_{j \in I_\varepsilon(x_k)} \{g_j(x_k)^T d_k\} < 0.$$

Suponha que

$$\alpha \in [0, \frac{2\gamma_k(1-\theta)}{L\Delta^2}].$$

Então,

$$\frac{L\alpha\Delta^2}{2} \leq (1-\theta)\gamma_k.$$

Assim,

$$\frac{L\alpha\Delta^2}{2} \leq (\theta-1)g_j(x_k)^T d_k \quad \forall j \in I_\varepsilon(x_k)$$

e com isso

$$g_j(x_k)^T d_k + \frac{L\alpha\Delta^2}{2} \leq \theta g_j(x_k)^T d_k \quad \forall j \in I_\varepsilon(x_k).$$

Portanto, como $\|\alpha d_k\|_\infty \leq \Delta$,

$$\alpha g_j(x_k)^T d_k + \frac{L\alpha^2 \|d_k\|_\infty^2}{2} \leq \alpha \theta g_j(x_k)^T d_k \quad \forall j \in I_\varepsilon(x_k).$$

E assim segue que

$$f_j(x_k) + g_j(x_k)^T (\alpha d_k) + \frac{L}{2} \|\alpha d_k\|_\infty^2 \leq f_j(x_k) + \alpha \theta g_j(x_k)^T d_k \quad \forall j \in I_\varepsilon(x_k).$$

Logo, por (5.4)

$$f_j(x_k + \alpha d_k) \leq f_j(x_k) + \alpha \theta g_j(x_k)^T d_k \quad \forall j \in I_\varepsilon(x_k).$$

Com isso provamos que, se $\alpha \in [0, 2\gamma_k(1 - \theta)/(L\Delta^2)]$,

$$f_j(x_k + \alpha d_k) \leq f_j(x_k) + \alpha \theta M_k(d_k) \quad \forall j \in I_\varepsilon(x_k). \quad (5.14)$$

Por outro lado, se $\alpha \in [0, \varepsilon/(3c\Delta)]$, segue que $\alpha c\Delta \leq \varepsilon/3$, e assim $\alpha c\|d_k\|_\infty \leq \varepsilon/3$, e $c\|\alpha d_k\|_\infty \leq \varepsilon/3$, logo, by (5.3),

$$|f_j(x_k + \alpha d_k) - f_j(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (5.15)$$

Logo, para todo $\ell = 1, \dots, p$,

$$f_{i_\ell(x_k)}(x_k + \alpha d_k) \leq f_{i_\ell(x_k)}(x_k) + \frac{\varepsilon}{3} \leq f(x_k) + \frac{\varepsilon}{3}$$

e, para todo $\ell = p, \dots, m$,

$$f_{i_\ell(x_k)}(x_k + \alpha d_k) \geq f_{i_\ell(x_k)}(x_k) - \frac{\varepsilon}{3} \geq f(x_k) - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Isto significa que ao menos p elementos do conjunto

$$\{f_1(x_k + \alpha d_k), \dots, f_m(x_k + \alpha d_k)\}$$

são menores ou iguais a $f(x_k) + \varepsilon/3$ e que ao menos $m - p + 1$ elementos daquele conjunto são maiores ou iguais a $f(x_k) - \varepsilon/3$.

Portanto,

$$f(x_k + \alpha d_k) = f_{i_p(x_k + \alpha d_k)}(x_k + \alpha d_k) \in [f(x_k) - \frac{\varepsilon}{3}, f(x_k) + \frac{\varepsilon}{3}] \quad (5.16)$$

Suponha que $j \notin I_\varepsilon(x_k)$. Então, ou $f_j(x_k) < f(x_k) - \varepsilon$ ou $f_j(x_k) > f(x_k) + \varepsilon$. No primeiro caso, de (5.15) segue que

$$f_j(x_k + \alpha d_k) < f(x_k) - \frac{2}{3}\varepsilon,$$

e assim, por (5.16),

$$f_j(x_k + \alpha d_k) < f(x_k + \alpha d_k).$$

Analogamente, se $f_j(x_k) > f(x_k) + \varepsilon$, então

$$f_j(x_k + \alpha d_k) > f(x_k + \alpha d_k).$$

Portanto,

$$f(x_k + \alpha d_k) = f_j(x_k + \alpha d_k) \text{ for some } j \in I_\varepsilon(x_k).$$

Escreva

$$I_\varepsilon(x_k) = \{j_1, \dots, j_\nu\} = \{j'_1, \dots, j'_\nu\},$$

onde

$$f_{j_1}(x_k) \leq \dots \leq f_{j_\nu}(x_k)$$

e

$$f_{j'_1}(x_k + \alpha d_k) \leq \dots \leq f_{j'_\nu}(x_k + \alpha d_k).$$

Claramente, existe $q \in \{1, \dots, \nu\}$ tal que

$$i_p(x_k) = j_q.$$

Agora, os índices $j \notin I_\varepsilon(x_k)$ tais que $f_j(x_k) < f(x_k)$ são os mesmos índices $j \notin I_\varepsilon(x_k)$ tais que $f_j(x_k + \alpha d_k) < f(x_k)$ e, mais ainda, os índices $j \notin I_\varepsilon(x_k)$ tais que $f_j(x_k) > f(x_k)$ são os mesmos índices $j \notin I_\varepsilon(x_k)$ tais que $f_j(x_k + \alpha d_k) > f(x_k)$. Assim,

$$i_p(x_k + \alpha d_k) = j'_q.$$

Então, de (5.14) e do Lemma 5.2.2, segue que, quando

$$\alpha \in [0, \min\{\frac{2\gamma_k(1-\theta)}{L\Delta^2}, \frac{\varepsilon}{3c\Delta}\}] \quad (5.17)$$

temos:

$$f_{j'_q}(x_k + \alpha d_k) \leq f_{j_q}(x_k) + \alpha\theta M_k(d_k).$$

Portanto,

$$f_{i_p(x_k + \alpha d_k)}(x_k + \alpha d_k) \leq f_{i_p(x_k)}(x_k) + \alpha \theta M_k(d_k).$$

Assim,

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \alpha \theta M_k(d_k).$$

Portanto, quando (5.17) valer, o teste (5.11) também deve valer. Isto significa que o valor de α que não satisfaz (5.11) não pode ser menor que $\min\{2\gamma_k(1 - \theta)/(L\Delta^2), \varepsilon/(3c\Delta)\}$. Assim, o valor de α aceitável deve satisfazer:

$$\alpha_k \geq \min\left\{\frac{2\sigma_{\min}\gamma_k(1 - \theta)}{L\Delta^2}, \frac{\varepsilon\sigma_{\min}}{3c\Delta}\right\},$$

como queríamos provar. $\square$

O principal resultado de convergência é dado pelo teorema 5.2.5. Antes disso, precisamos provar um simples lema preparatório.

Lema 5.2.4. *Se $\{x_k\}$ é uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 2.1, então ou*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = -\infty \quad (5.18)$$

ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k(d_k) = 0. \quad (5.19)$$

Prova. Se (5.18) não vale, então, por (5.11), temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k M_k(d_k) = 0.$$

Pelo Teorema 5.2.3, isto implica que vale (5.19). $\square$

Teorema 5.2.5. *Suponha que $x_* \in \Omega$ é um ponto limite de uma sequência gerada pelo Algoritmo 2.1. Então x_* é ε -ótimo.*

Prova. Pelo fato de $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ e x_* ser um ponto limite de $\{x_k\}$ segue que $f(x_k) \rightarrow f(x_*)$. Portanto, pelo lema 5.2.4, (5.19) é válido. Seja K uma sequência infinita de índices tal que

$$\lim_{k \in K} x_k = x_*.$$

5.3 Calculando uma solução aproximada para o subproblema 59

Se x_* não é ε -ótima, então existe $\gamma > 0$ e $d \in \mathbb{R}^n$ tais que $x_* + d \in \Omega$ e

$$g_j(x_*)^T d \leq -\gamma \quad \forall j \in I_\varepsilon(x_*). \quad (5.20)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\|d\| \leq \Delta/2$. Por continuidade, para k grande o suficiente, $k \in K$, definindo

$$\hat{d}_k = d + x_* - x_k,$$

temos que $\|\hat{d}_k\|_\infty \leq \Delta$, $x_k + \hat{d}_k \in \Omega$ e

$$\lim_{k \in K} \hat{d}_k = d \quad (5.21)$$

De (5.19), segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k(\bar{d}_k) = 0$. Assim, $\liminf_{k \rightarrow \infty} M_k(\hat{d}_k) \geq 0$. Para todo $k \in K$ existe $j \in I_\varepsilon(x_k)$ tal que $g_j(x_k)^T \hat{d}_k = M_k(\hat{d}_k)$. Pelo fato de $I_\varepsilon(x_k)$ ser finita, existe j tal que $g_j(x_k)^T \hat{d}_k = M_k(\hat{d}_k)$ infinitas vezes. Portanto, para aquele particular índice j ,

$$\liminf_{k \in K} g_j(x_k)^T \hat{d}_k = 0.$$

Logo, tomando os limites,

$$g_j(x_*)^T d = 0. \quad (5.22)$$

Mas, para infinitos índices, desde que $j \in I_\varepsilon(x_k)$,

$$f(x_k) - \varepsilon \leq f_j(x_k) \leq f(x_k) + \varepsilon,$$

assim, tomando os limites,

$$f(x_*) - \varepsilon \leq f_j(x_*) \leq f(x_*) + \varepsilon,$$

e então $j \in I_\varepsilon(x_*)$.

Portanto, (5.22) contradiz (5.20). $\square$

5.3 Calculando uma solução aproximada para o subproblema

Se n é grande ou $I_\varepsilon(x_k)$ contém muitos elementos, achar a solução exata de (5.9) pode ser bastante caro. Nestes casos, uma solução aproximada d_k que satisfaz (5.10) pode ser encontrada seguindo o procedimento descrito abaixo. Para simplificar a descrição assumiremos que $\text{Int}(\Omega)$, o interior do

5.3 Calculando uma solução aproximada para o subproblema 60

conjunto convexo Ω , é não vazio. Escolha $\eta' \in (\eta, 1)$. Os sucessivos iterados x_k pertencerão a $\text{Int}(\Omega)$. Assumiremos que exista um procedimento que calcule uma sequência $\{s_\nu\}$, onde $s_\nu \in \mathbb{R}^n$, tal que $s_\nu \rightarrow \bar{d}_k$ e uma sequência de limitantes c_ν tais que $c_\nu \rightarrow M_k(\bar{d}_k)$ e

$$c_\nu \leq M_k(\bar{d}_k)$$

para todo $\nu = 0, 1, 2, \dots$

Defina, para todo $\nu = 0, 1, 2, \dots$,

$$\lambda_\nu = \min\{1, \max\{\lambda \geq 0 \mid x_k + \lambda s_\nu \in \Omega, \|\lambda s_\nu\|_\infty \leq \Delta\}\}.$$

Como Ω é convexo e x_k é interior, segue que

$$\lambda_\nu \rightarrow 1,$$

assim,

$$x_k + \lambda_\nu s_\nu \rightarrow x_k + \bar{d}_k$$

e

$$M_k(\lambda_\nu s_\nu) \rightarrow M_k(\bar{d}_k).$$

Portanto, tomando ν grande o suficiente, obtemos λ_ν tal que

$$M_k(\lambda_\nu s_\nu) \leq \eta' c_\nu \leq \eta' M_k(\bar{d}_k). \quad (5.23)$$

Então,

$$M_k\left(\frac{\eta}{\eta'} \lambda_\nu s_\nu\right) \leq \eta M_k(\bar{d}_k).$$

Isto implica que, tomando

$$d_k = \frac{\eta}{\eta'} \lambda_\nu s_\nu,$$

a condição (5.10) é satisfeita, $x_k + \alpha d_k$ continua interior para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Assim, x_{k+1} é interior e o processo pode ser repetido na próxima iteração.

Capítulo 6

Experimentos Numéricos

Neste capítulo nosso intuito é utilizar a reformulação do problema OVO para resolver um problema de ajustamento de parâmetros linear. Faremos uma comparação das abordagens do problema, a saber:

Abordagem MPEC uso de algoritmos com convergência AGP, como sugerido no capítulo 2. Para isso usaremos MILONGA, que é um método baseado em lagrangeano aumentado que resolve subproblemas com restrições em caixa usando estratégia global, descrita em [4], e direções de Newton dentro das faces.

Abordagem Cauchy-Primal uso do algoritmo primal de Cauchy, desenvolvido no capítulo 5.

PROBLEMA: Queremos ajustar o modelo

$$y(t, x) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3$$

a um conjunto de dados (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$. Estes dados foram gerados a partir da solução pré-fixada

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (0, 2, -3, 1),$$

fazendo

$$w_i = y(t_i, x^*),$$

$$t_i = -1 + 0.1i, \quad i = 0, \dots, m, \quad m = 46,$$

$$y_i = 10 \quad \text{if } i = 7, \dots, 16,$$

$$y_i = w_i + r_i, \quad \text{caso contrário,}$$

onde r_i é um número gerado aleatoriamente entre -0.01 e 0.01 . Portanto, $y_7, \dots, y_{16}$ simulam observações com erros, ou outliers. Na Tabela 6.1 temos os dados (t_i, y_i) .

i	t_i	y_i	i	t_i	y_i	i	t_i	y_i
1	-1.0000	-5.8000	17	0.6000	0.5360	33	2.2000	0.3280
2	-0.9000	-5.1590	18	0.7000	0.4730	34	2.3000	1.0970
3	-0.8000	-4.2320	19	0.8000	-0.0080	35	2.4000	1.1440
4	-0.7000	-3.4130	20	0.9000	0.2990	36	2.5000	1.6750
5	-0.6000	-2.6960	21	1.0000	0.2000	37	2.6000	2.2960
6	-0.5000	-1.6750	22	1.1000	-0.2990	38	2.7000	3.4130
7	-0.4000	10.0000	23	1.2000	0.0080	39	2.8000	4.2320
8	-0.3000	10.0000	24	1.3000	-0.0730	40	2.9000	5.1590
9	-0.2000	10.0000	25	1.4000	-0.5360	41	3.0000	6.2000
10	-0.1000	10.0000	26	1.5000	-0.5750	42	3.1000	6.9610
11	0	10.0000	27	1.6000	-0.5840	43	3.2000	8.6480
12	0.1000	10.0000	28	1.7000	-0.5570	44	3.3000	9.6670
13	0.2000	10.0000	29	1.8000	-0.4880	45	3.4000	11.2240
14	0.3000	10.0000	30	1.9000	0.0290	46	3.5000	12.9250
15	0.4000	10.0000	31	2.0000	-0.2000			
16	0.5000	10.0000	32	2.1000	0.0310			

Tabela 6.1: Dados para o ajustamento linear com 4 parâmetros.

A seguir descrevemos o resultado de cada método usado, destacando os coeficientes fixados nos algoritmos.

Abordagem MPEC com Milonga O problema a ser resolvido é dado por

$$\text{OVO}^* \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } z \\ \text{Sujeito a} \\ \sum_{i=1}^m r_i w_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m (1 - r_i) u_i = 0 \\ \sum_{i=1}^m r_i = p \\ u_i - z + f_i(x) - w_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ u \geq 0, \quad 0 \leq r \leq e \quad w \geq 0, x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

6 Experimentos Numéricos

onde

$$m = 46$$

$$f_i(x) = (x_1 + x_2 t_i + x_3 t_i^2 + x_4 t_i^3 - y_i)^2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Foi usado o ponto inicial $x_0 = (0, 0, 0, 0)$, para todos os valores de p utilizados. As soluções obtidas estão na tabela 6.2.

p	x_1	x_2	x_3	x_4	f_{obj}
20	0.6352	1.5879	-3.1312	1.0552	2.3315D-02
22	0.1665	2.1209	-3.3314	1.0975	2.3595D-02
24	0.3569	2.0948	-3.3967	1.0968	3.1558D-02
26	0.2769	2.1731	-3.4527	1.1278	3.3293D-02
28	1.5487D-04	2.0001	-3.0002	1.0000	3.9994D-02
30	5.1636D-05	2.0000	-3.0001	1.0000	3.9994D-02
32	7.2887	0.8514	-7.0558	2.1486	9.1984
34	8.9409D-06	2.0000	-3.0000	1.0000	3.9998D-02
36	2.1265D-05	2.0001	-3.0001	1.0000	3.0204D-05
38	5.8950	1.8337	-7.9721	2.3878	16.8511
40	5.7799	2.0595	-7.0716	2.1214	19.2898

Tabela 6.2: Solução do Milonga para o ajuste linear de 4 parâmetros.

Os resultados são coerentes com o que se esperava obter, pois a solução real do problema, $x^*(0, 2, -3, 1)$ foi alcançada para valores do parâmetro p próximos do seu valor ideal $p = 36$, já que sabemos de antemão o número de dados corrompidos da amostra deste exemplo. Para $p = 32$ o algoritmo nos forneceu um minimizador local, e para $p > 36$ os dados corrompidos levaram a respostas completamente erradas. Isto se deve ao fato de a formulação OVO com $p > 36$ contabilizar estes dados ruins como se fossem dados corretos da amostra.

Método Cauchy Primal Utilizamos o Algoritmo 2.1, com os parâmetros fixados

$$\Delta = 1.0, \quad \theta = 0.5, \quad \sigma_{min} = 0.1, \quad \sigma_{max} = 0.9, \quad \eta = 1.0, \quad \varepsilon = 0.001.$$

e os limitantes

$$-10 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

As soluções obtidas pelo algoritmo para diferentes valores de p são mostradas na Tabela 6.3, onde p define a função ordem- p , $n.iter$ é o

número de iterações, f_{obj} é o valor da função objetivo. Observe que o "correto" p deveria ser 36, porque geramos 10 outliers.

p	x_1	x_2	x_3	x_4	f_{obj}	$n.iter$
20	-0.0060	1.9892	-2.9568	0.9748	0.0404	33
21	-0.1231	1.2809	-2.4353	0.8965	0.0369	47
22	0.3957	2.3052	-3.6787	1.1742	0.0297	85
23	0.1116	1.8346	-2.9223	0.9883	0.0401	49
24	-0.0081	2.0035	-2.9897	0.9943	0.0405	41
25	0.1033	1.8469	-2.9291	0.9896	0.0402	67
26	0.0261	1.9557	-2.9762	0.9958	0.0403	70
27	9.0443	-7.4778	-1.4899	1.2465	2.9491	78
28	-0.0190	2.0336	-3.0177	1.0028	0.0405	49
29	0.0015	1.9917	-2.9939	0.9989	0.0407	52
30	0.0096	1.9841	-2.9919	0.9987	0.0403	68
31	0.0030	2.0024	-3.0044	1.0011	0.0407	57
32	0.0001	2.0030	-3.0010	0.9999	0.0408	66
33	0.0021	2.0007	-3.0024	1.0007	0.0407	49
34	7.8217	5.8390	-10.0000	2.4904	14.1827	158
35	-0.0003	2.0004	-2.9997	0.9999	0.0403	56
36	0.0000	2.0003	-3.0002	1.0000	0.0403	67
37	7.3236	1.6767	-8.3264	2.4949	13.0175	187
38	9.6125	-9.6561	-0.5977	1.1134	10.9439	138
39	10.0000	-6.4565	-3.4642	1.6757	15.0919	130
40	6.2406	2.2166	-8.3576	2.4577	16.5412	295
41	6.2025	2.5359	-8.6241	2.5104	17.1385	283
42	6.3137	1.7981	-8.3196	2.4870	19.3482	207
43	7.7660	2.3983	-9.6980	2.8103	24.2539	152

Tabela 6.3: Solução OVO-Cauchy para o ajustamento de 4 parametros.

Os resultados se mostraram coerentes e satisfatórios. Como era esperado, para $p > 36$ a solução dada pelo algoritmo está distante da solução x_* , com valor da função objetivo (OVO function) muito grande. Para $p = 27$ e $p = 34$ a solução obtida não foi um minimizador global da função OVO. Isto não é surpreendente, já que o algoritmo oferece somente pontos estacionários como solução, e portanto podendo gerar pontos críticos locais em alguns casos. Para todos os outros valores testados de p a função objetivo esteve abaixo do valor 0.05 e

---

a solução obtida esteve próxima de x_* . O exemplo sugere que no caso de problemas reais, onde não se conhece o número de dados corrompidos, ou outliers, diferentes valores de p deveriam ser testados para diferentes pontos iniciais e aceitar uma solução levando em conta os valores de p da função OVO.

Capítulo 7

Conclusões

Introduzimos o problema de otimização OVO, um problema contínuo, não diferenciável e, em geral, não convexo. O problema se aplica diretamente a modelos de ajustamento de parâmetros e, promissoramente, a tomada de decisão. A tentativa de se obter um algoritmo primal, cuja implementação baseia-se na solução (aproximada) de subproblemas de Programação Linear, foi bem sucedida, gerando resultados computacionais satisfatórios nos problemas propostos.

O algoritmo OVO deu indícios de ser uma boa ferramenta para lidar com problemas de ajustamento robusto de parâmetros. Muitos esquemas mais eficientes de regressão, menos sensíveis a dados com erros do que algoritmos baseados em quadrados mínimos, foram introduzidos na literatura. Veja, por exemplo, [8], [9], [10] e referências da área. Uma abordagem usual é ponderar as diferenças dos quadrados por meio de um filtro que penalize "outliers". Esta metodologia requer algum conhecimento prévio sobre os dados que porventura devessem ser penalizados. Dessa forma o algoritmo OVO poderia ter um papel de filtro universal, no sentido de que o usuário não necessita saber de antemão qualquer informação qualitativa sobre os outliers, mas somente informar ao algoritmo uma estimativa de sua cardinalidade na amostra original. A calibração do modelo dependeria somente de um único parâmetro unidimensional, sendo a penalização dos outliers feita internamente por OVO. Por outro lado, a abordagem OVO pode também ser usada para detectar outliers, deixando o procedimento de estimação para outro algoritmo, após ter detectado dados discrepantes.

Finalmente, o problema OVO parece ser um problema de otimização que generaliza a otimização com hipóteses de diferenciabilidade. Um campo promissor de pesquisa é adaptar algoritmos clássicos de otimização (veja, por

---

exemplo, [6]) para o problema OVO. O algoritmo apresentado no capítulo 5 é, neste sentido, uma generalização do metodo steepest descent, que, como é bem sabido, é o mais clássico dos algoritmos para otimização.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Andreani, C. Dunder e J. M. Martínez, *Order-Value Optimization: Formulation and Solution by means of a Primal Cauchy Method*, 2002.
- [2] R. Andreani, J. M. Martínez e B. F. Svaiter. On the regularization of mixed complementarity problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization* 21, pp. 589-600 (2000).
- [3] R. Andreani e J. M. Martínez [2001], On the solution of bounded and unbounded mixed complementarity problems, to appear in *Optimization*.
- [4] E. G. Birgin, J. M. Martínez, *Large-scale active-set box-constrained optimization method with spectral projected gradients*, *Computational Optimization and Applications*. 23, pp. 101-125 (2002).
- [5] R. W. Cottle, J-S. Pang e R. E. Stone [1992], *The linear complementarity problem*, Academic Press, Boston.
- [6] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, New York: Wiley, 1988.
- [7] P. Hartman e G. Stampacchia. *On some nonlinear elliptic differential functional equations*, *Acta Math.* 115, 153-188 (1966).
- [8] P. W. Holland e R. E. Welsch, *Robust regression using iteratively reweighted least-squares*, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, A6, 813-827, 1977.
- [9] M. A. Howe e B. Rustem. A robust hedging algorithm. *Journal of Economic Dynamics and Control* 21 (1997) 1065-1092.
- [10] P. J. Huber, *Robust Statistics*, New York: Wiley, 1981.

-
- [11] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, SIAMIS Classics in Applied Mathematics, SIAM Philadelphia, 1994.
  - [12] J. M. Martínez e B. F. Svaiter, *A Practical optimality condition without constraint qualifications for nonlinear programming*.
  - [13] M. Rom e M. Avriel, *Properties of the Sequential Gradient-Restoration Algorithm (SGRA), Part 1: Introduction and Comparison with Related Methods*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 62, pp. 77-98, 1989.
  - [14] M. Rom e M. Avriel, *Properties of the Sequential Gradient-Restoration Algorithm (SGRA), Part 2: Convergence Analysis*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 62, pp. 99-126, 1989.
-